UNIVERSITE DE LIEGE

FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES

LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

LECONS SUR LES TENSEURS CARTESIENS

J.F. DEBONGNIE

Cours ENIM, Rabat, octobre 1984
Rapport LMF/D8

Leçons sur les tenseurs cartésiens

par

J.F. DEBONGNIE

I.C.M.E. (Mécanique) Liège 1973

Dr. en Sciences Appliquées

J.F DEBONGNIE - LECONS SUR LES TENSEURS CARTESIENS

ERRATA

..Page 21, (paragraphe 16). La dernière phrase de la page,

"Ce tenseur n'est pas dégénéré, car il admet de toute évidence l'inverse suivant

$$f^{-1}_{jl} = \sum_k \lambda_k^{-\frac{1}{2}} \, c_j^{(k)} \, c_l^{(k)}$$ "

est à remplacer par la phrase suivante:

"Ce tenseur, visiblement défini positif comme b_{ij}, ne peut donc être dégénéré, car l'existence d'une solution d_j à l'équation $f_{ij} d_j = 0$ entraînerait $f_{ij} d_i d_j = 0$, en contradiction avec (54)"

..Page 25, première ligne :

"où $\underset{\sim}{\omega}$ n'est autre que le rotationnel du vecteur $\underset{\sim}{u}$."

est à remplacer par:

"où $\underset{\sim}{\omega}$ n'est autre que le demi-rotationnel du vecteur $\underset{\sim}{u}$."

1. VECTEURS

Etant donné un repère orthonormal $\{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$, un vecteur $\underset{\sim}{a}$ quelconque peut être mis sous la forme

$$\underset{\sim}{a} = a_1 \underset{\sim}{e}_1 + a_2 \underset{\sim}{e}_2 + a_3 \underset{\sim}{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i \underset{\sim}{e}_i \quad . \tag{1}$$

On peut donc représenter ce vecteur en donnant ses trois composantes a_1, a_2, a_3. Cependant, de nombreuses opérations sur les vecteurs peuvent être décrites en considérant seulement *une composante générique* a_i du vecteur, ce qui mène à représenter le vecteur non pas par la notation de Gibbs $\underset{\sim}{a}$ mais par sa composante générique a_i. Dans ce cadre, le vecteur $\lambda \underset{\sim}{a}$ obtenu par multiplication de $\underset{\sim}{a}$ par un scalaire λ s'écrit simplement λa_i; la somme $(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b})$ de deux vecteurs s'écrit simplement $a_i + b_i$; le produit scalaire de deux vecteurs $\underset{\sim}{a}$ et $\underset{\sim}{b}$ est donné par

$$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, b_i \quad . \tag{2}$$

On allège cette dernière notation par la *convention de sommation d'Einstein : lorsque un indice est répété, il y a automatiquement somme sur les trois valeurs possibles de cet indice*. Nous écrirons donc

$$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = a_i \, b_i \quad . \tag{3}$$

De la même façon, nous écrirons encore

$$\underset{\sim}{a} = a_i \underset{\sim}{e}_i \quad . \tag{4}$$

Bien entendu, le nom (i) de l'indice utilisé pour la sommation n'a pas d'importance, et on aurait pu écrire indifféremment

$$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = a_k \, e_k \quad ,$$

par exemple. C'est pourquoi on dit que c'est un *indice muet*. Par opposition, un indice qui n'est pas muet est dit *franc*.

2. CARACTERE TENSORIEL

La définition (1) d'un vecteur pourrait laisser croire que ce vecteur dépend du système d'axes choisi. Mais précisément, les vecteurs que l'on rencontre en physique sont des êtres intrinsèques, qui existent *indépendamment du système d'axes*. Cette propriété porte le nom de *caractère tensoriel*. Elle implique une relation bien déterminée entre les composantes a_i du vecteur $\underset{\sim}{a}$ dans le repère $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ et les composantes $a_{i'}$ de ce même vecteur dans un autre repère orthonormé $\{\underset{\sim}{e}_{i'}\}$. (Noter que le prime affecte <u>les indices</u> !). Pour établir cette relation, notons que l'on peut écrire

$$\underset{\sim}{e}_i = (\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_{j'}) \underset{\sim}{e}_{j'} = \alpha_{ij'} \underset{\sim}{e}_{j'} \quad , \tag{5}$$

où apparaît la <u>matrice de transformation</u>

$$\alpha_{ij'} = \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_{j'} \quad , \tag{6}$$

ce qui entraîne

$$\underset{\sim}{a} = a_i \underset{\sim}{e}_i = a_i \alpha_{ij'} \underset{\sim}{e}_{j'}$$

et

$$\underset{\sim}{a} = a_{j'} \underset{\sim}{e}_{j'} \quad .$$

Par identification, il vient

$$a_{j'} = \alpha_{ij'} a_i \quad . \tag{7}$$

A l'inverse, on a

$$\underset{\sim}{e}_{i'} = (\underset{\sim}{e}_{i'} \cdot \underset{\sim}{e}_j) \underset{\sim}{e}_j = (\underset{\sim}{e}_j \cdot \underset{\sim}{e}_{i'}) \underset{\sim}{e}_j = \alpha_{ji'} e_j \quad ,$$

ce qui implique

$$\underset{\sim}{a} = a_{i'} e_{i'} = a_{i'} \alpha_{ji'} \underset{\sim}{e}_j \quad ,$$

relation qui, comparée avec

$$\underset{\sim}{a} = a_j \underset{\sim}{e}_j \ ,$$

donne

$$a_j = \alpha_{ji'} a_{i'} \ . \tag{8}$$

La matrice $\alpha_{ij'}$ est <u>orthogonale</u>. En effet,

$$a_i = \alpha_{ij'} a_{j'} = \alpha_{ij'} \alpha_{kj'} a_k \quad ,$$

ce qui signifie que

$$\alpha_{ij'} \alpha_{kj'} = \delta_{ik} \quad , \tag{9}$$

en introduisant lè <u>symbole de Kronecker</u>

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad .$$

De même,

$$a_{i'} = \alpha_{ji'}\, a_j = \alpha_{ji'}\, \alpha_{jk'}\, a_{k'} \quad ,$$

d'où

$$\alpha_{ji'}\, \alpha_{jk'} = \delta_{i'k'} \quad . \tag{10}$$

Les relations (7) et (8) permettent de distinguer les grandeurs à un indice qui ont le caractère tensoriel. Nous adopterons donc la définition suivante:

<u>Une grandeur à un indice est un tenseur d'ordre 1</u> (<u>ou</u> vecteur) <u>si elle vérifie la loi de transformation (8)</u> (ou la loi (7), car les deux propriétés sont équivalentes)

3. TENSEURS D'ORDRE ZERO

Revenant au produit scalaire, montrons qu'il conserve sa valeur lors d'un changement d'axes si ses facteurs sont des tenseurs d'ordre un. Soient donc a_i et b_i des tenseurs d'ordre un. On a

$$a_i\, b_i = \alpha_{ij'}\, a_{j'}\, \alpha_{ik'}\, b_{k'} = \alpha_{ij'}\, \alpha_{ik'}\, a_{j'}\, b_{k'} = \alpha_{j'k'}\, a_{j'}\, b_{k'} \quad .$$

Dans le dernier membre, on a

$$\alpha_{j'k'}\, a_{j'} = \sum_{j'} \begin{Bmatrix} 0 \text{ si } j' \neq k' \\ 1 \text{ si } j' = k' \end{Bmatrix} a_{j'} = a_{k'} \tag{11}$$

C'est d'ailleurs là une propriété fondamentale du symbole de Kronecker: il "change le nom de l'indice". Tenant compte de cette propriété, on obtient

$$a_i\, b_i = a_{k'}\, b_{k'} \quad , \tag{12}$$

c'est-à-dire que <u>le produit scalaire conserve sa valeur lors d'un changement d'axes orthonormaux</u>. On dit qu'il est <u>invariant</u> ou encore, que c'est un <u>tenseur d'ordre zéro</u>: par définition, <u>un invariant ou tenseur d'ordre zéro est une quantité scalaire indépendante du système d'axes.</u>

Insistons sur le fait qu'il existe de nombreux scalaires qui ne sont pas invariants. En voici un: soit $\underset{\sim}{c}$ un vecteur fixe, et définissons le scalaire

$$\lambda = \underset{\sim}{c} \cdot \underset{\sim}{e}_1 \quad .$$

Dans un autre système d'axes, on obtient en général

$$\lambda' = \underset{\sim}{c} \cdot \underset{\sim}{e}_{1'} \neq \lambda \quad .$$

4. TENSEURS DU SECOND ORDRE

Nous avons vu que le produit scalaire de deux tenseurs d'ordre 1 est un invariant. L'inverse est également vrai: supposons que a_i soit un tenseur du premier ordre, et b_i une grandeur à un indice. Montrons que si $a_i\ b_i$ est invariant, b_i est un tenseur du premier ordre. En effet, on a

$$a_i\ b_i = \begin{cases} \alpha_{ij'}\ a_{j'}\ b_i = a_j \\ a_{j'}\ b_{j'} \end{cases} ,$$

d'où

$$b_{j'} = \alpha_{ij'}\ b_i \quad ,$$

c'est-à-dire que b_i est un tenseur du premier ordre.

Appliquons ce résultat à la mécanique. Le travail d'une force f_i pour un déplacement dx_i vaut

$$d\mathcal{C} = f_i\ dx_i \ .$$

Or, il est clair que la valeur du travail ne peut dépendre du système d'axes choisi; de plus, le déplacement dx_i est un vecteur. Par conséquent, la force f_i est également un tenseur d'ordre un. En particulier, la loi de transformation des forces est

$$f_i = \alpha_{ij'}\ f_{j'} \ .$$

Soit à présent une grandeur à deux indices a_{ij}. Nous dirons, par analogie avec la propriété du produit scalaire, que c'est un tenseur d'ordre deux si, chaque fois que b_i et c_j sont des tenseurs d'ordre un, le "produit contracté"

$$a_{ij}\ b_i\ c_j \tag{13}$$

est invariant. Cette définition implique une certaine loi de transformation que nous allons déterminer. On a

$$a_{k'l'} b_{k'} c_{l'} = a_{ij} b_i c_j = a_{ij} \alpha_{ik'} b_{k'} \alpha_{jl'} c_{l'} = (\alpha_{ik'} \alpha_{jl'} a_{ij}) b_{k'} c_{l'} \ ,$$

ce qui implique

$$a_{k'l'} = \alpha_{ik'} \alpha_{jl'}\ a_{ij} \ . \tag{14}$$

A l'inverse,

$$a_{ij} b_i c_j = a_{k'l'} b_{k'} c_{l'} = a_{k'l'} \alpha_{ik'} b_i\ \alpha_{jl'} c_j = (\alpha_{ik'} \alpha_{jl'} a_{k'l'}) b_i c_j \ ,$$

ce qui entraîne

$$a_{ij} = \alpha_{ik'} \alpha_{jl'} a_{k'l'} \tag{15}$$

Donnons un exemple de tenseur du second ordre. Soit une relation linéaire entre deux tenseurs d'ordre un,

$$a_i = b_{ij} c_j .$$

La grandeur b_{ij} est-elle un tenseur? Transformant, on obtient

$$\alpha_{ik'} a_{k'} = b_{ij} \alpha_{jl'} c_{l'} ;$$

multipliant par $\alpha_{im'}$, il vient

$$\alpha_{im'} \alpha_{ik'} a_{k'} = \alpha_{im'} \alpha_{jl'} b_{ij} c_{l'}$$

soit

$$\delta_{m'k'} a_{k'} = \alpha_{im'} \alpha_{jl'} b_{ij} c_{l'}$$

ou encore,

$$a_{m'} = (\alpha_{im'} \alpha_{jl'} b_{ij}) c_{l'} .$$

La grandeur $b_{m'l'}$ jouant le même rôle que b_{ij} dans le système $\{e_{i'}\}$ est donc

$$b_{m'l'} = \alpha_{im'} \alpha_{jl'} b_{ij} ;$$

ce qui revient à dire que la loi de transformation (14) s'applique: b_{ij} est donc bien un tenseur du second ordre.

Il convient de prendre garde au fait suivant. La donnée des neuf composantes d'un tenseur du second ordre a_{ij} peut être faite à l'aide du tableau carré

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} .$$

Il ne faudrait pas en déduire pour autant que toute matrice est un tenseur. Le caractère tensoriel n'est assuré que si les composantes a_{ij} sont définies dans <u>un</u> système d'axes donné <u>et</u> si la loi de transformation (14) s'applique. Ainsi, les matrices $\alpha_{ij'}$, <u>ne sont pas des tenseurs</u>, car elles ne sont pas définies dans un système d'axes, mais à partir de <u>deux</u> systèmes d'axes.

Voici un second exemple de tenseur du second ordre. Soit un système élastique sollicité en un point (fig. 1). Pour obtenir un déplacement $u_1 \underset{\sim}{e}_1$ de ce point, il faut appliquer une force dont les composantes sont proportionnelles à u_1. Elle est donc de la forme

$$f_1 = k_{11}\, u_1 \quad , \quad f_2 = k_{21}\, u_1 \quad , \quad f_3 = k_{31}\, u_1 \; .$$

De la même façon, pour obtenir un déplacement $u_2 \underset{\sim}{e}_2$, il faut appliquer une force de composantes

$$f_1 = k_{12}\, u_2 \quad , \quad f_2 = k_{22}\, u_2 \quad , \quad f_3 = k_{32}\, u_2 \; .$$

Enfin, la force produisant un déplacement $u_3 \underset{\sim}{e}_3$ est donnée par

$$f_1 = k_{13}\, u_3 \quad , \quad f_2 = k_{23}\, u_3 \quad , \quad f_3 = k_{33}\, u_3$$

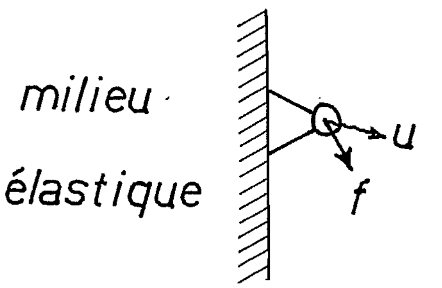

FIG. 1

Par superposition, on obtient un déplacement

$$u_1 \underset{\sim}{e}_1 + u_2 \underset{\sim}{e}_2 + u_3 \underset{\sim}{e}_3$$

en appliquant une force dont les composantes sont

$$f_1 = k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3$$
$$f_2 = k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3$$
$$f_3 = k_{31}u_1 + k_{32}u_2 + k_{33}u_3$$

soit

$$f_i = k_{ij}\, u_j .$$

Le travail virtuel de cette force pour un déplacement virtuel δu_i vaut

$$\delta\mathcal{T} = \delta u_i\, k_{ij}\, u_j \quad .$$

Comme tout travail, il s'agit d'une grandeur indépendante du système d'axes. Dès lors, étant donné que u_i et δu_i sont nécessairement des tenseurs du premier ordre, les grandeurs k_{ij} forment un tenseur du second ordre, que l'on peut appeler tenseur de raideur, car il généralise la notion de raideur d'un ressort. En particulier, lors d'un changement d'axes, k_{ij} se transforme suivant la loi

$$k_{i'j'} = \alpha_{li'}\, \alpha_{mj'}\, k_{lm} \quad .$$

5. TENSEURS D'ORDRE SUPERIEUR

Généralisant l'approche ci-dessus, on peut définir des tenseurs d'ordre plus élevé. En général, une grandeur indicée

$a_{ijklm...n}$

est un tenseur si le produit contracté de cette grandeur avec autant de tenseurs du premier ordre qu'elle a d'indices, est un invariant:

$$a_{ijklm...n}\, b_i\, c_j\, d_k\, e_l\, f_m ... g_n = \text{invariant}. \tag{16}$$

Par les mêmes raisonnements que ci-dessus, on vérifie que cette condition implique les lois de transformation

$$a_{ijklm...n} = \alpha_{ip'}\, \alpha_{jq'}\, \alpha_{kr'}\, \alpha_{ls'}\, \alpha_{mt'} ... \alpha_{nu'}\, a_{p'q'r's't'...u'}$$

$$a_{p'q'r's't'...u'} = \alpha_{ip'}\, \alpha_{jq'}\, \alpha_{jr'}\, \alpha_{ls'}\, \alpha_{mt'} ... \alpha_{nu'}\, a_{ijklm...n} \tag{17}$$

6. QUELQUES OPERATIONS SIMPLES SUR LES TENSEURS

Les opérations les plus courantes sur les tenseurs sont:

a) La multiplication par un scalaire

$$a_{ijk...} \mapsto \lambda a_{ijk...}$$

Pour autant que le scalaire λ soit invariant, le résultat de cette opération est un nouveau tenseur de même ordre que le tenseur de départ.

b) L'addition

L'addition n'est possible qu'entre tenseurs du même ordre:

$$(a_{ijk...}\,,\, b_{ijk...}) \mapsto a_{ijk...} + b_{ijk...}\,.$$

Le résultat est un tenseur de même ordre que les deux termes de la somme.

c) Le produit tensoriel ou dyadique

A partir de deux vecteurs a_i et b_j, on peut former la grandeur à deux indices

$$c_{ij} = a_i b_j,$$

appelée produit tensoriel ou produit dyadique. Est-ce un tenseur? On a

$$c_{ij} = \alpha_{ik'} a_{k'}\, \alpha_{jl'} b_{l'} = \alpha_{ik'}\, \alpha_{jl'} (a_{k'} b_{l'}) = \alpha_{ik'}\, \alpha_{jl'} c_{k'l'}$$

c'est-à-dire la loi de transformation (14). (Une autre démonstration consiste à remarquer que

$$c_{ij}\, d_i e_j = (a_i d_i)(b_j f_j) = \text{invariant},$$

en vertu des propriétés du produit scalaire; mais cette démonstration ne s'applique qu'aux produits de tenseurs d'ordre 1)

Le produit dyadique se généralise aux tenseurs d'ordre plus élevé. Ainsi, si a_{ijk} et b_{lmnp} sont des tenseurs, la grandeur à 7 indices $a_{ijk}\, b_{lmnp}$ est un tenseur d'ordre 7. (A vérifier à titre d'exercice).

d) <u>La contraction</u>

Etant donné un tenseur d'ordre n contenant entre autres un indice i et un indice j, on dit que l'on <u>contracte</u> ces deux indices lorsque l'on fait i = j (et la somme !). Le nombre d'indices francs qui restent après cette opération est donc (n-2).

<u>Ex.</u>

$$\underbrace{a_{ipqjl}}_{\text{n ind. francs}} \longmapsto \underbrace{a_{ipqil}}_{\text{(n-2) ind. francs}}$$

La grandeur résultante est un tenseur d'ordre (n - 2). En effet, on a

$$a_{ipqjl} = \alpha_{im'}\,\alpha_{pr'}\,\alpha_{qs'}\,\alpha_{jk'}\,\alpha_{lt'}\,a_{m'r's'k't'}\ ,$$

d'où

$$a_{ipqil} = \alpha_{im'}\,\alpha_{pr'}\,\alpha_{qs'}\,\alpha_{ik'}\,\alpha_{lt'}\,a_{m'r's'k't'}$$

$$= \alpha_{m'k'}\,\alpha_{pr'}\,\alpha_{qs'}\,\alpha_{lt'}\,a_{m'r's'k't'}$$

$$= \alpha_{pr'}\,\alpha_{qs'}\,\alpha_{lt'}\,a_{m'r's'm't'}\ .$$

Voici quelques exemples de contraction:

- Partant d'un produit tensoriel de deux vecteurs $a_i b_j$, la contraction donne le tenseur d'ordre zéro $a_i b_i$, où l'on reconnaît le <u>produit scalaire</u>.

- Partant d'un tenseur du second ordre a_{ij}, on obtient par contraction l'invariant a_{ii} appelé <u>trace</u> de a_{ij}.

- Partant du produit $a_{ij} b_{kl}$, on obtient, en contractant j et k le produit $a_{ik} b_{kl}$ qui est un tenseur du second ordre. La contraction de ses deux indices i et l donne l'invariant $a_{ik} b_{ki}$.

- Partant d'un tenseur du quatrième ordre C_{ijkl}, on obtient, en contractant i et j, le tenseur du second ordre C_{iikl}.

- Contractant les deux indices de δ_{ij}, on obtient

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3\ .$$

e) <u>Une application</u>

En notations de Gibbs, la distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition de vecteurs nécessite une démonstration spéciale: il n'y a en effet rien d'évident dans la formule

$$\underset{\sim}{a} \cdot (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{c} \quad .$$

En notations tensorielles, cette égalité s'écrit

$$a_i(b_i + c_i) = a_i b_i + a_i c_i$$

et ne suscite aucun doute.

7. GRADIENT

Etant donné un scalaire φ, nous utiliserons la notation

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad . \qquad (18)$$

La grandeur dont les composantes sont $\varphi_{,i}$ est appelée gradient de .

Montrons qu'il s'agit d'un tenseur d'ordre un. Considérant une variation infinitésimale dx_i des coordonnées—c'est le type même des vecteurs— la grandeur

$$d\varphi = \varphi_{,i}\, dx_i$$

est la différentielle de φ, qui est invariante. Par conséquent, $\varphi_{,i}$ est un tenseur d'ordre un.

Soit à présent u_i un tenseur du premier ordre. Son gradient $u_{i,j}$ est un tenseur d'ordre deux. En contractant les indices i et j, on obtient le tenseur d'ordre zéro

$$u_{i,i} = (\partial u_1/\partial x_1) + (\partial u_2/\partial x_2) + (\partial u_3/\partial x_3) \ , \qquad (19)$$

appelé divergence du vecteur u_i .

En combinant les opérations ci-dessus, on obtient la divergence du gradient:

$$\text{div}\ \underset{\sim}{\text{grad}}\, \varphi = (\varphi_{,i})_{,i} = \varphi_{,ii} = \nabla^2 \varphi \ ,$$

formule dont la mémorisation n'est pas nécessaire en calcul tensoriel. Dans le même ordre d'idées, aucun effort de mémoire n'est nécessaire pour obtenir en calcul tensoriel

$$\text{div}(\lambda \underset{\sim}{a}) = (\lambda a_i)_{,i} = \lambda_{,i} a_i + \lambda a_{i,i} = \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{\text{grad}}\lambda + \lambda\, \text{div}\ a$$

8. PRODUIT MIXTE DE TROIS VECTEURS

Calculons le volume du parallélipipède construit sur les trois vecteurs $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ (fig. 2). Tout point de ce parallélipipède est de la forme

$$\underset{\sim}{x} = y_1\, \underset{\sim}{a} + y_2\, \underset{\sim}{b} + y_3\, \underset{\sim}{c} \qquad , \qquad y_i \in\,]0, 1[\ , \ i = 1, 2, 3.$$

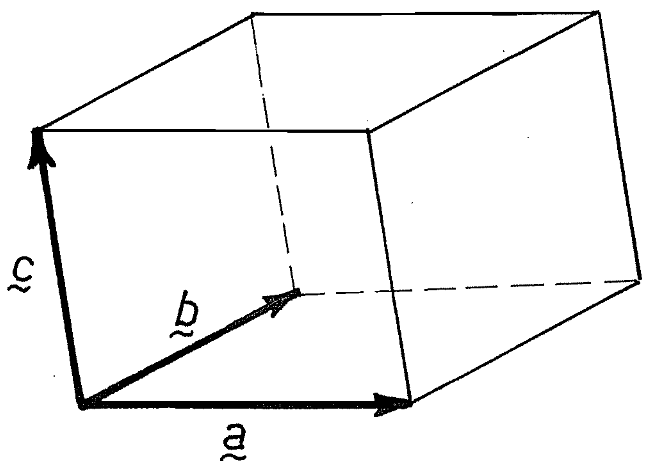

FIG. 2

Dans un repère donné, il est équivalent d'écrire

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} ,$$

où apparaît la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

qui est également la matrice jacobienne de la transformation $x \mapsto y$. Le volume du parallélipipède est donc

$$V_{pllpp} = \int_{pllpp} 1.\ dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int_0^1 dy_1 \int_0^1 dy_2 \int_0^1 |\mathrm{dtm}\ A|\ dy_3$$

$$= |\ \mathrm{dtm}\ A\ | \ .$$

On notera par ailleurs que le déterminant de A est <u>positif</u> si le trièdre $\{ \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}\}$ a <u>la même orientation</u> (dextrorsum ou sinistrorsum) que le trièdre de référence $\{ \underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$ et qu'il est <u>négatif</u> dans le cas où les deux trièdres sont d'<u>orientation inverse</u>.

On peut donc définir le <u>volume orienté</u> $(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c})$ défini par les trois vecteurs a, b, c par

$$(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{20}$$

Il s'agit d'un nombre dont la valeur absolue est égale au volume du parallélipipède construit sur ces trois vecteurs, et dont le signe est positif ou négatif selon que les trièdres $\{ \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}\}$ et $\{ \underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$ sont de même orientation ou d'orientation inverse (fig. 3). On donne le plus souvent le nom de <u>produit mixte</u> de $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ à ce volume orienté.

Lors d'un changement de repère, il est clair que le volume engendré par les trois vecteurs ne change pas. Par contre si l'an-

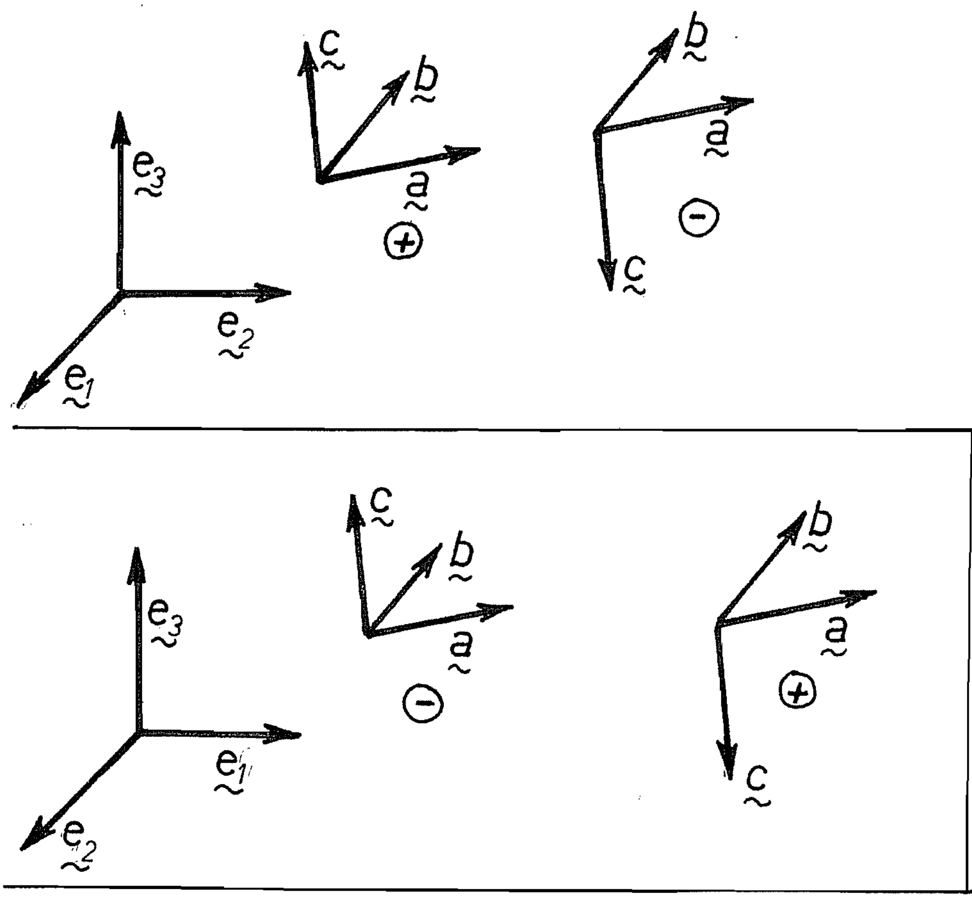

FIG. 3

signe du produit mixte

cien et le nouveau repères sont d'orientations contraires, le produit mixte (20) change de signe. <u>Le produit mixte n'est donc pas à proprement parler un invariant</u>. Cependant, comme sa variation se limite à une dépendance de son signe par rapport à l'orientation du trièdre de référence, on dit que c'est un <u>pseudo-tenseur</u> d'ordre zéro.

C'est précisément pour éviter tout problème de signe dans le produit mixte (et, comme nous le verrons, dans le produit vectoriel) que beaucoup d'exposés sur les vecteurs se limitent à considérer des trièdres d'<u>une</u> orientation bien déterminée (jadis, sinistrorsum, actuellement, dextrorsum).

Les produits mixtes ont les propriétés suivantes, qui découlent directement des propriétés des déterminants:

* $(\lambda \underset{\sim}{a}, \mu \underset{\sim}{b}, \nu \underset{\sim}{c}) = \lambda\mu\nu(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c})$
* $(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{d}) = (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{d}) + (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{d})$
* $(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{a}) = (\underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$
* $(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = -(\underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{a}) = -(\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{c}) = -(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{b})$
* $(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a}) = 0$

9. PRODUIT VECTORIEL, ALTERNATEUR ET ROTATIONNEL

Le produit vectoriel $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$ de deux vecteurs $\underset{\sim}{a}$ et $\underset{\sim}{b}$ peut être défini par la condition que

$$(\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}) \cdot \underset{\sim}{d} = (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{d}) \tag{21}$$

quel que soit le vecteur d .

Notant

$$\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} ,$$

il découle directement de la condition (21) que

$$c_i = \underset{\sim}{c} \cdot \underset{\sim}{e}_i = (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{e}_i) = (a_j\underset{\sim}{e}_j, b_k\underset{\sim}{e}_k, \underset{\sim}{e}_i) = a_j b_k (\underset{\sim}{e}_i, \underset{\sim}{e}_j, \underset{\sim}{e}_k)$$

soit

$$c_i = (\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k \quad , \tag{22}$$

en introduisant l'alternateur

$$\varepsilon_{ijk} = (\underset{\sim}{e}_i, \underset{\sim}{e}_j, \underset{\sim}{e}_k) = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1} \\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2} \\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \quad , \tag{23}$$

dont les composantes dans tout système d'axes sont

$$\varepsilon_{ijk} = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation paire de } (1,2,3) \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation impaire de } (1,2,3) \\ 0 & \text{si } (i,j,k) \text{ n'est pas une permutation de } (1,2,3) \end{cases} \tag{24}$$

Le symbole ε_{ijk}, défini par ses composantes (24), est-il un tenseur? Il s'agit de déterminer si la relation

$$\varepsilon_{l'm'n'} = \alpha_{il'}\, \alpha_{jm'}\, \alpha_{kn'}\, \varepsilon_{ijk}$$

est vraie. On a en fait

$$\varepsilon_{ijk}\, \alpha_{il'}\, \alpha_{jm'}\, \alpha_{kn'} = \sum_{\substack{\text{permutations} \\ (i,j,k) \text{ de } (1,2,3)}} \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \alpha_{il'}\, \alpha_{jm'}\, \alpha_{kn'}$$

$$= \operatorname{dtm}(\alpha) \cdot \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = \varepsilon_{l'm'n'} \operatorname{dtm}(\alpha).$$

Comme le signe de dtm(α) dépend de l'orientation relative des deux trièdres $\{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$ et $\{\underset{\sim}{e}_{1'}, \underset{\sim}{e}_{2'}, \underset{\sim}{e}_{3'}\}$, ε_{ijk} n'est pas à proprement parler un tenseur, mais un <u>pseudo-tenseur</u>. De la même façon, le produit vectoriel voit son signe changer avec celui de l'alternateur et n'est pas un véritable vecteur, mais un <u>pseudo-vecteur</u>.

Le <u>rotationnel</u> est un opérateur différentiel vectoriel construit sur le même modèle que le produit vectoriel:

$$(\text{rot}\ \underset{\sim}{u})_i = \varepsilon_{ijk}\, u_{k,j} \tag{25}$$

Si u est un tenseur d'ordre un, son rotationnel est un pseudo-tenseur du premier ordre ; si u est un pseudo-tenseur d'ordre un, son rotationnel est un tenseur d'ordre un.

10. PRODUITS D'ALTERNATEURS

10.1 - <u>Produit tensoriel simple</u>

On a, par (23),

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \delta_{l1} & \delta_{m1} & \delta_{n1} \\ \delta_{l2} & \delta_{m2} & \delta_{n2} \\ \delta_{l3} & \delta_{m3} & \delta_{n3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \tag{26}$$

soit, sous forme développée,

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\,\delta_{jm}\,\delta_{kn} + \delta_{im}\,\delta_{jn}\,\delta_{kl} + \delta_{in}\,\delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{in}\,\delta_{jm}\,\delta_{kl} - \delta_{im}\,\delta_{jl}\,\delta_{kn} - \delta_{il}\,\delta_{jn}\,\delta_{km} \tag{26'}$$

10.2 - <u>Un indice contracté</u>

Faisant, dans (26'), $i = l$, on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{imn} &= \delta_{ii}\,\delta_{jm}\,\delta_{kn} + \delta_{im}\,\delta_{jn}\,\delta_{ki} + \delta_{in}\,\delta_{ji}\,\delta_{km} \\ &\quad - \delta_{in}\,\delta_{jm}\,\delta_{ki} - \delta_{im}\,\delta_{ji}\,\delta_{kn} - \delta_{ii}\,\delta_{jn}\,\delta_{km} \\ &= 3\,\delta_{jm}\,\delta_{kn} + \delta_{km}\,\delta_{jn} + \delta_{jn}\,\delta_{km} \\ &\quad - \delta_{kn}\,\delta_{jm} - \delta_{jm}\,\delta_{kn} - 3\,\delta_{jn}\,\delta_{km}\end{aligned}$$

soit

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{km} \tag{27}$$

Les applications de cette formule sont très nombreuses (voir, entre autres, section 11)

10.3 - Deux indices contractés

Faisant, dans (27), j = m, on obtient

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijn} = \delta_{jj}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{kj} = 3\,\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\,\delta_{kn}\,. \qquad (28)$$

10.4 - Trois indices contractés

Enfin, lorsque k = n dans (28), il vient

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 2\,\delta_{kk} = 6 \qquad (29)$$

11. EXEMPLES D'APPLICATIONS DE L'ALTERNATEUR

Dans le cadre des notations de Gibbs, les opérations comprenant un ou plusieurs produits vectoriels ou rotationnels sont assez complexes et nécessitent la mémorisation d'un grand nombre de résultats démontrés une fois pour toutes pour la cause. En calcul tensoriel, seule la formule (27) est à retenir. La formule (26) n'est guère utile et les formules (28) et (29) découlent directement de (27). Nous donnons ci-après quelques exemples par lesquels le lecteur peut se convaincre de l'efficacité du calcul tensoriel.

11.1 - Double produit vectoriel

En notations classiques, il est nécessaire de mémoriser la formule

$$\underset{\sim}{d} = (\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}) \times \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{b}\,(\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{c}) - \underset{\sim}{a}\,(\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{c})\,.$$

En notations tensorielles,

$$d_i = \varepsilon_{ijk}(\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b})_j c_k = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{jlm}\,a_l b_m c_k = \varepsilon_{jki}\,\varepsilon_{jlm}\,a_l b_m c_k$$

$$= (\delta_{kl}\,\delta_{im} - \delta_{km}\,\delta_{il})\,a_l\,b_m\,c_k$$

$$= \underbrace{a_k c_k}_{\underset{\sim}{a}\,\cdot\,\underset{\sim}{c}}\,b_i - \underbrace{b_k c_k}_{\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{c}}\,a_i$$

11.2 - Rotationnel du rotationnel

Calculons

$$\underset{\sim}{b} = \text{rot}\,(\text{rot}\,\underset{\sim}{a})\,.$$

On a

$$b_i = \varepsilon_{ijk}(\text{rot}\,\underset{\sim}{a})_{k,j} = \varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{klm}\,a_{m,l})_{,j} = \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm}\,a_{m,lj}$$

$$= (\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl})\,a_{m,lj} = a_{j,ij} - a_{i,jj}\,,$$

En écrivant ce résultat sous la forme

$$(\text{rot rot } \underset{\sim}{a})_i = (a_{j,j})_{,i} - a_{i,jj} \quad ,$$

on retrouve visiblement la formule classique

$$\nabla^2 a = \text{grad div } \underset{\sim}{a} - \text{rot rot } \underset{\sim}{a} \quad .$$

11.3 - Formule de Lagrange

Calculons

$$\underset{\sim}{b} = (\text{rot } \underset{\sim}{u}) \times \underset{\sim}{u} \ .$$

On a

$$b_i = \varepsilon_{ijk} (\text{rot } \underset{\sim}{u})_j \, u_k = \varepsilon_{ijk} \, \varepsilon_{jlm} \, u_{m,l} \, u_k$$

$$= \varepsilon_{jki} \, \varepsilon_{jlm} \, u_{m,l} \, u_k = (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) \, u_{m,l} \, u_k$$

$$= u_{i,k} \, u_k - u_{k,i} \, u_k = u_k \, u_{i,k} - \tfrac{1}{2} (u_k \, u_k)_{,i}$$

On a donc obtenu la formule

$$(\underset{\sim}{u} \cdot \text{grad}) \, \underset{\sim}{u} = \tfrac{1}{2} \, \text{grad}(u^2) + \text{rot } \underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{u} \ ,$$

connue en mécanique des fluides sous le nom de formule de Lagrange.

11.4 - Calcul des déterminants

Etant donné une grandeur à deux indices a_{ij}, son déterminant est défini par

$$\text{dtm}(a) = \sum_{\substack{\text{permutations} \\ (i,j,k) \text{ de } (1,2,3)}} \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} a_{1i} \, a_{2j} \, a_{3k} = \varepsilon_{ijk} \, a_{1i} \, a_{2j} \, a_{3k}$$

Permutant les lignes du tableau, on multiplie le déterminant par la signature de la permutation. Par conséquent,

$$\varepsilon_{pqr} \, \text{dtm}(a) = \varepsilon_{ijk} \, a_{pi} \, a_{qj} \, a_{rk} \quad .$$

En multipliant ce résultat par ε_{pqr}, on obtient

$$\varepsilon_{pqr} \, \varepsilon_{pqr} \, \text{dtm}(a) = \varepsilon_{ijk} \, \varepsilon_{pqr} \, a_{pi} \, a_{qj} \, a_{rk}$$

soit, en vertu de (29),

$$\text{dtm}(a) = \frac{1}{6} \, \varepsilon_{pqr} \, \varepsilon_{ijk} \, a_{pi} \, a_{qj} \, a_{rk} \qquad (30)$$

12. TENSEURS SYMETRIQUES ET ANTISYMETRIQUES

Un tenseur du second ordre a_{ij} est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$.

Il est antisymétrique si $a_{ij} = - a_{ji}$, ce qui implique en particulier que tous ses éléments diagonaux soient nuls. Symétrie et antisymétrie sont des caractéristiques intrinsèques des tenseurs. En effet, si

a_{ij} est $\left\{ \begin{matrix} \text{symétrique} \\ \text{antisymétrique} \end{matrix} \right\}$, on a d'une part

$$a_{i'j'} = \alpha_{li'} \alpha_{mj'} a_{lm}$$

et, d'autre part,

$$a_{j'i'} = \alpha_{mj'} \alpha_{li'} a_{ml} = \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \alpha_{li'} \alpha_{mj'} a_{lm} \quad .$$

12.1 - Une propriété caractéristique des tenseurs symétriques

Soit a_{ij} un tenseur symétrique. On a

$$\varepsilon_{kij} a_{ij} = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{kij} a_{ij} + \tfrac{1}{2} \varepsilon_{kij} a_{ji} , \tag{31}$$

car $a_{ij} = a_{ji}$. En intervertissant les noms des indices muets i et j, du second terme du second membre, on a

$$\tfrac{1}{2} \varepsilon_{kij} a_{ji} = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{kji} a_{ij} \quad ,$$

et, en reportant ce résultat dans (31),

$$\varepsilon_{kij} a_{ij} = \tfrac{1}{2} (\varepsilon_{kij} + \varepsilon_{kji}) a_{ij} = 0,$$

vu les relations d'antisymétrie de ε_{ikj} .

Inversement, soit a_{ij} un tenseur vérifiant

$$\varepsilon_{kij} a_{ij} = 0 \tag{32}$$

On a donc également

$$0 = \varepsilon_{klm} \varepsilon_{kij} a_{ij} = (\delta_{li} \delta_{mj} - \delta_{lj} \delta_{mi}) a_{ij} = a_{lm} - a_{ml},$$

c'est-à-dire que a_{ij} est symétrique. Ainsi donc, la relation (32) est une condition nécessaire et suffisante pour que le tenseur a_{ij} soit symétrique.

A titre d'application, soit à intégrer un gradient. Le problème se pose comme suit: étant donné un tenseur du premier ordre q_i, on cherche une fonction φ telle que

$$\varphi_{,i} = q_i \quad . \tag{33}$$

Sur un ouvert simplement connexe, les équations (33) admettent une so solution, unique à une constante près, si et seulement si

$$q_{i,j} = q_{j,i} \tag{34}$$

c'est-à-dire si le tenseur $q_{i,j}$ est symétrique. Il est équivalent d'imposer la condition

$$\varepsilon_{kij}\, q_{j,i} = 0 \quad , \tag{35}$$

ce qui revient à dire rot $\underset{\sim}{q} = 0$.

12.2 - Structure des tenseurs antisymétriques

Etant donné un tenseur antisymétrique ω_{ij} , définissons le pseudo-vecteur

$$\omega_k = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{kij}\, \omega_{ij} \tag{36}$$

On a encore

$$\varepsilon_{lmk}\,\omega_k = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{lmk}\, \varepsilon_{kij}\, \omega_{ij} = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{klm}\, \varepsilon_{kij}\, \omega_{ij} = \tfrac{1}{2}(\delta_{li}\,\delta_{mj} - \delta_{lj}\,\delta_{mi})\,\omega_{ij}$$

$$= \tfrac{1}{2}(\omega_{lm} - \omega_{ml}) = \omega_{lm} \quad . \tag{37}$$

Les relations (36) et (37) expriment qu'il existe une relation biunivoque entre pseudo-vecteurs et tenseurs antisymétriques. Sous forme de tableau, on a

$$\{\omega_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

13. DECOMPOSITION D'UN TENSEUR DU SECOND ORDRE EN PARTIES SYMETRIQUE ET ANTISYMETRIQUE

On peut toujours écrire

$$a_{ij} = \tfrac{1}{2}\,(a_{ij} + a_{ji}) + \tfrac{1}{2}\,(a_{ij} - a_{ji}) \tag{39}$$

Le tenseur

$$\tfrac{1}{2}\,(a_{ij} + a_{ji}) \tag{40}$$

est appelé partie symétrique de a_{ij} . Le tenseur antisymétrique

$$\tfrac{1}{2}\,(a_{ij} - a_{ji}) \tag{41}$$

est appelé partie antisymétrique de a_{ij} .

14. DECOMPOSITION D'UN TENSEUR EN UN TENSEUR ISOTROPE ET UN DEVIATEUR

Etant donné un tenseur a_{ij}, cherchons à l'approcher au mieux par un tenseur isotrope, c'est-à-dire de la forme $\lambda\,\delta_{ij}$. Bien entendu, on n'a pas, en général, $a_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}$. Mais on peut chercher la valeur de λ qui minimise la somme des carrés des différences $a_{ij} - \lambda\,\delta_{ij}$. Il s'agit de minimiser l'expression

$$\Phi(\lambda) = (a_{ij} - \lambda \delta_{ij})(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}).$$

Dérivant par rapport à λ, on obtient

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = - \delta_{ij}(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) - (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \delta_{ij} = - 2 (a_{ii} - \lambda \delta_{ii})$$

$$= - 2 (a_{ii} - 3\lambda) .$$

Le minimum est donc obtenu pour $\lambda = \frac{1}{3} a_{ii}$. Ceci donne la décomposition

$$a_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3} a_{kk} \delta_{ij}}_{\text{meilleure approximation isotrope}} + \underbrace{(a_{ij} - \frac{1}{3} a_{kk} \delta_{ij})}_{\text{reste}} \qquad (42)$$

La meilleure approximation isotrope $\frac{1}{3} a_{kk} \delta_{ij}$ porte le nom de <u>partie isotrope</u> du tenseur a_{ij}. Le reste, $a_{ij} - \frac{1}{3} a_{kk} \delta_{ij}$, s'appelle <u>déviateur</u> de a_{ij}. Nous le noterons $\hat{a}_{ij}$. On notera que

$$\hat{a}_{ii} = a_{ii} - (1/3)\, a_{kk} \delta_{ii} = a_{ii} - a_{kk} = 0 , \qquad (43)$$

c'est-à-dire que le déviateur a sa trace nulle. De plus,

$$a_{ij}\, a_{ij} = (\frac{1}{3} a_{kk} \delta_{ij} + \hat{a}_{ij})(\frac{1}{3} a_{ll} \delta_{ij} + \hat{a}_{ij})$$

$$= \frac{1}{9} a_{kk}\, a_{ll} \delta_{ii} + \frac{1}{3} a_{ll}\, \hat{a}_{ii} + \frac{1}{3} a_{kk} \hat{a}_{ii} + \hat{a}_{ij}\, \hat{a}_{ij} ,$$

soit

$$a_{ij}\, a_{ij} = \frac{1}{3} (a_{kk})^2 + \hat{a}_{ij}\, \hat{a}_{ij} , \qquad (44)$$

formule qui exprime le <u>découplage</u> des deux parties du tenseur a_{ij} dans le produit contracté $a_{ij} a_{ij}$.

<u>15. DIRECTIONS PRINCIPALES D'UN TENSEUR SYMETRIQUE D'ORDRE DEUX</u>

Considérant la relation

$$a_i = b_{ij}\, c_j ,$$

où b_{ij} est un tenseur symétrique, on peut se poser la question de savoir s'il n'existe pas des vecteurs c_j tels que

$$b_{ij}\, c_j = \lambda\, c_i , \qquad (45)$$

c'est-à-dire que le transformé de c_j par b_{ij} ne diffère de c_i que par sa norme, et non par sa direction. Un tel vecteur c_i, s'il est de norme unitaire, définit une <u>direction principale</u> du tenseur b_{ij}. La condition (45) s'écrit encore

$$(b_{ij} - \lambda\,\delta_{ij})\ c_j = 0\ . \tag{46}$$

Matriciellement, il s'agit d'un problème aux valeurs propres, qui n'admet de solution que si

$$\mathrm{dtm}(b_{ij} - \lambda\,\delta_{ij}) = 0\ . \tag{47}$$

Cette équation s'écrit encore

$$\frac{1}{6}\ \varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{pqr}(b_{ip} - \lambda\,\delta_{ip})(b_{jq} - \lambda\,\delta_{jq})(b_{kr} - \lambda\,\delta_{kr}) = 0$$

soit, tous calculs faits,

$$-\lambda^3 + I_1\,\lambda^2 - I_2\,\lambda + I_3 = 0\ , \tag{48}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= b_{ii} \\ I_2 &= \tfrac{1}{2}(b_{jj}b_{kk} - b_{jk}b_{kj}) \\ I_3 &= \mathrm{dtm}(b) \end{aligned} \tag{49}$$

Les grandeurs I_1, I_2, I_3, visiblement invariantes, sont appelées <u>invariants simples</u> du tenseur b_{ij}. Quand aucune confusion n'est possible, on parle simplement des invariants de b_{ij}. Le calcul matriciel nous enseigne qu'une matrice symétrique a toutes ses valeurs propres réelles et exactement 3 vecteurs propres indépendants. Nous noterons donc

$$c_i^{(1)}\ ,\quad c_i^{(2)}\ ,\quad c_i^{(3)}$$

les trois directions principales indépendantes. Les directions principales relatives à des valeurs principales (c'est ainsi que l'on appelle les valeurs propres) indépendantes sont <u>orthogonales</u>. En effet, comme

$$b_{ij}\ c_j^{(k)} = \lambda_k\ c_i^{(k)} \qquad \text{et} \qquad b_{ij}\ c_j^{(l)} = \lambda_l\ c_i^{(l)}\ ,$$

on a

$$c_i^{(l)} b_{ij}\ c_j^{(k)} = \begin{cases} c_i^{(l)}\ \lambda_k\ c_i^{(k)} \\ c_j^{(k)} b_{ji}\ c_i^{(l)} = c_j^{(k)}\,\lambda_l\ c_j^{(l)} \end{cases}$$

d'où, en soustrayant les deux résultats,

$$0 = (\lambda_k - \lambda_l)\ c_i^{(k)}\ c_i^{(l)} \tag{50}$$

Lorsque l'équation (48) admet des racines multiples, à chacune d'elles est associé un sous-espace propre dont la dimension est exactement égale à la multiplicité de la racine. Choisissant une base orthonormale arbitraire de ce sous-espace, on obtient également l'orthogonalité si certaines racines sont multiples. Finalement, <u>il existe toujours une base de directions principales orthogonales</u> pour un tenseur symétrique.

Cette propriété permet d'obtenir une décomposition du tenseur b_{ij} en carrés tensoriels des directions principales, appelée <u>décomposition spectrale</u>. Pour l'établir, commençons par remarquer que tout vecteur d_i est nécessairement de la forme

$$d_i = \beta_1 c_i^{(1)} + \beta_2 c_i^{(2)} + \beta_3 c_i^{(3)} \quad . \qquad (51)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} b_{ij}d_j &= b_{ij}\beta_1 c_j^{(1)} + b_{ij} \beta_2 c_j^{(2)} + b_{ij} \beta_3 c_j^{(3)} \\ &= \lambda_1 \beta_1 c_i^{(1)} + \lambda_2 \beta_2 c_i^{(2)} + \lambda_3 \beta_3 c_i^{(3)} \end{aligned}$$

et, comme

$$c_j^{(k)} c_j^{(k)} = 1 \; , \qquad \text{(pas de somme sur k)}$$

on a encore

$$\begin{aligned} b_{ij}d_j &= \lambda_1 \beta_1 c_i^{(1)}c_j^{(1)}c_j^{(1)} + \lambda_2 \beta_2 c_i^{(2)}c_j^{(2)}c_j^{(2)} \\ &\qquad + \lambda_3 \beta_3 c_i^{(3)}c_j^{(3)}c_j^{(3)} \\ &= (\lambda_1 c_i^{(1)}c_j^{(1)})(\beta_1 c_j^{(1)}) + (\lambda_2 c_i^{(2)}c_j^{(2)})(\beta_2 c_j^{(2)}) \\ &\qquad + (\lambda_3 c_i^{(3)}c_j^{(3)})(\beta_3 c_j^{(3)}) \; , \end{aligned}$$

expression qui, vu l'orthogonalité des directions principales, équivaut à

$$(\lambda_1 c_i^{(1)}c_j^{(1)})\, d_j + (\lambda_2 c_i^{(2)}c_j^{(2)})\, d_j + (\lambda_3 c_i^{(3)}c_j^{(3)})\, d_j \; .$$

On a donc obtenu

$$b_{ij} = \sum_k \lambda_k c_i^{(k)} c_j^{(k)} \; . \qquad (52)$$

C'est le développement spectral cherché.

Notons encore que

$$b_{ij} c_i^{(k)} c_j^{(k)} = \lambda_k c_i^{(k)} c_i^{(k)} = \lambda_k \; . \qquad \text{(pas de sommations sur k)}$$

Il en résulte que, si d_i est développé selon (51),

$$b_{ij}d_id_j = \sum_k \lambda_k \beta_k^2$$

Par conséquent, un tenseur symétrique b_{ij} est défini non négatif, c'est-à-dire, a ses trois valeurs propres non négatives, si et seulement si

$$b_{ij}d_id_j \geqslant 0 \tag{53}$$

quel que soit le vecteur d_i. Il est défini positif, c'est-à-dire que ses trois valeurs propres sont strictement positives, si et seulement si

$$b_{ij}d_id_j > 0 \tag{54}$$

16. DECOMPOSITION POLAIRE D'UN TENSEUR DU SECOND ORDRE NON DEGENERE

Soit a_{ij} un tenseur du second ordre non dégénéré, (ce qui signifie que son déterminant est différent de zéro). Nous allons montrer qu'il admet la décomposition

$$a_{ij} = g_{ik}\, f_{kj} \quad , \tag{55}$$

où g_{ik} est orthogonal, c'est-à-dire

$$g_{ik}g_{im} = \delta_{km} \quad , \tag{56}$$

et f_{ik} est symétrique. Supposant la décomposition obtenue, on a

$$a_{ij}a_{il} = g_{ik}g_{im}f_{kj}f_{ml} = \delta_{km}f_{kj}f_{ml} = f_{kj}f_{kl} \ . \tag{57}$$

Notant

$$b_{jl} = a_{ij}a_{il} \quad , \tag{58}$$

on remarquera que ce tenseur symétrique est défini positif, car

$$b_{ij}d_id_j = (a_{li}d_i)(a_{lj}d_j) = \| \{a_{li}d_i\} \|^2 > 0,$$

vu que a_{ij} n'est pas dégénéré. Il admet donc un développement spectral de la forme

$$b_{jl} = \sum_k \lambda_k \quad c_j^{(k)} c_l^{(k)} \tag{59}$$

avec $\lambda_k > 0$. Il est dès lors aisé de vérifier qu'un tenseur symétrique f_{kj} vérifiant la condition (57) est donné par

$$f_{jl} = \sum_k \lambda_k^{\frac{1}{2}} \quad c_j^{(k)} c_l^{(k)} \tag{60}$$

Ce tenseur n'est pas dégénéré, car il admet de toute évidence l'inverse suivant

$$f_{jl}^{-1} = \sum_k \lambda_k^{-\frac{1}{2}} \, c_j^{(k)} c_l^{(k)}$$

On déduit alors de (55)

$$g_{ik} = a_{ij} f^{-1}_{jk} \quad . \tag{61}$$

Le problème est donc résolu si l'on peut démontrer la relation d'orthogonalité (56). De fait,

$$g_{ik} g_{im} = a_{il} f^{-1}_{lk} \, a_{in} f^{-1}_{nm} = b_{ln} f^{-1}_{lk} f^{-1}_{nm} = f_{pl} f_{pn} f^{-1}_{lk} f^{-1}_{nm} = \delta_{pk} \delta_{pm} = \delta_{km} \; ,$$

ce qui achève la démonstration.

On peut démontrer par une voie analogue l'existence d'une décomposition

$$a_{ij} = h_{ik} r_{kj} \quad , \tag{62}$$

avec h_{ik} symétrique et r_{kj} orthogonal. (A faire comme exercice).

17 . CHAMPS DE TENSEURS

En mécanique des milieux continus, on rencontre des grandeurs tensorielles qui varient d'un point à l'autre. Ainsi, en mécanique des fluides, les vitesses des particules se trouvant en deux points différents d'un écoulement sont en général différentes (fig. 4). Pour décrire le mouvement , il faut donner la loi $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto v_i(x_1, x_2, x_3)$ que l'on appelle champ des vitesses. Plus généralement, on peut rencontrer des champs de tenseurs $a_{ij}(x_k)$.

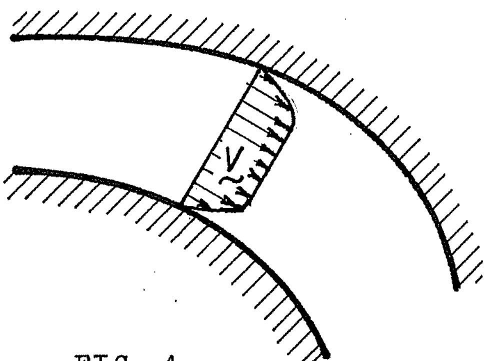

FIG. 4

Il est donc possible de définir des intégrales de volume et de surface du type

$$\int_V a_{ij} \, dV \quad , \quad \int_S a_{ij} \, dS \quad , \text{ etc...}$$

18. THEOREME DE GAUSS-OSTROGRADSKI

Soit $a_{ijk\ldots l}(x)$ un tenseur d'ordre quelconque et soit V un volume de surface S. Nous noterons $\underset{\sim}{n}$ la normale extérieure sur S. On a la formule fondamentale

$$\int_V a_{ijk\ldots l,m} \, dV = \int_S a_{ijk\ldots l} \, n_m \, dS \tag{63}$$

Démontrons cette formule pour m = 1 . (Pour les autres valeurs de l'indice, la démonstration est la même). On a (fig. 5)

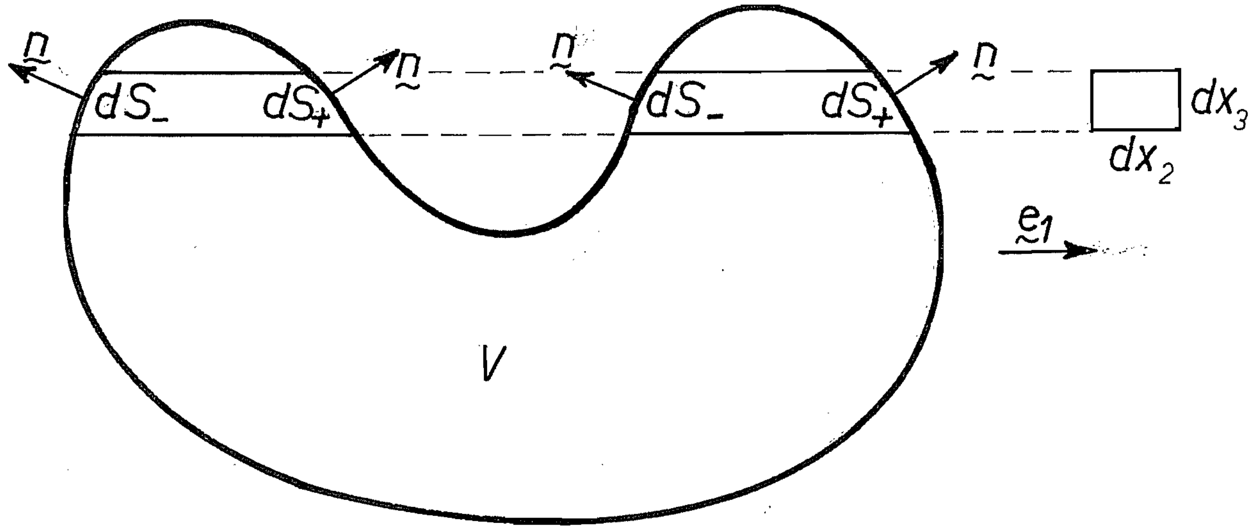

FIG. 5

$$\int_V a_{ijk\ldots l,1}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{S_+} a_{ijkl\ldots m}\, dx_2 dx_3 - \int_{S_-} a_{ijkl\ldots m}\, dx_2 dx_3 \quad ,$$

en appelant S_+ la partie de la surface où $\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{e}_1 > 0$ et S_- la partie de la surface où $\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{e}_1 < 0$. Considérant un prisme de côtés dx_2 et dx_3 (voir fig. 5), on remarquera que $dx_2 dx_3$ est la projection des intersections dS_+ et dS_- de ce prisme avec S. On a donc

$$\begin{cases} dx_2 dx_3 = n_1 dS_+ & \text{sur } S_+ \\ dx_2 dx_3 = -\, n_1\, dS_- & \text{sur } S_- \end{cases}$$

Il vient donc

$$\int_V a_{ijk\ldots l,1}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{S_+} a_{ijk\ldots l}\, n_1\, dS_+ + \int_{S_-} a_{ijk\ldots l} n_1 dS_-$$

$$= \int_S a_{ijk\ldots l}\, n_1\, dS \quad , \text{ C.Q.F.D.}$$

Citons quelques cas particuliers de cette formule:

a) $\int_V \varphi_{,i}\, dV = \int_S \varphi\, n_i\, dS$ (formule du gradient)

b) $\int_V u_{i,i}\, dV = \int_S u_i\, n_i\, dS$ (formule de la divergence)

c) $\int_V \varepsilon_{ijk}\, u_{k,j}\, dV = \int_S \varepsilon_{ijk}\, n_j\, u_k\, dS$

soit $\int_V \text{rot}\, \underset{\sim}{u}\, dV = \int_S \underset{\sim}{n} \times \underset{\sim}{u}\, dS$ (formule du rotationnel)

d) $\int_V \sigma_{ij}\, u_{j,i}\, dV = \int_V (\sigma_{ij} u_j)_{,i}\, dV - \int_V \sigma_{ij,i}\, u_j\, dV$

$$= \int_S \sigma_{ij}\, u_j\, n_i\, dS - \int_V \sigma_{ij,i}\, u_i\, dS$$

(formule d'intégration par parties)

e) $\int_V \varphi\, \psi_{,ii}\, dV = \int_S \varphi\, \psi_{,i}\, n_i\, dS - \int_V \varphi_{,i}\, \psi_{,i}\, dV$

$$= \int_S \varphi\, \psi_{,i}\, n_i\, dS - \int_S \varphi_{,i}\, n_i \psi\, dS + \int_V \varphi_{,ii} \psi\, dV$$

soit $\int_V \varphi \nabla^2 \psi\, dV = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dS - \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS + \int_V \psi\, \nabla^2 \varphi\, dV$

(formule de Green) .

Comme on le voit, toutes ces formules, qu'il convient de mémoriser dans le cadre des notations classiques, apparaissent ici comme de simples cas particuliers de la formule (63).

19. DECOMPOSITION CANONIQUE DU GRADIENT D'UN VECTEUR

Décomposons le gradient d'un vecteur u en partie symétrique et partie antisymétrique:

$$u_{j,i} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \tfrac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j}) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} .$$

La partie symétrique

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{64}$$

est le <u>tenseur des déformations de u .</u> (En élasticité, avec u = vecteur-déplacement, c'est le tenseur des déformations; en mécanique des fluides, avec u = vitesse, c'est le tenseur des vitesses de déformation). La partie antisymétrique

$$\omega_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j}) \tag{65}$$

peut être mise sous la forme

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{66}$$

où $\underset{\sim}{\omega}$ n'est autre que le rotationnel du vecteur $\underset{\sim}{u}$.

20. EQUATIONS DE COMPATIBILITE DES DEFORMATIONS

En élasticité, il arrive que l'on ait à retrouver le vecteur u_i à partir de son tenseur des déformations. Il s'agit donc d'intégrer les équations (64). La question se pose alors, de savoir dans quelles conditions cette intégration est possible. Partant de la relation

$$u_{j,i} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ijk}\omega_k \quad , \tag{67}$$

où seul ε_{ij} est connu, cherchons d'abord à obtenir la condition que doivent vérifier les ω_k. L'équation (67) ne sera intégrable que si

$$\varepsilon_{pim}(u_{j,i})_{,m} = 0,$$

lorsque l'on exprime les dérivées secondes en termes du second membre de (67), soit si

$$\varepsilon_{pim}\,\varepsilon_{ij,m} + \varepsilon_{pim}\,\varepsilon_{ijk}\omega_{k,m} = 0$$

ou

$$\varepsilon_{pim}\,\varepsilon_{ij,m} = -\,\varepsilon_{imp}\,\varepsilon_{ijk}\omega_{k,m} = -\,(\delta_{mj}\,\delta_{pk} - \delta_{mk}\,\delta_{pj})\,\omega_{k,m}$$

$$= -\,(\omega_{p,j} - \omega_{k,k}\,\delta_{p,j})$$

ou encore,

$$\omega_{p,j} - \omega_{k,k}\,\delta_{pj} = \varepsilon_{pmi}\,\varepsilon_{ij,m} \quad . \tag{68}$$

Contractant p et j dans cette relation, on obtient

$$\omega_{p,p} - 3\,\omega_{k,k} = -\,2\,\omega_{k,k} = \varepsilon_{pmi}\,\varepsilon_{ip,m} = 0 \quad ,$$

puisque ε_{ip} est symétrique. Donc, $\omega_{k,k} = 0$, ce qui réduit (68) à

$$\omega_{p,j} = \varepsilon_{pmi}\,\varepsilon_{ij,m} \tag{69}$$

C'est l'équation de compatibilité de Beltrami. <u>Lorsque l'on peut trouver une solution ω_p à l'équation (69), l'équation (64) admet une solution</u>. Pour que l'équation de Beltrami admette une solution, il faudra que

$$\varepsilon_{qjr}(\omega_{p,j})_{,r} = 0 \;,$$

en calculant cette expression à partir du second membre, ce qui implique

$$\varepsilon_{qjr}\ \varepsilon_{pmi}\ \varepsilon_{ij,mr} = 0$$

ou encore,

$$\varepsilon_{pmi}\ \varepsilon_{qrj}\ \varepsilon_{ij,mr} = 0 \qquad (70)$$

Ce sont les <u>équations de compatibilité de Barré de Saint-Venant</u>.

Le processus de calcul du vecteur u_i se déroule comme suit:

a) Vérification de (70)

b) Intégration de (69), donnant ω_p à un vecteur constant près .

c) Intégration de (64), donnant u_i . Ce vecteur est déterminé à une expression de la forme

$$c_i + \varepsilon_{ijk}\ d_j\ x_k$$

près, avec c_i = cte, d_j = cte.

EXERCICES

1. Calculer l'expression $(\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b})(\underset{\sim}{c} \times \underset{\sim}{d})$

Solution : $(\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{c})(\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{d}) - (\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{d})(\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{c})$.

2. Montrer que div rot u = 0

Suggestion: div rot $\underset{\sim}{u} = (\varepsilon_{ijk} u_{k,j})_{,i} = \varepsilon_{ijk}\, u_{k,ij}$

et le tenseur $u_{k,ij}$ est symétrique par rapport aux indices i et j.

* 3. A partir de la formule de Gauss-Ostrogradski, démontrer la formule de Stokes-Ampère

$$\int_S \operatorname{rot} \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{n}\, dS = \int_{\mathcal{C}} \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{t}\, ds$$

où S est une surface projetable sans recouvrement sur un plan, $\mathcal{C}$ la courbe frontière de S, et $\underset{\sim}{t}$ le vecteur unitaire tangent à $\mathcal{C}$, pris dans le sens du tire-bouchon normal par rapport à $\underset{\sim}{n}$ si le trièdre de référence est dextrorsum, dans le sens inverse si ce trièdre est sinistrorsum.

Suggestion: Soit V le volume du cylindre limité par la surface S et sa projection S_o, et soit S_1 la surface latérale de ce cylindre (fig. 6). Pour un champ de vecteur v_i quelconque, défini sur V, on a

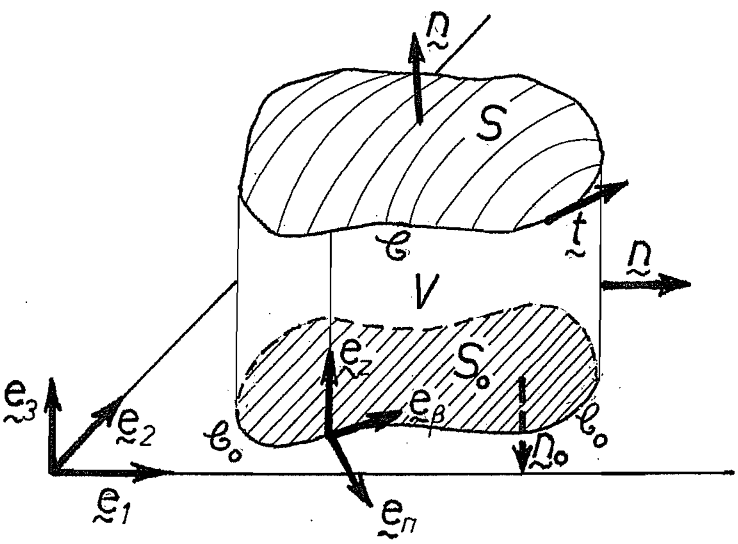

FIG. 6

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \varepsilon_{ijk} v_{k,ij}\, dV \\ &= \int_S n_i\, \varepsilon_{ijk} v_{k,j}\, dS \\ &+ \int_{S_o} n_i\, \varepsilon_{ijk} v_{k,j}\, dS \\ &+ \int_{S_1} n_i\, \varepsilon_{ijk} v_{k,j}\, dS . \qquad (a) \end{aligned}$$

Etant donné un champ de vecteurs $\underset{\sim}{u}$ sur la surface S de hauteur $h(x_1, x_2)$ par rapport au plan, définissons un prolongement v de u au volume V par

$$v_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{h}\, u_i(x_1, x_2) .$$

Ce prolongement s'annule sur S_o, donc la contribution de S_o dans la formule (a) est nulle. Sur la surface latérale, définissons le système d'axes $\{\underset{\sim}{e}_\beta , \underset{\sim}{e}_z, \underset{\sim}{e}_n\}$ qui varie d'une génératrice du cylindre à l'autre. Cependant, on peut développer le cylindre, en faisant tourner les vecteurs de manière à leur garder leur orientation par rapport à la surface. Il vient alors, dans le système $\{\underset{\sim}{e}_\beta\ ,\ \underset{\sim}{e}_z,\ \underset{\sim}{e}_n\}$ rendu cartésien, avec $z = x^3$,

$$\text{rot}\ \underset{\sim}{v}\ .\ \underset{\sim}{n} = v_{z,\beta} - v_{\beta,z} = \frac{z}{h}\,(u_{z,\beta} - u_{\beta,z}) - \frac{z}{h^2}\,u\,h_{,\beta} - \frac{1}{h}\,u_\beta\ ,$$

d'où
$$\int_{S_1} \text{rot}\ \underset{\sim}{v}\ .\ \underset{\sim}{n}\ dS = \int_{\mathcal{C}_0} d\beta \int_0^h \left(\frac{z}{h}\,u_{z,\beta} - \frac{z}{h^2}\,u_z h_{,\beta} - \frac{1}{h}\,u_\beta\right) dz$$

$$= \int_{\mathcal{C}_0} \left(\frac{h}{2}\,u_{z,\beta} - \frac{1}{2}\,u_z h_{,\beta} - u_\beta\right) d\beta$$

$$= \int_{\mathcal{C}_0} \left(\frac{h}{2}\,u_z\right)_{,\beta} d\beta - \int_{\mathcal{C}_0} (u_\beta + u_z h_{,\beta})\ d\beta$$

et le premier terme est visiblement nul . Pour interpréter le second, on note que sur $\mathcal{C}$, on a (fig.7)

$$d\,\underset{\sim}{s} = d\beta\ \underset{\sim}{e}_\beta + h_{,\beta}\ d\beta\ \underset{\sim}{e}_z\ ,$$

si bien que cette intégrale de contour n'est autre que

$$-\int_{\mathcal{C}} \underset{\sim}{u}\ .\ \underset{\sim}{ds}\ .$$

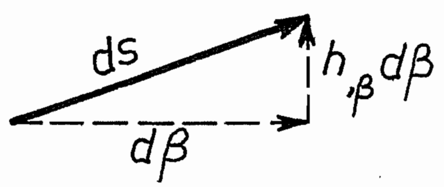

FIG. 7

Au total, on obtient donc

$$\int_S \text{rot}\ \underset{\sim}{u}\ .\ \underset{\sim}{n}\ dS - \int_{\mathcal{C}} \underset{\sim}{u}\ .\ \underset{\sim}{ds} = 0\ .$$

4. Démontrer les relations

a) $\int_S x_j n_j\ dS = V\ .\ \delta_{ij}$ (V = volume)

b) $\int_S n_i\ dS = 0$

c) $\int_S \varepsilon_{ijk}\ x_j n_k\ dS = 0$

5. Montrer que le tenseur d'inertie d'un corps solide est bien un tenseur.

Suggestion: La dérivée de l'énergie cinétique s'écrit, pour une rotation pure,

$$\dot{T} = J_{kl}\,\omega_k\,\dot{\omega}_l\ ,$$

où $\underset{\sim}{\omega}$ est la vitesse angulaire, et $\dot{\underset{\sim}{\omega}}$ l'accélération angulaire. Quels que soient ces deux pseudo-vecteurs, la dérivée de l'énergie cinétique est invariante par rapport aux transformations d'axes. La loi de transformation de J_{kl} est donc

$$J_{p'q'} = |\mathrm{dtm}(\alpha)|^2 \, \alpha_{kp'} \alpha_{lq'} \mathcal{J}_{kl} = \alpha_{kp'} \alpha_{lq'} J_{kl} .$$

C'est donc bien un tenseur.

6. Les équations de l'électromagnétisme linéaire s'écrivent

$$\mathrm{rot}\, \underset{\sim}{H} = i + \frac{\partial \underset{\approx}{D}}{\partial t} \quad , \quad \mathrm{rot}\, \underset{\sim}{E} = - \frac{\partial \underset{\approx}{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\, \underset{\sim}{D} = \rho \quad , \quad \mathrm{div}\, \underset{\sim}{B} = 0$$

$$i_k = \sigma_{kl} E_l \quad , \quad D_k = \varepsilon_{kl} E_l \quad , \quad B_k = \mu_{kl} H_l \quad .$$

Les différentes grandeurs entrant dans ces équations sont:

$\underset{\sim}{E}$ = champ électrique
$\underset{\sim}{D}$ = déplacement
$\underset{\sim}{H}$ = champ magnétique
$\underset{\sim}{B}$ = induction magnétique
$\underset{\sim}{i}$ = densité de courant
ρ = densité de charge
σ_{kl} = tenseur des conductivités
ε_{kl} = tenseur des permittivités
μ_{kl} = tenseur des perméabilités

Etant donné que ρ est un invariant et que $\underset{\sim}{i}$ est un tenseur du premier ordre, examiner le caractère tensoriel ou pseudo-tensoriel de chacune des grandeurs ci-dessus, sachant que la puissance dissipée par unité de volume conducteur vaut $\underset{\sim}{i} \cdot \underset{\sim}{E}$ et est, bien entendu, invariante.

BIBLIOGRAPHIE

En ce qui concerne les tenseurs cartésiens, on pourra consulter

/1/ B.M. FRAEIS de VEUBEKE - "A Course in Elasticity"
Applied Mathematical Sciences 29 , Springer Verlag.

Lorsque l'on considère des systèmes de coordonnées curvilignes, il faut généraliser les notions ci-dessus. C'est l'objet du calcul tensoriel général, qui est plus complexe que les notions enseignées ci-dessus. A ce sujet, on pourra consulter

/2/ A. ANGOT - "Compléments de Mathématiques"
5 e édition, Masson, Paris, 1965

/3/ M. DECUYPER - "Compléments de Mathématiques"
Dunod Université, Paris, 1968

/4/ L. BRILLOUIN- "Les Tenseurs en Mécanique et en Elasticité"
Masson, 1946

/5/ A. LICHNEROWICZ - "Eléments de Calcul tensoriel"
Colin, Paris, 1950
Cet ouvrage existe aussi en Anglais:
"Elements of Tensor Calculus"
Wiley & Sons, New York.

/6/ L. LANDAU, E. LIFCHITZ -"Théorie des Champs"
Mir, Moscou, 1970
(tenseurs dans R^4 pour la Relativité)

/7/ L. SEDOV - "Mécanique des Milieux continus"
Mir, Moscou, 1975