

UNIVERSITE DE LIEGE  
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES  
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

LECONS SUR LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

J.F. DEBONGNIE

*Cours ENIM, Rabat, octobre 1984*  
*Rapport LMF/D9*

Leçons sur la mécanique  
des milieux continus

par

J.F. DEBONGNIE

I.C.M.E. (Mécanique) Liège 1973

Dr. en Sciences Appliquées

OCTOBRE 1984

# I - CINEMATIQUE DES MILIEUX CONTINUS

## 1. DESCRIPTION LAGRANGIENNE

Un milieu continu est composé d'un ensemble de particules susceptibles de se mouvoir. Pour décrire leur mouvement, une première approche consiste à identifier chacune d'elles, et à observer son mouvement au cours du temps. C'est la description lagrangienne. Une manière simple de reconnaître les particules consiste à donner leur position dans une configuration de référence, par exemple, la configuration du continuum en  $t = 0$ . Soient  $a_i$  les coordonnées de référence ou coordonnées lagrangiennes d'une particule. Durant le mouvement, cette particule prend diverses positions, selon une loi

$$x_i = X_i(a_j, t) \quad (1)$$

La loi  $t \mapsto X_i(a_j, t)$  est la trajectoire de la particule, paramétrisée par le temps. La vitesse de la particule est définie par

$$v_i(a_j, t) = \frac{\partial X_i(a_j, t)}{\partial t},$$

ce que l'on note encore

$$v_i = \frac{Dx_i}{Dt}, \quad (2)$$

en réservant la notation  $\frac{D}{Dt}$  aux dérivées par rapport au temps à  $a_i$  constants, c'est-à-dire en suivant la particule.

## 2. DESCRIPTION EULERIENNE

En mécanique des fluides, on s'intéresse bien souvent à la description du champ des vitesses dans un volume de l'espace déterminé. On considère par exemple (fig. 1) une portion de tuyauterie dans laquelle on désire connaître les vitesses au temps  $t$ . Bien entendu, à chaque instant, du fluide entre par une des extrémités de la tuyauterie et il en sort par l'autre extrémité. En d'autres termes, les particules considérées

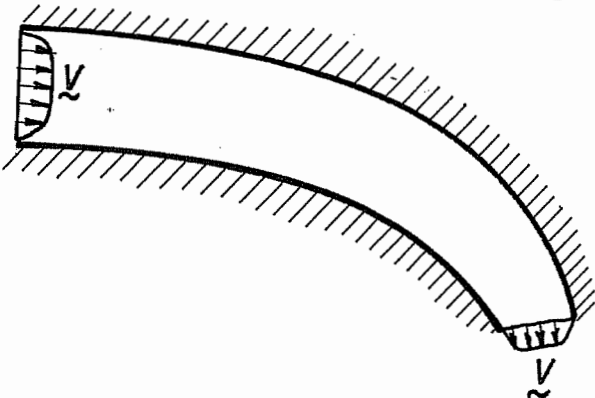


FIG. 1

entre par une des extrémités de la tuyauterie et il en sort par l'autre extrémité. En d'autres termes, les particules considérées

changent à chaque instant, et on s'occupe de la vitesse de la particule qui, au temps t, occupe la position  $x_i$ . C'est la description eulérienne. Le champ des vitesses au temps t est ici la loi

$$v_i = V_i(x_j, t) . \quad (3)$$

Les trajectoires s'obtiennent ici en intégrant la loi

$$dx_i = V_i(x_j, t) dt . \quad (4)$$

En remontant ainsi jusqu'en  $t = 0$ , on obtient les coordonnées lagrangiennes

$$a_i = A_i(x_j, t) , \quad (5)$$

### 3. PASSAGE D'UNE DESCRIPTION A L'AUTRE

La correspondance entre les deux descriptions est donnée par le changement de variables

$$\begin{cases} x_i = X_i(a_j, t) \\ t = t \end{cases} , \quad (6)$$

dont la matrice jacobienne s'écrit

$$\frac{D(X_i, t)}{D(a_i, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial a_1} & \frac{\partial X_1}{\partial a_2} & \frac{\partial X_1}{\partial a_3} & \frac{\partial X_1}{\partial t} \\ \frac{\partial X_2}{\partial a_1} & \frac{\partial X_2}{\partial a_2} & \frac{\partial X_2}{\partial a_3} & \frac{\partial X_2}{\partial t} \\ \frac{\partial X_3}{\partial a_1} & \frac{\partial X_3}{\partial a_2} & \frac{\partial X_3}{\partial a_3} & \frac{\partial X_3}{\partial t} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & v_1 \\ & J & & v_2 \\ & & & v_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] , \quad (7)$$

où apparaît la matrice jacobienne (spatiale)

$$J_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial a_j} . \quad (8)$$

Notant

$$\mathcal{J} = \text{dtm}(J) , \quad (9)$$

on a encore

$$\text{dtm} \frac{D(X_i, t)}{D(a_i, t)} = \mathcal{J} . \quad (10)$$

Le fait que les trajectoires sont bien déterminées implique que la transformation d'un système à l'autre est inversible, ce qui s'exprime par la non-nullité du déterminant (10). Comme en  $t = 0$ , on a  $J = 1$ , on devra avoir, tout au long du mouvement,

$$J > 0 . \quad (11)$$

La transformation inverse s'écrit

$$\begin{cases} a_i = A_i(x_j, t) \\ t = t \end{cases} \quad (12)$$

et a pour matrice jacobienne

$$\frac{D(A_i, t)}{D(x_i, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \frac{\partial A_1}{\partial x_3} & \frac{\partial A_1}{\partial t} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} & \frac{\partial A_2}{\partial x_2} & \frac{\partial A_2}{\partial x_3} & \frac{\partial A_2}{\partial t} \\ \frac{\partial A_3}{\partial x_1} & \frac{\partial A_3}{\partial x_2} & \frac{\partial A_3}{\partial x_3} & \frac{\partial A_3}{\partial t} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \frac{\partial A_1}{\partial t} \\ J^{-1} & \frac{\partial A_2}{\partial t} \\ & \frac{\partial A_3}{\partial t} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

La transformation des dérivées par rapport au temps est particulièrement importante. Nous utiliserons les notations

$$\frac{Df}{Dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{a_i} = \text{cte} , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x_i} = \text{cte} , \quad f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (14)$$

Il vient alors

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{DX_i}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i f_{,i} \quad (15)$$

Cette formule, qui exprime la dérivée temporelle lagrangienne en termes des variables eulériennes est dite formule de la dérivée particulière, pour rappeler que l'on suit la particule.

#### 4. LIGNES DE COURANT

Contrairement aux trajectoires qui représentent le chemin suivi par une particule, les lignes de courant sont constituées de particules différentes. Chaque élément d'arc ( $dx_1, dx_2, dx_3$ ) d'une ligne de courant au temps  $t$  est orienté suivant la vitesse de la particule occupant l'origine de l'élément à l'époque considérée. L'équation différentielle d'une ligne de courant au temps  $t$  est

donc

$$\frac{dx_1}{v_1(x_j, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_j, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_j, t)} \quad (16)$$

où  $t$  est maintenu constant pendant l'intégration. Dans le cas général d'un écoulement instationnaire, les lignes de courant varient au cours du temps. Elles sont invariables lorsque l'écoulement est stationnaire, c'est-à-dire  $\partial v_i / \partial t = 0$ . Dans ce cas particulier, il est aisé de constater, en comparant les équations (4) et (16), que les lignes de courant coïncident avec les trajectoires.

### 5. LIGNES D'EMISSION

Une ligne d'émission à un instant  $\hat{t}$  est le lieu formé par les particules qui sont passées ou qui passeront à un instant  $t \neq \hat{t}$  par un point donné  $\hat{x}_i$  de l'espace. Pour trouver la position en  $\hat{t}$  de la particule qui passe en  $t$  par le point  $\hat{x}_i$ , on remonte d'abord suivant sa trajectoire jusqu'à l'origine des temps, ce qui donne ses coordonnées lagrangiennes

$$a_i = A_i(\hat{x}_k, t)$$

Repartant alors le long de la trajectoire jusqu'en  $\hat{t}$ , on obtient la position cherchée:

$$x_i = X_i(A_j(\hat{x}_k, t), \hat{t}) \quad (17)$$

La ligne d'émission du point  $\hat{x}_k$  au temps  $\hat{t}$  est formée du lieu des points de la forme (17) lorsque  $t$  varie.

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, les trajectoires sont invariables et la relation (17) définit toujours des points d'une même trajectoire. En conséquence, lorsque l'écoulement est stationnaire, trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission coïncident.

### 6. EXPRESSION EULERIENNE DE L'ACCELERATION

L'accélération d'une particule est le taux de variation temporelle de sa vitesse. C'est donc la dérivée du vecteur  $v_i$  en suivant la particule, soit

$$\gamma_i = \frac{Dv_i}{Dt} \quad (18)$$

En description lagrangienne, c'est donc la simple dérivée par rapport au temps. En description eulérienne, il faut utiliser la formule (15), soit

$$\gamma_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} \quad (19)$$

### 7. ANALYSE LOCALE DU CHAMP DE VITESSES

Au voisinage d'un point  $P$ , on a

$$v_j(P + dP) = v_j(P) + v_{j,i}(P) dx_i + o(\|dP\|) \quad (20)$$

avec  $\frac{o(\|dP\|)}{\|dP\|} \rightarrow 0$  pour  $\|dP\| \rightarrow 0$

Décomposant le tenseur  $v_{j,i}$  en parties symétrique et antisymétrique,

on obtient

$$v_j(P + dP) = v_j(P) + \theta_{ij}(P) x_i + \omega_{ij}(P) x_i + o(\|dP\|)$$

où

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (21)$$

est appelé tenseur des vitesses de déformation, tandis que la partie antisymétrique

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{j,i} - v_{i,j})$$

peut être exprimée sous la forme

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega_k \quad (22)$$

en introduisant le pseudo-vecteur-tourbillon

$$\omega_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \omega_{ij} = \frac{1}{4} \varepsilon_{kij} (v_{j,i} - v_{i,j}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} v_{j,i} \quad (23)$$

qui n'est donc autre que la moitié du rotationnel de la vitesse.

Amenant l'origine au point  $P$ , on a donc, pour  $\|x\|$  petit,

$$v_j(x) = v_j(0) + \theta_{ij}(0) x_i + \varepsilon_{jki} \omega_k(0) x_i + o(\|x\|) \quad (24)$$

En définissant la forme

$$\psi = \frac{1}{2} \theta_{ij}(0) x_i x_j \quad (25)$$

on a encore

$$v_j(x) = v_j(0) + \varepsilon_{jki} \omega_k(0) x_i + \psi_{,j} + o(\|x\|) \quad (26)$$

Cette décomposition est due à HELMHOLTZ /1/. Dans le second membre de (25), les deux premiers termes représentent respectivement une translation d'ensemble et une rotation d'ensemble du voisi-

ge de P, c'est-à-dire un mouvement de solide parfait. Le dernier terme représente la déformation de ce voisinage. En décomposant le tenseur  $\theta_{ij}$  en partie isotrope et déviateur, on a

$$\theta_{ij} = \frac{1}{3} \theta_{11} \delta_{ij} + \hat{\theta}_{ij} \quad (27)$$

Pour interpréter le terme isotrope, commençons par observer que le tenseur  $\theta_{ij}$  admet trois directions principales  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ , auxquelles sont associées les trois valeurs principales  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Il est clair que

$$\theta_{11} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad .$$

Un élément de volume  $dx_1, dx_2, dx_3$ , au temps  $t$  est transformé, après  $dt$ , en

$$\begin{aligned} dx_1(1 + \theta_1 dt) dx_2(1 + \theta_2 dt) dx_3(1 + \theta_3 dt) \\ = dx_1 dx_2 dx_3 (1 + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) dt + O(dt^2)) \quad , \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $\theta_{11}$  est le taux d'accroissement du volume. En particulier, pour un milieu continu incompressible, on a  $\theta_{11} = 0$ .

La partie isotrope du tenseur  $\theta_{ij}$  représente donc une déformation du voisinage par gonflement isotrope, chaque direction voyant ses longueurs augmentées de  $\theta_{11}/3$  par unité de temps. Le déviateur représente, quant à lui, la distorsion du voisinage considéré.

### 8. THEOREME DE STOKES-AMPERE

La décomposition de Helmholtz permet une présentation simple du théorème de Stokes-Ampère [3]. Considérons (fig. 2) une surface bordée par une courbe orientée  $\mathcal{C}$ . La normale à la surface est prise positivement dans le sens indiqué par la règle du tire-bouchon de Maxwell si le système d'axes est dextrorsum; dans le sens

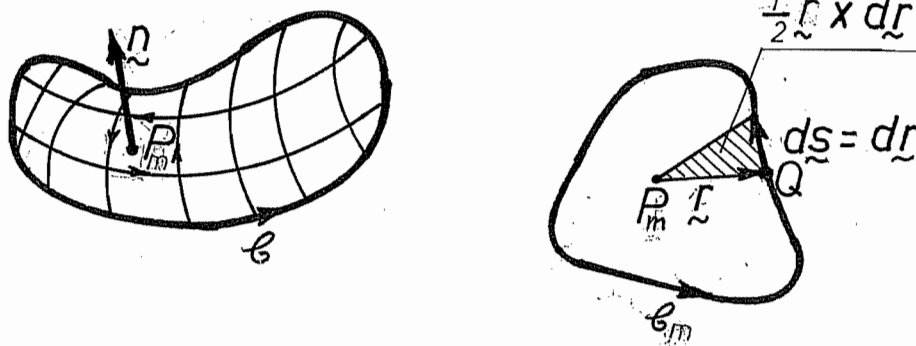


FIG. 2



inverse si le trièdre de référence est sinistrorsum. Décomposons la surface en petits éléments de taille inférieure à  $\varepsilon > 0$ . Si  $P_m$  est un point choisi arbitrairement à l'intérieur de l'élément numéro  $m$ , on a, en un point  $Q$  de la frontière de l'élément, par (25),

$$v_j(Q) = v_j(P_m) + \varepsilon_{jki} \omega_k(P_m) r_i + \psi_{,j} + o(\varepsilon),$$

avec

$$\underline{r} = \underline{P_m Q}$$

Calculant la circulation de  $\underline{v}$  le long de la frontière de l'élément  $k$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_m} v_j(Q) dr_j &= v_j(P_m) \int_{\mathcal{L}_m} dr_j + \omega_k(P_m) \int_{\mathcal{L}_m} \varepsilon_{kij} r_i dr_j + \int_{\mathcal{L}_m} \psi_{,j} dr_j \\ &\quad + \int_{\mathcal{L}_m} o(\varepsilon) dr_j \\ &= 0 + \omega(P_m) \cdot \int_{\mathcal{L}_m} \underline{r} \times \underline{dr} + 0 + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Notant que

$$\underline{r} \times \underline{dr} = 2 \underline{n} dS,$$

on obtient

$$\int_{\mathcal{L}_m} v_j(Q) dr_j = 2 \omega(P_m) \cdot \underline{n} S_m + o(\varepsilon^2).$$

Faisant la somme sur tous les éléments, les circulations des éléments voisins se compensent, excepté sur la frontière. On a donc, pour tout  $\varepsilon$ ,

$$\int_{\mathcal{L}} \underline{v} \cdot \underline{ds} = \sum_{m=1}^M (2 \omega(P_m) \cdot \underline{n} S_m + o(\varepsilon^2))$$

On notera que le nombre  $M$  d'éléments est  $O(\varepsilon^{-2})$ . En conséquence, pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $M o(\varepsilon^2) \rightarrow 0$  et il reste

$$\int_{\mathcal{L}} \underline{v} \cdot \underline{ds} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{m=1}^M 2 \omega(P_m) \cdot \underline{n} S_m = \int_S 2 \omega \cdot \underline{n} dS \quad (28)$$

ou encore,

$$\int_{\mathcal{L}} \underline{v} \cdot \underline{ds} = \int_S \text{rot } \underline{v} \cdot \underline{n} dS \quad (29)$$

C'est le théorème de Stokes-Ampère. On notera que la décomposition de Helmholtz n'est pas limitée au vecteur vitesse et que, par con-

séquent, le théorème de Stokes-Ampère s'applique à d'autres vecteurs.

## II - LOIS DE CONSERVATION

### 1. DERIVEES DES INTEGRALES DE VOLUME

A l'instant  $t$ , les particules se trouvant en  $t = 0$  dans un volume  $V_0$ , occupent un volume  $V$ . Soit  $f$  une grandeur intensive. On a

$$\int_V f(\underline{x}, t) dV = \int_{V_0} f(X(\underline{a}, t), t) J dV_0 \quad (30)$$

Cette formule est très utile, car elle permet de se ramener à un ensemble fixe. Soit par exemple à calculer

$$I = \frac{D}{Dt} \int_V f(\underline{x}, t) dV,$$

c'est-à-dire la dérivée par rapport au temps de l'intégrale de  $f$ , en suivant les particules. On a

$$I = \frac{D}{Dt} \int_{V_0} f J dV_0 = \int_{V_0} \left( \frac{Df}{Dt} J + f \frac{DJ}{Dt} \right) dV_0 \quad (31)$$

On calcule  $DJ/Dt$  comme suit: supposons d'abord qu'un seul terme  $J_{kl}$  varie. On a visiblement

$$dJ = \text{cofacteur}_{kl}(J) \cdot dJ_{kl} \quad (\text{pas de somme sur } k \text{ et } l).$$

Lorsque tous les termes de  $J$  varient, il suffit de faire la somme sur  $k$  et  $l$  :

$$dJ = \text{cofacteur}_{kl}(J) dJ_{kl} = J J_{lk}^{-1} dJ_{kl},$$

en se souvenant des formules d'inversion de Cramer. On a donc

$$\frac{DJ}{Dt} = J J_{lk}^{-1} \frac{DJ_{kl}}{Dt} = J \frac{\partial a_l}{\partial x_k} \frac{D}{Dt} \frac{\partial x_k}{\partial a_l} = J \frac{\partial a_l}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial a_l} = J v_{k,k} \quad (32)$$

Il découle de ce résultat que

$$I = \int_{V_0} J \left( \frac{Df}{Dt} + f v_{k,k} \right) dV_0$$

soit

$$\frac{D}{Dt} \int_V f(\underline{x}, t) dV = \int_V \left( \frac{Df}{Dt} + f v_{k,k} \right) dV \quad (33)$$

Notant que

$$\frac{Df}{Dt} + f v_{k,k} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_k f_{,k} + f v_{k,k} = \frac{\partial f}{\partial t} + (f v_k)_{,k} ,$$

on obtient le résultat équivalent

$$\frac{D}{Dt} \int_V f(\underline{x}, t) dV = \int_V \left( \frac{\partial f}{\partial t} + (f v_k)_{,k} \right) dV \quad (34)$$

Enfin, une troisième forme équivalente s'obtient en transformant le dernier terme en une intégrale de surface:

$$\frac{D}{Dt} \int_V f(\underline{x}, t) dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S f v_k n_k dS \quad (35)$$

## 2. THEOREMES DE L'INTEGRALE NULLE

Voici deux résultats que nous utiliserons à maintes reprises dans la suite.

### 2.1 - En volume

Soit  $f$  une fonction continue dans un ouvert  $\mathcal{V}$  et telle que, pour tout ouvert  $V \subset \mathcal{V}$ , on ait

$$\int_V f dV = 0 .$$

Alors,  $f = 0$  dans  $\mathcal{V}$ .

Supposons en effet que  $f \neq 0$  en un point  $y$  de  $\mathcal{V}$ , par exemple,  $f(y) > 0$ . Alors, par continuité, il existe une boule  $B_R(y)$ , de centre  $y$  et de rayon  $R$ , telle que  $B_R(y) \subset \mathcal{V}$  et que  $f(x) > \frac{1}{2}f(y)$  dans  $B_R(y)$ . Par conséquent,

$$\int_{B_R(y)} f dV > \frac{1}{2} f(y) \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 > 0 ,$$

en contradiction avec l'hypothèse.

### 2.2 - En surface

Un résultat analogue peut être obtenu sur les surfaces. Mais il demande quelques précisions quant à la description d'une surface. Pour décrire une surface, il faut deux paramètres, que nous noterons  $\hat{x}_1$  et  $\hat{x}_2$ . Ces deux paramètres varient dans un ensemble  $\hat{\mathcal{S}}$  que nous supposerons ouvert. Une fonction  $f$  définie sur la surface  $\mathcal{S}$  peut être considérée comme une fonction  $\hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ . L'élément de surface étant donné par

$$dS = \left\| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \hat{x}_1} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \hat{x}_2} \right\| d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = h d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 ,$$

avec  $h > 0$ . Une intégrale de surface peut donc être calculée par

$$\int_S f \, dS = \int_{\hat{S}} \hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \, d\hat{x}_1 \, d\hat{x}_2 .$$

Cela étant, on a le théorème suivant: Soit  $f$  une fonction continue sur une surface  $S$  et telle que, pour toute partie  $S$  de  $\mathcal{S}$  dont l'image dans  $\hat{\mathcal{S}}$  est ouverte, on ait

$$\int_S f \, dS = 0 .$$

Alors,  $f$  est nulle sur  $\mathcal{S}$ .

Supposons en effet que  $f(y) > 0$  en un point  $y$  de  $\mathcal{S}$ . Soit  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$  l'image de  $y$  dans  $\hat{\mathcal{S}}$ . Il existe un disque  $\hat{B}_R(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ , de centre  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$  et de rayon  $R$  tel que  $\hat{B}_R(\hat{y}_1, \hat{y}_2) \subset \hat{\mathcal{S}}$  et que  $\hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) > \frac{1}{2} f(y)$  dans  $\hat{B}_R(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ . Dès lors, dans son image  $B$  dans  $\mathcal{S}$ ,

on a

$$\begin{aligned} \int_B f \, dS &= \int_{\hat{B}_R(\hat{y}_1, \hat{y}_2)} \hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \, h \, d\hat{x}_1 \, d\hat{x}_2 \\ &> \frac{1}{2} f(y) \cdot \inf_{\hat{B}_R} h \cdot \pi R^2 > 0 , \end{aligned}$$

en contradiction avec l'hypothèse.

### 3. CONSERVATION DE LA MASSE

#### 3.1 - Forme locale

Lors du mouvement, la masse totale d'un ensemble de particules se conserve, ce qui s'exprime par la condition

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \, dV = 0 , \quad (36)$$

où  $\rho$  est la masse volumique. Cette condition doit être vérifiée pour tout volume  $V$ . Faisant usage de la formule (34), on en déduit que, pour tout volume  $V$  du continuum,

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} \right) dV = 0 ,$$

d'où, en vertu du théorème de l'intégrale nulle, l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad (37)$$

En partant de (33), on aurait obtenu la forme équivalente

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho v_{k,k} = 0 \quad (38)$$

Dans le cas d'un milieu continu incompressible (liquide, solide plastique, caoutchouc...), le volume se conserve:

$$\frac{D}{Dt} \int_V 1 \, dV = \int_V v_{j,j} \, dV = 0,$$

ce qui implique la condition

$$v_{i,i} = 0. \quad (39)$$

Comparant avec (38), on trouve que, pour un fluide incompressible,

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (40)$$

Comparant (39) avec (37), on obtient

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

soit, comme  $\rho > 0$ ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (40')$$

### 3.2 - Forme intégrale

Transformant la condition de conservation de la masse (36) à l'aide de la formule générale (35), on obtient

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \int_S \rho v_i n_i \, dS = 0 \quad (41)$$

En particulier, si l'écoulement est permanent, on a  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , ce qui implique

$$\int_S \rho v_i n_i \, dS = 0 \quad (42)$$

La même formule s'applique également aux milieux continus incompressibles, que le mouvement soit permanent ou non. En hydraulique, on applique la formule (42) comme suit: considérons une canalisation ou un tube de courant (volume bordé latéralement par des lignes de courant). (fig. 3). Le débit massique entrant par la section d'entrée  $S_1$  vaut

$$G_1 = \int_{S_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}'_1 \, dS_1 = - \int_{S_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_1 \, dS_1 ;$$

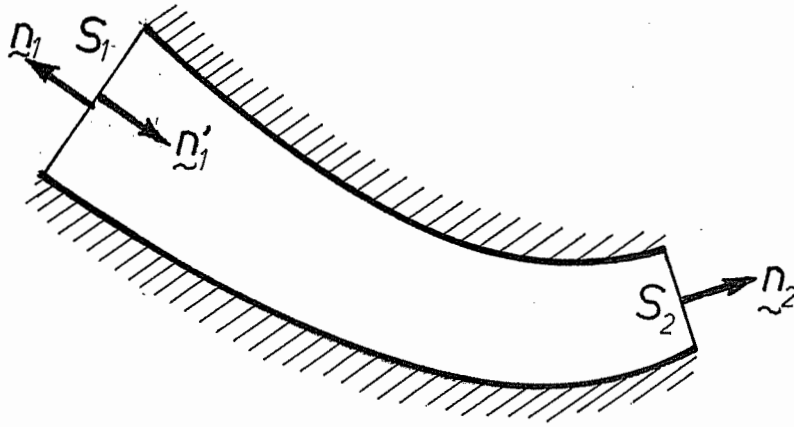


FIG. 3

Le débit massique sortant par la section de sortie  $S_2$  est

$$G_2 = \int_{S_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_2 \, dS .$$

La conservation de la masse s'exprime donc, dans les conditions de validité de la formule (42) par

$$G_1 = G_2 , \quad (43)$$

c'est-à-dire que le débit massique d'entrée est égal au débit massique de sortie.

### 3.3 - Surfaces de discontinuité

Dans certaines circonstances, comme les ondes de choc, il peut arriver que les vitesses et les densités de masse présentent un saut sur certaines surfaces de discontinuité. Dans ce cas, les formules (37) et (38) sont dénuées de sens sur la surface de discontinuité. Mais même si  $\rho$  et  $v$  présentent des sauts, la forme intégrale s'applique, car les intégrales restent définies. Etant donné (fig. 4) une portion  $S$  d'une surface de discontinuité  $\mathcal{S}$ ,

construisons un volume s'étendant de  $\epsilon/2$  selon les normales, de part et d'autre de  $S$ . Il vient, par (41),

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV &= \int_{S_1} \rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 \, dS \\ &+ \int_{S_2} \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 \, dS + \\ &+ \int_{S_{lat}} \rho_{lat} \vec{v}_{lat} \cdot \vec{n}_{lat} \, dS . \end{aligned}$$

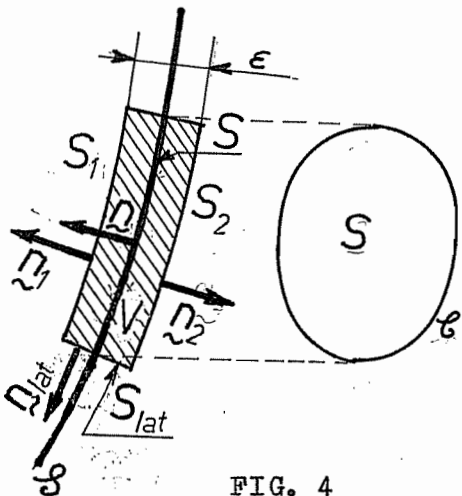


FIG. 4

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a

$$V = O(\varepsilon) \rightarrow 0$$

$$S_{\text{lat}} = O(\varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\underline{n}_1 \rightarrow \underline{n}$$

$$\underline{n}_2 \rightarrow -\underline{n}$$

et on obtient à la limite

$$\int_S (\rho_1 \underline{v}_1 - \rho_2 \underline{v}_2) \cdot \underline{n} \, dS = 0,$$

quelle que soit la partie S de la surface de discontinuité. Par le second théorème de l'intégrale nulle, on obtient donc la condition de transition

$$(\rho_1 \underline{v}_1 - \rho_2 \underline{v}_2) \cdot \underline{n} = 0 \quad (44)$$

exprimant que la densité de flux massique se transmet à travers la surface de discontinuité.

### 3.4 - Une conséquence de la conservation de la masse

Soit à calculer une expression de la forme

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho f \, dV = \int_V \left( \rho \frac{Df}{Dt} + f \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho v_{i,i} \right) \right) dV.$$

Eu égard à l'équation de continuité (38), il vient

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho f \, dV = \int_V \rho \frac{Df}{Dt} \, dV. \quad (45)$$

## 4. CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

### 4.1 - Forme locale

La quantité de mouvement d'un système de particules est

$$\int_V \rho v_i \, dV.$$

La loi fondamentale de la dynamique exprime que la dérivée temporelle de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures. Parmi celles-ci, il peut y avoir des forces massiques, de la forme

$$\int_V \rho g_i \, dV,$$

où  $g$  est un vecteur ayant la dimension d'une accélération. Ce sera le plus souvent l'accélération de la pesanteur. Il y a en outre les

forces exercées par le reste du continuum sur  $V$ , par l'intermédiaire de sa surface  $S$ . Ces forces ont la forme

$$\int_S \tilde{t}_i \, dS ,$$

où  $\tilde{t}_i$  est le vecteur des tractions de surface (fig. 5). La loi de

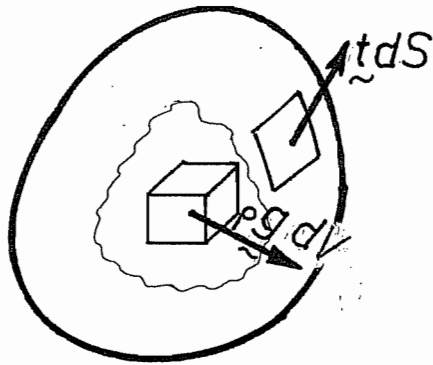


FIG. 5

conservation de la quantité de mouvement s'exprime donc par l'équation

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i \, dV = \int_V \rho g_i \, dV + \int_S \tilde{t}_i \, dS \quad (46)$$

On peut transformer le terme de surface en appliquant la relation (46) à un tétraèdre élémentaire formé par une portion  $dS$  de la surface et trois plans parallèles aux plans de coordonnées. La plus grande longueur que l'on puisse mesurer dans le tétraèdre sera notée  $\mathcal{E}$  (fig. 6). Les forces agissant sur une portion  $dS$  de la surface sont  $\tilde{t}_i dS$ . Les forces agissant sur la face  $dS_1$  perpendiculaire à l'axe  $x_1$  sont notées  $\sigma_{1i} dS_1$ ; de même, les forces qui agissent sur les faces  $dS_2$  et  $dS_3$ , respectivement perpendiculaires aux axes  $x_2$  et  $x_3$ , sont notées  $\sigma_{2i} dS_2$  et  $\sigma_{3i} dS_3$ . Toutes ces forces sont  $O(\mathcal{E}^2)$ . Par contre, on a

$$\int_V \rho v_i \, dV = O(\mathcal{E}^3) \quad ; \quad \int_V \rho g_i \, dV = O(\mathcal{E}^3) ,$$

et, pour  $\mathcal{E} \rightarrow 0$ , ces termes deviennent négligeables devant les termes de surface. La condition (46) se réduit alors à

$$\tilde{t}_i \, dS = \sigma_{1i} \, dS_1 + \sigma_{2i} \, dS_2 + \sigma_{3i} \, dS_3$$

et, comme  $dS_i$  est la projection de  $dS$  sur le plan perpendiculaire à l'axe  $e_i$ , on a

$$dS_i = n_i \, dS,$$



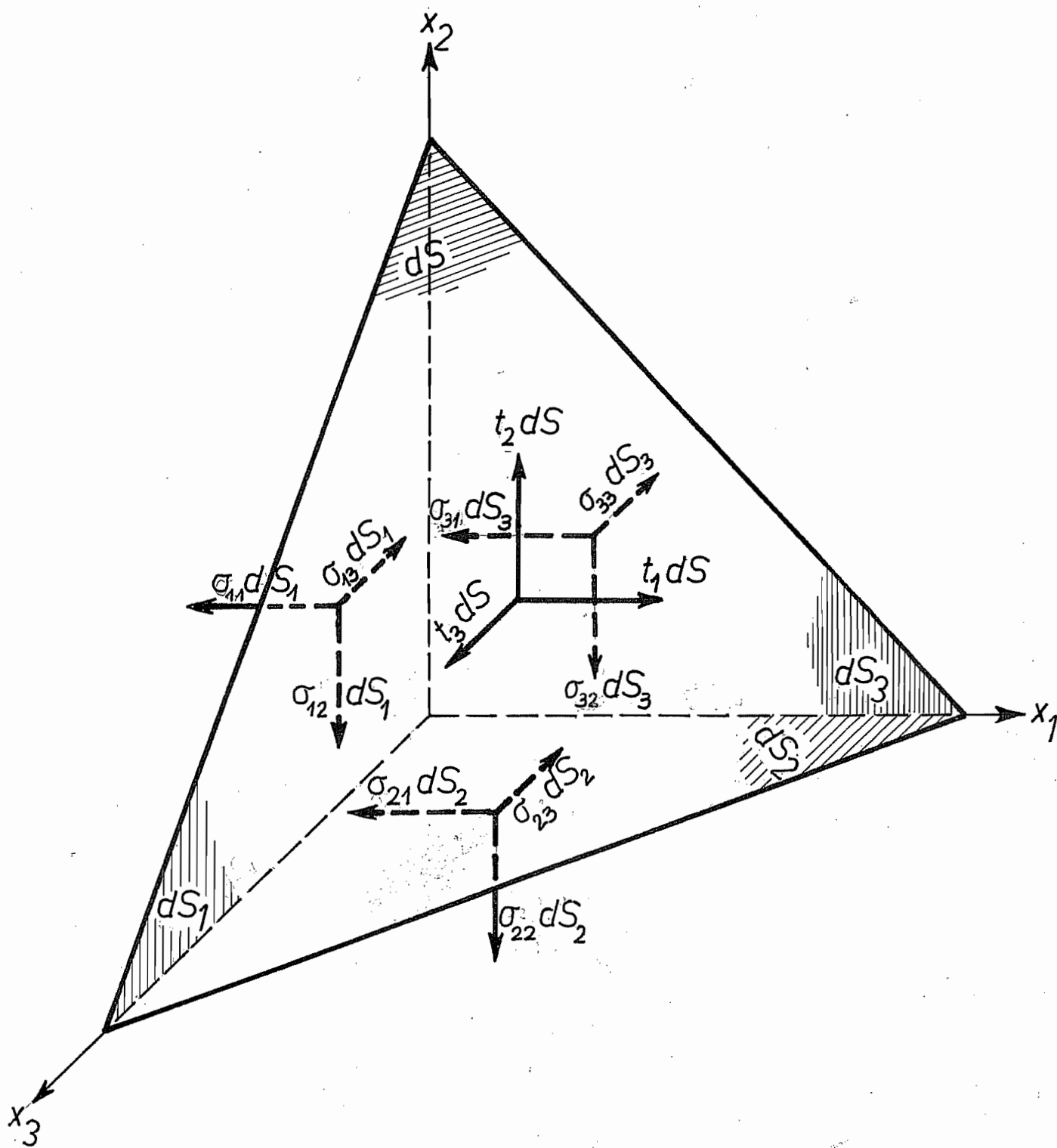


FIG. 6

en appelant  $n$  le vecteur unitaire normal à  $dS$ . On a donc

$$t_i dS = n_1 \sigma_{1i} dS + n_2 \sigma_{2i} dS + n_3 \sigma_{3i} dS ,$$

soit

$$t_i = n_j \sigma_{ji} . \quad (47)$$

Le tenseur  $\sigma_{ji}$  est appelé tenseur des tensions ou encore, tenseur des contraintes. Il détermine, sur chaque surface tracée dans le corps continu, les tractions de surface, par la relation (47). Son introduction permet d'écrire la loi de conservation de la quantité de mouvement sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV &= \int_V \rho g_i dV + \int_S n_j \sigma_{ji} dS \\ &= \int_V \rho g_i dV + \int_V \sigma_{ji,j} dV . \end{aligned} \quad (48)$$

Tenant compte de (45), on obtient, pour tout volume  $V$ ,

$$\int_V \left( \rho \frac{Dv_i}{Dt} - \rho g_i - \sigma_{ji,j} \right) dV = 0 ,$$

ce qui entraîne l'équation

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \rho g_i + \sigma_{ji,j} \quad (49)$$

#### 4.2 - Forme intégrale

On déduit de (35)

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV + \int_S \rho v_i v_j n_j dS ,$$

ce qui conduit à l'expression

$$\int_V \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) - \rho g_i \right) dV = \int_S n_j (\sigma_{ji} - \rho v_i v_j) dS . \quad (50)$$

Appliquons la formule précédente à une canalisation limitée par deux sections droites  $S_1$  et  $S_2$  (fig. 3), dans laquelle s'écoule un fluide. On supposera l'écoulement permanent. On a alors

$$\int_S t_i dS = \int_{S_1} t_i dS + \int_{S_2} t_i dS + \int_{\text{parois}} t_i dS$$

Le terme relatif aux parois représente en fait la réaction de la paroi  $\tilde{R}$ . Sur  $S_1$  et  $S_2$ , on peut généralement assimiler les tractions de surface à des pressions normales ( $t_i = -p n_i$ ). Il vient donc

$$\int_S t_i dS = \int_{S_1} p n_i' dS - \int_{S_2} p n_i dS + R_i \quad (51)$$

Par ailleurs, sur les parois, on a  $v_j n_j = 0$ , si bien que

$$\int_S \rho v_i v_j n_j dS = - \int_{S_1} \rho v_i v_j n_j' dS + \int_{S_2} \rho v_i v_j n_j dS.$$

Posant alors

$$\tilde{F}_{p1} = \int_{S_1} p n_i' dS, \quad \tilde{F}_{p2} = \int_{S_2} p n_i dS \quad (52)$$

et définissant les vitesse moyennes à l'entrée et à la sortie par

$$\tilde{v}_1 = \frac{1}{G} \int_{S_1} \tilde{v} (\rho \tilde{v} \cdot \tilde{n}') dS, \quad \tilde{v}_2 = \frac{1}{G} \int_{S_2} \tilde{v} (\rho \tilde{v} \cdot \tilde{n}) dS \quad (53)$$

où  $G$  est le débit massique défini au paragraphe 3.2, ainsi que la force massique

$$\tilde{F}_g = \int_V \rho g dV, \quad (54)$$

on déduit de (50) la relation suivante pour la réaction des parois:

$$(-\tilde{R}) = G(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) + \tilde{F}_g + \tilde{F}_{p1} + \tilde{F}_{p2} \quad (55)$$

En d'autres termes, la force exercée par le fluide sur la paroi est égale à la chute de quantité de mouvement entre les sections 1 et 2, augmentée de la force massique et des forces de pression aux deux extrémités.

#### 4.4 - Cas d'une surface de discontinuité

A nouveau, dans le cas d'une surface de discontinuité, on peut appliquer la formule (50) sur un volume très mince construit de part et d'autre de la surface (fig. 4). Le raisonnement est le même que pour la conservation de la masse et conduit à la condition de transition.

$$((\sigma_{ji} - \rho v_i v_j)_2 - (\sigma_{ji} - \rho v_i v_j)_1) n_i = 0 \quad (56)$$

## 5. CONSERVATION DU MOMENT DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

### 5.1 - Forme locale

Si  $\underline{x}$  représente le vecteur-position d'une particule, le théorème de conservation du moment de la quantité de mouvement s'écrit

$$\frac{D}{Dt} \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV = \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho g_k dV + \int_S \epsilon_{ijk} x_j t_k dS \quad (57)$$

On a d'une part

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV &= \int_V \rho \epsilon_{ijk} \left( v_k \frac{Dx_j}{Dt} + x_j \frac{Dv_k}{Dt} \right) dV \\ &= \int_V \rho \epsilon_{ijk} \left( v_k v_j + x_j \frac{Dv_k}{Dt} \right) dV \\ &= \int_V \rho \epsilon_{ijk} x_j \frac{Dv_k}{Dt} dV \quad . \end{aligned} \quad (58)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_S \epsilon_{ijk} x_j t_k dS &= \int_S \epsilon_{ijk} x_j n_l \sigma_{lk} dS = \int_V \epsilon_{ijk} (x_j \sigma_{lk})_{,l} dV \\ &= \int_V \epsilon_{ijk} (\delta_{jl} \sigma_{lk} + x_j \sigma_{lk,l}) dV \\ &= \int_V (\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk,l}) dV \end{aligned} \quad (59)$$

Rassemblant ces résultats, on obtient

$$\int_V \epsilon_{ijk} x_j \left( \rho \frac{Dv_k}{Dt} - \rho g_k - \sigma_{lk,l} \right) dV = \int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV \quad .$$

Or, le premier membre est nul en vertu de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (49). Par conséquent, on a, quel que soit le volume V,

$$\int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \quad ,$$

ce qui implique

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad . \quad (60)$$

Cette relation exprime que le tenseur des tensions est symétrique.

### 5.2 - Forme intégrale

En modifiant le premier membre de (57) à l'aide de la relation générale (35), on obtient

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k) dV + \int_S \rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k n_l v_l dS =$$

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho g_k dV \quad (61)$$

Lorsque les intégrales de volume s'annulent, cette expression constitue un moyen commode de calcul du moment des forces exercées par un fluide sur une paroi.

## 6. ANALYSE DU TENSEUR DES TENSIONS EN UN POINT

### 6.1 - Tension normale et tension tangentielle sur une facette

Considérons une petite surface plane passant par le point dont on étudie l'état de tension ou, comme on dit souvent, une facette passant par ce point. L'orientation de cette facette est déterminée par le vecteur unitaire qui lui est normal, soit  $n_i$ . Les forces agissant sur cette facette sont, par unité de surface,

$$t_i = n_j \sigma_{ji} .$$

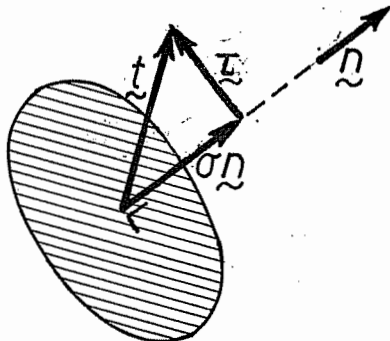


FIG. 7

Le vecteur  $t$  admet la décomposition (fig. 7)

$$\underline{t} = \sigma \underline{n} + \underline{\tau} \quad , \quad (62)$$

avec

$$\underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0 \quad . \quad (63)$$

On donne à  $\sigma$  le nom de tension (contrainte) normale à la facette considérée. Le nombre  $\|\underline{\tau}\|$  est la tension (contrainte) tangentielle sur la facette et est encore noté  $\tau$ . Il est clair

que

$$\sigma = \underline{t} \cdot \underline{n} = \sigma_{ji} n_j n_i \quad (64)$$

et que

$$= \|\underline{t} - \sigma \underline{n}\| = \sqrt{t^2 - \sigma^2} \quad (65)$$

### 6.2 - Tensions principales

La relation (47) présente le vecteur des tractions de surface  $t$  comme le transformé de la normale unitaire à la facette par le tenseur  $\sigma_{ij}$ . Comme celui-ci est symétrique, il existe trois directions principales  $n_i^{(1)}$ ,  $n_i^{(2)}$ ,  $n_i^{(3)}$ , telles que

$$\sigma_{ji} n_j^{(k)} = \sigma_k n_j^{(k)} \quad . \quad (66)$$

Sur les facettes principales, définies par les trois normales principales, les tractions de surface sont donc purement normales. Les valeurs propres  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  sont appelées tensions principales. Il est de tradition de les ranger dans l'ordre  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Les axes définis par les vecteurs  $\underline{n}^{(1)}$ ,  $\underline{n}^{(2)}$ ,  $\underline{n}^{(3)}$  sont appelés axes principaux.

### 6.3 - Tricerple de Mohr /7 à 9/

Etant donné l'état de tension en un point, défini par le tenseur  $\sigma_{ji}$ , quelles sont les différentes combinaisons  $(\sigma, \tau)$  que l'on peut rencontrer sur une facette en ce point? Pour répondre à cette question, donnons-nous un couple  $(\sigma, \tau)$  et essayons de trouver une facette sur laquelle ces deux valeurs sont réalisées. On a par (47)

$$t_1 = \sigma_1 n_1 \quad , \quad t_2 = \sigma_2 n_2 \quad , \quad t_3 = \sigma_3 n_3 \quad ,$$

d'où la première condition:

$$\sigma^2 + \tau^2 = \|\underline{t}\|^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (67)$$

Une seconde condition découle de (64) :

$$= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (68)$$

Enfin, les trois composantes de la normale unitaire doivent vérifier

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad . \quad (69)$$

Les conditions (67) à (69) forment un système de trois équations aux trois inconnues  $n_1^2$ ,  $n_2^2$ ,  $n_3^2$ . Il est équivalent de résoudre trois combinaisons indépendantes de ces équations, de la forme

$$\begin{aligned} (\sigma_1^2 + B\sigma_1 + C) n_1^2 + (\sigma_2^2 + B\sigma_2 + C) n_2^2 + (\sigma_3^2 + B\sigma_3 + C) n_3^2 \\ = \tau^2 + (\sigma^2 + B\sigma + C) \quad , \end{aligned} \quad (70)$$

ce qui s'écrit encore

$$f(\sigma_1) n_1^2 + f(\sigma_2) n_2^2 + f(\sigma_3) n_3^2 = \tau^2 + f(\sigma) \quad ,$$

avec

$$f(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C \quad .$$

En choisissant B et C de manière que  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  soient racines de ce trinôme qui peut alors s'écrire

$$f(\lambda) = (\lambda - \sigma_2)(\lambda - \sigma_3) \quad ,$$

on transforme (70) en

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 = \tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)$$

ce qui, en supposant

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \quad (71)$$

donne

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}.$$

Le même procédé permet d'obtenir sans peine

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

et

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}.$$

Bien entendu, ces résultats n'ont du sens que si  $n_1^2 \geq 0$ ,  $n_2^2 \geq 0$  et  $n_3^2 \geq 0$ . Tenant compte de l'hypothèse (71), cela nécessite

$$\begin{aligned} (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 &\geq 0 \\ (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 &\leq 0 \\ (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Comme, en général,

$$\begin{aligned} (\sigma - X)(\sigma - Y) &= \left(\sigma - \frac{X+Y}{2} + \frac{X-Y}{2}\right) \left(\sigma - \frac{X+Y}{2} - \frac{X-Y}{2}\right) \\ &= \left(\sigma - \frac{X+Y}{2}\right)^2 - \left(\frac{X-Y}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

Ces conditions s'écrivent encore

$$\begin{aligned} \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 &\geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 &\leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 &\leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad (72)$$

Dans le plan  $\{(\sigma, \tau)\}$ , ces conditions signifient que le point  $(\sigma, \tau)$  représentatif d'une facette doit nécessairement se trouver

- à l'extérieur du cercle de centre  $((\sigma_2 + \sigma_3)/2, 0)$  et de rayon  $(\sigma_2 - \sigma_3)/2$  ou sur ce cercle;
- à l'intérieur du cercle de centre  $((\sigma_1 + \sigma_3)/2, 0)$  et de rayon  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$  ou sur ce cercle;
- à l'extérieur du cercle de centre  $((\sigma_1 + \sigma_2)/2, 0)$  et de rayon  $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$  ou sur ce cercle,

soit, en définitive, dans la zone hachurée en fig.8. La construction représentée par cette figure est appelée tricercler de Mohr. Les trois cercles de Mohr qui la composent sont les cercles de Mohr extrêmes.

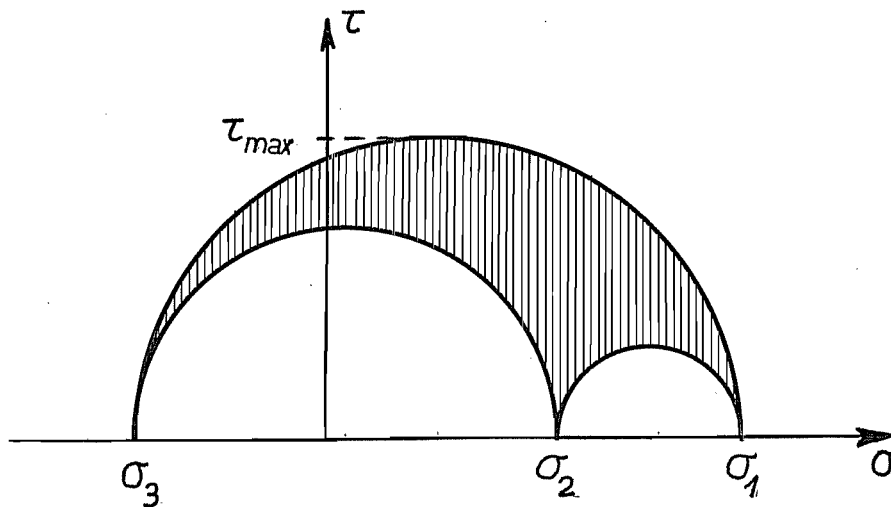


FIG. 8

On peut s'affranchir de l'hypothèse (71) par des passages à la limite. Lorsque deux tensions principales sont confondues, l'un des petits cercles de Mohr se réduit à un point, tandis que l'autre coïncide avec le grand cercle. La figure 9 représente la situation  $\sigma_1 = \sigma_2$ . La zone admissible pour le couple  $(\sigma, \tau)$  est ici réduite au seul grand cercle. Enfin, lorsque  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , le tricercler de Mohr se réduit à un point. Toutes les facettes ont alors la même contrainte purement normale. C'est l'état de tension hydrostatique (fig. 10)



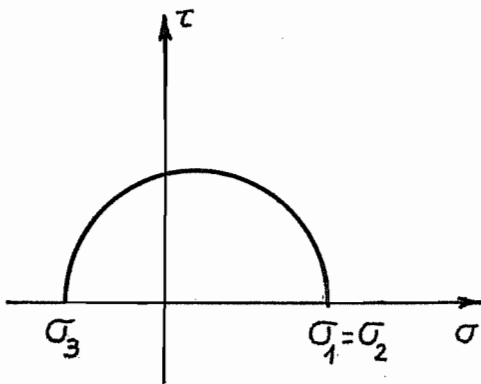


FIG. 9

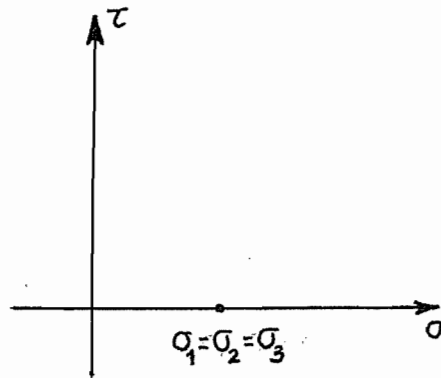


FIG. 10

#### 6.4 - Deux états de tension remarquables

a) Extension simple : c'est le cas où deux tensions principales sont nulles. On distingue la traction, correspondant à  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  (fig. 11) et la compression, où  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 < 0$  (fig. 12)

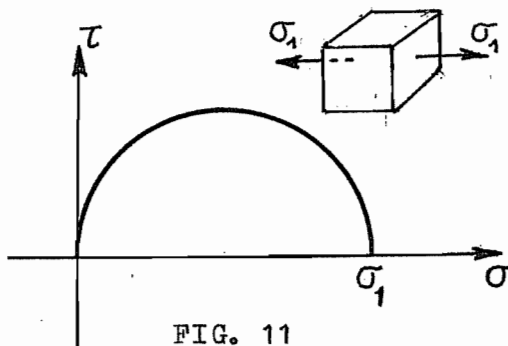


FIG. 11

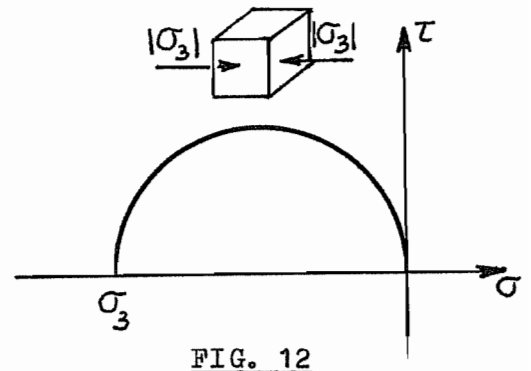


FIG. 12

b) Cisaillement pur : On parle de cisaillement pur lorsque  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$ . Seule, la tension  $\sigma_{12} \neq 0$ . Les invariants de  $\sigma_{ij}$  sont dans ce cas

$$I_1 = 0, \quad I_2 = -\sigma_{12}^2, \quad I_3 = 0,$$

et les tensions principales vérifient l'équation

$$\lambda^3 - \sigma_{12}^2 \lambda = 0,$$

ce qui donne

$$\sigma_1 = |\sigma_{12}|, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -|\sigma_{12}|$$

Cet état est représenté à la figure 13.

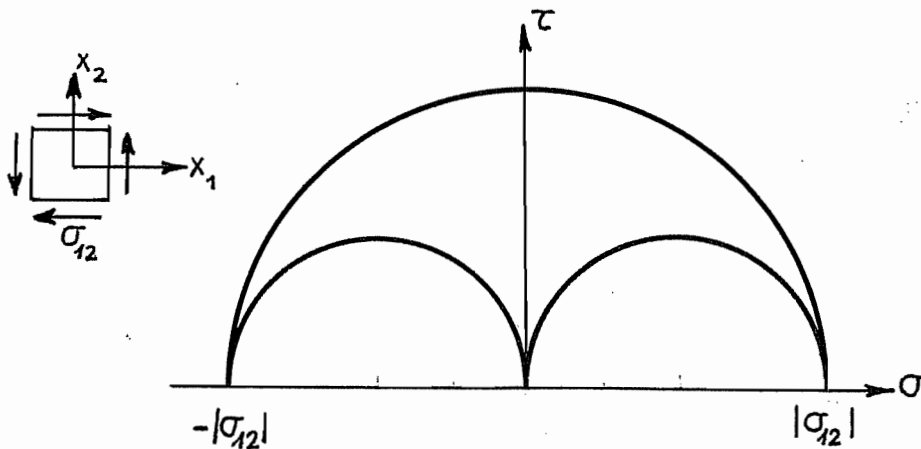


FIG. 13

### 7. CRITERES DE MISE HORS SERVICE DES MATERIAUX SOLIDES

En Résistance des Matériaux, on expérimente avant tout les matériaux en extension. A partir d'une certaine valeur de la tension, le matériau conserve une déformation permanente ou se brise. Pour appliquer ces résultats à des états de tension plus généraux, on utilise des critères de mise hors service, exprimant que la ruine se produit lorsqu'une certaine fonction  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  atteint une valeur critique  $f_{lim}$ . Si  $\sigma_{lim}$  est la tension de mise hors service, on détermine  $f_{lim}$  par la condition

$$f_{lim} = f(\sigma_{lim}, 0, 0) \quad (73)$$

Voici quelques critères courants :

#### 7.1 - Critère de la plus grande tension principale, dit de Rankine

Ce critère consiste à poser

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1 \quad .$$

Il s'écrit donc

$$\sigma_1 = \sigma_{lim} \quad (74)$$

#### 7.2 - Critère de la plus grande tension de cisaillement, dit de Tresca

Ce critère revient à écrire

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \tau_{max} \quad ,$$

$\tau_{max}$  étant la plus grande tension tangentielle que l'on puisse rencontrer sur les diverses facettes. L'examen du tricerclle de Mohr (fig. 8) montre que  $\tau_{max}$  est égal au rayon du plus grand cercle de Mohr:

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 \quad .$$

Dans le cas d'une extension simple, on a donc

$$\tau_{\max \text{ lim}} = \sigma_{\text{lim}}/2 ,$$

d'où l'on tire le critère

$$(\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = \sigma_{\text{lim}}/2 \quad (75)$$

ou encore,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\text{lim}} \quad (75')$$

### 7.3 - Critère dit de Von Mises

Ici, la fonction de référence est

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -\hat{I}_2 ,$$

où  $\hat{I}_2$  est le second invariant du déviateur des tensions. On a

$$-\hat{I}_2 = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ji} - \hat{\sigma}_{ii} \hat{\sigma}_{jj}) = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{6} \sigma_{ii} \sigma_{jj} .$$

Dans les axes principaux,

$$\begin{aligned} -\hat{I}_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{6}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \frac{1}{6}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2) \end{aligned}$$

Dans le cas d'une extension simple, pour  $\sigma_1 = \sigma_{\text{lim}}$ , on a

$$(-\hat{I}_2)_{\text{lim}} = \frac{1}{3} \sigma_{\text{lim}}^2 ,$$

ce qui mène au critère

$$\frac{1}{6}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2) = \frac{1}{3} \sigma_{\text{lim}}^2 \quad (76)$$

ou encore,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_{\text{lim}} \quad (76')$$

## 8. CONSERVATION DE L'ENERGIE

### 8.1 - Forme locale

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un volume donné du milieu continu vaut

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV . \quad (77)$$

Elle est égale à la somme des travaux des forces extérieures et des forces intérieures, additionnée de l'afflux de chaleur par unité de temps. Passons ces différents termes en revue. La puissance des forces extérieures vaut

$$\int_V \rho g_i u_i dV + \int_S t_i v_i dV . \quad (78)$$

La puissance des forces intérieures est, par définition, ramenée au taux de décroissance de l'énergie interne. Si  $u$  désigne l'énergie interne par unité de masse, cette puissance vaut donc

$$- \frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV . \quad (79)$$

En ce qui concerne l'afflux de chaleur, définissons  $\underline{q}$  comme le vecteur densité de flux thermique, dont le flux sortant par un élément de surface  $dS$  par unité de temps est

$$q_i n_i dS .$$

La chaleur entrant dans le corps par unité de temps est donc

$$- \int_S q_i n_i dS . \quad (80)$$

Le bilan énergétique s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV &= - \frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV + \int_S t_i v_i dS + \int_V \rho g_i v_i dV - \int_S q_i n_i dS. \\ \text{I} & \qquad \qquad \text{II} & \qquad \qquad \text{III} & \qquad \qquad \text{IV} & \qquad \qquad \text{V} \end{aligned} \quad (81)$$

Le terme III s'écrit encore

$$\begin{aligned} \int_S n_j \sigma_{ji} v_i dS &= \int_V \sigma_{ji,j} v_i dV + \int_V \sigma_{ji} v_{i,j} dV \\ &= \int_V \sigma_{ji,j} v_i dV + \int_V \sigma_{ji} \epsilon_{ji} dV , \end{aligned} \quad (82)$$

en tenant compte de la symétrie du tenseur des tensions. Le terme I se transforme en

$$\int_V \rho v_i \frac{D}{Dt} v_i dV , \quad (83)$$

eu égard à la conservation de la masse (éq. 45). Enfin, le terme V se transforme en

$$-\int_V q_{i,i} dV . \quad (84)$$

Rassemblant ces résultats, on obtient

$$\int_V v_i \left( \rho \frac{D}{Dt} v_i - \rho g_i - \sigma_{ji,j} \right) dV = \\ - \int_V \left( \rho \frac{Du}{Dt} - \sigma_{ji} \theta_{ji} + q_{i,i} \right) dV .$$

Le premier membre est nul, en application de la conservation de la quantité de mouvement. Vu l'arbitraire du volume  $V$ , on obtient donc l'équation

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \sigma_{ji} \theta_{ji} - q_{i,i} \quad (85)$$

C'est l'expression locale du premier principe de la thermodynamique.

### 8.2 - Principe de l'équilibre local

La thermodynamique classique s'occupe essentiellement des systèmes en équilibre. Le comportement du système peut alors être défini par un petit nombre de variables macroscopiques, pression, volume, température... auxquelles il faut ajouter l'entropie, qui tient compte des transformations microscopiques.

Un corps continu qui se meut, dont les températures diffèrent d'un point à l'autre, etc..., ne peut certes pas être considéré comme un système en équilibre. Mais en divisant finement le corps, on s'attend à voir les variations sur chaque petit morceau s'atténuer au point que l'on puisse les négliger: on aura alors un ensemble de petits systèmes en équilibre interne qui interagissent entre eux. La possibilité d'arriver à un tel équilibre local avant de descendre à une échelle tellement petite que le corps ne puisse plus être considéré comme continu (les systèmes continus sont en fait discrets!) constitue une forme de postulat, connu sous le nom de principe de l'équilibre local.

L'énergie interne d'un élément infinitésimal de volume  $dV$  sera en général une fonction de la déformation qu'il a subie à partir de l'état initial et de l'entropie spécifique  $S$ . Pour mesurer la déformation du corps, partons du fait qu'un élément de longueur en  $t = 0$  est donné par

$$dl_0^2 = da_i da_i$$

Lors du mouvement, la distance entre les deux mêmes particules très voisines devient

$$dl^2 = dx_i dx_i = J_{ij} da_j J_{ik} da_k .$$

Il y a déformation si certaines longueurs varient au cours du mouvement. On peut exprimer la variation de longueur de tout élément  $da_i$  par

$$dl^2 - dl_0^2 = 2 \gamma_{ij} da_i da_j ,$$

avec

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (J_{mi} J_{mj} - \delta_{ij}) . \quad (86)$$

C'est la mesure de déformation de Green. Comme les six composantes indépendantes de  $\gamma_{ij}$  contiennent tous les renseignements sur les variations de longueur, il est naturel de poser

$$u = \bar{u}(\gamma_{ij}, s) . \quad (87)$$

Définissant les tensions élastiques lagrangiennes  $r_{ij}^e$  par

$$r_{ij}^e = \left( \frac{\partial u}{\partial \gamma_{ij}} \right)_s \quad (88)$$

et la température absolue  $T$  par

$$T = \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right) \gamma_{ij} , \quad (89)$$

on a donc

$$\rho \frac{Du}{Dt} = r_{ij}^e \frac{D\gamma_{ij}}{Dt} + \rho T \frac{Ds}{Dt} .$$

On peut transformer cette expression en notant que

$$\begin{aligned} \frac{D\gamma_{ij}}{Dt} &= \frac{1}{2} \left( \frac{DJ_{mi}}{Dt} J_{mj} + J_{mi} \frac{DJ_{mj}}{Dt} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( J_{mj} \frac{D}{Dt} \frac{\partial x_m}{\partial a_i} + J_{mi} \frac{D}{Dt} \frac{\partial x_m}{\partial a_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( J_{mj} \frac{\partial v_m}{\partial a_i} + J_{mi} \frac{\partial v_m}{\partial a_j} \right) = \frac{1}{2} (J_{mj} J_{pi} v_{m,p} + J_{mi} J_{pj} v_{m,p}) \end{aligned}$$

et, en intervertissant les indices muets  $m$  et  $p$  dans le dernier terme,

$$\frac{D\gamma_{ij}}{Dt} = J_{mj} J_{pi} \frac{1}{2} (v_{m,p} + v_{p,m}) = J_{mj} J_{pi} \theta_{mp} .$$

Il vient donc

$$\frac{Du}{Dt} = r_{ij}^e J_{mj} J_{pi} \theta_{mp} + \rho T \frac{Ds}{Dt} = \sigma_{mp}^e \theta_{mp} + \rho T \frac{Ds}{Dt} , \quad (90)$$

en définissant les tensions élastiques eulériennes

$$\sigma_{mp}^e = J_{mi} J_{pj} r_{ij}^e = J_{mi} J_{pj} \left( \frac{\partial u}{\partial \gamma_{ij}} \right)_s . \quad (91)$$

Comparant (90) avec (85), on obtient

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^e) \theta_{ij} - q_{i,i} = \tau_{ij} \theta_{ij} - q_{i,i} \quad , \quad (92)$$

en introduisant les tensions de frottement interne (visqueux)

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^e \quad . \quad (93)$$

L'équation (92) s'interprète comme un bilan thermique:  $\tau_{ij} \theta_{ij}$  représente la chaleur produite par frottement interne;  $-q_{i,i}$  est la chaleur accumulée du fait qu'il en entre plus qu'il n'en sort.

### 8.3 - Cas des fluides

Un corps continu est un fluide si une distorsion pure (changement de forme sans changement de volume) ne modifie pas son énergie interne. En d'autres termes, quel que soit le tenseur  $\theta_{ij}$ , on a

$$\sigma_{ij}^e \hat{\theta}_{ij} = 0 \quad .$$

En particulier, pour  $\theta_{ij} = \sigma_{ij}^e$ , on obtient, vu l'orthogonalité d'un déviateur et d'un tenseur isotrope,

$$0 = (\hat{\sigma}_{ij}^e + \frac{1}{3} \sigma_{ll}^e \delta_{ij}) \hat{\sigma}_{ij}^e = \hat{\sigma}_{ij}^e \hat{\sigma}_{ij}^e \quad ,$$

ce qui entraîne que les tensions élastiques ont la forme

$$\sigma_{ij}^e = -p \delta_{ij} \quad (94)$$

où apparaît la pression  $p$ . Dans ce cas, on a

$$\frac{Du}{Dt} = -p \theta_{ii} + T \frac{Ds}{Dt} \quad .$$

Notant que, par la conservation de la masse,

$$\theta_{ii} = -v_{i,i} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad ,$$

on a donc

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} + T \frac{Ds}{Dt} \quad , \quad (95)$$

c'est-à-dire que l'énergie interne dépend de  $p$  et  $S$  seulement et que

$$p = \rho^2 \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_S \quad . \quad (96)$$

On retrouve là une relation thermodynamique bien connue.

### 8.4 - Forme intégrale de la conservation de l'énergie pour les fluides.

La forme intégrale de la conservation de l'énergie n'a guère

d'intérêt que pour les fluides. Partant de (81), supposons que

$$g_i = -\Omega_{,i} \quad (97)$$

Il en découle

$$\begin{aligned} \int_V \rho g_i v_i \, dV &= - \int_V \rho \Omega_{,i} v_i \, dV = - \int_S \rho \Omega n_i v_i \, dS + \int_V \Omega (\rho v_i)_{,i} \, dV \\ &= - \int_S \rho \Omega n_i v_i \, dS - \int_V \Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV, \end{aligned} \quad (98)$$

eu égard à la conservation de la masse. On a d'autre part

$$\int_S t_i v_i \, dS = \int_S (-p n_i v_i) \, dS + \int_V \tau_{ij} n_j v_i \, dS \quad (99)$$

On a par ailleurs

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) \, dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) \right) \, dV + \int_S \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) n_i v_i \, dS. \quad (100)$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \int_S \rho \left( u + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega \right) n_i v_i \, dS &= \int_S \tau_{ji} n_j v_i \, dS - \int_S q_i n_i \, dS \\ &\quad - \int_V \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho u + \rho \frac{v^2}{2} \right) + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \, dV \end{aligned} \quad (101)$$

Le premier membre fait apparaître l'enthalpie totale spécifique

$$h = u + \frac{p}{\rho} + \Omega + \frac{v^2}{2} \quad (102)$$

qui vérifie

$$\left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_{s,v,x} = \frac{1}{\rho}, \quad \left( \frac{\partial h}{\partial S} \right)_{p,v,x} = T \quad (103)$$

On notera que dans le cadre simplifié d'un fluide incompressible, l'enthalpie totale reste définie, au contraire de l'énergie interne.

Il vient alors

$$\begin{aligned} \int_S \rho h n_i v_i \, dS &= \int_S \tau_{ij} n_j v_i \, dS - \int_S n_i q_i \, dS \\ &\quad - \int_V \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho u + \rho \frac{v^2}{2} \right) + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \, dV. \end{aligned} \quad (104)$$

Appliquons ce résultat au cas d'une canalisation limitée par deux sections droites (fig. 3), l'écoulement étant supposé



permanent. Sur les parois, on a normalement  $v_i = 0$ ; de plus, on peut généralement admettre que  $\tau_{ji} n_j = 0$  sur  $S_1$  et  $S_2$  (forces visqueuses tangentielles). Définissant alors les enthalpies spécifiques totales moyennes à l'entrée et à la sortie par

$$h_1 = \frac{1}{G} \int_{S_1} h(\underline{v} \cdot \underline{n}') dS, \quad h_2 = \frac{1}{G} \int_{S_2} h(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS \quad (105)$$

et introduisant la quantité de chaleur  $\dot{Q}$  entrant dans le système

$$\dot{Q} = - \int_S q_i n_i dS, \quad (106)$$

on obtient simplement

$$h_2 - h_1 = \dot{Q} / G \quad . \quad (107)$$

Plus généralement, en supposant que  $\partial \Omega / \partial t = 0$ , ce qui a lieu notamment pour la pesanteur, on peut définir l'énergie totale du système par

$$E = \int_V \rho \left( u + \frac{v^2}{2} + \Omega \right) dV. \quad (108)$$

Lorsque les parois sont fixes, on a alors

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \dot{Q} + G_1 h_1 - G_2 h_2, \quad (109)$$

avec

$$h_1 = \frac{1}{G_1} \int_{S_1} h(\rho \underline{v} \cdot \underline{n}') dS; \quad h_2 = \frac{1}{G_2} \int_{S_2} h(\rho \underline{v} \cdot \underline{n}) dS \quad (110)$$

(On considère ici des écoulements non stationnaires, pour lesquels  $G_1$  et  $G_2$  peuvent différer)

#### 8.4 - Equation des machines à fluide

Le résultat précédent permet de traiter les machines à fluide en ne connaissant que leurs interactions avec l'extérieur. En général, une telle machine absorbe du fluide par une section d'entrée  $S_1$  et rejette du fluide par une section  $S_2$ . Simultanément, elle reçoit de l'ambiance une chaleur  $Q$  par unité de temps et fournit une puissance  $P$ . On peut toujours imaginer que la machine est connectée en amont et en aval à deux grands réservoirs de fluide isolés (fig. 14). L'application de la formule (109) à ces réservoirs donne

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = - G_1 h_1, \quad \frac{\partial E_2}{\partial t} = G_2 h_2$$

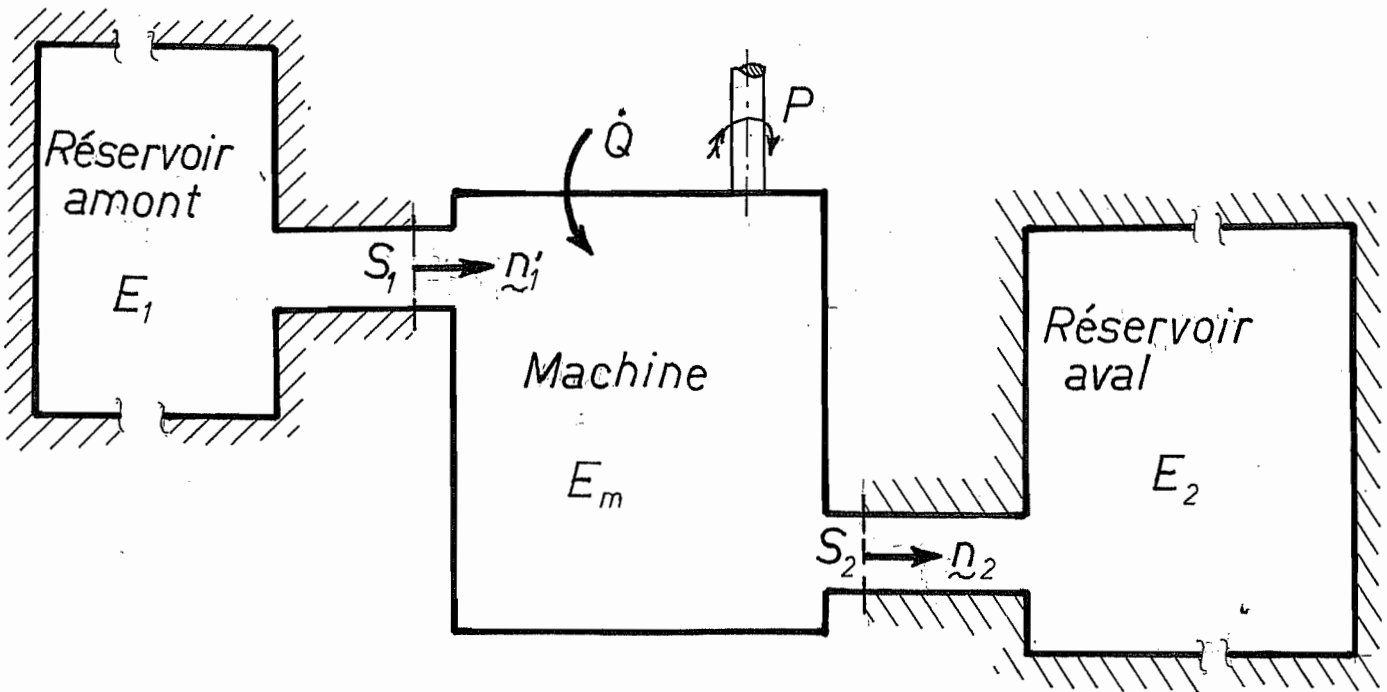


FIG. 14

Appliquant alors le premier principe de la thermodynamique au système (machine + réservoirs), on obtient

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial E_m}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial t} = \dot{Q} - P \quad .$$

Il en découle

$$P = \dot{Q} - \frac{\partial E_m}{\partial t} + G_1 h_1 - G_2 h_2 \quad . \quad (111)$$

La plupart des machines utilisées dans le domaine technique ont un fonctionnement cyclique, c'est-à-dire qu'il existe une période  $\tau$  telle que, pour  $t_1$  quelconque,

$$\int_{t_1}^{t_1+\tau} \frac{\partial E_m}{\partial t} dt = 0$$

et

$$\int_{t_1}^{t_1+\tau} G_1 dt = \int_{t_1}^{t_1+\tau} G_2 dt = M_{\text{cycle}} \quad ,$$

$M_{\text{cycle}}$  étant la masse de fluide transitant par la machine au cours de la période. Alors, en posant

$$\mathcal{C}_{\text{cycle}} = \int_{t_1}^{t_1+\tau} P dt \quad ; \quad Q_{\text{cycle}} = \int_{t_1}^{t_1+\tau} \dot{Q} dt$$

et en définissant les enthalpies totales moyennes

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{M_{\text{cycle}}} \int_{t_1}^{t_1 + \tau} G_1 h_1 dt$$

$$\bar{h}_2 = \frac{1}{M_{\text{cycle}}} \int_{t_1}^{t_1 + \tau} G_2 h_2 dt ,$$

on obtient

$$\mathcal{C}_{\text{cycle}} = M_{\text{cycle}} (\bar{h}_1 - \bar{h}_2) + Q_{\text{cycle}} \quad (112)$$

C'est l'équation générale des machines cycliques. En particulier, si le fonctionnement de la machine est adiabatique (réversible ou non), on a

$$\mathcal{C}_{\text{cycle}} = M_{\text{cycle}} (\bar{h}_1 - \bar{h}_2) \quad (113)$$

Lorsque l'on considère des intervalles de temps grands devant la période, on peut définir la puissance moyenne

$$\bar{P} = \mathcal{C} / \tau$$

le flux moyen de chaleur

$$\bar{Q} = Q_{\text{cycle}} / \tau$$

et le débit moyen

$$\bar{G} = M_{\text{cycle}} / \tau$$

L'équation (112) s'écrit alors

$$\bar{P} = \bar{Q} + \bar{G} (\bar{h}_1 - \bar{h}_2) \quad (114)$$

### 8.5 - Bilan entropique

Déterminons à présent le taux de variation d'entropie d'un volume V. On a, par (92),

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho s dV &= \int_V \rho \frac{Ds}{Dt} dV = \int_V \left( \frac{\tau_{ij} \theta_{ij}}{T} - \frac{1}{T} q_{i,i} \right) dV \\ &= \int_V \left( \frac{1}{T} \tau_{ij} \theta_{ij} + q_i \left( \frac{1}{T} \right)_{,i} - \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} \right) dV \\ &= \int_V \left( \frac{\tau_{ij} \theta_{ij}}{T} + q_i \left( \frac{1}{T} \right)_{,i} \right) dV - \int_S \frac{1}{T} n_i q_i dS \quad (115) \end{aligned}$$

Si le terme de volume était nul, l'augmentation de l'entropie serait due au seul flux de chaleur, et la transformation serait réversible. Le terme de volume représente donc la production d'entropie due à l'irréversibilité. La grandeur

$$\sigma(s) = \frac{\tau_{ij} \theta_{ij}}{T} + q_i \left(\frac{1}{T}\right)_{,i} \quad (116)$$

est le taux de production d'entropie par unité de volume. Pour satisfaire au second principe de la thermodynamique, il faut que

$$\sigma(s) \geq 0. \quad (117)$$

Observons que les deux termes qui composent la production d'entropie sont liés à des phénomènes différents: le premier mesure l'entropie due aux frottements internes et s'annule en l'absence de mouvement; le second représente l'irréversibilité liée à l'écoulement de chaleur entre deux points de températures différentes. Par conséquent, ces deux termes devront être positifs séparément. Comme la température absolue est positive, cela implique les conditions

$$\tau_{ij} \theta_{ij} \geq 0 \quad , \quad q_i T_{,i} \leq 0. \quad (118)$$

Il s'agit de conditions à remplir par les lois de comportement pour être physiquement acceptables. Admettant par exemple des lois linéaires de la forme

$$\tau_{ij} = \mu_{ijkl} \theta_{kl} \quad , \quad q_i = -\lambda_{ij} T_{,j} \quad , \quad (119)$$

les tenseurs  $\mu_{ijkl}$  et  $\lambda_{ij}$  devront vérifier les conditions

$$\begin{cases} \mu_{ijkl} \theta_{ij} \theta_{kl} \geq 0 & \forall \theta_{ij} \\ \lambda_{ij} T_{,i} T_{,j} \geq 0 & \forall T_{,i} \end{cases} \quad (120)$$

\*                      \*

EXERCICES

1. Étant donné une courbe fermée  $\mathcal{C}$  qui se déplace avec les particules lors de leur mouvement, calculer

$$I = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{C}} v_i dx_i .$$

Suggestion : A  $\mathcal{C}$  correspond, en  $t=0$ , la courbe  $\mathcal{C}_0$ , que l'on peut décrire à l'aide d'un paramètre  $s$ . On a alors

$$x_i = X_i(s, t)$$

et

$$\int_{\mathcal{C}} v_i dx_i = \int_{\mathcal{C}_0} v_i(X_j, t) \frac{\partial X_i}{\partial s} ds .$$

Dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathcal{C}_0} \frac{Dv_i}{Dt} \frac{\partial X_i}{\partial s} ds + \int_{\mathcal{C}_0} v_i \frac{\partial v_i}{\partial s} ds \\ &= \int_{\mathcal{C}} \gamma_i dx_i + \int_{\mathcal{C}_0} \frac{\partial}{\partial s} (v^2/2) ds = \int_{\mathcal{C}} \gamma_i dx_i \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est l'accélération.

2. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que, si les conditions suivantes sont remplies simultanément:

a)  $g_i = -\Omega_{,i} \quad ; \quad \sigma_{ji} = -p \delta_{ij}$

b) Il existe une fonction  $f$  telle que  $df = dp/\rho$  .

c) En  $t = 0$ ,  $\text{rot } \underline{v} = 0$  dans  $V$  ,

Le rotationnel de la vitesse reste constamment nul dans  $V$ . ( $V$  simplement connexe)

Suggestion: On a alors

$$\gamma_i = -\Omega_{,i} - f_{,i} ,$$

ce qui entraîne que, sur toute courbe fermée,

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{C}} v_i dx_i = 0 .$$

La circulation de la vitesse étant nulle en  $t = 0$  en vertu de c), on obtient

$$\int_{\mathcal{C}} v_i dx_i = 0 \quad \text{sur tout } \mathcal{C} \text{ et pour tout } t .$$

Ceci permet de définir un potentiel uniforme  $\varphi(x_i, t)$  tel que

$$v_i = \varphi_{,i} ,$$

par la formule

$$\varphi(P, t) = \varphi(P_0, t) + \int_{\widehat{P_0 P}} v_i dx_i ,$$

$P_0$  étant un point fixé d'avance, de même que  $\varphi(P_0, t)$ , et  $\widehat{P_0 P}$  étant une courbe quelconque joignant  $P_0$  à  $P$ . Dès lors,

$$\text{rot } \underline{v} = \text{rot grad } \varphi = 0 , \text{ C.Q.F.D.}$$

3. Montrer que le critère de Von Mises revient à utiliser comme critère de mise hors service

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 ,$$

où  $R_1, R_2$  et  $R_3$  sont les rayons des trois cercles de Mohr.

4. On appelle tension tangentielle octaédrale la tension tangentielle qui, dans les axes principaux, agit sur la facette normale au vecteur  $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ . Montrer que le critère de Von Mises équivaut au critère

$$\tau_{oc} = \tau_{oc \text{ lim}} \quad (\tau_{oc} = \text{tension tg octaédrale})$$

Suggestion :  $\tau_{oc}^2 = t_{oc}^2 - \sigma_{oc}^2$ , avec

$$t_{oc}^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)/3 , \quad \sigma_{oc} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 .$$

5. Montrer que, dans les conditions de l'exercice 2, la quantité

$$\Omega + f + (v^2/2)$$

a une valeur unique dans le volume  $V$  considéré, si  $\partial v_i / \partial t = 0$ .

Suggestion: Appliquant la formule de Lagrange

$$\underline{\gamma} = \partial \underline{v} / \partial t + \frac{1}{2} \text{grad}(v^2) + \text{rot } \underline{v} \times \underline{v}$$

et notant que  $\text{rot } \underline{v} = 0$  (pour autant qu'il en soit ainsi en  $t = 0$ ), on obtient à partir de l'équation de mouvement

$$\text{grad}(\Omega + f + (v^2/2)) = 0 .$$

Ce cas se produit pour un fluide incompressible et non visqueux. La fonction invariante est alors, si  $\underline{g} = -g \underline{e}_3$  (pesanteur),

$$gz + (p/\rho) + v^2/2 .$$

6. On considère l'écoulement permanent d'un fluide incompressible dans un canal limité par deux sections normales  $S_1$  et  $S_2$ . Le fluide est visqueux ( $\tau_{ij} \neq 0$ ) et sur les parois,  $v_i = 0$ . En  $S_1$  et  $S_2$ , on peut admettre  $n_i n_j \tau_{ij} = 0$ . En outre,  $g_i = -\Omega_{,i}$ . Exprimer la variation de la grandeur  $(p/\rho + \Omega + v^2/2)$  entre les deux extrémités, en termes de moyennes de la forme (fig.3)

$$f_1 = \frac{1}{G} \int_{S_1} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{1}{G} \int_{S_2} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS$$

Suggestion - On a

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\rho \Omega_{,i} - p_{,i} + \tau_{ji,j} .$$

Multipliant par  $v_i$ , on obtient

$$\rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} = -\rho \Omega_{,i} v_i - \frac{p_{,i}}{\rho} \rho v_i + \tau_{ji,j} v_i .$$

Après intégration, il vient

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v^2/2 dV = - \int_V \Omega_{,i} \rho v_i dV - \int_V (p/\rho)_{,i} \rho v_i dV + \int_V \tau_{ji,j} v_i dV$$

Tenant compte du caractère permanent de l'écoulement et eu égard à la conservation de la masse, on obtient

$$\int_S (v^2/2) \rho v \cdot n dS = - \int_S (p/\rho + \Omega) \rho v \cdot n dS - \int_V \tau_{ji} \theta_{ji} dV$$

soit, en introduisant les moyennes de  $p$ ,  $\Omega$ , et  $v^2$ ,

$$G(\Omega_2 + p_2/\rho + v_2^2/2) = G(\Omega_1 + p_1/\rho + v_1^2/2) - P_f$$

où apparaît la puissance de frottement

$$P_f = \int_V \tau_{ji} \theta_{ji} dV .$$

La relation précédente est très utilisée en hydraulique, sous le nom de relation de Bernoulli.

7. Retrouver le résultat précédent à partir de la conservation de l'énergie.

Suggestion - La relation (104) implique, dans les conditions de l'exercice précédent,

$$\int_V \rho \frac{Dh}{Dt} dV = - \int_S q_i n_i dS = - \int_V q_{i,i} dV .$$

Par (92), on a

$$- q_{i,i} = \rho T \frac{Ds}{Dt} - \tau_{ji} \theta_{ji} .$$

De plus,

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \rho T \frac{Ds}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} (\Omega + v^2/2) .$$

On obtient donc

$$\int_V (\rho \frac{D}{Dt} (p/\rho) + \rho T \frac{Ds}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} (\Omega + v^2/2)) dV = \int_V (\rho T \frac{Ds}{Dt} - \tau_{ji} \theta_{ji}) dV$$

L'entropie s'élimine, et on obtient une expression équivalente à la précédente.

\* 8. On considère (fig.15) un rotor tournant à une vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de l'axe  $e_3$ . Du fluide entre par une section  $S_1$  et sort par une section  $S_2$ . Le mouvement relatif du fluide par rapport au rotor est permanent. Exprimer les conditions de conservation de la masse, de conservation du moment de la quantité de mouvement et de conservation de l'énergie. Calculer la valeur du couple transmis par le fluide au rotor.

Solution

a) Dérivée particulaire en axes relatifs

On a ici, en notant  $w$  la vitesse relative, et dans un système d'axes lié au rotor,

$$\frac{D}{Dt} f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + f_{,i} \frac{Dx_i}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + w_i f_{,i} .$$

Pour les vecteurs de la forme  $\tilde{a} = a_i \tilde{e}_i$ , il faut distinguer les dérivées relatives

$$\frac{Da_i}{Dt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial a_i}{\partial t}$$

et la dérivée absolue

$$\overline{\frac{Da_i}{Dt}} = \tilde{e}_i \cdot \frac{D}{Dt} (a_j \tilde{e}_j) = \frac{Da_i}{Dt} + a_j \tilde{e}_i \cdot \frac{D\tilde{e}_j}{Dt} .$$

Comme

$$\tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_j = \delta_{ij} ,$$

on a

$$\tilde{e}_i \cdot \frac{D\tilde{e}_j}{Dt} + \tilde{e}_j \cdot \frac{D\tilde{e}_i}{Dt} = 0 ,$$

c'est-à-dire que

$$\omega_{ij} = \tilde{e}_j \cdot \frac{D\tilde{e}_i}{Dt}$$

est antisymétrique et admet donc la forme

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega_k .$$

On en déduit

$$\overline{\frac{Da_i}{Dt}} = \frac{Da_i}{Dt} + \varepsilon_{ijk} \omega_j a_k .$$

En particulier, pour  $a_i = x_i$ , et en supposant  $Dx_i/Dt = 0$ , on trouve

$$\overline{Dx_i}/Dt = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k ,$$

ce qui montre que  $\omega$  n'est autre que le vecteur-rotation du rotor.

b) Lois de conservation



On a ici, en notant  $a_i$  les coordonnées relatives en  $t = 0$ ,

$$J = \text{dtm} \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} > 0$$

et  $D J / Dt = J w_{i,i}$ . Par conséquent,

$$\frac{D}{Dt} \int_V f(x, t) dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S f n_i w_i dS.$$

c) Conservation de la masse

On a

$$0 = \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho n_i w_i dS$$

soit, comme le mouvement est permanent et que  $n_i w_i = 0$  sur les parois,

$$G_1 = G_2 = G,$$

avec

$$G_1 = \int_{S_1} \rho w_i n_i' dS, \quad G_2 = \int_{S_2} \rho w_i n_i dS.$$

d) Conservation du moment de la quantité de mouvement

La dérivée absolue du moment de la quantité de mouvement est égale au moment des forces extérieures: en notant  $c_i$  les vitesses absolues, cette condition s'écrit

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j c_k dV = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho g_k dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k dS.$$

La première intégrale s'écrit encore

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j c_k dV + \varepsilon_{ipq} \omega_p \int_V \rho \varepsilon_{qjk} x_j c_k dV.$$

et le dernier terme se transforme en

$$\int_V \rho (\omega_k c_k x_i - \omega_j x_j c_i) dV = \int_V \rho (\omega c_3 x_i - \omega x_3 c_i) dV$$

puisque  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$ . Pour un mouvement permanent, on a donc

$$\begin{aligned} \int \rho \varepsilon_{ijk} x_j c_k (n_l w_l) dS &= \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho g_k dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k dS \\ &\quad - \int_V \rho (\omega c_3 x_i - \omega x_3 c_i) dV. \end{aligned}$$

C'est la composante selon  $e_3$  de cette équation qui est la plus intéressante. En notant  $r$  la distance à l'axe de rotation et  $\theta$  la direction tangente au mouvement d'entraînement, on a en général

$$\varepsilon_{3jk} x_j f_k = x_1 f_2 - x_2 f_1 = r f_\theta$$

Par ailleurs, la dernière intégrale du second membre a pour intégrand, selon  $e_3$ ,

$$\omega c_3 x_3 - \omega x_3 c_3 = 0.$$

L'intégrale sur la surface peut s'écrire

$$+ \int_{S_1} r t_\theta dS + \int_{S_2} r t_\theta dS + \int_{\text{parois}} r t_\theta dS.$$

Le terme relatif aux parois représente, au signe près, le couple  $C$  appliqué par le fluide sur le rotor. Sur  $S_1$  et  $S_2$ , on peut généralement identifier les tractions de surface à une pression normale,

$$t_i = -p n_i.$$

On peut alors écrire la conservation du moment de la quantité de mouvement sous la forme

$$\int_S \rho r c_\theta (n_1 w_1) dS = \int_V \rho r g_\theta dV - \int_{S_1} r p n_\theta dS - \int_{S_2} r p n_\theta dS - C$$

Définissant les grandeurs moyennes suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} r dS \quad ; \quad r_2 = \frac{1}{S_2} \int_{S_2} r dS \\ c_{\theta 1} = \frac{1}{r_1 G} \int_{S_1} r c_\theta (\rho w_j n_j^i) dS \\ c_{\theta 2} = \frac{1}{r_2 G} \int_{S_2} r c_\theta (\rho w_j n_j^i) dS \\ F_{\theta 1} = \frac{1}{r_1 S_1} \int_{S_1} r p n_\theta^i dS \\ F_{\theta 2} = \frac{1}{r_2 S_2} \int_{S_2} r p n_\theta dS \\ M_g = \int_V \rho r g_\theta dV, \end{array} \right.$$

le couple  $C$  vaut:

$$C = G (r_1 c_{\theta 1} - r_2 c_{\theta 2}) + M_g + r_1 F_{\theta 1} - r_2 F_{\theta 2}$$

Introduisant les vitesses d'entraînement  $U = \omega r$ , on peut écrire la puissance fournie par le fluide au rotor sous la forme

$$P = C\omega = G (U_1 c_{\theta 1} - U_2 c_{\theta 2}) + M_g \omega + U_1 F_{\theta 1} - U_2 F_{\theta 2} .$$

C'est la célèbre formule d'Euler.

e) Conservation de l'énergie

La variation de l'énergie interne est égale à la somme des travaux des forces extérieures et des forces d'inertie, augmentée de la chaleur entrante. On considère un écoulement permanent, avec  $w_i = 0$  sur les parois et on admet que les tractions de surface en  $S_1$  et  $S_2$  sont assimilables à des pressions normales. On a alors

$$(1) \quad \frac{D}{Dt} \int_V \rho u \, dV = - \int_{S_1} u (\rho w_j n_j^i) \, dS + \int_{S_2} u (\rho w_j n_j) \, dS \\ = G (u_2 - u_1) ,$$

avec

$$u_1 = \frac{1}{G} \int_{S_1} u (\rho w_j n_j^i) \, dS ; \quad u_2 = \frac{1}{G} \int_{S_2} u (\rho w_j n_j) \, dS$$

$$(2) \quad P_g = \int_V \rho g_i w_i \, dV = - \int_V \Omega_{,i} \rho w_i \, dV = - \int_S \Omega n_i (\rho w_i) \, dS \\ = G (\Omega_2 - \Omega_1) ,$$

avec

$$\Omega_1 = \frac{1}{G} \int_{S_1} \Omega (\rho w_j n_j^i) \, dS ; \quad \Omega_2 = \frac{1}{G} \int_{S_2} \Omega (\rho w_j n_j) \, dS$$

$$(3) \quad P_{\text{surf}} = \int_S t_i w_i \, dS = \int_{S_1} p n_i^i w_i \, dS + \int_{S_2} p n_i w_i \, dS \\ = ((\frac{p}{\rho})_1 - (\frac{p}{\rho})_2) G ,$$

avec

$$(p/\rho)_1 = \frac{1}{G} \int_{S_1} \frac{p}{\rho} (\rho n_j^i w_j) \, dS ; \quad (p/\rho)_2 = \frac{1}{G} \int_{S_2} \frac{p}{\rho} (\rho n_j w_j) \, dS$$

Les forces d'inertie se divisent en forces d'inertie relatives  $(-\rho \frac{Dw_i}{Dt})$ , forces d'inertie centrifuges  $(\rho \omega^2 r e_r)$  et forces de Coriolis  $(-2\rho \varepsilon_{ijk} \omega_j w_k)$ . Leurs puissances sont

$$(4) \quad P_{\text{ir}} = - \int_V \rho \frac{Dw_i}{Dt} w_i \, dV = - \frac{D}{Dt} \int_V \rho (w^2/2) \, dV = -G \left( \frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} \right) ,$$

avec

$$w_1^2 = \frac{1}{G} \int_{S_1} w^2 (\rho n_j^i w_j) dS \quad ; \quad w_2^2 = \frac{1}{G} \int_{S_2} w^2 (\rho n_j^i w_j) dS$$

$$(5) P_{i \text{ centr}} = \int_V \rho \omega^2 r w_r dV = \int_V \rho \omega^2 r \frac{Dr}{Dt} dV = \int_V \rho \omega^2 \frac{D}{Dt} (r^2/2) dV$$

$$= \int_S \omega^2 \frac{r^2}{2} (\rho n_j^i w_j) dS = \int_S \frac{U^2}{2} (\rho w_j n_j^i) dS = G(U_2^2 - U_1^2)/2$$

avec

$$U_1^2 = \frac{1}{G} \int_{S_1} U^2 (\rho w_j n_j^i) dS \quad ; \quad U_2^2 = \frac{1}{G} \int_{S_2} U^2 (\rho w_j n_j^i) dS$$

$$(6) P_{i \text{ Cor}} = \int_V (-\rho \varepsilon_{ijk} \omega_j w_k \omega_i) dV = 0 .$$

$$(7) \dot{Q} = - \int_S q_i n_i dS .$$

Au total, on a donc

$$G(u_2 + \Omega_2 + \left(\frac{p}{\rho}\right)_2 - \frac{U_2^2}{2} + \frac{w_2^2}{2}) = G(u_1 + \Omega_1 + \left(\frac{p}{\rho}\right)_1 - \frac{U_1^2}{2} + \frac{w_1^2}{2}) + \dot{Q}$$

Définissant l'enthalpie spécifique totale relative

$$h^* = u + (p/\rho) + \Omega - (U^2/2) + (w^2/2),$$

on a encore

$$h_2^* = h_1^* + \dot{Q}/G .$$

L'enthalpie spécifique totale relative se forme avec la vitesse relative en ce qui concerne l'énergie cinétique; en outre, il faut ajouter aux termes classiques un potentiel centrifuge  $(-U^2/2)$ .

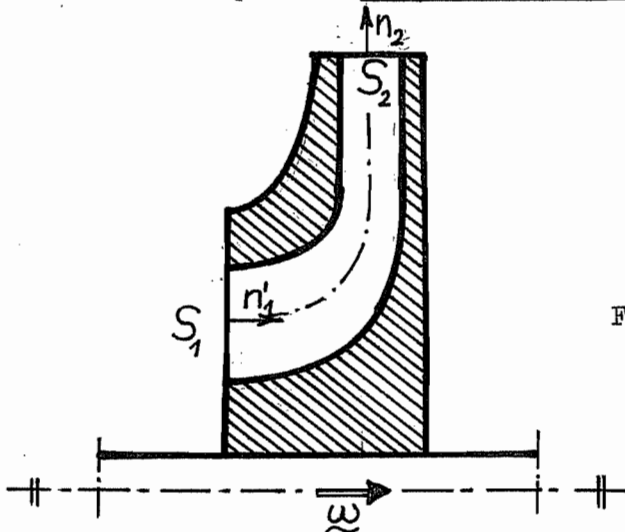


FIG. 15

9. Dans un turboréacteur, de l'air rentre à la vitesse  $v_1$ . Après combustion des gaz et passage dans la turbine, le gaz sort à la vitesse  $v_2$ . Le débit d'air est  $G$ , exprimé en kg/s. Le débit massique de combustible est très faible, en sorte que l'on peut admettre que le gaz sortant est assimilable à de l'air. Quelle est la poussée du turboréacteur?

Solution : Par simple application du théorème de la quantité de mouvement,

$$F = G (v_2 - v_1) ,$$

dans le sens opposé à l'écoulement. Le plus souvent, on a  $v_1 \ll v_2$ , d'où

$$F \approx G v_2 .$$

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ HELMHOLTZ - "Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegung entsprechen". Crelles J. 55, p.25 (1858)
- /2/ B. FRAEIJIS de VEUBEKE - "Cours de Mécanique des Fluides"  
Soc. Coop. de l'A.E.E.S., rue du Val Bemoit 41, Liège (1970)
- /3/ L. SEDOV - "Mécanique des Milieux Continus"  
Mir, Moscou (1975)
- /4/ Ch. MASSONNET - "Résistance des Matériaux"  
Tome II, Dunod, Paris (1965)
- /5/ P. GLANSDORFF, I. PRIGOGINE - "Structure, Stabilité et Fluctuations"  
Masson, Paris (1971)
- /6/ B. FRAEIJIS de VEUBEKE - "A Course in Elasticity"  
Math. Applied Sciences 29, Springer Verlag (1979)
- /7/ O. MOHR -  
Civilingénieur, p. 113 (1882)
- /8/ O. MOHR - "Abhandlungen aus dem Gebiet der technischen Mechanik"  
2<sup>e</sup> édition, Berlin (1918)
- /9/ A. FÖPPL - "Technische Mechanik"  
Vol. 5 (1918)
- /10/ L. SEDOV - "Similitude et Dimensions en Mécanique"  
Mir, Moscou (1977)
- /11/ V. KIRILLIN, ;V. SYTCHEV, A. SHEINDLIN - "Thermodynamique technique"  
2<sup>e</sup> éd., Mir, Moscou (1981)
- /12/ I. CHVETZ et al. - "Thermique Générale"  
Mir, Moscou (1969)