

LABORATOIRE D'AÉRONAUTIQUE  
DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
RUE ERNEST SOLVAY, 21  
B - 4000 LIÈGE  
BELGIQUE

RAPPORT SF-141

ÉLÉMENTS PRIMAIUX À CADRES

J. F. DEBONGNIE

DÉCEMBRE 1986

1. Imaginons (fig. 1) une bête tendue sur un cadre: les déplacements de la bête et du cadre sont différents, mais des efforts sont transmis de l'un à l'autre par le câble qui tend la bête.

La philosophie des éléments à cadre est similaire (fig. 2). L'intérieur de l'élément a son comportement décrit par le champ des déplacements  $u$ . Les déplacements  $v$  du cadre sont différents. La liaison entre  $u$  et  $v$  se fait à l'aide de multiplicateurs lagrangiens  $l$ . On écrira donc le principe variationnel

$$\sum_{\text{él}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{V_{\text{él}}} (\partial u)^T H \partial u \, dV - \int_{S_{\text{él}}} l^T (u - v) \, dS \right\} - \int_V \bar{f}^T u \, dV - \int_{S_2} \bar{t}^T v \, dS \quad \text{stationnaire,} \quad (1)$$

étant entendu que  $v = \bar{v}$  sur  $S_1$ . On remarque par ailleurs que les tractions de surface  $\bar{t}$  sur  $S_2$  sont appliquées aux cadres d'éléments.

Deux éléments voisins ont en commun les déplacements  $v$  de leurs cadres.

Examinons le rôle de chacun des champs dans le principe (1) :

$$a) \quad \delta u \rightarrow \begin{cases} - \partial^T (H \partial u) - \bar{f} = 0 & \text{dans } V_{\text{él}} \\ L^T (H \partial u) - l = 0 & \text{sur } S_{\text{él}} \end{cases}$$

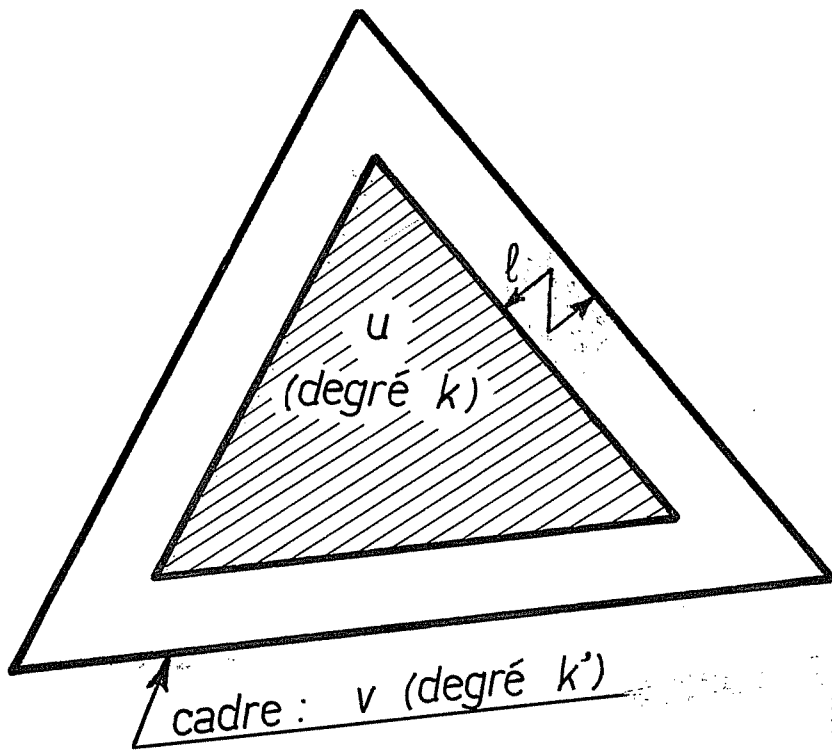
L'équation de volume exprime l'équilibre local avec les forces de volume; sur le contour, on obtient l'interprétation des multiplicateurs  $l$ , qui ne sont autres que les tractions de surface.

$$b) \quad \delta v \rightarrow \begin{cases} \delta v = 0 & \text{sur } S_1 \text{ (conditions cinématiques)} \\ l = \bar{t} & \text{sur } S_2 \text{ (équilibre sur la frontière)} \\ \sum l = 0 & \text{sur les interfaces (équilibre des interfaces)} \end{cases}$$

$$c) \quad \delta l \rightarrow u = v \text{ sur } S_{\text{él}}.$$

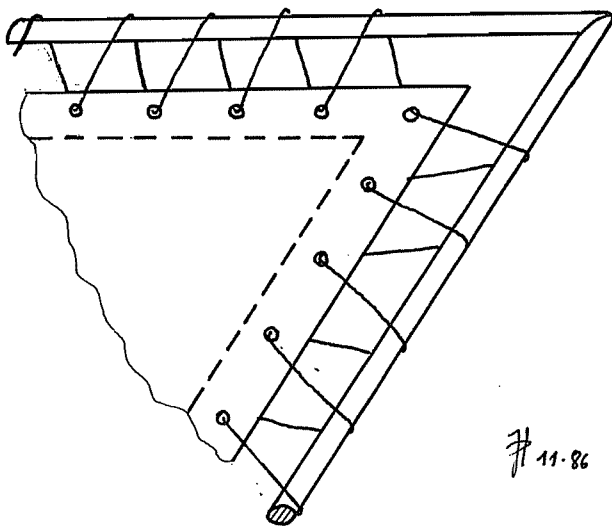
La variation des multiplicateurs restitue, comme toujours, la condition à prendre en compte, ici, l'égalité des déplacements du cadre et de ceux de l'intérieur de l'élément.

Le principe variationnel (1) peut être appliqué élément par élément. Selon les hypothèses faites sur les différents champs, il donnera:



# 11-86

fig. 2



# 11-86

fig. 1

- les éléments conformes
- les hybrides primaux de TONG /1/
- deux expressions du patch test de B. IRONS /3,4,5/ pour les éléments non conformes.

## 2. ELEMENTS CONFORMES

Les éléments conformes correspondent à l'hypothèse  $u = v$ . On peut aussi les obtenir en exprimant que les multiplicateurs  $l$  sont totalement libres, d'où la condition  $u = v$ . Le principe se réduit alors à

$$\sum_{\text{él}} \frac{1}{2} \int_{V_{\text{él}}} (\partial u)^T H \partial u \, dV - \int_V \bar{f}^T u \, dV - \int_{S_2} \bar{t}^T u \, dV \quad \text{stat.} \quad , \quad (2)$$

c'est-à-dire le principe du minimum de l'énergie totale. Nous ne nous étendrons pas sur ces éléments qui sont bien connus.

## 3. HYBRIDES PRIMAUX DE TONG /1/

Dans ce type d'éléments, les multiplicateurs  $l$  sont discrétisés; par contre, aucune hypothèse n'est faite sur le champ des déplacements de cadre  $v$ . En particulier, la variation de  $v$  sur  $S_2$  donne

$$l = \bar{t} \quad , \quad (3)$$

ce qui limite en fait l'analyse aux champs de tractions de surface ayant la même forme que les multiplicateurs  $l$ .

Etudions l'application du principe (1) dans ce cas. Partant de l'hypothèse classique

$$u = M(x) a \quad ,$$

on calcule, comme dans un élément "déplacement" classique,

$$\frac{1}{2} \int_V (\partial u)^T H \partial u \, dV = \frac{1}{2} a^T \left( \int_V (\partial M)^T H \partial M \, dV \right) a = \frac{1}{2} a^T J a \quad ,$$

avec

$$J = \int_V (\partial M)^T H \partial M \, dV \quad . \quad (4)$$

Sur chaque bord, nous entendons par là les faces ou les côtés, on pose alors

$$l_{\text{bord}} = N_{\text{bord}}(\xi) b_{\text{bord}} \quad , \quad (5)$$

où  $\xi$  représente la ou les coordonnées du bord. On se donne en outre un système de forces généralisées  $g_{\text{bord}}$  telles que la matrice de connexion de bord, définie par la relation

$$g_{\text{bord}} = R_{\text{bord}} b_{\text{bord}} \quad , \quad (6)$$

soit carrée et inversible. La relation (6) implique

$$l_{\text{bord}} = N_{\text{bord}} R_{\text{bord}}^{-1} g_{\text{bord}}. \quad (7)$$

Il en découle

$$\begin{aligned} \int_{\text{bord}} l^T (u - v) dS &= g_{\text{bord}}^T R_{\text{bord}}^{-T} \int_{\text{bord}} N_{\text{bord}}^T (Ma - v) dS \\ &= g_{\text{bord}}^T (C_{\text{bord}} a - q_{\text{bord}}), \end{aligned}$$

en posant

$$C_{\text{bord}} = R_{\text{bord}}^{-T} \int_{\text{bord}} N_{\text{bord}}^T M dS \quad (8)$$

et en définissant les déplacements moyens de cadre

$$q_{\text{bord}} = R_{\text{bord}}^{-T} \int_{\text{bord}} N_{\text{bord}}^T v dS. \quad (9)$$

Faisant la somme sur les différents bords, on obtient

$$\int_S l^T (u - v) dS = \sum_{\text{bords}} g_{\text{bord}}^T (C_{\text{bord}} a - q_{\text{bord}}) = g^T (Ca - q), \quad (10)$$

en introduisant le vecteur charge complet

$$g = \begin{bmatrix} g_{\text{bord } 1} \\ \vdots \\ g_{\text{bord } k} \end{bmatrix},$$

la matrice de connexion

$$C = [C_{\text{bord } 1} \dots C_{\text{bord } k}]$$

et le vecteur déplacement complet

$$q = \begin{bmatrix} q_{\text{bord } 1} \\ \vdots \\ q_{\text{bord } k} \end{bmatrix}.$$

Pour obtenir la matrice de raideur de l'élément, nous supposons qu'il n'est pas adjacent à  $S_2$ . On obtient alors la fonctionnelle

$$\frac{1}{2} a^T J a - g^T (Ca - q),$$

à rendre stationnaire par rapport à  $a$  et  $g$ , ce qui mène au système matriciel

$$\left\{ \begin{array}{l} Ja - C^T g = 0 \\ -Ca = -q \end{array} \right. \quad (11)$$

A ce stade, on notera que la matrice  $J$  est singulière, car pour tout déplacement rigide  $a_R$ , on a

$$a_R^T J a_R = 0 .$$

Le système (11) est-il régulier? Tout revient à déterminer si les conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} Ja - C^T g = 0 \\ -Ca = 0 \end{array} \right.$$

impliquent  $a = g = 0$ . On notera d'abord que  $Ca = 0$  implique

$$a^T Ja = a^T C^T g = 0 ,$$

c'est-à-dire que  $a$  est un déplacement rigide. Il vérifie alors à la fois

$$Ja = 0 \quad \text{et} \quad Ca = 0 . \quad (12)$$

La seconde équation signifie que les déplacements moyens d'interface sont nuls. Nous dirons, dans ce cas, que le déplacement correspondant est une pseudo-bulle (une bulle est un déplacement identiquement nul sur les bords). Dire que le système (12) admet comme seule solution  $a = 0$  revient à imposer qu'aucun déplacement rigide ne soit une pseudo-bulle. En d'autres termes, pour tout déplacement rigide, l'un au moins des déplacements généralisés  $Ca$  doit être différent de zéro. Cette condition est satisfaite dans tous les éléments raisonnables. Il reste à vérifier que la condition  $C^T g = 0$  implique bien  $g = 0$ . Ceci revient à dire que le rang de  $C^T$  est le nombre  $n_q$  de forces généralisées. Si  $n_a$  est le nombre de paramètres  $a$ , et  $n_b$ , le nombre de pseudo-bulles, on a

$$\text{rang}(C^T) = \text{rang}(C) = n_a - n_b .$$

On doit donc avoir

$$n_a - n_b = n_q .$$

Le nombre de pseudo-bulles est souvent difficile à évaluer. Mais il est toujours au moins égal au nombre  $\bar{n}_b$  de vraies bulles, c'est-à-dire de déplacements nuls sur la frontière. On doit donc avoir

$$n_a - \bar{n}_b \geq n_q \quad (13)$$

Généralement, la condition (13) est suffisante. On a alors, en posant

$$S = \begin{bmatrix} J & -C^T \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

la relation

$$\begin{bmatrix} a \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{aa}^{-1} & S_{ag}^{-1} \\ S_{ga}^{-1} & S_{gg}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix},$$

ce qui implique d'une part

$$a = S_{ag}^{-1} q, \quad (15)$$

relation qui inverse la connexion, et, d'autre part,

$$g = S_{gg}^{-1} q = Kq, \quad (16)$$

ce qui définit la matrice de raideur

$$K = S_{gg}^{-1}. \quad (17)$$

Pour ce qui est des forces de volume, on a

$$\int_V f^T u \, dV = \left( \int_V f^T M \, dV \right) a = b_{vol}^T a$$

et, par (15),

$$\int_V f^T u \, dV = b_{vol}^T S_{ag}^{-1} q = g_{vol}^T q,$$

avec

$$g_{vol} = S_{ag}^{-T} b_{vol}. \quad (18)$$

#### 4. HYBRIDES PRIMAUX DE MEMBRANES TRIANGULAIRES

Considérant, pour une membrane triangulaire, un champ de déplacements complet de degré  $k$ , on aura

$$n_a = (k+1)(k+2) = k^2 + 3k + 2.$$

Les bulles sont de la forme

$$\begin{cases} u = c_1 c_2 c_3 P_{k-3}(x,y) \\ v = c_1 c_2 c_3 P_{k-3}(x,y) \end{cases},$$

où  $c_i(x,y) = 0$  est l'équation du côté n°  $i$ . Dès lors,

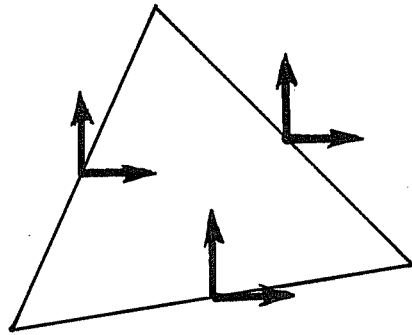
$$\bar{n}_b = (k-1)(k-2) = k^2 - 3k + 2.$$

On a donc

$$n_a - \bar{n}_b = 6k.$$

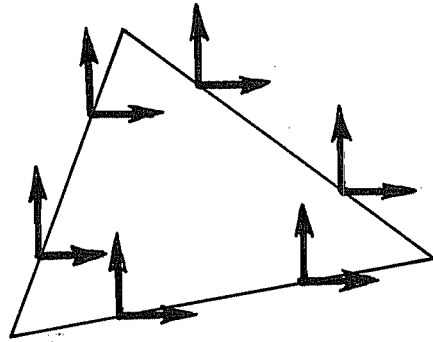
Adoptant sur chaque côté des tractions de surface de degré  $k'$ , on en aura

$$2.3.(k'+1) = 6(k'+1).$$



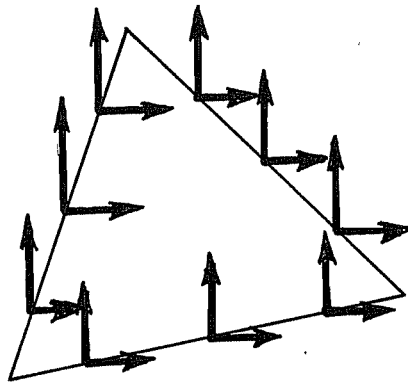
$$k' = 0$$

$$k \geq 1$$



$$k' = 1$$

$$k \geq 2$$



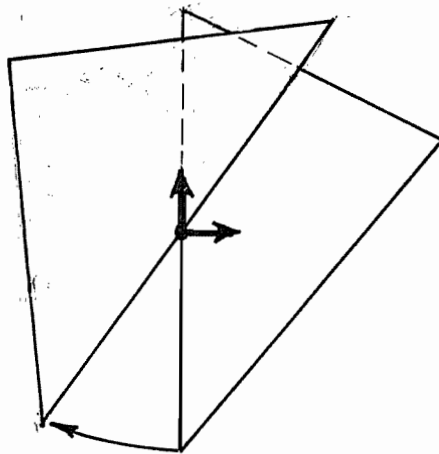
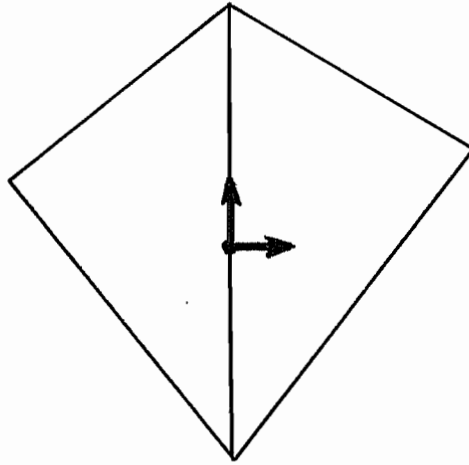
$$k' = 2$$

$$k \geq 3$$

11.86

fig. 3





7.11.86

fig.4

La condition (13) s'écrit alors

$$6k \geq 6(k' + 1)$$

soit

$$k \geq k' + 1.$$

On obtient ainsi le tableau suivant:

$k'$	$k_{\min}$
0	1
1	2
3	4

Les éléments correspondants sont représentés en fig. 3. L'élément ( $k'=0$ ) possède cependant une particularité gênante: une mise en ciseau est possible sans violer les conditions d'interface (fig. 4). Il s'agit de modes cinématiques gênants, nécessitant des précautions spéciales. Pour éliminer toute difficulté, il faut travailler avec des degrés  $k' \geq 1$ . (\*) On notera que les pseudo-bulles ne posent aucun problème particulier: leur condensation est automatique dans l'élément.

#### 5. HYBRIDES PRIMAUX DE MEMBRANES QUADRANGULAIRES

On peut construire des éléments de quadrilatères sur le même principe. Pour préserver l'isotropie du champ de déplacements, nous choisirons pour  $u$  des polynômes complets, ce qui donne pour le degré  $k$

$$n_a = (k + 1)(k + 2) = k^2 + 3k + 2.$$

Sur les côtés, on a à présent

$$n_q = 8(k' + 1).$$

Les vraies bulles sont du type

$$\begin{cases} u = c_1 c_2 c_3 c_4 P_{k-4}(x,y) \\ v = c_1 c_2 c_3 c_4 P_{k-4}(x,y) \end{cases},$$

soit au nombre de

(\*) L'élément de degré  $k'=0$ , avec  $k=1$ , est équivalent à l'élément équilibre à contraintes constantes. B. IRONS dit /6, p. 160/ : "Although this element passes the patch test in an equilibrium sense it is quite unusable, on account of its uncontrollable mechanisms (...). Fraeijis de Veubeke was well aware of this, and probably never coded the element". Nous répondons : He did.

$$\bar{n}_b = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1 \\ (k-2)(k-3) = k^2 - 5k + 6 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

On a donc

$$n_a - \bar{n}_b = \begin{cases} 6 & \text{si } k = 1 \\ 8k - 4 & \text{si } k \geq 2 \end{cases} ,$$

ce qui mène aux conditions

$$8(k' + 1) \leq 6 \quad \text{si } k = 1 \quad (\text{impossible})$$

et, si  $k \geq 2$ ,

$$8k' + 8 \leq 8k - 4,$$

soit

$$8k' \leq 8k - 12 ,$$

ce qui a lieu si  $k \geq k' + 2$ , puisqu'alors,

$$8k' \leq 8k' + 4 .$$

La fig. 5 représente les cas  $k'=1$  et  $k'=2$ . Le nombre de pseudo-bulles est donné par

$$n_b = n_a - n_q = (k^2 + 3k + 2) - (8k' + 8) .$$

Rappelons que leur condensation est automatique.

#### 6. HYBRIDES PRIMAUX DE PLAQUES TRIANGULAIRES

Considérant un champ de déplacements normaux  $w$  de degré  $k$ , on

a

$$n_a = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 2) .$$

Sur la frontière, on peut choisir les tractions de surface correspondant à un champ de moments de degré zéro, qui contiennent:

- les charges de coins  $Z_i = \Delta(M_{nt})$
- les moments d'interface  $M_{\text{bord}} = \int_0^1 M_n ds .$

Les efforts tranchants de Kirchhoff

$$K_n = T_n + \partial M_{nt} / \partial t$$

sont nuls. Y correspondent, les déplacements de coin  $w_i$  et les rotations moyennes d'interface, représentées à la fig. 6 par le signe  $\Rightarrow$ .

En tout,  $n_q = 6$ . Les vraies bulles sont ici de la forme

$$w = c_1^2 c_2^2 c_3^2 P_{k-6}(x,y)$$

et leur nombre est

$$\bar{n}_b = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 4 \\ \frac{1}{2}(k-5)(k-4) & \text{si } k \geq 4 \end{cases}$$

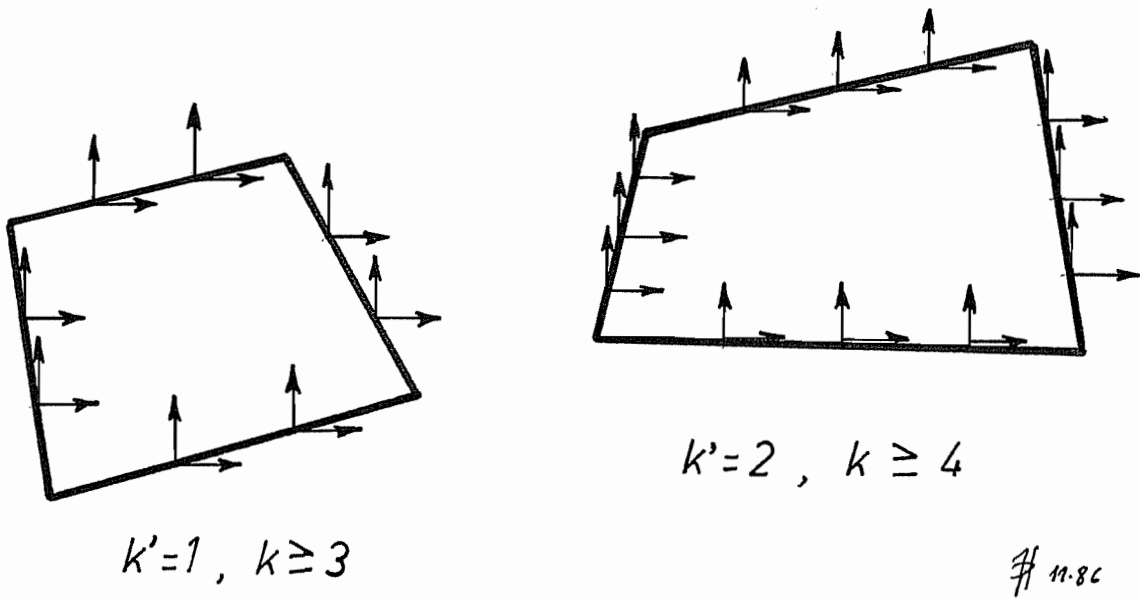
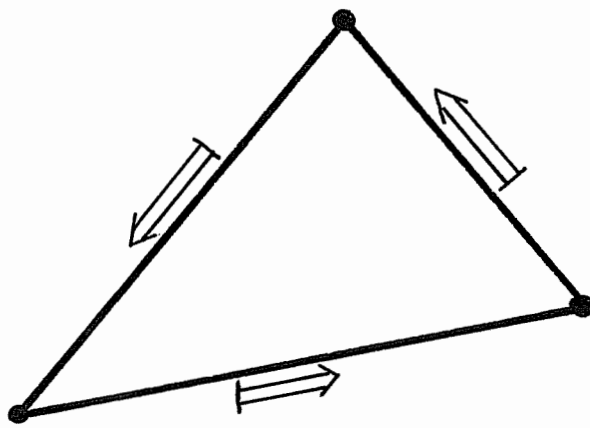


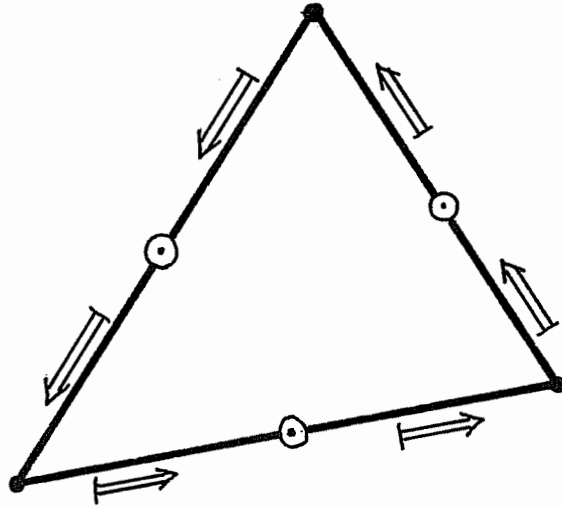
fig. 5



• dépl. local  
 ⇔ rot. moyenne

# 11.8c

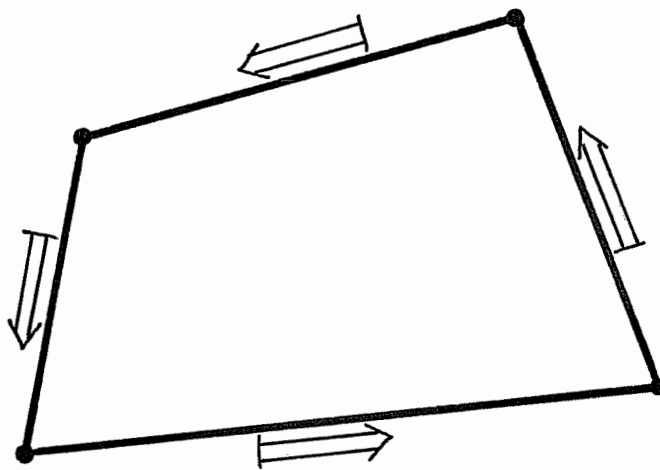
fig. 6



• dépl. local  
 ⊙ dépl. moyen  
 ⇔ rot. moyenne

# 11-86

fig. 7



• dépl. local  
 ⇔ rot. moy.

# 11-86

fig. 8

On a donc

$$n_a - \bar{n}_b = \begin{cases} \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 2) & \text{si } k \geq 4 \\ 6k - 9 & \text{si } k < 4 \end{cases},$$

soit:

k	1	2	3	4	5	6	7
$n_a - \bar{n}_b$	3	6	10	15	21	27	33

On constate que  $n_a - \bar{n}_b \geq 6$  dès que  $k \geq 2$ . Pour  $k = 2$ , la pente moyenne est égale à la pente locale au milieu du côté. L'élément ainsi défini est dû à L.S.D. MORLEY /2/.

Choisissant à présent les tractions de surface correspondant à un champ de moments de degré un:

- les charges de coin  $Z_i = \Delta(M_{nt})$
- deux moments d'interface, donnés par

$$M_{\text{bord } 1} = \int_0^1 \left(1 - \frac{s}{l}\right) M_n ds, \quad M_{\text{bord } 2} = \int_0^1 \frac{s}{l} M_n ds,$$

- l'effort tranchant d'interface

$$K_{\text{bord}} = \int_0^1 K_n ds,$$

la première question est de déterminer les déplacements de cadre conjugués à ces efforts. Appelant  $v$  le champ de déplacements de cadre, aux charges de coin sont associés les déplacements de coin  $v_i$ . Sur les interfaces, on a les moyennes

$$v_{\text{bord}} = \frac{1}{l} \int_0^1 v ds,$$

représentées en figure 7 par le signe  $\odot$ . En ce qui concerne les pentes, on note que les moments ont une expression du type

$$M_n = A \left(1 - \frac{s}{l}\right) + B \frac{s}{l},$$

ce qui implique

$$M_{\text{bord } 1} = A \frac{1}{3} + B \frac{1}{6}, \quad M_{\text{bord } 2} = A \frac{1}{6} + B \frac{1}{3}.$$

On a donc

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{12}{l^2} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/6 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{\text{bord } 1} \\ M_{\text{bord } 2} \end{bmatrix}$$

et

$$M_n = \left( \frac{4}{1} M_{\text{bord1}} - \frac{2}{1} M_{\text{bord2}} \right) \left( 1 - \frac{s}{1} \right) + \left( -\frac{2}{1} M_{\text{bord1}} + \frac{4}{1} M_{\text{bord2}} \right)$$

$$= M_{\text{bord1}} \cdot \frac{1}{1} \left( 4 - 6 \frac{s}{1} \right) + M_{\text{bord2}} \cdot \frac{1}{1} \left( -2 + 6 \frac{s}{1} \right) .$$

Le travail virtuel s'écrit donc

$$\int_0^1 M_n \frac{\partial v}{\partial n} ds = M_{\text{bord1}} \varphi_1 + M_{\text{bord2}} \varphi_2 ,$$

avec

$$\varphi_1 = \frac{1}{1} \int_0^1 \left( 4 - 6 \frac{s}{1} \right) \frac{\partial v}{\partial n} ds , \quad \varphi_2 = \frac{1}{1} \int_0^1 \left( -2 + 6 \frac{s}{1} \right) \frac{\partial v}{\partial n} ds .$$

On notera que pour un champ de rotations constantes,  $\frac{\partial v}{\partial n} = \phi$ , on a

$$\varphi_1 = \phi , \quad \varphi_2 = \phi ;$$

pour un champ de rotations linéaires, de la forme

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \psi \left( 2 \frac{s}{1} - 1 \right) ,$$

variant de  $(-\psi)$  pour  $s=0$  à  $\psi$  pour  $s=1$ , on a

$$\varphi_1 = -\psi , \quad \varphi_2 = \psi .$$

Nous représenterons indistinctement par le signe  $\Rightarrow$  les deux rotations moyennes d'interface. L'élément est représenté à la figure 7. Il compte

$$n_q = 12$$

déplacements généralisés. Il faudra donc un champ de déplacements intérieurs de degré  $k = 4$  au moins.

## 7. HYBRIDES PRIMAUX DE PLAQUES QUADRANGULAIRES

Le principe est le même. Avec les tractions de surface correspondant à un champ de moments de degré zéro, on obtient l'élément de la figure 8, à 8 degrés de liberté. Le nombre de paramètres d'un champ complet de degré  $k$  est

$$n_a = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) .$$

Les vraies bulles, multiples de  $c_1 c_2 c_3 c_4$ , sont au nombre

$$\bar{n}_b = \frac{1}{2}(k-3)(k-2) \quad \text{pour } k \geq 2 .$$

On peut établir le tableau suivant:

k	1	2	3	4	5	6	7
$n_a$	3	6	10	15	21	28	36
$\bar{n}_b$	0	0	0	1	3	6	10
$n_a - \bar{n}_b$	3	6	10	14	18	22	26

L'élément le plus simple est donc de degré 3.

Les tractions de surface relatives à un champ de moments de degré 1 mènent à l'élément de la figure 9. Ses seize degrés de liberté nécessitent un champ de déplacements de degré 5 au moins.

### 8. LE PATCH-TEST D'INTERFACE /4,5/

Considérons un élément de champ intérieur  $u$  donné et soit  $q$  un système de déplacements généralisés ne permettant pas de satisfaire à la condition de conformité. Il est lié aux paramètres du champ par la relation classique

$$q = Ca.$$

Définissons alors sur chaque bord un déplacement de cadre  $v$  tel que

$$v_{\text{bord}} = N_{\text{bord}}(\xi) b_{\text{bord}},$$

de telle façon que la relation

$$q_{\text{bord}} = C_{\text{bord}}^* b_{\text{bord}}$$

soit inversible. Le champ  $v$  ainsi construit est la partie conforme de  $u$ . Pour rappeler cette propriété, nous écrirons

$$v = \Pi u. \quad (19)$$

Supposons alors que, sur chaque bord, on ait

$$\int_{\text{bord}} l^T (u - \Pi u) dS = 0 \quad (20)$$

pour tout champ  $l$  de tractions de surface correspondant à un champ de contraintes de degré  $k''$ . On dit alors que l'élément passe le patch-test d'interface de degré  $k''$ . Dans ces conditions, en choisissant pour  $l$  un champ de degré  $k''$ , le principe (1) se ramène à

$$\sum_{\text{él}} \frac{1}{2} \int_{V_{\text{él}}} (\partial u)^T_H \partial u dV - \int_V \bar{f}^T u dV - \int_{S_2} \bar{t}^T \Pi u dS \quad \text{stat.} \quad (21)$$

Il a la même forme que le principe de variation des déplacements, si ce n'est que les tractions de surface imposées doivent être appliquées au cadre, c'est-à-dire à la partie conforme du déplacement.

On obtient ainsi des éléments non conformes justifiables sur le plan variationnel.



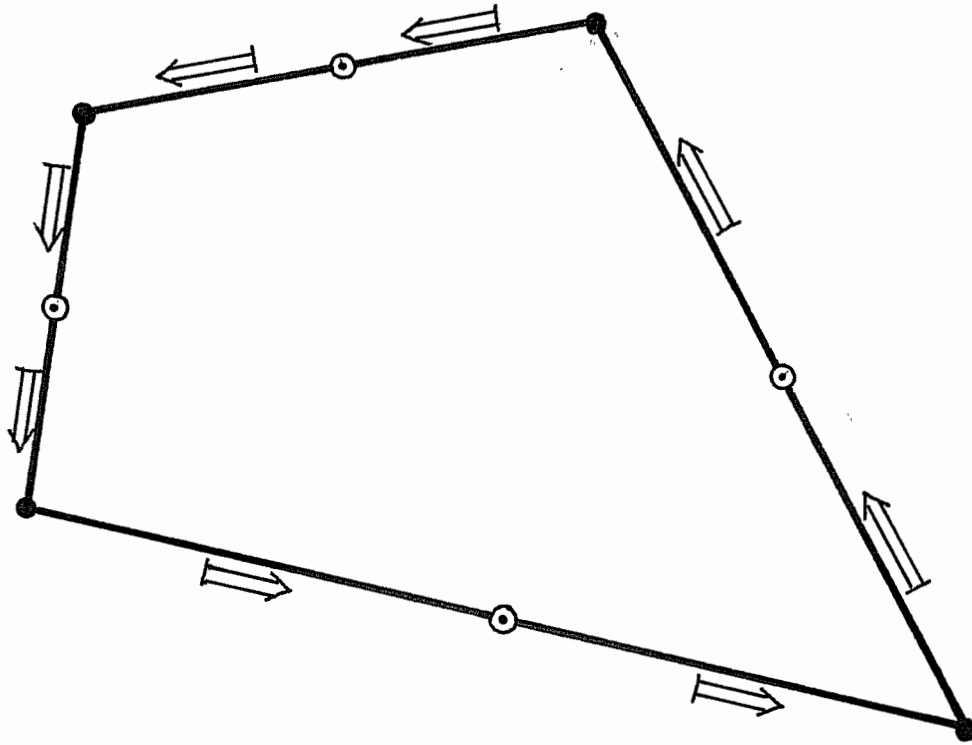
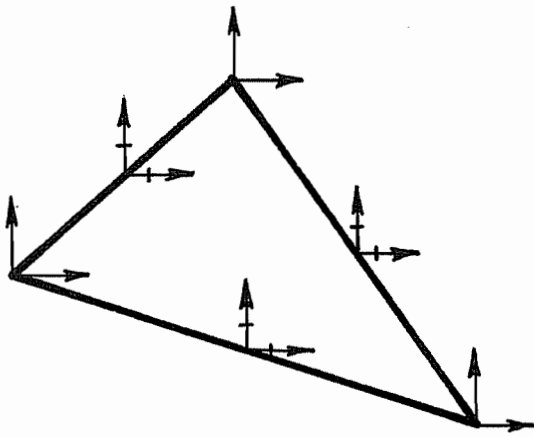
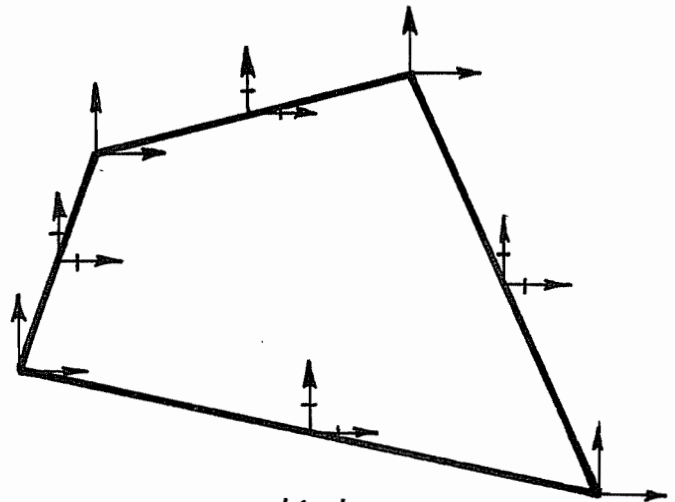


fig. 9

# 11-86



→ dépl. local



+→ dépl. moyen

# 11-86

fig. 10

9. ELEMENTS DE MEMBRANE A PATCH-TEST D'INTERFACE DE DEGRE ZERO /7/

Pour des éléments de membrane triangulaires ou quadrangulaires, on partira des déplacements aux noeuds, de façon à transmettre au moins les déplacements rigides. Pour obtenir, avec des tractions de surface constantes sur chaque bord,

$$l_x \int_{\text{bord}} (u_x - \Pi u_x) ds + l_y \int_{\text{bord}} (u_y - \Pi u_y) ds = 0 ,$$

il suffira que

$$\int_{\text{bord}} u_x ds = \int_{\text{bord}} \Pi u_x ds , \quad \int_{\text{bord}} u_y ds = \int_{\text{bord}} \Pi u_y ds ,$$

ce qui aura lieu si l'on transmet les déplacements moyens d'interface, représentés à la figure 10 par le symbole  $\rightarrow$ . Le choix de ce degré de liberté supplémentaire garantit donc un patch-test d'interface de degré 0, quel que soit le degré du champ  $u$ . La partie conforme du déplacement est de degré 2 sur chaque bord. Posant, pour une composante,

$$v = \beta_1 + \beta_2 \frac{s}{l} + \beta_3 \left(\frac{s}{l}\right)^2 ,$$

on a (fig. 11)

$$v_1 = \beta_1 , \quad v_2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$$

$$\tilde{v} = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \beta_1 + \beta_2 \frac{s}{l} + \beta_3 \left(\frac{s}{l}\right)^2 \right) ds = \beta_1 + \frac{\beta_2}{2} + \frac{\beta_3}{3} ,$$

soit

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} .$$

Inversant ce système, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = v_1 \\ \beta_2 = -4 v_1 - 2 v_2 + 6 \tilde{v} \\ \beta_3 = 3 v_1 + 3 v_2 - 6 \tilde{v} \end{array} \right. .$$

Il vient donc

$$v = v_1 \left( 1 - 4 \frac{s}{l} + 3 \frac{s^2}{l^2} \right) + v_2 \left( -2 \frac{s}{l} + 3 \frac{s^2}{l^2} \right) + \tilde{v} \left( 6 \frac{s}{l} - 6 \frac{s^2}{l^2} \right) .$$

Une charge  $\bar{t}$  appliquée sur ce déplacement donne donc un travail

$$\int_0^l \bar{t} v ds = \bar{t}_1 v_1 + \bar{t}_2 v_2 + \tilde{\bar{t}} \tilde{v} ,$$

avec

$$\bar{t}_1 = \int_0^1 \left(1 - 4 \frac{s}{1} + 3 \frac{s^2}{1^2}\right) \bar{t} \, ds \quad , \quad \bar{t}_2 = \int_0^1 \left(-2 \frac{s}{1} + 3 \frac{s^2}{1^2}\right) \bar{t} \, ds,$$

$$\bar{t} = \int_0^1 \left(6 \frac{s}{1} - 6 \frac{s^2}{1^2}\right) \bar{t} \, ds.$$

Pour une charge uniformément répartie,  $\bar{t}$  est la résultante, tandis que  $\bar{t}_1 = \bar{t}_2 = 0$ .

Les degrés minimaux dans ces éléments sont respectivement 2 pour l'élément triangulaire (qui, pour  $k = 2$ , est conforme) et 3 pour l'élément quadrangulaire. A partir du degré 3, il apparaît dans les deux cas des pseudo-bulles, solutions de  $Ca = 0$ . Leur forme étant difficile à mettre en évidence, il est hasardeux de définir des déplacements intérieurs, qui pourraient être identiques à zéro. On peut procéder autrement: après une permutation de colonnes — qui peut être représentée par une matrice de permutation  $P$  vérifiant toujours

$$P^T P = I ,$$

on a

$$q = (CP^T)Pa = \tilde{C} \tilde{a} \quad . \quad (22)$$

On peut choisir cette permutation de telle façon que

$$\tilde{C} = [\tilde{C}_e, \tilde{C}_i] ,$$

avec  $\tilde{C}_e$  carrée  $n_q \times n_q$  et inversible. Alors,

$$q = \tilde{C}_e \tilde{a}_e + \tilde{C}_i \tilde{a}_i$$

et

$$\tilde{a}_e = \tilde{C}_e^{-1} (q - \tilde{C}_i \tilde{a}_i) ,$$

relation à laquelle on peut ajouter l'identité  $\tilde{a}_i = \tilde{a}_i$  pour donner

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_e \\ \tilde{a}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_e^{-1} & -\tilde{C}_e^{-1} \tilde{C}_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \tilde{a}_i \end{bmatrix} . \quad (23)$$

On a alors

$$a = P^T \tilde{a} = P^T \begin{bmatrix} \tilde{C}_e^{-1} & -\tilde{C}_e^{-1} \tilde{C}_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \tilde{a}_i \end{bmatrix} . \quad (24)$$

Les  $\tilde{a}_i$  peuvent être considérés comme les paramètres régissant les pseudo-bulles et condensés. Ces opérations se font simplement dans le cadre d'une routine d'inversion de Gauss avec permutation de colonnes. On grossit d'abord la matrice  $C$  en lui ajoutant  $(n_a - n_q)$  lignes de zéros:

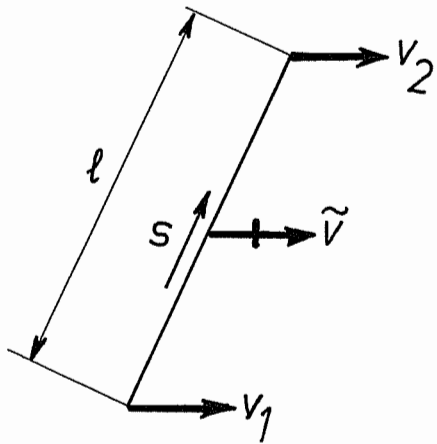
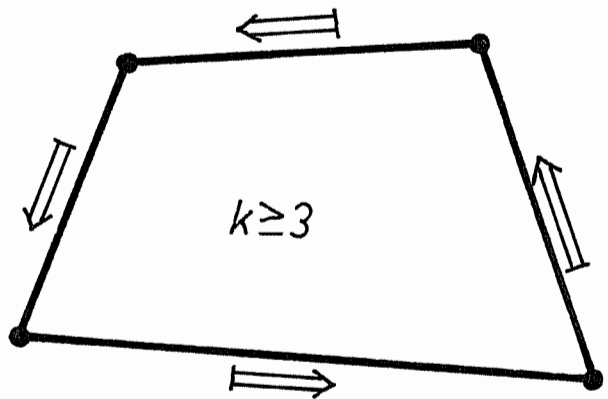
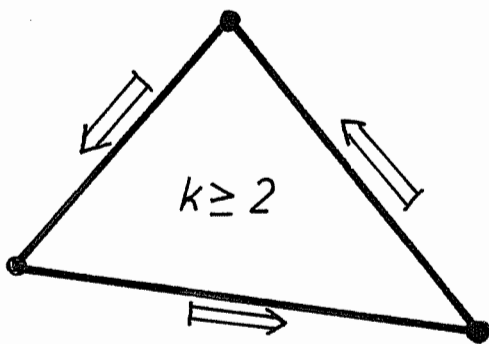


fig. 11

#11-86



#11-86

fig. 12

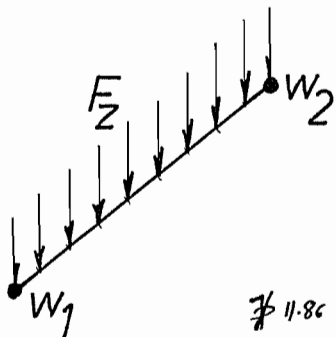
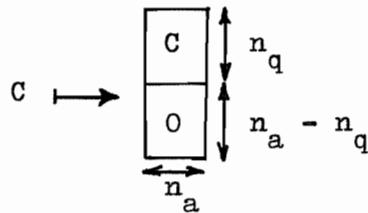


fig. 13

#11-86



On pratique alors l'inversion de Gauss avec permutation de colonnes jusqu'à trouver une ligne de zéros. A ce stade, il suffit de remplir la partie inférieure droite d'une matrice unité pour se trouver dans la situation (23). Le passage à (24) est le retour traditionnel à l'ordre de départ par permutation des lignes dans l'ordre inverse. (Cette méthode de recherche automatique des pseudo-bulles est un apport original de l'auteur. Utilisée dans le logiciel SAMCEF depuis 1978, elle n'a jamais été publiée jusqu'ici)

#### 10. ELEMENTS DE PLAQUE A PATCH-TEST D'INTERFACE

Si  $w$  est le champ de déplacement de l'élément, le patch-test de degré zéro consistera à imposer

$$\left\{ \begin{array}{l} w_i = \Pi w_i = 0 \quad (\text{égalité des déplacements aux coins}) \\ \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial n} - \Pi \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds = 0 \quad \text{sur chaque côté (égalité des pentes moyennes)} \end{array} \right.$$

On obtient donc les connexions de la figure 12, identiques à celles des hybrides. Le champ  $\Pi w$  sur les côtés est linéaire, si bien qu'une charge de bord  $F_z$  se ramène aux forces  $F_1$  et  $F_2$  définies par (fig. 13)

$$F_1 = \int_0^1 \left(1 - \frac{s}{l}\right) F_z ds \quad , \quad F_2 = \int_0^1 \frac{s}{l} F_z ds .$$

Pour ce qui est des moments, on applique leur résultante sur la rotation.

Le patch-test de degré un consiste à imposer

$$\left\{ \begin{array}{l} w_i - \Pi w_i = 0 \quad (\text{égalité aux coins}) \\ \int_0^1 (w - \Pi w) ds = 0 \quad (\text{égalité du déplacement moyen}) \\ \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial n} - \Pi \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (\text{égalité des rotations moyennes}) \\ \int_0^1 s \left( \frac{\partial w}{\partial n} - \Pi \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (\text{égalité des moments de rotations}) \end{array} \right.$$

On le satisfait en choisissant les degrés de libertés suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_i \\ \tilde{w} = \frac{1}{l} \int_0^1 w \, ds \\ \phi_1 = \frac{1}{l} \int_0^1 (4 - 6 \frac{s}{l}) \frac{\partial w}{\partial n} \, ds \\ \phi_2 = \frac{1}{l} \int_0^1 (-2 + 6 \frac{s}{l}) \frac{\partial w}{\partial n} \, ds \end{array} \right. ,$$

qui mènent aux mêmes configurations que les hybrides. Les degrés minimaux sont quatre pour le triangle et cinq pour le quadrilatère convexe.

Pour le calcul des charges d'interface, on notera que  $\Pi w$  est quadratique (fig. 14). Une charge verticale d'interface se répartit donc, comme pour les membranes, en

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_1 = \int_0^1 (1 - 4 \frac{s}{l} + 3 \frac{s^2}{l^2}) \bar{F} \, ds \\ \bar{F}_2 = \int_0^1 (-2 \frac{s}{l} + 3 \frac{s^2}{l^2}) \bar{F} \, ds \\ \bar{F} = \int_0^1 6 (\frac{s}{l} - \frac{s^2}{l^2}) \bar{F} \, ds . \end{array} \right.$$

Le calcul des moments d'interface se fait comme suit:

$$\Pi \frac{\partial w}{\partial n} = A + B \frac{s}{l} ,$$

avec

$$\phi_1 = \frac{A}{l} \int_0^1 (4 - 6 \frac{s}{l}) \, ds + \frac{B}{l} \int_0^1 (4 \frac{s}{l} - 6 \frac{s^2}{l^2}) \, ds = A$$

$$\phi_2 = \frac{A}{l} \int_0^1 (-2 + 6 \frac{s}{l}) \, ds + \frac{B}{l} \int_0^1 (-2 \frac{s}{l} + 6 \frac{s^2}{l^2}) \, ds = A + B ,$$

d'où

$$A = \phi_1 \quad , \quad B = \phi_2 - \phi_1$$

et

$$\Pi \frac{\partial w}{\partial n} = \phi_1 (1 - \frac{s}{l}) + \phi_2 \frac{s}{l} .$$

Le travail du moment imposé  $\bar{M}_n$  vaut donc

$$\int_0^1 \bar{M}_n \Pi \frac{\partial w}{\partial n} \, ds = \bar{M}_1 \phi_1 + \bar{M}_2 \phi_2 ,$$

avec

$$\bar{M}_1 = \int_0^1 \bar{M}_n (1 - \frac{s}{l}) \, ds, \quad \bar{M}_2 = \int_0^1 \bar{M}_n \frac{s}{l} \, ds .$$

### 11. NOEUDS DE LOOF /10/

Considérons un quadrilatère de membrane de degré trois. Sur chaque côté, on utilise (fig. 15) les valeurs des déplacements aux points de Gauss

$$s_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad , \quad s_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad ,$$

qui sont les racines du polynôme  $P_2(s)$ , de la suite des polynômes orthogonaux sur  $(0, 1)$ . Il est clair que dans ce cas,

$$u - \Pi u = P_2(s) \cdot Q_1(s),$$

$Q_1$  étant un polynôme de degré 1. Considérant donc un champ de tractions de surface constantes  $t_x$ , on aura

$$t_x \int_0^1 (u_x - \Pi u_x) ds = t_x \int_0^1 P_2(s) \cdot Q_1(s) ds = 0 \quad ,$$

car le polynôme  $P_2$  est, par définition même, orthogonal à tout polynôme de degré 1. Les noeuds  $s_1$  et  $s_2$ , introduits par LOOF, assurent donc dans ce cas la vérification d'un patch-test d'interface de degré zéro.

Cette idée peut être généralisée à des degrés supérieurs. Le patch-test, avec les noeuds de LOOF, résulte du fait que la formule d'intégration à deux points est de degré 3. Plus généralement, avec  $n_g$  points de Gauss, on obtient une formule de degré  $(2n_g - 1)$ . Pour des déplacements de degré  $k$  compris entre  $(n_g - 1)$  (conforme) et  $(2n_g - 1)$ , on vérifie donc un patch-test de degré  $(2n_g - 1 - k)$ .

Si l'on désire utiliser les sommets, on peut se fonder sur les points de Lobatto. Pour  $n_L \geq 3$  points de Lobatto, le degré de la formule d'intégration est  $(2n_L - 3)$ . Dès lors, avec des déplacements de degré  $k$  compris entre  $(n_L - 1)$  et  $(2n_L - 3)$ , on vérifie un patch-test de degré  $(2n_L - 3 - k)$ .

### 12. PATCH-TEST D'ELEMENT

Reprenant le principe variationnel (1), faisons dépendre les tractions de surface  $l$  d'un champ de contraintes d'élément  $s$  :

$$l = L^T s \quad .$$

On obtient alors le principe

$$\sum_{\text{él}} \int_V \frac{1}{2} (\partial u)^T H \partial u \, dV - \int_S s^T L (u - v) \, ds - \int_V \bar{f}^T u \, dV - \int_{S_2} \bar{t}^T v \, ds \quad \text{stat.}$$

(1 bis)

qui, en restreignant la liberté des multiplicateurs, nous permettra d'exploiter des incompatibilités plus fortes. Posant encore

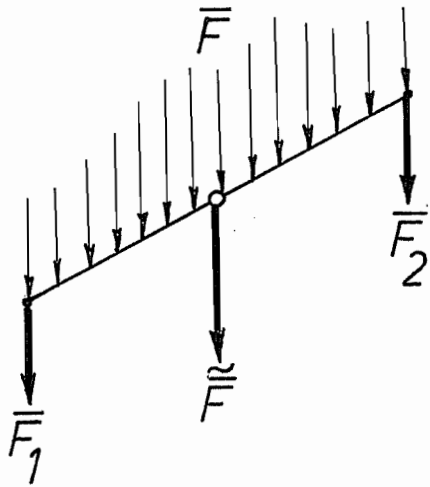


fig. 14

# 11.86

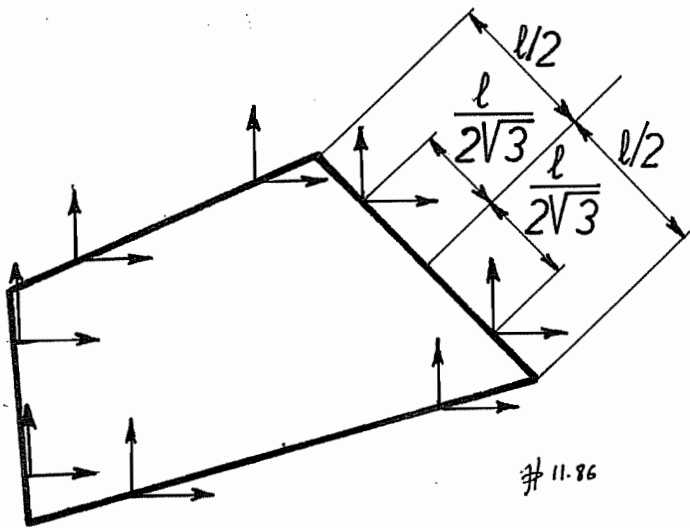


fig. 15

# 11.86

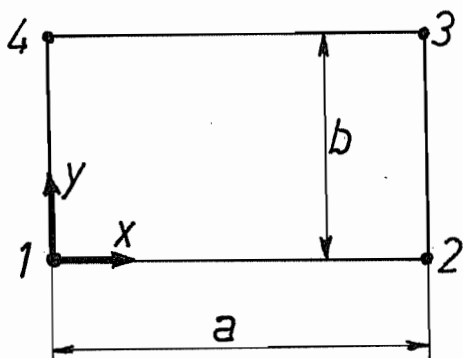


fig. 16

# 11.86



$$v = \Pi u ,$$

on dira qu'un patch-test d'élément de degré k" est vérifié si,  
pour chaque élément,

$$\int_{S_{\text{él}}} s^T L^T (u - \Pi u) dS = 0$$

pour tout champ de contraintes s de degré k". Le principe variationnel se réduit alors à

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{él}} \int_{V_{\text{él}}} (\partial u)^T H \partial u dV - \int_V \bar{f}^T u dV - \int_{S_2} \bar{t}^T \Pi u dS \quad \text{stat,}$$

soit (21). Cette seconde forme de patch-test a un certain nombre d'applications.

### 13. L'ELEMENT DE WILSON /8/

Considérons (fig. 16) un rectangle de côtés a et b, sur lequel est défini le champ membranaire

$$\begin{cases} u_x = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 (x^2 - ax) + \alpha_6 (y^2 - by) \\ u_y = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} xy + \alpha_{11} (x^2 - ax) + \alpha_{12} (y^2 - by) \end{cases}$$

Seuls, les déplacements aux quatre sommets sont connectés. Par conséquent, les paramètres  $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_{11}, \alpha_{12}$  régissent les incompatibilités. Montrons que cet élément vérifie le patch-test de degré zéro.

$$\text{a) côté 1-2: } \begin{aligned} n_x &= 0, & n_y &= -1 \\ t_x &= -\tau_{xy}, & t_y &= -\sigma_y \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_5 (x^2 - ax) \\ \Pi u_x &= \alpha_1 + \alpha_2 x \end{aligned} \right\} u_x - \Pi u_x = \alpha_5 (x^2 - ax)$$

De même,

$$u_y - \Pi u_y = \alpha_{11} (x^2 - ax)$$

et

$$\int_{12} (t_x (u_x - \Pi u_x) + t_y (u_y - \Pi u_y)) ds = (-\tau_{xy} \alpha_5 - \sigma_y \alpha_{11}) \int_0^a (x^2 - ax) dx$$

$$\text{b) côté 3-4: } \begin{aligned} n_x &= 0, & n_y &= 1 \\ t_x &= \tau_{xy}, & t_y &= \sigma_y \end{aligned}$$

$$u_x = (\alpha_1 + \alpha_3 b) + (\alpha_2 + \alpha_4 b) x + \alpha_5 (x^2 - ax)$$

$$\Pi u_x = (\alpha_1 + \alpha_3 b) + (\alpha_2 + \alpha_4 b) x$$

$$u_x - \Pi u_x = \alpha_5 (x^2 - ax)$$

On calcule de même

$$u_y - \Pi u_y = \alpha_{11}(x^2 - ax),$$

ce qui donne

$$\int_{34} (t_x(u_x - \Pi u_x) + t_y(u_y - \Pi u_y)) ds = (\tau_{xy} \alpha_5 + \sigma_y \alpha_{11}) \int_0^a (x^2 - ax) dx$$

Ce terme compense exactement celui du côté 1-2. De la même façon, il y a compensation entre les côtés 2-3 et 1-4. Le patch-test de degré zéro est donc vérifié.

En ce qui concerne les charges appliquées sur un côté, on notera que

$$u_x = u_{x1} \left(1 - \frac{s}{l}\right) + u_{x2} \frac{s}{l}$$

d'où

$$\int_0^l \bar{t}_x u_x ds = \bar{t}_{x1} u_{x1} + \bar{t}_{x2} u_{x2}$$

avec

$$\bar{t}_{x1} = \int_0^l \left(1 - \frac{s}{l}\right) \bar{t}_x ds, \quad \bar{t}_{x2} = \int_0^l \frac{s}{l} \bar{t}_x ds.$$

Les charges sont donc reportées aux noeuds.

#### 14. L'ELEMENT D'ADINI ET CLOUGH /9/ (fig. 17)

C'est le plus ancien élément de plaque convergent. Sur un rectangle de côtés  $a$  et  $b$ , on utilise un déplacement de la forme

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 \\ + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3.$$

Il est donc cubique sur chaque côté. En connectant aux noeuds seulement les déplacements et les pentes, on réalise une connexion  $C^0$ . Les pentes sont données par

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2$$

Or, seules les pentes linéaires sont connectées. Pour le patch-test de degré zéro, il suffira ici de considérer les moments normaux, puisque le déplacement est continu.

Côté 1-2

$$y = 0; \quad n_x = 0; \quad n_y = -1; \quad \frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{\partial w}{\partial y}; \quad M_n = M_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + \alpha_8 x^2 + \alpha_{11} x^3$$

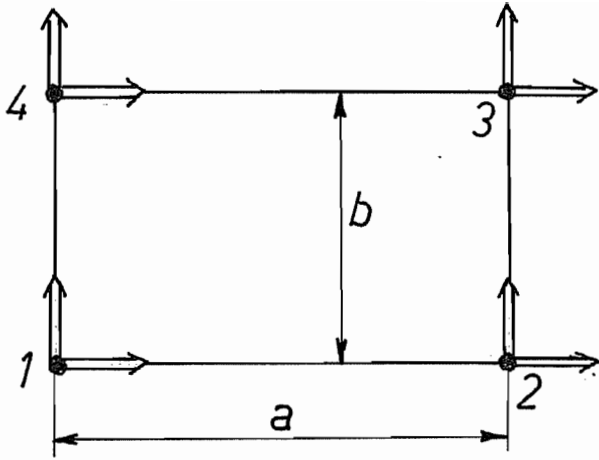


fig. 17

# 11-86

$$\Pi \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + \alpha_8 ax + \alpha_{11} a^2 x$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \Pi \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_8 (x^2 - ax) + \alpha_{11} (x^3 - a^2 x)$$

et

$$\int_{12} M_n \left( \frac{\partial w}{\partial n} - \Pi \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds = -M_y \left( \alpha_8 \int_0^a (x^2 - ax) dx + \alpha_{11} \int_0^a (x^3 - a^2 x) dx \right)$$

Côté 3-4

$$y = b ; n_x = 0 ; n_y = 1 ; \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial y} ; M_n = M_y.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = (\alpha_3 + 2\alpha_6 b + 3\alpha_{10} b^2) + (\alpha_5 + 2\alpha_9 b + 3\alpha_{12} b^2) x + \alpha_8 x^2 + \alpha_{11} x^3$$

$$\begin{aligned} \Pi \frac{\partial w}{\partial y} &= (\alpha_3 + 2\alpha_6 b + 3\alpha_{10} b^2) + (\alpha_5 + 2\alpha_9 b + 3\alpha_{12} b^2) x \\ &\quad + \alpha_8 ax + \alpha_{11} a^2 x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \Pi \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_8 (x^2 - ax) + \alpha_{11} (x^3 - a^2 x)$$

et

$$\int_{34} M_n \left( \frac{\partial w}{\partial n} - \Pi \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds = M_y \left( \alpha_8 \int_0^a (x^2 - ax) dx + \alpha_{11} \int_0^a (x^3 - a^2 x) dx \right)$$

Il y a compensation exacte de ces deux côtés. Il en est de même pour les côtés 1-4 et 2-3.

Un moment normal  $\bar{M}_n$  imposé sur un côté de cet élément se répartit en

$$\bar{M}_1 = \int_0^1 \left(1 - \frac{s}{l}\right) \bar{M}_n ds, \quad \bar{M}_2 = \int_0^1 \frac{s}{l} \bar{M}_n ds.$$

### 15. SUR LA CONSERVATION DE L'ENERGIE

Dans les éléments conformes, pour autant que les degrés de liberté fixés le soient à zéro, on peut poser  $\delta u = u$ , ce qui entraîne

$$\int_V (\partial u)^T_H \partial u dV - \int_V \bar{f}^T u dV - \int_{S_2} \bar{t}^T u dS = 0,$$

c'est-à-dire le théorème de Clapeyron, exprimant la conservation de l'énergie. La même propriété vaut pour les éléments à cadres, pour autant que les fixations, qui s'opèrent sur le déplacement  $v$ , soient homogènes. En effet, pour  $\delta u = u$ , on obtient

$$\sum_{\text{él}} \left( \int_{V_{\text{él}}} (\partial u)^T_H \partial u dV - \int_{S_{\text{él}}} l^T u dS \right) - \int_V \bar{f}^T u dV = 0 ;$$

pour  $\delta l = 1$ , on trouve

$$\sum_{\text{él}} \int_{S_{\text{él}}} l^T (u - v) \, dS = 0 \quad ;$$

enfin, pour  $\delta v = v$ , il vient

$$\sum_{\text{él}} \int_{S_{\text{él}}} l^T v \, dS - \int_{S_2} \bar{t}^T v \, dS = 0 .$$

Additionnant ces relations, on obtient

$$\sum_{\text{él}} \int_{V_{\text{él}}} (\partial u)^T_H \partial u \, dV - \int_{S_2} \bar{t}^T v \, dS - \int_V \bar{f}^T u \, dV = 0 ,$$

c'est-à-dire la conservation de l'énergie. On notera que ce résultat n'est obtenu qu'en chargeant le cadre et non l'élément lui-même sur  $S_2$ .

\*                      \*

\*

Nantes, mars 1985

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ PIN TONG - "New displacement hybrid finite element models for solid continua"  
Int. J. Num. Meth. Eng. 2 , 73-83, 1970
- /2/ L.S.D. MORLEY - "The constant-moment plate bending element"  
J. of Strain Analysis, 6, N°1, pp. 20-24, 1971
- /3/ B.M. IRONS, A. RAZZAQUE - "Experience with the patch test for convergence of finite elements"  
Mathematical Foundations of the Finite Element Method ,  
pp. 557-587 (ed. A.K.AZIZ), Academic Press, 1972
- /4/ G. STRANG, G. FIX - Analysis of the Finite Element Method  
Prentice Hall, 1973
- /5/ B.M. FRAEIJIS de VEUBEKE - "Variational Principles and the Patch Test"  
Int. J. Num. Meth. Eng. 8, pp.783-801, 1974
- /6/ B.M. IRONS, S. AHMAD - Techniques of finite elements  
Ellis Horwood Ltd; J. Wiley & Sons, 1980
- /7/ G. SANDER, P. BECKERS - "Delinquent finite elements for shell idealizations"  
Proc. World Congress on Finite Element Methods in Structural Mechanics, Bournemouth, England, 1975
- /8/ E.L. WILSON, R.L. TAYLOR, W.P. DOHERTY, J. GHABOUSS - "Incompatible displacement models"  
University of Illinois Symposium, 1971
- /9/ A. ADINI, R.W. CLOUGH - "Analysis of plate bending by the finite element method"  
Report to Nat. Foundation/U.S.A., G. 7337, 1960
- /10/ H.W. LOOF - "The economical computation of stiffness of large structural elements"  
Int. Symp. on Use of Comp. in Struct. Eng., University of Newcastle upon Tyre, 1966.