UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

THEORIE NON LINEAIRE DES COQUES D'EPAISSEUR MODEREE

J.F. DEBONGNIE

Rapport LMF/D7, octobre 1984

THEORIE NON LINEAIRE DES COQUES D'EPAISSEUR MODEREE

J.F. DEBONGNIE

Résumé - Cet article étudie une formulation des coques d'épaisseur modérée. Par un processus d'évaluation d'erreur fondé sur les équations de compatibilité, on obtient une expression découplée de l'énergie de déformation.

1. INTRODUCTION

Le présent article est consacré à l'établissement de l'expression de l'énergie de déformation des coques d'épaisseur modérée, c'est-à-dire prenant en compte les déformations dues aux efforts tranchants.

La présentation adoptée s'inspire dans son principe de celle de FRAEIJS de VEUBEKE /4/. Cependant, cet auteur, ne faisant aucune simplification, arrive à des expressions très compliquées et, à notre avis, trop précises si l'on se rappelle que la base même de la théorie des coques est entachée d'erreurs. C'est pourquoi nous nous en écartons de deux façons. Tout d'abord, nous imposons a priori la condition de conservation de la longueur des normales à la coque . Deuxièmement, par un processus de simplification fondé sur les équations de compatibilité non linéaires, processus introduit par CHIEN /2/ et utilisé avec fruit par KOITER /3/ dans le cadre des hypothèses de Kirchhoff-Love, nous obtenons une expression découplée fort simple de l'énergie de déformation.

Cet article utilise librement le calcul tensoriel général et la théorie des surfaces. Le lecteur non averti trouvera en annexe les résultats fondamentaux dont il est fait usage.

2. DESCRIPTION DE LA GEOMETRIE AVANT ET APRES DEFORMATION

La description géométrique d'une coque se fait classiquement sous la forme

$$\underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{r} + x^3 \underset{\sim}{n} \tag{1}$$

où $\underset{\sim}{s}$ est le vecteur-position d'un point quelconque de la coque, $\underset{\sim}{r}(x^1, x^2)$ sa projection sur le feuillet moyen et $\underset{\sim}{n}(x^1, x^2)$, la normale au feuillet moyen. La base de la coque est donc donnée par

$$\underset{\sim}{g}_\alpha = \underset{\sim}{s}_{,\alpha} = \underset{\sim}{r}_{,\alpha} + x^3 \underset{\sim}{n}_{,\alpha} \quad .$$

Définissant les vecteurs de base $\underset{\sim}{a}_\alpha$ du feuillet moyen par

$$\underset{\sim}{a}_\alpha = \underset{\sim}{r}_{,\alpha} \quad , \tag{2}$$

on peut exprimer les dérivées de la normale par la relation classique de WEINTGARTEN

$$\underset{\sim}{n}_{,\alpha} = - b_\alpha^\beta \; \underset{\sim}{a}_\beta \quad , \tag{3}$$

où apparaît le tenseur de courbure b_α^β . On a donc

$$\underset{\sim}{g}_\alpha = \underset{\sim}{a}_\alpha - x^3 \, b_\alpha^\lambda \, \underset{\sim}{a}_\lambda \quad .$$

Il en résulte l'expression suivante du tenseur métrique de la coque:

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\, x^3 \, b_{\alpha\beta} + (x^3)^2 \, b_\alpha^\lambda \, b_{\lambda\beta} \quad . \tag{4}$$

Le champ de déplacements sera choisi de la forme

$$\underset{\sim}{v} = u^\alpha \underset{\sim}{a}_\alpha + w \, \underset{\sim}{n} + x^3 (p^\alpha \underset{\sim}{a}_\alpha + q \, \underset{\sim}{n}) \quad ,$$

ce qui conduit aux positions suivantes, dans la coque déformée:

$$\underset{\sim}{s}' = (\underset{\sim}{r} + u^\alpha \underset{\sim}{a}_\alpha + w \, \underset{\sim}{n}) + x^3 ((1+q) \, \underset{\sim}{n} + p^\alpha \underset{\sim}{a}_\alpha) \quad . \tag{5}$$

On en déduit directement les vecteurs de la base déformée

$$\underset{\sim}{g}'_\alpha = (\delta_\alpha^\lambda + \lambda^\lambda_{\cdot\alpha}) \, \underset{\sim}{a}_\lambda + \varphi_\alpha \underset{\sim}{n} + x^3 (-(b_\alpha^\lambda + \varkappa^\lambda_{\cdot\alpha}) \, \underset{\sim}{a}_\lambda + \pi_\alpha \, \underset{\sim}{n}) \quad , \tag{6}$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda^\lambda_{\cdot\alpha} &= u^\lambda|_\alpha - w \, b_\alpha^\lambda \\ \varphi_\alpha &= w_{,\alpha} + b_\alpha^\lambda \, u_\lambda \\ \varkappa^\lambda_{\cdot\alpha} &= - p^\lambda|_\alpha + q \, b_\alpha^\lambda \\ \pi_\alpha &= q_{,\alpha} + b_\alpha^\lambda \, p_\lambda \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Par ailleurs, le troisième axe $\underset{\sim}{g}_3$ coincide, avant déformation, avec la normale unitaire $\underset{\sim}{n}$, ce qui implique

$$g_{\alpha 3} = 0 \quad , \quad g_{33} = 1 \quad . \tag{8}$$

Après déformation, il vient

$$\underset{\sim}{g}'_3 = \underset{\sim}{s}'_{,3} = p^\alpha \, \underset{\sim}{a}_\alpha + (1 + q) \, \underset{\sim}{n} \tag{9}$$

3. EXPRESSION GENERALE DES DEFORMATIONS

Suivant la définition classique de GREEN, les déformations sont données par

$$\gamma_{ij} = \tfrac{1}{2} \, (g'_{ij} - g_{ij}) \tag{10}$$

On tire directement de (6)

$$g'_{\alpha\beta} = \underset{\sim}{g}'_{\alpha} \cdot \underset{\sim}{g}'_{\beta} = g_{\alpha\beta} + 2\,\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} - 2\,x^3\,\rho_{\alpha\beta} + 2\,(x^3)^2\,\psi_{\alpha\beta}\,, \tag{11}$$

avec

$$\begin{aligned} 2\,\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} &= \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\alpha} + \lambda^{\mu}_{\cdot\alpha}\lambda_{\mu\beta} + \varphi_\alpha\varphi_\beta \\ 2\,\rho_{\alpha\beta} &= \varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa_{\beta\alpha} + b^{\mu}_{\beta}\lambda_{\mu\alpha} + b^{\mu}_{\alpha}\lambda_{\mu\beta} + \lambda^{\mu}_{\cdot\alpha}\varkappa_{\mu\beta} + \lambda^{\mu}_{\cdot\beta}\varkappa_{\mu\alpha} \\ &\quad - \varphi_\alpha\pi_\beta - \varphi_\beta\pi_\alpha \\ 2\,\psi_{\alpha\beta} &= b^{\mu}_{\beta}\varkappa_{\mu\alpha} + b^{\mu}_{\alpha}\varkappa_{\mu\beta} + \varkappa_{\mu\alpha}\varkappa^{\mu}_{\cdot\beta} \end{aligned} \tag{12}$$

Les grandeurs $\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta}$ sont applelées <u>déformations du feuillet moyen</u>. On donne à $\rho_{\alpha\beta}$ le nom de <u>changements de courbure</u>, prolongeant ainsi l'usage courant en coques de Kirchhoff-Love. Il faut cependant garder à l'esprit qu'il s'agit ici d'un abus de langage. Les $\psi_{\alpha\beta}$ n'ont pas de nom; nous démontrerons en fait que leur contribution est négligeable.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} g'_{\alpha 3} = \underset{\sim}{g}'_{\alpha} \cdot \underset{\sim}{g}'_{3} = 2\,\gamma_{\alpha 3} &= p_\alpha + \lambda_{\mu\alpha}\,p^{\mu} + (1+q)\,\varphi_\alpha + \\ &+ x^3\left(-(b^{\lambda}_{\alpha} - \varkappa^{\lambda}_{\cdot\alpha})\,p_\lambda + (1+q)\,\pi_\alpha\right) \end{aligned} \tag{13}$$

et

$$g'_{33} = \underset{\sim}{g}'_{3} \cdot \underset{\sim}{g}'_{3} = 1 + 2\,\gamma_{33} = 1 + 2\,q + q^2 + p^{\alpha}\,p_{\alpha}\,. \tag{14}$$

<u>4. L'HYPOTHESE $\gamma_{33} = 0$ ET SES CONSEQUENCES</u>

Comme dans toutes les théories de coques, nous ferons l'hypothèse d'un état plan de tension. On peut montrer /1,3/ que l'erreur relative en énergie qui en résulte est

$$O(t/R,\ t^2/L^2) \tag{15}$$

(la plus grande de ces deux valeurs). Dans cette expression, t est l'épaisseur de la coque, R, l'ordre de grandeur des rayons de courbure et L, une longueur caractéristique du feuillet moyen de la coque.

Comme l'a fait remarquer SANDER /5/ pour la théorie des plaques, dans une approche variationnelle, le fait de poser $s_{33} = 0$ dans le principe de Hellinger-Reissner équivaut à abandonner toute relation de compatibilité concernant la déformation conjuguée γ_{33}. Il est donc loisible de la définir d'une manière relativement arbitraire, pourvu que $\gamma_{33} = 0$ lors d'un déplacement de corps rigide. La façon la plus simple d'assurer cette condition consiste à imposer a priori

$$\gamma_{33} = q + \frac{q^2}{2} + \tfrac{1}{2}\, p^{\alpha}\, p_{\alpha} = 0 \,. \tag{16}$$

Dérivant cette condition par rapport à x^{α}, on obtient

$$\gamma_{33|\alpha} = q_{,\alpha} + q\, q_{,\alpha} + \tfrac{1}{2}\, p^{\lambda}|_{\alpha}\, p_{\lambda} + \tfrac{1}{2}\, p^{\lambda}\, p_{\lambda|\alpha}$$

$$= q_{,\alpha} + q\, q_{,\alpha} + p^{\lambda}\, p_{\lambda|\alpha} = 0 \,.$$

Or, le coefficient de x^3 dans l'expression (13) de $2\,\gamma_{\alpha 3}$ s'écrit encore, à partir des définitions (7),

$$- b^{\lambda}_{\alpha}\, p_{\lambda} + p_{\lambda}\, p^{\lambda}|_{\alpha} - b^{\lambda}_{\alpha}\, q\, p_{\lambda} + q_{,\alpha} + q\, q_{,\alpha} + b^{\lambda}_{\alpha}\, p_{\lambda} + b^{\lambda}_{\alpha}\, q\, p_{\lambda} = \gamma_{33|\alpha} \,,$$

donc il s'annule dès lors que $\gamma_{33} = 0$ dans la coque. On en déduit l'expression simple

$$2\,\gamma_{\alpha 3} = p_{\alpha} + \lambda_{\mu\alpha}\, p^{\mu} + (1 + q)\varphi_{\alpha} \tag{17}$$

5. EQUATIONS CONSTITUTIVES

Considérant une coque orthotrope, on peut écrire, vu l'hypothèse d'état plan de tension, la densité d'énergie de déformation sous la forme

$$W = \tfrac{1}{2}\, C^{\alpha\beta\lambda\mu}\, \gamma_{\alpha\beta}\, \gamma_{\lambda\mu} + C^{\alpha 3 \beta 3}\, \gamma_{\alpha 3}\, \gamma_{\beta 3} \,,$$

$C^{\alpha\beta\lambda\mu}$ étant les modules de l'état plan de tension et $C^{\alpha 3 \beta 3}$ ceux de cisaillement. Nous supposerons, pour simplifier, que

$$C^{\alpha\beta\lambda\mu}\|_{3} = 0 \,, \qquad C^{\alpha 3 \beta 3}\|_{3} = 0 \,, \tag{18}$$

ce qui exprime l'homogénéité des modules par rapport à x^3. Nous utiliserons la notation

$$G^{\alpha\beta} = 2\, C^{\alpha 3 \beta 3} \,,$$

ce qui permet d'écrire

$$W = W_C + W_G \,, \tag{19}$$

avec

$$W_C = \tfrac{1}{2}\, C^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu} \quad , \quad W_G = \tfrac{1}{2}\, G^{\alpha\beta}\,\gamma_{\alpha 3}\,\gamma_{\beta 3} \;. \qquad (19')$$

Développant W_C et W_G en séries de Taylor limitées au second ordre par rapport à x^3, on obtient

$$W_C(x^\alpha, x^3) = W_C(x^\alpha, 0) + x^3\, W_{C,3}(x^\alpha, 0) + \tfrac{1}{2}(x^3)^2\, W_{C,33}(x^\alpha, 0) + O(t^3)$$

$$W_G(x^\alpha, x^3) = W_G(x^\alpha, 0) + x^3\, W_{G,3}(x^\alpha, 0) + \tfrac{1}{2}(x^3)^2\, W_{G,33}(x^\alpha, 0) + O(t^3)$$

(20)

avec

$$\left\{\begin{aligned}
W_C(x^\alpha,0) &= \tfrac{1}{2}\,\mathring{C}^{\alpha\beta\lambda\mu}\,\mathring{\gamma}_{\alpha\beta}\,\mathring{\gamma}_{\lambda\mu}\\
W_{C,3}(x^\alpha,0) &= \tfrac{1}{2}\,\mathring{C}^{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathring{\gamma}_{\alpha\beta\|3}\,\mathring{\gamma}_{\lambda\mu} + \mathring{\gamma}_{\alpha\beta}\,\mathring{\gamma}_{\lambda\mu\|3})\\
W_{C,33}(x^\alpha,0) &= \tfrac{1}{2}\,\mathring{C}^{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathring{\gamma}_{\alpha\beta\|33}\,\mathring{\gamma}_{\lambda\mu} + 2\,\mathring{\gamma}_{\alpha\beta\|3}\,\mathring{\gamma}_{\lambda\mu\|3} + \mathring{\gamma}_{\alpha\beta}\,\mathring{\gamma}_{\lambda\mu\|33})\\
W_G(x^\alpha,0) &= \tfrac{1}{2}\,\mathring{G}^{\alpha\beta}\,\mathring{\gamma}_{\alpha3}\,\mathring{\gamma}_{\beta3}\\
W_{G,3}(x^\alpha,0) &= \tfrac{1}{2}\,\mathring{G}^{\alpha\beta}(\mathring{\gamma}_{\alpha3\|3}\,\mathring{\gamma}_{\beta3} + \mathring{\gamma}_{\alpha3}\,\mathring{\gamma}_{\beta3\|3})\\
W_{G,33}(x^\alpha,0) &= \tfrac{1}{2}\,\mathring{G}^{\alpha\beta}(\mathring{\gamma}_{\alpha3\|33}\,\mathring{\gamma}_{\beta3} + 2\,\mathring{\gamma}_{\alpha3\|3}\,\mathring{\gamma}_{\beta3\|3} + \mathring{\gamma}_{\alpha3}\,\mathring{\gamma}_{\beta3\|33})
\end{aligned}\right. \qquad (21)$$

Dans ces expressions, l'indice supérieur ($^{\circ}$) indique que l'on calcule la valeur en $x^3 = 0$.

Des simplifications importantes peuvent être obtenues en tenant compte des ordres de grandeur des différents termes. Suivant une démarche inaugurée par CHIEN /2/ et reprise par KOITER /1/, nous partirons des équations de compatibilité. Une forme tensorielle de celles-ci a été développée par KOITER /1/. Dans le cadre des <u>petites déformations</u> (mais grands déplacements), ces équations s'écrivent

$$\begin{aligned}
&\gamma_{ik\|pj} + \gamma_{pj\|ik} - \gamma_{ij\|kp} - \gamma_{kp\|ij}\\
&+ g^{lm}((\gamma_{il\|k} + \gamma_{lk\|i} - \gamma_{ik\|l})(\gamma_{jm\|p} + \gamma_{mp\|j} - \gamma_{jp\|m})\\
&\qquad -(\gamma_{il\|j} + \gamma_{jl\|i} - \gamma_{ij\|l})(\gamma_{km\|p} + \gamma_{pm\|k} - \gamma_{kp\|m})) = 0 \;.
\end{aligned}$$

Partant de l'une de ces six équations indépendantes, à savoir,

$$\gamma_{\alpha\beta\|33} + \gamma_{33\|\alpha\beta} - \gamma_{\alpha 3\|\beta 3} - \gamma_{\beta 3\|\alpha 3}$$
$$+ g^{lm}((\gamma_{\alpha l\|\beta} + \gamma_{l\beta\|\alpha} - \gamma_{\alpha\beta\|l})(\gamma_{3m\|3} + \gamma_{m3\|3} - \gamma_{33\|m})$$
$$-(\gamma_{\alpha l\|3} + \gamma_{3l\|\alpha} - \gamma_{\alpha 3\|l})(\gamma_{\beta m\|3} + \gamma_{3m\|\beta} - \gamma_{\beta 3\|m})) = 0 , \tag{22}$$

évaluons les ordres de grandeur de tous les termes sauf le premier sur le feuillet moyen. Pour ce faire, il nous est loisible de supposer le système de coordonnées <u>gaussien</u>, c'est-à-dire $g^{\lambda\mu} = O(1)$. Nous noterons γ l'ordre de grandeur des déformations. Dans tout ce qui suit, les ordres de grandeur sont notés en regard des termes concernés et précédés de l'abréviation "O.G.". On a

$$\begin{array}{lcccccc}
 & \gamma_{\alpha\beta\|\gamma} = & \gamma_{\alpha\beta,\gamma} & -\Gamma^{\lambda}_{\gamma\alpha}\gamma_{\lambda\beta} & -\Gamma^{3}_{\gamma\alpha}\gamma_{3\beta} & -\Gamma^{\lambda}_{\gamma\beta}\gamma_{\alpha\lambda} & -\Gamma^{3}_{\gamma\beta}\gamma_{3\lambda} \\
\text{O.G.} & & \gamma/L & \gamma/L & \gamma/R & \gamma/L & \gamma/R
\end{array}$$

$$= O(\gamma/L, \gamma/R) .$$

$$\begin{array}{lcccccc}
 & \gamma_{\alpha\beta\|3} = & \gamma_{\alpha\beta,3} & -\Gamma^{\lambda}_{3\alpha}\gamma_{\lambda\beta} & -\Gamma^{3}_{3\alpha}\gamma_{3\beta} & -\Gamma^{\lambda}_{3\beta}\gamma_{\alpha\lambda} & -\Gamma^{3}_{3\beta}\gamma_{\alpha 3} = O(\gamma/t) \\
\text{O.G.} & & \gamma/t & \gamma/R & 0 & \gamma/R & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc}
 & \gamma_{\alpha 3\|\beta} = & \gamma_{\alpha 3,\beta} & -\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}\gamma_{\lambda 3} & -\Gamma^{3}_{\beta\alpha}\gamma_{33} & -\Gamma^{\lambda}_{\beta 3}\gamma_{\alpha\lambda} & -\Gamma^{3}_{\beta 3}\gamma_{\alpha 3} \\
\text{O.G.} & & \gamma/L & \gamma/L & 0 & \gamma/R & 0
\end{array}$$

$$= O(\gamma/L, \gamma/R) .$$

$$\begin{array}{lcccccc}
 & \gamma_{\alpha 3\|3} = & \gamma_{\alpha 3,3} & -\Gamma^{\lambda}_{3\alpha}\gamma_{\lambda 3} & -\Gamma^{3}_{3\alpha}\gamma_{33} & -\Gamma^{\lambda}_{33}\gamma_{\alpha 3} & -\Gamma^{3}_{33}\gamma_{\alpha 3} = O(\gamma/R) \\
\text{O.G.} & & 0 & \gamma/R & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Les termes du produit apparaissant dans (22) s'écrivent donc, comme $g^{\lambda 3} = 0$,

$$\begin{array}{lcccc}
 & g^{\lambda\mu}(\underbrace{\gamma_{\alpha\lambda\|\beta} + \gamma_{\lambda\beta\|\alpha} - \gamma_{\alpha\beta\|\lambda}}_{\gamma/L,\ \gamma/R}) & (\gamma_{3\mu\|3} & + \gamma_{\mu 3\|3} & - \gamma_{33\|\mu}) + \\
\text{O.G.} & & \gamma/t & \gamma/t & 0
\end{array}$$

$$+ g^{33}(\gamma_{\alpha 3}\|_{\beta} + \gamma_{3\beta}\|_{\alpha} - \gamma_{\alpha\beta}\|_3)\underbrace{(\gamma_{33}\|_3 + \gamma_{33}\|_3 - \gamma_{33}\|_3)}_{0}$$

$$- g^{\lambda\mu}(\gamma_{\alpha\lambda}\|_3 + \gamma_{3}\|_{\alpha} - \gamma_{\alpha 3}\|_{\lambda})(\gamma_{\beta\mu}\|_3 + \gamma_{3\mu}\|_{\beta} - \gamma_{33}\|_{\mu})$$

O.G. $\quad \gamma/t \quad \gamma/L,\ \gamma/R \quad \gamma/L,\ \gamma/R \quad \gamma/t \quad \gamma/L,\ \gamma/R \quad \gamma/L,\ \gamma/R$

$$- g^{33}\underbrace{(\gamma_{\alpha 3}\|_3 + \gamma_{33}\|_{\alpha} - \gamma_{\alpha 3}\|_3)}_{0}(\gamma_{\beta 3}\|_3 + \gamma_{33}\|_{\beta} - \gamma_{\beta 3}\|_3) \quad ,$$

et ont, par conséquent un ordre de grandeur global γ^2/t^2 .

En ce qui concerne les dérivées secondes apparaissant dans l'équation de compatibilité (22), elles vérifient

$$\gamma_{33}\|_{\alpha\beta} = 0$$

$$\gamma_{\alpha 3}\|_{\beta 3} = \gamma_{\alpha 3}\|_{3\beta} = (\gamma_{\alpha 3}\|_3)_{,\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}\gamma_{\lambda 3}\|_3 - \Gamma^{3}_{\beta\alpha}\gamma_{33}\|_3 -$$

O.G. $\quad \gamma/(RL) \quad \gamma/(RL) \quad 0$

$$- \Gamma^{\lambda}_{\beta 3}\gamma_{\alpha\lambda}\|_3 - \Gamma^{3}_{\beta 3}\gamma_{\alpha 3}\|_3 - \Gamma^{\lambda}_{\beta 3}\gamma_{\alpha 3}\|_{\lambda} - \Gamma^{3}_{\beta 3}\gamma_{\alpha 3}\|_3 \ ,$$

O.G. $\quad \gamma/R^2 \quad 0 \quad \gamma/(RL),\ \gamma/R^2 \quad 0$

$$= O(\gamma/(RL),\ \gamma/R^2).$$

Tenant compte des résultats ci-dessus, l'équation (22) implique donc

$$\mathring{\gamma}_{\alpha\beta}\|_{33} = O\left(\frac{\gamma}{RL}, \frac{\gamma}{R^2}, \frac{\gamma^2}{t^2}\right) .$$

Il en découle

$$\mathring{\gamma}_{\alpha\beta}\|_{33}\,\mathring{\gamma}_{\lambda\mu} = O(\gamma^2/(RL),\ \gamma^2/R^2,\ \gamma^3/t^2),$$

et cette grandeur est à comparer, dans $W_{C,33}(x^{\alpha},0)$, à

$$\mathring{\gamma}_{\alpha\beta}\|_3\,\mathring{\gamma}_{\lambda\mu}\|_3 = O(\gamma^2/t^2).$$

On constate qu'en négligeant les termes contenant $\mathring{\gamma}_{\alpha\beta}\|_{33}$, on commet une erreur relative d'ordre

$$t^2/(RL)\ ,\ t^2/R^2\ ,\ \gamma \quad ,$$

où γ est très petit par hypothèse et les deux autres grandeurs ne sont pas supérieures à l'erreur intrinsèque $O(t/R\ ,\ t^2/L^2)$ de la théorie des coques. Nous écrirons donc

$$W_{C,33}(x^\alpha\ ,\ 0)\ \approx\ \overset{o}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\mu}\ \overset{o}{\gamma}_{\alpha\beta}\|_3\ \overset{o}{\gamma}_{\lambda\mu}\|_3 \tag{23}$$

Pour les déformations d'extension et de flexion, on a donc une énergie de déformation <u>par unité de surface du feuillet moyen</u>

$$V_C = \int_{-t/2}^{t/2} W_C\ (1 - 2\ H\ x^3 + K\ (x^3)^2)\ dx^3$$

$$= W_C(x^\alpha,0)(t + Kt^3/12) - 2\ Ht^3\ W_{C,3}(x^\alpha,0) + W_{C,33}(x^\alpha,0)(\frac{t^3}{12} + K\frac{t^5}{80})\ . \tag{24}$$

Dans cette expression, il est clair que l'on peut négliger $Kt^3/12$ devant t et $Kt^5/80$ devant $t^3/12$, moyennant une erreur relative d'ordre t^2/R^2, très inférieure à l'erreur intrinsèque de la théorie des coques. Bien plus, le terme contenant $W_{C,3}(x^\alpha,0)$ peut être négligé. En effet, la positive définition des modules $C^{\alpha\beta\lambda\varepsilon}$ permet d'utiliser l'inégalité de Schwarz-Cauchy

$$\tfrac{1}{2}\left|\overset{o}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon}\ \overset{o}{\gamma}_{\alpha\beta}\|_3\ \overset{o}{\gamma}_{\lambda\mu}\right| \leqslant \tfrac{1}{2}\left|\overset{o}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon}\ \overset{o}{\gamma}_{\alpha\beta}\|_3\ \overset{o}{\gamma}_{\lambda\varepsilon}\|_3\right|^{\frac{1}{2}} \cdot \left|\overset{o}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon}\ \overset{o}{\gamma}_{\alpha\beta}\ \overset{o}{\gamma}_{\lambda\mu}\right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\tfrac{1}{2}\ \frac{\sqrt{12}}{t^2}\ ((t^3/12)\ \overset{o}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon}\ \overset{o}{\gamma}_{\alpha\beta}\|_3\ \overset{o}{\gamma}_{\lambda\varepsilon}\|_3)^{\frac{1}{2}}(t\ \overset{o}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon}\ \overset{o}{\gamma}_{\alpha\beta}\ \overset{o}{\gamma}_{\lambda\varepsilon}\ )^{\frac{1}{2}}$$

ce qui, par l'inégalité

$$2\ AB \leqslant A^2 + B^2\ ,$$

entraîne encore

$$|W_{C,3}(x^\alpha,0)| \leqslant \frac{1}{4}\ \frac{\sqrt{12}}{t^2}\ ((t^3/12)\ \overset{o}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon}\ \overset{o}{\gamma}_{\alpha\beta}\|_3\ \overset{o}{\gamma}_{\lambda\varepsilon}\|_3 + t\ \overset{o}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon}\ \overset{o}{\gamma}_{\alpha\beta}\ \overset{o}{\gamma}_{\lambda\varepsilon}\ )$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{12}}{4\ t^2}\ (\ t\ W_C(x^\alpha,0) + (t^3/12)\ W_{C,33}(x^\alpha,0))\ .$$

Il en découle

$$|2\ H\ (t^3/12)\ W_{C,3}(x^\alpha,0)| \leqslant \tfrac{1}{2}\ H\ \frac{t}{\sqrt{12}}\ (t\ W_C(x^\alpha,0) + (t^3/12)\ W_{C,33}(x^\alpha,0)),$$

et le coefficient affectant le second membre est d'ordre t/R, c'est-à-dire précisément l'ordre des approximations consenties dès le départ. Une dernière simplification de V_C peut être obtenue en remarquant que, pour $x^3 = 0$,

$$\gamma_{\alpha\beta\|3} = \gamma_{\alpha\beta,3} - \Gamma^{\lambda}_{3\alpha}\gamma_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}_{3\beta}\gamma_{\alpha\lambda} = \gamma_{\alpha\beta,3} - b^{\lambda}_{\alpha}\gamma_{\lambda\beta} - b^{\lambda}_{\beta}\gamma_{\alpha\lambda} \quad ,$$

O.G. $\qquad \gamma/t \qquad \gamma/R \qquad \gamma/R$

ce qui permet de remplacer $\overset{o}{\gamma}_{\alpha\beta\|3}$ par $\overset{o}{\gamma}_{\alpha\beta,3} = -\rho_{\alpha\beta}$ avec une nouvelle erreur relative $O(t/R)$, toujours cohérente avec les autres. Nous obtenons donc finalement

$$V_C = \tfrac{1}{2}\, \overset{o}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\mu}\, t\, \overset{o}{\gamma}_{\alpha\beta}\, \overset{o}{\gamma}_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2}\, \overset{o}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\mu}(t^3/12)\, \rho_{\alpha\beta}\rho_{\lambda\mu} \qquad (24)$$

Examinons à présent les termes de cisaillement transversal. On a, en $x^3 = 0$,

$$\gamma_{\alpha 3\|3} = \gamma_{\alpha 3,3} - \Gamma^{\lambda}_{3\alpha}\gamma_{\lambda 3} - \Gamma^{3}_{3\alpha}\ \gamma_{33} - \Gamma^{\lambda}_{33}\gamma_{\alpha\lambda} - \Gamma^{3}_{33}\gamma_{\alpha 3} =$$

$$= b^{\lambda}_{\alpha}\gamma_{\lambda 3} = O(\gamma_{\lambda 3}/R)$$

$$\gamma_{\alpha 3\|33} = (\gamma_{\alpha 3\|3})_{,3} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha 3}\ \gamma_{\lambda 3\|3} - \Gamma^{3}_{3\alpha}\gamma_{33\|3} - \Gamma^{\lambda}_{33}\ \gamma_{\alpha\lambda\|3}$$

$$- \Gamma^{3}_{33}\ \gamma_{\alpha 3\|3} - \Gamma^{\lambda}_{33}\ \gamma_{\alpha 3\|\lambda} - \Gamma^{3}_{33}\ \gamma_{\alpha 3\|3}$$

$$= \gamma_{\alpha 3,33} - \Gamma_{3\alpha,3}\ \gamma_{\lambda 3} - \Gamma^{\lambda}_{3\alpha}\gamma_{\lambda 3,3} - \Gamma^{\lambda}_{3\alpha}\ \gamma_{\lambda 3\|3}$$

$$= c^{\lambda}_{\alpha}\gamma_{\lambda 3} + b^{\lambda}_{\alpha}\ \gamma_{\lambda 3\|3} = O(\gamma_{\alpha 3}/R^2).$$

Dès lors,

$$\overset{o}{\gamma}_{\alpha 3\|3}\ \overset{o}{\gamma}_{\beta 3\|3} = O(\gamma^2_{\alpha 3}/R^2)$$

$$\overset{o}{\gamma}_{\alpha 3}\ \overset{o}{\gamma}_{\beta 3\|33} = O(\gamma^2_{\alpha 3}/R^2),$$

$$\overset{o}{\gamma}_{\alpha 3}\ \overset{o}{\gamma}_{\beta 3\|3} = O(\gamma^2_{\alpha 3}/R),$$

si bien que

$$W_G(x^{\alpha},0) = O(G\,\gamma^2_{\alpha 3})$$

$$W_{G,3}(x^{\alpha},0) = O(G\,\gamma^2_{\alpha 3}/R)$$

$$W_{G,33}(x^{\alpha},0) = O(G\,\gamma^2_{\alpha 3}/R^2).$$

Intégrant, on obtient

$$V_G = \int_{-t/2}^{t/2} W_G \,(1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2)\, dx^3 =$$

$$= W_G(x^\alpha,0)(t + K\frac{t^3}{12}) - 2H\frac{t^3}{12} W_{G,3}(x^\alpha,0) + \tfrac{1}{2} W_{G,33}(x^\alpha,0)(\frac{t^3}{12} + K\frac{t^5}{80}).$$

O.G. $\quad Gt\gamma_{\alpha 3}^{2} \qquad G(t^3/R^2)\,\gamma_{\alpha 3}^{2} \qquad G(t^3/R^2)\,\gamma_{\alpha 3}^{2}$

Moyennant une erreur relative $O(t^2/R^2)$, on peut donc écrire

$$V_G \approx W_G(x \;\;,0)\; t = \tfrac{1}{2}\, \overset{\circ}{G}{}^{\alpha\beta}\; \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3}\, \overset{\circ}{\gamma}_{\beta 3} \qquad (25).$$

Au total, l'énergie de déformation par unité de surface admet l'expression

$$V = \tfrac{1}{2}\, \overset{\circ}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\mu}\, t\, \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta}\, \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2}\, \overset{\circ}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\mu} \frac{t^3}{12}\, \rho_{\alpha\beta}\, \rho_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2}\, \overset{\circ}{G}{}^{\alpha\beta} t\, \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3}\, \overset{\circ}{\gamma}_{\beta 3} \;,$$

avec une erreur relative ne dépassant pas les ordres de grandeur suivants:

$$t^2/(RL) \;,\quad t^2/R^2 \;,\quad \gamma \;. \qquad (26)$$

6. RESULTANTES

Les résultantes de tension s'obtiennent par dérivation de l'énergie de déformation par unité de surface. Ce sont

- Les efforts normaux ou résultantes membranaires

$$n^{\alpha\beta} = \frac{\partial V}{\partial \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta}} = \overset{\circ}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\mu}\, t\, \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\mu} \qquad (27)$$

- Les moments

$$m^{\alpha\beta} = \frac{\partial V}{\partial \rho_{\alpha\beta}} = \overset{\circ}{C}{}^{\alpha\beta\lambda\mu}\, (t^3/12)\, \rho_{\lambda\mu} \qquad (28)$$

- Les efforts tranchants

$$q^{\alpha} = \frac{\partial V}{\partial \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3}} = \overset{\circ}{G}{}^{\alpha\beta}\, t\, \overset{\circ}{\gamma}_{\beta 3} \qquad (29)$$

* * *

BIBLIGRAPHIE

/1/ W.T. KOITER - "A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells"
I.U.T.A.M. Symposium of the Theory of Thin Elastic Shells, Delft, 24 au 26 août 1959.

/2/ W.Z. CHIEN - "The intrinsic theory of thin shells and plates"
Univ. of California, Publ. in Math., new series, 2, 103 , 1944.

/3/ J.F. DEBONGNIE - "Etude critique de quelques formulations de la théorie des coques, en vue de l'application aux éléments finis"
Rapport non publié.

/4/ B.M. FRAEIJS de VEUBEKE - "Non linear theory of shells"
Univ. de Liège, Rapport LTAS SA-21

/5/ G. SANDER - "Application de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques"
Coll. Pub. Fac. Sci. Appli. Univ. Liege n°5, 1969

ANNEXE - CALCUL TENSORIEL ET THEORIE DES SURFACES

A1. TENSEUR METRIQUE DE SURFACE

Une surface est une variété à deux dimensions dans R^3. Le vecteur-position d'un poin quelconque de la surface dépend donc de deux coordonnées x^α , $\alpha = 1,2$:

$$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}(x^1,x^2) = \underset{\sim}{r}(x^\alpha).$$

Les vecteurs de base de la surface sont donnés par

$$\underset{\sim}{a}_\alpha = \underset{\sim}{r}_{,\alpha} \quad .$$

La virgule figure la dérivation partielle. On a donc

$$d\,\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}_{,\alpha}\, dx^\alpha = \underset{\sim}{a}_\alpha\, dx^\alpha \quad .$$

La distance parcourue lors d'une modification infinitésimale dx^α est donnée par

$$dr^2 = d\,\underset{\sim}{r} \cdot d\,\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{a}_\alpha\, dx^\alpha \cdot \underset{\sim}{a}_\beta\, dx^\beta = a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta,$$

où apparaît le <u>tenseur métrique</u> $a_{\alpha\beta}$ <u>de la surface</u> défini par

$$a_{\alpha\beta} = \underset{\sim}{a}_\alpha \cdot \underset{\sim}{a}_\beta \quad .$$

On note encore

$$a = \mathrm{dtm}(a_{\alpha\beta}); \quad a^{\alpha\lambda}\, a_{\lambda\beta} = \delta^\alpha_\beta \quad ; \quad \underset{\sim}{a}^\alpha = a^{\alpha\beta}\, \underset{\sim}{a}_\beta$$

A2. NORMALE ET ELEMENT DE SURFACE

La normale unitaire n à la surface est définie par

$$n = \frac{\underset{\sim}{a}_1 \times \underset{\sim}{a}_2}{\| \underset{\sim}{a}_1 \times \underset{\sim}{a}_2 \|}$$

L'élément de surface vaut

$$dS = \sqrt{a}\; dx^1\, dx^2.$$

A3. TENSEUR DE COURBURE

Les dérivées de la normale unitaire sont données par la formule de WEINTGARTEN

$$\underset{\sim}{n}_{,\alpha} = - b^\beta_\alpha\, \underset{\sim}{a}_\beta \quad .$$

On a encore

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda}\, b^\lambda_\beta = \underset{\sim}{a}_\beta \cdot \underset{\sim}{n}_{,\alpha} = - \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{r}_{,\alpha\beta} \quad .$$

Le tenseur covariant $b_{\alpha\beta}$ est symétrique. Ses deux invariants sont

- la courbure moyenne $H = \frac{1}{2}(b^1_1 + b^2_2)$
- la courbure gaussienne $K = b^1_1\, b^2_2 - b^1_2\, b^2_1$.

La courbure gaussienne est nulle si et seulement si la surface est <u>développable</u>.

A4. DERIVEES COVARIANTES DE SURFACE

Etant donné un vecteur de surface

$$\underset{\sim}{u} = u^{\alpha} \underset{\sim}{a}_{\alpha} = u_{\alpha} \underset{\sim}{a}^{\alpha} ,$$

ses dérivées covariantes de surface sont définies par

$$u^{\alpha}|_{\beta} = \underset{\sim}{a}^{\alpha} \cdot \underset{\sim}{u}_{,\beta} \qquad , \qquad u_{\alpha}|_{\beta} = \underset{\sim}{a}_{\alpha} \cdot \underset{\sim}{u}_{,\beta} .$$

On les calcule par

$$u^{\alpha}|_{\beta} = u^{\alpha}{}_{,\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\lambda}\, u^{\lambda}$$

$$u_{\alpha}|_{\beta} = u_{\alpha,\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\alpha\beta}\, u_{\lambda} ,$$

où apparaissent les symboles de CHRISTOFFEL de surface

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\alpha\gamma} = \tfrac{1}{2}\, a^{\lambda\beta} (a_{\alpha\beta,\gamma} + a_{\beta\gamma,\alpha} - a_{\gamma\alpha,\beta}) .$$

Pour un tenseur du second ordre, les dérivées covariantes de surface se calculent par

$$s^{\alpha\beta}|_{\gamma} = s^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\gamma\lambda}\, s^{\lambda\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\beta}_{\gamma\lambda}\, s^{\alpha\lambda}$$

$$s^{\alpha}_{\beta}|_{\gamma} = s^{\alpha}_{\beta\,,\gamma} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\gamma\lambda}\, s^{\lambda}_{\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\gamma\beta}\, s^{\alpha}_{\lambda}$$

$$s_{\alpha\beta}|_{\gamma} = s_{\alpha\beta,\gamma} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\gamma\alpha}\, s_{\lambda\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\gamma\beta}\, s_{\alpha\lambda}$$

Plus généralement, la dérivée covariante de surface d'un tenseur d'ordre quelconque s'obtient en ajoutant à la dérivée classique un terme contenant le symbole de Christoffel affecté d'un signe positif pour chaque indice supérieur et un terme contenant le symbole de Christoffel affecté d'un signe négatif pour chaque indice inférieur. Il est à noter que l'ordre des dérivations covariantes de surface n'est indifférent que si la courbure gaussienne est nulle.

On démontre les formules suivantes:

$$a_{\alpha\beta}|_{\gamma} = 0 \qquad \text{(Lemme de RICCI)}$$

$$b_{\alpha\beta}|_{\gamma} = b_{\beta\gamma}|_{\alpha} \qquad \text{(condition de MAINARDI-CODAZZI)}$$

A5. GEOMETRIE DE LA COQUE

Tout point d'une coque admet la représentation

$$\underset{\sim}{s}(x^{\alpha}, x^{3}) = \underset{\sim}{r}(x^{\alpha}) + x^{3}\, \underset{\sim}{n}(x^{\alpha}) ,$$

où $\underset{\sim}{r}$ est un point du feuillet moyen et $\underset{\sim}{n}$ la normale au feuillet moyen en ce point. La base de la coque est formée des vecteurs

$$\underset{\sim}{g}_\alpha = \underset{\sim}{s}_{,\alpha} = \mu^\beta_\alpha \, \underset{\sim}{a}_\beta \quad ; \quad \underset{\sim}{g}_3 = \underset{\sim}{s}_{,3} = \underset{\sim}{n} \ ,$$

avec

$$\mu^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha - x^3 \, b^\beta_\alpha \quad .$$

Une perturbation dx^i des coordonnées fait passer de $\underset{\sim}{s}$ en $\underset{\sim}{s} + d\underset{\sim}{s}$, avec

$$d\,\underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{g}_i \, dx^i \quad .$$

La distance ainsi parcourue est donnée par

$$ds^2 = \underset{\sim}{g}_i \, dx^i \cdot \underset{\sim}{g}_j \, dx^j = g_{ij} \, dx^i \, dx^j ,$$

où g_{ij} est le tenseur métrique de la coque. Plus précisément, on a

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \, dx^\beta \; + (dx^3)^2 \ ,$$

c'est-à-dire que $g_{33}=1$ et $g_{\alpha 3} = 0$. On a en outre

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2x^3 \, b_{\alpha\beta} + (x^3)^2 \, c_{\alpha\beta} \quad ,$$

où apparaît, outre le tenseur métrique de la surface (premier tenseur fondamental de la surface) et le tenseur de courbure (deuxième tenseur fondamental de la surface), le troisième tenseur fondamental de la surface $c_{\alpha\beta}$, d'ailleurs lié aux deux autres par la relation

$$c_{\alpha\beta} = b^\lambda_\alpha \; b_{\lambda\beta} \ .$$

Notant g^{ij} le tenseur métrique inverse, on définit la base conjuguée

$$\underset{\sim}{g}^i = g^{ij} \, \underset{\sim}{g}_j \quad .$$

L'élément de volume est donné par

$$dV = \sqrt{g} \; dx^1 \, dx^2 \, dx^3 \ ,$$

avec $g = \mathrm{dtm}(g_{ij})$ et, explicitement,

$$\sqrt{g} = 1 - 2\,Hx^3 + K\,(x^3)^2 .$$

A.6 - DERIVATION COVARIANTE DE VOLUME

On définit les dérivées covariantes de volume par

$$u^i\|_j = \underset{\sim}{g}^i \cdot \underset{\sim}{u}_{,j} \qquad ; \qquad u_i\|_j = \underset{\sim}{g}_i \cdot \underset{\sim}{u}_{,j} \quad .$$

On a

$$u^i\|_j = u^i{}_{,j} + \Gamma^i_{jk} \, u^k$$

$$u_i\|_j = u_{i,j} - \Gamma^k_{ij} \, u_k$$

avec

$$\Gamma_{ijk} = g_{jl} \Gamma^{l}_{ij} = \tfrac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{kj,i} - g_{ik,j}) \ .$$

Les règles de dérivation covariante en volume sont donc analogues à celles de la dérivarion covariante de surface, à cette différence près que les dérivations covariantes de volume commutent toujours. Les symboles de Christoffel de volume sont liés aux symboles de Christoffel de surface par les relations suivantes:

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = (\mu^{-1})^{\gamma}_{\varepsilon} \left(\mathring{\Gamma}^{\varepsilon}_{\alpha\lambda} - x^3 \, b^{\lambda}_{\beta} \mathring{\Gamma}^{\varepsilon}_{\alpha\lambda} - x^3 \, b^{\varepsilon}_{\beta,\alpha} \right)$$

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha 3} = -(\mu^{-1})^{\gamma}_{\beta} \; b^{\beta}_{\alpha}$$

$$\Gamma^{3}_{\alpha\beta} = \mu^{\lambda}_{\beta} \, b_{\lambda\alpha}$$

$$\Gamma^{3}_{\alpha 3} = 0 \quad ; \quad \Gamma^{\gamma}_{33} = 0 \quad ; \quad \Gamma^{3}_{33} = 0 \ .$$

On notera la relation utile

$$\mathring{\Gamma}^{\lambda}_{3\alpha,3} = - c^{\lambda}_{\alpha} \ .$$

*　　　*
　*