UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

DE LA PROPRIETE DE CERTAINS ELEMENTS FINIS UNIDIMENSIONNELS D'INTERPOLER LA SOLUTION EXACTE

J.F. DEBONGNIE

Revue **Contacts EMI** *n°2, Rabat, juin 1980*
Rapport LMF/D1

Revue *CONTACTS EMI* N° 2 , juin 1980

DE LA PROPRIETE DE CERTAINS ELEMENTS FINIS UNIDIMENSIONNELS D'INTERPOLER LA SOLUTION EXACTE

par

J.F. DEBONGNIE

I.C.M.E., Dr. Sc. Appli.

1. INTRODUCTION . Nous présentons ici un théorème général, valable pour toutes les équations différentielles auto-adjointes, selon lequel il est possible d'interpoler la solution exacte en la présence d'un second membre à l'aide d'éléments finis particuliers. Des résultats de ce type étaient déjà connus dans des cas bien spéciaux [1] . C'est d'un tel cas que nous partons, pour bien faire comprendre le résultat qui est ensuite démontré de manière générale. Signalons que cette propriété permet souvent d'abréger de longs calculs, et facilite également la mise en oeuvre de la méthode des rotations en calcul des structures. Enfin, appliqué aux treillis de poutres, elle permet de chercher la solution aux noeuds par la méthode des éléments finis, ce qui donne en ces points la solution exacte; pour chaque travée, on est alors ramené à l'étude d'une poutre biencastrée.

2. Un exemple simple

Considérons, pour fixer les idées, l'équilibre d'un câble tendu par une force N (fig.1) et soumis à des charges transversales. Il est bien connu [2] que le déplacement U du câble est régi par l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(N\frac{du}{dx}\right)+p=0 \qquad (1)$$

p étant la charge par mètre courant. Le même problème admet une formulation variationnelle : il s'agit de minimiser la fonctionnelle

$$\frac{1}{2}\,k(u,u)+\mathcal{P}(u) \qquad (2)$$

avec

$$k(u,v)=\int_0^\ell N\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx$$

$$\mathcal{P}(u)=-\int_0^\ell pu\,dx$$

Bien que ce problème soit volontairement simpliste, imaginons de le résoudre à l'aide d'éléments finis linéaires : on écrira, entre les noeuds a_i et a_{i+1} (fig. 2)

$$u = u_i \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) + u_{i+1} \frac{x}{\ell_i} \qquad (4)$$

ce qui entraîne

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\ell_i}$$

et conduit donc aux expressions suivantes de l'énergie de formation $k_i(u,u)$ et de l'énergie des charges $\mathcal{P}_i(u)$ de l'intervalle considéré :

$$k_i(u,u) = \frac{N}{\ell_i}\left(u_{i+1} - u_i\right)^2$$

$$\mathcal{P}_i(u) = -u_i \int_0^{\ell_i} p\left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) dx - u_{i+1} \int_0^{\ell_i} p \frac{x}{\ell_i} dx \qquad (5)$$

Sommant les énergies des différents éléments, on obtiendra alors

$$k(u,u) = \sum_{i=0}^{n-1} k_i = N \sum_i \frac{\left(u_{i+1} - u_i\right)^2}{\ell_i}$$

$$\mathcal{P}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}_i = -\sum_i u_i \int_0^{\ell_i} p\left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) dx - \sum_i u_{i+1} \int_0^{\ell_i} p \frac{x}{\ell_i} dx$$

La solution approchée s'obtient par minimisation de $\frac{1}{2}k + \mathcal{P}$ par rapport aux variables u_i, $i = 1, \ldots, (n-1)$ $(\text{car } u_0 = u_n = 0)$: on obtient les équations suivantes :

$$\frac{N}{2}\left[\frac{u_i - u_{i-1}}{\ell_{i-1}} + \frac{u_i - u_{i+1}}{\ell_i}\right] - \int_0^{\ell_i} p\left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) dx - \int_0^{\ell_{i-1}} p \frac{x}{\ell_i} dx \qquad (6)$$

Or, on remarquera que dans l'intervalle (a_i, a_{i+1}),

$$I = \int_0^{\ell_i} (x - \ell_i) N \frac{d^2u}{dx^2} dx = \left\{ (x - \ell_i) N \left[\frac{du}{dx} - \left(\frac{du}{dx}\right)_{a_i}\right]\right\}_0^{\ell_i}$$

$$- \int_0^{\ell_i} N \left[\frac{du}{dx} - \left(\frac{du}{dx}\right)_{a_i}\right] dx$$

$$= -N\left(u_{i+1} - u_i\right) + N\left(\frac{du}{dx}\right)_{a_i} \cdot \ell_i$$

Tenant compte de l'équation (1), cette intégrale s'écrit encore

$$I = -\int_0^{\ell_i} (x - \ell_i) p \, dx$$

ce qui signifie que

$$N\left(u_{i+1} - u_i\right) - N\left(\frac{du}{dx}\right)_{a_i} \cdot \ell_i = \int_0^{\ell_i} (x - \ell_i) p \, dx,$$

ou encore

$$N \frac{u_{i+1} - u_i}{\ell_i} + N\left(\frac{du}{dx}\right)_{a_i} = \int_0^{\ell_i} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) p \, dx \qquad (7)$$

De la même façon, on a

$$J = \int_0^{\ell_{i-1}} x N \frac{d^2u}{dx^2} dx = \left\{ x N \left[\frac{du}{dx} - \left(\frac{du}{dx} \right)_{a_i} \right] \right\}_0^{\ell_{i-1}} - \int_0^{\ell} N \left[\frac{du}{dx} - \left(\frac{du}{dx} \right)_{a_i} \right] dx$$

$$= - N (u_i - u_{i-1}) + N \left(\frac{du}{dx} \right)_{a_i} \cdot \ell_{i-1}$$

et cette intégrale vaut également, par (1),

$$J = - \int_0^{\ell_{i-1}} x p \, dx$$

ce qui entraîne

$$N \frac{u_i - u_{i-1}}{\ell_{i-1}} - N \left(\frac{du}{dx} \right)_{a_i} \cdot \ell_{i-1} = \int_0^{\ell_{i-1}} \frac{x}{\ell_{i-1}} p \, dx \qquad (8)$$

Additionnant les égalités (7) et (8) membre à membre, on retrouve l'équation (6) . Ainsi, <u>la solution obtenue à l'aide d'éléments finis linéaires interpole la solution exacte au droit des noeuds</u>. 1

Ce fait est d'ailleurs bien connu pour cette équation [1] . Notons au passage que l'utilisation d'éléments finis linéaires pour procéder à l'intégration double s'identifie à la méthode graphique du funiculaire, bien connue en graphostatique [3], si ce n'est que dans celle-ci, on calcule pas, généralement, les grandeurs

$$\int_0^{\ell_i} p \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) dx + \int_0^{\ell_{i-1}} p \frac{x}{\ell_i} dx$$

Mais la démonstration que nous venons de faire pêche par sa spécifi-cité : elle ne s'applique qu'aux équations du type (1) et, au surplus, nécessite la constance du caefficient N. Or, il est possible de généraliser ce résultat à des situations beaucoup plus nombreuses par un choix judicieux des fonctions de base. Pour cela, il nous faudra adopter un autre mode de raisonnement, indépendant de la forme spéciale de l'équation considérée.

<u>3. Introduction d'un raisonnement plus général</u>.

Le point fondamental réside dans la remarque suivante : lorsque N est constant, les déplacements linéaires sont les solutions de l'équation homogène

$$N \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \tag{9}$$

ou, ce qui est équivalent, de la relation variationnelle

$$\int_0^{\ell_i} N \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = 0 \tag{10}$$

pour tout champ w tel que $w(a_i) = w(a_{i+1}) = 0$

En effet, posons dans chaque élément

$$\varphi_i^- = 1 - \frac{x}{\ell_i} \qquad \varphi_i^+ = \frac{x}{\ell_i} \tag{11}$$

Le véritable déplacement du câble s'écrira dans $]a_i, a_{i+1}[$

$$u = u_i \varphi_i^- + u_{i+1} \varphi_i^+ + w_i$$

w_i étant un déplacement nul en a_i et a_{i+1}. On a donc, en vertu de (10)

$$k_i(u,u) = u_i^2 \int_0^{\ell_i} N\left(\frac{d\varphi_i^-}{dx}\right)^2 dx + u_{i+1}^2 \int_0^{\ell_i} N\left(\frac{d\varphi_i^+}{dx}\right)^2 dx$$
$$+ 2 u_i u_{i+1} \int_0^{\ell} N \frac{d\varphi_i^-}{dx} \frac{d\varphi_i^+}{dx} dx + \int_0^{\ell} N\left(\frac{dw_i}{dx}\right)^2 dx$$

$$\mathcal{P}_i(u) = - u_i \int_0^{\ell_i} p\varphi_i^- dx - u_{i+1} \int_0^{\ell_i} p\varphi_i^+ dx - \int_0^{\ell_i} p w_i dx$$

Faisant la somme sur tous les éléments, puis minimisant

$$\frac{1}{2} k(u,u) + \mathcal{P}(u)$$

On obtient, du fait du découplage exprimé par l'équation (10), les équations suivantes pour la minimisation par rapport aux paramètres u_i :

$$u_{i-1} \int_0^{\ell_{i-1}} N\left(\frac{d\varphi_{i-1}^-}{dx} \frac{d\varphi_{i-1}^+}{dx}\right) dx + u_i \left[\int_0^{\ell_{i-1}} N\left(\frac{d\varphi_{i-1}^+}{dx}\right)^2 dx + \int_0^{\ell_i} N\left(\frac{d\varphi_i^-}{dx}\right)^2 dx\right.$$
$$+ u_{i+1} \int_0^{\ell_i} N\left(\frac{d\varphi_i^-}{dx} \frac{d\varphi_i^+}{dx}\right) dx - \int_0^{\ell_{i-1}} p\varphi_{i-1}^+ dx - \int_0^{\ell_i} p\varphi_i^- dx = 0,$$

où w_i n'apparaît pas. On ne modifie donc pas ces équations en imposant a priori $w_i = 0$, ce qui équivaut précisément à l'approche par éléments finis linéaires.

Lorsque N est variable, on peut faire la même démonstration, sauf à remplacer les φ_i^-, φ_i^+ définis en (11) par les solutions de l'équation (10) ou de l'équation équivalente

$$\frac{d}{dx}\left(N \frac{du}{dx}\right) = 0$$

.../...

vérifiant les conditions aux limites

$$\varphi_i^-(a_i) = 1 \quad , \quad \varphi_i^-(a_{i+1}) = 0$$

$$\varphi_i^+(a_i) = 0 \quad , \quad \varphi_i^+(a_{i+1}) = 1$$

Il est clair que les fonctions en question ne sont autres que

$$\varphi_i^-(x) = \left[1 - \int_0^x \frac{d\xi}{N}\right] / \int_0^{l_i} \frac{d\xi}{N}$$

$$\varphi_i^+(x) = \left[\int_0^x \frac{d\xi}{N}\right] / \int_0^{l_i} \frac{d\xi}{N}$$

4. Théorème général.

On peut généraliser le théorème précédent comme suit: soit un problème unidimensionnel linéaire d'ordre 2 m, exprimable sous la forme variationnelle suivante :

$$\frac{1}{2}\, k(u,u) + \mathcal{P}(u) \qquad \text{minimum}$$

ou ce qui est équivalent,

$$k(u,v) + \mathcal{P}(v) = 0$$

pour toute variation admissible v, k étant une forme bilinéaire symétrique Soient $q_{i,k}^+$ et $q_{i,k}^-$, $k = 1,..,m-1$ les déplacements généralisés aux deux extrémités de l'élément i ; appelons enfin $\varphi_{i,k}^-$ et $\varphi_{i,k}^+$ les solutions des 2m problèmes élastiques homogènes d'élément:

$$\begin{cases} k_i(\varphi_{i,k}^{\pm}, v) = 0 & \text{pour tout dont les déplacements généralisés sont nuls} \\ q_k^{\pm}(\varphi_{i,k}^{\pm}) = 1, & \text{tous les autres déplacement généralisés étant nuls} \end{cases}$$

Les éléments finis construits à l'aide de ces fonctions conduisent alors à un déplacement

$$u = \sum_i \sum_k \sum_{+-} q_{i,k}^{\pm}\, \varphi_{i,k}^{\pm}$$

qui interpole la solution exacte en ce sens que tous les déplacements généralisés des éléments sont exacts.

Démonstration - Le déplacement réel a la forme

$$u = \sum_i \left[\sum_k \sum_{+-} q_{i,k}^{\pm}\, \varphi_{i,k} + w_i\right],$$

ce qui entraîne

$$k_i(u,u) = \sum_k \sum_{+-} \sum_\ell \sum_{+-} q_{i,k}^{\pm} \, q_{i,\ell}^{\pm} \, k_i(\varphi_{i,k}^{\pm}, \varphi_{i,\ell}^{\pm}) + k_i(w_i, w_i)$$

par définition des $\varphi_{i,k}^{\pm}$ et

$$\mathcal{P}_i = \sum_k \sum_{+-} q_{i,k}^{\pm} \, \mathcal{P}_i(\varphi_{i,k}^{\pm}) + \mathcal{P}_i(w_i).$$

Dans ces expressions, les $q_{i,k}^{\pm}$ sont visiblement découplés des w_i, que l'on peut donc poser nuls sans modifier les déplacement généralisés.

5. Applications

Les conséquences de cette propriété sont multiples. Tout d'abord, notons qu'un élément de poutre du troisième degré interpole la solution exacte si l'inertie est constante dans l'élément.

Une autre conséquence peut encore être obtenue par supposition des champs d'extension, de flexion et de torsion: soit un treillisde poutre de section et d'inertie constantes sollicité par des charges quelconques. On obtient la solution exacte aux noeuds en faisant le calcul à l'aide d'élément finis présentant

- un déplacement longitudinal linéaire
- des déplacements transversaux cubiques
- un angle de torsion linéaire.

Ceci, naturellement, en négligeant les déformations dues à l'effet tranchant et au bimoment de VLASOV [4]

Enfin, on peut simplifier certains calculs en tenant compte de ce théorème. Soit par exemple à calculer le déplacement radial d'une couronne circulaire en rotation, sous l'effet des forces centrifuges. L'équation s'écrit

$$-\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) + \frac{u}{r} - \rho\omega^2 r^2 = 0,$$

étant le rayon, , la densité de masse, et , la vitesse de rotation. Il est aisé de vérifier que l'équation homogénéisée admet la solution générale

$$u = Ar + \frac{B}{r}$$

Le principe variationnel correspondant à l'équation considérée s'écrit

$$\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2}\left[r\left(\frac{du}{dr}\right)^2+\frac{u^2}{r}\right]dr-\int_{r_1}^{r_2}\rho\omega^2 r^2 u\,dr$$

Notre théorème permet de chercher la solution sous la forme (12), ce qui fournira $u(r_1)$ et $u(r_2)$ corrects, sans avoir besoin de rechercher une solution particulière. Tenant compte de (12), on obtient

$$\int_{r_1}^{r_2}\left(A^2 r+\frac{B^2}{r^3}\right)dr-\int_{r_1}^{r_2}\rho\omega^2 r^2\left(Ar+\frac{B}{r}\right)dr \quad \text{minimum},$$

d'où les deux équations

$$2A=\int_{r_1}^{r_2}\rho\omega^2 r^3\,dr \Big/ \int_{r_1}^{r_2} r\,dr$$

$$2B=\int_{r_1}^{r_2}\rho\omega^2 r\,dr \Big/ \int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^3}$$

et les résultats

$$u(r_1)=Ar_1+\frac{B}{r_1}\quad,\quad u(r_2)=Ar_2+\frac{B}{r_2}$$

On conviendra de la simplicité de la méthode.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G.STRANG ET G.FIX. "An alysis of the finite element method". Prentice hall, 1973 .

[2] J.C.J. NIHOUL - "Cours moderne de mécanique rationnelle" Albin Michel, 1968 .

[3] A.PIRARD - "La statique graphique" 3e édition, Vaillant - Carmanne, Liège, 1967

[4] V.Z.VLASOV - "Thin-Walled Elastic Beaums"Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem; 1961.