RÉVISION DES CONSTANTES

DE

L'ASTRONOMIE STELLAIRE

PAR

F. FOLIE,
DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE ROYAL.

INTRODUCTION.

Il est temps que la lumière se fasse sur deux nutations à courte période de l'axe du monde, la première mal connue, la seconde, jusqu'en ces derniers temps absolument inconnue des astronomes, et même actuellement encore douteuse pour beaucoup d'entre eux.

L'une provient des conditions initiales du mouvement de rotation de la Terre; et pour cette raison, je l'appellerai nutation initiale; sa période est presque exactement d'un jour sidéral.

L'autre ne peut exister que si la Terre se compose de deux parties, qui se meuvent indépendamment l'une de l'autre dans les mouvements à courte période, tandis qu'elles sont solidaires dans les mouvements à longue période: je l'ai appelée nutation diurne; sa période est d'un demi-jour sidéral.

Comme il n'est plus guère possible d'en nier l'existence après les preuves multiples que j'en ai données dans l'*Annuaire de l'Observatoire de Bruxelles pour 1890*, la constitution de la Terre est bien celle que j'ai admise.

Et cette constitution doit exercer son influence, comme il sera dit ci-dessous, dans bien des termes de la nutation, et particulièrement dans la valeur de la période de 305 jours, que les astronomes ont attribuée théoriquement à la nutation initiale, dans l'hypothèse d'une Terre solide.

J'ai déjà émis des doutes au sujet de l'exactitude de cette valeur dans l'*Annuaire* cité ci-dessus, page 300, où j'ai fait voir que la nutation initiale peut fort bien se déterminer au moyen des différences observées, à 12 heures d'intervalle, entre les Æ d'une même étoile. Les observations de Dorpat m'ont fourni de belles séries, dont j'ai pu faire usage récemment en vue de cette détermination, et les valeurs de la constante angulaire que j'en ai déduites pour 1823-24-25 et 1838 ont, à première vue, confirmé mes doutes quant à la période de 305 jours, et m'ont conduit à admettre une période de 336,5 jours!

Fait qui provoquera l'étonnement des astronomes, mais sur lequel ils ne pourront avoir le moindre doute, cette période fait concorder, avec une précision qui dépasse toutes les espérances, les valeurs de la constante angulaire de la nutation initiale qui ont été déduites par moi des observations de Dorpat pour 1823-24-25 et 1838 avec celles que Peters, Nyrén, Downing et moi-même nous avons tirées des observations de Poulkova et de Greenwich pour 1842, 1850, 1864 et 1872.

Cette période de 336,5 jours, opposée, par l'observation, à celle de 305 jours, déduite, par la théorie, de l'hypothèse d'une Terre solide, montre la fausseté de cette hypothèse; elle est une preuve indirecte, mais frappante, de l'existence de la nutation diurne : en effet, si la Terre est solide, cette période est certainement comprise entre 304 et 306 jours; et la durée notablement plus longue, assignée à celle-ci par les observations, est incompatible avec l'hypothèse de la solidité de la Terre.

Ma constante numérique, ou la grandeur absolue de ces dernières variations, concorde également fort bien avec les constantes de Peters et de Downing.

J'ai pu confirmer mes déductions par les valeurs que j'ai tirées des excellentes séries de déterminations de la latitude de Poulkova, faites par Peters, Gyldén et Nyrén, déterminations qui se prêtent excellemment à la recherche des constantes de la nutation initiale, puisque la moyenne des latitudes déduites de deux passages consécutifs (supérieur et inférieur) n'est affectée que de cette seule nutation.

En sorte qu'il n'y a plus de doute possible quant à la nouvelle période que j'ai assignée à la nutation initiale, ni même quant à la valeur du coefficient de cette nutation.

Les mêmes séries de Dorpat et de Poulkova m'ont paru pouvoir être utilisées également en vue de la détermination des constantes de la nutation diurne.

Cette détermination présente toutefois des difficultés beaucoup plus considérables que celle des constantes de la nutation initiale.

Les termes de cette dernière sont, en effet, des fonctions simples du temps; et les variations qu'ils produisent en ascension droite et en déclinaison, pour un même passage méridien, ont une période presque annuelle, ce qui constitue un avantage marqué en faveur de la certitude de leur détermination.

Les termes de la nutation diurne, au contraire, dépendent des arguments mêmes de la nutation que j'appellerai annuelle, pour la distinguer de la précédente, c'est-à-dire des ☊, ⊙, ☾, etc.

Or, j'ai des doutes très sérieux, que je justifierai ci-dessous, sur l'exactitude des coefficients d'un grand nombre de termes de cette nutation.

Si ces doutes sont fondés, c'est-à-dire si certains de ces coefficients sont incorrects (et la discussion des observations prouvera à l'évidence qu'il en est ainsi), il doit être bien difficile de démêler l'existence des termes d'ordre notablement inférieur qui dépendent des mêmes arguments que ces termes fautifs (*), avant d'avoir corrigé ces derniers.

Aussi, quoique ma première intention eût été de déterminer tout d'abord les constantes des deux nutations à courte période, j'ai dû renoncer à le faire pour celles de la nutation diurne, avant d'avoir trouvé, au préalable, les corrections à apporter aux termes solaires de la nutation annuelle.

Le loisir me manque pour rechercher quelle serait la correction correspondante des termes lunaires proprement dits; ils sont beaucoup moins importants du reste, et la brièveté de leur période fait que leur influence sera complètement noyée dans les résultats déduits d'une longue série d'observations.

On trouvera dans ce Mémoire, avec les calculs complets (**), les résultats que j'ai déduits des observations de Dorpat et de Poulkova pour les valeurs numériques des constantes de ces deux nutations.

Il va de soi que l'omission que l'on en a faite dans les formules de réduction, l'omission de la nutation initiale en particulier, dont la période s'exprime, en nombre entier, par 337 jours moyens, est de nature à infirmer les déterminations qu'on a faites des constantes de l'astronomie, et surtout celle de la constante de l'aberration.

Je me suis attaché plus spécialement à la détermination de cette dernière. Mais plus d'une question vient encore s'y mêler.

En premier lieu, celle des termes du deuxième ordre de l'aberration qui proviennent de la vitesse de translation du système solaire, vitesse que j'ai cherché à déterminer, en comparant des observations faites à six mois de distance, pour lesquelles la différence des termes périodiques de l'aberration, dus au mouvement systématique, est la plus considérable.

Ces termes sont ceux qui proviennent de la composition de la vitesse annuelle et de la vitesse systématique de la Terre.

Voici la circonstance qui m'a donné à penser que ces termes, qui ont pour facteur le carré de sec δ, pourraient n'être pas insignifiants pour la polaire. En comparant entre eux les résidus des excellentes observations faites par W. Struve à Dorpat, pendant le printemps et pendant l'automne, et en choisissant, autant que possible, des couples d'observa-

(*) C'est pour éviter l'influence de ces erreurs de réduction que j'ai proposé de déterminer les constantes de la nutation diurne au moyen d'observations, faites à 6 heures d'intervalle, d'étoiles très voisines du pôle.

(**) Ces calculs ont été effectués avec grand soin, sous ma direction, par M. Niesten, astronome, et par MM. Byl et Stuyvaert, astronomes adjoints à l'Observatoire royal.

tions faites à six mois d'intervalle, j'ai trouvé, pour la première saison, 43 résidus positifs, 22 négatifs; pour la seconde saison, 23 résidus positifs, 40 négatifs.

Une symétrie aussi grande m'a paru présenter un caractère tellement systématique, que je voulus en rechercher la cause, et je me demandai si elle ne résiderait pas dans l'existence de ces termes annuels de l'aberration systématique.

En second lieu, une autre question plus délicate, que je vais tâcher d'exposer brièvement, et à laquelle j'ai déjà fait allusion ci-dessus.

La résolution du problème du mouvement de rotation d'un corps solide exige la connaissance des moments d'inertie A, B, C de ce corps, ainsi que des forces qui agissent sur lui. Ce corps est, dans l'hypothèse d'une écorce solide flottant sur la partie externe fluide du noyau, l'écorce solide elle-même.

Pour les mouvements à courte période, comme la nutation diurne, M. Ronkar a démontré (*) que le mouvement de l'écorce est indépendant de celui du noyau; pour les mouvements à très longue période, comme la précession, qu'ils s'effectuent comme si l'écorce et le noyau étaient solidaires.

Ici donc, pas de doute : pour la nutation diurne, les moments A, B, C sont ceux de l'écorce; pour la précession et pour le terme prépondérant de la nutation peut-être, les moments A, B, C sont ceux de la Terre entière.

Mais quant aux termes à période intermédiaire, comme ceux qui dépendent des longitudes du Soleil et de la Lune, il est certain, et W. Thomson l'affirme expressément (**), que le mouvement de l'écorce ne s'effectue pas comme si elle était solidaire du noyau; autrement dit, les moments d'inertie qui entrent dans les expressions analytiques de ces mouvements doivent avoir une valeur intermédiaire entre ceux de la Terre et ceux de l'écorce, quoique bien certainement plus rapprochés, pour le Soleil surtout, des premiers que des seconds.

Déjà la période de 336,5 jours, que j'ai déduite des observations, au lieu de celle de 305 jours, que les astronomes avaient calculée pour une Terre supposée solide, est une preuve convaincante de l'exactitude de cette conclusion.

(*) Ronkar, *Sur l'influence du frottement et des actions mutuelles intérieures dans les mouvements périodiques d'un système,* t. II des Mémoires couronnés, publiés par l'Académie royale de Belgique, 1888.

(**) Tisserand, *Méc. cél.*, t. II, p. 480.

Il n'est pas possible à la théorie de déterminer le rapport $\frac{C-A}{A}$ qu'il faut employer pour les termes solaires; et de bonnes observations seules peuvent conduire à cette détermination.

Ce sont encore les observations de Dorpat et de Poulkova dont nous ferons usage principalement dans le but de lever tous les doutes que nous venons d'exprimer au sujet des formules de réduction actuellement usitées par les astronomes.

Afin d'imposer une conviction absolue relativement à l'existence et à la grandeur de la nutation diurne, dont une des constantes varie avec la longitude de l'Observatoire, nous nous servirons également de quelques séries d'observations faites à Bruxelles, Cointe (Liège), Greenwich, Paris, Washington, etc.

Nous venons d'exposer quels sont les points principaux sur lesquels portent nos doutes, et nous aurons en conséquence à déterminer :

Les constantes de la nutation initiale;

Celles de la nutation diurne;

La correction des termes solaires de la nutation annuelle;

La correction de la constante de l'aberration;

La vitesse de transport du système solaire, au moyen des termes périodiques du second ordre de l'aberration dans lesquels cette vitesse entre comme facteur;

Enfin, incidemment, et comme critérium de nos déterminations, la parallaxe des étoiles dont nous ferons usage.

Ce travail sera partagé en plusieurs chapitres, qui ne pourront pas se suivre, toutefois, dans l'ordre logique qui vient d'être exposé, à cause de l'enchevêtrement des corrections les unes dans les autres.

Le chapitre I sera consacré à la détermination des constantes de la nutation initiale, qui peut se faire indépendamment de toutes les erreurs de réduction.

Le chapitre II, à celle de la vitesse systématique au moyen de la série des observations de la polaire faites par W. Struve à Dorpat.

Le chapitre III à celle de la correction, tant des termes solaires de la nutation que de la constante de l'aberration, au moyen de cette même série.

Le chapitre IV, aux mêmes déterminations que les deux précédentes, mais fondées sur les observations de la hauteur du pôle à Poulkova.

Le chapitre V, à la discussion de la valeur de la constante de l'aberration, déduite des observations de Struve et de Nyrén qui ont servi à sa détermination.

Le chapitre VI, à la détermination de cette même constante au moyen d'observations de passage faites à Poulkova par Wagner.

Le chapitre VII, à la recherche des termes qui dépendent des périgées de la Lune et du Soleil, et qui ne peuvent être déterminés que par l'observation.

Le chapitre VIII, à celle des constantes de la nutation diurne, au moyen de méthodes très diverses.

Le chapitre IX enfin renfermera, comme conclusion, les expressions des formules de réduction qui doivent être substituées à celles dont les astronomes font usage, depuis les travaux des deux Struve et de Peters.

REVISION DES CONSTANTES

DE

L'ASTRONOMIE STELLAIRE

CHAPITRE I[er].

NUTATION INITIALE.

§ 1. *Expression de la nutation initiale.*

1. Avant de donner les formules générales du mouvement de l'axe de la Terre, ou plutôt de l'axe de l'écorce terrestre, nous tenons à bien en préciser la signification.

Les astronomes géomètres n'ignorent pas que, dans ces formules, c'est du mouvement des axes *principaux* qu'il est question, et non du mouvement de l'axe *instantané,* qui ne coïncide pas avec l'axe géographique, autour duquel il se déplace pendant une période de 337 jours environ.

Le méridien astronomique est donc variable, comme Bessel l'a déjà fait remarquer. Mais ce n'est pas un méridien variable qui peut servir à définir l'heure, ni l'ascension droite.

Les formules suivantes se rapportent donc, comme on le sait, du reste, au pôle et à l'équateur géographiques, et nous supposerons que les ascensions droites et les déclinaisons sont observées également dans le méridien géographique.

En appelant s_1 le sinus de l'obliquité, γ et β les constantes de la nutation initiale, φ l'angle décrit, depuis une certaine époque initiale, par le *premier méridien* (ce méridien passe par l'axe du plus petit moment d'inertie A de la Terre, ou plutôt de son écorce solide, C étant le plus grand moment, B le moyen); t le temps compté à partir de cette époque, et en faisant

$$\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}} = \iota, \qquad \sqrt{\frac{A(C-A)}{B(C-B)}} = 1 + \varkappa,$$

$\varkappa$ étant égal à

$$\frac{1}{2}\frac{(B-A)(B+A-C)}{B(C-B)},$$

si l'on néglige $\varkappa^2$; nous avons mis les expressions complètes de la nutation initiale sous la forme

$$\Delta\theta = -\gamma\left\{\sin(\iota nt + \varphi + \beta_0) + \frac{\varkappa}{2+\varkappa}\sin(\iota nt - \varphi + \beta_0)\right\},$$

$$s_1\Delta\lambda = -\gamma\left\{\cos(\iota nt + \varphi + \beta_0) - \frac{\varkappa}{2+\varkappa}\cos(\iota nt - \varphi + \beta_0)\right\}.$$

En appelant L la longitude orientale du premier méridien par rapport au lieu d'observation, on aura

$$\varphi = nt + L \qquad \text{et} \qquad \iota nt + \varphi + \beta_0 = nt(1+\iota) + L + \beta_0,$$

que nous écrirons simplement $It + \beta$, en faisant $n(1+\iota) = I$, $L + \beta_0 = \beta$, $n\iota t$ étant égal $390^\circ,5$ par année tropique, et non à 430° environ, comme l'ont admis jusqu'à ce jour tous les astronomes.

En sorte que la nutation initiale en obliquité et en longitude pourra s'écrire

$$\Delta_i\theta = -\gamma\sin(It+\beta) \qquad \text{et} \qquad s_1\Delta_i\lambda = -\gamma\cos(It+\beta),$$

si l'on néglige les termes en $\varkappa$, comme nous le ferons provisoirement vu le défaut de nos connaissances sur les grandeurs relatives des trois moments d'inertie A, B, C, qui ne sont pas même ici, comme nous le verrons, ceux de la Terre entière.

Si nous faisons

$$\cot\theta + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta = S_\alpha,$$
$$\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta = C_\alpha,$$

les expressions de la nutation initiale en ascension droite et déclinaison seront

$$\text{(II)} \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{aligned} \Delta\alpha &= \gamma\left\{C_\alpha\sin(It+\beta) - S_\alpha\cos(It+\beta)\right\} \\ &= \gamma\left\{\mathrm{tg}\,\delta\sin(It+\beta-\alpha) - \cot\theta\cos(It+\beta)\right\}, \\ \Delta\delta &= -\gamma\cos(It+\beta-\alpha). \end{aligned}\right.$$

La période de cette nutation est presque exactement diurne puisque $I = n(1+\iota)$ est égal à 1.00297, le jour sidéral étant pris pour unité.

Ce caractère diurne, affirmé par Laplace (*), a été nié récemment par plusieurs géomètres distingués (**), parce qu'ils ont porté exclusivement leur attention sur les variations apparentes de la hauteur du pôle qui résultent de l'omission de la nutation initiale dans la réduction des observations, et dont l'expression se réduit, dans le méridien, à

$$\Delta\delta = \mp \gamma \cos(nt + \beta),$$

selon que le passage est supérieur ou inférieur.

Mais si la période de ces variations apparentes, ou, plus exactement, illusoires, de la hauteur du pôle est de 337 jours environ, celle de la nutation initiale, à la négligence de laquelle elles sont dues, n'en est pas moins à très peu près diurne, et elle donnerait lieu à des variations *journalières* de la hauteur du pôle, suivant l'expression de Laplace, si les observations en étaient faites aux différentes heures du jour.

§ 2. *Détermination du terme principal de la nutation initiale au moyen des observations de Dorpat.*

2. Il est aisé de déterminer les constantes β et γ, comme nous allons le voir, indépendamment de toutes les erreurs théoriques de réduction.

Supposons que nous appliquions la formule (I) à deux observations faites à 12 heures sidérales d'intervalle.

Comme t représente le temps sidéral écoulé depuis l'époque, il suffira, pour la deuxième observation, d'écrire, au lieu de t, $t + 12$ h., ou de changer φ en $\varphi + \pi$, sans changer t lui-même, qui sera le temps écoulé depuis l'époque jusqu'à l'instant de la première observation.

En admettant, ce qu'on peut faire sans erreur sensible, que les différentes fonctions qui dépendent des arguments ☾, ⊙, Γ, etc., ne varient pas en 12 h. sidérales, il est clair que tous les termes de la nutation, même diurne, seront les mêmes pour la seconde observation que pour la première, ainsi que tous les autres termes de réduction; que les termes en γ, au contraire, changeront de signe dans la seconde observation.

Comme il s'agit d'observations méridiennes, It ou $(1 + \iota)\,nt$ sera égal à $\iota nt + \alpha$ pour le passage supérieur, à $\iota nt + \alpha \pm \pi$ pour l'inférieur. Selon le cas, on aura donc :

$$\Delta\alpha = \mp \gamma \left\{ - C_\alpha \sin(\iota nt + \beta + \alpha) + S_\alpha \cos(\iota nt + \beta + \alpha) \right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Pour l'observation consécutive, t devient $t + 12$ h.; It sera donc égal à $\iota nt + \iota\pi + \alpha$,

(*) *Mécanique céleste*, livre V, art. 4.

(**) Oppolzer, *Traité de la détermination des orbites, etc.*, et Tisserand, *Bull. astr.*, mai 1890, p. 151.

ou bien à $\iota nt + \iota\pi + \alpha + 2\pi$, selon le cas; et, par suite, pour la seconde observation, on aura

$$\Delta\alpha' = \pm \gamma \left\{ - C_\alpha \sin(\iota nt + \iota\pi + \beta + \alpha) + S_\alpha \cos(\iota nt + \iota\pi + \beta + \alpha) \right\}.$$

En retranchant la seconde de la première, on obtient

$$\Delta^2\alpha = \mp 2\gamma \cos\frac{\iota\pi}{2} \left\{ - C_\alpha \sin\left(\iota nt + \frac{\iota\pi}{2} + \beta + \alpha\right) + S_\alpha \cos\left(\iota nt + \frac{\iota\pi}{2} + \beta + \alpha\right) \right\},$$

ou, plus simplement, en faisant $\gamma \cos\frac{\iota\pi}{2} = \gamma'$, qui diffère excessivement peu de γ (puisque $\frac{\iota\pi}{2}$ est à peine égal à 30″) et $\frac{\iota\pi}{2} + \beta = \beta'$:

$$\Delta^2\alpha = \mp 2\gamma' \left\{ - C_\alpha \sin(\iota nt + \beta' + \alpha) + S_\alpha \cos(\iota nt + \beta' + \alpha) \right\}.$$

Remplaçant S_α par $\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta$, et C_α par $\cos\alpha \operatorname{tg}\delta$, on pourra écrire :

$$\Delta^2\alpha = \pm 2\gamma' \cot\varepsilon \left\{ \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\delta \sin(\iota nt + \beta') - \cos(\iota nt + \alpha + \beta') \right\}.$$

Cette dernière formule est plus commode pour le calcul numérique, parce qu'on pourra prendre directement la valeur de $\cos(\iota nt + \alpha + \beta')$ dans une table des sinus naturels.

Pour l'appliquer à la détermination de γ' et β', ou de γ et β, on fera

$$2\gamma' \cot\varepsilon \sin\beta' = u, \qquad 2\gamma' \cot\varepsilon \cos\beta' = v,$$

d'où, en désignant par τ le facteur $\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\delta$:

$$\left.\begin{aligned} \pm \Delta^2\alpha &= u\left\{\tau \cos \iota nt + \sin(\iota nt + \alpha)\right\} + v\left\{\tau \sin \iota nt - \cos(\iota nt + \alpha)\right\} \\ &= gu + hv. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

On prendra le signe + dans le premier membre, si la première des deux observations se rapporte à un passage supérieur; le signe —, si elle se rapporte à un passage inférieur.

t est le temps écoulé depuis l'époque jusqu'à l'instant de la première des deux observations, et nous admettrons que ιnt croît de 1°,07 par jour moyen, ou de 390°,5 par année tropique, chiffre que nous verrons confirmé par tous les résultats que nous trouverons.

La formule précédente servira à déterminer les deux inconnues γ' et β', donc γ et β, au moyen d'une série d'observations.

Lorsque u et v seront connus, on trouvera l'influence de la nutation initiale en ascension droite en prenant simplement la moitié de la valeur de l'expression $\Delta^2\alpha$ qui précède, et l'ajoutant à l'ascension droite apparente, calculée, abstraction faite de cette nutation, pour le passage supérieur, en l'en retranchant pour le passage inférieur; il est facile de s'en assurer en développant l'expression (1) de $\Delta\alpha$, de manière à y introduire les facteurs u et v.

3. Afin que l'influence de l'erreur commise dans l'évaluation de la période soit aussi réduite que possible, il conviendra de faire usage d'observations qui ne s'étendent pas sur un intervalle de temps trop considérable.

Nous avons choisi à cet effet les belles séries de Dorpat, dont Peters s'est servi pour déterminer la constante de la nutation.

Dans une première détermination effectuée par M. Byl, en admettant la période de 305 jours, les séries de deux passages supérieur et inférieur immédiatement consécutifs de la polaire, observés à Dorpat par W. Struve pendant les mois de mars, avril, mai, juin des années 1823, 1824, 1825 (Peters, *Num. const. nut.*, Mémoires de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg) ont donné respectivement, l'origine étant chaque fois le 1er avril de l'année :

	β	γ
1823.	236°43′	0″081
1824.	247.24	0.075
1825.	254.6	0.086

La concordance étonnante de ces déterminations m'a surpris d'autant plus que l'accroissement annuel semblait approcher de bien près de 360°.

M. Byl a calculé ensuite diverses séries de Preuss. Les observations de cet astronome sont bien éloignées de la précision de celles de Struve.

La série du 23 avril au 7 juin 1838, réduite par M. Niesten, a seule donné pour β et pour γ des valeurs satisfaisantes.

La valeur de β, pour le 1er avril 1838, est 306°24′.

En combinant cette valeur avec la moyenne 246° déduite des déterminations précédentes pour le 1er avril 1824, on trouve en 14 ans un accroissement de

$$40° + n \times 360°.$$

Or, les observations de Struve (1823, 1824, 1825) indiquent un accroissement peu supérieur à 360°.

Il nous a donc paru que la valeur de n qui répond le mieux à toutes les observations de Dorpat est $n = 1$, en supprimant les quatorze circonférences entières; ce qui conduit à un accroissement annuel de 400° environ. Nous avons trouvé ultérieurement la valeur plus exacte de 390°30′, ou de 1°,07 par jour moyen.

4. M. Niesten a repris, en faisant usage de cette dernière valeur, le calcul des observations de Struve au moyen de la formule (2). Il a trouvé, pour $u = 2\gamma \cot \varepsilon \sin \beta$

et $v = 2\gamma \cot \varepsilon \cos \beta$, les valeurs suivantes, l'origine étant le 1er janvier, et l'unité le centième de seconde d'arc (*) :

	u	v
1823,0	+ 0.05	— 1.19
1824,0	+ 1.26	— 1.56
1825,0	— 0.095	— 1.07

Désignons par u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3 ces trois valeurs respectives, et appelons a l'accroissement annuel de $390°,5$. Nous pourrons écrire :

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= u_1 \cos a + v_1 \sin a \\ v_2 &= -u_1 \sin a + v_1 \cos a \end{aligned}\right\} \text{poids } 35 = \text{nombre des équations;}$$

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= u_3 \cos a - v_3 \sin a \\ v_2 &= u_3 \sin a + v_3 \cos a \end{aligned}\right\} \text{poids } 30.$$

On tirera de là :

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= 0.129 \\ v_2 &= -1.455 \end{aligned}\right\} \text{poids } 35, \qquad \left.\begin{aligned} u_2 &= +0.461 \\ v_2 &= -0.970 \end{aligned}\right\} \text{poids } 30.$$

Or, nous avions pour 1824,0 :

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= +1.26 \\ v_2 &= -1.26 \end{aligned}\right\} \text{poids } 27;$$

si l'on combine entre elles les trois valeurs précédentes, en tenant compte des poids, on trouve, pour cette dernière date :

$$u = +0,636 \qquad v = -1,349$$

et, par suite,

$$\gamma = 0''.0768, \qquad \beta = 154°45',5 \text{ pour } 1824,0 \text{ (Dorpat).}$$

Cette valeur de β, ramenée à Poulkova, sera :

$$\beta = 151°9',5, \qquad 1824,0 \text{ Poulkova.}$$

La valeur déduite des observations de Preuss pour le 1er avril 1838, 306°, ramenée au 1er janvier, devient 210°; donc

$$\beta = 207°, \qquad 1838,0 \text{ Poulkova.}$$

Comme les observations de Preuss ne nous inspiraient pas une très grande confiance, et que, dans une question de cette gravité, où il ne s'agit de rien moins que de savoir si la Terre peut être traitée comme un corps solide, il faut accumuler les preuves pour imposer la conviction, nous avons fait usage également des observations de la hauteur du pôle à Poulkova (Nyrén, *Die Polhöhe von Pulkova,* Mémoires de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg, t. XIX, n° 10) pour vérifier l'exactitude de notre période.

(*) Le développement des calculs figurera à la fin du chapitre, tant pour ceux-ci que pour les suivants.

§ 3. *Détermination du terme principal de la nutation initiale au moyen des observations de la hauteur du pôle à Poulkova.*

5. Nous allons rechercher les mêmes constantes en faisant usage des séries de déterminations de la hauteur du pôle de Poulkova, qui ont fourni à Peters les premières valeurs numériques de ces constantes.

Comme ces observations ont été réduites sans tenir compte de la nutation initiale, il faudra, dans le cas d'un passage supérieur, ajouter à la distance zénitale, ou à la latitude qui en a été déduite,

$$\Delta\delta = -\gamma \cos(It + \beta - \alpha) = -\gamma \cos(nt + \beta);$$

et, dans le cas d'un passage inférieur, retrancher cette quantité $\Delta\delta$, qui devient alors $+\gamma \cos(nt + \beta)$, de la latitude observée; car It est, pour un passage inférieur, égal à $\pi + \alpha + nt$.

Dans les deux cas donc, il faut ajouter à la latitude observée la quantité

$$-\gamma \cos(nt + \beta).$$

Or, les autres réductions (précession, nutation, aberration, etc.) interviennent avec des signes contraires dans les latitudes déterminées au moyen de passages supérieurs et inférieurs. Et si ces deux passages sont consécutifs, on pourra considérer toutes ces réductions comme égales entre elles, même en ce qui concerne la nutation diurne, quoique les termes lunaires puissent varier un peu en 12 heures.

Donc, en prenant la moyenne des latitudes déterminées par ces deux passages, on obtiendra la latitude, indépendamment de toutes les erreurs de réduction, mais affectée de la nutation initiale; il faudra y ajouter, comme il vient d'être dit, $-\gamma \cos(nt + \beta)$, ou, plus exactement,

$$-\gamma \frac{\cos(nt + \beta) + \cos(nt' + \beta)}{2},$$

qu'on peut écrire, sans erreur sensible, $-\gamma \cos(nt + \beta)$, en prenant pour t l'instant moyen entre les deux observations.

En appelant Φ_a la latitude déterminée à Poulkova par deux observations consécutives (s et i), Φ_0 la hauteur du pôle, on aura donc

$$\Phi_a = \Phi_0 + \gamma \cos(nt + \beta);$$

ou en admettant que $\Phi_o = \Phi'_a + z$, et faisant $\Phi_a - \Phi'_a = r$:

$$r = z + \gamma \cos (\iota t + \beta),$$

et enfin, en posant

$$\gamma \sin \beta = v, \qquad \gamma \cos \beta = u : \qquad (5)$$
$$r = z + u \cos \iota t - v \sin \iota t,$$

t désignant le temps sidéral écoulé depuis l'époque jusqu'à l'instant moyen entre les deux observations consécutives.

Posant $\cos \iota t = g$, $- \sin \iota t = h$, l'équation s'écrira

$$z + gu + hv = r; \qquad (4)$$

et lorsque z, u et v seront déterminés, les résidus, corrigés de la nutation initiale, seront

$$\text{obs.} - \text{calc.} = r - (z + gu + hv);$$

mais on ne doit pas oublier que ces résidus individuels seront affectés des erreurs de réduction qui avaient été éliminées dans la moyenne des deux latitudes, et, en particulier, de la nutation diurne.

6. Nous avons appliqué l'équation (4) aux séries de deux observations consécutives de Peters que nous avons trouvées dans le Mémoire de Nyrén.

Ces séries sont les suivantes :

1) Avril-juin 1842.
2) Juillet-septembre 1842.
3) Mars-avril 1843.
4) Septembre-décembre 1843.
5) Mars-mai 1844.

Elles ont donné respectivement, le centième de seconde étant pris pour unité :

Origine.	v	u	Poids.
1) 1er avril 1842.	— 48.8	49.2	60
2) 1er juillet 1842	15.4	— 35.4	51
3) 1er mars 1843	— 35.0	35.1	32
4) 1er septembre 1843. . . .	— 108.7	75.9	22
5) 1er avril 1844.	41.0	— 15.5	17

Comme l'angle β ne varie pas suffisamment dans l'étendue d'une même série pour qu'on puisse espérer déduire de celle-ci une valeur satisfaisante de cet angle, nous combinerons la première série avec chacune des autres, de la manière déjà indiquée cidessus.

Afin de déduire de l'une de ces séries les valeurs de u et v ramenées à l'époque même de la première, nous désignerons en général par A l'angle dont β a augmenté entre les deux époques, calculé à raison d'un accroissement annuel de 390°.5, par u_1, v_1, les valeurs rapportées à la deuxième époque comme origine, et nous aurons ainsi :

$$u = u_1 \cos A + v_1 \sin A,$$
$$v = v_1 \cos A - u_1 \sin A.$$

L'application de ces équations à chacune des séries 2) à 5), ramenée au 1er avril 1842, donnera

	v	u	Poids.
2)	35.4	19.3	51
3)	— 33.8	34.2	32
4)	123.2	— 48.9	22
5)	33.4	28 3	17

Et ces valeurs, combinées avec les valeurs 1), donneront enfin

	v	u	β	Poids.
2)	— 11.3	35.48	342°7	111
3)	— 43.6	44.0	315.2	92
4)	— 6.66	22.9	353.4	82
5)	— 30.6	44.6	325.5	77
	Moyenne.		334.5	

On voit, dans la concordance des différentes valeurs de β entre elles, la confirmation de l'exactitude et de la constance de la période que nous avons assignée à la nutation initiale.

Nous avons à peine besoin d'ajouter que l'application de la période de 305 jours, ou de l'accroissement annuel correspondant de 428°, eût fourni des résultats absolument discordants.

Les précédents s'écartent encore assez fort de celui que Peters a déduit de l'ensemble de toutes ses observations. Mais la détermination des latitudes est beaucoup moins propre que celle des ascensions droites à la recherche d'une quantité aussi faible que l'est la nutation initiale.

7. — Nous avons utilisé également, pour la détermination des constantes de la nutation initiale, les observations, beaucoup moins nombreuses, de Gyldén et de Nyrén.

A cause de leur nombre trop restreint, bien probablement, aucune de ces séries, soit isolées, soit réunies, n'a fourni de valeur un peu satisfaisante pour l'angle β.

En combinant entre elles, de la manière indiquée ci-dessus, les trois séries que nous avons formés des observations de Gyldén, nous en avons déduit

$$u = 7.0 \qquad v = 12.1 \qquad \text{origine : } 1864.0$$

d'où $\beta = 60^{\circ}.5$ (au lieu de 291° ou -69°) et $\gamma = 13.9$, valeur de moitié trop forte

Nous avons déduit de même, des deux séries de Nyrén, les valeurs suivantes :

$$u = 5.09 \qquad v = 5.44 \qquad \text{origine : } 1864.0$$

d'où $\beta = 47^{\circ}$, valeur aussi peu satisfaisante que la précédente, dont elle ne s'écarte même pas beaucoup, coïncidence purement accidentelle, je présume; la valeur de γ, 7.4, est beaucoup plus admissible.

La combinaison des séries de Gyldén et de Nyrén a donné

$$u = 6.0 \qquad v = 8.3 \qquad \text{origine : } 1864.0$$

d'où

$$\beta = 54^{\circ}, \qquad \gamma = 9.1.$$

Cette dernière valeur concorde bien avec celles que Peters, Downing et moi-même nous avons déterminées.

8. Comparons la valeur de β déduite des observations de W. Struve (1824.0) avec celles qui ont été déterminées antérieurement par l'observation des variations de la latitude, afin d'en déduire la période de celles-ci.

Nous admettrons que l'accroissement annuel de β est égal à $390^{\circ} + \varepsilon$, comme nous l'avons déjà trouvé.

Nous supposerons corrects les résultats déterminés par Peters lui-même, par Nyrén et par Downing, au moyen de très longues séries d'observations, pour 1842, 1850 et 1872 respectivement.

La comparaison des nôtres avec ces derniers fournira, en désignant par x la correction de notre valeur, un système d'équations à deux inconnues, ε et x.

Après avoir ramené à Poulkova la valeur de β (1824,0) trouvée pour Dorpat, ces équations seront :

$$1)\ 151^\circ\!.15 + 180^\circ + 18\,\varepsilon + x = 341^\circ\!.6 \text{ (Peters, 1842.0)}$$
$$2)\ 151.15 + \ \ 60 + 26\,\varepsilon + x = 224^\circ \text{ (Nyrén, 1850.0)}$$
$$3)\ 151.15 - \ \ 0 + 48\,\varepsilon + x = 175^\circ\!.2 \text{ (Downing, 1872.0)}$$

La résolution de ces équations conduit à

$$\varepsilon = 0^\circ\!.5 \qquad\qquad x = 0^\circ\!.20$$

La valeur de β pour 1824,0 (Dorpat) est, par suite,

$$154^\circ\!.7 + 0^\circ\!.2 = 154^\circ\!.9$$

Nous avons donc, pour Poulkova :

$$\beta = 151^\circ\!.35 + 390^\circ\!.5\,(A - 1824\,0),$$

A désignant le millésime de l'année.

9 Calculons maintenant, d'après cette formule, les valeurs de β pour les dates suivantes, et comparons-les aux observations; nous trouverons :

Époque.	Calcul.	Observation.	C — O.
1824.0 (F. Obs. de Struve) . . .	151°.35	151°.15	+ 0°.2
1838.0 (F. Obs. de Preuss) . . .	218.55	210	+ 9
1842 (Peters)	340.55	341.60	— 0.05
1850 (Nyrén)	224.55	224	+ 0.55
1872 (Downing)	175.55.	175.20	+ 0.35

Ces résultats sont une preuve absolument convaincante de l'exactitude de la valeur que nous avons assignée à l'accroissement annuel de β, ou à la période des variations de la latitude *astronomique,* qui est de 336,7 jours au lieu de 305 jours, comme l'admettaient universellement les astronomes

Et ce dernier nombre serait, en effet, presque absolument correct, si la Terre pouvait être considérée comme un corps solide dans son mouvement de rotation Car les rapports de ses moments d'inertie principaux sont suffisamment bien connus dans cette hypothèse, qui peut s'appliquer à la précession et, bien probablement, au terme nodal de la nutation, déterminés qu'ils sont par les deux constantes de ces mouvements. Si donc la valeur qu'on en tire pour $\frac{C-A}{A}$ ne concorde absolument pas avec la valeur assignée à ce rapport par les meilleures observations d'où l'on a déduit la nutation initiale, c'est que celle-ci ne s'applique pas à la Terre considérée comme solide. Il faut donc admettre l'hypothèse de la fluidité intérieure du globe.

Dès lors, la nutation diurne de son écorce est possible et même très probable.

10. Mais avant d'aborder la recherche de ses constantes, qu'il me soit permis de signaler aux astronomes la nécessité de faire entrer la nutation initiale dans la réduction des observations de précision, et les erreurs auxquelles ils s'exposent en la négligeant.

Les observations seront supposées faites dans le méridien géographique, auquel seul se rapportent, du reste, et la définition de l'heure ou de l'ascension droite (puisqu'il est fixe, tandis que le méridien astronomique est variable), et les formules de la mécanique céleste, qui sont relatives au pôle et à l'équateur géographiques, non au pôle et à l'équateur instantanés; les formules de la nutation initiale ont été données ci-dessus (II); nous ajouterons seulement qu'on pourra y faire

$$\gamma = 0''.08, \text{ et, pour } 1890.0, \ \beta = 4^\circ \text{ (Poulkova) ou } 32^\circ \text{ (Paris)};$$

enfin, que dans $lt = n(1 + \iota)t$, où t représente le temps écoulé depuis l'époque 1890.0 ιnt est égal à $390^\circ,5$ par an, ou à $1^\circ,07$ par jour moyen.

On peut, pensons-nous, adopter avec une grande confiance la valeur $0''.08$ que nous avons assignée au coefficient γ de la nutation initiale. Chacune des séries des observations de Struve en 1823, 1824 et 1825, a donné, en effet, pour γ une valeur peu différente de celle-là : $0'',05$; $0'',07$; $0'',03$ respectivement.

La valeur qui résulte de l'ensemble des trois séries, article 4, est $0'',08$.

Peters et Downing ont trouvé, chacun de leur côté, $0'',079$ (*) et $0'',095$ (**).

Nyrén (***) a déduit, des observations de Peters, de celles de Gyldén et des siennes sur la latitude de Poulkova, ainsi que de celles de W. Struve dans le premier vertical, quatre valeurs dont la moyenne est $0'',081$.

Toutes ces déterminations concordent tellement entre elles, qu'il est permis d'affirmer que la constante $0'',08$ est exacte à quelques millièmes près. Nous ajouterons que M. Van de Sande Backhuysen vient de trouver, par la discussion de nombreuses séries de déterminations de la latitude à Greenwich, $0'',09$, valeur qui s'écarte bien peu de celle que nous avons adoptée (^{IV}).

(*) *Astr. Nachr.*, vol. XXII, 1845, p. 128.
(**) *Monthly Notices*, vol. XL, 1880, p. 431.
(***) *Mém. de l'Acad. des sciences de Saint-Pétersbourg*, vol. XIX, 1875, nº 10, pp. 37, 38.
(IV) *Monthly Notices*, vol. LI, nº 5, mars 1891.

Les quantités qu'il faut ajouter aux formules usuelles de la réduction au lieu apparent, pour tenir compte du terme principal (*) de la nutation initiale, sont donc, pour 1890.0 :

$$\Delta\alpha = 0''08 \left\{ \operatorname{tg}\delta \sin(nt - \alpha + \nu t + 32^\circ - l) - \cot\theta \cos(nt + \nu t + 32^\circ - l) \right\}$$
$$\Delta\delta = -0''.08 \cos(nt - \alpha + \nu t + 32^\circ - l),$$

l étant la longitude orientale du lieu d'observation par rapport à Paris.

νt est égal à $390^\circ 5$ par an, à $32^\circ.54$ par mois, à $1^\circ.07$ par jour moyen.

$nt - \alpha$ est simplement l'angle horaire de l'étoile; il est nul pour le passage supérieur, égal à 180° pour le passage inférieur au méridien.

Et ce sont ces deux circonstances, qui, laissant subsister seulement l'argument à longue période νt, dans l'expression $\Delta\delta$, ont fait perdre de vue aux astronomes le caractère diurne de ces variations, nettement affirmé par Laplace dans ce passage : « Si γ était sensible, on » le reconnaîtrait par les variations *journalières* de la hauteur du pôle. »

11. Montrons l'une des conséquences les plus graves de l'omission de la nutation initiale dans la réduction des observations. A l'obliquité moyenne de l'écliptique, telle que les astronomes la déduisent de leurs observations, il faut ajouter, pour tenir compte de la nutation initiale, la quantité $-\Delta\delta$, qui se réduit, pour le passage supérieur au méridien, à

$$\gamma \cos(\iota nt + \beta)$$

ou, en prenant pour origine du temps le solstice d'été considéré, à $\gamma \cos\beta$.

Au solstice suivant, à l'obliquité déterminée par les astronomes il faudra ajouter, puisque β a augmenté de $\iota nt = 0{,}502 \times 390^\circ{,}5 = 196^\circ.0$:

$$\gamma \cos(196^\circ + \beta) = -\gamma \cos(16^\circ + \beta).$$

Entre ces deux obliquités, il existe donc (indépendamment de la variation séculaire) une différence égale à

$$\gamma \left\{ \cos\beta + \cos(16^\circ + \beta) \right\} = 2\gamma \cos 8^\circ \cos(8^\circ + \beta),$$

différence qui a été négligée jusqu'à présent par les astronomes. Cette différence peut s'élever, comme on voit, à $0''.15$, et variera avec le lieu de l'observation, puisque l'angle β augmente de 1° par degré de longitude occidentale.

12. La période de 305 jours, adoptée par les astronomes, avait été déduite de la valeur de $\frac{C - A}{A}$ calculée dans l'hypothèse d'une Terre solide.

(*) Voir § 4.

Nous avons à calculer quelles sont les valeurs de cette période et de ce rapport en ce qui concerne la nutation initiale.

Comme nt est égal à $390^{\circ}.5$ par an, ou à $\frac{390^{\circ}.5}{366.24}$ par jour sidéral, et nt à 360°, la valeur de ι sera

$$\iota = \frac{390.5}{360 \times 366.24} = 0.00296.$$

Quant à la période qu'il faut substituer à celle de 305 jours des astronomes, elle sera de $\frac{360 \times 365.24}{390.5}$ ou 336.7 jours moyens.

Ces valeurs diffèrent considérablement de celles que les astronomes ont admises jusqu'à ce jour.

Celle de ι ou de $\frac{C - A}{A}$, qu'ils ont calculée pour la Terre supposée solide, est 0.00327 (*), tandis que la nôtre est seulement 0.00296, et les a conduits à une période de 305 jours, que l'observation nous démontre être, au contraire, de 336.7 jours

Le coefficient $\frac{C - A}{A}$, calculé pour la Terre solide, doit, par conséquent, être réduit, pour la nutation initiale, d'un dixième environ de sa valeur.

La nutation initiale ne s'effectue donc pas comme si la Terre était solide, et nous l'envisagerons comme appartenant à l'écorce de la Terre.

Sa période réelle est $t = \frac{2\pi}{n(1 + \iota)}$.

Celle du mouvement de rotation du noyau est $t_1 = \frac{2\pi}{n} = 1$ jour sidéral.

Le mouvement relatif de l'écorce par rapport au noyau est donc $2\pi(1 + \iota) - 2\pi = 2\pi\iota$ par jour sidéral; c'est-à-dire que sa période est exactement celle de 336.7 jours moyens que nous venons de déterminer.

Cette période se rapproche très fort de l'année.

Or, il existe des termes de nutation dont la période est d'un an, d'un demi-an, ou d'un tiers d'année.

Cette dernière nutation a lieu tant pour l'écorce solide que pour le noyau du globe; mais elle n'a pas la même amplitude pour l'une que pour l'autre, à cause de la différence de leurs moments d'inertie respectifs. Il y a donc, du fait des termes solaires de la nutation, un mouvement relatif de l'écorce sur le noyau, mouvement dont nous ignorons l'amplitude, et dont la période est de quatre ou de six mois pour les uns, de douze pour les autres.

Mais si le mouvement relatif qui dépend de la nutation initiale, et dont la période est de onze mois, fait que les valeurs de A. B, C, relatives à ce mouvement, ne sont pas les mêmes que pour la Terre supposée solide, à plus forte raison en doit-il être ainsi pour un mouvement relatif d'une période de six ou de quatre mois.

(*) OPPOLZER. *Traité de la détermination des orbites*, trad. de E. Pasquier, Paris 1886, p. 157. — F. FOLIE. *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde.* Bruxelles, 1884, p. 63. — TISSERAND. *Traité de mécanique céleste*, t. II. Paris, 1891, p. 441.

On ne peut donc pas employer, dans le calcul des coefficients des termes solaires de la nutation, les valeurs de A, B, C, qu'on a trouvées au moyen des constantes de la précession et de la nutation; et les coefficients actuellement usités devront subir une correction.

Celle-ci se répercutera évidemment dans la valeur de la constante de l'aberration; et l'introduction, dans les formules de réduction, de la nutation initiale, dont nous croyons avoir bien exactement déterminé le terme principal, exercera aussi son influence dans la recherche de cette constante, puisqu'elle y intervient avec une période presque annuelle.

De plus, il existe des termes, à période également annuelle, de l'aberration systématique, qui peuvent n'être nullement négligeables, du moment où la vitesse de transport du système solaire est supérieure à celle de la Terre dans son orbite, fait sur lequel les astronomes ne sont pas encore en mesure de se prononcer d'une manière absolue.

Il s'agira donc, pour déterminer avec certitude les constantes de la nutation diurne, qui dépend absolument des mêmes arguments que la nutation annuelle, d'éliminer tout d'abord les termes de l'aberration tant annuelle que systématique.

Cela fait, nous déterminerons à la fois la correction des termes solaires, celle de la constante de l'aberration et la vitesse systématique.

Lorsque ces corrections seront connues, nous pourrons reprendre, avec beaucoup plus de sûreté, la recherche des constantes de la nutation diurne.

§ 4. *Détermination du second terme de la nutation initiale.*

Avant toutefois d'aborder cette recherche, nous devons nous assurer si le second terme de la nutation initiale est insensible. Ce qui nous a porté à en douter, c'est, outre les résultats peu satisfaisants tirés des observations de Gyldén et de Nyrén, l'application que nous avons faite de la nutation initiale, telle que nous venons de la déterminer, aux observations de 51 Ceph. faites par Wagner de 1861 à 1865.

Dès les premières observations, nous constations que, réduites de la nutation initiale, elles donnaient des écarts bien moins considérables entre les ascensions droites observées aux passages supérieur et inférieur. Voici quels sont ces écarts, avant (Wagner) et après la réduction (F. F.), exprimés en $0^s,01$:

1861.	Avril 4-5	5	8	Sept. 29	29-30	30
W.	53	22	40	— 46	28	23
F.F.	29	-2	16	— 24	6	1

Ce début était des plus satisfaisants, et semblait une confirmation éclatante de la détermination que nous avions faite de la nutation initiale.

Mais pour les années suivantes, au contraire, nos écarts dépassaient fréquemment ceux de Wagner.

Nous nous sommes donc demandé si les formules que nous avons employées, et qui sont incomplètes, comme nous l'avons dit, ne doivent pas renfermer le terme en $\varkappa$, que nous avons omis parce que $\varkappa$ renferme B — A comme facteur.

Si la recherche à laquelle nous allons nous livrer démontre que ce terme ne peut pas être négligé, nous aurons prouvé, *a priori*, l'existence de la nutation diurne.

En effet, si B — A n'est pas insensible pour le mouvement de nutation initiale de l'écorce terrestre, mouvement dont la période est, relativement à celui du noyau, de onze mois environ, à plus forte raison ne l'est-il pas pour le mouvement diurne, qui affecte l'écorce seule d'une manière tout à fait indépendante du noyau, tandis que celui-ci est certainement affecté, plus ou moins, de la nutation initiale.

C'est-à-dire que B — A n'est pas relatif à l'écorce seule dans la nutation initiale, mais bien dans la nutation diurne.

Dans le premier cas, la valeur de $\frac{B-A}{C}$, que nous appellerons $\frac{B_1-A_1}{C_1}$, est intermédiaire entre celle qu'elle a dans le second, $\frac{B_2-A_2}{C_2}$, et celle qu'elle a pour la Terre considérée comme entièrement solide, $\frac{B-A}{C}$:

$$\frac{B_2-A_2}{C_2} > \frac{B_1-A_1}{C_1} > \frac{B-A}{C},$$

$\frac{B-A}{C}$ est certainement négligeable.

Mais si $\frac{B_1-A_1}{C_1}$ ne l'est pas, à plus forte raison en est-il ainsi de $\frac{B_2-A_2}{C_2}$, et la nutation diurne de l'écorce terrestre se trouve démontrée *a priori*.

13. Reprenons, en conséquence, l'expression complète sous laquelle nous avons mis la nutation initiale en obliquité et en longitude :

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= -\gamma \sin(\varphi + nt + \beta_0) + \varkappa \sin(-\varphi + nt + \beta_0),\\ s_1\Delta\lambda &= -\gamma \cos(\varphi + nt + \beta_0) + \varkappa \cos(-\varphi + nt + \beta_0)\end{aligned}$$

On en tirera

$$\begin{aligned}\Delta\delta &= -\gamma \cos(\varphi + nt + \beta_0 - \alpha) + \varkappa \cos(-\varphi + nt + \beta_0 - \alpha)\\ \Delta\alpha &= \gamma\{C_\alpha \sin(\varphi + nt + \beta_0) - S_\alpha \cos(\varphi + nt + \beta_0)\}\\ &\quad - \varkappa\{C_\alpha \sin(-\varphi + nt + \beta_0) - S_\alpha \cos(-\varphi + nt + \beta_0)\}\end{aligned}$$

14 (*). Ces formules, très compliquées, nous ont paru d'autant moins propres à la détermination du second terme de la nutation initiale qu'elles ne donnent pas une idée nette de la relation qui existe entre les constantes γ et $\varkappa$.

C'est pourquoi nous avons cherché à les mettre sous une forme plus simple. Or, en désignant par a et b les différences C — A et C — B, et en faisant

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{B}+\frac{b}{A}\right)=\mu, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a}{B}-\frac{b}{A}\right)=\nu,$$

les formules complètes de la nutation initiale peuvent s'écrire :

$$l=\alpha(\mu-\nu)\cos(nit+\beta_0)$$
$$m=\alpha(\mu+\nu)\sin(nit+\beta_0);$$

en sorte que si, comme nous le pensons, ν ne peut pas être négligé vis-à-vis de μ, le pôle instantané décrit une ellipse dont les axes sont $\alpha(\mu+\nu)$ et $\alpha(\mu-\nu)$.

Des expressions de l et de m, on tire :

$$\frac{d\theta}{dt}=-\alpha\mu\cos(\varphi+nit+\beta_0)+\alpha\nu\cos(\varphi-nit-\beta_0),$$
$$s_1\frac{d\lambda}{dt}=\alpha\mu\sin(\varphi+nit+\beta_0)-\alpha\nu\sin(\varphi-nit-\beta_0).$$

Intégrant, et faisant rentrer le dénominateur $n(1+\iota)$ dans la constante α, prenant, dans le second terme, $\frac{1+\iota}{1-\iota}$ égal à 1, on aura :

$$\Delta\theta=\alpha\mu\sin(\varphi+nit+\beta_0)-\alpha\nu\sin(\varphi-nit-\beta_0),$$
$$s_1\,\Delta\lambda=-\alpha\mu\cos(\varphi+nit+\beta_0)+\alpha\nu\cos(\varphi-nit-\beta_0),$$

et, par suite, en appelant η l'angle horaire, et en prenant pour unité le jour sidéral :

$$\Delta\delta=-\alpha\mu\cos(it+\beta_0+L+\eta)+\alpha\nu\cos(-it-\beta_0+L+\eta),$$
$$\cos\delta\,\Delta\alpha=\alpha\mu\sin(it+\beta_0+L+\eta)-\alpha\nu\sin(-it-\beta_0+L+\eta).$$

(*) Les vingt-quatre premières pages et les calculs qui s'y rapportent ont été imprimés en 1891. Les suivantes en 1894-95. Dans ces dernières, nous n'avons plus écrit, dans les expressions de la nutation initiale et de la nutation diurne en Æ, le terme indépendant tgδ, parce que ce terme, qui n'a été calculé dans aucune réduction, rentre, par ce fait même, dans la correction de la pendule. (Voir sur ce sujet *Catéchisme correct d'astronomie sphérique* dans les *Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei*, vol. IX-XI.)

Dans le méridien, $\eta = 0$ ou π, selon qu'il s'agit d'un passage supérieur ou inférieur, et, par suite :

$$\begin{matrix} s \\ i \end{matrix}\Big\{ \Delta\delta = \pm\, \alpha\mu \cos(\iota t + \beta_0 + \mathrm{L}) \mp \alpha\nu \cos(-\iota t - \beta_0 + \mathrm{L}).$$

$$\begin{matrix} s \\ i \end{matrix}\Big\{ \cos\delta\, \Delta\alpha = \mp\, \alpha\mu \sin(\iota t + \beta_0 + \mathrm{L}) \pm \alpha\nu \sin(-\iota t - \beta_0 + \mathrm{L}).$$

On pourrait écrire $\iota t + \beta_0 - \mathrm{L}$ au lieu de $-\iota t - \beta_0 + \mathrm{L}$, à la condition de changer les signes du second terme dans l'expression de $\Delta\alpha$; mais il est préférable de conserver la première forme, parce que l'argument L y est positif, en sorte que les constantes $\mathrm{L} + \beta_0$ et $\mathrm{L} - \beta_0$ augmentent toutes deux avec la longitude occidentale de l'observatoire, L désignant la longitude orientale du premier méridien par rapport à celui-ci. On reste ainsi d'accord, quant à l'une et l'autre constante, avec la manière de voir des astronomes.

Mais alors le mouvement du pôle instantané est décomposé en deux, l'un direct, de rayon $\alpha\mu$, l'autre rétrograde, de rayon $\alpha\nu$, tous deux de même période $\frac{1}{\iota} = \sqrt{\frac{\mathrm{AB}}{ab}}$.

Lequel est prépondérant? C'est ce que la discussion d'observations très précises pourra seule établir. Nous sommes loin de croire, avec les astronomes, que le second terme est négligeable, et nous reviendrons sur ce point en étudiant la question de la variation des latitudes (astronomiques).

ANNEXE AU CHAPITRE Ier

DÉVELOPPEMENT DES CALCULS.

§ 2. *Observations de W. Struve et de Preuss. Calculs de M.* Niesten.

Formule $\pm \Delta^2\alpha = gu + hv$ (2).

Dates.		$\pm \Delta^2\alpha$ en $0^s.01$.	g	h
1823. Mars	26.0	+ 20	+ 13.63	— 3.84
	26.5	+ 24	13.67	— 3.72
	27.0	+ 9	13.71	— 3.60
Avril	10.4	+ 63	14.09	+ 1.41
	10.9	+ 64	14.08	+ 1.53
Mai	4.9	— 6	11.95	+ 7.49
	6.4	— 9	11.08	+ 8.37
	15.9	+ 32	10.15	+ 9.87
	16.4	+ 11	10.06	+ 9.98
	18.9	— 14	9.31	+ 10.54
	19.4	— 22	9.30	+ 10.65
	19.9	+ 19	9.29	+ 10.76
	21.9	+ 18	9.11	+ 11.20
	29.3	— 22	7.42	+ 12.20
	30.3	— 21	7.19	+ 12.31
	31.8	— 14	6.85	+ 12.46
Juin	1.3	— 14	6.74	+ 12.51
	1.8	— 25	6.63	+ 12.55
	2.3	— 46	6.30	+ 12.70
Septembre	7.6	— 2	4.18	— 13.71
	11.0	— 7	1.24	— 13.72
	11.6	— 4	+ 1.12	— 13.83
Octobre	3.6	— 10	— 4.36	— 13.25
	9.0	— 32	5.77	— 12.82
	10.5	— 5	6.13	— 12.61
	10.9	— 10	6.25	— 12.50
	12.9	+ 60	6.72	— 12.22
	13.4	+ 78	6.82	— 12.20
	13.9	+ 66	6.92	— 12.10
	29.4	— 5	9.94	— 9.58
Novembre	8.9	+ 4	11.74	— 7.49
	14.4	+ 20	12.46	— 6.40
	25.9	— 9	13.40	— 3.00
Décembre	8.4	— 1	13.90	— 0.30
	8.9	+ 8	— 13.90	— 0.18

Dates.			± $\Delta^2\alpha$	g	h
1824.	Mars	27	— 7	+ 13.71	— 3.60
		27.5	+ 102	+ 13.73	— 3.47
		28.0	+ 60	+ 13.75	— 3.34
	Avril	6.4	— 18	+ 14.14	+ 0.50
		11.4	— 2	+ 14.05	+ 1.79
		22.9	+ 32	+ 13.27	+ 5.00
		23.4	+ 36	+ 13.23	+ 5.12
		23.9	+ 67	+ 13.19	+ 5.24
	Mai	1.4	— 9	+ 12.45	+ 7.13
		1.9	+ 15	+ 12.39	+ 7.26
		20.3	+ 19	+ 9.34	+ 10.84
		20.8	— 18	+ 9.23	+ 10.75
		21.3	— 19	+ 9.12	+ 11.06
		21.8	— 7	+ 9.01	+ 11.07
		22.3	— 5	+ 8.90	+ 11.06
		22.8	— 1	+ 8.79	+ 11.17
		28.3	— 42	+ 8.61	+ 11.82
		28.8	— 66	+ 8.51	+ 11.88
	Juin	2.3	— 9	+ 6.57	+ 12.62
		7.3	— 6	+ 5.40	+ 12.82
		8.8	— 91	+ 5.10	+ 12.83
		9.3	— 81	+ 5.00	+ 12.88
		13.3	+ 49	+ 3.40	+ 13.68
		17.3	— 7	+ 2.20	+ 13.96
		20.8	— 31	+ 2.04	+ 14.06
		21.8	— 6	+ 1.84	+ 14.08
		24.3	+ 8	+ 0.78	+ 14.10
	Septembre	21.6	— 1	— 0.12	— 14.22
		22.1	— 17	— 0.17	— 14.20
		24.5	+ 35	— 1.11	— 14.13
		26.0	+ 13	— 1.44	— 14.03
	Octobre	2.8	+ 54	— 3.38	— 13.83
		17.9	— 24	— 7.06	— 12.34
		18.4	— 15	— 7.17	— 12.26
		22.4	— 2	— 8.06	— 11.68
	Décembre	5.8	+ 20	— 14.09	— 1.91
		20.3	+ 43	— 14.04	+ 1.77
1825.	Février	23.1	+ 20	+ 10.31	— 9.76
	Mars	14.6	— 13	+ 13.06	— 5.44
		15.1	+ 4	+ 13.11	— 5.32
		15.6	+ 10	+ 13.16	— 5.20
		17.1	+ 16	+ 13.31	— 4.84
		17.6	+ 26	+ 13.36	— 4.72

Dates.			$\pm\ \Delta^2\alpha$	g	h
1825.	Mars	19.1	+ 23	+ 13.51	− 4.36
		31.5	− 19	+ 14.14	− 1.07
	Avril	8.9	+ 3	+ 14.10	− 0.37
	Mai	6.4	− 57	+ 11.74	+ 8.37
		6.9	− 81	+ 11.66	+ 8.46
		7.4	+ 27	+ 11.58	+ 8.55
		16.9	− 25	+ 9.96	+ 10.07
		17.4	+ 21	+ 9.87	+ 10.18
		17.9	+ 22	+ 9.78	+ 10.29
		18.4	− 6	+ 9.69	+ 10.40
		31.3	− 19	+ 6.97	+ 12.43
		31.8	− 2	+ 6.85	+ 12.46
	Juin	1.3	+ 14	+ 6.74	+ 12.51
		3.3	+ 18	+ 6.30	+ 12.70
		3.8	− 29	+ 6.18	+ 12.75
	Octobre	3.0	+ 3	− 3.38	− 13.83
		3.5	− 38	− 3.51	− 13.77
		4.0	− 42	− 3.64	− 13.71
		20.9	+ 12	− 7.74	− 11.94
		23.4	+ 6	− 8.26	− 11.68
	Novembre	6.9	+ 6	− 11.16	− 8.86
	Décembre	5.8	− 23	− 14.09	− 1.91
		6.3	+ 8	− 14.10	− 1.78
		12.3	+ 27	− 14.19	− 0.33

On déduit de là les équations normales :

$$\mathbf{1823.}\ \left\{\begin{array}{l} 33x + 79.79\,u_1 - 10.38\,v_1 - 262 = 0 \\ 79.79 + 3294.87 + 1937.86 - 924.5 = 0 \\ 10.38 + 1937.86 + 3624.92 + 2646.4 = 0 \end{array}\right.$$

d'où

$$u_1 = +0.85\,;\quad v_1 = -1.19 \quad \text{poids } 33.$$

$$\mathbf{1824.}\ \left\{\begin{array}{l} 37x + 181.12\,u_1 + 125.58\,v_1 - 59 = 0 \\ 181.12 + 3157.43 + 1748.93 - 1369.1 = 0 \\ 125.58 + 1748.93 + 4315.80 + 4420.4 = 0 \end{array}\right.$$

d'où

$$u_2 = +1.26\,;\quad v_2 = -1.56 \quad \text{poids } 37.$$

$$\mathbf{1825.}\ \left\{\begin{array}{l} 30x + 144.31\,u_1 + 10.28\,v_1 + 88 = 0 \\ 144.31 + 3458.21 + 1046.79 + 1762.2 = 0 \\ 10.27 + 1046.79 + 2603.61 + 2912.0 = 0 \end{array}\right.$$

d'où

$$u_3 = -0.095\,;\quad v_3 = -1.07 \quad \text{poids } 30.$$

Dates.			$\pm \Delta^2\alpha$ en 0ˢ,01.	g	h
1838.	Avril	23.6	— 24	+ 16.58	+ 6.43
		23.1	— 6	16.44	6.98
	Mai	1.6	— 82	15.46	8.97
		2.1	+ 41	15.46	8.97
		2.6	— 5	15.30	9.17
		3.1	— 55	15.30	9.17
		3.6	+ 67	15.14	9.36
		4.1	+ 68	15.14	9.36
		4.6	— 80	14.97	9.72
		5.1	— 28	14.97	9.72
		18.6	— 31	11.95	13.27
		19.1	+ 2	11.95	13.27
		19.6	— 3	11.78	13.46
		20.1	+ 18	11.78	13.46
		28.1	+ 8	9.55	15.01
		28.6	+ 30	9.55	15.21
		29.1	+ 28	9.20	15.21
	Juin	1.5	— 27	8.16	12.80
		6.5	+ 13	6.77	16.40
		7.1	+ 15	+ 6.42	+ 16.61

On déduit les équations normales :

$$1838. \left\{ \begin{array}{l} 3391\,u + 2725\,v + 3236 = 0 \\ 2725\,u + 2923\,v + 1345 = 0 \end{array} \right.$$

d'où

$$u = -2.36 \qquad v = 1.74$$

et par conséquent

$$\beta = 306°24' \qquad \gamma = 0'',095.$$

§ 3. *Observations de la hauteur du pôle à Pulkova. Calculs de* M. STUYVAERT.

Formule $z + gu + hv = r$.

1re série : Avril-juin 1842. Origine : 1er avril 1842.

DATES.		g	h	r (unité 0'',01).	DATES.		g	h	r (unité 0'',01).
1842. Avril. . .	2,3	+ 1,000	− 0,023	− 15	1842. Mai . . .	26,6	+ 0,507	− 0,862	− 4
	2,8	0,999	035	− 6,5		27,1	500	866	− 20
	3,3	999	044	1		27,6	492	870	− 15
	3,8	999	052	− 13,5		28,1	482	876	− 5
	4,3	998	061	− 17		28,6	475	880	− 15
	8,7	990	142	14,5		30,1	451	892	33,5
	9,2	988	153	6		30,6	441	897	39,5
	10,7	984	179	11,5		31,1	433	901	3,5
	11,2	982	188	− 5	Juin . . .	3,6	375	927	27,5
	14,2	970	245	14		4,1	364	931	26,5
	16,2	960	281	20		4,6	356	935	10
	18,7	945	325	25		5,1	347	938	9,5
	25,7	895	446	19		5,6	339	941	− 5
	26,2	891	454	6		6,1	331	944	− 6,5
	30,7	850	527	19		6,6	320	947	− 5,5
Mai . . .	2,7	829	559	29		7,1	312	950	− 5
	4,2	814	581	− 22		7,6	303	953	18,5
	4,7	809	588	− 17,5		8,1	295	955	12
	7,7	773	634	59		8,6	270	963	− 2
	13,7	699	715	30		10,6	250	968	0,5
	14,2	692	721	24		14,1	185	983	9,5
	14,7	684	729	11,5		18,5	104	994	2
	15,2	678	735	7		19,0	096	995	14
	15,7	671	741	− 9		20,5	067	998	− 10,5
	16,1	665	747	− 9,5		21,0	058	0,998	− 8
	16,6	658	753	28,5		22,5	029	1,000	− 8
	23,6	554	832	12		23,0	020	1,000	12
	24,1	547	837	5,5		23,5	012	1,000	− 1
	24,6	540	842	20		24,0	+ 0,003	1,000	0,5
	25,1	+ 0,532	− 0,846	46		24,5	− 0,009	− 1,000	1

On déduit de là les équations normales :

$$60\;z + 32{,}80\,u - 42{,}38\,v - 410{,}0 = 0$$
$$32{,}80\,z + 24{,}07\,u - 17{,}68\,v - 257{,}0 = 0$$
$$-42{,}38\,z - 17{,}68\,u + 35{,}92\,v + 317{,}1 = 0$$

d'où

$$u = 49{,}2;\; v = -54{,}4, \quad \text{poids } 60.$$

2e série : Juillet-septembre 1842. Origine : 1er juillet 1842.

Dates.		g	h	r
1842. Juillet . .	5,0	+ 0,997	— 0,076	14,5
	5,5	996	084	16,5
	6,0	996	093	19,5
	6,5	995	102	— 1,5
	7,0	993	113	7
	7,5	992	121	6
	8,0	991	130	1
	18,5	947	320	— 17
	19,0	944	331	— 1,5
	19,5	941	339	24
	21,0	931	364	— 5
	21,5	927	375	6,5
Août . . .	1,4	832	554	4
	1,9	827	562	2
	3,4	812	583	11,5
	5,9	784	620	30,5
	6,4	777	629	— 7
	6,9	772	636	— 21,5
	7,4	766	643	16,5
	7,9	760	649	25
	8,4	753	658	13,5
	8,9	747	665	4
	9,4	741	671	15
	9,9	735	678	14
	10,4	729	684	10
	10,9	+ 0,721	— 0,692	16
1842. Août. . .	11,4	+ 0,715	— 0,699	20
	11,9	709	705	8,5
	12,4	703	711	— 7
	12,9	697	717	0,5
	13,4	688	725	2
	13,9	682	731	6,5
	18,4	618	786	— 7
	19,9	597	802	— 2
	20,4	588	809	9,5
	20,9	581	814	7
	21,4	574	819	30
	21,9	566	824	14,5
	22,4	559	829	— 13
	22,9	549	835	20
Septembre.	12,8	191	982	— 3,5
	13,3	182	983	28
	13,8	174	985	29,5
	18,8	081	997	58,5
	19,3	070	997	40,5
	19,8	061	998	16
	20,3	052	999	7,5
	20,8	044	999	2,5
	21,3	035	0,999	27,5
	21,8	023	1,000	47
	22,3	+ 0,014	— 1,000	30,5

On déduit de là les équations normales :

$$\begin{aligned} 51\ z + 32{,}16\ u - 33{,}12\ v - 602{,}0 &= 0 \\ 32{,}16\ z + 25{,}34\ u - 16{,}86\ v - 261{,}2 &= 0 \\ -33{,}12\ z - 16{,}86\ u + 25{,}65\ v + 468{,}4 &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$u = -33{,}4;\ v = 13{,}4,\quad \text{poids } 51.$$

3e série : Mars-avril 1843. Origine : 1er mars 1843.

Dates.		g	h	r
1843. Mars. . .	7,8	+ 0,992	— 0,128	20
	16,3	960	281	— 1
	16,8	957	290	4,5
	17,3	954	301	— 1,5
	17,8	951	309	16,5
	18,3	948	317	22,5
	20,8	932	361	— 0,5
	23,8	911	412	3,5
	24,3	906	423	— 12
	24,8	903	430	— 4,5
	25,3	899	438	3,5
	25,8	895	446	— 4,5
	30,8	850	527	21,5
Avril. . .	3,3	812	583	— 2
	4,3	802	597	— 12,5
	4,8	+ 0,797	— 0,604	8,5
1843. Avril. . .	5,3	+ 0,790	— 0,613	12
	14,2	678	735	38,5
	14,7	658	753	27
	20,2	592	806	— 5,5
	20,7	584	811	— 3
	21,2	576	817	— 8,5
	22,7	554	832	— 9
	24,7	522	853	— 18
	25,2	515	857	4
	25,7	505	863	22
	26,2	497	867	23,5
	26,7	490	872	37,5
	27,2	482	876	37,5
	27,7	475	880	14,5
	28,2	464	886	— 5
	28,7	+ 0,457	— 0,890	— 1,5

On déduit de là les équations normales :

$$
\begin{aligned}
32\ z + 23{,}31\,u - 19{,}66\,v - 229{,}0 &= 0\\
23{,}31\,z + 18{,}15\,u - 12{,}91\,v - 154{,}1 &= 0\\
-19{,}66\,z - 12{,}91\,u + 13{,}85\,v + 152{,}2 &= 0
\end{aligned}
$$

d'où

$$u = 33{,}1\,;\ v = -55{,}0 \quad \text{poids } 32.$$

4e série : Septembre-décembre 1843 : Origine : 1er septembre 1843.

Dates.		g	h	r
1843. Septembre.	10,8	+ 0,983	— 0,182	15,5
	12,3	977	211	27,5
	12,8	976	219	27
	13,3	974	228	29,5
	13,8	972	236	22
	14,3	970	245	24
	14,8	967	256	20,5
	19,3	943	334	17,5
	20,8	932	361	48,5
	22,3	922	388	34
	22,8	+ 0,918	— 0,396	20
1843. Septembre.	23,3	+ 0,913	— 0,404	11
	26,8	886	464	41
	27,3	882	472	27
	28,8	868	496	21
Octobre. .	3,3	824	566	24,5
	3,8	817	576	27
	6,8	784	620	48
Novembre.	18,1	+ 0,113	993	51
Décembre.	18,5	— 0,441	897	— 9
	21,0	482	876	— 20
	21,5	— 0,490	— 0,872	— 41,5

On déduit de là les équations normales :

$$22\ z + 15{,}21\ u - 10{,}29\ v - 466{,}0 = 0$$
$$15{,}21\ z + 15{,}89\ u - 4{,}826\ v - 481{,}1 = 0$$
$$-10{,}29\ z - 4{,}826\ u + 6{,}11\ v + 176{,}7 = 0$$

d'où

$$u = 75{,}9;\ v = -108{,}7,\quad \text{poids } 22.$$

5e série : Mars-mai 1844. Origine : 1er avril 1844.

Dates.		g	h	r	Dates.		g	h	r
1844. Mars. . .	22,3	+ 0,982	+ 0,191	36	**1844.** Avril. . .	22,2	+ 0,923	− 0,385	7,5
Avril. . .	3,3	999	− 0,044	6,5		22,7	919	393	12
	3,8	999	052	2,5	Mai . . .	2,2	835	549	2
	5,8	996	090	14,5		2,7	829	559	0,5
	9,2	988	153	17		3,2	824	566	6,5
	9,7	987	162	− 2		3,7	819	574	− 5,5
	10,2	985	171	9,5		4,2	814	581	− 17,5
	15,7	963	270	− 1,5		4,7	+ 0,809	− 0,588	− 19
	20,7	+ 0,934	− 0,358	4					

On déduit de là les équations normales :

$$17\ z + 15{,}60\ u - 5{,}304\ v - 73{,}0 = 0$$
$$15{,}60\ z + 14{,}42\ u - 4{,}595\ v - 76{,}54 = 0$$
$$-5{,}304\ z - 4{,}595\ u + 2{,}579\ v - 12{,}06 = 0$$

$$u = -15{,}5;\ v = 41{,}0,\quad \text{poids } 17.$$

Observations de Gyldén et Nyrén.

1re série : 1863-1864. Origine : 1864, 0.

Dates.		g	h	r	Dates.		g	h	r
1863. Novembre.	15,6	+ 0,647	+ 0,762	11	**1864.** Juin . . .	9,1	− 0,989	− 0,151	− 0,5
Décembre.	14,6	947	320	8		21,0	997	+ 0,070	22,5
	15,1	951	+ 0,309	− 10	Juillet . .	4,0	− 0,951	309	1
1864. Mars. . .	21,3	+ 0,070	− 0,997	− 4,5	Septembre.	19,8	+ 0,194	981	33,5
Avril. . .	19,2	− 0,451	892	6,5		20,3	202	979	24,5
	23,7	525	851	− 13,5	Octobre. .	3,3	433	901	39
Mai . . .	13,2	793	609	− 17,5		5,3	467	884	24,5
	13,7	− 0,799	− 0,602	− 11,5		13,7	+ 0,599	+ 0,800	32,5

On déduit de là les équations normales :

$$16\ z - 0{,}995\ u + 2{,}213\ v - 145{,}5 = 0$$
$$-0{,}995\ z + 7{,}69\ u + 4{,}289\ v - 68{,}44 = 0$$
$$2{,}213\ z + 4{,}289\ u + 8{,}303\ v - 177{,}2 = 0$$

d'où

$$u = -2{,}0;\ v = 20{,}9,\quad \text{poids } 16.$$

2e série : Mai 1864 à septembre 1865. Origine : 1865, 0.

Dates.		g	h	r	Dates.		g	h	r
1864. Mai . . .	13,2	— 0,356	— 0,935	— 17,5	**1865.** Avril. . .	3,8	— 0,162	— 0,987	25
	13,7	366	930	— 11,5		6,3	205	979	— 8,5
Juin . . .	9,1	762	647	— 0,5		10,2	278	960	— 7,5
	21,0	887	462	22,5		20,2	451	892	— 14
Juillet . .	4,0	972	— 0,236	1		20,7	459	888	— 11,5
Sept. . .	19,8	350	+ 0,937	33,5		21,2	467	884	2,5
	20,3	339	941	24,5		21,7	477	879	— 3
Octobre. .	3,3	104	994	39		22,2	485	875	— 19
	5,3	— 0,067	998	24,5		22,7	492	870	— 11,5
	13,7	+ 0,090	+ 0,996	32,5	Mai . . .	9,7	— 0,739	— 0,673	— 23
1865. Mars. . .	19,3	128	— 0,992	9	Sept. . .	20,3	+ 0,185	+ 0,983	8,5
	19,8	116	0,993	2		29,8	+ 0,356	+ 0,935	— 4
	25,3	+ 0,014	— 1,000	3					

On déduit de là les équations normales.

$$\begin{aligned} 25\ z - 7{,}529\ u - 8{,}298\ v - 106{,}0 &= 0 \\ -7{,}529\ z + 5{,}053\ u + 4{,}956\ v - 12{,}23 &= 0 \\ -8{,}298\ z + 4{,}956\ u + 19{,}85\ v - 203{,}1 &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$u = 4{,}1;\ v = 13{,}0 \quad \text{poids } 25.$$

3e série : 1868-1870. Origine : 1868, 0.

Dates.		g	h	r	Dates.		g	h	r
1868. Mars. . .	18,3	+ 0,128	— 0,992	— 12,5	**1869.** Mai . . .	12,2	— 0,990	— 0,139	— 10,5
Avril. . .	1,3	— 0,133	991	— 4	Juillet . .	9,5	583	+ 0,812	12
	1,8	142	990	— 10		10,0	574	+ 0,819	15,5
Mai . . .	11,7	777	— 0,629	18	**1870.** Mars. . .	28,3	903	— 0,430	— 8,5
Juin . . .	25,5	— 0,988	+ 0,153	34,5		28,8	906	423	— 12,5
Octobre. .	4,3	+ 0,449	894	— 27,5		29,3	910	415	— 6
	4,8	+ 0,459	+ 0,888	— 15		29,8	915	404	— 9
1869. Avril. . .	21,2	— 0,862	— 0,507	— 9		30,3	— 0,918	— 0,396	— 31

On tire de là les équations normales :

$$\begin{aligned} 16\ z - 8{,}565\ u - 2{,}75\ v + 75{,}5 &= 0 \\ -8{,}565\ z + 8{,}583\ u + 2{,}805\ v + 3{,}539 &= 0 \\ -2{,}75\ z + 2{,}805\ u + 7{,}415\ v - 38{,}12 &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$u = -12{,}9;\ v = 5{,}8, \quad \text{poids } 16.$$

4ᵉ série : De novembre 1871 au 22,8 mars 1873. Origine : 1872.

Dates.		g	h	− r
1871. Novembre.	20,6	+ 0,717	+ 0,697	− 13,5
	21,1	723	+ 0,690	13
1872. Mars . . .	22,3	058	− 0,998	14
	22,8	047	999	16
	23,3	+ 0,038	999	14
Avril . . .	5,3	− 0,202	979	− 14
	26,7	566	824	28,5
	27,2	574	819	26,5
	27,7	581	814	16
Mai. . . .	14,7	806	593	12
	30,1	941	− 0,339	19
Août . . .	24,9	− 0,298	+ 0,955	10
Septembre.	25,8	+ 0,287	958	4
Octobre. .	3,3	417	909	17
	3,8	428	904	4,5
	4,3	436	900	5
	8,7	508	862	29
	9,2	+ 0,515	+ 0,857	10

Dates.		g	h	− r
1872. Octobre. .	15,7	+ 0,616	+ 0,788	21
	16,2	623	783	24,5
	16,7	629	777	21
	21,2	692	721	18
	21,7	699	715	12
Novembre.	13,7	932	361	− 8,5
	18,1	959	284	14
	18,6	0,962	+ 0,273	20
1873. Janvier . .	30,4	0,490	− 0,872	7
	30,9	+ 0,482	0,876	20
Février . .	26,9	0,000	1,000	− 20
Mars	14,8	− 0,292	0,956	− 4
	15,3	301	954	− 18,5
	15,8	309	951	− 24
	16,3	340	947	6,5
	22,3	423	906	4
	22,8	− 0,431	− 0,903	7

On déduit de là les équations normales :

$$35\ z + 5{,}215\,u + 3{,}295\,v + 311{,}0 = 0$$
$$5{,}215\,z + 10{,}9\ u + 9{,}705\,v + 73{,}14 = 0$$
$$-3{,}295\,z + 9{,}705\,u + 24{,}1\ v + 73{,}07 = 0$$

d'où

$$u = 2{,}96;\ v = -5{,}54,\quad \text{poids } 35.$$

5ᵉ série : Du 27,7 avril 1872 au 28,7 avril 1873. Origine : 1ᵉʳ janvier 1873.

Dates.		g	h	− r
1872. Avril. . .	27,7	− 0,076	− 0,997	16
Mai. . . .	14,7	383	924	12
	30,1	629	− 0,777	19
Août . . .	24,9	745	+ 0,667	10
Septembre.	25,8	242	970	4
Octobre. .	3,3	104	994	17
	3,8	096	995	4,5
	4,3	084	0,996	5
	8,7	− 0,003	1,000	29
	9,2	+ 0,006	1,000	10
	15,7	128	0,992	21
	16,2	136	991	24,5
	16,7	146	989	21
	21,2	+ 0,228	+ 0,974	18

Dates.		g	h	− r
1872. Octobre. .	21.7	+ 0,236	+ 0,972	12
Novembre.	13,7	620	784	− 8,5
	18,1	682	731	14
	18,6	688	+ 0,725	20
1873. Janvier. .	30,4	853	− 0,522	7
	30,9	848	530	20
Février . .	26,9	487	873	− 20
Mars . . .	14,8	211	977	− 4
	15,3	199	980	− 18,5
	15,8	191	982	− 24
	16,3	182	983	6,5
	22,3	070	997	4
	22,8	+ 0,061	0,998	7
	26,3	− 0,003	− 1,000	21

Dates.		g	h	$-r$	Dates.		g	h	$-r$
1873. Mars . . .	28,3	— 0,041	— 0,999	9,5	1873. Avril . . .	24,2	— 0,517	— 0,856	16,5
	28,8	049	999	4,5		24,7	525	851	— 4
	30,3	078	997	15		25,2	532	846	3,5
	39,8	087	996	18,5		25,7	540	842	22
Avril . . .	1,3	116	993	20		26,2	549	835	23,5
	1,8	— 0,125	— 0,992	23,5		28,7	— 0,588	— 0,809	0

On déduit de là les équations normales :

$$\begin{aligned} 40\ z - 0{,}141\,u - 8{,}775 + 400{,}0 &= 0 \\ -0{,}141\,z + 6{,}329\,u + 3{,}252 - 30{,}54 &= 0 \\ -8{,}775\,z + 3{,}252\,u + 33{,}66 + 15{,}33 &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$u = 6{,}05;\ v = -3{,}7,\quad \text{poids } 40.$$

CHAPITRE II

DÉTERMINATION DES CONSTANTES DE LA NUTATION DIURNE AU MOYEN DES ASCENSIONS DROITES DE LA POLAIRE, OBSERVÉES A DORPAT PAR F.-W. STRUVE.

1. Depuis plusieurs années nous avons démontré, par bien des procédés différents, l'existence de la nutation diurne; nous avons même expliqué par là les différences systématiques qui existent entre les catalogues de deux observatoires assez distants en longitude.

Notre intention n'est pas de reproduire ici ces articles, qui ont presque tous paru dans l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique* (*). Cette reproduction ne servirait pas à lever les doutes des astronomes au sujet de la nutation diurne.

Comme cette dernière est, certainement, très faible, il convient de ne la déterminer qu'au moyen d'une longue série de bonnes observations, desquelles on puisse éliminer ce que les astronomes appellent *variation des latitudes* (tant l'eulérienne que l'annuelle). Or, quel que soit le point de vue théorique d'où l'on part, c'est-à-dire, soit qu'on rapporte les formules, avec Oppolzer et les astronomes, au pôle instantané, soit qu'on les rapporte, comme je le fais, au pôle d'inertie, la *variation de latitude* sera éliminée dans la demi-somme des coordonnées d'une étoile observée à deux passages (supérieur et inférieur) consécutifs; une couple de jours de différence entre le passage supérieur et l'inférieur est même admissible, pourvu que les constantes instrumentales aient été déterminées pour chacun d'eux.

C'est par cette méthode que j'ai effectué ma dernière détermination de la nutation diurne, en faisant usage des observations de Gyldén sur la latitude de Poulkova, et que j'ai déduit également de ces observations la correction de la constante de l'aberration, la parallaxe de la polaire, ainsi que la direction et la vitesse du mouvement systématique (**).

Comme les ascensions droites de la polaire, observées par F. W. Struve, à Dorpat, de 1822 à 1826, nous avaient fourni d'excellents résultats dans la détermination de la nuta-

(*) Années 1888-1894.

(**) Nous avions compté publier dans le présent volume le calcul complet des observations de Gyldén, dont le résumé a paru dans l'*Annuaire* pour 1894. L'état de santé de M. Bijl, l'astronome qui a bien voulu se charger des calculs numériques, et ne se trouve malheureusement pas en mesure de les coordonner, nous oblige à ajourner cette publication.

tion eulérienne, il nous a paru qu'elles se prêteraient fort bien également à celle de la nutation diurne. La nutation eulérienne se détermine par la demi-différence des ascensions droites (supérieure et inférieure) observées dans le méridien *géographique;* la nutation diurne, comme il vient d'être dit, par leur demi-somme.

Malheureusement, les autres corrections des formules usuelles, nutation, aberration, parallaxe, interviendront également ici. Leur introduction entraînerait un nombre considérable d'inconnues. Ces corrections seront, du reste, très faibles, et les termes auxquels elles pourraient s'appliquer ont, pour la plupart, une période annuelle, qui n'intervient pas dans les termes de la nutation diurne. Il faut excepter d'abord la constante de Peters; mais la période durant laquelle s'étendent les observations de Struve est trop courte pour permettre de déterminer la correction de cette constante. Ensuite, la constante des termes en $2\odot$, que Peters a calculée dans l'hypothèse de $A = B$, hypothèse incompatible avec l'existence de la nutation diurne, comme avec la fluidité superficielle du noyau de la Terre. Nous introduirons donc la correction de cette constante. Les termes en $2\odot$ peuvent se mettre, en ascension droite, sous laforme $m \cos(2\odot - M)$, M étant égal à 17° pour les observations de Struve. La correction de ces termes introduira dans nos formules le terme $cu = - u \cos(2\odot - M)$.

2. La nutation diurne en ascension droite a pour expression, dans le méridien,

$$\Delta\alpha = - \operatorname{tg}\delta\,(\xi\Sigma_2 + \eta\Sigma_1),$$

ξ et η étant les produits respectifs de la constante ν de la nutation diurne par le sinus ou le cosinus de $2L + \alpha$, et L la longitude orientale du *premier méridien* par rapport à l'Observatoire (Dorpat).

Nous écrirons cette expression, en faisant $-\xi\operatorname{tg}\delta = x$, $-\eta\operatorname{tg}\delta = y$:

$$\Delta\alpha = x\Sigma_2 + y\Sigma_1 = ax + by.$$

Les termes principaux de a (Σ_2) et b (Σ_1), dont nous avons fait usage dans notre calcul, sont

$$\begin{aligned} a &= \phantom{-1{,}155} - 0{,}18\ \sin\Omega + 0{,}39\sin 2\odot + 0{,}888\sin 2☾ + 0{,}18\sin(2☾ - \Omega). \\ b &= -1{,}155 - 0{,}134\cos\Omega + 0{,}36\cos 2\odot + 0{,}82\ \cos 2☾ + 0{,}14\cos(2☾ - \Omega). \end{aligned}$$

Le tableau I (p. 41) renferme les valeurs de ces termes calculées pour celles des arguments, de $2^\circ\frac{1}{2}$ en $2^\circ\frac{1}{2}$, de 0° à 90°.

En désignant, avec Peters, par $\pm v$ la correction provenant de la position de l'instrument (cercle E. ou W.), par w celle du lieu moyen de l'étoile, par n les résidus définitifs obtenus par l'éminent astronome, nous aurons l'équation de condition

$$ax + by + cu \pm v + w + n = 0.$$

L'unité est la seconde de temps.

On trouvera ci-après, dans le tableau II, les valeurs de $a, b, c, \pm 1, n$ pour les couples d'observations dont nous avons fait usage, avec la date de celles-ci; quant à c toutefois, nous n'en avons donné que la moyenne calculée pour chacun des groupes séparés entre eux par un trait.

Ces valeurs sont multipliées par 100 pour la facilité de l'écriture; un point après le nombre signifie $^1/_2$.

Les termes qui composent les valeurs de a et de b se succèdent dans l'ordre ☊, 2 ☉, 2☾, 2☾ — ☊.

3. On remarquera que les termes de Σ_2 en 2☾ se succèdent fréquemment par groupes alternativement positifs et négatifs; ce qui nous a engagé à réunir en une toutes les observations d'un même groupe. Le résultat est consigné, avec le poids p, dans le tableau III, qui est l'expression de nos équations de condition; $\pm k$ y désigne le coefficient de v. Elles nous ont conduit aux équations normales

$$\begin{array}{rrrrrrl}
63,97x & -\ 45,4\ y & +\ 0,14u & -\ 31,19v & +\ 25,51w & -\ 0^s\!,477 & = 0 \\
-\ 45,4 & +\ 178,83 & -\ 10,51 & +\ 14,78 & -\ 135,59 & +\ 13,799 & \\
-\ 10,51 & +\ 0,14 & +\ 57,75 & -\ 5,61 & +\ 28,11 & +\ 3,474 & \\
-\ 31,19 & +\ 14,78 & -\ 5,61 & +\ 95 & -\ 13 & -\ 5,849 & \\
25,51 & -\ 135,39 & +\ 28,11 & -\ 13 & +\ 133 & -\ 1,615. &
\end{array}$$

D'où nous avons déduit

$$x = -0,136;\quad y = -0,385;\quad u = 0,045;\quad v = -0,034;\quad w = -0,367.$$

Des équations

$$x = -\nu \operatorname{tg}\delta \sin(2L + \alpha)$$
$$y = -\nu \operatorname{tg}\delta \cos(2L + \alpha)$$

on tire, en secondes d'arc,

$$\nu = 0'',176 \text{ et } 2L + \alpha = 19^\circ 28', \text{ d'où } L = 2^\circ 30' = 0^h 10^m, \text{ ou } 12^h\ 10^m,$$

longitude orientale du premier méridien par rapport à Dorpat, soit $11^h\ 55^m.5$ par rapport à Poulkova.

4. La valeur trouvée pour la constante de la nutation diurne nous a paru deux ou trois fois trop forte; mais ce à quoi nous ne nous attendions pas surtout, c'est à la valeur positive de la correction u des termes en $2\odot$, lorsque la théorie semble indiquer une correction négative, et que les observations si précises de Gyldén nous l'ont donnée telle en effet.

En recherchant quelle pouvait être l'origine de ces deux résultats absolument contraires à notre attente, nous nous sommes aperçu, à notre profonde surprise, et à notre grand chagrin, que l'erreur de signe que nous avions constatée depuis plusieurs années dans la partie en $2\odot$ du coefficient a de Peters (page 12, ligne 13 à partir du bas) et que nous avions regardée comme une simple erreur typographique, a été commise par l'éminent astronome dans le calcul numérique de ses coefficients a (Tabula II).

Il résulte de cette pénible constatation d'un lapsus dans l'un des mémoires qui servent de base à l'astronomie, que la détermination de la constante de la nutation est à reprendre, en même temps que celle que Peters y a jointe de la constante de l'aberration et de la parallaxe de la polaire. Nous y ajouterons la correction du coefficient usuel des termes en $2\odot$, ainsi que la constante de l'aberration systématique. Cette recherche sera l'une des premières que nous entreprendrons.

Mais une autre conséquence probable aussi de l'erreur commise par Peters, ainsi que des valeurs fautives qu'il a adoptées, dans le calcul de ses résidus, pour la constante de l'aberration, et surtout pour la parallaxe de la polaire, prise supérieure à $0''\!,16$, c'est qu'il est difficile de tirer de ces résidus une valeur convenable pour la constante de la nutation diurne.

C'est pourquoi nous n'avons pas calculé les erreurs probables de nos inconnues, et en avons jugé une nouvelle détermination nécessaire.

5. Afin d'éliminer l'erreur de Peters, nous avons recouru aux résidus primitifs de Struve, que nous avons corrigés en augmentant de $0''\!,2$ la constante de Delambre qu'il avait admise pour l'aberration; et, pour éviter l'influence des erreurs commises par suite de l'adoption, dans le calcul de ces résidus, de la constante de Lindenau pour la nutation, et du coefficient incorrect des termes en $2\odot$, nous avons formé les différences entre les observations successives, prises deux à deux de manière que les coefficients Σ_1 et Σ_2 soient assez différents entre eux dans l'une et dans l'autre.

Dans ces conditions, notre équation se réduit à la forme

$$ax + by + n = 0.$$

Le tableau IV renferme les valeurs de a, b, n, et celles des nouveaux résidus n' obtenus par la substitution des valeurs de x et y dans les équations de condition.

Des équations de condition, nous avons déduit, par les moindres carrés, les équations normales :

$$3882.5x + 142.6y - 27.6 = 0$$
$$142.6\xi + 3801.7\eta + 613.9 = 0;$$

d'où $x = 0.013$; $y = -0.162$ en secondes de temps; puis $2L + \alpha = 356°20'$; $L = 170°56' = 11^h\ 23^m.7$ E. de Dorpat ou $11^h\ 9^m$ E. de Poulkova.

Cette valeur ne s'écarte pas sensiblement de celle que nous avons déduite des résidus de Peters, malgré leur incorrection; car cette dernière peut s'écrire indifféremment $L = 0^h\ 10^m$ ou $L = 12^h\ 10^m$, puisque L n'intervient dans la nutation diurne que sous la forme 2L.

On constatera aussi l'accord bien remarquable qui existe entre les valeurs de L et celles que nous avons déduites des observations de latitude faites à Poulkova par Peters et par Gyldén, et qui sont, la première, $11^h\ 52^m$, la seconde $12^h\ 0^m$ E. de Poulkova (*).

En secondes d'arc, la constante de la nutation diurne qui résulte des valeurs de x et de y est $\nu = 0''{,}070$; elle concorde parfaitement avec celle qu'ont fournie les observations de Gyldén, $0''{,}0665$.

Les erreurs probables de x et de y sont respectivement

$$\pm 0.00444;\ \pm 0.00449.$$

D'où l'on déduit

$$\nu = 0''{,}0695 \pm 0.0019;$$

et, pour l'erreur probable de l'angle 2L,

$$\pm 46' = \pm 3^m.$$

La petitesse de ces erreurs probables, et la concordance entre les valeurs des constantes déduites des excellentes observations de Gyldén ($0''{,}0665$) et de Struve ($0''{,}0695$), fournissent une preuve bien concluante de la nutation diurne de l'écorce terrestre.

Mais l'existence en fait de cette nutation a une telle importance, que je me suis résolu à la confirmer encore par le calcul d'une courte série d'observations.

6. Dans ce but, j'ai fait usage des observations de Preuss (1838, mai 18 à juin 29) consignées dans le Mémoire de Peters; les résidus sont ceux donnés par Struve, et corrigés seulement en augmentant de $0''{,}2$, comme nous l'avons fait précédemment, la constante de Delambre qu'il a employée. Nous avons groupé ces observations de manière que les Σ_1 et Σ_2 aient des valeurs assez différentes entre elles.

D'une aussi courte série, il n'est pas possible de déduire la correction du coefficient des termes en $2\odot$ employés par Struve; et, comme les termes en $2\odot$ de la nutation diurne sont très importants, il est à prévoir que cette série donnera une valeur incorrecte pour la constante de cette nutation. Notre critérium sera la valeur que nous trouverons pour la longitude L du premier méridien.

(*) *Annuaire de l'Observatoire royal pour 1894*, pp. 363 et 368.

Nous aurons à appliquer à nos résidus l'équation de condition

$$ax + by \pm v + w + n = 0.$$

Le tableau V renferme les coefficients des inconnues ainsi que les résidus, exprimés en secondes d'arc.

Des équations de condition nous avons déduit les équations normales

$$\begin{array}{rrrrrl} -3.25x & -46.58y & -7v & +31w & -108.03 & = 0 \\ 5.59 & +26.90 & +31 & -7 & +79.55 & \\ 10.46 & +4.01 & +5.59 & -3.25 & +24.92 & \\ 4.01 & +88.0 & +26.9 & -46.58 & +82.22, & \end{array}$$

qui ont donné

$$x = 5.6, \quad y = 15.4, \quad v = -11.3, \quad w = 20.7.$$

Ces inconnues sont toutes très considérables, ce qui tient au petit nombre d'observations dont il a été fait usage et à la grandeur des résidus. Il est assez remarquable, toutefois, que les valeurs de v et w ont le même signe que celles que Peters a déduites (page 16) des 354 observations de Preuss.

De celles de x et y on tire, par tg $(2L + \alpha) = \frac{x}{y}$, $2L + \alpha = 20°$, d'où $L = 2°$, soit $0^h\ 8^m$ ou $12^h\ 8^m$ E. de Dorpat; résultat qui concorde fort bien avec tous les précédents.

7 A ces déterminations, qui reposent toutes sur des séries d'observations méridiennes, nous en ajouterons une autre, dans laquelle la nutation diurne se révèlera surtout comme telle.

Cette dernière est fondée sur les observations de la Polarissime, faites à quelques heures d'intervalle, par M. Fabritius, à l'Observatoire de Kiev (longitude : 5^m W. de Poulkova).

Pour ce cas, j'ai donné, dans ma *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde,* des formules qui expriment la nutation diurne, en obliquité et en longitude, en fonction des coordonnées équatoriales du Soleil et de la Lune.

De ces formules on déduit :

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= y\{(\Sigma_1 \sin S'_1 - P_1 \sin R'_1) + 2{,}18\,(\Sigma_2 \sin S'_2 - P_2 \sin R'_2)\} \\ &\quad + x\{(\Sigma_1 \cos S'_1 - P_1 \cos R'_1) + 2{,}18\,(\Sigma_2 \cos S'_2 - P_2 \cos R'_2)\} \\ \sin\theta\Delta\lambda &= x\{(\Sigma_1 \sin S'_1 - P_1 \sin R'_1) + 2{,}18\,(\Sigma_2 \sin S'_2 - P_2 \sin R'_2)\} \\ &\quad - y\{(\Sigma_1 \cos S'_1 - P_1 \cos R'_1) + 2{,}18\,(\Sigma_2 \cos S'_2 - P_2 \cos R'_2)\}, \end{aligned}$$

dans lesquelles l'indice 1 est affecté à l'action du Soleil et l'indice 2 à celle de la Lune.

On a posé :

$$(1)\left\{\begin{aligned}\Sigma &= (1 + \sigma_2)\sin\left(1 - \frac{1}{2}s_2\right)T,\\ P &= (1 + \rho_2)\sin\left(1 - \frac{1}{2}r_2\right)T,\end{aligned}\right.$$

T étant l'intervalle de temps qui sépare les observations.

$$(2)\left\{\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{3}{2}s_2 - \frac{b}{A},\\ \rho_2 &= \frac{3}{2}r_2 - \frac{b}{A}.\end{aligned}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{aligned}s_2 &= a_2 + 2d_2,\\ r_2 &= a_2 - 2d_2,\end{aligned}\right.$$

$$\frac{b}{A} = 0{,}00320,$$

a_2 et d_2 étant les rapports $\frac{a_1}{n}$, $\frac{d_1}{n}$ des moyens mouvements, en Æ et en D, de l'un ou de l'autre astre, pendant l'intervalle de temps considéré, au mouvement diurne.

$\Delta\theta$ = nutation diurne en obliquité.

$\Delta\lambda$ = nutation diurne en longitude.

$$(4)\left\{\begin{aligned}x &= \nu\sin 2L',\\ y &= \nu\cos 2L'.\end{aligned}\right.$$

ν = coefficient de la nutation diurne.

L = longitude orientale du premier méridien.

$2L' = 2L + \tau$.

$$(5)\left\{\begin{aligned}S' &= S - 2\tau,\\ R' &= R - 2\tau.\end{aligned}\right.$$

$$(6)\left\{\begin{aligned}S &= A + 2D,\\ R &= A - 2D,\end{aligned}\right.$$

A = ascension droite,

D = Déclinaison de l'un des astres { Soleil / Lune } calculée pour le milieu de l'intervalle des observations.

τ = l'heure sidérale de cet instant.

Les équations qui donnent les valeurs de x et de y, et, par suite, de ν et L′ sont les suivantes :

DATES.		ν	L′	τ	L
17 juin 1879 . .	$1.35293\,y - 0.16584\,x = 0.49754_n$ $0.56585\,y + 1.75300\,x = 0.47374$	0″.122	4h30m	17h25m	11h5m
20 juin . . .	$1.27126\,y + 0.73532\,x = 9.87536_n$ $-1.13540\,y + 1.67134\,x = 0.03401$	0.044	4 14.5	17 45	10 29 5
21 juin	$1.01420\,y - 0.24242\,x = 9.99213$ $0.64250\,y + 1.41428\,x = 0.05901_n$	0.104	4 24.5	18 53.5	9 51
22 juin . . .	$0.46612\,y - 0.20539\,x = 9.63828$ $0.60547\,y + 0.86620\,x = 9.67984_n$	0.102	5 3	19 49	9 14

DATES.		ν	L'	τ	L
25 juin	$\begin{cases} 0.66980\,y + 9.94841\,x = 9.51110 \\ -0.34849\,y + 1.06988\,x = 9.58276_n \end{cases}$	0 076	4 15	17 22.5	10 52.5
1er juillet. . .	$\begin{cases} 0\,34767\,y - 0.84635\,x = 9.54877 \\ 1.24643\,y + 0.74775\,x = 9.88703_n \end{cases}$	0 063	5 8.5	19 41	9 27.5
4 juillet. . . .	$\begin{cases} 1.18052\,y + 0.76604\,x = 0.11304 \\ -1.16612\,y + 1.58060\,x = 180.013_n \end{cases}$	0.119	6 42	18 4	12 38
7 juillet . . .	$\begin{cases} -9.92921\,y + 0.36912\,x = 0.29919 \\ -0.76929\,y - 0.32929\,x = 0.36655_n \end{cases}$	0.095	5 32.5	20 31	9 1.5
9 août	$\begin{cases} -1.91619\,y - 1.15262\,x = 9.80516 \\ -0.31627\,y + 1.55270\,x = 9.86926 \end{cases}$	0.050	4 45.5	20 8.5	8 37
17 août	$\begin{cases} 1.09501\,y - 0.49169\,x = 0.32562 \\ 0.89177\,y + 1.49509\,x = 0.39202_n \end{cases}$	0.114	5 45	20 20	9 25
18 août	$\begin{cases} 0.96628\,y - 0.81815\,x = 0.12235 \\ 1.21821\,y + 1.36636\,x = 0.18838 \end{cases}$	0.128	6 1	21 17	8 44
	MOYENNE. . .	0''.0913			9 58 6

L'accord qui existe entre ces différentes déterminations est des plus remarquable.

On trouvera, dans le tableau VI, les éléments du calcul que M. Niesten a eu l'obligeance d'effectuer.

Ces éléments sont déduits des résidus N_α et N_δ (obs-calc) donnés par les observations; les différences entre deux résidus séparés, dans la même soirée, par quelques heures d'intervalle étant désignées par $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$, on en a déduit $\Delta\theta$ et $\Delta\lambda$ par les formules de transformation connues. Outre ces quantités $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, $\Delta\theta$, $\Delta\lambda$, le tableau renferme également les valeurs de celles mentionnées ci-dessus, S_1, R_1, relatives au Soleil, S_2, R_2 à la Lune.

Le nombre des observations n'est pas assez grand pour pouvoir donner avec quelque certitude les erreurs probables.

Les constantes de la nutation diurne, déduites des observations de Kiev, sont donc :

$$\nu = 0''.0913, \quad L = 10^h 4^m \text{ E. de Poulkova.}$$

Malgré le petit nombre des observations, et les intervalles de temps, parfois inférieurs à deux heures, qui séparent entre elles celles dont il a été fait usage pour la détermination des constantes de la nutation diurne, on voit que les valeurs trouvées ne s'écartent pas bien sensiblement des véritables, qui ont été déduites des excellentes déterminations de Gyldén et de F.-W. Struve.

On pourra, dès à présent, introduire la nutation diurne dans les formules de réduction en prenant

$$\nu = 0''.07, \quad L = 1^h 30^m \text{ E. de Greenwich,}$$

quoique la longitude L ait encore besoin d'une détermination plus précise.

Cette introduction diminuera certainement les écarts entre le calcul et les observations, lorsque celles-ci seront suffisamment précises, comme on le verra dans la suite de ce travail.

TABLEAU I.

	Σ_1				Σ_2			
	Ω	2⊙	2☾	2☾-Ω	Ω	2⊙	2☾	2☾-Ω
0°	13.	36	82	14	0	0	0	0
2.	»	»	»	»	1	1.	4	1
5	»	35.	»	»	1	3.	8	1.
7.	13	»	81.	13.	2.	5.	11.	2.
10	»	»	81	»	3	7	15.	3
12.	»	35	80.	»	4	8.	18	4
15	»	34.	79.	»	4.	10	23	4.
17.	12.	34	78.	13	5.	12	26.	5.
20	»	33.	77	»	6	13.	30.	6
22.	»	33	75.	»	7	15	34	7
5	12	32.	74.	12.	7.	16.	37.	7.
27.	»	32	73	»	8.	18	41	8.
30	11.	31	71	12	9	19.	44	9
32.	»	30	69.	»	9.	21	47.	9.
35	11	29.	67	11.	10.	22.	51	10.
37.	10.	28.	65	11	11	23.	54	11
40	10	27.	63	10.	11.	25	57	11.
42.	»	26.	60.	»	12	26.	60	12
45	9.	25.	58	10	12.	27.	63	12.
45°	9.	25.	58	10	12.	27.	63	12.
47.	9	24.	55.	9.	13.	28.	65.	13.
50	8.	23	52.	9	14	30	68	14
52.	8	22	50	8.	14	31	70.	14
55	7.	20.	47	8	14.	32	73.	14.
57.	7	19	44	7.	15	33	75	15
60	6.	18	41	7	15.	34	77	15.
62.	6	16.	38	6.	16	34.	79	16
65	5.	15	34.	6	16.	35.	80.	16.
67.	5	14	32	5	»	36	82	»
70	4.	12.	28	4.	17	37	83.	17
72.	4	11	24.	4	»	37.	85	»
75	3.	9.	21.	3	17.	38	86	17.
77.	3	8	18	3	»	38.	86.	»
80	2.	6.	14.	2.	18	»	87.	18
82.	2	5	11	2	»	39	88	»
85	1	3	7	1	»	»	88.	»
87.	0.	1.	3.	0.	»	»	89	»
90	0	0	0	0	18	39	89	18

TABLEAU II.

		a				*b*				*c*	±1	*n*
1822 Novembre	5,2	14	39	-86	-14	-08	-02.	-18	08.	44	-1	-27
	11,2		»	70	18		-05	50	-02.		»	55.
	11,7		»	80	16		»	35	-05		»	45.
	12,7		38.	88	12		-06.	11	-10.	21	»	49.
	13,7		»	82	06		-08	-32	-13		»	69.

			a				b				c	±1	n
1822	Décembre	*21,1*		01.	-03	14		-36	82	09		»	-39
		21,6		0	18	16		»	80	06.	-90	-1	01
1823	Mars	26,3	15	07	18	16.	-07	35.	•	05		1	-29
		26,8		·08.	37	18		35	75	02.		1	-51
		27,3		»	54	»		»	65	-01	21	1	-67.
	Avril	10,7		25	54	»		27.	»	»		-1	84.
	Mai	*5,2*		39	-57	05.		01.	63	13		1	-09
		6,7		»	0	15		-01.	82	07.		1	65.
		16,2		37	-89	-08		-12.	06	12.	19	-1	45
		19,2		35.	-12	14		-15.	81	08.		»	07
		19,7		35	12	16.		»	»	05		»	03
		20,2		»	30.	18		-16.	77	02.	-15.	»	-17.
		21,2		»	63.	17.		-18	58	-03.		»	43
		22,2		»	85	14		-19.	25	-09		»	104
		29,6	15	27.	-85.	-14	-06.	-26	-28	09		1	-12
		30,1		»	88	-11		»	-11	11		»	14.
		31,1		25	-86	-04		-26.	22	13.		»	40.
	Juin	*1,1*		»	-11.	03		-27.	52.	»	-47	»	-22
		1,6		»	-54	07		-28.	65	13		»	-08
		2,1		23.	-24	10		»	79	12		»	11.
		3,6		22.	22	17		-29.	80	04		»	112
	Septembre	7,9	16	-19.	75	15	-05.	31	44	-07.		-1	-31
		11,4		-16.	47	-09.		32.	-70	-12		»	-36.
		11,9		-15	30.	-12.		33	-77	-10	81	»	-31
	Octobre	3,9		13.	30.	18		33.	77	01		1	65
		9,4		21	23.	-14		30	-79	-09		-1	-52
		10,8		22.	-27	-18		29.	-78	-01		»	-71
		11,2		»	-28	»		29	-74	02		»	-64
		12,2		25	-68	-16		28	-52.	06.		0	-06
		13,2		»	-86	-11.		27.	-22	10.		1	17
		14,2		»	-88	-04.		26.	11	13.		»	-52
		26,7		35.	-86	-11.		15	-22	10.	75	»	33.
		28,2		36	-80	01		14	35	14		»	-27.
		29,7		37.	-54	12.		11	76	10		»	-84.
	Novembre	*8,2*		39	-60	-17		-01.	-27	04.		-1	-35
		9,2		»	-81	-13		-03	-34	10		»	-72
		14,7		38	30.	18		-09	77	03	14	»	-82
		26,2	17	31	-23	14.	-04.	-22	35	08		1	-45.
	Décembre	*8,7*		18	-79	03		-32	17	13.	-53	»	-34.
		9,2		16.	-68	06		»	52.	13		»	-38
1824	Mars	27,3	17.	10	-68	07	-03.	34.	•	12.		-1	187.
		27,8		10	-54	11		»	65	11	99.	»	140
		28,3		9.	-38	14		»	74	09		»	69
	Avril	*6,7*		22.	-57	-16		29.	-03	06		1	-38
		11,7		27	06	18		25.	82	02.		»	54
		21,2		34.	-85	-09		16.	-25	12		-1	205.
		23,2		35.	-77	05		15	41	13	78	»	36
		23,7		36	-66	09		14	55	12		»	02
		24,2		»	-31	11.		»	*29	10.		»	-49.

			a				b				c	±1	n
1824	Mai	1,7		39	34	-14.		00.	-76	-08		1	15.
		2,2		»	11	-17		03	-81.	-04.	47	»	12.
		3,2		»	-30.	-18		»	-77	02		0	-50
		20,1	18	36	-83.	02.	-03	-16.	28	13.		-1	-09.
		21,1		34	-64	09.		-18	57	12		»	-10
		21,6		33	-50	12.		-19.	68	10	06.	»	08.
		22,1		»	-34	14.		»	76	08		»	21.
		22,6		32	-15.	16.		-20	81	05		»	27.
		23,1		»	03	18	-02.	»	82	02.		»	30.
		27,6		27.	77	-06		-25	-41	-13		1	-06
		28,6		»	50	-12.		-26	-68	-10	-35	»	31
		29,1	18	27	26	-15.	-02.	»	-79	-07		»	85
	Juin	2,6	18	22.	-83.	03	-02.	-29.	28	13.		1	52.
		7,6		17.	32	-10		-31	82	-12		»	09
		9,1		15	83.	-03		-33	-28	-13.		»	-54.
		12,6		10	-26	-18		-34.	-79	02	-71.	»	-33
		13,6		»	-60	-15		»	-61	07		»	-60.
		17,6		04	-60	11		-35.	61	11		-1	-46.
		21,1		0	60	14		-36	61	-08		»	-74.
		21,6		-01.	74	12		»	20	-10		»	-41
		22,1		»	81	09		»	33	-12	-94.	»	-20
		24,6		-04	76	-12		-35.	-43	-10.		»	21
	Septembre	21,9		-01	-30.	16	-01	36	77	06		»	-49.
		22,4		0	-06	18		»	82	02.	92	»	-40.
		24,8		03	82	08		»	32	-12.		1	-33.
		26,3		06	83.	04.		35.	-28	-13.	95.	»	-64.
	Octobre	2,8		13.	-89	0		33.	04	14		-1	-05
		3,8		15	-80	07		33	35	13		»	-21.
		18,2		30	-68	10.		23	52.	11.	94	1	26
		18,7		31	-52	14		22	66	09		»	45.
		22,7		34	88	03		18	12	-13.		»	07
	Novembre	20,1		35.	83.	-06	-00.	-15	-28	-13		-1	-35.
	Décembre	5,1		22.	73	-10.		-29.	-21	-11.		»	-79
		6,1		21	42	-15.		-30	-72	-07	-26	»	-127
		18,6		04	55	-14	0	-35.	-64	-08		»	-39
		20,6		01	-21	-17.		-36	-80	09	-91.	»	-89.
1825	Février	23,4		-30	87.	02		23	14.	-13.	64	1	-37
	Mars	14,9		-07	-87	-03	00.	35.	-17	13.		»	00.
		15,4		»	-89	0		»	-03	14		»	05
		15,9		-05	-87	04		»	14.	13.	88	»	-02
		17,4		-04	-62	14		»	59	09		»	46
		17,9		-03	-47	16		36	70	06.		»	25
		19,4		-01.	03	18		»	82	-01		»	177.
		20,9		01.	55	13.		»	28	-09	94	»	98.
		23,4		04	88	-04		35.	-12	-13.		»	-36
		31,8		15	-52	15.	01	33	29	07	100	-1	112.
	Avril	2,3		17	15.	17		32.	81	-03.		»	112.
		7,3		23	50	-17		29.	-29	-04.	99.	»	50

				a				b			c	± 1	n
1825	Avril	*9,2*		25	- 38	- 15	01.	27.	- 74	07.	95	»	44.
	Mai	1,2		39	73	09	02.	05	21	- 12.	50	1	- 74.
		6,7		»	- 44.	- 14		0	- 71	08.		»	- 64.
		7,2		»	- 62	- 11		- 03	- 26	11		»	04.
		7,7		»	- 74	- 08		- 03	- 20	12.	21	»	31.
		10,2		38.	- 78.	10.		- 06	17	11.		»	28.
		17,2		36	86	- 07.		- 08	- 10	- 12		- 1	45.
		17,7		35.	85	- 10.		- 15	- 25	- 11		»	47.
		18,2		»	68	- 14		»	- 52.	- 09		»	26
		18,7		»	52.	- 16		»	- 67	- 07	- 19	»	18
		31,6		25	53	- 15.		- 27.	- 66	- 07		»	- 52.
	Juin	1,1		24	57	- 17.		- 28.	- 75	- 03.		»	- 42
		1,6		25.	15.	- 18		»	- 81	0		»	- 48
		2,6		22.	- 26	- 16		- 29.	- 78.	06		»	- 47
		3,6		»	- 62	- 11		»	- 26	11		»	- 48
		4,1		21	- 73	- 07.		- 30	- 21	12.	- 57.	»	- 42.
		4,6		»	- 83.	04		»	- 28	15.		•	29
	Octobre	3,3	17	15.	21	- 18	03.	33	- 79	0		1	- 09.
		3,8		15	03	- 17.		33	- 82	03	100	»	08
		4,3		»	- 15.	- 16.		»	- 81	06		»	48
		21,2		32.	- 74	15.		20.	20	09.	81	- 1	36
		23,7		34	05	17		18	82	- 04		»	42
	Novembre	*7,2*		39	21	15.	04	0	80	- 07		»	- 04
	Décembre	*6,1*	16	21	77	04	05	- 50	41	- 15.	- 33	1	57.
		7,6		19.	89	- 05		- 31	04	- 15		»	48
1826	Mai	18,8		- 03	- 70	- 04.	05.	56	- 50.	15.		»	- 182
		19,3		- 01	- 81	0		»	- 34	14	94	»	- 123.
		20,8		0	- 84	11.		»	25	10.		»	- 77
	Avril	*24,2*		36	64	- 17		14	- 25	- 04.		- 1	- 49
		24,7		»	47	- 18		»	- 70	- 01	77	»	- 35
	Octobre	*16,7*	14.	28	86	- 06	07.	25.	10	- 15		»	- 109.

TABLEAU III.

			p	*a*	*- b*	*c*	*± k*	*n*	*n'*
1822	Novembre	5	1	- 47	131	44	- 1	- 27	- 6.
		12	4	- 148	122	21	- 4	50,5	68
	Décembre	21	2	39	111	- 90	- 2	- 19	- 1
1823	Mars-Avril		4	85.	16.	21	2	- 15,75	- 12
	Mai	12	4	18	58.	19	0.	31,25	37.
		20	4	115.	73	- 15.	- 4	8,9	22
	Mai-Juin		7	- 2,7	47	- 47	7	32,9	40.
	Sept.-Oct.		5	50.	97.	81	- 5	- 25,3	- 7
	Oct.-Nov.		10	- 26.	145	75	1	- 64,4	- 41.
	Novembre	14	1	103	32	14	- 1	- 82	- 75.
	Nov.-Déc.		3	- 6,3	101	- 53	3	- 39,3	- 23
1824	Mars		3	- 15	10	99.	- 3	67,3	69

			p	a	$-b$	c	$\pm k$	n	n'
1824	Avril		6	- 2.	70.	78	-2	37,5	48.
	Mai	2	2	68.	200	47	2	14	46.
	Mai	22	6	12.	86,3	06.	-5	- 1,14	12.
		26	4	81.	197	- 35	4	36	69
	Juin	10	6	- 23.	148	- 71.	4	- 11,6	12
		22	4	71.	74	- 94.	-4	- 43	-30
	Septembre	22	2	6	- 3,25	92	-1	- 45	-45
		25	2	111.	92	95.	1	- 49	-33
	Octobre	10	4	- 24	38	94	0	5,6	11
	Nov.-Déc.		5	96.	179	- 26.	-3	- 54,7	-25
	Décembre	20	1	- 39.	222.	- 91.	-1	- 89,5	-59
1825	Février	23	1	77.	89	64	1	- 37	-22
	Mai	16	5	- 95.	45.	88	5	15	21
		21	3	77	54	94	3	80	89.
	Avril	0	1	- 3.	45.	100	-1	112,5	
		5	2	71	61.	99.	-2	81,25	92
		9	1	- 10	153	95	-1	44	68
	Mai	1	1	139	99.	50	1	- 74,5	-52
		8	4	- 16	128	21	4	0	20
	Mai-Juin		7	95	196	- 19	-7	0 78	41
	Juin	4	4	- 29	171	- 57.	-4	- 27	1
	Octobre	3	2	25.	97	100	2	- 0,75	15
		14	3	- 2	74	- 81	-1	4,15	53
	Nov.-Déc.		3	110	101	- 53	1	32	49
1826	Mai		3	- 60.	81	94	3	-131,5	
	Avril-Oct.		3	101	126	77	-3	- 67	

TABLEAU IV.

		p	a	b	n	n'
1822	Novembre 5 et 12 . . .	(1,4)	- 182	- 10	- 87	- 88
1823	Mai 6 et 16	(1,2)	- 138	+ 77	6	- 5
	Mai 16 et 19	(1,2)	- 110.	- 82	33	45
	Mai 19 et 21	(2,3)	- 26.	+ 56	- 36	- 45
	Mai 21 et 30	3	- 29	145	14	8
	Mai 30 et juin 2	(3,4)	- 84	47	- 10	4
	Septembre 8 et 11 . . .	(1,2)	- 53	120	2	- 17
	Octobre 9 et 11	(1,2)	58	- 12	15	18
	Octobre 11 et 13	(2,3)	63	- 52	- 34	- 25
	Octobre 13 et 28	3	- 28	- 39	- 37	- 32
	Octobre 28 et novembre 8 .	(2,3)	- 17	80.	37	24
	Novembre 8 et 14	1	63.	50	- 59	- 66
	Novembre 14 et 26 . . .	(1,2)	- 132	- 96.	23	37
	Novembre 26 et décemb. 8 .	(1,2)	- 88.	- 38.	- 15	- 8
1824	Avril 6 et 11	1	- 102.	- 175	- 90	- 63
	Avril 11 et 23	(1,3)	81.	149	+ 79	+ 56
	Avril 23 et mai 1	(2,3)	- 76	+ 58	- 30	- 40
	Mai 1 et 3	(1,2)	55	- 10	72	74
	Mai 21 et 22	(2,4)	- 72	- 15	- 25	- 24
	Mai 22 et 28	(2,3)	- 6	- 199	- 23	- 1
	Mai 28 et juin 2	(1,3)	- 96	- 146	- 15	10
	Juin 2 et 7	1	- 33.	- 37.	43	48

		p	a	b	n	n'
1824	Juin 7 et 9	1	- 119.	114.	64	44
	Juin 9 et 12.	(1,2)	144.	25.	- 7	- 9
	Juin 12 et 17	(1,2)	- 5.	- 136.	15	57
	Juin 17 et 22	(1,4)	- 121.	62.	- 19	- 30
	Septembre 22 et 25 . . .	2	- 100	70.	- 7	- 20
	Septembre 25 et octobre 3 .	2	+ 156	- 16.	- 27	- 22
	Octobre 18 et 22	(1,2)	- 142	65.	26	14
	Novembre 20 et décemb. 5 .	(1,2)	53	29.	- 61	65
	Décembre 5 et 19	2	62	17	- 41	43
1825	Mars 15 et 17	(2,3)	- 54	- 61	- 33	24
	Mars 17 et 20	(2,3)	- 102	57	2	- 9
	Mars 20 et avril 1	(2,3)	45	- 38	51	58
	Avril 1 et 8.	2	12	- 116	70	51
	Mai 1 et 7	(1,3)	147	44	- 82	87
	Mai 7 et 10	(1,3)	3.	- 52	- 18	- 10
	Mai 10 et 18	(1,4)	- 125.	84	2	- 13
	Juin 1 et 3	3	- 59	- 40	27	+ 33
	Octobre 3 et 4	(1,2)	35	- 9	11	+ 13
	Octobre 22 et novembre 7 .	(1,2)	- 62.	- 0.	34	+ 33

TABLEAU V.

			p	a	b	± k	n
1838	Mai	19	4	+ 0,56	- 0,55	+ 1	- 3,14
		28	2	- 0,53	- 1,51	- 1	- 5,94
	Mai 29 juin	1	2	- 0,33	- 1,04	- 1	- 10,6
	Juin	7	4	+ 0,79	- 2,34	- 1	- 1,67
		9	3	- 0,0167	- 2,64	- 1	+ 3,03
		11	4	- $0,74_2$	- 2,40	- 1	- 7,14
		13	4	- 0,713	- 1,19	- 1	- 8,64
		19	1	+ 1,01	- 1,96	+ 1	- 15,0
		27	3	- 0,443	- 0,96	- 1	- 4,92
		29	4	- 0,193	- 0,70	+ 1	- 0,113

TABLEAU VI.

DATES.	T. sid. de Kiev.	T	Δα	Δδ	log Δβ	log Δλ	S_1	R_1	S_2	R_2
1879										
17 juin.	14ʰ58ᵐ27ˢ9 19 51 54.8	4ʰ53ᵐ26ˢ9	— 0″,65 — 0.32	+ 0″,58 — 0.28	0.49751$_n$	0.47374	132°39′ 5″	39° 2′33″	111°31′11″	11°33′29″
20 juin.	15 37 19.2 15 43 14.2 19 43 17.0 19 55 11.5	4 8 57.3	+ 0.22 + 0.14 — 0.64 — 0.74	— 0 34 — 0.27 — 0.47 — 0 22	9.87536$_n$	0.03401	133 55 31	42 6 59	150 46 57	33 58 33
21 juin.	17 39 47.4 17 46 13 2 20 14 15 5	2 31 13	— 0.31 — 0.24 — 0.65	+ 2 05 + 0.88 + 0.38	9.99213	0.05901$_n$	136 49 51	43 1 39	158 59 2	73 59 58
22 juin.	19 22 20 20 15 37	0 53 17	— 0.02 — 0 09	+ 0 23 — 0.26	9 63828	9.67984$_n$	138 4 53	44 19 37	164 19 27	95 44 3
25 juin	15 38 24.8 15 51 31.7 20 37 55	4 51 56	+ 0.21 + 0.24 — 0.68	+ 0 34 — 0 10 + 0.48	9.51110$_n$	9.58276	141 4 21	67 2 49	169 2 53	155 19 37
1ᵉʳ juil.	18 51 3 20 31 32	1 40 29	— 0 76 + 0.09	+ 0.53 + 0.23	9.54877	9.88703$_n$	146 41 58	54 18 1	199 44 32	303 15 28
4 juil	16 11 30 19 57 3	3 45 23	+ 1 27 + 0.49	+ 1.03 — 0.41	0.11504	0.18013$_n$	149 15 53	57 45 37	255 9 5	339 28 25
7 juil.	19 54 36 21 7 27	1 12 51	— 1.21 — 1.22	— 1.31 + 0.90	0.29919	0.36655	151 34 49	61 46 41	325 45 40	348 41 20
9 août.	17 42 55.7 22 33 55.6	4 51 0	+ 0 47 — 1.34	+ 1.13 + 0 42	9 80519$_n$	9.86926$_n$	170 51 55	107 38 35	82 5 8	- 1 24 8
17 août	17 35 44.4 23 3 38.7	5 27 54.3	— 0 19 — 1.72	+ 1.08 — 1.27	0.32562	0.39202$_n$	173 33 40	120 5 20	167 30 55	124 9 35
18 août.	17 33 46.1 24 59 49.4	7 26 3.3	— 0.50 — 1.44	+ 1.20 — 0 27	0 12235	0.1883 $_n$	173 50 29	121 45 1	68 51 22	149 48 38

DÉTERMINATION DES CONSTANTES DE LA NUTATION DIURNE AU MOYEN DES OBSERVATIONS DE GYLDÉN SUR LA LATITUDE DE POULKOVA (*).

Dans l'*Annuaire* pour 1894, nous avons donné les résultats déduits des observations de Peters sur la latitude de Poulkova, quant aux constantes de la nutation diurne.

Ces observations ne sont pas suffisamment précises pour permettre la détermination exacte d'une quantité aussi faible; elles ont fourni $\nu = 0''.17$, $L = 179°33'$. (Voir page 363 de l'*Annuaire de l'Observatoire* pour 1894.)

La valeur de ν semble $2\,{}^1/_2$ fois trop forte, celle de L est exacte.

Une détermination nouvelle, au moyen de meilleures observations de latitude, nous a paru nécessaire, et nous nous sommes résolu à faire usage, dans ce but, des excellentes observations de Gyldén.

De toutes les séries de déterminations de la latitude, effectuées au moyen d'observations d'une même étoile, nous n'en connaissons pas de plus précises, en effet, que cette série d'observations faites à Poulkova, de 1863 à 1870.

Elles sont assez nombreuses pour qu'on puisse en éliminer la variation des latitudes par la combinaison d'un passage supérieur avec un passage inférieur à peu près consécutif, et obtenir néanmoins une série de déterminations suffisantes pour le but que nous avons en vue.

Ce but est surtout la détermination des constantes de la nutation diurne; mais comme cette nutation renferme les mêmes arguments que la nutation bradléenne, comme, de plus, il est indispensable, dans la recherche d'une quantité aussi petite que la nutation diurne, de n'employer que des observations réduites avec une correction absolue, nous aurons à introduire, comme inconnues, la parallaxe, la correction de la constante de l'aberration, les termes périodiques de l'aberration systématique, et, de plus, les corrections des deux constantes employées par Peters dans ses formules de la nutation, celle du terme en ☊ et celle du terme en $2\odot$. Nous négligeons l'incorrection, plus considérable certainement, des termes lunaires, à cause de leur moindre importance.

Laissant de côté la nutation initiale, puisqu'elle est éliminée en même temps que les autres termes possibles des variations de la latitude, dans les combinaisons d'observations dont nous ferons usage. nous donnerons la forme des termes complémentaires à ajouter à la formule de réduction au lieu apparent qui a été employée à Poulkova.

Ces termes sont :

I. Les termes du second ordre;

II. Les termes de la parallaxe;

III Les termes dépendant de la correction de la constante de l'aberration ;

IV. Les termes périodiques (du second ordre) de l'aberration systématique;

V. Les termes de correction des deux constantes de la nutation de Peters, celle du terme

(*) M. Bijl, astronome adjoint à l'Observatoire royal, qui a bien voulu se charger de tous les calculs numériques, a pu les terminer avant l'achèvement du présent volume.

nodal, et celle des termes en 2⊙, qui, à cause de la fluidité intérieure du globe, ne peut pas se déduire de la première, comme Peters l'a fait correctement dans l'hypothèse d'une Terre solide. Les coefficients des termes lunaires seront plus altérés encore; mais il n'est pas possible ici de déduire toutes ces corrections;

VI. Les termes de la nutation diurne.

Les expressions de ces différents termes sont :

I. $\Delta^2\delta = -\frac{1}{4}\sin 2\delta(\Delta\alpha)^2$, $\Delta\alpha$ désignant la réduction complète (nutation et aberration) en ascension droite. Nous négligerons les termes complémentaires, inférieurs à 0″,01, et désignerons par C la correction $\Delta^2\delta$.

II. $b\varpi$, ϖ désignant la parallaxe, b son coefficient en déclinaison.

III. av, v désignant la correction de la constante de Struve, a le coefficient de l'aberration en déclinaison.

IV. $$K'\sin\delta\sin(A'-\alpha)A_\alpha = -KK'\operatorname{tg}\delta\sin(A'-\alpha)(c_1\cos\alpha\cos\odot+\sin\alpha\sin\odot),$$

formule dans laquelle K et K′ désignent la constante de l'aberration annuelle et la constante *réduite* de l'aberration systématique; A′, l'ascension droite de l'Apex du mouvement systématique. (Voir le chapitre suivant.)

La dernière parenthèse renferme le coefficient de l'aberration annuelle en ascension droite. Nous considérerons A′ comme connu, et poserons $-KK'\operatorname{tg}\delta\sin(A'-\alpha) = w$, le coefficient de l'aberration en ascension droite égal à a', en sorte que le terme IV sera $a'w$.

V. x désignant la correction de la constante de Peters, e le coefficient de la nutation nodale en déclinaison, y la correction du coefficient des termes en 2⊙ de Peters, g son coefficient en déclinaison, l'ensemble des termes V sera

$$ex + gy.$$

VI. Les termes de la nutation diurne en déclinaison se mettront sous la forme suivante, quant aux observations méridiennes :

$$\Delta\delta = -\xi\Sigma_1 + \eta\Sigma_2,$$

ξ et η étant respectivement égaux aux produits de la constante ν de la nutation diurne par le sinus et le cosinus de $2L+\alpha$, et L la longitude orientale du premier méridien par rapport à Poulkova.

$$\Sigma_1 = -1{,}152 - 0{,}133\cos\Omega + 0{,}36\cos 2\odot + 0{,}82\cos 2☾ + 0{,}14\cos(2☾-\Omega) + 0{,}13\cos(☾-\Gamma'),$$
$$\Sigma_2 = -0{,}18\sin\Omega + 0{,}39\sin 2\odot + 0{,}88\sin 2☾ + 0{,}21\sin(2☾-\Omega),$$

où les arguments sont tous exprimés en longitudes vraies.

Une erreur pourrait aussi avoir été commise dans le calcul de la réfraction; il n'est pas possible d'en tenir compte; elle serait, du reste, probablement très faible, étant la différence entre les erreurs commises dans le calcul des distances zénitales aux passages supérieur et inférieur. Enfin, nous soupçonnons qu'à cause de la fluidité intérieure du globe, il peut exister des déviations périodiques de la verticale; mais elles seront éliminées, pensons-nous, dans la combinaison de deux passages (supérieur et inférieur) consécutifs.

Il en est de même de la variation annuelle du pôle d'inertie qui pourrait provenir des conditions météorologiques (*).

Si l'on fait la demi-différence n des latitudes observées à deux passages consécutifs $(s - i)$, en désignant par z la correction du lieu moyen de la polaire, et en faisant $n + \Delta^2\delta = n'$, on aura, abstraction faite de la nutation eulérienne, de la variation annuelle de la latitude et des déviations périodiques de la verticale, puisqu'elles sont toutes éliminées :

$$0 = n' + z + b\varpi + a\nu + a'w + ex + gy - \xi\Sigma_1 + \eta\Sigma_2;$$

équation à huit inconnues.

Le tableau I donne les valeurs des différents paramètres pour les 156 couples d'observations.

La résolution directe d'un tel système d'équations par les moindres carrés serait tellement laborieuse, que nous croyons devoir y renoncer.

Il s'agit d'arriver à réduire le nombre des inconnues. Or, les termes II, III, IV, ont une période exactement annuelle. Si donc nous faisons les sommes des équations qui se rapportent à deux observations faites à six mois d'intervalle, ces termes seront éliminés, et, si même l'intervalle de temps n'est pas tout à fait exactement de six mois, comme les coefficients de ces termes n'excèdent pas quelques centièmes de seconde d'arc, la détermination des autres inconnues n'en sera nullement affectée.

Pour la somme des observations à six mois d'intervalle, on aura donc

$$n' + z + gy + ex + \eta\Sigma_2 - \xi\Sigma_1 = 0.$$

Le tableau I renferme, pour chacun des couples de Gyldén, les valeurs de a, b, Σ_1, Σ_2, n, n'. La combinaison de ces couples à six mois d'intervalle, qui donne les équations de condition, est indiquée dans le tableau II.

La résolution des équations de condition a conduit aux équations normales

$$\begin{array}{rrrrrrr}
-\ 3{,}947 & +\ 342{,}12\ \xi & +\ 73{,}607\ \eta & +\ 733{,}365\ x & +\ 33{,}807\ y & +\ 410{,}82\ z & = o. \\
-\ 5{,}378 & +\ 73{,}607 & +\ 98{,}354 & +\ 91{,}838 & +\ 13{,}452 & +\ 106{,}54 & \\
34{,}355 & +\ 733{,}365 & +\ 91{,}838 & +\ 5375{,}80 & +\ 60{,}532 & +\ 1214{,}07 & \\
-\ 0{,}809 & +\ 33{,}807 & +\ 13{,}452 & +\ 60{,}552 & +\ 10{,}439 & +\ 60{,}354 & \\
-\ 0{,}385 & +\ 410{,}82 & +\ 106{,}536 & +\ 1214{,}07 & +\ 10{,}350 & +\ 622{,}30 &
\end{array}$$

D'où

$z = 0''014 \pm 0.004$, correction de la déclinaison moyenne adoptée par Gyldén;
$y = 0.0064 \pm 0.0035$, id. du coefficient des termes en $2\odot$ de Peters;
$x = -0.009 \pm 0.0011$, id. de la constante de la nutation de Peters;
$\xi = 0.034 \pm 0.00235$,
$\eta = 0.052 \pm 0.00245$.

(*) Voir notre *Essai sur les variations de latitude*. (*Annuaire pour 1894*.)

Des deux dernières valeurs on déduit, par

$$\mathrm{tg}(2L + \alpha) = \frac{\xi}{\eta} : 2L + \alpha = 33°12' \pm 2°13'40''; \quad 2L = 15°56' \text{ ou } 375°56';$$

d'où $L = 187°58' = 12^h5$, longitude orientale du premier méridien par rapport à Poulkova;
et $\nu = 0''062 \pm 0.0024$, coefficient de nutation diurne.

Si nous combinons les valeurs précédentes de ν et de $\mathrm{tg}2L$, avec celles que nous avons déduites des observations de Struve

$$\nu = 0''0695 \pm 0.0019, \quad 2L = 358°15' \pm 1°36',$$

nous trouverons

$$\nu = 0''0666 \pm 0.0015, \quad 2L = 364° \quad \pm 1°191',$$

d'où $L = 0^h$ ou 12^h E. de Poulkova $= 2^h$ E. de Greenwich.

Nous avons antérieurement déduit pour L cette même valeur des observations de latitude faites par Peters à Poulkova (*).

On pourra adopter les constantes $\nu = 0''0666$ et $L = 2^h$ E. de Greenwich, dans les formules de réduction au lieu apparent, en écrivant

$$\cot\delta\Delta\alpha = -x\Sigma_1 + y\Sigma_2$$
$$\Delta\delta = -y\Sigma_1 - x\Sigma_2,$$

expressions dans lesquelles x et y représentent respectivement $\nu \sin(2L + 2t - \alpha)$, $\nu \cos(2L + 2t - \alpha$, t l'heure sidérale, η l'angle horaire, Σ_1 et Σ_2 les fonctions définies page 55. Ces formules seront démontrées dans le chapitre suivant.

Nous n'avons tenu nul compte des valeurs des constantes, déduites des observations de la Polarissime faites à quelques heures d'intervalle, parce que nous avons négligé, dans leur calcul, la nutation eulérienne; or, celle-ci, par le caractère diurne qu'elle revêt dans nos formules, rapportées aux axes géographiques axes principaux , exerce également, en quelques heures, comme on le verra au chapitre suivant, une influence dont un calcul rigoureux devrait tenir compte, quoiqu'elle soit moindre que l'influence de la nutation diurne, à cause de la longueur de sa période, double de celle de cette dernière.

Nous ne reproduirons pas, dans ces *Annales*, les applications que nous avons faites, avec succès, de la nutation diurne à l'explication des différences systématiques qui existent entre les catalogues de divers observatoires ou entre les lieux des mêmes étoiles qui y ont été déterminés, et nous nous bornerons à renvoyer le lecteur, désireux de se rendre compte de ces applications, aux volumes dans lesquelles elles ont paru :

I. Première détermination des constantes de la nutation diurne. (*Annuaire de l'Observatoire royal*, pour 1888, p. 290.)
II. Preuves de la nutation diurne. (*Annuaire de l'Observatoire royal*, pour 1889, p. 262)
III. Détermination provisoire des constantes de la nutation diurne. (*Annuaire de l'Observatoire royal*, pour 1890, p. 292.)
IV. Détermination provisoire des constantes de la nutation diurne au moyen des observations de latitude faites à Poulkova, par Peters et par Gyldén. (*Annuaire de l'Observatoire royal*, pour 1894, pp 356 et 382)
V. Sur les différences systématiques entre les catalogues de Greenwich, de Melbourne et du Cap. (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1894, n° 1, et *Annuaire de l'Observatoire royal*, pour 1894, p. 371.)
VI. Ma dernière détermination des constantes de la nutation diurne. (*Annuaire de l'Observatoire royal*, pour 1895, p. 455.)
VII. Sur les différences systématiques en déclinaison constatées à Poulkova. (*Annuaire de l'Observatoire royal*, pour 1896, p. 306.)

(*) *Annuaire pour 1894.*

TABLEAU I.

Observations de Gyldén. — Équations de condition.

	n	*n'*	*a*	*b*	*c*	*e*	*f*	*g*	*h*	
1.	+ 0,070	+ 0,065	+ 0,605 v	+ 0,785 ϖ	+ 2,045 ξ	+ 0,455 η	— 4,091 x	+ 0,509 y	+ 52,04 w	+ 1 ε = 0
2.	+ 0,090	+ 0,087	+ 0,910	+ 0,385	+ 1,311	— 0,558	— 3,955	+ 0,283	+ 17,18	+ 1 = 0
3.	— 0,090	— 0,093	+ 0,915	+ 0,375	+ 1,154	— 0,461	— 3,930	+ 0,281	+ 17,13	+ 1 = 0
4.	+ 0,225	+ 0,223	+ 0,975	+ 0,165	+ 1,405	— 0,732	— 3,863	+ 0,064	+ 8,75	+ 1 = 0
5.	— 0,105	— 0,106	+ 0,245	— 0,960	— 0,115	+ 0,015	— 3,376	— 0,153	— 37,20	+ 1 = 0
6.	— 0,035	— 0,036	— 0,255	— 0,960	+ 0,132	+ 0,794	— 3,207	+ 0,341	— 38,99	+ 1 = 0
7.	+ 0,105	+ 0,104	— 0,280	— 0,950	+ 0,504	+ 1,080	— 3,198	+ 0,358	— 37,91	+ 1 = 0
8.	+ 0,045	+ 0,044	— 0,310	— 0,940	+ 1,227	+ 1,066	— 3,187	+ 0,382	— 37,60	+ 1 = 0
9.	+ 0,045	+ 0,044	— 0,315	— 0,940	+ 1,388	+ 0,985	— 3,183	+ 0,387	— 37,51	+ 1 = 0
10.	— 0,045	— 0,046	— 0,325	— 0,935	+ 1,535	+ 0,880	— 3,181	+ 0,395	— 37,42	+ 1 = 0
11.	— 0,150	— 0,151	— 0,350	— 0,925	+ 1,765	+ 0,459	— 3,176	+ 0,409	— 37,15	+ 1 = 0
12.	— 0,125	— 0,125	— 0,535	— 0,835	+ 1,767	+ 0,715	— 3,098	+ 0,497	— 33,91	+ 1 = 0
13.	— 0,280	— 0,280	— 0,560	— 0,820	+ 1,696	+ 0,129	— 3,083	+ 0,502	— 33,41	+ 1 = 0
14.	— 0,190	— 0,190	— 0,585	— 0,800	+ 1,208	— 0,290	— 3,079	+ 0,504	— 33,22	+ 1 = 0
15.	— 0,035	— 0,035	— 0,605	— 0,785	+ 0,784	— 0,228	— 3,068	+ 0,509	— 32,19	+ 1 = 0
16.	+ 0,025	+ 0,025	— 0,610	— 0,780	+ 0,662	— 0,154	— 3,065	+ 0,509	— 32,00	+ 1 = 0
17.	+ 0,010	+ 0,010	— 0,885	— 0,450	+ 1,297	— 0,535	— 2,911	+ 0,342	— 19,73	+ 1 = 0
18.	+ 0,015	+ 0,015	— 0,885	— 0,445	+ 1,159	— 0,513	— 2,909	+ 0,335	— 19,45	+ 1 = 0
19.	— 0,015	— 0,015	— 0,890	— 0,430	+ 0,863	— 0,564	— 2,901	+ 0,397	— 18,89	+ 1 = 0
20.	— 0,195	— 0,195	— 0,960	— 0,260	+ 1,996	— 0,416	— 2,835	+ 0,160	— 12,39	+ 1 = 0
21.	— 0,100	— 0,101	— 0,990	— 0,045	+ 1,818	— 0,644	— 2,757	— 0,037	— 4,19	+ 1 = 0
22	— 0,010	— 0,011	— 0,990	— 0,010	+ 1,690	— 0,664	— 2,755	— 0,066	— 3,87	+ 1 = 0
23.	— 0,100	— 0,101	— 0,990	+ 0,020	+ 1,389	— 0,881	— 2,748	— 0,082	— 3,22	+ 1 = 0
24.	— 0,010	— 0,011	— 0,990	+ 0,015	+ 1,228	— 0,885	— 2,744	— 0,091	— 2,90	+ 1 = 0
25.	— 0,030	— 0,031	— 0,980	+ 0,155	+ 1,768	+ 0,306	— 2,690	— 0,254	+ 2,87	+ 1 = 0
26.	— 0,105	— 0,111	— 0,440	+ 0,885	+ 1,274	— 0,540	— 2,331	— 0,330	+ 33,85	+ 1 = 0
27.	— 0,080	— 0,086	— 0,325	+ 0,940	+ 0,782	+ 0,965	— 2,284	— 0,222	+ 36,02	+ 1 = 0
28.	— 0,055	— 0,061	— 0,315	+ 0,940	+ 1,089	+ 0,869	— 2,278	— 0,207	+ 36,27	+ 1 = 0
29.	+ 0,035	+ 0,029	— 0,305	+ 0,940	+ 1,204	+ 0,751	— 2,274	— 0,197	+ 36,33	+ 1 = 0
30.	— 0,050	— 0,056	— 0,295	+ 0,945	+ 1,299	+ 0,597	— 2,272	— 0,189	+ 36,52	+ 1 = 0
31.	— 0,200	— 0,207	— 0,085	+ 0,990	+ 0,818	+ 0,872	— 2,188	+ 0,031	+ 38,61	+ 1 = 0
32.	— 0,010	— 0,017	— 0,065	+ 0,990	+ 0,982	+ 0,822	— 2,186	+ 0,040	+ 38,65	+ 1 = 0
33.	— 0,014	— 0,021	— 0,040	+ 0,990	+ 1,312	+ 0,587	— 2,176	+ 0,067	+ 38,77	+ 1 = 0
34.	— 0,070	— 0,077	— 0,025	+ 0,990	+ 1,487	+ 0,281	— 2,170	+ 0,084	+ 38,83	+ 1 = 0
35.	+ 0,185	+ 0,178	+ 0,090	+ 0,990	+ 0,386	+ 0,928	— 2,129	+ 0,193	+ 38,94	+ 1 = 0
36.	— 0,070	— 0,077	+ 0,095	+ 0,990	+ 0,223	+ 0,654	— 2,127	+ 0,201	+ 38,93	+ 1 = 0
37.	+ 0,145	+ 0,138	+ 0,120	+ 0,985	+ 0,558	+ 1,166	— 2,117	+ 0,224	+ 38,88	+ 1 = 0
38.	+ 0,050	+ 0,043	+ 0,180	+ 0,975	+ 1,408	+ 0,871	— 2,099	+ 0,224	+ 38,70	+ 1 = 0
39.	— 0,130	— 0,137	+ 0,205	+ 0,970	+ 1,679	+ 0,064	— 2,087	+ 0,300	+ 38,52	+ 1 = 0
40.	— 0,170	— 0,177	+ 0,215	+ 0,965	+ 1,389	— 0,046	— 2,083	+ 0,307	+ 38,46	+ 1 = 0
41.	+ 0,060	+ 0,053	+ 0,355	+ 0,925	+ 0,175	+ 1,061	— 2,054	+ 0,413	+ 37,14	+ 1 = 0
42.	— 0,140	— 0,140	+ 0,385	— 0,915	— 0,136	+ 0,136	— 1,163	— 0,281	— 35,00	+ 1 = 0
43.	— 0,095	— 0,095	+ 0,360	— 0,925	+ 0,037	+ 0,525	— 1,153	— 0,251	— 35,58	+ 1 = 0
44.	+ 0,090	+ 0,090	+ 0,275	— 0,950	+ 1,340	+ 0,206	— 1,121	— 0,179	— 36,72	+ 1 = 0
45.	+ 0,020	+ 0,020	+ 0,265	— 0,950	+ 1,580	+ 0,076	— 1,118	— 0,171	— 36,83	+ 1 = 0
46.	+ 0,110	+ 0,110	+ 0,260	— 0,955	+ 1,317	— 0,172	— 1,112	— 0,154	— 37,03	+ 1 = 0
47.	+ 0,070	+ 0,069	+ 0,175	— 0,970	— 0,182	— 0,164	— 1,082	— 0,078	— 37,88	+ 1 = 0
48.	— 0,190	— 0,191	+ 0,160 v	— 0,975 ϖ	+ 0,115 ξ	+ 0,225 η	— 1,076 x	— 0,061 y	— 38,03 w	+ 1 ε = 0

	n	n'	a	b	c	e	f	g	h	
49.	+ 0,135	+ 0,134	+ 0,120 v	— 0,985 ϖ	+ 0,661 ξ	+ 1,258 η	— 1,059 x	— 0,016 y	— 38,38 w	+ 1 z = 0
50.	— 0,070	— 0,071	+ 0,015	— 0,990	+ 1,008	— 0,482	— 1,020	+ 0,088	— 38,89	+ 1 = 0
51.	— 0,300	— 0,301	+ 0,010	— 0,990	+ 0,862	— 0,545	— 1,018	+ 0,097	— 38,92	+ 1 = 0
52.	+ 0,130	+ 0,129	— 0,010	— 0,990	+ 0,560	— 0,540	— 1,012	+ 0,114	— 38,96	+ 1 = 0
53.	— 0,100	— 0,101	— 0,015	— 0,990	+ 0,397	— 0,478	— 1,010	+ 0,122	— 38,97	+ 1 = 0
54.	— 0,005	— 0,006	— 0,025	— 0,990	+ 0,262	— 0,387	— 1,004	+ 0,129	— 38,99	+ 1 = 0
55.	+ 0,115	+ 0,114	— 0,040	— 0,990	+ 0,048	— 0,123	— 0,998	+ 0,147	— 39,01	+ 1 = 0
56.	— 0,085	— 0,086	— 0,060	— 0,990	— 0,064	+ 0,201	— 0,992	+ 0,164	— 39,02	+ 1 = 0
57.	+ 0,035	+ 0,034	— 0,075	— 0,990	— 0,052	+ 0,522	— 0,985	+ 0,179	— 39,01	+ 1 = 0
58	— 0,130	— 0,131	— 0,095	— 0,990	+ 0,079	+ 0,790	— 0,979	+ 0,196	— 38,99	+ 1 = 0
59.	— 0,105	— 0,106	— 0,100	— 0,985	+ 0,179	+ 0,885	— 0,975	+ 0,303	— 38,98	+ 1 = 0
60.	— 0,290	— 0,291	— 0,120	— 0,985	+ 0,451	+ 0,995	— 0,992	+ 0,288	— 38,95	+ 1 = 0
61.	— 0,215	— 0,216	— 0,125	— 0,980	+ 0,606	+ 1,022	— 0,965	+ 0,034	— 38,95	+ 1 =
62.	— 0,050	— 0,050	— 0,260	— 0,960	+ 0,727	— 0,175	— 0,914	+ 0,103	— 38,21	+ 1 = 0
63.	— 0,025	— 0,025	— 0,265	— 0,955	+ 0,587	— 0,094	— 0,910	+ 0,107	— 38,14	+ 1 = 0
64.	— 0,165	— 0,165	— 0,275	— 0,950	+ 0,417	+ 0,011	— 0,907	+ 0,111	— 38,08	+ 1 = 0
65.	— 0,220	— 0,220	— 0,285	— 0,950	+ 0,378	+ 0,147	— 0,903	+ 0,115	— 38,00	+ 1 = 0
66.	— 0,190	— 0,190	— 0,270	— 0,955	+ 0,587	— 0,095	— 0,910	+ 0,107	— 38,14	+ 1 = 0
67.	— 0,030	— 0,030	— 0,275	— 0,955	+ 0,417	+ 0,011	— 0,907	+ 0,111	— 38,08	+ 1 = 0
68.	— 0,005	— 0,005	— 0,280	— 0,950	+ 0,378	+ 0,147	— 0,903	+ 0,114	— 38,00	+ 1 = 0
69.	— 0,150	— 0,150	— 0,290	— 0,945	+ 0,329	+ 0,306	— 0,901	+ 0,120	— 37,94	+ 1 = 0
70.	— 0,060	— 0,060	— 0,290	— 0,950	+ 0,329	+ 0,336	— 0,901	+ 0,120	— 37,93	+ 1 = 0
71.	+ 0,010	+ 0,010	— 0,295	— 0,945	+ 0,320	+ 0,497	— 0,897	+ 0,124	— 38,03	+ 1 = 0
72.	— 0,165	— 0,165	— 0,375	— 0,920	+ 1,377	+ 1,196	— 0,879	+ 0,157	— 37,12	+ 1 = 0
73.	— 0,100	— 0,100	— 0,460	— 0,880	+ 0,638	— 0,285	— 0,844	+ 0,209	— 35,58	+ 1 = 0
74.	— 0,100	— 0,100	— 0,470	— 0,880	+ 0,506	— 0,186	— 0,840	+ 0,215	— 35,45	+ 1 = 0
75.	— 0,060	— 0,060	— 0,555	— 0,820	+ 0,952	+ 1,127	— 0,784	+ 0,259	— 33,62	+ 1 = 0
76.	— 0,025	— 0,025	— 0,560	— 0,815	+ 1,110	+ 1,100	— 0,782	+ 0,261	— 33,49	+ 1 = 0
77.	— 0,025	— 0,032	— 0,305	+ 0,940	— 0,108	+ 0,264	+ 0,097	+ 0,184	+ 36,42	+ 1 = 0
78.	+ 0,135	+ 0,128	— 0,290	+ 0,945	+ 0,009	+ 0,530	+ 0,103	+ 0,176	+ 36,66	+ 1 = 0
79.	— 0,025	— 0,032	— 0,280	+ 0,950	+ 0,007	+ 0,632	+ 0,105	+ 0,172	+ 36,77	+ 1 = 0
80.	+ 0,050	+ 0,045	— 0,160	+ 0,975	+ 1,187	— 0,257	+ 0,153	+ 0,114	+ 38,09	+ 1 = 0
81.	+ 0,070	+ 0,065	— 0,145	+ 0,980	+ 0,807	— 0,506	+ 0,159	+ 0,105	+ 38,23	+ 1 = 0
82.	+ 0,115	+ 0,108	— 0,145	+ 0,975	+ 0,762	— 0,505	+ 0,159	+ 0,105	+ 38,23	+ 1 = 0
83.	+ 0,130	+ 0,123	— 0,130	+ 0,980	+ 0,675	— 0,412	+ 0,165	+ 0,097	+ 38,36	+ 1 = 0
84.	— 0,010	— 0,017	— 0,105	+ 0,985	+ 0,257	— 0,201	+ 0,174	+ 0,084	+ 38,54	+ 1 = 0
85.	— 0,090	— 0,097	— 0,060	+ 0,990	+ 0,247	+ 0,619	+ 0,190	+ 0,062	+ 38,78	+ 1 = 0
86.	— 0,115	— 0,119	— 0,515	+ 0,845	+ 0,746	— 1,052	+ 2,364	+ 0,295	+ 32,04	+ 1 = 0
87.	— 0,025	— 0,029	— 0,435	+ 0,890	+ 0,269	+ 0,577	+ 2,341	+ 0,250	+ 34,16	+ 1 = 0
88.	— 0,165	— 0,169	— 0,340	+ 0,930	+ 1,179	+ 0,368	+ 2,442	+ 0,205	+ 35,94	+ 1 = 0
89.	+ 0,095	+ 0,091	— 0,245	+ 0,960	+ 0,054	+ 0,098	+ 2,479	+ 0,154	+ 37,35	+ 1 = 0
90.	+ 0,065	+ 0,061	— 0,235	+ 0,960	+ 0,110	— 0,248	+ 2,485	+ 0,150	+ 37,45	+ 1 = 0
91.	— 0,165	— 0,169	— 0,165	+ 0,975	+ 1,298	+ 0,577	+ 2,506	+ 0,117	+ 38,15	+ 1 = 0
92.	— 0,140	— 0,144	— 0,155	+ 0,980	+ 1,396	+ 0,445	+ 2,510	+ 0,113	+ 38,22	+ 1 = 0
94.	— 0,160	— 0,164	— 0,150	+ 0,980	+ 1,453	+ 0,275	+ 2,512	+ 0,109	+ 38,29	+ 1 = 0
94.	— 0,225	— 0,229	— 0,140	+ 0,980	+ 1,466	+ 0,092	+ 2,516	+ 0,104	+ 38,37	+ 1 = 0
95.	+ 0,030	+ 0,025	+ 0,245	+ 0,960	+ 0,499	+ 0,810	+ 2,657	— 0,097	+ 38,48	+ 1 = 0
96.	+ 0,070	+ 0,065	+ 0,255	+ 0,960	+ 0,665	+ 0,915	+ 2,661	— 0,101	+ 38,41	+ 1 = 0
97.	+ 0,010	+ 0,010	— 0,355	— 0,925	+ 0,933	— 0,235	+ 3,769	+ 0,152	— 37,48	+ 1 = 0
98.	+ 0,100	+ 0,093	— 0,005	+ 0,990	+ 0,161	+ 0,019	+ 4,611	+ 0,068	+ 38,96	+ 1 = 0
99.	+ 0,055	+ 0,048	+ 0,010	+ 0,990	+ 0,231	— 0,336	+ 4,656	+ 0,024	+ 39,26	+ 1 = 0
100.	+ 0,230	+ 0,223	+ 0,020	+ 0,990	+ 0,136	— 0,235	+ 4,659	+ 0,020	+ 39,28	+ 1 = 0
101.	+ 0,185	+ 0,178	+ 0,035	+ 0,990	+ 0,027	+ 0,008	+ 4,614	+ 0,011	+ 39,30	+ 1 = 0
102.	+ 0,130	+ 0,123	+ 0,030	+ 0,990	+ 0,070	— 0,125	+ 4,641	+ 0,015	+ 39,29	+ 1 = 0
103.	+ 0,085	+ 0,078	+ 0,050 v	+ 0,990 ϖ	+ 0,049 ξ	+ 0,121 η	+ 4,646 x	+ 0,007 y	+ 39,30 w	+ 1 z = 0

	n	*n'*	*a*	*b*	*c*	*e*	*f*	*g*	*h*	
104.	+ 0,205	+ 0,198	+ 0,060 v	+ 0,990 ϖ	+ 0,028 ξ	+ 0,128 η	+ 4,649 x	+ 0,003 y	+ 39,31 w	+ 1 z = 0
105.	+ 0,105	+ 0,098	+ 0,065	+ 0,990	+ 0,066	+ 0,300	+ 4,652	— 0,002	+ 39,31	+ 1 = 0
106.	— 0,035	— 0,042	+ 0,060	+ 0,990	+ 0,028	+ 0,128	+ 4,649	+ 0,003	+ 39,31	+ 1 = 0
107.	— 0,015	— 0,022	+ 0,070	+ 0,990	+ 0,137	+ 0,436	+ 4,653	— 0,006	+ 39,31	+ 1 = 0
108.	+ 0,145	+ 0,138	+ 0,060	+ 0,990	+ 0,066	+ 0,299	+ 4,650	— 0,002	+ 39,31	+ 1 = 0
109.	+ 0,045	+ 0,038	+ 0,075	+ 0,990	+ 0,129	+ 0,427	+ 4,653	— 0,006	+ 39,31	+ 1 = 0
110.	— 0,075	— 0,082	+ 0,080	+ 0,990	+ 0,244	+ 0,552	+ 4,658	— 0,011	+ 39,30	+ 1 = 0
111.	+ 0,085	+ 0,078	+ 0,080	+ 0,990	+ 0,296	+ 0,594	+ 4,655	— 0,008	+ 39,30	+ 1 = 0
112.	+ 0,025	+ 0,018	+ 0,085	+ 0,990	+ 0,370	+ 0,649	+ 4,658	— 0,015	+ 39,29	+ 1 = 0
113.	+ 0,360	+ 0,353	+ 0,070	+ 0,990	+ 0,138	+ 0,433	+ 4,653	— 0,006	+ 39,31	+ 1 = 0
114.	+ 0,210	+ 0,203	+ 0,080	+ 0,990	+ 0,245	+ 0,552	+ 4,657	— 0,011	+ 39,29	+ 1 = 0
115.	+ 0,140	+ 0,133	+ 0,090	+ 0,990	+ 0,374	+ 0,649	+ 4,658	— 0,015	+ 39,29	+ 1 = 0
116.	+ 0,240	+ 0,233	+ 0,095	+ 0,990	+ 0,668	+ 0,835	+ 4,661	— 0,020	+ 39,28	+ 1 = 0
117.	— 0,080	— 0,087	+ 0,290	+ 0,945	+ 0,333	+ 0,849	+ 4,719	— 0,120	+ 38,21	+ 1 = 0
118	— 0,275	— 0,282	+ 0,320	+ 0,935	+ 0,743	+ 1,145	+ 4,727	— 0,139	+ 37,81	+ 1 = 0
119.	— 0,030	— 0,037	+ 0,355	+ 0,925	+ 1,498	+ 0,221	+ 4,739	— 0,156	+ 37,42	+ 1 = 0
120.	+ 0,095	+ 0,094	+ 0,310	— 0,940	+ 1,191	— 0,421	+ 5,383	— 0,453	— 36,56	+ 1 = 0
121.	+ 0,170	+ 0,169	+ 0,295	— 0,945	+ 1,018	— 0,640	+ 5,387	— 0,194	— 36,80	+ 1 = 0
122.	+ 0,230	+ 0,229	+ 0,075	— 0,990	+ 1,469	— 0,174	+ 5,444	+ 0,030	— 38,99	+ 1 = 0
123.	+ 0,060	+ 0,059	+ 0,060	— 0,990	+ 1,391	— 0,529	+ 5,447	+ 0,044	— 39,03	+ 1 = 0
124.	+ 0,000	— 0,001	+ 0,055	— 0,990	+ 1,156	— 0,579	+ 5,448	+ 0,056	— 39,11	+ 1 = 0
125.	+ 0,135	+ 0,134	+ 0,035	— 0,990	+ 0,769	— 0,679	+ 5,452	+ 0,073	— 39,18	+ 1 = 0
126	+ 0,055	+ 0,054	+ 0,030	— 0,990	+ 0,771	— 0,681	+ 5,452	+ 0,072	— 39,18	+ 1 = 0
127.	+ 0,005	+ 0,004	+ 0,025	— 0,990	+ 0,593	— 0,650	+ 5,457	+ 0,080	— 39,19	+ 1 = 0
128.	+ 0,130	+ 0,129	+ 0,005	— 0,990	+ 0,299	— 0,433	+ 5,461	+ 0,099	— 39,27	+ 1 = 0
129.	— 0,080	— 0,081	— 0,010	— 0,990	+ 0,129	— 0,058	+ 5,465	+ 0,116	— 39,31	+ 1 = 0
130.	+ 0,080	+ 0,079	— 0,580	— 0,800	+ 1,507	— 0,225	+ 5,611	+ 0,506	— 33,24	+ 1 = 0
131.	— 0,305	— 0,305	— 0,970	— 0,205	+ 1,158	— 0,830	+ 5,901	+ 0,106	— 10,57	+ 1 = 0
132.	— 0,295	— 0,295	— 0,970	— 0,205	+ 1,008	— 0,732	+ 5,903	+ 0,113	— 10,25	+ 1 = 0
133.	— 0,395	— 0,395	— 0,970	— 0,200	+ 1,008	— 0,732	+ 5,903	+ 0,097	— 10,25	+ 1 = 0
134.	— 0,385	— 0,385	— 0,970	— 0,195	+ 0,891	— 0,585	+ 5,906	+ 0,089	— 9,95	+ 1 = 0
135.	— 0,310	— 0,310	— 0,980	— 0,120	+ 1,373	+ 0,673	+ 5,922	+ 0,013	— 7,08	+ 1 = 0
136.	— 0,230	— 0,230	— 0,980	— 0,115	+ 1,516	+ 0,643	+ 5,923	+ 0,005	— 6,73	+ 1 = 0
137.	+ 0,065	+ 0,059	— 0,070	+ 0,990	+ 0,608	+ 0,644	+ 6,151	+ 0,037	+ 39,08	+ 1 = 0
138.	— 0,060	— 0,066	— 0,065	+ 0,990	+ 0,787	+ 0,661	+ 6,153	+ 0,046	+ 39,13	+ 1 = 0
139.	+ 0,135	+ 0,129	— 0,050	+ 0,990	+ 0,961	+ 0,646	+ 6,154	+ 0,054	+ 39,17	+ 1 = 0
140.	+ 0,255	+ 0,249	— 0,020	+ 0,990	+ 1,554	— 0,039	+ 6,167	+ 0,107	+ 39,35	+ 1 = 0
141.	— 0,120	— 0,121	— 0,270	— 0,950	+ 0,806	— 0,491	+ 6,708	+ 0,354	— 38,57	+ 1 = 0
142.	— 0,185	— 0,186	— 0,290	— 0,945	+ 0,515	— 0,256	+ 6,710	+ 0,365	— 38,45	+ 1 = 0
143.	+ 0,070	+ 0,169	— 0,325	— 0,935	+ 0,417	+ 0,656	+ 6,716	+ 0,394	— 38,01	+ 1 = 0
144.	— 0,105	— 0,106	— 0,585	— 0,800	+ 1,474	+ 0,831	+ 6,755	+ 0,507	— 33,28	+ 1 = 0
145.	+ 0,180	+ 0,180	— 0,990	+ 0,035	+ 1,883	— 0,142	+ 6,865	+ 0,506	— 1,13	+ 1 = 0
146.	+ 0,145	+ 0,145	— 0,990	+ 0,040	+ 1,913	— 0,858	+ 6,866	— 0,148	— 0,80	+ 1 = 0
147.	+ 0,165	+ 0,160	+ 0,330	+ 0,930	+ 1,313	— 0,400	+ 7,020	+ 0,397	+ 38,03	+ 1 = 0
148.	+ 0,205	+ 0,203	+ 0,145	— 0,980	+ 0,374	— 0,932	+ 7,119	— 0,034	— 38,65	+ 1 = 0
149.	+ 0,165	+ 0,163	+ 0,135	— 0,980	+ 0,391	— 0,932	+ 7,119	— 0,034	— 38,65	+ 1 = 0
150.	— 0,140	— 0,142	+ 0,135	— 0,980	+ 0,238	— 0,841	+ 7,119	— 0,025	— 38,72	+ 1 = 0
151.	+ 0,100	+ 0,098	+ 0,125	— 0,980	+ 0,105	— 0,707	+ 7,119	— 0,016	— 38,79	+ 1 = 0
152.	+ 0,135	+ 0,133	+ 0,125	— 0,980	+ 0,104	— 0,707	+ 7,119	— 0,016	— 38,79	+ 1 = 0
153.	+ 0,290	+ 0,288	+ 0,105	— 0,985	— 0,122	— 0,173	+ 7,119	+ 0,010	— 39,10	+ 1 = 0
154.	+ 0,300	+ 0,298	+ 0,125	— 0,980	+ 0,105	— 0,701	+ 7,119	— 0,016	— 38,79	+ 1 = 0
155.	+ 0,320	+ 0,318	+ 0,115	— 0,980	— 0,002	— 0,554	+ 7,119	— 0,007	— 38,99	+ 1 = 0
156.	+ 0,070	+ 0,068	+ 0,115 v	— 0,985 ϖ	+ 0,105 ξ	— 0,701 η	+ 7,119 x	— 0,016 y	— 38,79 w	+ 1 z = 0

TABLEAU II.

Observations de Gylden. — Équations de condition combinées à six mois d'intervalle par voie d'addition.

	n'	c'	e'	f'	g'		Poids.
1.	+ 0,060	+ 2,768 ξ	+ 0,262 η	— 7,158 x	+ 1,018 f	+ 2 z = 0	1,332
2.	— 0,119	+ 2,663	— 0,488	+ 2,054	+ 0,100	+ 2 = 0	1,500
3.	— 0,170	+ 0,632	+ 0,561	— 3,287	— 0,075	+ 2 = 0	1,750
4.	— 0,059	+ 1,169	+ 1,373	— 2,947	+ 0,400	+ 2 = 0	1,666
5.	+ 0,081	+ 1,541	+ 1,659	— 2,938	+ 0,417	+ 2 = 0	1,666
6.	+ 0,059	+ 2,285	+ 1,502	— 2,925	+ 0,484	+ 2 = 0	1,600
7.	+ 0,051	+ 2,423	+ 1,492	— 1,838	+ 0,482	+ 2 = 0	1,714
8.	— 0,039	+ 2,568	+ 1,387	— 1,836	+ 0,488	+ 2 = 0	1,714
9.	— 0,155	+ 2,724	+ 0,849	— 0,105	+ 0,534	+ 2 = 0	1,778
10.	— 0,132	+ 1,806	— 0,640	— 0,168	— 0,334	+ 2 = 0	1,600
11.	— 0,010	+ 2,012	+ 0,718	— 0,100	— 0,463	+ 2 = 0	1,666
12.	— 0,014	+ 1,571	+ 0,492	+ 1,537	— 0,411	+ 2 = 0	1,714
13.	+ 0,076	+ 1,686	+ 0,474	+ 1,541	— 0,265	+ 2 = 0	1,750
14.	+ 0,008	+ 1,737	+ 0,651	— 0,111	— 0,487	+ 2 = 0	1,666
15.	— 0,197	+ 1,447	+ 0,816	+ 0,034	+ 0,128	+ 2 = 0	1,876
16.	— 0,007	+ 1,611	+ 0,756	+ 0,036	+ 0,137	+ 2 = 0	1,876
17.	— 0,011	+ 1,941	+ 0,531	+ 0,046	+ 0,164	+ 2 = 0	1,876
18.	— 0,096	+ 1,924	+ 0,108	+ 0,060	+ 0,206	+ 2 = 0	1,890
19.	+ 0,036	+ 0,601	+ 1,771	— 0,108	+ 0,393	+ 2 = 0	1,666
20.	— 0,128	+ 0,586	+ 0,826	+ 0,112	+ 0,345	+ 2 = 0	1,800
21.	— 0,004	+ 0,773	+ 2,009	— 3,096	+ 0,424	+ 2 = 0	1,666
22.	— 0,030	+ 1,921	+ 0,910	+ 0,804	+ 0,466	+ 2 = 0	1,858
23.	— 0,310	+ 2,192	+ 0,103	+ 0,816	+ 0,542	+ 2 = 0	1,858
24.	— 0,350	+ 1,902	— 0,007	+ 0,220	+ 0,549	+ 2 = 0	1,858
25.	— 0,191	+ 2,119	+ 0,236	+ 1,461	+ 0,553	+ 2 = 0	1,666
26.	— 0,169	— 0,405	+ 0,713	+ 1,178	— 0,031	+ 2 = 0	1,000
27.	— 0,239	+ 0,588	+ 0,609	+ 1,229	— 0,054	+ 2 = 0	1,332
28.	+ 0,101	+ 1,132	+ 0,471	+ 0,162	— 0,006	+ 2 = 0	1,714
29.	+ 0,051	+ 1,172	+ 0,340	+ 0,165	+ 0,002	+ 2 = 0	1,714
30.	+ 0,121	+ 1,139	+ 0,092	+ 0,171	+ 0,019	+ 2 = 0	1,714
31.	+ 0,135	+ 0,521	— 0,048	+ 0,235	+ 0,056	+ 2 = 0	1,846
32.	— 0,225	+ 0,818	+ 0,341	+ 0,239	+ 0,073	+ 2 = 0	1,846
33.	+ 0,182	+ 1,110	+ 1,201	— 0,920	— 0,121	+ 2 = 0	1,778
34.	— 0,066	+ 1,824	— 0,387	+ 2,345	+ 0,166	+ 2 = 0	1,876
35.	— 0,296	+ 1,678	— 0,448	+ 2,347	+ 0,175	+ 2 = 0	1,876
36.	+ 0,192	+ 1,210	— 0,413	+ 2,410	+ 0,171	+ 2 = 0	1,900
37.	— 0,038	+ 1,047	— 0,351	+ 2,412	+ 0,179	+ 2 = 0	1,900
38.	+ 0,043	+ 0,700	— 0,158	+ 2,655	+ 0,179	+ 2 = 0	1,876
39.	+ 0,160	+ 0,504	+ 0,183	+ 2,661	+ 0,193	+ 2 = 0	1,916
40.	— 0,064	+ 0,134	+ 0,421	+ 1,420	+ 0,203	+ 2 = 0	1,900
41.	+ 0,101	+ 0,507	+ 0,925	+ 2,681	+ 0,227	+ 2 = 0	1,912
42.	+ 0,020	+ 0,792	+ 1,102	+ 4,424	+ 0,237	+ 2 = 0	1,904
43.	+ 0,045	+ 0,892	+ 1,197	+ 4,428	+ 0,344	+ 2 = 0	1,904
44.	— 0,178	+ 0,359	+ 1,206	+ 3,672	+ 0,304	+ 2 = 0	1,894
45.	— 0,035	+ 1,463	+ 1,163	+ 4,442	+ 0,088	+ 2 = 0	1,900
46.	— 0,071	+ 1,551 ξ	+ 0,704 η	+ 2,904 x	+ 0,020 f	+ 2 z = 0	1,500

	n'	c'	e'	f'	g'		Poids.
47.	− 0,046	+ 1,411 ξ	+ 0,785 η	+ 2,908 x	+ 0,024 f	+ 2 z = 0	1,500
48.	− 0,186	+ 1,241	+ 0,890	+ 2,911	+ 0,028	+ 2 = 0	1,500
49.	− 0,244	+ 1,202	+ 1,026	+ 2,915	+ 0,032	+ 2 = 0	1,500
50.	− 0,211	+ 1,411	+ 0,784	+ 2,908	+ 0,024	+ 2 = 0	1,500
51.	− 0,051	+ 1,241	+ 0,890	+ 2,911	+ 0,028	+ 2 = 0	1,500
52.	− 0,026	+ 1,202	+ 1,026	+ 2,915	+ 0,031	+ 2 = 0	1,500
53.	− 0,171	+ 1,155	+ 1,185	+ 2,917	+ 0,037	+ 2 = 0	1,500
54.	− 0,081	+ 1,153	+ 1,215	+ 2,917	+ 0,037	+ 2 = 0	1,500
55.	+ 0,017	+ 1,375	+ 0,999	+ 3,990	+ 0,201	+ 2 = 0	1,666
56.	− 0,158	+ 2,322	+ 1,696	+ 4,008	+ 0,234	+ 2 = 0	1,666
57.	− 0,137	+ 2,136	− 0,074	+ 3,895	+ 0,053	+ 2 = 0	1,000
58.	− 0,137	+ 2,004	+ 0,035	+ 3,899	+ 0,057	+ 2 = 0	1,000
59.	+ 0,099	+ 0,997	− 0,266	+ 5,288	− 0,131	+ 2 = 0	1,332
60.	+ 0,242	+ 0,555	− 0,201	+ 6,644	+ 0,053	+ 2 = 0	1,750
61.	+ 0,082	+ 0,553	− 0,099	+ 6,436	+ 0,049	+ 2 = 0	1,750
62.	+ 0,166	+ 1,717	− 0,855	+ 6,439	+ 0,121	+ 2 = 0	1,882
63.	+ 0,189	+ 1,337	− 1,104	+ 6,445	+ 0,112	+ 2 = 0	1,882
64.	+ 0,231	+ 1,292	− 1,103	+ 6,445	+ 0,112	+ 2 = 0	1,882
65.	+ 0,246	+ 1,205	− 1,010	+ 6,451	+ 0,104	+ 2 = 0	1,882
66.	+ 0,106	+ 0,787	− 0,799	+ 6,460	+ 0,091	+ 2 = 0	1,882
67.	+ 0,026	+ 0,777	+ 0,021	+ 6,476	+ 0,069	+ 2 = 0	1,882
68.	+ 0,065	+ 1,460	+ 0,156	+ 7,724	− 0,183	+ 2 = 0	1,000
69.	− 0,037	+ 2,284	− 0,162	+ 7,827	− 0,111	+ 2 = 0	1,332
70.	+ 0,275	+ 0,086	− 0,489	+ 7,119	+ 0,144	+ 2 = 0	1,714
71.	+ 0,221	+ 0,058	− 0,563	+ 7,149	+ 0,009	+ 2 = 0	1,666
72.	− 0,042	+ 1,923	− 0,013	+ 8,790	+ 0,137	+ 2 = 0	1,866
73.	− 0,017	+ 2,021	− 0,145	+ 8,794	+ 0,133	+ 2 = 0	1,866
74.	− 0,037	+ 2,078	− 0,315	+ 8,796	+ 0,129	+ 2 = 0	1,866
75.	− 0,102	+ 2,091	− 0,498	+ 8,800	+ 0,124	+ 2 = 0	1,866
76.	− 0,051	+ 1,078	+ 0,780	+ 9,372	+ 0,274	+ 2 = 0	1,500
77.	− 0,011	+ 1,244	+ 0,885	+ 9,376	+ 0,270	+ 2 = 0	1,500
78.	+ 0,022	+ 2,019	− 0,066	+ 9,643	+ 0,281	+ 2 = 0	1,600
79.	+ 0,248	+ 0,581	− 0,469	+ 10,897	+ 0,100	+ 2 = 0	1,846
80.	+ 0,065	+ 0,571	− 0,716	+ 10,082	+ 0,122	+ 2 = 0	1,500
81.	+ 0,247	+ 0,350	− 0,481	+ 10,102	+ 0,128	+ 2 = 0	1,332
82.	+ 0,097	+ 0,156	− 0,050	+ 10,109	+ 0,127	+ 2 = 0	1,000
83.	+ 0,147	+ 0,284	− 0,371	+ 10,104	+ 0,123	+ 2 = 0	1,332
84.	− 0,005	+ 0,178	+ 0,063	+ 10,111	+ 0,123	+ 2 = 0	1,000
85.	− 0,163	+ 0,912	+ 0,819	+ 11,434	+ 0,251	+ 2 = 0	1,500
86.	− 0,215	+ 1,160	+ 1,801	+ 11,443	+ 0,255	+ 2 = 0	1,000
87.	+ 0,270	+ 2,254	+ 0,476	+ 11,597	+ 0,076	+ 2 = 0	1,500
88.	+ 0,100	+ 2,176	+ 0,321	+ 11,600	+ 0,090	+ 2 = 0	1,500
89.	+ 0,040	+ 1,921	+ 0,071	+ 11,601	+ 0,102	+ 2 = 0	1,500
90.	+ 0,175	+ 1,554	− 0,029	+ 11,605	+ 0,119	+ 2 = 0	1,500
91.	+ 0,147	+ 1,750	− 0,205	+ 11,608	+ 0,133	+ 2 = 0	1,600
92.	+ 0,097	+ 1,570	− 0,172	+ 11,613	+ 0,141	+ 2 = 0	1,600
93.	+ 0,222	+ 1,272	+ 0,045	+ 11,617	+ 0,160	+ 2 = 0	1,600
94.	+ 0,012	+ 1,102 ξ	+ 0,423 η	+ 11,621 x	+ 0,177 f	+ 2 z = 0	1,600

CHAPITRE III.

ÉTABLISSEMENT DES FORMULES COMPLÈTES DE RÉDUCTION.

Dans ce chapitre, je démontrerai les formules qui se rencontrent dans les précédents et les suivants (*).

Les formules de réduction dont on fait usage ne sont plus en rapport avec la précision des observations modernes.

C'est pourquoi il est nécessaire d'en calculer de plus rigoureuses.

La première recherche dont je m'occuperai sera celle de la précession et de la nutation, tant en obliquité et en longitude qu'en ascension droite et en déclinaison, et particulièrement des termes du second ordre, dont la plupart ont été négligés;

Ensuite celle de l'aberration, tant annuelle et diurne que systématique, y compris les termes du second ordre.

Enfin celle des termes qui proviennent de la combinaison de l'aberration et de la nutation avec la réfraction.

(*) Les nombreuses discussions auxquelles a donné lieu, depuis l'impression (en 1891) de notre Chapitre I, la question de la variation des latitudes, qui était à peine ouverte alors, nous a engagé à établir, d'une manière complète, les formules de réduction dont l'astronomie moderne doit se servir.

Indépendamment d'un grand nombre de termes du second ordre, tous les astronomes négligent, en effet, avec Laplace, la nutation diurne et même la nutation eulérienne. Oppolzer croit, à tort, avoir éliminé celle-ci de ses formules en prenant pour axe de référence l'axe instantané de rotation. Nous nous bornerons ici à constater, qu'au fond, ses formules sont identiques à celles de Peters, rapportées au pôle d'inertie, et que sa définition de l'heure, rapportée à un méridien *fixe*, non au méridien *instantané*, est en contradiction flagrante avec sa définition de l'ascension droite. Ses formules n'atteignent donc pas le but qu'il s'était proposé, et il eût dû dire, avec un géomètre plus clairvoyant : la nutation eulérienne est une quantité pratiquement insensible; nous la négligerons. (Voir, pour plus de détails, la Notice : « De la supériorité de la méthode de Laplace sur celle d'Oppolzer quant à la correction du calcul des coordonnées des étoiles et à la précision des observations, » extraite de l'*Annuaire de l'Observatoire royal pour 1896*.)

§ 1. — *Formules de la précession et de la nutation.*

1. J'entrerai directement en matière, et j'emprunterai aux théories connues les expressions des moments P_1, Q_1, R_1 de la force perturbatrice exercée par l'astre attirant (Soleil ou Lune). Ces expressions sont :

$$(1) \ldots \quad \begin{cases} P_1 = 3m_1^2 b \dfrac{yz}{R^2}\left(\dfrac{D}{R}\right)^3, \\ Q_1 = -3m_1^2 a \dfrac{zx}{R^2}\left(\dfrac{D}{R}\right)^3, \\ R_1 = 3m_1^2 c \dfrac{xy}{R^2}\left(\dfrac{D}{R}\right)^3, \end{cases}$$

que j'écrirai :

$$P_1 = -bnq$$
$$Q_1 = anp$$
$$R_1 = -cnr,$$

en posant

$$(1') \ldots \quad \begin{cases} p = h \dfrac{4xz}{R^2}\left(\dfrac{D}{R}\right)^3, \\ q = h \dfrac{4yz}{R^2}\left(\dfrac{D}{R}\right)^3, \\ r = h \dfrac{4xy}{R^2}\left(\dfrac{D}{R}\right)^3, \\ h = -\dfrac{3}{4}\dfrac{m_1^2}{n}; \end{cases}$$

de sorte que les équations d'Euler se mettront sous la forme :

$$(2) \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{b}{A} n(m+q), \\ \dfrac{dm}{dt} = \dfrac{a}{B} n(l+p), \\ \dfrac{dn}{dt} = \dfrac{c}{C}(lm+nr). \end{cases}$$

Dans ces expressions, les notations adoptées sont les suivantes : l, m, n sont les vitesses angulaires autour des axes principaux de la Terre ; $A < B < C$, les moments d'inertie de la Terre autour des mêmes axes ;

$$a = C - A, \qquad b = C - B, \qquad c = B - A;$$

n, la vitesse autour de l'axe des z, supposée provisoirement constante,
m_1, le moyen mouvement du Soleil ;

x, y, z, les coordonnées du centre de l'astre attirant, Soleil ou Lune, rapportées aux axes principaux de la Terre.

R et D, la distance et la moyenne distance du centre de l'astre attirant au centre de la Terre.

Dans les termes lunaires, h devra être remplacé par fh, f désignant le rapport des actions de la Lune et du Soleil.

2. J'ai démontré (*) que, si l'expression de p est mise sous la forme

$$p = \sum u \sin(v_1 t \pm \varphi) = \sum u \sin(v_2 \pm 1)\varphi, \quad \left(v_2 = \frac{v_1}{n}\right) \text{ (**)},$$

d'où il résulte

$$q = \sum \pm u \cos(v_2 \pm 1)\varphi,$$

expressions dans lesquelles u, v_1, v_2, sont des constantes données, et φ l'angle que font entre elles les traces du premier méridien et du plan fixe sur l'équateur, les intégrales des deux premières équations (2) sont, dans l'hypothèse $n =$ *constante* :

$$(3) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} l &= \gamma \sqrt{\frac{b}{A}} \cos(n't + \beta_1) - \frac{b}{A} \sum u \frac{1 - \frac{a}{B} \pm v_2}{(1 \pm v_2)^2 - \frac{ab}{AB}} \sin(v_1 t \pm \varphi), \\ m &= \gamma \sqrt{\frac{a}{B}} \sin(n't + \beta_1) \mp \frac{a}{B} \sum u \frac{1 - \frac{b}{A} \pm v_2}{(1 \pm v_2)^2 - \frac{ab}{AB}} \cos(v_1 t \pm \varphi), \end{aligned} \right.$$

expressions dans lesquelles n' représente $n\frac{ab}{AB}$, γ et β_1 les constantes arbitraires; les signes supérieurs vont ensemble dans la seconde équation, de même que les inférieurs.

3. Si l'on porte ces expressions dans celles de la variation d'obliquité $d\theta$ et du déplacement *rétrograde* $d\psi$ de l'équinoxe sur l'écliptique fixe, données par

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -l \cos\varphi + m \sin\varphi, \\ \sin\theta \frac{d\psi}{dt} &= \quad l \sin\varphi + m \cos\varphi, \end{aligned}$$

(*) *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde.* Bruxelles, Hayez, 1884.

(**) En toute rigueur, n devrait être augmenté, par le fait de la précession, d'un quart de millionième de sa valeur, quantité inappréciable dans les calculs numériques que nous aurons à effectuer.

et qu'on fasse

$$(3^{bis}) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{2}\left(\frac{a}{B}+\frac{b}{A}\right)=\mu, & \frac{1}{2}\left(\frac{a}{B}-\frac{b}{A}\right)=\nu, & \frac{ab}{AB}=\varpi \\ \frac{1}{2}\gamma\left(\sqrt{\frac{a}{B}}+\sqrt{\frac{b}{A}}\right)=\mu_1, & \frac{1}{2}\gamma\left(\sqrt{\frac{a}{B}}-\sqrt{\frac{b}{A}}\right)=\nu_1, & \frac{n'}{n}=\iota', \end{array} \right.$$

on aura d'abord, pour la partie de l'intégrale qui renferme les constantes arbitraires, en admettant que $\varphi = n_1 t$, comme on le verra ci-après, et en posant $\frac{n}{n_1}\iota' = \iota$:

$$(4) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt} = -\mu_1 \cos[(1+\iota)\varphi+\beta_1] - \nu_1 \quad \cos[(-1+\iota)\varphi+\beta_1], \\ \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} = \quad \mu_1 \sin[(1+\iota)\varphi+\beta_1] - \nu_1 \quad \sin[(-1+\iota)\varphi+\beta_1], \end{array} \right.$$

ensuite, pour le cas des *signes supérieurs* dans les équations (3) :

$$(5). \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt} = \quad \mu \sum u(1+v_2') \sin v_1 t - \nu \sum u(1+v_2'') \sin(v_1 t + 2\varphi) \\ \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} = -\mu \sum u(1+v_2') \cos v_1 t - \nu \sum u(1+v_2'') \cos(v_1 t + 2\varphi) \end{array} \right.$$

et, pour le cas des *signes inférieurs* :

$$(5^{bis}) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt} = \mu \sum u(1-v_2') \sin v_1 t - \nu \sum u(1-v_2'') \sin(v_1 t - 2\varphi) \\ \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} = \mu \sum u(1-v_2') \cos v_1 t + \nu \sum u(1-v_2'') \cos(v_1 t - 2\varphi) \end{array} \right.$$

expressions dans lesquelles on a posé symboliquement, quel que soit le signe de v_2 :

$$\frac{1+v_2-\frac{\varpi}{\mu}}{(1+v_2)^2-\varpi} = 1+v_2'; \qquad \frac{1+v_2}{(1+v_2)^2-\varpi} = 1+v_2''.$$

La première partie des expressions (5) et (5^{bis}) se rapporte à la nutation BRADLÉENNE, la seconde à la nutation DIURNE. Celle-ci serait absolument insignifiante pour la *Terre entière;* on verra, en effet, que les rapports des moments d'inertie A, B, C, qui se déduiront des valeurs numériques connues des constantes de la précession et de la nutation, conduisent à une valeur excessivement faible de ν.

Si donc la nutation diurne a un coefficient sensible, comme nous l'avons prouvé, les moments qui entrent dans l'expression de celui-ci

$$(5') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a}{B}-\frac{b}{A}\right)=\frac{B-A}{2}\frac{B+A-C}{AB},$$

ne peuvent être relatifs qu'à l'écorce solide du globe.

4. Dans l'expression des termes de la nutation bradléenne, comme B — A est certainement très petit, nous pourrons faire ϖ, ou $\frac{ab}{AB}$, égal à μ^2 ou $\frac{1}{4}\left(\frac{a}{B}+\frac{b}{A}\right)^2$; alors $1+v_2'$ se réduira à $\frac{1}{1+\mu+v_2}$. Dans celle de la nutation diurne, comme ν est très petit, nous ferons simplement $1+v_2''$ égal à $\frac{1}{1+v_2}$. Les expressions (5) prennent ainsi la forme plus simple :

$$(6) \quad \ldots \ldots \quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \mu\sum\frac{u}{1+\mu+v_2}\sin v_1t-\nu\sum\frac{u}{1+v_2}\sin(v_1t+2\varphi) \\ \sin\theta\frac{d\psi}{dt} &= -\mu\sum\frac{u}{1+\mu+v_2}\cos v_1t-\nu\sum\frac{u}{1+v_2}\cos(v_1t+2\varphi) \end{aligned}\right.$$

pour le cas des *signes supérieurs*, et

$$(6^{\text{bis}}) \quad \ldots \ldots \quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \mu\sum\frac{u}{1+\mu-v_2}\sin v_1t-\nu\sum\frac{u}{1-v_2}\sin(v_1t-2\varphi) \\ \sin\theta\frac{d\psi}{dt} &= \mu\sum\frac{u}{1+\mu-v_2}\cos v_1t+\nu\sum\frac{u}{1-v_2}\cos(v_1t-2\varphi) \end{aligned}\right.$$

pour le cas des *signes inférieurs*.

Si $v_1=0$, c'est-à-dire s'il existe un terme de la fonction perturbatrice qui soit de la forme $u_0\sin\varphi$, les formules (6) se réduisent à

$$(6^{\text{ter}}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= 0-\nu u_0\sin 2\varphi \\ \sin\theta\frac{d\psi}{dt} &= -\frac{\mu}{1+\mu}u_0-\nu u_0\cos 2\varphi. \end{aligned}\right.$$

Les géomètres ont tous négligé v_2 vis-à-vis de l'unité, à l'exemple de Laplace. On peut le faire, sans erreur bien sensible, dans le calcul de tous les termes, à l'exception toutefois de ceux qui ont pour argument la longitude (simple, double ou triple) de la Lune, ou bien la simple longitude du nœud, ces derniers donnant la valeur de la constante de la nutation, dont on doit déterminer l'expression avec la dernière rigueur; μ c'est-à-dire $\frac{\mu}{1+\mu}$ ou $\frac{2C-A-B}{2C}$ deviendra alors facteur commun de chaque terme, hormis ces derniers; c'est ce facteur seul qui se rencontre dans toutes les théories, même les plus modernes.

Recherche de la fonction perturbatrice provenant de l'action du Soleil.

5. Il s'agit maintenant de mettre p ou $h\frac{4xz}{R^2}\left(\frac{D}{R}\right)^3$ sous la forme $\sum u \sin(v_1 t \pm \varphi)$. Afin d'abréger l'écriture, je désignerai par $(M)_1$ et $(M)_2$ les fonctions

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 + c') \sin(M - \varphi) + (1 - c') \sin(M + \varphi) \\ (c' + c'') \sin(M - \varphi) + (c' - c'') \sin(M + \varphi) \end{array} \right.$$

par $(M)'_1$ la fonction

$$(8) \quad (1 + c') \cos(M - \varphi) + (1 - c') \cos(M + \varphi)$$

et ultérieurement par $[M]$ la fonction

$$(9) \quad \sin(M - \varphi) - \sin(M + \varphi);$$

Il est facile de voir que l'on a, pour le Soleil :

$$\frac{z}{R} = s' \sin\lambda; \quad \frac{2x}{R} = (\lambda)'_1,$$

λ désignant la longitude vraie de l'astre, s' et c' le sinus et le cosinus de l'obliquité de l'écliptique considérée comme fixe, s'' et c'' ultérieurement ceux du double de cet angle ; φ l'angle que la trace du premier méridien sur l'équateur, ou l'axe du moment A, fait avec l'intersection de ce plan et de l'écliptique, angle compté dans le sens du mouvement de rotation.

En considérant l'écliptique de l'époque comme fixe, nous faisons naturellement abstraction des termes séculaires provenant de la variation de ce plan.

6. L'expression $\frac{4xz}{R^2}$, que nous écrirons

$$(10) \quad \frac{4xz}{R^2} = s'' \sin\varphi + s'(2\lambda)_1$$

doit être multipliée par $\left(\frac{D}{R}\right)^3$.

Or, dans le mouvement elliptique, si v représente l'anomalie vraie, on a

$$\frac{D}{R} = \frac{1 + e \cos v}{1 - e^2},$$

De là, on tire :

$$\left(\frac{D}{R}\right)^3 = 1 + \frac{9}{2}e^2 + \frac{21}{2}e^4 + 5e\left(1 + \frac{13}{4}e^2\right)\cos v + \frac{3}{2}e^2(1 + 3e^2)\cos 2v + \frac{1}{4}e^3\cos 3v,$$

puis, d'abord

$$(11) \quad \sin\varphi\left(\frac{D}{R}\right)^3 = \left(1 + \frac{9}{2}e^2 + \frac{21}{2}e^4\right)\sin\varphi - \frac{3}{2}e\left(1 + \frac{13}{4}e^2\right)[v] - \frac{3}{4}e^2(1 + 3e^2)[2v] - \frac{1}{8}e^3[3v];$$

ensuite, puisqu'on pourra appliquer à la fonction $(2\lambda - L)_1$ les résultats mêmes que l'on trouverait pour sin $(2\lambda + L)$:

$$(12) \ldots \left\{\begin{aligned} &(2\lambda)_1\left(\frac{D}{R}\right)^3 = \left(1 + \frac{9}{2}e^2 + \frac{21}{2}e^4\right)(2\lambda)_1 + \frac{5}{2}e\left(1 + \frac{13}{4}e^2\right)\Big\{(3\lambda - \Gamma)_1 + (\lambda + \Gamma)_1\Big\} \\ &\quad + \frac{3}{4}e^2(1 + 3e^2)\Big\{(2\Gamma)_1 + (4\lambda - 2\Gamma)_1\Big\} + \frac{1}{8}e^3\Big\{(-\lambda + 3\Gamma)_1 + (5\lambda - 3\Gamma)_1\Big\}\end{aligned}\right.$$

7. Nous avons à remplacer, dans cette expression, la longitude vraie λ du Soleil, en fonction de sa longitude moyenne.

Les tables de Le Verrier donnent, u désignant l'anomalie moyenne du Soleil, $\odot$, ☾ et ☊ les longitudes moyennes du Soleil, de la Lune et du nœud (*) :

$$\lambda = \odot + e_1\sin u + e_2\sin 2u + e_3\sin 3u + e_4\sin 4u - e'_2\sin ☊ - e'_3\sin 2\odot + e''_3\sin(☾ - \odot) = \odot + \Sigma,$$

les coefficients étant exprimés en secondes d'arc, et également, quant aux termes indépendants des perturbations, en fonction des puissances de l'excentricité, par les formules :

$$e_1 = 2e - \frac{1}{4}e^3 = 6918'',3$$

$$e_2 = \frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 = \quad 72'',5$$

$$e'_2 = 17'',2$$

$$e_3 = \frac{13}{12}e^3 = 1'',1$$

$$e'_3 = 1'',3$$

$$e''_3 = 6'',5$$

$$e_4 = \frac{103}{96}e^4 = 0'',02.$$

(*) La petitesse des coefficients e'_3 et e''_3 permet de remplacer les arguments λ et λ' (longitudes vraies du Soleil et de la Lune) par les arguments $\odot$ et ☾ (longitudes moyennes).

Si l'on écrit, comme ci-dessus, $\lambda = \odot + \Sigma$, on aura par la formule de Taylor :

$$\sin(l\lambda + L) = \sin(l\odot + L) + \cos(l\odot + L).\, l\sum - \sin(l\odot + L).\frac{l^2\sum^2}{2}$$

$$- \cos(l\odot + L)\frac{l^3\sum^3}{6} + \sin(l\odot + L)\frac{l^4\sum^4}{24}$$

$$= \sin(l\odot + L)\left\{1 - \frac{l^2}{2}\sum^2 + \frac{l^4}{24}\sum^4\right\}$$

$$+ \cos(l\odot + L)\left\{\qquad l\sum - \frac{l^3}{6}\sum^3\right\}.$$

Le développement des puissances de $\sum$ donnera, *jusqu'aux termes du 4me ordre :*

$$\sum^2 = E_2 + E_3\cos u - E_2'\cos 2u - E_3\cos 3u - E_4\cos 4u$$
$$+ E_3'\{\cos(u + \Omega) - \cos(u - \Omega)\} - E_4'\cos 2\Omega$$
$$+ E_4''\{\cos(2u + \Omega - \cos(2u - \Omega)\} + E_4'''\{\cos(2\odot + u) - \cos(2\odot - u)\}$$
$$+ E_4^{\text{IV}}\{\cos(u - ☾ + \odot) - \cos(u + ☾ - \odot)\}.$$

$$\sum^3 = F_3\sin u + F_4\sin 2u - F_3'\sin 3u - F_4'\sin 4u$$
$$+ F_4''\{\sin(2u + \Omega) - \sin(2u - \Omega)\} - F_4'''\sin\Omega.$$

$$\sum^4 = G_4 - G_4'\cos 2u + G_4''\cos 4u.$$

Les expressions et les valeurs numériques, en secondes d'arc, des coefficients E, F, G, sont

$$E_2 = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_2'^2) = 2e^2 + \frac{17}{16}e^4 + e_2'^2 = 116''1$$

$$E_2' = \frac{1}{2}e_1^2 - e_1e_3 = 2e^2 - \frac{8}{3}e^4 = 116''1$$

$$E_3 = e_1e_2 = \frac{5}{2}e^3 = 2''5$$

$$E_3' = e_1e_2' = 2e \times e_2' = 0''6$$

$$E_4 = \frac{1}{2}e_2^2 + e_1e_3 = \frac{283}{96}e^4 = 0''0$$

$$E_4' = \frac{1}{2}e_2'^2 = 0''0$$

$$E_4'' = e_2e_2' = \frac{5}{4}e^2 \times e_2' = 0''0$$

$$E_4''' = e_1e_3' = 2e \times e_3' = 0''0$$

$$E_4^{\text{IV}} = e_1e_3'' = 2e \times e_3'' = 0''2$$

$$
\begin{aligned}
F_3 &= \frac{3}{4} e_1^3 = 6e^3 = 5''8 \\
F'_3 &= \frac{1}{4} e_1^3 = 2e^3 = 1''9 \\
F_4 &= \frac{3}{2} e_1^2 e_2 = \frac{15}{2} e^4 = 0''1 \\
F'_4 &= \frac{3}{4} e_1^2 e_2 = \frac{15}{4} e^4 = 0''0 \\
F''_4 &= \frac{3}{4} e_1^2 e'_2 = 3e^2 \times e'_2 = 0''0 \\
F'''_4 &= \frac{3}{2} e_1^2 e'_2 = 6e^2 \times e'_2 = 0''0 \\
G_4 &= \frac{3}{8} e_1^4 = 6e^4 = 0''1 \\
G'_4 &= \frac{1}{2} e_1^4 = 8e^4 = 0''1 \\
G''_4 &= \frac{1}{8} e_1^4 = 2e^4 = 0''0.
\end{aligned}
$$

8. Si l'on porte les expressions de $\sum, \sum^2, \sum^3, \sum^4$, dans celle de $\sin(l\lambda + L)$, on verra que celle-ci se réduit à une somme de sinus, et l'on en conclura qu'on peut appliquer à $(l\lambda)_1$, les résultats trouvés.

Dans ceux-ci, nous nous bornerons aux termes du second ordre, quant à ceux qui renferment l'argument $\odot$; nous ne conserverons ceux du 3^e ordre et du 4^e ordre en $\odot$ que pour autant qu'ils soient semblables à des termes antérieurs du 2^e ordre; mais nous conserverons les termes du 4^e ordre indépendants de l'argument $\odot$.

Cela posé, nous pourrons écrire

$$
\begin{aligned}
(2\lambda)_1 = & \left\{ 1 - 2E_2 + \frac{2}{3} G_4 \right\} (2\odot)_1 + \left\{ - e_1 - E_3 + \frac{2}{3} F_3 \right\} (\odot + \Gamma)_1 \\
& + \left\{ e_1 - E_3 - \frac{2}{3} F_3 \right\} (3\odot - \Gamma)_1 + \left\{ e_2 + E'_2 - \frac{2}{3} F_4 - \frac{1}{3} G'_4 \right\} (4\odot - 2\Gamma)_1 \\
& + \left\{ - e'_2 + \frac{2}{3} F'''_4 \right\} \left\{ (2\odot + \Omega)_1 - (2\odot - \Omega)_1 \right\} + E'''_4 \left\{ (\odot - \Gamma)_1 - (-\odot + \Gamma)_1 \right\} \\
& + \left\{ E''_4 - \frac{2}{3} F''_4 \right\} \left\{ (2\Gamma + \Omega)_1 - (2\Gamma - \Omega)_1 \right\} \\
& + \left\{ - e_2 + E'_2 + \frac{2}{3} F_4 - \frac{1}{3} G'_4 \right\} (2\Gamma)_1 + e'_3(0)_1 .
\end{aligned}
$$

$$(3\lambda - \Gamma)_1 = \left\{ -\frac{5}{2} e_1 - \frac{9}{4} E_3 + \frac{9}{4} F_3 \right\} (2\odot)_1 + \left\{ -\frac{5}{2} e_2 + \frac{9}{4} E'_2 \right\} (\odot + \Gamma)_1$$

$$+ \left\{ 1 - \frac{9}{2} E_2 \right\} (3\odot - \Gamma)_1 + \left\{ \frac{5}{2} e_1 - \frac{9}{4} E_3 - \frac{9}{4} F_3 \right\} (4\odot - 2\Gamma)_1$$

$$+ \frac{9}{4} E'_3 \left\{ (2\odot + \Omega)_1 - (2\odot - \Omega)_1 \right\} + \frac{5}{2} e'_3 (\odot - \Gamma)_1$$

$$+ \left\{ -\frac{5}{2} e_3 + \frac{9}{4} E_3 - \frac{9}{4} F'_3 \right\} (2\Gamma)_1$$

$$(\lambda + \Gamma)_1 = \left\{ \frac{1}{2} e_1 - \frac{1}{4} E_3 - \frac{1}{12} F_3 \right\} (2\odot)_1 + \left\{ 1 - \frac{1}{2} E_2 \right\} (\odot + \Gamma)_1$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{4} E'_2 \right\} (3\odot - \Gamma)_1 + \left\{ \frac{1}{2} e_3 + \frac{1}{4} E_3 + \frac{1}{12} F'_3 \right\} (4\odot - 2\Gamma)_1$$

$$- \frac{1}{4} E'_3 \left\{ (2\odot + \Omega)_1 - (2\odot - \Omega)_1 \right\} + \frac{1}{2} e'_3 (-\odot + \Gamma)_1$$

$$+ \frac{1}{4} E'_3 \left\{ (2\Gamma + \Omega)_1 - (2\Gamma - \Omega)_1 \right\} + \left\{ -\frac{1}{2} e_1 - \frac{1}{4} E_3 + \frac{1}{12} F_3 \right\} (2\Gamma)_1$$

$$(4\lambda - 2\Gamma)_1 = \left\{ -2e_2 + 4 E'_2 \right\} (2\odot)_1 + \left\{ 1 - 8E_2 \right\} (4\odot - 2\Gamma)_1$$

$$(-\lambda + 3\Gamma)_1 = -\tfrac{1}{2} e_1 (2\Gamma)_1$$

$$(5\lambda - 3\Gamma)_1 = -\tfrac{5}{2} e_1 (4\odot - 2\Gamma)_1.$$

L'expression (12) deviendra

$$(2\lambda)_1 \left(\frac{D}{R}\right)^3 = \left\{ 1 + \frac{9}{2} e^2 + \frac{21}{2} e^4 - 2E_2 \left(1 + \frac{9}{2} e^2\right) - \frac{3}{2} ee_1 \left(1 + \frac{13}{4} e^2\right) \right.$$

$$\left. + \frac{5}{2} e \left(-\frac{5}{2} E_3 + \frac{13}{6} F_3\right) - \frac{5}{2} e^2 e_2 + 3e^2 E'_2 \right\} (2\odot)_1$$

$$+ \left\{ e_1 \left(1 + \frac{9}{2} e^2\right) + \frac{5}{2} e \left(1 + \frac{13}{4} e^2\right) - E_3 - \frac{2}{3} F_3 + \frac{3}{2} e \left(-\frac{9}{2} E_2 + \frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{4} E'_2\right) \right\} (3\odot - \Gamma)_1$$

$$+ \left\{ -e_1 \left(1 + \frac{9}{2} e^2\right) + \frac{5}{2} e \left(1 + \frac{13}{4} e^2\right) - E_3 + \frac{2}{3} F_3 + \frac{3}{2} e \left(-\frac{5}{2} e_2 + \frac{9}{4} E'_2 - \frac{1}{2} E_2\right) \right\} (\odot + \Gamma)_1$$

$$+ \left\{ \left(1 + \frac{9}{2} e^2\right) (E'_2 + e^2) + \frac{9}{4} ee_1 \left(1 + \frac{13}{4} e^2\right) + \frac{3}{4} e^2 \right\} (4\odot - 2\Gamma)_1$$

$$- \left\{ \left(1 + \frac{9}{2} e^2\right) e'_2 - \frac{2}{3} F'''_4 - 3eE'_3 \right\} \left\{ (2\odot + \Omega)_1 - (2\odot - \Omega)_1 \right\}$$

$$+ \left\{ E'''_4 + \frac{9}{4} ee'_3 \right\} (\odot - \Gamma)_1 + \left\{ - E'''_4 + \frac{3}{4} ee'_3 \right\} (-\odot + \Gamma)_1$$

$$+ \left\{ E''_4 - \frac{2}{3} F''_4 + \frac{3}{8} eE'_3 \right\} \left\{ (2\Gamma + \Omega)_1 - (2\Gamma - \Omega)_1 \right\}$$

$$+ \left\{ \left(1 + \frac{9}{2} e^2\right) (-e_2 + E'_2) + \frac{5}{4} e^2 (1 + 3e^2) - \frac{3}{4} ee_1 \left(1 + \frac{13}{4} e^2\right) \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} F_4 - \frac{1}{3} G'_4 + \frac{5}{2} e \left(-\frac{5}{2} e_3 + 2E_3 - \frac{9}{4} F'_3 + \frac{1}{12} F_3\right) - \frac{1}{16} e_1 e^3 \right\} (2\Gamma)_1$$

$$+ e'_3 (0)_1.$$

Nous écrirons simplement, en négligeant les termes du 4^{me} ordre en $2\Gamma \pm \Omega$,

$$(2\lambda)_1 \left(\frac{D}{R}\right)^3 = -g'(2\Gamma)_1 + e_3'(o)_1 + a_0(2\odot)_1 + a_1(3\odot - \Gamma)_1$$
$$- a_1'(\odot + \Gamma)_1 + a_2(4\odot - 2\Gamma)_1 - a_2' \left\{ (2\odot + \Omega)_1 - (2\odot - \Omega)_1 \right\}$$
$$+ a_4(\odot - \Gamma)_1 + a_4'(-\odot - \Gamma)_1.$$

Les derniers termes sont conservés comme étant semblables à l'un de ceux du développement de l'expression (11), qui sera :

$$\sin\varphi \left(\frac{D}{R}\right)^3 = \left(1 + \frac{9}{2}e^2 + \frac{21}{2}e^4\right)\sin\varphi$$
$$- \frac{3}{2}e\left(1 + \frac{13}{4}e^2\right)\left\{[\odot - \Gamma] + \left\{\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{4}e_1e_2\right\}[2\odot - 2\Gamma] - \left\{\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_1e_2\right\}[o] \right.$$
$$\left. - \left\{\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}e_1^2\right\}[-\odot + \Gamma] - \left\{\frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_1e_2\right\}[-2\odot + 2\Gamma]\right\}$$
$$- \frac{3}{4}e^2(1 + 3e^2)\left\{[2\odot - 2\Gamma] - e_1[\odot - \Gamma] - e_1^2[-2\odot + 2\Gamma] - \left\{e_2 - \frac{1}{2}e_1^2\right\}[o]\right\}$$
$$+ \frac{3}{16}e_1e^3[2\odot - 2\Gamma]$$

ou, en observant que

$$[-M] = [M] \text{ et que } [0] = -2\sin\varphi :$$

$$\sin\varphi\left(\frac{D}{R}\right)^3 = \sin\varphi\left\{1 + \frac{9}{2}e^2 + \frac{21}{2}e^4 - \frac{3}{2}ee_1 - \frac{39}{8}e_1e_3 - \frac{3}{2}ee_1e_2 - \frac{3}{2}e_2e^2 + \frac{3}{4}e^2e_1^2\right\}$$
$$+ [\odot - \Gamma]\left\{-\frac{3}{2}e\left(1 + \frac{13}{4}e_2\right) + \frac{3}{4}ee_2 - \frac{3}{8}ee_1^2 + \frac{3}{4}e_1e^2\right\}$$
$$+ [2\odot - 2\Gamma]\left\{-\frac{3}{4}ee_1\left(1 + \frac{13}{4}e^2\right) + \frac{3}{4}ee_3 + \frac{3}{8}ee_1e_2 - \frac{3}{4}e^2(1 + 3e^2) + \frac{3}{4}e^2e_1^2 + \frac{3}{16}e^3e_1\right\}$$

que nous écrirons simplement

$$\sin\varphi\left(\frac{D}{R}\right)^3 = b_0\sin\varphi - b_1[\odot - \Gamma] - b_2[2\odot - 2\Gamma].$$

9. L'expression complète de $\frac{4xz}{R^2}\left(\frac{D}{R}\right)^3$ relative au Soleil, sera donc, si l'on remplace le symbole $(0)_1$, par $-2c'\sin\varphi$ et $b_0 - e_3'$ par b_0' :

$$\frac{4xz}{R^2}\left(\frac{D}{R}\right)^3 = s''b_0'\sin\varphi - s'g'(2\Gamma)_1 - s''b_1[\odot - \Gamma] - s''b_2[2\odot - 2\Gamma]$$
$$+ s'\left[\begin{array}{c} a_0(2\odot)_1 + a_1(3\odot - \Gamma)_1 - a_1'(\odot + \Gamma)_1 + a_2(4\odot - \Gamma)_1 \\ - a_2'\left\{(2\odot + \Omega)_1 - (2\odot - \Omega)_1\right\} + a_4(\odot - \Gamma)_1 + a_4'(-\odot + \Gamma)_1 \end{array}\right].$$

Parmi les coefficients qui entrent dans cette expression, nous ne calculerons algébriquement que les deux plus importants b'_0 et g' ; et nous donnerons ci-dessous la valeur numérique des autres en secondes d'arc.

On verra que g' est du 4^e ordre $\left(\frac{27}{16}e^4\right)$; mais, puisqu'il multiplie un terme dépendant exclusivement du périgée, on ne doit pas le négliger avant d'en avoir calculé l'importance.

Il en est de même de e'_3, qui entre dans b'_0 et dont on doit tenir compte parce qu'il intervient dans la constante de la précession.

Nous écrirons donc

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{4xz}{R^2}\left(\frac{D}{R}\right)^3 = {} & s''\left\{1 + \frac{9}{2}e^2 + \frac{21}{2}e^4 - \frac{3}{2}ee_1 - \frac{39}{8}e_1e_3 - \frac{3}{2}ee_1e_2 - \frac{3}{2}e_2e^2 + \frac{3}{4}e^2e_1^2 - e'_3\right\}\sin\varphi \\ & - s'\frac{27}{16}e^4(2\Gamma)_1 - s''5195''.2[\odot - \Gamma] - s''130''.6[2\odot - 2\Gamma] \\ & + s'\left\{[206\,119''.6(2\odot)_1 + 12104''.1(3\odot - \Gamma)_1 - 1728''.9(\odot + \Gamma)_1\right. \\ & + \quad 493''.7(4\odot - 2\Gamma)_1 - 17''.2\left\{(2\odot + \Omega)_1 - (2\odot - \Omega)_1\right\} \\ & + \quad \left. 0''.1(\odot - \Gamma)_1 - 0''.025(-\odot + \Gamma)_1]\right\}. \end{aligned} \right.$$

10. Nous avons à rechercher le développement de la même expression relativement à la Lune. Pour cet astre, en désignant par i la tangente de l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique, par Ω la longitude du nœud, on a, en s'arrêtant aux termes en i^2 (*) :

$$\begin{aligned} \frac{2x}{R} = {} & \left(1 - \frac{1}{4}i^2 + \frac{9}{64}i^4\right)(\lambda_1)' - is'\left(1 - \frac{3}{8}i^2\right)[\lambda - \Omega]' \\ & + \frac{i^2}{8}\left(1 - \frac{3i^2}{4}\right)[(3\lambda - 2\Omega)'_1 + (\lambda - 2\Omega)'_1]' \\ \frac{z}{R} = {} & \left(1 - \frac{1}{4}i^2 + \frac{9}{64}i^4\right)s'\sin\lambda + i\left(1 - \frac{3}{8}i^2\right)c'\sin(\lambda - \Omega) \\ & + \frac{1}{8}i^2\left(1 - \frac{3}{4}i^2\right)s'[\sin(3\lambda - 2\Omega) - \sin(\lambda - 2\Omega)]. \end{aligned}$$

Le produit de ces deux expressions donne :

$$\begin{aligned} \frac{4xz}{R^2} = {} & \left(1 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{9}{8}i^4\right)s''\sin\varphi - i\left(1 - \frac{3}{4}i^2\right)(\Omega)_2 \\ & + \frac{i^2}{4}(1 - i^2)s'(2\Omega)_1 + \left(1 - \frac{i^2}{2} + \frac{3}{8}i^4\right)s'(2\lambda)_1 \\ & + i\left(1 - \frac{3}{4}i^2\right)(2\lambda - \Omega)_2 - \frac{3}{4}i^2s''[2\lambda - 2\Omega]. \end{aligned}$$

Il reste encore à multiplier ce produit par $\left(\frac{D}{R}\right)^3$.

(*) Nous conservons, toutefois, i^4 dans les expressions des coefficients dont dépendent les constantes de la précession et de la nutation.

Dans la recherche de cette dernière expression, nous pourrons faire abstraction des inégalités, à l'exception de l'équation du centre, à cause du peu d'importance des termes lunaires autres que ceux qui dépendent exclusivement du nœud ou du périgée.

Or, si $v', \lambda', \Gamma', \Omega', e'$ représentent l'anomalie vraie de la Lune, sa longitude, celles du périgée et du nœud dans l'orbite, e' l'excentricité de celle-ci, on a

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}}\right)^3 = 1 + \frac{9}{2}e'^2 + \frac{21}{2}e'^4 + 3e'\left(1 + \frac{13}{4}e'^2\right)\cos v' + \frac{3}{2}e'^2\cos 2v' + \frac{1}{4}e'^3\cos 3v'.$$

Mais on a aussi

$$v' = \lambda' - \Gamma' + \frac{i^2}{4}\sin 2(\lambda' - \Omega');$$

et de

$$\operatorname{tg}(\lambda - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\lambda' - \Omega')$$

on déduit

$$\lambda' - \Gamma' = \lambda - \Gamma + \frac{i^2}{4}\sin 2(\lambda - \Gamma); \qquad \cos v' = \cos(\lambda - \Gamma) + \frac{1}{8}i^2[\cos(3\lambda - \Gamma) - \cos(\lambda - \Gamma)].$$

En remplaçant simplement v' par $\lambda - \Gamma$ dans l'expression précédente, $\lambda' - \Omega'$ par $\lambda - \Omega$, on ne néglige donc, tout au plus, que des termes du troisième ordre.

Il viendra ainsi, en s'arrêtant aux termes du second ordre :

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}}\right)^3 = 1 + \frac{9}{2}e^2 + \frac{21}{2}e^4 + 3e\left(1 + \frac{13}{11}e^2\right)\cos(\lambda - \Gamma)$$
$$+ \frac{3}{2}e^2(1 + 3e^2)\cos 2(\lambda - \Gamma).$$

Et l'on aura enfin, en accentuant λ, Γ et e pour indiquer qu'elles sont relatives à la Lune, et en n'écrivant que les termes du premier ordre en général, ceux du second quand ils dépendent du nœud seul :

$$\frac{4xz}{\mathrm{R}^2}\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}}\right)^3 = \left(1 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{9}{2}e'^2 + \frac{9}{8}i^4 - \frac{27}{4}i^2e'^2 + \frac{21}{2}e'^4\right)s''\sin\varphi$$
$$- i\left(1 - \frac{3}{4}i^2 + \frac{9}{2}e'^2\right)(\Omega)_2 + \frac{i^2}{4}\left(1 - i^2 + \frac{15}{4}e'^2\right)(2\Omega)_1 + \frac{3}{4}e'^2\left(1 - \frac{i^2}{2} + 3e'^2\right)s'(2\Gamma')_1$$
$$+ \left(1 - \frac{i^2}{2} + \frac{9}{2}e'^2 + \frac{3}{8}i^4 - \frac{9}{4}i^2e'^2 + \frac{21}{2}e'^4\right)s'(2\lambda')_1 + i\left(1 + \frac{9}{2}e'^2 - \frac{3}{4}i^2\right)(2\lambda'\ \Omega)_2$$
$$- \frac{3}{11}e'\left(1 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{13}{4}e'^2\right)s''[\lambda' - \Gamma'] + \frac{3}{2}e'\left(1 - \frac{1}{2}i^2 + \frac{13}{4}e'^2\right)s'(\lambda' + \Gamma')_1$$
$$+ \frac{3}{2}e'\left(1 - \frac{1}{2}i^2 + \frac{13}{4}e'^2\right)s'(3\lambda' - \Gamma')_1 + \frac{3}{2}e'i\,\{(\lambda' + \Gamma' - \Omega)_2 - (\lambda' + \Gamma' + \Omega)_2 - (\lambda' - \Gamma' + \Omega)_2\}.$$

Nous tenons compte de ce dernier terme, quoique du second ordre, parce que, dans la transformation suivante, il donne naissance à des termes du troisième ordre dépendants du nœud seul, et qu'on ne peut négliger.

Avant d'intégrer, il faut encore exprimer la longitude vraie λ' de la Lune en fonction de sa longitude moyenne $☾$. Nous en emprunterons l'expression à Delaunay (*) :

$$\lambda' = ☾ + \left(2e' - \frac{e'^3}{4}\right)\sin(☾ - \Gamma') + \left(\frac{5}{4}e'^2 - \frac{11}{24}e'^4\right)\sin 2(☾ - \Gamma') - \frac{i^2}{4}(1 - 4e'^2)\sin 2(☾ - \Omega)$$
$$- 3e'm'(1 - \dots)\sin(\odot - \Gamma) + \frac{m'}{4}\left(\frac{11}{2}m'' - \frac{3}{4}i^2 + \frac{75}{4}e'^2 + \frac{59}{3}m'^2\right)\sin 2(☾ - \odot)$$
$$+ \frac{3}{2}e'm'\left(\frac{5}{2} - \dots\right)\sin(☾ - 2\odot + \Gamma'),$$

où $\frac{11}{2}m''$ représente $\left(\frac{11}{2} - \frac{47}{16}i^2 + \frac{1101}{16}e'^2\right)m'$.

Dans cette expression, qui tient compte des quatre grandes inégalités de la Lune, m' est le rapport de son moyen mouvement à celui de la Terre autour du Soleil; nous y avons négligé les termes du troisième ordre.

La substitution dans l'expression précédente donnera :

$$(14) \ldots \left\{\begin{aligned}
\frac{4\alpha z}{D^2}\left(\frac{D}{R}\right)^3 = &\left(1 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{3}{2}e'^2 + \frac{3}{2}i^4 - \frac{9}{4}i^2e'^2 + \frac{15}{8}e'^4\right)s'\sin\varphi \\
&- i\left(1 - i^2 + \frac{3}{2}e'^2\right)(\Omega)_2 + \frac{1}{2}i^2\left(1 - \frac{3}{4}i^2 + \frac{3}{2}e'^2\right)s'(2\Omega)_1 \\
&+ \left(1 - \frac{i^2}{2} - \frac{5}{2}e'^2\right)s'(2☾)_1 + \frac{7}{2}e'\left(1 - \frac{i^2}{2} - \frac{123}{56}e'^2 s'(3☾ - \Gamma')_1\right. \\
&- \frac{3}{2}e'\left(1 - \frac{i^2}{2} - \frac{e'^2}{8}\right)s'(☾ + \Gamma')_1 - \frac{3}{2}e'\left(1 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{9}{8}e'^2\right)s''[☾ - \Gamma'] \\
&+ i\left(1 - \frac{3}{4}i^2 - \frac{5}{2}e'^2\right)(2☾ - \Omega)_2 - \frac{m'}{4}\left(\frac{11}{2}m''' - \frac{3}{4}i^2 + \frac{75}{4}e'^2 + \frac{59}{3}m'^2\right)(2\odot)_1 \\
&- \frac{11}{8}im'^2(2\odot - \Omega)_2 + \frac{45}{16}m'e'^2(1 + 5m')s''[2\odot - 2\Gamma'],
\end{aligned}\right.$$

m''' représentant $m''\left(1 - \frac{i^2}{2} + \frac{9}{2}e'^2\right)$.

Nous nous sommes arrêté au premier ordre pour les termes lunaires proprement dits, très peu importants, au second et au troisième pour ceux qui dépendent, soit du nœud, soit de la longitude du Soleil. On aurait trouvé, comme pour celui-ci, un terme du quatrième ordre en $2\Gamma'$; mais il sera insignifiant, même après l'intégration. De même trouverait-on des termes du troisième ordre qui auraient pour arguments des combinaisons de Γ' et de Ω, telles que $2\Gamma' - \Omega$; ils sont également négligeables. Aucune de ces combinai-

(*) *Mém. de l'Institut*, t. XIX, pp. 803 et suiv.

sons n'aurait pour argument $2\Omega + \Gamma'$. S'il en existait une semblable, elle devrait être conservée, fût-elle du quatrième ordre (*).

Tous les termes de l'expression (14) doivent être multipliés par f.

Nous déduirons la valeur de ce facteur des constantes connues de la précession et de la nutation, et la trouverons égale à 2.175. Dans les termes dont dépendent directement ces constantes, nous conserverons f; dans les autres, nous le remplacerons par sa valeur, et nous ferons la somme (16) = (13) + f.(14). Les coefficients seront réduits en nombres au moyen des données suivantes, parmi lesquelles figurent celles dont nous aurons besoin après l'intégration ; l'unité de temps est l'année julienne.

$$
(15)\ldots\ldots\quad \left\{\begin{array}{ccccc}
e & i & e' & m' & n \\
[8.224535] & [8.954585] & [8.739427] & [8.873909] & [3.361958] \\
m_1 & m'_1 & -\omega_1 & \gamma_1 & \gamma'_1 \\
[0.798172] & [1.924264] & [9.528367] & [6\ 4771] & [9.852]\ (^{**})
\end{array}\right.
$$

Nous trouverons ainsi, pour l'expression complète de $-\frac{p}{h}$:

$$
(16)\ldots\quad \left\{\begin{array}{l}
-\dfrac{p}{h} = -s''\{1.0004213 + 0.9924755\,f\}\sin\varphi + s'[5.0212](2\Gamma)_1 + [8.95281]\,f(\Omega)_2 \\
\quad + s'[7\ 9448](2\Omega)_1 \\
\quad - s'[9\ 99969](2\odot)_1 - s'[8.7644](3\odot - \Gamma)_1 + s'[7.9233](\odot + \Gamma)_1 + s''[8\ 4012][\odot - \Gamma] \\
\quad + s''[6\ 8015][2\odot - 2\Gamma] + [7.1762](2\odot - \Omega)_2 - s''[7.2775][2\odot - 2\Gamma'] \\
\quad + s'[5.921]\{2\odot + \Omega)_1 - (2\odot - \Omega)_1\} \\
\quad - s'[0.33252](2☾)_1 - s'[9.6163][3☾ - \Gamma'] + s'[8.7740](☾ + \Gamma')_1 \\
\quad + s''[9.25030][☾ - \Gamma'] - [9.28602](2☾ - \Omega)_2 + s'[8.1282](2\odot)_1 \\
\quad + [7.2507](2\odot - \Omega)_2 - s''[7.2774][2\odot - 2\Gamma'].
\end{array}\right.
$$

La somme des termes en $(2\odot)_1$ donne : [0.99372]; en $(2\odot - \Omega)_2$: [7.5163].

Nous avons omis les termes en $4\odot$, dont les astronomes ne tiennent pas compte, ainsi que les deux derniers termes, absolument négligeables, de l'expression (13); et, dans les expressions numériques de $\Delta\theta$ et de $s'\Delta\psi$, nous négligerons tous les termes qui n'atteignent pas le centième de seconde d'arc.

Pour abréger les calculs ultérieurs, nous écrirons cette expression :

$$
(16^{\text{bis}})\ .\quad \left\{\begin{array}{l}
-\dfrac{p}{h} = -s''(a_0 + a_1 f)\sin\varphi + s'a_2(2\Gamma)_1 + b_1 f(\Omega)_2 - b_2 s'(2\Omega)_1 \\
\quad - s'c_1(2\odot)_1 - s'c_2(3\odot - \Gamma)_2 + s'c_3(\odot + \Gamma)_1 + s''c_4[\odot - \Gamma] + s''c_5[2\odot - 2\Gamma] \\
\quad + c_6(2\odot - \Omega)_2 - s''c_7[2\odot - 2\Gamma'] + s'c_8\{(2\odot + \Omega)_1 - (2\odot - \Omega)_1\} \\
\quad - s'g_1(2☾)_1 - s'g_2(3☾ - \Gamma')_1 + s'g_3(☾ + \Gamma')_1 + s''g_4[☾ - \Gamma'] + g_5(2☾ - \Omega)_2.
\end{array}\right.
$$

(*) Les termes que nous négligeons figurent dans les travaux connus de Peters, d'Oppolzer, de Nyrén (*Mém. de l'Acad. des sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XIX), d'Ubaghs (*Mém. de l'Acad. roy. de Bruxelles*, t. XLVII, in-4°); les moins faibles d'entre eux dans notre *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde* et notre *Traité des réductions stellaires*.

(**) Nous ne prenons que trois chiffres, à cause de l'incertitude de ce nombre.

11. Appliquons les six formules (6) aux différentes fonctions qui entrent dans cette expression; nous verrons que les fonctions $(M)_1$, $(M)_2$ et $[M]$ donneront, si nous posons

$$-2h\frac{\mu}{1+\mu}=H, \qquad \frac{v_2}{1+\mu}=w_2:$$

quant à la *nutation bradléenne*, pour

$$(17)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{llll} & (M)_1 & (M)_2 & [M] \\ \frac{1}{H}\frac{d\theta}{dt}: & \frac{1+c'w_2}{1-w_2^2}\sin M, & c'\frac{1+\frac{c''}{c'}w_2}{1-w_2^2}\sin M, & \text{et } \frac{w_2}{1-w_2^2}\sin M; \quad \text{et pour} \\ \frac{1}{H}s'\frac{d\psi}{dt}: & \frac{1+\frac{w_2}{c'}}{1-w_2^2}\cos M, & c''\frac{1+\frac{c'}{c''}w_2}{1-w_2^2}\cos M, & \text{et } \frac{1}{1-w_2^2}\cos M; \end{array}\right.$$

v_2 représente le rapport du moyen mouvement de M au mouvement diurne, c'est-à-dire pour les arguments

$$\odot,\ \Gamma,\ ☾,\ ☊,\ \Gamma'$$

auxquels correspondent

$$m_1,\ \gamma_1,\ m'_1,\ \omega_1,\ \gamma'_1,$$

les rapports à n des quantités données ci-dessus (15).

Remarquons que, dans les seuls termes où il importe surtout de ne pas négliger v_2, les termes solaires et ceux du nœud, v_2 est fort petit; son carré sera négligeable; on pourra prendre $\frac{v_2}{1+\mu}$ égal à v_2, puisque $\mu=\frac{1}{300}$ environ, et au lieu de $1-w_2^2$ au dénominateur, mettre le facteur $1+2w_2^2$ au numérateur, on écrira donc

$$\frac{1}{v_1}\frac{1+kw_2}{1-w_2^2}=\frac{1}{v_1}+\frac{k}{n}(1-\mu)+\frac{v_2}{n};\ (*)$$

quant à la *nutation diurne*, dont le coefficient n'atteint pas 0".1, nous pourrons négliger v_2 vis-à-vis de 1, et les fonctions $(M)_1$, $(M)_2$ et $[M]$ donneront, si l'on pose $-h\nu=H'$, pour

$$(18)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{H'}\frac{d\theta}{dt}: (1+c')\sin(M-2\varphi)+(1-c')\sin(M+2\varphi), -\{(c'+c'')\sin(M-2\varphi) \\ \qquad +(c'-c'')\sin(M+2\varphi)\}, \text{ et } -\{\sin(M-2\varphi)-\sin(M+2\varphi)\}; \\ \frac{1}{H'}s'\frac{d\psi}{dt}: (1+c')\cos(M-2\varphi)+(1-c')\cos(M+2\varphi), (c'+c'')\cos(M-2\varphi) \\ \qquad +(c'-c'')\cos(M+2\varphi), \text{ et } \{\cos(M-2\varphi)-\cos(M+2\varphi)\}. \end{array}\right.$$

Faisons remarquer que le premier terme $-(a_0+a_1f)s''\sin\varphi$ donne, puisque nous pouvons supposer provisoirement, comme nous le verrons à l'instant, $s''=$ const^{te} :

$$(19)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt}=0+H'(a_0+a_1f)s''\sin 2\varphi, \\ s'\frac{d\psi}{dt}=\frac{1}{2}H(a_0+a_1f)s''+H'(a_0+a_1f)\cos 2\varphi, \end{array}\right.$$

pour les deux nutations, bradléenne et diurne.

(*) Si l'on pouvait compter sur l'exactitude des coefficients des termes lunaires, le calcul correct des facteurs y serait indispensable, puisque, dans le terme en 3☾ par exemple, on a $3m'_2=0.11$ à très peu près. Mais la correction relative de nos formules, vis-à-vis des formules usuelles, nous semble suffire, et au delà, en présence de l'incertitude théorique de ces coefficients, sur laquelle nous reviendrons.

Les formules (17) à (18) montrent que $\frac{d\theta}{dt}$ ne se compose que de termes périodiques dont le plus fort coefficient, après l'intégration, n'atteindra pas 10″.

Nous pourrons donc, dans une première approximation, supposer θ, et, par suite, s', c', s'', c'' constants.

12. L'application des formules précédentes à l'expression (16^{bis}) donnera d'abord, par l'intégration, quant à la nutation *bradléenne* (y compris la précession), si l'on néglige des facteurs insignifiants :

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{H}\Delta\theta = {}& -s'\frac{a_2}{2\gamma_2}\cos 2\Gamma + fc'b_1\left\{\frac{1}{-\omega_1} - \frac{c''}{c'}\frac{1-\mu}{n}\right\}\cos\text{☊} - s'b_2\left\{\frac{1}{-2\omega_1} - c'\frac{1-\mu}{n}\right\}\cos 2\text{☊} \\
& + s'c_1\left\{\frac{1}{2m_1} + c'\frac{1-\mu}{n}\right\}\cos 2\odot + s'c_2\left\{\frac{1}{3m_1-\gamma_1} + c'\frac{1-\mu}{n}\right\}\cos(3\odot-\Gamma) \\
& - s'c_3\left\{\frac{1}{m_1+\gamma_1} + c'\frac{1-\mu}{n}\right\}\cos(\odot-\Gamma) - s''c_4\frac{1}{n}\cos(\odot-\Gamma) \\
& - c'c_6\left\{\frac{1}{2m_1-\omega_1} + \frac{c''}{c'}\frac{1-\mu}{n}\right\}\cos(2\odot-\text{☊}) - s'c_8\frac{1}{2m_1}[\cos(2\odot+\text{☊}) - \cos(2\odot-\text{☊})] \\
& + s'g_1\left\{\frac{1}{2m'_1} + c'\frac{1-\mu}{n} + \frac{2m'_2}{n}\right\}\cos 2\text{☾} + s'g_2\left\{\frac{1}{3m'_1-\gamma'_1} + c'\frac{1-\mu}{n} + \frac{3m'_2-\gamma'_2}{n}\right\}\cos(3\text{☾}-\Gamma') \\
& - s'g_3\left\{\frac{1}{m'_1+\gamma'_1} + c'\frac{1-\mu}{n} + \frac{m'_2+\gamma'_2}{n}\right\}\cos(\text{☾}+\Gamma') \\
& + c'g_8\left\{\frac{1}{2m'_1-\omega_1} + \frac{c''}{c'}\frac{1-\mu}{n} + \frac{2m'_2-\omega_2}{n}\right\}\cos(2\text{☾}-\text{☊}). \\
\frac{1}{H}s'\Delta\psi = {}& \frac{1}{2}(a_0+a_1f)s''t + s'\frac{a_2}{2\gamma_2}\sin 2\Gamma - fc''b_1\left\{\frac{1}{-\omega_1} - \frac{c'}{c''}\frac{1-\mu}{n}\right\}\sin\text{☊} \\
& + s'b_2\left\{\frac{1}{-2\omega_1} - \frac{1}{c'}\frac{1-\mu}{n}\right\}\sin 2\text{☊} \\
& - s'c_1\left\{\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{c'}\frac{1-\mu}{n}\right\}\sin 2\odot - s'c_2\left\{\frac{1}{3m_1-\gamma_1} + \frac{1}{c'}\frac{1-\mu}{n}\right\}\sin(3\odot-\Gamma) \\
& + s'c_3\left\{\frac{1}{m_1+\gamma_1} + \frac{1}{c'}\frac{1-\mu}{n}\right\}\sin(\odot+\Gamma) + s''c_4\left\{\frac{1}{m_1-\gamma_1} + \frac{1-\mu}{n}\right\}\sin(\odot-\Gamma) \\
& + s''c_5\left\{\frac{1}{2m_1-2\gamma_1} + \frac{1-\mu}{n}\right\}\sin(2\odot-2\Gamma) + c''c_6\left\{\frac{1}{2m_1-\omega_1} + \frac{c'}{c''}\frac{1-\mu}{n}\right\}\sin(2\odot-\text{☊}) \\
& - s''c_7\left\{\frac{1}{2m_1-2\gamma'_1} + \frac{1-\mu}{n}\right\}\sin(2\odot-\Gamma') + s'c_8\frac{1}{2m_1}[\sin(2\odot+\text{☊}) - \sin(2\odot-\text{☊})] \\
& - s'g_1\left\{\frac{1}{2m'_1} + \frac{1}{c'}\frac{1-\mu}{n} + \frac{2m'_2}{n}\right\}\sin 2\text{☾} - s'g_2\left\{\frac{1}{3m'_1-\gamma'_1} + \frac{1}{c'}\frac{1-\mu}{n} + \frac{3m'_2-\gamma'_2}{n}\right\}\sin(3\text{☾}-\Gamma') \\
& + s'g_3\left\{\frac{1}{m'_1+\gamma'_1} + \frac{1}{c'}\frac{1-\mu}{n} + \frac{m'_2+\gamma'_2}{n}\right\}\sin(\text{☾}+\Gamma') \\
& + s''g_4\left\{\frac{1}{m'_1-\gamma'_1} + \frac{1-\mu}{n} + \frac{m'_2-\gamma'_2}{n}\right\}\sin(\text{☾}-\Gamma') \\
& + c''g_8\left\{2m'_1-\omega_1 + \frac{c'}{c''}\frac{1-\mu}{n} + \frac{2m'_2-\omega_2}{n}\right\}\sin(2\text{☾}-\text{☊}).
\end{aligned}
\right.
$$

Le premier terme de $\Delta\theta$ accuse une variation séculaire de l'obliquité dépendant de la longitude du périgée, mais qui dépasse à peine $0''.1$ durant un quart de révolution de celui-ci.

On remarquera que le terme en c_6 a été omis dans $\Delta\theta$, ainsi que le terme en g_4; ils sont, en effet, absolument insignifiants, mais non pas nuls, comme dans toutes les théories antérieures. De même les termes tout à fait insignifiants en c_8 ont été simplifiés.

13. Telles sont les expressions de la nutation en obliquité et en longitude, obtenues en supposant l'obliquité θ égale à une constante θ_0.

Recherchons quelle modification l'introduction de θ, au lieu de θ_0, apportera à ces expressions.

La faiblesse de $\Delta\theta$, qui ne surpasse guère $10''$, nous permet de ne calculer son influence que dans les termes les plus importants, ceux qui dépendent du nœud et de la longitude du Soleil, ou qui peuvent s'ajouter au terme de précession trouvé ci-dessus.

On s'assurera fort simplement que la variation de θ n'introduira, dans l'expression de $\Delta\theta$, que des termes dont le plus considérable sera $-\,0'',000045 \cos 2\Omega$; on pourra les négliger tous.

Il n'en est pas de même quant à $\Delta\psi$.

En considérant θ comme constant, nous avons trouvé (20)

$$(20^{\text{bis}}) \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} s'\Delta\psi &= s''A_0 t - c''A_1 \sin\Omega + s'A_2 \sin 2\Omega - s'B_1 \sin 2\odot - s'C_1 \sin 2\text{☾} \\ &\quad + s''B_2 \sin(\odot - \Gamma) + s'B_3 \sin(\odot + \Gamma) \end{aligned} \right.$$

dont l'expression différentielle, dans laquelle les sinus et les cosinus de l'obliquité sont, en réalité, variables, sera, comme on pourrait le déduire des formules (16^{bis}) et (17) :

$$\begin{aligned} s'\frac{d\psi}{dt} &= s''A_0 - c''A_1\varphi_1 \cos\Omega + 2s'A_2\omega_1 \cos 2\Omega - 2s'B_1 m_1 \cos 2\odot - 2s'C_1 m'_1 \cos 2\text{☾} \\ &\quad + s'B_3(m_1 + \gamma_1)\cos(\odot + \Gamma) + s''B_2(m_1 - \gamma_1)\cos(\odot - \Gamma). \end{aligned}$$

Commençons par remplacer, dans cette expression, θ par $\theta_0 + \Delta\theta$, et conservons les notations s', c', s'', c'' pour désigner les sinus et cosinus de θ_0 et de $2\theta_0$; il viendra

$$\begin{aligned} \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} &= s''A_0 - c''A_1\omega_1 \cos\Omega + 2s'A_2\omega_1 \cos 2\Omega - 2s'B_1 m_1 \cos 2\odot - 2s'C_1 m'_1 \cos\text{☾} \\ &\quad + s'B_3(m_1 + \gamma_1)\cos(\odot + \Gamma) + s''B_2(m_1 - \gamma_1)\cos(\odot - \Gamma). \\ &\quad + 2\Delta\theta\,\{c''A_0 + s''A_1\omega_1 \cos\Omega + c'A_2\omega_1 \cos 2\Omega - c'B_1 m_1 \cos 2\odot - c'C_1 m'_1 \cos 2\text{☾} \\ &\quad + \tfrac{1}{2} c'B_3(m_1 + \gamma_1)\cos(\odot + \Gamma) + c''B_2(m_1 - \gamma_1)\cos(\odot - \Gamma)\}. \end{aligned}$$

Or, on a (20) :

$$(20^{\text{ter}}) \ldots \quad \Delta\theta = A'_1 \cos\Omega - A'_2 \cos 2\Omega + B'_1 \cos 2\odot + C'_1 \cos 2\text{☾} - B'_3 \cos(\odot + \Gamma).$$

Les termes du second ordre de l'expression $\sin\theta\frac{d\psi}{dt}$ seront donc :

$$\begin{aligned}
&2c''A_0\left\{A'_1\cos\text{☊} - A'_2\cos 2\text{☊} + B'_1\cos 2\odot - C'_1\cos 2\text{☾} - B'_3\cos(\odot+\Gamma)\right\}\\
&+ s''A_1A'_1\omega_1 - c'A_2A'_2\omega_1 - c'B_1B'_1m_1 - c'C_1C'_1m'_1 - \tfrac{1}{2}c'B_3B'_3(m_1+\gamma_1)\\
&+ s''A_1A'_1\omega_1\cos 2\text{☊} - c'A_2A'_2\omega_1\cos 4\text{☊} - c'B_1B'_1m_1\cos 4\odot - c'C_1C'_1\cos 4\text{☾} - \tfrac{1}{2}c'B_3B'_3(m_1+\gamma_1)\cos(2\odot+2\Gamma)\\
&+ \omega_1(c'A_2A'_1 - s''A_1A'_2)(\cos\text{☊} + \cos 3\text{☊}) + c'B_1B'_3m_1[\cos(3\odot+\Gamma) + \cos(\odot-\Gamma)]\\
&- c''B_2B'_3(m_1-\gamma_1)(\cos 2\odot + \cos 2\Gamma),
\end{aligned}$$

en laissant de côté les termes dépendants de deux arguments; nous supprimerons aussi ceux qui renferment les longitudes triples ou quadruples.

Et l'on aura, en désignant par N le second membre de la formule (20^{bis}) :

$$(21).\left\{\begin{aligned}
&\int\sin\theta d\psi = N + 2c''A_0\left\{\frac{A'_1}{\omega_1}\sin\text{☊} - \frac{A'_2}{2\omega_1}\sin 2\text{☊} + \frac{B'_1}{2m_1}\sin 2\odot + \frac{c'_1}{2m'_1}\sin 2\text{☾} - \frac{B'_3}{m_1+\gamma_1}\sin(\odot+\Gamma)\right\}\\
&\quad + \tfrac{1}{2}s''A_1A'_1\sin 2\text{☊} - \tfrac{1}{4}c'B_3B'_3\sin(2\odot+2\Gamma) + (c'A_2A'_1 - s''A_1A'_2)\sin\text{☊}\\
&\quad + c'B_1B'_3\frac{m_1}{m_1-\gamma_1}\sin(\odot-\Gamma) - c''B_2B'_3(m_1-\gamma_1)\left(\frac{\sin 2\odot}{2m_1} + \frac{\sin 2\Gamma}{2\gamma_1}\right)\\
&\quad + \left\{s''A_1A'_1\omega_1 - c'A_2A'_2\omega_1 - c'B_1B'_1m_1 - c'C_1C'_1m'_1 - \tfrac{1}{2}c'B_3B'_3(m_1+\gamma_1)\right\}t.
\end{aligned}\right.$$

Mais on a

$$\int\sin\theta d\psi = \sin\theta\Delta\psi - \int\Delta\psi\cos\theta d\theta,$$

expression dans le second membre de laquelle on pourra remplacer $\Delta\psi$ par $\frac{N}{s'}$, en négligeant les termes du troisième ordre.

De (20^{ter}) on tire

$$\sin\theta = s' + c'\left\{A'_1\cos\text{☊} - A'_2\cos 2\text{☊} + B'_1\cos 2\odot + C'_1\cos 2\text{☾} - B'_3\cos(\odot+\Gamma)\right\}.$$

D'où

$$\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = -c'\left\{A'_1\omega_1\sin\text{☊} - 2A'_2\omega_1\sin 2\text{☊} + 2B'_1m_1\sin 2\odot + 2C'_1m'_1\sin 2\text{☾} - B'_3(m_1+\gamma_1)\sin(\odot+\Gamma)\right\},$$

et, en s'arrêtant aux termes précédemment conservés :

$$\begin{aligned}
&\Delta\psi\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = -2c'^2A_0\left\{A'_1\omega_1\sin\text{☊} - \cdots\cdots \right\}t\\
&\quad + \tfrac{1}{2}c'_1\left\{c''A_1A'_1\omega_1 + 2s'A_2A'_2\omega_1 + 2s'B_1B'_1m_1 + 2s'C_1C'_1m'_1 + s'B_3B'_3(m_1+\gamma_1)\right\}\\
&\quad - \tfrac{1}{2}c'_1\left\{c''A_1A'_1\omega_1\cos 2\text{☊} + s'B_3B'_3(m_1+\gamma_1)\cos(2\odot+2\Gamma) + s''B_2B'_3(m_1+\gamma_1)(\cos 2\odot - \cos 2\Gamma)\right\},\\
&\quad - \tfrac{1}{2}c'_1(2c''A_1A'_2 - s'A_2A'_1)\omega_1\cos\text{☊},
\end{aligned}$$

c'_1 désignant $\cot 2\theta_0$. L'intégration donne

$$\begin{aligned}\int \Delta\psi \cos\theta d\theta = & \ 2c'^2 A_0 \{ A'_1 \cos \Omega - A'_2 \cos 2\Omega + B'_1 \cos 2\odot + C'_1 \cos 2\odot - B'_3 \sin(\odot + \Gamma) \} t \\ & - 2c'^2 A_0 \left\{ \frac{A'_1}{w_1} \sin \Omega - \frac{A'_2}{2w_1} \sin 2\Omega + \frac{B'_1}{2m_1} \sin 2\odot + \frac{C'_1}{2m'_1} \sin 2☾ - \frac{B'_3}{m_1 + \gamma_1} \sin(\odot + \Gamma) \right\} \\ & + \frac{1}{4} c'_1 \left\{ c'' A_1 A'_1 \sin 2\Omega + s' B_3 B'_3 \sin(2\odot + 2\Gamma) + s'' B_2 B'_3 (\sin 2\odot - \frac{m_1}{\gamma_1} \sin 2\Gamma) \right\} \\ & - \frac{1}{4} c'_1 (2c'' A_1 A'_2 - s' A_2 A'_1) \sin \Omega \\ & + \frac{1}{2} c'_1 \{ c'' A_1 A'_1 w_1 + 2s' A_2 A'_2 w_1 + 2s' B_1 B'_1 m_1 + 2s' C_1 C'_1 m'_1 + s' B_3 B'_3 m_1 \} t. \end{aligned}$$

Nous avons négligé γ_1 vis-à-vis de m_1 dans les termes en B'_3.

Pour trouver l'expression de $\sin\theta\Delta\psi$, on n'aura qu'à ajouter la précédente à celle (21) de $\int \sin\theta d\psi$.

Nous nous arrêterons, dans les expressions numériques, au millième de seconde, ne faisant exception que pour les termes de la précession et du nœud; dans la somme précédente, nous négligerons donc tous les termes périodiques inférieurs à $0''.001$.

La raison en est que les astronomes seront toujours obligés de négliger bien des termes, omis pour ce motif dans nos formules, quoiqu'ils puissent atteindre plusieurs millièmes de seconde.

Quant à $\sin 2\Gamma$, nous le transformerons en $\cos 2\Gamma_0 \gamma_1 t$ à cause de la longueur de la période.

La réduction ne donnera, indépendamment de ces termes, d'autre terme de précession du second ordre que celui qui dépend du nœud; ceux qui dépendent des doubles longitudes du Soleil et de la Lune, ou même de $\odot + \Gamma$, s'entre-détruisent. Il en existerait encore un second provenant du terme en $2\odot - \Omega$; mais il serait tellement faible que nous n'avons pas jugé à propos d'y avoir égard.

Dans ces conditions, notre somme se réduit à :

$$\begin{aligned}\sin\theta\Delta\psi = & \ N + \{ (s'' + \tfrac{1}{2} c'' c'_1) A_1 A'_1 \omega_1 + 2s'^2 B_2 B'_3 m_1 \cos 2\Gamma_0 \} t + 2c'^2 A_0 \Delta\theta . t \\ & - 2s'^2 \frac{A_0 A'_1}{\omega_1} \sin \Omega + s'^2 \frac{A_0 A'_2}{\omega_1} \sin 2\Omega + s'^2 \frac{A_0 B'_1}{m_1} \sin 2\odot + s'^2 \frac{A_0 C'_1}{m'_1} \sin 2☾. \end{aligned}$$

Le premier terme de ces expressions est celui du second ordre de la précession; le second provient de la combinaison de la précession et de la nutation en obliquité $\Delta\theta$, et ne peut être négligé; les derniers sont ceux du second ordre de la nutation.

Pour simplifier le calcul numérique de ceux-ci, on pourra prendre, avec une exactitude amplement suffisante, $2c'A_0 = 0.00025$; et, de plus,

$$\frac{c''}{s'} A_1 = 17''.25, \quad A'_1 = 9''.25, \quad 2c' B_2 = 0''.13, \quad B'_3 = 0''.01, \quad A'_2 = 0''.09 \quad B'_1 = 0''.54, \quad C'_1 = 0''.09.$$

Les termes sensibles du second ordre de sin $\Delta\theta\psi$ seront

$$N_2 = -0''.000045t + 0.00023\Delta\theta.\ t + 0''.0018 \sin \Omega.$$

C'est parce que les expressions de $\Delta\alpha$ et de $\Delta\delta$ renferment celle de sin $\theta\Delta\psi$, non de $\Delta\psi$, que le calcul de la première expression est plus utile, plus nécessaire même que celui de la seconde.

Le terme du second ordre de la constante de la précession luni-solaire sera — $0''.00179t$.

L'expression complète de sin $\theta\Delta\psi$ sera donc, si l'on désigne par N_1 le second membre de l'expression (20) de $\frac{1}{H} s'\Delta\psi$;

(23). . . . . $\sin \theta\Delta\psi = H.N_1 + N_2.$

14. Nous sommes maintenant à même de déterminer les valeurs de H et de f au moyen des constantes de la précession luni-solaire et de la nutation.

Mais auparavant, il importe d'observer que sin 2Γ, à raison de la longueur de sa période, ne peut pas rentrer dans les termes de nutation, et que, par suite, en regardant sin $2\Gamma_0$ comme compris dans la constante ψ_0, on devra, au lieu de $s'\frac{a_2}{2\gamma_1}\sin 2\Gamma$, écrire $s'\frac{2\gamma_1}{a_2}\cos 2\Gamma_0 \sin 2\gamma_1 t$ ou $s'a_2 \cos 2\Gamma_0 t$.

La constante de la précession luni-solaire a donc pour expression

$$H\{(a_0 + a_1 f)c' + a_2 \cos 2\Gamma_0\} + 0''.00179 = P_1.$$

Celle de la nutation

$$Hfc'b_1\left(\frac{1}{-\omega_1} - \frac{c''}{c'}\frac{1-2\mu}{n}\right) = N_1.$$

Toutes les théories antérieures réduisent ces expressions à $Hc'(a_0 + a_1 f)$ et $Hfc'b\frac{b_1}{-\omega_1}$. Nous négligerons dans P_1 le terme en Γ_0, qui donnerait à peine $0''.000001$, de même que les termes semblables du second ordre; mais nous conserverons l'expression complète de N_1.

Le rapport des deux constantes P_1 et N_1 déterminera f au moyen de l'équation

(24). . . . . . $\left\{ a_0 + a_1 f = f\frac{P_1}{N_1} b_1\left(\frac{-w_1}{1} - \frac{c'}{c''}\frac{1-\mu}{n}\right) = f\frac{P_1}{N_1} b_1[0.471555].\right.$

Nous adopterons la constante d'O. Struve, 50''.3690 (1900), d'où 50.37007 pour l'année Julienne, et, en tenant compte du terme du second ordre que nous venons de trouver $0''.00179$: $P_1 = 50.37186$; et nous diminuerons celle de Peters de la correction 0''.009 qui résulte des observations de Gyldén, réduites de la nutation diurne (voir le chapitre précédent) :

$$N_1 = 9''.224 - 0.009 = 9''.215. \quad \ldots\ldots \quad 1900$$

On prendra

$$\theta_0 = 23°27'8'' \text{ et, ultérieurement, } 2\Gamma_0 = 200°47'.5 \ldots \quad »$$

De la substitution numérique des différentes constantes dans l'équation (21), on déduira : $f = 2.1755$.

Cette valeur est un peu plus faible (de 0.0045) que celle qui est adoptée, ce qui tient, et à la diminution (0''.01) que nous avons fait subir à la constante de Peters, et à la correction de nos formules. Elle concorde fort bien avec celle 2.1753 qui résulte des valeurs adoptées par Newcomb pour la masse et la parallaxe de la Lune et du Soleil (*).

En substituant la valeur de f dans les expressions des constantes P_1 et N_1 on trouvera pour 1900 : $Hc' = 15''.942$, et $H = 17''.3786$.

Or nous avons posé $H = \frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\mu_1$; d'où $\mu_1 = 0.0032742 = 675''.353$, valeur qui concorde avec les plus récentes.

L'expression de μ_1 est $\frac{2C - A - B}{2C}$, qui se réduit à $\frac{C-A}{C}$ dans l'hypothèse $B = A$. On en tire $\frac{C-A}{A} = 0.003287$, d'où une période eulérienne de 304.1, jours moyens pour une Terre *solide*.

En éliminant f entre les expressions de P_1 et de N_1, on trouvera que, si p' et n' désignent les corrections de ces constantes, celle μ' de μ_1 sera égale à $p' - 3.76\, n'$.

15. L'application des formules (18) à l'expression (16[bis] donnera, après l'intégration, pour la nutation *diurne* :

$$\begin{aligned}
\frac{2\Delta\theta}{H'n} = & - s''(a_0 + a_1 f)\cos 2\varphi - b_1 f\left\{(c' + c'')\frac{\cos(\text{☊} - 2\varphi)}{1 - \frac{\omega_2}{2}} - (c' - c'')\frac{\cos(\text{☊} + 2\varphi)}{1 + \frac{\omega_2}{2}}\right\} \\
& + s'c_1\left\{(1 + c')\frac{\cos(2\odot - 2\varphi)}{1 - m_2} - (1 - c')\frac{\cos(2\odot + 2\varphi)}{1 + m_2}\right\} + s'c_2\left\{(1 + c')\frac{\cos(3\odot - \Gamma - 2\varphi}{1 - \frac{3m_2 - \gamma_2}{2}} - (1 - c')\frac{\cos(2\odot - \Gamma + 2\varphi)}{1 + \frac{3m_2 - \gamma_2}{2}}\right\} \\
& + s'g_1\left\{(1 + c')\frac{\cos(2\text{☾} - 2\varphi)}{1 - m_2'} - (1 - c')\frac{\cos(2\text{☾} + 2\varphi)}{1 + m_2'}\right\} + s'g_2\left\{(1 + c')\frac{\cos(3\text{☾} - \Gamma' - 2\varphi)}{1 - \frac{3m_2' - \gamma_2'}{2}} - (1 - c')\frac{\cos(3\text{☾} - \Gamma' + 2\varphi)}{1 + \frac{3m_2' - \gamma_2'}{2}}\right\} \\
& - s'g_3\left\{(1 + c')\frac{\cos(\text{☾} + \Gamma' - 2\varphi)}{1 - \frac{m_2' + \gamma_2'}{2}} - (1 - c')\frac{\cos(\text{☾} + \Gamma' + 2\varphi)}{1 + \frac{m_2' + \gamma_2'}{2}}\right\} + s''g_4\left\{\frac{\cos(\text{☾} - \Gamma' - 2\varphi)}{1 - \frac{m_2' - \gamma_2'}{2}} + \frac{\cos(\text{☾} - \Gamma' + 2\varphi)}{1 + \frac{m_2' - \gamma_2'}{2}}\right. \\
& - g_5\left\{(c' + c'')\frac{\cos(2\text{☾} - \text{☊} - 2\varphi)}{1 - \frac{2m_2' - \omega_2}{2}} - (c' - c'')\frac{\cos(2\text{☾} - \text{☊} + 2\varphi)}{1 + \frac{2m_2' - \omega_2}{2}}\right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2s'\Delta\psi}{H'n} = & \; s''(a_0 + a_1 f)\sin 2\varphi - b_1 f\left\{(c' + c'')\frac{\sin(\text{☊} - 2\varphi)}{1 - \frac{\omega_2}{2}} - (c' - c'')\frac{\sin(\text{☊} + 2\varphi)}{1 + \frac{\omega_2}{2}}\right\} \\
& + s'c_1\left\{(1 + c')\frac{\sin(2\odot - 2\varphi)}{1 - m_2} - (1 - c')\frac{\sin(2\odot + 2\varphi)}{1 + m_2}\right\} + s'c_2\left\{(1 + c')\frac{\sin(3\odot - \Gamma - 2\varphi)}{1 - \frac{3m_2 - \gamma_2}{2}} - (1 - c')\frac{\sin(3\text{☾} - \Gamma + 2\varphi)}{1 + \frac{3m_2 - \gamma_2}{2}}\right\}
\end{aligned}$$

(*) *The Elements of the four inner planets, and the fundamental constants of Astronomy*. (Extrait de l'AMER. EPH. FOR 1897). La valeur déduite de nos données pour la constante P de Newcomb, 54''.906, ne diffère de la sienne 54.894, que de 0''.012, c'est-à-dire des 0.0002 de sa valeur. Il n'en pourrait résulter que des différences insignifiantes dans les valeurs des coefficients numériques que nous donnerons ci-après.

$$(25)\ (\text{suite}).\quad \begin{aligned}
&+s'g_1\left\{(1+c')\frac{\sin(2☾-2\varphi)}{1-m_2'}(1-c')\frac{\sin(2☾+2\varphi)}{1+m_2'}\right\}+s'g_2\left\{(1+c')\frac{\sin(3☾-\Gamma'-2\varphi)}{1-\frac{3m_2'-\gamma_2'}{2}}-(1-c')\frac{\sin(3☾-\Gamma'+2\varphi)}{1+\frac{3m_2'-\gamma_2'}{2}}\right\}\\
&-s'g_3\left\{(1+c')\frac{\sin(☾+\Gamma'-2\varphi)}{1-\frac{m_2'-\gamma_2'}{2}}-(1-c')\frac{\sin(☾+\Gamma'+2\varphi)}{1+\frac{m_2'+\gamma_2'}{2}}\right\}+s''g_4\left\{\frac{\sin(☾-\Gamma'-2\varphi)}{1-\frac{m_2'-\gamma_2'}{2}}+\frac{\sin(☾-\Gamma'+2\varphi)}{1+\frac{m_2'-\gamma_2'}{2}}\right\}\\
&-g_8\left\{(c'+c'')\frac{\sin(2☾-\Omega-2\varphi)}{1-\frac{2m_2'-\omega_2}{2}}-(c'-c'')\frac{\sin(2☾-\Omega+2\varphi)}{1+\frac{2m_2'+\omega_2}{2}}\right\}.
\end{aligned}$$

Dans ces expressions de la nutation diurne, nous n'avons conservé que les termes de quelque importance.

Le calcul rigoureux en serait assez compliqué, et sans utilité réelle, vu la faiblesse du coefficient $\frac{H'n}{2}$, et celle des petites quantités qui sont ajoutées à l'unité dans les dénominateurs. Mais la forme de ceux-ci permet une assez grande simplification ; elle est pour tous, $1-m_2$ et $1+m_2$, de sorte que le dénominateur commun sera $(1-m_2^2)$; on pourra le faire égal à l'unité, et l'on obtiendra ainsi :

$$(26)\quad \begin{aligned}
\frac{\Delta\theta}{H'n}=&-\tfrac{1}{2}s''(a_0+a_1f)\cos2\varphi-b_1f\left\{\left(c'+\frac{\omega_2}{2}c''\right)\sin\Omega\sin2\varphi+\left(c''+\frac{\omega_2}{2}c'\right)\cos\Omega\cos2\varphi\right\}\\
&+s'c_1\left\{(1+m_2c')\sin2\odot\sin2\varphi+(c'+m_2)\cos2\odot\cos2\varphi\right\}\\
&+s'c_2\left\{\left(1+\frac{3m_2-\gamma_2c'}{2}\right)\sin(3\odot-\Gamma)\sin2\varphi+\left(c'+\frac{3m_2-\gamma_2}{2}\right)\cos(3\odot-\Gamma)\cos2\varphi\right\}\\
&+s'g_1\left\{(1+m_2'c')\sin2☾\sin2\varphi+(c'+m_2')\cos2☾\cos2\varphi\right\}\\
&+s'g_2\left\{\left(1+\frac{3m_2'-\gamma_2'c'}{2}\right)\sin(3☾-\Gamma')\sin2\varphi+\left(c'+\frac{3m'-\gamma_2'}{2}\right)\cos(3☾-\Gamma')\cos2\varphi\right\}\\
&-s'g_3\left\{\left(1+\frac{m_2'+\gamma_2'c'}{2}\right)\sin(☾+\Gamma')\sin2\varphi+\left(c'+\frac{m_2'+\gamma_2'}{2}\right)\cos(☾+\Gamma')\cos2\varphi\right.\\
&+s''g_4\left\{\cos(☾-\Gamma')\cos2\varphi+\frac{m_2'-\gamma_2'}{2}\sin(☾-\Gamma')\sin2\varphi\right\}\\
&-g_8\left\{\left[c'+\left(m_2'-\frac{\omega_2}{2}\right)c''\right]\sin(2☾-\Omega)\sin2\varphi+\left[c''+\left(m_2'-\frac{\omega_2}{2}\right)c'\right]\cos(2☾-\Omega)\cos2\varphi\right\}.\\
\frac{s'\Delta\psi}{H'n}=&-\tfrac{1}{2}s''(a_0+a_1f)\sin2\varphi-b_1f\left\{-\left(c'+\frac{\omega_2}{2}c''\right)\cos\Omega\sin2\varphi+\left(c''+\frac{\omega_2}{2}c'\right)\sin\Omega\cos2\varphi\right.\\
&+s'c_1\left\{-(1+m_2c')\cos2\odot\sin2\varphi+(c'+m_2)\sin2\odot\cos2\varphi\right\}\\
&+s'c_2\left\{-\left(1+\frac{3m_2-\gamma_2}{2}c'\right)\cos(3\odot-\Gamma)\sin2\varphi+\left(c'+\frac{3m_2-\gamma_2}{2}\right)\sin(3\odot-\Gamma)\cos2\varphi\right\}\\
&+s'g_1\left\{-(1+m_2'c')\cos2☾\sin2\varphi+(c'+m_2')\sin2☾\cos2\varphi\right\}\\
&+s'g_2\left\{-\left(1+\frac{3m_2'-\gamma_2'}{2}c'\right)\cos(3☾-\Gamma')\sin2\varphi+\left(c'+\frac{3m_2'-\gamma_2'}{2}\right)\sin(3☾-\Gamma')\cos2\varphi\right\}
\end{aligned}$$

$$
(26)\ (suite).\quad \left\{\begin{aligned}
&-s'g_3\left\{-\left(1+\frac{m_2'+\gamma_2'}{2}c'\right)\cos(\text{☾}+\Gamma')\sin 2\varphi+\left(c'+\frac{m_2'+\gamma_2'}{2}\right)\sin(\text{☾}+\Gamma')\cos 2\varphi\right\}\\
&+s''g_4\left\{\sin(\text{☾}-\Gamma')\cos 2\varphi-\frac{m_2'-\gamma_2'}{2}\cos(\text{☾}-\Gamma')\sin 2\varphi\right\}\\
&-g_8\ \left\{-\left[c'+\left(m_2'-\frac{\omega_2}{2}\right)c''\right]\cos(2\text{☾}-\Omega)\sin 2\varphi+\left[c''+\left(m_2'-\frac{\omega_2}{2}\right)c'\right]\sin(2\text{☾}-\Omega)\cos 2\varphi\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

16. Avant de passer aux nombres, nous convertirons encore les longitudes moyennes en longitudes vraies, ce qui présente un double avantage : de faciliter le calcul et de faire disparaître à très peu près les termes en $3\odot-\Gamma$ et en $3\text{☾}-\Gamma'$, en sorte qu'on pourra les omettre dans les formules. Il suffira, pour le Soleil comme pour la Lune, de s'arrêter aux termes du premier ordre, en écrivant $\sin 2\odot_m=\sin 2\odot-2e\sin(3\odot-\Gamma)+2e\sin\ \odot+\Gamma$; pour le cosinus, comme pour la Lune, on aura les mêmes formules.

Aux termes en $\cos 2\odot$ ou en $\cos 2\text{☾}$ de la formule (20), il y aura donc à ajouter (nous laissons de côté les très petits termes en m_2, etc.)

$$
-\frac{s'ec_1}{m_1}\cos(3\odot-\Gamma)+\frac{s'ec_1}{m_1}\cos(\odot+\Gamma),
$$

et les mêmes termes, mutatis mutandis, pour la Lune, ainsi que pour les termes en $\sin 2\odot$ ou en $\sin 2\text{☾}$ de l'expression $s'\Delta\psi$.

Le coefficient du terme en $\cos(3\odot-\Gamma)$, dans l'expression en longitudes vraies, sera donc :

$$
s'\left\{\frac{c_2}{3m_1-\gamma_1}-\frac{ec_1}{m_1}\right\}=\frac{s'c_2}{3m_1}\left(1-3e\frac{c_1}{c_2}\right),
$$

en négligeant γ_1, qui est insensible.

La valeur numérique du facteur $1-3e\frac{c_1}{c_2}$ n'est guère supérieure à 0.15 ; et, comme le le coefficient $\frac{s'c_2}{3m_1-\gamma_1}$ du terme en $3\odot-\Gamma$, dans l'expression de $\Delta\theta$ en longitudes moyennes, est égal à 0″.021 seulement, ce même terme sera négligeable dans l'expression en longitudes vraies. Il en est également ainsi pour la Lune, où le facteur correspondant

$$
\left(\frac{1}{1-\dfrac{\gamma_1'}{3m_1'}}-\frac{3}{2}e'\frac{g_1}{g_2}\right)
$$

est égal à 0.14 seulement ; or, en longitudes moyennes, le coefficient du terme en $3\text{☾}-\Gamma'$ de $\Delta\theta$ est 0″.013 ; en longitudes vraies, ce terme sera donc négligeable.

Les termes de $s'\Delta\psi$ ayant les mêmes coefficients, la même conclusion s'y applique. Seulement, aux uns et aux autres viendront s'ajouter les termes $\frac{s'ec_1}{m_1}\cos(\odot+\Gamma)$ dans $\Delta\theta$, le même terme en $\sin(\odot+\Gamma)$ dans $s'\Delta\psi$, et les termes lunaires correspondants.

Donc, dans les formules (20), on supprimera les termes en $3\odot - \Gamma$ et en $3☾ - \Gamma'$, et l'on ajoutera aux coefficients de

$$\cos(\odot + \Gamma), \qquad \sin(\odot + \Gamma), \qquad \cos(☾ + \Gamma'), \qquad \sin(☾ + \Gamma')$$

respectivement

$$s'ec_1\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{c'}{n}\right), \quad s'ec_1\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{c'n}\right), \quad s'e'g_1\left(\frac{1}{2m_1'} + \frac{c'}{n}\right), \quad s'e'g_1\left(\frac{1}{2m_1'} + \frac{1}{c'n}\right),$$

ou

$$s'\frac{ec_1}{2m_1}[0.00218], \quad s'\frac{ec_1}{2m_1}[0.00259], \quad s'\frac{e'g_1}{2m_1'}[0.03250], \quad s'\frac{e'g_1}{2m_1'}[0.03334].$$

Les termes en $\odot + \Gamma$ et en $☾ + \Gamma'$ disparaîtront ainsi en même temps que ceux en $3\odot - \Gamma$ et en $3☾ - \Gamma'$.

Dans la nutation diurne, les coefficients des termes en $3\odot - \Gamma$ auraient, au plus, pour valeur $0''.0015$ et se réduiraient à $0''.0010$ en passant aux longitudes vraies. On devra négliger ces termes avec d'autant plus de raison qu'on ne tient pas compte des termes analogues très faibles de la nutation bradléenne.

Il en est de même quant aux termes en $3☾ - \Gamma'$. Seulement, ici, un calcul rigoureux doit tenir compte des termes en $☾ + \Gamma'$.

Donc, en employant les longitudes vraies dans la formule (26), on supprimera les termes en $3\odot - \Gamma$ et en $3☾ - \Gamma'$, et l'on remplacera le coefficient $-s'g_3$ des termes en $☾ + \Gamma'$ par $-s'\,g_3 - e'g_1$); plus correctement, si l'on veut, $-s'g_3(1 + m_2'c')$ par

$$-s'\left(g_3(1 + m_2'c') - e'g_1\left(1 + \frac{m_2' + \gamma_2'}{2}c'\right)\right);$$

de même, en remplaçant c' par $\frac{1}{c'}$; mais ce luxe de rigueur est tout à fait superflu dans le calcul de termes aussi faibles.

On remarquera que les deux expressions de la nutation diurne, en obliquité et en longitude, peuvent se ramener à la forme suivante, dans laquelle nous désignerons par ν le coefficient de cette nutation :

$$(27) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\nu}\Delta\theta = \Sigma_1 \cos 2\varphi + \Sigma_2 \sin 2\varphi \ \text{ et } \frac{1}{\nu}s'\Delta\psi = -\Sigma_1 \sin 2\varphi + \Sigma_2 \cos 2\varphi,$$

Σ_1 et Σ_2 représentant les fonctions suivantes, exprimées en longitudes *vraies* :

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 = & -\tfrac{1}{2}s''(a_0 + a_1 f) - b_1 fc'' \cos \Omega + \tfrac{1}{2}s''c_1 \cos 2\odot \\
& + \tfrac{1}{2}s''g_1\left(1 + \frac{m_2'}{c'}\right)\cos 2☾ - \tfrac{1}{2}s''(g_3 - e'g_1)\left(1 + \frac{m_2' + \gamma_2'}{2c'}\right)\cos(☾ + \Gamma') \\
& + s''g_4 \cos(☾ - \Gamma') - c''g_8\left(1 + m_2'\frac{c'}{c''}\right)\cos(2☾ - \Omega) \\
\Sigma_2 = & \qquad\qquad - b_1 fc' \sin \Omega + s'c_1 \sin 2\odot \\
& + s'g_1(1 + m_2'c')\sin 2☾ - s'(g_3 - e'g_1)\left(1 + \frac{m_2' + \gamma_2'}{2}c'\right)\sin(☾ + \Gamma') \\
& + s''g_4\frac{m_2' - \gamma_2'}{2}\sin(☾ - \Gamma') - c'g_8\left(1 + m_2'\frac{c''}{c'}\right)\sin(2☾ - \Omega).
\end{aligned}$$

Nous avons négligé, dans ces expressions, quelques facteurs tout à fait insignifiants. Les termes en $☾ + \Gamma'$, de même que le terme en $\sin(☾ - \Gamma')$ en ont de si faibles que nous ne les reproduirons pas dans les expressions numériques.

Nous avons négligé, dans ces expressions, quelques facteurs tout à fait insignifiants. Les termes en $\leftmoon + \Gamma'$, de même que le terme en $\sin(\leftmoon - \Gamma')$ en ont de si faibles que nous ne les reproduirons pas dans les expressions numériques.

17. Dans celles qui suivent, nous laisserons de côté tous les termes qui n'atteignent pas à peu près $0''.01$, ainsi que le terme de précession, parce que c'est la précession générale, et non la luni-solaire, qui doit figurer dans la variation en longitude. L'unité est la seconde d'arc.

La nutation *bradléenne* s'exprimera par

$$(28)\left\{\begin{aligned}
\Delta\theta =\; & \underset{[0.96450]}{9''.215}\cos\ascnode - \underset{[8.9554]}{0''.090}\cos 2\ascnode + \underset{[9.74282]}{0''.5531}\cos 2\odot + \underset{[8\,9752]}{0''.096}\cos 2\leftmoon + \underset{[8.2624]}{0''.018}\cos(2\leftmoon - \ascnode) \\
& - \underset{[7.965]}{0.0092}\cos(\odot + \Gamma) \\
\sin\theta\Delta\psi =\; & 0.00023\,\Delta\theta.t - \underset{[0.83638]}{6''.861}\sin\ascnode + \underset{[8.9554]}{0''.090}\sin 2\ascnode - \underset{[9.74323]}{0''.5536}\sin 2\odot - \underset{[8.9803]}{0''.097}\sin 2\leftmoon - \underset{[8.1344]}{0''.014}\sin(2\leftmoon - \ascnode) \\
& + \underset{[7.965]}{0.0092}\sin(\odot + \Gamma) + \underset{[8.7065]}{0''.051}\sin(\odot - \Gamma) + \underset{[8.4332]}{0''.027}\sin(\leftmoon - \Gamma').
\end{aligned}\right.$$

Il a été tenu compte, dans l'expression de $\sin\theta\Delta\varphi$, des termes du second ordre trouvés ci-dessus, et dont le principal $0.00023\,\Delta\theta.t$ ne doit pas être omis, surtout dans une détermination nouvelle de la constante de la nutation.

On remarquera que nos coefficients des termes en $2\odot$ et en $2\leftmoon$ ne sont pas identiques dans les deux expressions, tandis qu'ils le sont pour tous les astronomes, qui n'ont employé que les facteurs $\frac{1}{2m_1}$ et $\frac{1}{2m'_1}$, au lieu de ceux de nos formules (20), beaucoup plus corrects. Une autre expression, très utile également dans la réduction des coordonnées équatoriales, est celle de $\cos\theta\Delta\varphi$, que nous représenterons par $\Delta\mu$:

$$(28^{\text{bis}})\left\{\begin{aligned}
\Delta\mu = 0.00057\,\Delta\theta.t & - 15''.815\sin\ascnode + 0''.208\sin 2\ascnode - 1''.276\sin 2\odot - 0''.223\sin 2\leftmoon \\
& - 0''.031\sin(2\leftmoon - \ascnode) + 0.0367\sin(\odot + \Gamma) + 0''.115\sin(\odot - \Gamma) \\
& + 0''.0625\sin(\leftmoon - \Gamma').
\end{aligned}\right.$$

La nutation *diurne* est, comme on l'a vu précédemment, exprimée par

$$(29)\left\{\begin{aligned}
\Delta\theta &= \nu[\Sigma_1\cos 2\varphi + \Sigma_2\sin 2\varphi]. \\
\sin\theta\Delta\psi &= \nu[-\Sigma_1\sin 2\varphi + \Sigma_2\cos 2\varphi]. \\
\Sigma_1 &= -1.152 - \underset{[9.1271]}{0.134}\cos\ascnode + \underset{[9.5565]}{0.36}\cos 2\odot + \underset{[9.9138]}{0.82}\cos 2\leftmoon + \underset{[9.1461]}{0.14}\cos(2\leftmoon - \ascnode + \underset{[9.000]}{0.10}\cos(\leftmoon - \Gamma'). \\
\Sigma_2 &= \qquad - \underset{[9.2553]}{0.18}\sin\ascnode + \underset{[9.5911]}{0.39}\sin 2\odot + \underset{[9.9445]}{0.88}\sin 2\leftmoon + \underset{[9.3222]}{0.21}\sin(2\leftmoon - \ascnode).
\end{aligned}\right.$$

On prendra $\nu = 0''.0666$, et L, qui entre dans l'expression de $\varphi = L + t$, égal à 2^h15^m pour Greenwich, égal à $2^h15^m + l$ pour un lieu à l heures de longitude occidentale de Greenwich.

Enfin on ajoutera à ces expressions (28) et (29) celles de la nutation eulérienne, que nous reproduisons ci-dessous :

$$(30)\;.\;.\;.\;.\;.\;\left\{\begin{aligned}
\Delta\theta &= -\mu_1\sin[(1 + \iota)\varphi + \beta_1] + \nu_1\sin[(-1 + \iota)\varphi + \beta_1] \\
\sin\theta\Delta\psi &= -\mu_1\cos[(1 + \iota)\varphi + \beta_1] - \nu_1\cos[(-1 + \iota)\varphi + \beta_1].
\end{aligned}\right.$$

18. Il a été dit ci-dessus que la nutation diurne est insensible pour une Terre solide; démontrons-le. Le mouvement de la Terre ne dépend que des rapports $\frac{A}{C}=\alpha, \frac{B}{C}=\beta$. La constante de la précession luni-solaire a pour facteur $1-\alpha+1-\beta$; celle de la nutation bradléenne $\frac{1-\alpha}{\beta}+\frac{1-\beta}{\alpha}$; celle de la nutation diurne est égale à $\frac{h}{2n}\left\{\frac{1-\alpha}{\beta}-\frac{1-\beta}{\alpha}\right\}$.

La Terre différant fort peu d'un ellipsoïde de révolution, on a, à très peu près, $\beta=\alpha$; prenons $\beta=\alpha(1+p)$, et négligeons le carré de p; on aura alors

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{\beta}+\frac{1-\beta}{\alpha}\right)=\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1-\frac{p}{2}\right),$$

qu'on écrira $q\left(1-\frac{p}{2}\right)$.

Or, la période de la nutation eulérienne s'exprime, en jours sidéraux, par

$$\sqrt{\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}}=\frac{1}{q}\sqrt{\frac{q(1+p)}{q-p}},$$

et le coefficient de la nutation diurne par

$$\frac{h}{2n}(1-\alpha)\frac{\beta+\alpha-1}{\alpha\beta}=\frac{h}{2n}p\left(1-\frac{q}{1+p}\right).$$

Si elle est nulle, $p=0$, et la période de la nutation eulérienne $\frac{1}{q}$ est égale à 304 jours. Nous avons trouvé une période de 321 jours; admettons qu'elle soit relative à la Terre entière, on aura, à bien peu près,

$$\sqrt{\frac{q(1+p)}{q-p}}=\frac{321}{305}.$$

Mais $q=0.00328$; d'où l'on tire $p<0.008\ q<0.000026$; et le coefficient de la nutation diurne serait au plus égal à $0.000026 \times 0''\!.5766=0''\!.000015$.

Un géomètre contemporain des plus distingués, sans s'occuper de la fluidité intérieure du globe, a cru pouvoir récemment affirmer l'insignifiance absolue de la nutation diurne (*), reconnue par nous-même, dès le début de nos travaux, pour une Terre solide (**). Aussi est-ce l'hypothèse de la fluidité superficielle du noyau qui nous a conduit à rechercher, pour l'écorce, les formules de la nutation diurne, et à déduire les coefficients de celle-ci des observations, au moyen d'un grand nombre de méthodes différentes.

L'existence de la nutation diurne démontre donc, d'une manière irréfutable, le fait, affirmé par un grand nombre de géologues, de la fluidité superficielle du noyau du globe.

(*) Les formules qu'il en donne sont incorrectes : elles manquent d'un terme périodique des plus important, celui du nœud.

(**) *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du Monde*. Introduction. Bruxelles, Hayez, 1884.

19. L'ensemble des expressions (28) à (30) représente, d'une manière absolument correcte (à part les incertitudes dont il sera question dans le paragraphe suivant), le mouvement de l'équateur *géographique* par rapport à un plan et à une droite fixes dans l'espace.

Supposons ce plan et cette droite déterminés par des étoiles fixes.

Nos expressions seront celles du déplacement des axes principaux de la Terre par rapport à ces étoiles fixes; ou bien, si nous adoptons maintenant l'hypothèse, réalisée dans la pratique des observations, de la Terre fixe, et du Ciel mobile autour d'elle, les expressions précédentes sont celles du déplacement des étoiles par rapport aux axes *principaux* de la Terre, considérés comme *fixes dans l'espace.*

Le plus petit de ceux-ci détermine le pôle *géographique*, qui est fixe, pourvu que la Terre ne subisse pas de modification dans sa forme physique ou mécanique, et alors la latitude *géographique* d'un lieu de la Terre est constante; mais la latitude actuellement calculée, nommée latitude *astronomique*, est sujette à des variations apparentes provenant de la négligence des expressions (29) et (30) dans les formules de réduction usitées.

Le méridien *géographique* est également fixe; et c'est dans ce plan que doivent se faire les observations, si l'on veut les réduire correctement

Les longitudes des lieux de la Terre sont donc constantes, comme leurs latitudes.

La vitesse de la Terre autour de son axe d'inertie est constante (à part une variation périodique très faible que nous rechercherons dans le paragraphe suivant).

C'est cette vitesse autour de l'axe d'inertie qui intervient *seule* dans nos formules; aussi ne nous occuperons-nous, ultérieurement, ni du calcul de la vitesse autour de l'axe instantané de rotation, $\omega = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$, ni de la position variable de cet axe dans l'intérieur de la Terre.

Ces recherches sont certainement des spéculations intéressantes, mais absolument superflues dans la pratique de l'astronomie; elles ne seraient nécessaires que si les formules étaient rapportées au pôle instantané, ce qui n'est le cas d'aucune des formules usitées, quoiqu'un astronome très distingué ait cru qu'il avait résolu ce problème.

Je doute fort qu'on l'aborde à nouveau, à cause des négligences auxquelles il donne fatalement lieu; je me demande surtout comment on définirait l'heure dans ce nouveau système de coordonnées.

Certes, on pourrait être tenté d'y recourir si, à côté de la nutation bradléenne, il n'existait que l'eulérienne, laquelle serait éliminée dans ce système d'axes. Mais, d'abord, la nutation diurne doit être ajoutée à la bradléenne; pourquoi, alors, ne pas se servir des formules sûres rapportées aux axes principaux, c'est-à-dire, ne pas ajouter aussi la nutation eulérienne du pôle géographique; ensuite, pourquoi masquer celle-ci, et la retrouver cachée dans les variations de longitude, de latitude et d'heure, qu'on est réduit alors à déterminer d'une manière purement empirique, malgré la puissance de l'analyse de Laplace et de ses successeurs?

Un point important, au contraire, pour l'astronomie, est de savoir si l'axe d'inertie est fixe dans l'intérieur de la Terre. Nous ne croyons pas encore pouvoir nous prononcer à cet égard (*).

Pour passer aux expressions de la nutation en ascension droite et en déclinaison, on fera généralement usage des formules connues

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \Delta\mu + \operatorname{tg}\delta \,\{\, \sin\alpha \sin\theta\Delta\psi - \cos\alpha\Delta\theta \,\},\\ \Delta\delta &= \phantom{\Delta\mu + \operatorname{tg}\delta \,\{\,} \cos\alpha \sin\theta\Delta\psi + \sin\alpha\Delta\theta;\end{aligned}$$

on supprimera $\Delta\mu$, comme il sera dit ci-après, en ce qui concerne la nutation eulérienne et la nutation diurne, à moins qu'on n'en ait tenu compte dans la détermination de l'heure.

Pour les circompolaires, ces formules sont insuffisantes.

Nous rechercherons, à la fin du paragraphe suivant, quels sont les termes du second ordre que l'on doit ajouter dans ce cas.

Auparavant nous avons à examiner si la vitesse angulaire n de la Terre autour de son axe d'inertie est constante, comme nous l'avons admis dans l'intégration des deux premières équations d'Euler.

20. Ici, il y a une distinction essentielle à faire.

Pour nous, la Terre est composée d'une écorce solide séparée d'un noyau également solide par une couche plus ou moins fluide.

Or, d'après un théorème affirmé par W. Thomson (**) ainsi que par Delaunay (***), et démontré par M. Ronkar (IV) :

« Dans les mouvements à courte période (telle la nutation diurne), le mouvement de l'écorce est indépendant de celui du noyau ;

Dans les mouvements à longue période (telle la précession, et probablement le terme nodal de la nutation), l'écorce et le noyau sont solidaires;

Dans les mouvements à période intermédiaire, l'écorce se meut comme si elle entraînait avec elle une partie du noyau d'autant plus considérable que la période est plus longue. »

Il s'ensuit que, dans la théorie précédente, les seuls coefficients sûrs sont ceux de la précession et du terme nodal, qui, du reste, sont déterminés par l'observation; que la valeur qu'on en déduit pour $\mu_1 = \frac{2C - A - B}{2C}$ est relative à la Terre entière; que, pour les termes solaires et lunaires, ce ne sont plus les moments d'inertie du noyau, ni non plus ceux de l'écorce, qui entrent dans l'expression de μ_1, mais des moments intermédiaires, dont la théorie ne pourrait déterminer la valeur, vu notre ignorance quant aux dimensions et à la forme du noyau ; c'est donc aussi à l'observation qu'on devrait recourir pour déter-

(*) Voir notre *Essai sur les variations de latitude*, extrait de l'*Annuaire de l'Observatoire royal* pour 1894.

(**) W. THOMSON, *On the rigidity of the Earth.* (PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS, 1863.) — *Treatise on Natural Philosophy* (§§ 847, 848). — *Association britannique.* Congrès de Glasgow, 1876.

(***) DELAUNAY, Comptes rendus, 13 et 20 juillet 1868.

(IV) *Mémoires de l'Acad. royale des sciences de Belgique*, 1888; pp. 489 à 496.

miner les coefficients de ces termes; et de là le peu d'importance que nous attribuons aux termes lunaires, qui seront les plus altérés;

Que, pour la nutation diurne, les moments qui entrent dans son facteur $\frac{C-A}{B} - \frac{C-B}{A}$ sont ceux de l'écorce seule.

Quant aux mouvements de rotation de l'écorce et du noyau, nous ignorons complètement si celui-ci est sujet à une nutation eulérienne, et nous admettrons, faute de données, que cette dernière n'existe pas pour lui.

Le mouvement relatif de l'écorce par rapport au noyau aura donc une période qui, déterminée par $\iota = \sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}$, serait de 304 jours pour une terre solide, mais qui sera certainement un peu plus longue pour l'écorce, comme nous l'avons affirmé en 1890 (*), d'après les principes qui précèdent. Mais surtout, l'écorce est soumise à la nutation diurne, dont le coefficient nous semble bien déterminé, et il en résulte, comme on va le voir, de légères variations périodiques de sa vitesse angulaire.

21. La troisième équation d'Euler

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{B-A}{C}(lm + nr)$$

est plus spécialement applicable à l'écorce terrestre.

Si nous développons

$$nr = -3fm_1^2 \frac{xy}{R^2}\left(\frac{D}{R}\right)^3$$

pour chacun des deux astres attirants, f étant égal à l'unité ou à 2.175 selon qu'il s'agit du Soleil ou de la Lune, nous trouverons d'abord, en nous bornant aux termes du premier ordre, puisque, de sa nature, aucun terme ne peut s'accroître par l'intégration :

$$\frac{8xy}{R^2}\left(\frac{D}{R}\right)^3 = -2s'^2\left\{\left(1 - \frac{3}{2}i^2 + 3e'^2\right)f + 1 + 3e^2\right\}\sin 2\varphi$$
$$+ \left(1 + \frac{i^2}{2} + \frac{e'^2}{2}\right)f\,\{2☾\} + \left(1 + \frac{e^2}{2}\right)\{2\odot\},$$

$\{M\}$ représentant $(1 + c')^2 \sin(M - 2\varphi) - (1 - c')^2 \sin(M + 2\varphi)$; d'où l'on déduit

$$-\frac{8nr}{3m_1^2} = -1.006 \sin 2\varphi + 8.04 \sin(2☾ - 2\varphi) + 3.68 \sin(2\odot - 2\varphi).$$

(*) *Bull. de l'Ac. roy. de Belg.*, 1890, n° 7, et « *Sur la période astronomique dite mensuelle* » dans les Notices extraites de l'*Annuaire* pour 1891.

Le terme lm du second membre de l'équation d'Euler est absolument insensible vis-à-vis du terme nr. On peut donc écrire simplement

$$\frac{dn}{n} = \frac{3}{8}\frac{m_1^2}{n}\frac{B-A}{C}\left\{-1.006 \sin 2\varphi + \ldots\right\} dt.$$

Pour intégrer cette équation on peut admettre que $d\varphi = n_1 dt$, n_1 ne différant de n que d'une fraction très petite, négligeable ici (voir ci-après les articles relatifs à l'heure), et que n est constant dans le second membre.

Le coefficient $\frac{B-A}{C}$, pour l'écorce, peut se déduire du coefficient ν de la nutation diurne, dont l'expression est $\frac{3}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2 (B-A)\,\frac{B+A-C}{AB}$; or $\frac{B+A-C}{AB}$ peut s'écrire $\frac{C-b-a}{(C-a)(C-b)}$, qui se réduit à $\frac{1}{C}$, si l'on néglige ab vis-à-vis de C^2; alors

$$\nu = \frac{3}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2 \frac{B-A}{C} \quad \text{et}$$

$$\frac{dn}{n} = \nu\left\{-1.006 \sin 2\varphi + \ldots\ldots\right\} d\varphi.$$

Intégrant, on obtient :

$$l.n = l.c^{te} + \tfrac{1}{2}\nu\left\{1.006 \cos 2\varphi + \ldots\ldots\right\};$$

d'où, en supposant $n = c^{te} \times \left(1 + \frac{\Delta n}{n}\right)$:

$$\frac{\Delta n}{n} = \nu\left\{0.503 \cos 2\varphi + \frac{4.02}{1-m_2'}\cos(2☾ - 2\varphi) + \frac{1.84}{1-m_2}\cos(2\odot - 2\varphi)\right\}.$$

Les variations périodiques auxquelles est sujette la vitesse angulaire de l'écorce terrestre ne peuvent donc guère dépasser la millionième partie de sa valeur.

22. Les variations périodiques de l'heure, dépendant de la même cause, seront néanmoins assez sensibles pour qu'il soit utile d'en tenir compte dans les réductions.

En effet, on a

$$d\varphi = ndt = cdt + \Delta n dt = cdt + \nu\frac{\Delta n}{n} d\varphi.$$

Remplaçant $\frac{\Delta n}{n}$ par l'expression précédente, et intégrant, on aura, en désignant par $\Delta\varphi$ la variation $\varphi - ct$ de φ :

$$(31)\ldots\quad \Delta\varphi = -\tfrac{1}{2}\nu\left\{0.5 \sin 2\varphi + \frac{4.02}{(1-m_2')^2}\sin(2☾ - 2\varphi) + \frac{1.84}{(1-m_2)^2}\sin(2\odot - 2\varphi)\right\}.$$

La valeur du coefficient de ν peut atteindre 3.2; celle de ν est, en secondes de temps, $\frac{0.0666}{15}$; leur produit $0^s.014$.

La variation horaire produite par la libration terrestre entre les deux instants 0 et φ sera :

$$\left\{\Delta\varphi\right\}_0^\varphi = -\nu \sin\varphi\left\{0.5 \cos\varphi + 4.3 \cos(2☾_m - \varphi) + 1.85 \cos(2\odot_m - \varphi)\right\},$$

$\odot_m$ et $☾_m$ désignant les longitudes moyennes des astres entre 0 et φ.

Le maximum de variation de l'heure sera atteint aux syzygies équinoxiales ($☾$ et $\odot = 0°$ ou $180°$), entre 0^h et 3^h sidérales du *premier méridien* ($\varphi = 0°$ et $\varphi = 45°$), et également, mais en signe contraire, entre 21^h et 0^h; de même entre 9^h et 12^h, et également, en signe contraire, entre 12^h et 15^h.

En six heures donc, la variabilité du mouvement de rotation de l'écorce terrestre produit une inégalité horaire qui s'élèverait à près de trois centièmes de seconde de temps, et qui semble pouvoir être accusée par des observations très précises. Dans la réduction de celles-ci, il ne paraît pas possible de négliger cette inégalité.

J'ai depuis longtemps, désigné sous le nom de *libration terrestre* ce balancement périodique de l'écorce du globe (*), et l'ai signalé, en 1888, dans les lignes suivantes, qui terminent ma *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du Monde* (**) :

« La nutation diurne n'est possible que si le mouvement de l'écorce solide est plus ou moins indépendant de celui du noyau fluide qu'elle recouvre. Or, la nutation diurne est prouvée par les meilleures observations. Cette indépendance existe donc. Pourquoi, dès lors, l'écorce n'obéirait-elle pas, dans son mouvement de rotation autour de son axe, aux attractions luni-solaires, de même que leur obéit l'Océan dans ses marées, dont les oscillations présentent la plus grande analogie avec celles de cet écorce?

» Ainsi donc, cette majestueuse horloge du ciel, sur la régularité absolue de laquelle les astronomes de tous les temps ont cru pouvoir étayer leurs observations, est sujette elle-même à des fluctuations périodiques, dans le court intervalle de quelques heures. Et l'homme, à qui il a été donné, par le Créateur, de pénétrer de plus en plus les secrets de la nature, parviendra un jour, si même il n'y est déjà arrivé, à réaliser des appareils doués d'un mouvement plus uniforme que celui qui anime l'écorce solide du globe autour de son axe instantané de rotation. »

Heure actuelle et heure correcte.

23. Nous avons signalé précédemment une inégalité horaire dont l'origine est la même que celle de la nutation diurne. Nous en ferons provisoirement abstraction.

Elle n'est pas la seule correction horaire que doivent subir les formules de réduction usitées (***).

(*) *Annuaire de l'Observatoire* pour 1887, et *Traité des réductions stellaires*, p. 53.

(**) Voir, dans ce même ouvrage, la démonstration des formules de la nutation diurne exprimées en fonction des ascensions droites et des déclinaisons du Soleil et de la Lune, formules dont nous avons précédemment fait usage dans la détermination des constantes de cette nutation au moyen des observations de la Polarissime.

(***) Je ne m'occupe pas ici de la pratique erronée qui consiste à observer dans le méridien *instantané*, tandis qu'Oppolzer lui-même définit l'heure par rapport à un méridien *fixe*, d'où une contradiction absolue entre l'heure observée et l'heure définie. (Voir les notices intitulées : *De la supériorité de la méthode de Laplace sur celle d'Oppolzer* et *Expression complète et signification véritable de la nutation initiale*, extraites des volumes de l'*Annuaire* pour 1896 et pour 1893.)

On définit actuellement 0^h sidérale l'instant du passage de l'équinoxe *vrai* par le méridien géographique.

Cette définition, qui était correcte aussi longtemps que la nutation n'était pas soupçonnée, ne répond plus aux exigences de l'astronomie moderne.

Si Bradley, lorsqu'il a découvert la nutation, avait songé à corriger l'heure de la nutation de l'équinoxe en ascension droite, afin de lui laisser le caractère d'uniformité absolue qu'elle doit revêtir, la définition nouvelle que nous proposons eût été admise d'emblée en même temps que la nutation, dont elle dérive nécessairement.

Nous définirons *0^h sidérale* l'instant du passage de l'équinoxe *médian* par le méridien géographique; *l'heure sidérale*, t_M, l'angle horaire de l'équinoxe médian, compté à partir du méridien géographique; équinoxe médian, la position de l'équinoxe vrai s'il était soumis à la précession seule, ou affranchi de toute nutation.

Nous continuerons à définir l'ascension droite α d'un astre, la distance de son cercle horaire à l'équinoxe *vrai*, et appellerons α_M la distance de ce cercle à l'équinoxe médian.

En vertu de ces définitions, l'angle horaire d'une étoile pourra s'exprimer indifféremment par

$$\eta = t_A - \alpha = t_M - \alpha_M,$$

en désignant par t_A l'heure actuellement usitée, par t_M l'heure *correcte*, et en faisant, pour le moment, abstraction de la libration terrestre.

Désignant par $\Delta\mu$ la nutation de l'équinoxe en ascension droite, on aura

$$t_A = t_M + \Delta\mu.$$

Soit α_0 l'ascension droite moyenne d'un astre au 1er janvier, τ le temps écoulé depuis cette époque, $\alpha_0 + m\tau = \alpha_\tau$, $m\tau$, et ultérieurement $n\tau$, désignant les termes besséliens relatifs à la précession. Faisons rentrer, pour simplifier les formules, $n\tau$ dans l'expression de $\sin\theta\Delta\psi$, que nous écrirons, ainsi complétée, $\sin\theta\Delta\lambda$, en sorte que $\Delta\lambda$ sera la variation complète en longitude depuis la position initiale.

Dans un passage méridien, l'ascension droite observée étant l'heure sidérale, selon la définition actuelle, on a, en appelant $\Delta\alpha$ la différence entre cette ascension droite et α_τ:

$$\Delta\alpha = t_A - \alpha_\tau = \Delta\mu - \operatorname{tg}\delta f \cos(F + \alpha);$$

selon notre définition

$$(32) \qquad \Delta\alpha_M = t_M - \alpha_\tau = -\operatorname{tg}\delta f \cos(F + \alpha).$$

Rapprochons ces formules de la suivante :

$$(32^{bis}) \qquad \Delta\delta = f \sin(F + \alpha),$$

nous y trouvons une symétrie parfaite avec la nôtre, non avec la formule usuelle;

$f \sin (F + \alpha)$ et $- f \cos (F + \alpha)$ représentent respectivement $\cos \alpha \sin \theta \Delta\lambda + \sin \alpha \Delta\theta$ et $\sin \alpha \sin \theta \Delta\lambda - \cos \alpha \Delta\theta$; ou, plus simplement, nous faisons

$$(33) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sin \theta \Delta\lambda = f \sin F, \quad \Delta\theta = f \cos F,$$

ce qui permet de construire des tables de f et F, et de calculer très simplement les éphémérides par leur moyen.

Il est vrai que t_M n'est pas l'ascension droite, puisque l'origine de la première est l'équinoxe médian, de la seconde l'équinoxe vrai; en sorte que α n'est pas simplement égal à $t_M = \alpha_\tau + \Delta\alpha_M$, mais bien à $t_M + \Delta\mu = \alpha_\tau + \Delta\alpha_M + \Delta\mu$.

Dans les tables précitées, on inscrira donc, pour chaque jour, outre les valeurs de f et de F, celles de $\Delta\mu$ et de $m\tau$; cette dernière servira à calculer $\alpha_\tau = \alpha_0 + m\tau$, et l'on aura

$$\alpha = t_M + \Delta\mu = \alpha_\tau + \Delta\mu - \operatorname{tg}\delta f \cos(F + \alpha),$$

formule identique à celle qu'on emploie, $\alpha = t_A$, puisque $t_A = t_M + \Delta\mu$,

Les formules précédentes ne tiennent compte que de la précession et de la nutation bradléenne; il faudra ajouter aux seconds membres la nutation culérienne et la nutation diurne, qui, dépendant de la longitude de l'observatoire, ne peuvent être réduites en tables analogues.

24. En résumé, ce que nous proposons revient tout simplement à définir une heure sidérale, non pas *à peu près* (*), mais *rigoureusement* uniforme, en l'affranchissant de la nutation de l'equinoxe en ascension droite.

Et nous n'introduisons par là nulle autre modification dans les définitions astronomiques que celle-ci, abstraction faite ici de la libration terrestre : L'ascension droite d'une étoile, est l'heure (*correcte*) de son passage supérieur au méridien, ou l'ascension droite *médiane*, *augmentée* de la nutation de l'équinoxe en ascension droite.

On comprend maintenant pourquoi nous n'avons pas introduit $\Delta\mu$ dans nos formules des deux nutations à courte période en ascension droite; *actuellement*, en effet, $\Delta\mu$ rentre dans la correction de la pendule (**). Mais si l'on introduit ces deux nutations dans les expressions des ascensions droites des étoiles qui servent au calcul de l'heure, il ne faudra pas y supprimer $\Delta\mu$.

25. L'heure définie ci-dessus est rigoureusement uniforme; l'heure *réelle* ne l'est pas.

(*) L'à peu près n'est pas aussi peu que certains bons auteurs l'affirment. On a $\Delta\mu = 15.8 \sin \Omega + 1.25 \sin 2\odot$, en s'arrêtant aux deux termes prépondérants. Si, par exemple, à l'époque initiale, $\Omega = 182°25'$ et $\odot = 315°$, on aura $\Delta\mu = -1'',92 = -0^s.128$. Trois mois après, on aurait $\Delta\mu = +0^s.128$; c'est-à-dire qu'après trois mois, l'observation d'une étoile bien déterminée, correctement réduite et faite à une pendule parfaitement réglée, accuserait, entre l'ascension droite et l'heure de la pendule, un écart de $0^s.26$, imputable à la seule incorrection de la définition de l'heure, et intolérable dans l'état de précision actuel des observations.

(**) C'est un des anciens élèves de l'auteur, le Dr A. Thewis, qui lui a signalé ce dernier point, et l'a mis ainsi sur la voie de la définition nouvelle de l'heure.

Nous avons trouvé, en effet, une variation périodique $\Delta\varphi$ de l'heure. Or, c'est l'heure réelle qui détermine l'ascension droite. Au lieu de

$$\alpha = t_M + \Delta\mu$$

on aura donc $\alpha = t_M + \Delta\mu + \Delta\varphi$.

L'expression de $\Delta\varphi$ est donnée ci-dessus (30). Dans son second membre, on pourra, au lieu de φ, écrire $\varphi_M = t_M + L$.

En tenant compte de la libration terrestre, dont il a été fait abstraction ci-dessus :

L'ascension droite d'un astre est l'heure *correcte* de son passage supérieur au méridien, augmentée de la *nutation de l'équinoxe en ascension droite* et de la *libration terrestre.*

Probablement bien des astronomes jugeront à propos de faire rentrer dans la correction de la pendule, à cause de leur valeur très faible, la nutation eulérienne et la nutation diurne de l'équinoxe en ascension droite. Il en résultera naturellement une incorrection de l'heure analogue à celle que nous proposons d'éliminer. Mais, dans ce cas, on doit avoir soin de supprimer $\Delta\mu$ dans les expressions de $\Delta\alpha$ relatives à ces deux nutations.

26. Développons analytiquement, en quelques mots, les principes qui viennent d'être exposés.

De l'équation

$$\frac{d\varphi}{dt} = n + \cos\theta \frac{d\psi}{dt}$$

on déduit, dans l'hypothèse de n constant $= n_0$, en y ajoutant la partie constante m de $\cos\theta \frac{d\psi}{dt}$ (précession équatoriale), en posant $n_0 + m = n_1$, et en désignant par $\Delta\mu$ la nutation de l'équinoxe en ascension droite :

$$\varphi = n_1\tau + \Delta\mu$$

sur le premier méridien.

Sur un méridien quelconque, on aurait $t = \varphi - L$.

Mais, n étant variable, on a, comme il a été dit (20) :

$$\varphi = n_1\tau + \Delta\mu + \Delta\varphi.$$

L'heure *correcte* ne peut être définie que par

$$\varphi_M = n_1\tau,$$

τ désignant le temps écoulé depuis le passage initial, au premier méridien, de l'équinoxe *médian*, pour lequel $\Delta\mu$ est supposé égal à 0 ; elle suppose, en outre, le mouvement de l'écorce affranchi de la libration terrestre, ou $\Delta\varphi = 0$.

L'ascension droite d'un astre étant l'heure correcte de son passage supérieur au méridien, augmentée de $\Delta\mu + \Delta\varphi$, on aura, en supprimant $\Delta\mu$ dans les deux membres :

$$\begin{aligned}\varphi_M &= \alpha_0 + m\tau - \operatorname{tg}\delta f \cos(F + \alpha) - \Delta\varphi \\ &= \alpha_T + \Delta\alpha_M - \Delta\varphi.\end{aligned}$$

Dans la détermination de l'heure correcte, on fera donc complètement abstraction de la nutation de l'équinoxe en ascension droite.

Mais on la fera rentrer dans celle de l'ascension droite vraie

$$\alpha = \varphi = \varphi_M + \Delta\varphi + \Delta\mu.$$

Il va de soi que ces formules s'appliquent à un méridien quelconque, puisque si, d'une part $\varphi_M = t_M + L$, d'autre part, l'étoile passe L heures plus tard par le méridien L. On peut donc substituer t à φ dans ces formules, excepté toutefois dans le second membre de l'expression (31) de $\Delta\varphi$, où φ doit être remplacé par $t + L$.

27. Dans les développements qui précèdent, il n'a été tenu compte que des termes du second ordre du potentiel des forces perturbatrices.

Peut-être y aurait-il lieu de tenir compte, en ce qui concerne les termes à longue période, de ceux du troisième ordre.

Ces derniers dépendent des intégrales $\int x^2 z\,dm, \int y^2 z\,dm, \int z^3 dm$, dont la valeur nous est inconnue; c'est par les observations *astronomiques* seulement qu'on pourrait en déterminer l'importance.

Bessel, Peters et Nyrén, en faisant usage des formules de Poisson, ont cru pouvoir résoudre le problème au moyen d'observations faites sur le pendule à différentes latitudes.

A la vérité, le coefficient cherché dépend surtout des irrégularités du sphéroïde dans le sens de l'axe polaire; et, si l'attraction de celui-ci sur le pendule ne dépendait également, et de la même manière, que de ces mêmes irrégularités, le problème pourrait être résolu de cette façon. Mais il n'en est pas ainsi. Le potentiel de l'attraction du sphéroïde sur un point extérieur peut se représenter par $\nu + \delta\nu$ pour un point très éloigné, mais doit se représenter par $\nu + \delta\nu + \delta^2\nu$ pour un point rapproché. Or, les termes du quatrième ordre qui composent $\delta^2\nu$, insignifiants vis-à-vis de $\delta\nu$ pour le Soleil et la Lune, deviennent prépondérants pour le pendule. Les observations de celui-ci ne peuvent donner que la somme $\delta\nu + \delta^2\nu$, dont il est impossible de déduire l'une des parties $\delta\nu$, la moins considérable des deux pour ce cas.

Nous reviendrons ultérieurement sur ce point, que les travaux antérieurs n'ont pas élucidé.

28. On trouvera, à la fin de ce chapitre, des Tables destinées à faciliter le calcul de la nutation bradléenne et de la nutation diurne. Nous écrirons les expressions de la première sous la forme

$$\begin{aligned}
\Delta\theta &= [\Omega]_0 - [2\Omega]_0 + [2\odot]_0 + [2\text{☾}]_0 + [2\text{☾} - \Omega]_0;\\
-\sin\theta\Delta\psi &= [\Omega]_l - [2\Omega]_l + [2\odot]_l + [\odot - \Gamma]_l + [2\text{☾}]_l + (2\text{☾} - \Omega)_l - [\text{☾} - \Gamma']_l;\\
-\Delta\mu &= [\Omega]_m - [2\Omega]_m + [2\odot]_m + [\odot - \Gamma]_m + [2\text{☾}]_m + [2\text{☾} - \Omega]_m - [\text{☾} - \Gamma']_m.
\end{aligned}$$

Les valeurs des fonctions $[\ \ ]_0$, $[\ \ ]_l$, $[\ \ ]_m$ sont données en secondes d'arc de 5′ en 5′ pour les arguments Ω, $\odot$, ☾, etc. Les valeurs des $[\ \ ]_0$, $[\ \ ]_l$, $[\ \ ]_m$ figurent, pour chaque argument, en une même Table, dans les colonnes o, l, m, respectivement.

Nous n'avons pas poussé le calcul au delà du millième de seconde, exactitude qui nous paraît amplement suffisante, vu le nombre assez grand des termes de nutation du même ordre qu'on néglige dans toutes les formules usitées, en sorte que le chiffre même des centièmes n'est pas tout à fait sûr dans le résultat final. Pour les termes lunaires proprements dits, nous nous sommes arrêté au centième de seconde.

Dans ces conditions, on peut considérer comme identiques les termes en $2\odot$ des nutations en obliquité et en longitude, puisque la différence entre leurs coefficients n'est que de $0''.0005$. De même, nous considèrerons comme identiques les coefficients des termes en $2☾$, à cause du peu d'importance et de l'incertitude de ces termes (voir ci-dessus), et prendrons pour facteur commun la moyenne des deux coefficients (*).

De cette manière, les Tables qui ont pour arguments $2☊$, $2\odot$, $2☾$ seront à double entrée, ce qui est d'un usage beaucoup plus commode.

Ces dernières ne s'étendent que jusqu'à $45°$. Pour des valeurs plus considérables de l'argument, comme pour celles qui surpassent $90°$ dans les Tables des [☊] &, on devra prendre garde aux signes à employer.

A la suite de ces Tables, on trouvera celles qui servent au calcul de la nutation diurne, c'est-à-dire des fonctions $\nu\Sigma_1$ et $\nu\Sigma_2$: $\nu = 0''.066$. Les expressions des fonctions Σ_1 et Σ_2 sont données dans les formules (29), page 87.

Nous écrirons ces deux expressions

$$\nu\Sigma_2 = [☊]_2 + [2\odot]_2 + [2☾]_2 + [2☾ - ☊]_2.$$
$$\nu\Sigma_1 = -0''.076 - [☊]_1 + [2\odot]_1 + [2☾]_1 + [2☾ - ☊]_1 + [☾ - \Gamma']_1.$$

Les valeurs des fonctions $[\ \ ]_1$ et $[\ \ ]_2$ sont exprimées, de même que la constante, en fraction de seconde d'arc. Elles sont données de demi-millième en demi-millième pour les arguments ☊, $\odot$, ☾, &.

§ 3. — *Théorie complète de l'aberration* (**).

1. Avant d'aborder la détermination des constantes des deux aberrations, l'annuelle et la systématique, nous croyons nécessaire d'établir les formules complètes de la première, dans les expressions usuelles de laquelle il y a des omissions, et celles de la seconde, dont nul astronome n'a encore tenu compte.

Nous complèterons cette recherche par celle de tous les termes du second ordre des formules de réduction au lieu apparent en ascension droite et en déclinaison.

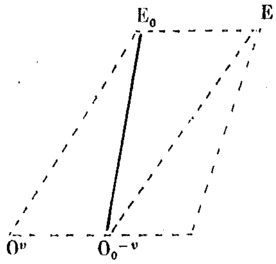
(*) Les termes qui dépendent du nœud et du Soleil auraient pu être très utilement calculés à 4 décimales. Le temps m'a manqué pour pousser aussi loin le calcul. Les astronomes m'excuseront bien certainement, lorsqu'ils sauront que je n'ai eu aucune aide pour effectuer ce travail.

(**) La plus grande partie de cette théorie a paru dans les *Mem. della Pontificia Accademia dei nuovi Lincei*, vol. X.

Le phénomène de l'aberration provient du mouvement de l'appareil qui reçoit le rayon lumineux, ou, si cet appareil fait défaut, du mouvement de l'œil lui-même.

Tout rayon lumineux est donc aberré, qu'il provienne même d'un objet terrestre très rapproché; mais, dans le cas d'objets terrestres, l'aberration subjective est exactement compensée par l'aberration objective, en sorte que ces objets sont vus dans leur *vraie* direction, comme si la vitesse de la lumière était infinie.

Nous n'étudierons en ce moment l'aberration que dans les couches atmosphériques qui avoisinent l'observateur.



Soit E_0 un point lumineux au temps 0; O_0 la position de l'œil à cet instant, v la vitesse absolue de celui-ci, V celle de la lumière.

Si cette dernière était infinie, l'œil verrait le point lumineux suivant O_0E_0, qui est la direction *vraie* du rayon lumineux. Il en serait de même si l'œil était immobile et la vitesse de la lumière finie : l'œil verrait alors le point E_0 dans la position même qu'il *occupait* au temps 0.

Pour trouver la direction apparente suivant laquelle l'œil mobile voit le point lumineux, nous supposerons l'univers entier, y compris les molécules d'éther, animé d'une vitesse égale et contraire à celle de l'œil, c'est-à-dire d'une vitesse $-v$; ce qui n'altèrera en rien les positions relatives L'œil est alors immobile en O_0, et le rayon lumineux se propage avec la vitesse résultante des deux vitesses V et $-v$.

E_0O ou EO_0 sera la direction *apparente* du rayon lumineux.

L'artifice que nous venons d'employer montre immédiatement que nous voyons les objets terrestres, quoique aberrés, absolument comme s'ils étaient immobiles de même que nous.

Il en est ainsi de la Lune, si l'on fait abstraction de son mouvement de révolution autour de la Terre et du mouvement diurne de celle-ci.

Une observation, qui n'est pas inutile peut-être, c'est que si, sur la direction apparente E_0O, la vitesse relative V' est la résultante de la vitesse absolue V de la lumière et de la vitesse de la Terre prise en signe contraire, $-v$, ce n'est pas avec cette vitesse relative, mais bien avec la vitesse absolue V que se meut la lumière; nous devons restituer en effet à l'univers la vitesse v que nous lui avions enlevée par notre artifice.

2. Ces préliminaires exposés, nous n'aurons qu'à écrire, en projetant les vitesses sur trois axes rectangulaires :

$$V'_x = V_x - v_x, \quad \text{etc.}$$

Ou, en prenant l'équateur géographique pour plan de référence, et en appelant α, δ α', δ' les coordonnées *vraies* et *apparentes* (*) de l'astre :

(*) C'est-à-dire affectées de l'aberration *seule*.

$$(32) \quad \ldots \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{V'}{V} \cos\alpha' \cos\delta' &= \cos\alpha \cos\delta - \frac{v_x}{V}. \\ \frac{V'}{V} \sin\alpha' \cos\delta' &= \sin\alpha \cos\delta - \frac{v_y}{V}. \\ \frac{V'}{V} \sin\delta' &= \sin\delta - \frac{v_z}{V}. \end{aligned} \right.$$

D'où l'on tire d'abord :

$$\frac{V'}{V} \cos\delta' \sin(\alpha' - \alpha) = -\frac{1}{V}(\cos\alpha v_y - \sin\alpha v_x).$$

$$\frac{V'}{V} \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha) = \cos\delta - \frac{1}{V}(\sin\alpha v_y + \cos\alpha v_x);$$

et, en faisant $tg\,(\alpha' - \alpha) = \Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha = -\frac{\sec\delta}{V} \frac{\cos\alpha v_y - \sin\alpha v_x}{1 - \frac{\sec\delta}{V}(\sin\alpha v_y + \cos\alpha v_x)}.$$

Nous nous bornerons aux termes du premier et du second ordre; alors

$$\Delta\alpha = -\frac{\sec\delta}{V}(\cos\alpha v_y - \sin\alpha v_x)$$
$$- \frac{\sec^2\delta}{V^2}(\cos\alpha v_y - \sin\alpha v_x)\,(\sin\alpha v_y + \cos\alpha v_x),$$

que nous écrirons, pour abréger :

$$(33) \quad \ldots \ldots \quad \Delta\alpha = -\frac{\sec\delta}{V}\mathbf{A} - \frac{\sec^2\delta}{V^2}\mathbf{AB},$$

en faisant

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{A} &= \cos\alpha v_y - \sin\alpha v_x, \\ \mathbf{B} &= \sin\alpha v_y + \cos\alpha v_x. \end{aligned} \right.$$

Prenant la racine carrée de la somme des carrés des deux premières équations, on a

$$\frac{V'}{V} \cos\delta' = \cos\delta \left\{ 1 - \frac{2\sec\delta}{V}(v_x \cos\alpha + v_y \sin\alpha) + \sec^2\delta \frac{v_x^2 + v_y^2}{V^2} \right\}^{1/2}$$
$$= \cos\delta - \frac{\mathbf{B}}{V} + \frac{1}{2}\sec\delta \left\{ \frac{v_x^2 + v_y^2}{V^2} - \frac{\mathbf{B}^2}{V^2} \right\}.$$
$$= \cos\delta - \frac{\mathbf{B}}{V} + \frac{1}{2}\sec\delta \frac{\mathbf{A}^2}{V^2}.$$

De la combinaison de cette équation avec la troisième des équations (1), on tire :

$$\frac{V'}{V}\sin(\delta'-\delta) = -\frac{v_z}{V}\cos\delta + \frac{\mathbf{B}}{V}\sin\delta - \frac{1}{2}tg\delta\frac{\mathbf{A}^2}{V^2}$$
$$\frac{V'}{V}\cos(\delta'-\delta) = 1 - \frac{v_z}{V}\sin\delta - \frac{\mathbf{B}}{V}\cos\delta + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{A}^2}{V^2};$$

et, en posant $tg(\delta'-\delta) = \Delta\delta$:

$$(34)\quad \Delta\delta = -\frac{v_z}{V}\cos\delta + \frac{\mathbf{B}}{V}\sin\delta - \frac{1}{2}tg\delta\frac{\mathbf{A}^2}{V^2},$$

si l'on néglige les termes du second ordre qui n'ont pas $tg\delta$ pour facteur.

3. Appelons m_1, n_1, σ_1 les moyens mouvements annuel, diurne et systématique du lieu d'observation, $\odot$ et Γ les longitudes vraies du Soleil et du périgée, e et θ l'excentricité et l'obliquité de l'orbite terrestre, t l'heure sidérale, A' et D' l'ascension droite et la déclinaison du point vers lequel se transporte le Soleil (Apex), nous trouverons, en posant

$$\sigma_1\cos D' = \sigma'_1;\quad tg\,D' = T';\quad \cos\theta = c';\quad \sin\theta = s' :$$

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} v_x &= -m_1(\sin\odot + e\sin\Gamma) - n_1\sin t + \sigma'_1\cos A',\\ v_y &= c'm_1(\cos\odot + e\cos\Gamma) + n_1\cos t + \sigma_1\sin A',\\ v_z &= s'm_1(\cos\odot + e\cos\Gamma) + \sigma'_1 T'.\end{aligned}\right.$$

D'où, en désignant par η l'angle horaire de l'astre :

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} \mathbf{A} = {} & m_1(c'\cos\alpha\cos\odot + \sin\alpha\sin\odot)\\ & + em_1(c'\cos\alpha\cos\Gamma + \sin\alpha\sin\Gamma)\\ & + \sigma'_1\sin(A'-\alpha) + n_1\cos\eta.\\ \mathbf{B} = {} & -m_1(\cos\alpha\sin\odot - c'\sin\alpha\cos\odot)\\ & - em_1(\cos\alpha\sin\Gamma - c'\sin\alpha\cos\Gamma)\\ & + \sigma'_1\cos(A'-\alpha) - n_1\sin\eta.\end{aligned}\right.$$

Dans le but d'éviter des développements de calcul trop considérables, et de ne conserver que les termes utiles en astronomie pratique, nous laisserons de côté ceux qui dépendent de l'excentricité, et qui sont constants pendant un siècle (quoiqu'ils produisent des termes périodiques, mais tout à fait insignifiants, du second ordre), de même que les termes de l'aberration diurne, dont nous donnerons ultérieurement l'expression séparée.

Nous pourrons ainsi nous borner à écrire :

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} \mathbf{A} &= m_1(c'\cos\alpha\cos\odot + \sin\alpha\sin\odot) + \sigma'_1\sin(A'-\alpha) = \mathbf{A}_a + \mathbf{A}_r.\\ \mathbf{B} &= m_1(c'\sin\alpha\cos\odot - \cos\alpha\sin\odot) + \sigma'_1\cos(A'-\alpha) = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_r.\end{aligned}\right.$$

4. Les termes du premier ordre seront donc simplement les termes suivants de l'aberration annuelle, puisque ceux de l'aberration systématique sont constants pour une même étoile, au moins pendant un temps très long; nous y remplacerons le rapport $\frac{m_1}{V}$ de la vitesse annuelle moyenne de la Terre à celle de la lumière par k, constante de l'aberration annuelle :

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} A_\alpha &= -k \sec\delta\,(c' \cos\alpha \cos \odot + \sin\alpha \sin \odot) \\ &= -k \sec\delta \frac{\mathbf{A}_a}{m_1}. \\ A_\delta &= -k\,[(s' \cos\delta - c' \sin\alpha \sin\delta) \cos \odot + \cos\alpha \sin\delta \sin \odot] \\ &= k \sin\delta \frac{\mathbf{B}_a}{m_1} - k \cos\delta\, s' \cos\odot. \end{aligned} \right.$$

L'expression de l'aberration systématique, dont nous aurons besoin ultérieurement, sera, quant aux termes du premier ordre :

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} A'_\alpha &= -\sec\delta \frac{\mathbf{A}_s}{V} = -k' \sec\delta \sin(A' - \alpha); \\ A'_\delta &= -\frac{\sigma'_1}{V} \cos\delta T' + \frac{\mathbf{B}_s}{V} \sin\delta = k'\,[\sin\delta \cos(A' - \alpha) - \cos\delta\, T'], \end{aligned} \right.$$

en appelant k' la constante *réduite* de l'aberration systématique, c'est-à-dire $\frac{\sigma_1}{V} \cos D'$.

5. Pour la recherche des termes du second ordre, nous avons à calculer $\frac{\mathbf{AB}}{V^2}$ et $\frac{\mathbf{A}^2}{V^2}$, en nous bornant aux termes périodiques.

Or, on a

$$\frac{\mathbf{A}}{V} = \frac{\mathbf{A}_a + \mathbf{A}_s}{V} = \frac{k}{m_1} \mathbf{A}_a + \frac{\mathbf{A}_s}{V} = -\cos\delta\,(A_\alpha + A'_\alpha).$$

$$\frac{\mathbf{B}}{V} = \frac{k}{m_1} \mathbf{B}_a + \frac{\mathbf{B}_s}{V} = \frac{A_\delta}{\sin\delta} + k s_1 \cot\delta \cos \odot + \frac{A'_\delta}{\sin\delta}.$$

D'où, en négligeant les termes qui, après la réduction, auront $\cos\delta$ pour facteur :

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathbf{AB}}{V^2} &= -\cot\delta\,(A_\alpha + A'_\alpha)\,(A_\delta + A'_\delta) \\ &= -\cot\delta\, A_\alpha A_\delta - \cot\delta\,(A_\alpha A'_\delta + A_\delta A'_\alpha). \end{aligned} \right.$$

Le terme $A'_\alpha A'_\delta$ est omis, n'ayant rien de périodique, de même que $(A'_\alpha)^2$ dans l'expression suivante :

$$(41) \quad \left\{ \frac{\mathbf{A}^2}{V^2} = \cos^2\delta\,[(A_\alpha)^2 + 2A_\alpha A'_\alpha]. \right.$$

6. Les termes du second ordre de l'aberration seront donc, en ascension droite :

$$-\sec^2\delta\frac{\mathbf{AB}}{\mathrm{V}^2}$$

$$=\frac{2}{\sin 2\delta}\mathrm{A}_\alpha\mathrm{A}_\delta+k'\sec\delta\left[\cos(\mathrm{A}'-\alpha)\mathrm{A}_\alpha-\frac{2}{\sin 2\delta}\sin(\mathrm{A}'-\alpha)\mathrm{A}_\delta\right];$$

le premier de ces termes représente le terme du second ordre de l'aberration annuelle,

(42) . . . . $$\mathrm{A}^2_\alpha=\frac{2}{\sin 2\delta}\mathrm{A}_\alpha\mathrm{A}_\delta;$$

le second, celui qui provient de la combinaison des aberrations annuelle et systématique,

(43) . . . . $$\mathrm{A}''_\alpha=k'\sec\delta\left[\cos(\mathrm{A}'-\alpha)\mathrm{A}_\alpha-\frac{2}{\sin 2\delta}\sin(\mathrm{A}'-\alpha)\mathrm{A}_\delta\right].$$

En déclinaison, on aura, pour l'expression des termes du second ordre :

$$-\frac{1}{2}tg\delta\frac{\mathbf{A}^2}{\mathrm{V}^2}=-\frac{1}{4}\sin 2\delta(\mathrm{A}_\alpha)^2+k'\sin\delta\sin(\mathrm{A}'-\alpha)\mathrm{A}_\alpha,$$

expression qu'on décomposera, comme la précédente, en

(44) . . . . $$\mathrm{A}^2_\delta=-\frac{1}{4}\sin 2\delta(\mathrm{A}_\alpha)^2.$$

et

(45) . . . . $$\mathrm{A}''_\delta=k'\sin\delta\sin(\mathrm{A}'-\alpha)\mathrm{A}_\alpha.$$

On remarquera que le facteur A_α des termes périodiques de l'aberration systématique en déclinaison ne diffère que très peu, pour les circompolaires, de celui de la parallaxe annuelle en déclinaison, en sorte qu'il est impossible de déterminer correctement celle-ci lorsqu'on néglige l'aberration systématique. Le facteur A_α renferme, en effet,

$$c'\cos\alpha\cos\odot+\sin\alpha\sin\odot,$$

et celui de la parallaxe,

$$\cos\alpha\cos\odot+c'\sin\alpha\sin\odot,$$

si l'on néglige les termes en $\cos\delta$.

7. Il nous reste encore à donner l'expression de l'aberration diurne.

Celle-ci dépend évidemment de la latitude de l'observateur.

La vitesse dont il est animé est, en effet, $n_1 = v_1 \cos\varphi_1$, en appelant v_1 la vitesse d'un point de l'équateur due au mouvement de rotation, et φ_1 la latitude géocentrique du lieu d'observation.

Comme le rapport $\frac{v_1}{V} = k_1$ est excessivement petit, nous n'aurons à calculer l'aberration diurne qu'en ascension droite, et pour les circompolaires seulement.

L'expression $A_\alpha = -\frac{\sec\delta}{V}\mathbf{A}$ devient alors :

$$\Delta\alpha = -k_1 \cos\varphi_1 \sec\delta \cos\eta. \tag{46}$$

Dans le méridien, elle sera égale à

$$\mp k_1 \cos\varphi_1 \sec\delta,$$

selon qu'il s'agit d'un passage supérieur ou d'un passage inférieur.

L'aberration diurne en déclinaison est nulle dans le méridien, et maximum dans le premier vertical; mais elle s'élimine dans la moyenne des passages E. et W.

8. Si la parallaxe du Soleil était aussi exactement connue que l'est la vitesse de la lumière, la constante k de l'aberration pourrait se calculer théoriquement avec une grande précision.

La vitesse de la lumière est de 299 900 kilomètres par seconde en nombre rond (299 893); on admet que la parallaxe du Soleil est égale à 8''.85 (Newcomb) (*).

Le moyen mouvement de la Terre est

$$m_1 = \frac{2\pi a}{T\sqrt{1-e^2}},$$

a désignant le demi-grand axe de l'orbite exprimé en kilomètres, et T la longueur de l'année sidérale exprimée en secondes, c'est-à-dire 366.25637 × 86164. On remplacera a par $\frac{rN}{\Pi}$, r étant le rayon équatorial de la Terre, égal à 6378.2, Π la parallaxe du Soleil en secondes d'arc, et N l'inverse de sin 1''.

m_1 sera donc

$$\frac{2\pi rN}{T\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{\Pi} = \frac{N_1}{\Pi}; \quad lgN_1 = 2.41827.$$

De ces données on tire $k = \frac{m_1}{V} = 20''.36$, valeur qui s'écarte assez considérablement de celle de Struve, généralement adoptée, 20''.445.

Gill a trouvé récemment, pour la parallaxe du Soleil, 8''.81.

Avec cette valeur, la constante de l'aberration, 20''.453, deviendrait sensiblement la même que celle de Struve, qui donne, en effet, 8''.813 pour la parallaxe du Soleil.

Bradley, l'inventeur de l'aberration, avait trouvé, par ses observations, 20''25; Délambre, par les éclipses des satellites de Jupiter, 20''.255; Glasenapp, par le même procédé, 20''.431.

(*) D'après les derniers travaux de cet astronome, cette valeur devrait être réduite à 8''.81. (Mars 1896.)

Des astronomes modernes ont trouvé des valeurs plus fortes que celle de Struve, et l'opinion générale est en leur faveur.

Nyrén a obtenu 20".492 (*), valeur dont on fait même usage à Poulkova; mais ses déterminations, comme celles de Struve, sont entachées de la négligence de la nutation initiale, de la nutation diurne et de la variation annuelle du pôle; et les calculs devraient en être repris en tenant compte de ces nutations, et, de plus, de tous les termes du second ordre de l'aberration.

M. Bijl a trouvé, au moyen des observations de latitude faites à Poulkova par Gyldén, après en avoir éliminé ces deux nutations, 20".408, d'où 8".83 pour la parallaxe du Soleil (**) Ce résultat a besoin d'être confirmé.

Tout récemment, en reprenant le calcul des observations mêmes de Struve, j'ai obtenu, par trois combinaisons différentes, 20.457, 20.457 et 20.458 (***).

Le nombre de secondes employé par la lumière pour parvenir du Soleil à la Terre est, à la distance moyenne a, égal à $\frac{a}{V} = 495.7$ secondes, étant admises la parallaxe 8".86 et la vitesse V donnée ci-dessus; 497,9, si l'on admet la parallaxe 8".81. Delambre admettait 493.15; Glasenapp, 497.44.

9. Dans toutes les formules précédentes, les coordonnées α et δ sont celles du lieu vrai. Pour la commodité du calcul, on les remplace par celles du lieu moyen; mais on doit rechercher, dans ce cas, les termes du second ordre qu'il faut ajouter aux expressions de l'aberration annuelle pour tenir compte de la précession et de la nutation.

En appelant donc actuellement α et δ les coordonnées moyennes, $\alpha + d\alpha$, $\delta + d\delta$ les coordonnées vraies, dA_α et dA_δ les termes du second ordre à trouver, A_α et A_δ ceux du premier, nous aurons

$$(47)\ .\quad dA_\alpha = tg\delta A_\alpha d\delta - k\sec\delta(-c'\sin\alpha\cos\odot + \cos\alpha\sin\odot)\,d\alpha = tg\delta A_\alpha d\delta + \frac{2}{\sin 2\delta}A_\delta d\alpha.$$

$$(48)\ .\quad \left\{\begin{aligned} dA_\delta = {} & k[s'\sin\delta + c'\sin\alpha\cos\delta)\cos\odot - \cos\alpha\cos\delta\sin\odot]d\delta \\ & + k\sin\delta[c'\cos\alpha\cos\odot + \sin\alpha\sin\odot]d\alpha; \end{aligned}\right.$$

ou, en négligeant le terme en $d\delta$, qui ne peut guère surpasser 0".001 :

$$dA_\delta = -\frac{1}{2}\sin 2\delta A_\alpha d\alpha.$$

(*) *Bulletin de l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg*, 1883.
(**) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1893, t. II, p. 183.
(***) Voir l'*Annuaire de l'Observatoire royal* pour 1896.

RÉSUMÉ.

10. α et δ désignant le lieu moyen, on a donc :

$$(49)\ .\ \left\{\begin{array}{l}\textit{Aberration annuelle}\\ \textit{Termes de 1}^{\textit{er}}\textit{ ordre}\end{array}\right.\left\{\begin{array}{l}A_\alpha = -k\sec\delta(c'\cos\alpha\cos\odot + \sin\alpha\sin\odot)\\ A_\delta = -k[(s'\cos\delta - c'\sin\alpha\sin\delta)\cos\odot + \cos\alpha\sin\delta\sin\odot],\end{array}\right.$$

qu'on peut écrire :

$$(50)\ \ldots\ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l}A_\alpha = -mk\sec\delta\cos(\odot - M)\\ A_\delta = -nk\cos(\odot - N),\end{array}\right.$$

si l'on fait :

$$c'\cos\alpha = m\cos M,\quad \sin\alpha = m\sin M,$$
$$s' = p\cos P,\quad c_1\sin\alpha = p\sin P;$$

puis

$$p\cos(\delta + P) = n\cos N,\quad \cos\alpha\sin\delta = n\sin N.$$

Ces transformations sont avantageuses pour la réduction des séries de positions d'une même étoile, pour lesquelles m, M, n, N, sont des constantes.

11. *Termes du second ordre.* Dans l'expression des termes du second ordre de l'aberration annuelle, nous désignerons la précession et la nutation par $d\alpha$ et $d\delta$; nous laisserons de côté tous les termes qui ne dépasseront pas 0″.002 dans leur valeur maximum. Alors

$$(51)\ \ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l}A^2_\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\delta}A_\alpha A_\delta + tg\delta A_\alpha d\delta + \dfrac{2}{\sin 2\delta}A_\delta d\alpha\\[2ex] A^2_\delta = -\dfrac{1}{4}\sin 2\delta (A_\alpha)^2 + k\dfrac{s_1}{\sin\delta}\cos\odot\, A_\delta - \dfrac{1}{2}\sin 2\delta A_\alpha d\alpha.\end{array}\right.$$

Termes périodiques de l'aberration systématique. Les termes périodiques qui proviennent de la combinaison des aberrations annuelle et systématique sont, en ascension droite,

$$(52)\ .\ .\ A'_\alpha = k'\sec\delta\left[\cos(A' - \alpha)A_\alpha - \frac{2}{\sin 2\delta}\sin(A' - \alpha)A_\delta\right] + \frac{2kk's'}{\sin 2\delta}\cos\odot\sin(A' - \alpha),$$

qu'on peut écrire aussi

$$A'_\alpha = kk'\sec^2\delta[\sin(A' - 2\alpha)\sin\odot - c_1\cos(A' - 2\alpha)\cos\odot] + \frac{2kk's'}{\sin 2\delta}\cos\odot\sin(A' - \alpha),$$

ou bien

$$A'_\alpha = - kk' \sec^2\delta m' \cos(\odot + A'') + \frac{2kk's'}{\sin 2\delta} \cos\odot \sin(A' - \alpha),$$

en posant

$$\sin(A' - 2\alpha) = m' \sin A'', \quad \cos(A' - 2\alpha) = m' \cos A''.$$

En déclinaison,

$$(53) \quad . \quad . \left\{ \begin{array}{l} A'_\delta = k' \sin\delta \sin(A' - \alpha) A_\alpha = - kk' tg\delta \sin(A' - \alpha) \; (c_1 \cos\alpha \cos\odot + \sin\alpha \sin\odot) \\ \quad = - kk' m tg\delta \sin(A' - \alpha) \cos(\odot - M). \end{array} \right. \quad (*)$$

12. *Aberration diurne.* Dans le méridien :

$$(54) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad A_\alpha = \mp 0''.311 \cos\varphi_1 \sec\delta = \mp 0^s.0207 \cos\varphi_1 \sec\delta,$$

selon qu'il s'agit d'un passage supérieur ou inférieur.

Comme cette quantité est constante pour une même étoile et un observatoire déterminé, on la fera rentrer dans la correction du lieu moyen.

L'aberration diurne en déclinaison serait de la forme

$$(55) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad A_\delta = 0''.311 \cos\varphi_1 \sin\delta \sin\eta;$$

elle est, par conséquent, nulle dans le méridien; maximum dans le premier vertical, et égale à $\mp 0''.31 \cos\varphi_1 \sin\delta$, quantité constante également pour une étoile et un observatoire déterminés, et qui disparaîtra dans la moyenne des observations de passage à l'E. et à l'W.

Expression des termes du second ordre de la nutation.

13. Afin d'obtenir les expressions complètes des termes du second ordre, nous avons encore à rechercher ceux de la précession et de la nutation bradléenne en ascension droite et en déclinaison.

Les formules de réduction en ascension droite et en déclinaison sont

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= - \operatorname{tg}\delta \cos\alpha \frac{d\theta}{dt} + (\cot\theta + \operatorname{tg}\delta \sin\alpha) \sin\theta \frac{d\lambda}{dt}, \\ \frac{d\delta}{dt} &= \qquad \sin\alpha \frac{d\theta}{dt} + \cos\alpha \sin\theta \frac{d\lambda}{dt}. \end{aligned}$$

Nous allons les intégrer avec la rigueur nécessaire.

(*) Le premier article, dans lequel il a été fait mention des termes périodiques dus à l'aberration systématique, a été publié par l'auteur sous le titre : *Un chapitre inédit d'astronomie sphérique.* (Astr. Wachr., n° 2607). Voir aussi : *Traité des réductions stellaires,* pp. 71 et suiv. Bruxelles, HAYEZ, 1888.

En posant $\sin\theta \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\mu}{dt}$, on les écrira

$$(56) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = -\operatorname{tg}\delta\cos\alpha\dfrac{d\theta}{dt} + (\cot\theta + \operatorname{tg}\delta\sin\alpha)\dfrac{d\mu}{dt}, \\ \dfrac{d\delta}{dt} = \sin\alpha\dfrac{d\theta}{dt} + \cos\alpha\dfrac{d\mu}{dt}. \end{cases}$$

Les termes du premier ordre seront

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\alpha &= -\operatorname{tg}\delta\cos\alpha\Delta\theta + (\cot\theta + \operatorname{tg}\delta\sin\alpha)\Delta\mu, \\ \mathbf{d}\delta &= \sin\alpha\Delta\theta + \cos\alpha\Delta\mu, \end{aligned}$$

α et δ représentant ici les coordonnées moyennes.

Désignons les termes du second ordre par $\delta\mathbf{d}\alpha$, $\delta\mathbf{d}\delta$.

Nous pourrons écrire, en remplaçant dans les formules (25) α et δ, qui y représentent les cordonnées vraies, par $\alpha + \mathbf{d}\alpha$ $\delta + \mathbf{d}\delta$, puisque nous représentons maintenant par α et δ les cordonnées moyennes,

$$\begin{aligned} \delta\frac{d\alpha}{dt} &= tg(\delta + \mathbf{d}\delta)\left\{\sin(\alpha + \mathbf{d}\alpha)\frac{d\mu}{dt} - \cos(\alpha + \mathbf{d}\alpha)\frac{d\theta}{dt}\right\} \\ &\quad - tg\delta\left\{\sin\alpha\frac{d\mu}{dt} - \cos\alpha\frac{d\theta}{dt}\right\} \\ &= \sec^2\delta\mathbf{d}\delta\left\{\sin\alpha\frac{d\mu}{dt} - \cos\alpha\frac{d\theta}{dt}\right\} + tg\delta\mathbf{d}\alpha\left\{\cos\alpha\frac{d\mu}{dt} + \sin\alpha\frac{d\theta}{dt}\right\}, \end{aligned}$$

si l'on néglige les termes du troisième ordre.

De même

$$\delta\frac{d\delta}{dt} = \mathbf{d}\alpha\left\{\cos\alpha\frac{d\theta}{dt} - \sin\alpha\frac{d\mu}{dt}\right\}.$$

Remplaçons $\mathbf{d}\alpha$ et $\mathbf{d}\delta$ par leurs valeurs; il viendra :

$$\begin{aligned} \delta\frac{d\alpha}{dt} &= \sec^2\delta\left\{\cos\alpha\Delta\mu + \sin\alpha\Delta\Theta\right\}\left\{\sin\alpha\frac{d\mu}{dt} - \cos\alpha\frac{d\Theta}{dt}\right\}. \\ &\quad + tg^2\delta\left\{\sin\alpha\Delta\mu - \cos\alpha\Delta\Theta\right\}\left\{\cos\alpha\frac{d\mu}{dt} + \sin\alpha\frac{d\Theta}{dt}\right\} \\ &\quad + tg\delta\cot\Theta\Delta\mu\left(\cos\alpha\frac{d\mu}{dt} + \sin\alpha\frac{d\Theta}{dt}\right), \quad \text{et} \end{aligned}$$

$$\delta\frac{d\delta}{dt} = \left\{\cot\theta\Delta\mu + tg\delta(\sin\alpha\Delta\mu - \cos\alpha\Delta\theta)\right\}\left\{\cos\alpha\frac{d\theta}{dt} - \sin\alpha\frac{d\mu}{dt}\right\};$$

ou

$$\delta\frac{d\alpha}{dt} = tg\delta\frac{d\delta}{dt}(\mathbf{d}\alpha - \cot\theta\Delta\mu) + \frac{1}{\sin\delta\cos\delta}\mathbf{d}\delta\left(\frac{d\alpha}{dt} - \cot\theta\frac{d\mu}{dt}\right)$$

$$= tg\delta\frac{\mathbf{d}\alpha d\delta + \mathbf{d}\delta d\alpha}{dt} + \mathbf{d}\delta\left(\cot\delta\frac{d\alpha}{dt} - \frac{\cot\theta}{\sin\delta\cos\delta}\frac{d\mu}{dt}\right) - tg\delta\cot\theta\Delta\mu\frac{d\delta}{dt}.$$

$$\delta\frac{d\delta}{dt} = -\cot\delta\mathbf{d}\alpha\left(\frac{d\alpha}{dt} - \cot\theta\frac{d\mu}{dt}\right).$$

Intégrant et négligeant les termes qui ne renferment pas, explicitement ou implicitiment, les facteurs $tg\delta$ ou $\sec\delta$, on obtient d'abord

$$(57) \ldots \ldots \left\{\begin{aligned} \delta\mathbf{d}\alpha &= tg\delta\left\{\mathbf{d}\alpha\mathbf{d}\delta - \cot\theta\mathbf{d}\delta\Delta\mu\right\} \\ &= tg\delta\mathbf{d}\delta(\mathbf{d}\delta\alpha - \cot\theta\Delta\mu); \quad \text{ensuite} \\ \delta\Delta\delta &= -\tfrac{1}{2}\cot\delta(\mathbf{d}\alpha)^2. \end{aligned}\right.$$

Pour la valeur numérique $\cot\theta\Delta\mu$, on prendra simplement 1900) :

$$\cot\theta\Delta\mu = 46''.1t - 15''.8\sin\Omega - 1''.4\sin 2\odot.$$

On doit reconnaître à Fabritius le mérite d'avoir, le premier, signalé cette forme simple des termes du second ordre.

Sa démonstration, reproduite par Oppolzer, est cependant incorrecte, de même que son expression de $\delta\Delta\alpha$, dans laquelle ne figure pas notre terme $- tg\delta\cot\theta\Delta\mu\mathbf{d}\delta$; et, quoiqu'il ait cherché à en donner une démonstration plus complète depuis nos critiques (*), ce dernier terme, qui résulte si clairement de l'analyse précédente, n'intervient pas davantage dans sa formule.

C'est donc à tort que la *Connaissance des Temps* et le *Nautical Almanac* font usage des formules de Fabritius, non corrigées, dans la réduction des circompolaires; et de là, sans doute, la discordance signalée par M. Downing lui-même (**) entre ses éphemerides de la polaire et celles de Berlin, où l'on calcule directement les termes du second ordre, sans faire usage des formules de Fabritius (***).

(*) *Ann. de l'Observatoire de Kiev*, t. III.

(**) *Monthly Notices*, vol. VII, p. 358.

(***) La recherche des termes du second ordre de la nutation a paru d'abord dans les *Monthly Notices*, vol. VII, nº 8, puis dans notre *Catéchisme correct d'astronomie sphérique* (MEM. DELLA PONT. ACCAD. DEI NUOVI LINCEI, vol. X).

RÉCAPITULATION.

EXPRESSION COMPLÈTE DES TERMES DU SECOND ORDRE.

14. Faisons maintenant la somme de tous les termes du second ordre, tant de la nutation que de l'aberration; nous trouverons, en nous conformant à nos dernières notations :

$$\Delta^2\alpha = tg\delta d\delta(d\alpha - \cot\theta\Delta\mu) + tg\delta A_\alpha d\delta + \frac{2}{\sin 2\delta}(A_\alpha A_\delta + A_\delta d\alpha).$$

L'expression de $\cot\theta\Delta\mu$ est

$$\cot\theta\Delta\mu = 46''.1t - 15''.3\sin\Omega - 1''.4\sin 2\odot.$$

Comme $tg\delta = \frac{2}{\sin 2\delta}(1 - \cos^2\delta)$, nous prendrons les deux coefficients $tg\delta$ et $\frac{2}{\sin 2\delta}$ comme étant égaux à $\frac{2}{\sin 2\delta}(1 - \frac{1}{2}\cos^2\delta)$, et trouverons ainsi l'expression bien plus simple

$$\Delta^2\alpha = \frac{2}{\sin 2\delta}\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\delta\right)\left(A_\alpha + d\alpha\right)\left(A_\delta + d\delta\right) - tg\delta\, d\delta \cot\theta\Delta\mu,$$

ou, en appelant $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ les termes du premier ordre de la réduction complète au lieu apparent :

$$(58) \quad \ldots\ldots \quad \Delta^2\alpha = \frac{2}{\sin 2\delta}\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\delta\right)\Delta\alpha\Delta\delta - tg\delta d\delta \cot\theta\Delta\mu.$$

M. Fabritius a donné comme correcte, l'expression $\Delta^2\alpha = \frac{2}{\sin 2\delta}\Delta\alpha\Delta\delta$; il a même cru, et Oppolzer avec lui, l'avoir démontrée. Cette démonstration est évidemment captieuse, comme nous l'avons fait voir (*).

En déclinaison, nous aurons

$$\Delta^2\delta = -\frac{1}{2}\cot\delta(d\alpha)^2 - \frac{1}{4}\sin 2\delta(A_\alpha)^2 - \frac{1}{2}\sin 2\delta A_\alpha d\alpha + \frac{ks'}{\sin\delta}\cos\odot A_\delta.$$

(*) *Bulletin astronomique*, 1888, pp. 185 et 384. — Dans le tome III des *Annales de l'Observatoire de Kiev*, M. Fabritius reconnaît la justesse de nos critiques quant à sa formule en déclinaison, qui est cependant à bien peu près correcte, comme il vient d'être dit; mais il maintient, et cherche à démontrer à nouveau l'exactitude de sa formule en ascension droite. L'analyse complète qui précède en a prouvé l'incorrection.

Or,

$$\frac{1}{2}\cot\delta = \frac{1}{4}\frac{\sin 2\delta}{1-\cos^2\delta} = \frac{1}{4}\sin 2\delta(1+\cos^2\delta)$$

pour les circompolaires ; alors

$$(59)\ldots\ldots\quad \Delta^2\delta = -\frac{1}{4}\sin 2\delta(\Delta\alpha)^2 + \frac{ks'}{\sin\delta}\cos\odot\, A_\delta - \frac{1}{4}\sin 2\delta\cos^2\delta(d\alpha)^2;$$

le dernier terme sera très généralement négligeable, et même l'avant-dernier ; le premier a été donné par M. Fabritius.

A ces termes, toutefois, il faudra ajouter encore les termes périodiques de l'aberration systématique (52) et (53), pour obtenir la réduction complète du lieu moyen au lieu réel qu'occupe l'étoile, le lieu *réel* désignant celui dans lequel l'étoile serait perçue à travers l'espace vide.

15. Mais s'il s'agit de la réduction au lieu *apparent*, c'est-à-dire de la différence entre l'ascension droite observée et l'ascension droite moyenne, c'est la déclinaison *apparente*, c'est-à-dire corrigée de la réfraction, qui devra être employée dans les facteurs $\mathrm{tg}\delta$ et $\sec\delta$ des expressions précédentes $d\alpha$ et A_α.

Nous avons démontré théoriquement cette règle, et l'avons trouvé confirmée par les meilleures observations (*).

Parmi les arguments que nous avons invoqués, nous ne rappellerons que les suivants :

a) La réfraction, dit-on, est nulle en azimut, donc elle l'est en ascension droite dans le méridien.

Mais si, pour ce motif, on devait n'en pas tenir compte dans les expressions de $\mathrm{tg}\delta$ et $\sec\delta$, il faudrait, de même, ne pas tenir compte, dans ces facteurs, de l'aberration en déclinaison, dans les cas où celle-ci est nulle en ascension droite, ce que tout astronome se gardera bien de faire.

b) Dans la recherche des formules de l'aberration, nous avons appelé α et δ les coordonnées du lieu *vrai;* s'il s'agit du lieu *apparent*, il va de soi que δ doit être remplacé par $\delta + r$. Il en est de même dans les formules de la nutation.

c) Comme, dans le méridien, le rayon lumineux, qui vient d'une étoile à travers l'atmosphère, est identique à celui qui viendrait, à travers le vide, d'une étoile de même ascension droite et d'une déclinaison égale à la déclinaison vraie de la première, *augmentée de la réfraction* $(\delta + r)$; comme, pour cette dernière étoile, c'est $\delta + r$ qui intervient dans les formules de réduction, et que les deux rayons lumineux se confondent, c'est $\delta + r$ qu'il faut substituer à δ pour l'étoile réelle dans les formules de réduction. En ascension droite, cette correction peut être très importante pour les circompolaires.

(*) *Comptes rendus*, 20 février 1893. (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique). — *Annuaire de l'Observatoire royal* pour 1895; *Ibid.* pour 1896.

Si δ est la déclinaison vraie, l'expression de l'aberration en ascension droite est, pour les astronomes :

$$A_\alpha = -\sec\delta\,A;$$

pour nous :

$$-\sec(\delta + r)A = A_\alpha + r\,tg\,\delta A_\alpha.$$

A_α peut être égal à $20''.4 \sin 1'' \sec\delta$, soit à $0''.0001 \sec\delta$.

Notre terme correctif peut donc s'élever à $0''.0001\,r\,tg\,\delta \sec\delta$, c'est-à-dire, pour la polaire, 1894, ($\delta = 88°45'$ à la latitude de $50°$ ($r = 49''$ en moyenne) à $0^s.545$ en temps.

Il va de soi que, dans les termes de nutation en $tg\,\delta$, c'est $\delta + r$ également qui doit intervenir (*).

Aux termes précédents du second ordre en ascension droite, il y a donc lieu d'ajouter encore, pour obtenir la réduction complète au lieu *apparent :*

$$r(\sec^2\delta N_1(\alpha) + tg\,\delta A_\alpha),$$

$N_1(\alpha)$ désignant $(d\alpha - \cot\theta\Delta\mu)\cot\delta$.

Or, $\Delta\alpha = d\alpha + A_\alpha$. Si l'on néglige les termes qui n'ont pas explicitement $tg\,\delta$ pour facteur, l'expression précédente se réduira à

(60). . . . . $r\,tg\,\delta(\Delta\alpha - \cot\theta\Delta\mu)$.

Il va de soi qu'on y donnera à r le signe convenable, + pour le passage inférieur, — pour le passage supérieur d'une circompolaire.

Une conséquence de cette correction, c'est qu'il existe, entre les ascensions droites observées à deux passages (s et i) consécutifs, une différence qu'on peut exprimer par

(61). . . . . $-(r_s + r_i)\,tg\,\delta(\Delta\alpha - \cot\theta\Delta\mu)$. (**)

Sous la latitude de 51°, et pour une étoile située à 1° du pôle, cette différence peut s'élever à plus de 3 secondes de temps.

(*) Cette règle ne doit pas être appliquée au facteur $\sec\delta$ des corrections instrumentales, parce qu'ici c'est une erreur horaire que l'on calcule, et qu'elle dépend de la vitesse de l'astre, et celle-ci de sa distance polaire vraie.

Dans les facteurs $tg\,\delta$ et $\sec\delta$ des formules de la nutation et de l'aberration en ascension droite, au contraire, c'est la déclinaison apparente qui intervient : la raison en est que c'est la position apparente qui est observée, et que, pour obtenir $\Delta\alpha$, on doit projeter sur l'équateur les variations connues de l'astre, soit en longitude et latitude, soit suivant des axes rectangulaires; la valeur de cette projection dépend de la distance du point *observé* à l'équateur, et cette distance est, non pas la déclinaison vraie, mais la déclinaison apparente.

(**) Voir la confirmation de cette conséquence dans l'*Annuaire pour 1896*.

16. Les expressions complètes des termes du second ordre de la réduction au lieu apparent seront donc les suivantes (voir les formules (29), (30), (31), (52), (53), (58), (59) et 61) quant aux notations); nous y ajouterons celles de la nutation eulérienne et de la nutation diurne, qui, à raison de leur petitesse, peuvent être rangées parmi les termes du second ordre.

Dans ces dernières, μ_1 et ν_1 désigneront les coefficients des deux termes de la nutation eulérienne, respectivement proportionnels à $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{B}+\frac{b}{A}\right)$ et à $\frac{2}{2}\left(\frac{a}{B}-\frac{b}{A}\right)$; ι l'argument de cette nutation, égal à $\sqrt{\frac{ab}{AB}}$; β_1 et β_2 deux constantes arbitraires pour un observatoire et un instant déterminés, et dont l'expression générale est, pour un observatoire de longitude occidentale l par rapport au premier, $\beta + l$;
ν en est le coefficient de la nutation diurne; Σ_1 et Σ_2 sont les expressions données ci-dessus, (29) page 87; x et y, les produits de ν par le sinus et le cosinus de $2\varphi - \alpha$, $\varphi = L + t$, η est l'angle horaire. On pourra prendre $\nu = 0''.0666$, $L = 2^h 15^m$ E. de Greenwich.

Il ne faut pas oublier que, dans toutes nos formules, c'est le pôle de l'axe principal Z, ou pôle géographique, et l'équateur géographique qui sont le point et le plan de référence, et que ce point et ce plan sont supposés fixes dans la Terre.

Nous aurons à revenir ultérieurement sur cette dernière restriction.

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^2\alpha = {} & \frac{2}{\sin 2\delta}\left(1 - \tfrac{1}{2}\cos^2\delta\right)\Delta\alpha\Delta\delta - \operatorname{tg}\delta\, d\delta \cot\theta\Delta\mu + \Delta\varphi \\ & + kk'\sec^2\delta[\sin(A' - 2\alpha)\sin\odot - c'\cos(A' - 2\alpha)\cos\odot] + \frac{2kk's'}{\sin 2\delta}\cos\odot\sin(A' - \alpha) \\ & + r\operatorname{tg}\delta(\Delta\alpha - \cot\theta\Delta\mu) \\ & + \operatorname{tg}\delta[\mu_1\sin(\beta_1 + \iota t + \eta) - \nu_1\sin(-\beta_2 - \iota t + \eta)] \\ & - \operatorname{tg}\delta(x\Sigma_2 + y\Sigma_1). \end{aligned} \right.$$

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^2\delta = {} & -\tfrac{1}{4}\sin 2\delta(\Delta\alpha)^2 + k\frac{s'}{\sin\delta}\cos\odot A_\delta \\ & - kk'\operatorname{tg}\delta\sin(A' - \alpha)(c'\cos\alpha\cos\odot + \sin\alpha\sin\odot) \\ & - \mu_1\cos(\beta_1 + \iota t + \eta) + \nu_1\cos(-\beta_2 - \iota t + \eta) \\ & + y\Sigma_2 - x\Sigma_1. \end{aligned} \right.$$

§ 4. — *Recherche du déplacement systématique.*

En affirmant que l'aberration systématique est insensible aux observations, les astronomes n'ont évidemment entendu parler que des termes du premier ordre. Elle donne lieu, comme on vient de le voir, à des termes périodiques du second ordre; mais également à des termes séculaires du même ordre, qu'on ne peut pas négliger dans une recherche correcte de la constante de la précession.

La détermination de Bessel ne tient nul compte du mouvement systématique. O. Struve a cherché à y avoir égard dans la sienne; il a été suivi dans cette voie par Dreyer, par son fils L. Struve et par d'autres astronomes.

Nous nous proposons d'établir les véritables formules sur lesquelles doit être fondée cette détermination, si l'on veut rigoureusement tenir compte du mouvement systématique.

Afin de ne pas compliquer la recherche de ces formules, nous admettrons provisoirement que la déclinaison D_1 de l'Apex, qui est assez mal connue, est invariable; mais son ascension droite A_1 sera sujette à la précession. σ_1 désignera la vitesse systématique, σ_1' cette vitesse réduite, σ_2' le rapport de cette dernière au rayon de l'orbite terrestre, k' la constante réduite de l'aberration systématique. Les coordonnées non accentuées représenteront le lieu moyen au temps 0, les accentuées, au temps t.

Le lieu moyen observé, c'est-à-dire affecté de l'aberration systématique, sera au temps 0 (39) :

$$\begin{aligned}&\alpha - k' \sec\delta \sin(A_1 - \alpha),\\ &\delta + k'[\sin\delta \cos(A_1 - \alpha) - \cos\delta\, T_1];\end{aligned}$$

au temps t,

$$\begin{aligned}&\alpha' - k' \sec\delta' \sin(A_1' - \alpha'),\\ &\delta' + k'[\sin\delta' \cos(A_1' - \alpha') - \cos\delta' T_1],\end{aligned}$$

puisque nous considérons T_1 comme constant.

Or, $\alpha' = \alpha + \Delta_p\alpha + \Delta_s\alpha$, et de même des autres coordonnées, Δ_p et Δ_s désignant respectivement les déplacements dus à la précession et au mouvement systématique.

Et l'on sait que, en prenant l'année pour unité :

$$\begin{aligned}&\Delta_p\alpha = m + n \sin\alpha \operatorname{tg}\delta, \quad \Delta_p(A_1 - \alpha) = n(T_1 \sin A_1 - \sin\alpha \operatorname{tg}\delta),\\ &\Delta_p\delta = n \cos\alpha.\\ &\Delta_s\alpha = -\varpi\sigma_2' \sec\delta \sin(A_1 - \alpha), \quad \Delta_s\delta = \varpi\sigma_2'[\sin\delta\cos(A_1 - \alpha) - \cos\delta T_1],\end{aligned}$$

ϖ désignant la parallaxe de l'étoile.

La différence des positions de l'étoile, en vertu du mouvement et de l'aberration systématiques, au temps 0 et au temps t, divisée par l'intervalle t, s'exprime par $\frac{\alpha' - \alpha - \Delta_p\alpha}{t}$, $\frac{\delta' - \delta - \Delta_p\delta}{t}$, que nous représenterons respectivement par M et N. Si l'on développe les calculs, on trouvera, en posant $\varpi\sigma_2' = \varpi'$:

$$\begin{aligned}M = &-\varpi' \sec\delta \sin(A_1 - \alpha) - k'n \sec\delta \operatorname{tg}\delta [\sin(A_1 - 2\alpha) + T_1 \sin A_1 \cos(A_1 - \alpha) \cot\delta]\\ &- k'\varpi'[\tfrac{1}{2} \sin 2(A_1 - \alpha) + T_1 \operatorname{tg}\delta \sin(A_1 - \alpha)]\\ N = &\ \varpi'[\sin\delta \cos(A_1 - \alpha) - \cos\delta T_1] + \tfrac{1}{2} k'n \sec\delta [\cos(A_1 - 2\alpha) + \cos A_1 \cos 2\delta]\\ &+ k'nT_1 \sin\delta \cos A_1 \cos(A_1 - \alpha)\\ &+ k'\varpi' \{\operatorname{tg}\delta [1 - \cos^2(A_1 - \alpha) \sin^2\delta] - T_1 \cos(A_1 - \alpha) - \tfrac{1}{2}T_1^2 \sin 2\delta\}\end{aligned}$$

Nous appellerons ces deux expressions, M et N, les *déplacements systématiques* de l'étoile; ces déplacements se composent de trois parties :

1° Le mouvement systématique proprement dit, qui a pour facteur ϖ';

2° et 3° les variations d'aberration systématique produites par la précession et par le mouvement systématique, qui ont pour facteurs respectifs $k'n$ et $k'\varpi'$; ce dernier facteur est probablement 200 fois plus faible que le second pour la grande majorité des étoiles.

Si l'on ajoute aux expressions M et N les mouvements propres *objectifs* de l'étoile μ et ν, $M' = M + \mu$ et $N' = N + \nu$ représenteront ce qu'on est convenu d'appeler (improprement depuis la découverte du mouvement systématique) le mouvement propre de l'étoile.

Les astronomes qui ont tenté d'éliminer le mouvement systématique ϖ', dans leurs déterminations de la constante de la précession, n'ont nullement tenu compte des termes en k', c'est-à-dire de l'aberration systématique.

Une nouvelle détermination de cette constante paraît donc indispensable.

Nous la publierons dans le prochain volume de ces *Annales*.

ÉPILOGUE.

Dans les pages qui précèdent, nous avons relevé un assez grand nombre d'erreurs ou de négligences dans le calcul des termes du second ordre, tel qu'on l'effectue aujourd'hui.

Parmi ces dernières, l'une des plus importantes est la négligence de la nutation diurne.

Nous ne mentionnons pas la nutation eulérienne, ni la variation possible du pôle d'inertie de l'écorce terrestre, parce que les astronomes n'ignorent nullement qu'elles doivent être introduites dans les formules de réduction.

Seulement, leur point de vue est différent du nôtre : pour eux, c'est la latitude (astronomique) qui varie; pour nous, la latitude (géographique) est constante, et c'est la déclinaison, comme l'ascension droite, qui est affectée de la nutation eulérienne.

Notre conviction est que la théorie complète du mouvement de rotation de l'écorce terrestre peut seule parfaitement rendre compte de tous les phénomènes, et particulièrement de ceux qui sont connus sous le nom de *variation des latitudes*.

Mais cette théorie ne doit rien laisser à désirer au point de vue de la rigueur.

Or, la théorie du mouvement de rotation de la Terre (envisagée comme un corps solide, ce qui est une première erreur considérable), telle qu'elle est suivie aujourd'hui par les astronomes, consiste à prendre pour axe de référence, non pas l'axe principal d'inertie, mais l'axe instantané de rotation, idée très séduisante en apparence, puisqu'elle élimine la nutation eulérienne.

Fait étrange : tandis qu'en mécanique, comme en physique mathématique, on fait choix d'un système d'axes propre à simplifier autant que possible la forme des équations qui doivent servir à résoudre le problème posé, sans chercher à établir ce système conformément à l'idée préconçue qu'on se ferait de la solution, dans le problème du mouvement de rotation de la Terre, on s'imagine devoir prendre pour axe de référence l'axe instantané, sous prétexte que c'est celui autour duquel la Terre tourne.

Jusqu'à l'apparition du Traité d'Oppolzer, tous les géomètres et astronomes, Bessel, Poisson, Peters, Serret, Poinsot, avaient suivi la méthode de Laplace, qui prend l'axe d'inertie pour axe de référence.

Un géomètre des plus distingués sans abandonner cette méthode, s'est borné, comme le maître, à confondre cet axe avec l'axe de rotation, ce qui supprime tout simplement la nutation eulérienne.

Bien certaiment, s'il avait reconnu la correction de la méthode d'Oppolzer, il n'eût pas manqué d'adopter cette dernière, puisqu'il définit la latitude de la même manière que l'astronome viennois.

Mais, d'abord, cette méthode n'est pas absolument correcte, de l'aveu même de son auteur; et si même, en pratique, on peut admettre qu'elle donne des résultats d'une exactitude suffisante en déclinaison, tant s'en faut qu'il en soit ainsi en ascension droite.

Aussi est-ce intégralement la méthode de Laplace que nous avons suivie dans ce travail.

Et, pour justifier absolument l'emploi de cette méthode, nous avons fait remarquer (*) que l'on peut, conformément à un usage très suivi en astronomie et réalisé dans la pratique des observations, considérer la Terre et ses axes principaux comme fixes, et étudier le mouvement apparent d'un astre fixe par rapport à ces derniers, ce qui évite toute difficulté d'interprétation.

Nous avons, au surplus, antérieurement démontré (**) :

1° Qu'au point de vue du calcul, la méthode de Laplace est la seule rigoureuse;

2° Qu'au point de vue de la définition de l'heure, elle est la seule correcte;

3° Que si, quant au calcul des déclinaisons, on peut regarder comme insignifiantes, en pratique, les négligences auxquelles entraîne la méthode d'Oppolzer, elle est néanmoins entachée d'un vice irrémédiable : l'heure y est *définie* par le méridien *fixe;* elle y est *déterminée,* de même que les ascensions droites, dans le méridien *instantané.*

Ce dernier argument suffit à établir la vanité de toutes les déterminations d'ascension droite faites depuis trente ans par les astronomes, en observant dans le méridien instantané.

C'est là le tort le plus grave que l'introduction de la méthode d'Oppolzer ait fait à l'astronomie; et, si l'on n'en revient au méridien fixe et à la méthode de Laplace, toutes les déterminations d'heure et d'ascension droite resteront entachées d'erreurs qu'il sera impossible d'éliminer.

Mais ce n'est pas en ce point seul que nous avons rectifié, dans notre travail, des idées erronées.

Le premier, nous avons affirmé que la période de 305 jours assignée, avec raison, à la nutation eulérienne, dans le cas d'une Terre solide, serait trouvée trop courte, à raison de la fluidité intérieure du globe (***).

Nous croyons aussi, pour la même raison, que le mouvement eulérien se décompose en deux, l'un direct, l'autre rétrograde, et que ce dernier est prépondérant, et nous avons expliqué, par là, la période de Chandler (IV).

Nous avons recherché analytiquement les expressions des termes du second ordre de la nutation et de l'aberration, et corrigé les formules de Fabritius, dont des observatoires réputés ont longtemps fait usage.

(*) *Sur l'invariabilité de la hauteur du pôle.* (Notices extraites de l'*Annuaire* pour 1893.)

(**) *Sur la nutation de l'axe du monde.* (C. R., mai 1890.) *Acta. Math.* 1892 et Notices extraites de l'*Annuaire de l'Observatoire royal* pour 1891 et 1893. *Sur les formules correctes du mouvement de rotation de la Terre.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELG., décembre 1891, fév. 1892, août 1894, fév. 1895.)

(***) Notices extraites de l'*Annuaire* pour 1890, 1892 et 1893. *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, août 1893. *Catéch. correct d'astronomie sphérique.* Rome, 1895.

(IV) *Ibid.* et *Essai sur les variations de latitude*, 1894.

Le premier, nous avons signalé l'existence des termes périodiques (*) et séculaires (**) de l'aberration systématique, ainsi que l'influence de la réfraction dans le calcul de la réduction au lieu *apparent* en ascension droite (***).

Nous avons intégré les équations du mouvement de rotation de la Terre plus rigoureusement que ne l'ont fait tous les géomètres jusqu'à ce jour (IV).

Enfin, nous avons déterminé les constantes de la nutation diurne par les meilleures séries d'observations, tant en ascension droite qu'en déclinaison.

Comme conséquence de cette découverte, nous avons été amené à substituer, à la définition actuelle de l'heure, une définition absolument correcte, et nous avons calculé les variations périodiques (libration terrestre) auxquelles est sujette l'heure réelle, à cause de l'indépendance des mouvements à courte période de l'écorce et du noyau du globe (V).

Notre œuvre n'est pas terminée.

Il nous reste à déterminer à nouveau, en tenant compte de toutes les corrections dont nous venons de parler, les constantes les plus importantes de l'astronomie : précession, aberration annuelle, aberration systématique, nutation eulérienne, etc.

Ce sera probablement un travail de longue haleine, et ce motif nous engage à terminer ici la première partie, non la moins importante, de notre *Revision des constantes de l'astronomie stellaire.*

(*) A. N., nº 2607. *Traité des réductions stellaires,* 1888. M. N., juin 1892. *Catéch. correct d'astronomie spérique.*

(**) *Traité des réductions stellaires. Catéchisme, etc.*

(***) C. R. 20 fév. 1893. *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.* Avril 1893. Notices extraites de l'*Annuaire* pour 1895 et 1896.

(IV) *Traité des réductions stellaires. Théorie des mouvements diurne, etc.*

(V) *Traité des réductions stellaires. Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde,* 2e partie.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DE MULTIPLICATION.

.	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	.
11	*121*	*143*	*165*	*187*	*209*	*231*	*253*	*275*	*297*	*319*	*341*	*363*	*385*	*407*	*429*	*451*	*473*	*495*	*517*	*539*	*561*	*583*	*605*	*627*	*649*	*671*	*693*	*715*	*737*	*759*	*781*	*803*	*825*	*847*	*869*	*891*	*913*	*935*	*957*	*979*	100	102.	104.	106.	109	**11**
	13	*169*	*195*	*221*	*247*	*273*	*299*	*325*	*351*	*377*	*403*	*429*	*455*	*481*	*507*	*533*	*559*	*585*	*611*	*637*	*663*	*689*	*715*	*741*	*767*	*793*	*819*	*845*	*871*	*897*	*923*	*949*	*975*	100	102.	105.	108	110.	113	115.	188.	121	123.	126	128.	**13**
		15	*225*	*255*	*285*	*315*	*345*	*375*	*405*	*435*	*465*	*495*	*525*	*555*	*585*	*615*	*645*	*675*	*705*	*735*	*765*	*795*	*825*	*855*	*885*	*915*	*945*	*975*	100.	103.	106.	109	112	115.	118.	121.	124.	127.	130.	133	136.	139.	142.	145.	148.	**15**
			17	*289*	*323*	*357*	*391*	*425*	*459*	*493*	*527*	*561*	*595*	*629*	*663*	*697*	*731*	*765*	*799*	*833*	*867*	*901*	*935*	*969*	100.	103.	107	110.	114	117.	120.	124	127.	131	134.	137.	141	144.	148	151.	154.	158	161.	165	168.	**17**
				19	*361*	*399*	*437*	*475*	*513*	*551*	*589*	*627*	*665*	*703*	*741*	*779*	*817*	*855*	*893*	*931*	*969*	100.	104.	108.	112	116	119.	123.	127.	131	135	138.	142.	146.	150	154	157.	161.	165.	169	173	176.	180.	184.	188	**19**
					21	*441*	*483*	*525*	*567*	*609*	*651*	*693*	*735*	*777*	*819*	*861*	*903*	*945*	*987*	103	107	111.	115.	119.	124	128	132.	136.	140.	145	149	153.	157.	161.	166	170	174.	178.	182.	187	191	195.	199.	203.	208	**21**
						23	*529*	*575*	*621*	*667*	*713*	*759*	*805*	*851*	*897*	*943*	*989*	103.	108	112.	117.	122	126.	131	135.	140.	145	149.	154	158.	163.	168	172.	177	181.	186.	191	195.	200	204.	209.	214	218.	223	227.	**23**
							25	*625*	*675*	*725*	*775*	*825*	*875*	*925*	*975*	102.	107.	112.	117.	122.	127.	132.	137.	142.	147.	152.	157.	162.	167.	172.	177.	182.	187.	192.	197.	202.	207.	212.	217.	222.	227.	232.	237.	242.	247.	**25**
								27	*729*	*783*	*837*	*891*	*945*	*999*	105.	110.	116	121.	127	132.	137.	143	148.	154	159.	164.	170	175.	181	186.	191.	197	202.	208	213.	218.	224	229.	235	240.	245.	251	256.	262	267.	**27**
									29	*841*	*899*	*957*	101.	107.	113	119	124.	130.	136.	142	148	153.	159.	165.	171	177	182.	188.	194.	200	206	211.	217.	223.	229	235	240.	246.	252.	258	264	269.	275.	281	287	**29**
										31	*961*	102.	108.	114.	121	127	133.	139.	145.	152	158	164.	170.	176.	183	189	195.	201.	207.	214	220	226.	232.	238.	245	251	257.	263.	269.	276	282	288.	294.	300.	307	**31**
											33	109	115.	122	128.	135.	142	148.	155	161.	168.	175	181.	188	194.	201.	208	214.	221	227.	234.	241	247.	254	260.	267.	274	280.	287	293.	300.	307	313.	320	326.	**33**
												35	122.	129.	136.	143.	150.	157.	164.	171.	178.	185.	192.	199.	206.	213.	220.	227.	234.	241.	248.	255.	262.	269.	276.	283.	290.	297.	304.	311.	318.	325.	332.	339.	346.	**35**
													37	137	144.	151.	159	166.	174	181.	188.	196	203.	211	218.	225.	233	240.	248	255.	262.	270	277.	285	292.	299.	307	314.	322	329.	336.	344	351.	359	366.	**37**
														39	152	160	167.	175.	183.	191	199	206.	214.	222.	230	238	245.	253.	261.	269	277	284.	292.	300.	308	316	323.	331.	339.	347	355	362.	370.	378.	386	**39**
															41	168	176.	184.	192.	201	209	217.	225.	233.	242	250	258.	266.	274.	283	291	299.	307.	315.	324	332	340.	348.	356.	365	373	381	389.	397.	406	**41**
																43	185	193.	202	210.	219.	228	236.	245	253.	262.	271	279.	288	296.	305.	314	322.	331	339.	348.	357	365.	374	382.	391.	400	408.	417	425.	**43**
																	45	202.	211.	220.	229.	238.	247.	256.	265.	274.	283.	292.	301.	310.	319.	328.	337.	346.	355.	364.	373.	382.	391.	400.	409.	418.	427.	436.	445.	**45**
																		47	221	230.	239.	249	258.	268	277.	286.	296	305.	315	324.	333.	343	352.	362	371.	380.	390	399.	409	418.	427.	437	446.	456	465.	**47**
																			49	240	250	259.	269.	279.	289	299	308.	318.	328.	338	348	357.	367.	377.	387	397	406.	416.	426.	436	446	455.	465.	475.	485	**49**
																				51	260	270.	280.	290.	301	311	321.	331.	341.	352	362	372.	382.	392.	403	413	423.	433.	443.	454	464	474.	484.	494.	505	**51**
																					53	281	291.	302	312.	323.	334	344.	355	365.	376.	387	397.	408	418.	429.	440	450.	461	471.	482.	493	503.	514	524.	**53**
																						55	302.	315.	324.	335.	346.	357.	368.	379.	390.	401.	412.	423.	434.	445.	456.	467.	478.	489.	500.	511.	522.	533.	544.	**55**
																							57	325	336.	347.	359	370.	382	393.	404.	416	427.	439	450.	461.	473	484.	496	507.	518.	530	541.	553	564.	**57**
																								59	348	360	371.	383.	395.	407	419	430.	442.	454.	466	478	489.	501.	513.	525	537	548.	560.	572	584	**59**
																									61	372	384.	396	408.	421	433	445.	457.	469.	482	494	506.	518.	530.	543	555	567.	579.	591.	604	**61**
																										63	397	409.	422	434.	447.	460	472.	485	497.	310.	523	535.	548	560.	573.	586	598.	611	623.	**63**
																											65	422.	435.	448.	461.	474.	487.	500.	513.	526.	539.	552.	565.	578.	591.	604.	617.	630.	643.	**65**
																												67	489	462.	475.	489	502.	516	529.	542.	556	569.	583	596.	609.	623	636.	650	663.	**67**
																													69	476	490	503.	517.	531.	545	559	572.	586.	600.	614	628	641.	655.	669.	683	**69**
																														71	504	518.	532.	546.	561	575	589.	603.	617.	632	646	660.	674.	688.	703	**71**
																															73	533	547.	562	576.	591.	606	620.	635	649.	664.	679	693.	708	722.	**73**
																																75	562.	577.	592.	607.	622.	637.	652.	667.	682.	697.	712.	727.	742.	**75**
																																	77	593	608.	623.	639	654.	670	685.	700.	716	731.	747	762.	**77**
																																		79	624	640	655.	671.	687.	703	719	734.	750.	766.	782	**79**
																																			81	656	672.	688.	704.	721	737	753.	769.	785.	802	**81**
																																				83	689	705.	722	738.	755.	772	788.	805	821.	**83**
																																					85	722.	739.	756.	773.	790.	807	824.	841.	**85**
																																						87	757	774.	791.	809	826.	844	861.	**87**
																																							89	792	810	827.	845.	863.	881	**89**
																																								91	828	846.	864.	882.	901	**91**
																																									93	865	883.	902.	920.	**93**
																																										95	902.	921.	940.	**95**
																																											97	941	960.	**97**
																																												99	980	**99**
																																													—	—
																																														.

NOTICE EXPLICATIVE.

La table ci-contre renferme les produits de tous les nombres impairs, depuis 11 jusque 99, l'un par l'autre.

Tous ces produits sont donnés avec trois chiffres seulement. Lorsque le produit n'en a pas plus de trois, ceux-ci sont en caractères italiques; lorsqu'il en a quatre, les trois premiers seuls figurent dans la table en caractères romains.

Dans ce dernier cas, il sera aisé de suppléer le quatrième chiffre.

Celui-ci, en effet, ne peut être que 1 ou 9, ou bien 3, 5, 7.

S'il est 1, ce chiffre est simplement omis.

S'il est 9, il est aussi omis, mais l'avant-dernier est forcé.

S'il est 3, 5, 7, il est remplacé par un point.

L'inspection seule du dernier chiffre de chaque facteur permettra de suppléer le dernier du produit.

Exemple : $33 \times 37 = 122$, c'est-à-dire 1221; $33 \times 33 = 109$, c'est-à-dire 1089; $33 \times 39 = 128.$, c'est-à-dire 1287.

Produit d'un nombre pair par un nombre impair.

Ce produit est simplement la moyenne de ceux du nombre impair par les deux nombres entre lesquels est compris le nombre pair donné.

Exemple : $37 \times 48 = \frac{174 + 181.}{2}$, c'est-à-dire $\frac{1739 + 1813}{2} = 1776$; $24 \times 93 = \frac{214 + 232.}{2}$, c'est-à-dire $\frac{2139 + 2325}{2} = 2232$.

Produit d'un nombre pair par un nombre pair.

Ce produit se trouve en prenant la moyenne des produits des deux nombres impairs, l'un immédiatement supérieur, l'autre immédiatement inférieur aux deux nombres pairs, et en l'augmentant d'une unité, en vertu de l'identité : $2ab = (a-1)(b+1) + (a+1)(b-1) + 2$.

Pour chercher ces deux produits, il suffit de tracer par la pensée une horizontale et une verticale entre les couples de nombres qui renferment entre eux les deux nombres donnés : le point d'intersection de ces lignes se trouve entre les deux produits dont on doit prendre la moyenne.

Exemple : $38 \times 54 = \frac{203. + 206.}{2} + 1$, c'est-à-dire $\frac{2035 + 2067}{2} + 1 = 2052$.

Avec un peu d'habitude, il sera aisé de prendre de tête ces moyennes. Il n'eût pas été possible, du reste, de renfermer en une seule feuille, sous un format commode, une table plus complète.

Celle-ci rendra, pensons-nous, service aux astronomes, en leur épargnant le temps considérable qu'exige le maniement des tables ordinaires de multiplication, qu'ils doivent feuilleter trop fréquemment, lorsque les observations ne se suivent pas à des dates assez rapprochées.

ERRATA.

Page	ligne	au lieu de	lire
42	18	$\pm 46' = \pm 3^m$	$\pm 96' = \pm 7^m$.
83	4	17\\".3786	17\\".3774.
»	5	0.0032742	0.00327403.
»	»	675\\".353	675\\".317.
114	32	$T_1 \cos (A_1 - \alpha)$	$T_1 \cos (A_1 - \alpha) \cos 2\delta$.