

U N I V E R S I T E de L I E G E  
L T A S  
DYNAMIQUE DES CONSTRUCTIONS MECANIQUES  
Rue Ernest Solvay,21  
4000 LIEGE  
(Belgique)

Rapport VF - 67

Sur la formulation de l'U.T.C.  
des problèmes hydroélastiques

CONTRAT ESA RFQ/3-6204/NL/PH

par

J.F. DEBONGNIE

Juin 1990

## INTRODUCTION

L'étude des problèmes hydroélastiques suscite un grand intérêt dans l'industrie aérospatiale depuis de nombreuses années. Les premières formulations proposées, dont on trouvera une revue dans [8], péchaient, lorsqu'elles n'étaient pas simplistes, par leur manque de rigueur. D'une façon générale, en effet, la description de la structure était lagrangienne et celle du fluide, eulérienne. Il en résultait, à l'interface fluide-structure, des dissymétries rendant le problème non auto-adjoint, ce qui est troublant dans le cas d'un système conservatif.

A notre connaissance, c'est au Laboratoire des Techniques Aéronautiques et Spatiales de l'Université de Liège que s'est manifestée pour la première fois la volonté d'arriver à une formulation cohérente, purement *lagrangienne* [7]. A l'époque, cette idée, bien que toute naturelle, a provoqué une certaine surprise, de même que la notion de *potentiel des déplacements* issue du premier essai dans cette direction. Ces efforts de rationalisation ont conduit à une formulation définitive du *principe de TONG corrigé* en 1978 [8] puis, en 1984, à son extension au cas compressible [6]. Des résultats équivalents ont été obtenus par MORAND en 1987 [10].

Une étude récente, réalisée à l'Université de Technologie de Compiègne et fondée sur les mêmes bases théoriques indiscutables, propose de remplacer la discrétisation volumique du fluide par une formulation intégrale [1]. L'objet du présent rapport est d'analyser cette formulation nouvelle en mettant en lumière ses liens très étroits avec le principe de TONG corrigé. Ce rapprochement simplifie d'ailleurs l'exposé. La question des termes d'interface fluide-structure est traitée en profondeur. La méthode d'équations intégrales variationnelles de l'U.T.C., très originale, est décrite en détail. Enfin, un dernier chapitre contient quelques réflexions sur l'application pratique de cette méthode nouvelle.

## Chapitre I

### DESCRIPTION DU FLUIDE

#### 1. INTRODUCTION

Les mouvements que nous considérons sont des vibrations autour d'une position d'équilibre. Le fait que le fluide forme un système fermé pour la masse suggère naturellement d'utiliser une description *lagrangienne*. Comme nous nous intéressons aux *petits* mouvements, on peut linéariser les équations, ce qui se fait aisément par une paramétrisation convenable.

Soient  $a_i$  les coordonnées initiales d'une particule de fluide. Au temps  $t$ , cette particule a la position

$$x_i(t) = a_i + \lambda(t) u_i(a)$$

Cette description convient particulièrement pour une analyse modale dans laquelle on peut supposer, d'une part que  $\lambda$  est toujours petit devant l'unité et, d'autre part, qu'il vérifie l'équation

$$\ddot{\lambda}(t) + \omega^2 \lambda(t) = 0$$

où  $\omega$  est la pulsation.

Dans tout ce qui suit, nous noterons  $D_i$  les dérivées par rapport à  $a_i$  et  $\partial_i$  les dérivées par rapport à  $x_i$ . Le symbole  $J$  représentera le jacobien  $\partial(x)/\partial(a)$ . Dans sa position de référence, qui est la *position d'équilibre statique*, le fluide occupe un volume  $V$ , mouille la coque sur une surface  $S_f$  et a une surface libre  $\Gamma$ . Lors du mouvement, ces grandeurs deviennent  $V^*$ ,  $S_f^*$ ,  $\Gamma^*$ .

#### 2. LINEARISATION DE QUELQUES GRANDEURS AUXILIAIRES

Il est utile d'effectuer une fois pour toutes un certain nombre de linéarisations dont nous aurons besoin.

Tout d'abord, le jacobien  $J$  est le déterminant de la matrice d'éléments

$$D_{j i} x_i = D_j (a_i + \lambda u_i) = \delta_{ij} + \lambda D_{j i} u_i$$

Sa valeur exacte est

$$J = 1 + \lambda D_{i i} u_i + \frac{\lambda^2}{2} (D_{i i} u_i D_{j j} u_j - D_{j i} u_i D_{i j} u_j) + \lambda^3 \text{dtm} (D_{j i} u_i)$$

En s'arrêtant au premier ordre en  $\lambda$ , on obtient

$$J \approx 1 + \lambda D_{i i} u_i \tag{1}$$

Nous aurons également besoin de linéariser la matrice inverse, de composantes  $\partial_{j1} a_i$ . Il est clair qu'au repos,  $\partial_{j1} a_i = \delta_{ij}$ . Nous chercherons donc une expression de la forme

$$\partial_{j1} a_i = \delta_{ji} + \lambda \alpha_{ji} + O(\lambda^2)$$

Les  $\alpha_{ji}$  s'obtiennent en résolvant l'équation

$$\begin{aligned} \delta_{ki} &= D_{kj} x_j \partial_{j1} a_i = (\delta_{kj} + \lambda D_{kj} u_j) [(\delta_{ji} + \lambda \alpha_{ji} + O(\lambda^2))] \\ &= \delta_{ki} + \lambda D_{kj} u_j + \lambda \alpha_{ki} + O(\lambda^2) \end{aligned}$$

ce qui fournit

$$\alpha_{ki} = -D_{kj} u_j$$

et

$$\partial_{j1} a_i \approx \delta_{ji} - \lambda D_{kj} u_j \quad (2)$$

### 3. EQUATIONS DU MOUVEMENT

Les équations du mouvement sont

$$\rho_f \ddot{u}_i = \rho_f g_i + D_{ji} t_{ji} \quad (3)$$

où  $\rho_f$  est la masse volumique de référence,  $g_i$  le vecteur d'accélération de la pesanteur,  $t_{ji}$  les contraintes de PIOLA du fluide. Dans le cas d'un fluide non visqueux, ces contraintes traduisent des pressions normales qui ne travaillent que lors d'un accroissement de volume. Par conséquent, le travail virtuel correspondant à un élément de volume initial  $dV$  est

$$t_{ji} D_{j1} \delta u_i dV = -p \delta(dV^*) = -p \delta J dV$$

Or, en notant  $M_{ji}$  le cofacteur de l'élément  $D_{j1} x_i$  de la matrice jacobienne, on a

$$\delta J = M_{ji} D_{j1} \delta u_i = J \partial_{i1} a_j D_{j1} \delta u_i$$

en vertu de la formule d'inversion de CRAMER

$$\partial_{i1} a_j = \frac{1}{J} M_{ji}$$

Dès lors

$$t_{ji} D_{j1} \delta u_i dV = -p J \partial_{i1} a_j D_{j1} \delta u_i dV$$

ce qui implique

$$t_{ji} = -p J \partial_{i1} a_j$$

Nous linéariserons cette expression après avoir mis la pression sous la forme

$$p = p_0 + \lambda q$$

où  $p_0$  est la pression à l'équilibre. Faisant usage des relations (1) et (2), on a alors

$$\begin{aligned} t_{ji} &\approx -(p_0 + \lambda q) (1 + \lambda D_{kk} u_k) (\delta_{ij} - p_0 D_{ij} u_j) \\ &= -p_0 \delta_{ij} - \lambda [(q + p_0 D_{kk} u_k) \delta_{ij} - p_0 D_{ij} u_j] \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire l'équation (3) sous la forme

$$-\rho_f \omega^2 \lambda u_i = \rho_f g_i - D_i p_0 - \lambda [D_i (q + p_0 D_{kk} u_k) - D_j (p_0 D_{ij} u_j)]$$

soit

$$\text{- à l'ordre zéro : } D_i p_0 = \rho_f g_i \quad (4)$$

$$\text{- à l'ordre un : } \rho_f \omega^2 u_i = D_i (q + p_0 D_{kk} u_k) - D_j (p_0 D_{ij} u_j) \quad (5)$$

#### 4. CONDITION D'INCOMPRESSIBILITE

La condition d'incompressibilité s'écrit

$$J = 1$$

soit, en se limitant au premier ordre

$$1 + \lambda D_{ii} u_i \approx 1$$

ce qui mène à la condition

$$D_{ii} u_i = 0 \quad (6)$$

#### 5. LE POTENTIEL DE DEPLACEMENT

L'équation (5) s'écrit encore

$$\rho_f \omega^2 u_i = D_i q + D_i p_0 D_{kk} u_k + p_0 D_{ik} u_k - D_j p_0 D_{ij} u_j - p_0 D_{ij} u_j$$

soit, en tenant compte de (4)

$$\rho_f \omega^2 u_i = D_i q - \rho_f g_i D_{kk} u_k - \rho_f g_j D_{ij} u_j$$

En tenant compte de (6), c'est encore

$$\rho_f \omega^2 u_i = D_i (q - \rho_f g_j u_j)$$

Il existe donc un *potentiel de déplacement*  $\varphi$  tel que

$$u_i = D_i \varphi \quad (7)$$

Ce potentiel est lié à la pression par la condition

$$q = \rho_f (g_j u_j + \omega^2 \varphi) = \rho_f (g_i D_i \varphi + \omega^2 \varphi) \quad (8)$$

Il est soumis à la condition

$$D_i u_i = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (9)$$

## 6. CONDITIONS SUR LA SURFACE LIBRE

Sur la surface libre, la pression est nulle. On a donc

$$\text{- à l'ordre zéro : } p_0|_{\Gamma} = 0 \quad (10)$$

$$\text{- à l'ordre un : } g_i D_i \varphi + \omega^2 \varphi = 0 \quad (11)$$

En notant que la surface libre est horizontale, on a

$$g_i D_i \varphi = -g \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

Il est équivalent d'écrire séparément les conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \eta \\ g\eta - \omega^2 \varphi = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

$$(13)$$

## 7. CONDITIONS SUR LA SURFACE MOUILLÉE DE LA COQUE

La discussion des conditions de passage entre le fluide et la coque, très délicate, sera faite au chapitre III. En ce qui concerne le potentiel, disons que l'on connecte le déplacement normal, ce qui donne la condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = w_i n_i$$

sur la coque. Insistons que cette condition, bien qu'intuitive, n'est pas évidente.

## Chapitre II

### DESCRIPTION DE LA STRUCTURE

#### 1. INTRODUCTION

Il est clair que l'étude de la structure se fera, selon l'habitude, dans un formalisme lagrangien. Mais il convient de bien noter qu'à l'interface fluide-structure, ce sont les coordonnées spatiales  $x_i$  qui sont continues et non pas les coordonnées matérielles. En effet, un point de la coque voit, au cours du mouvement, défiler de nombreuses particules de fluide. On doit donc distinguer les coordonnées matérielles de la coque de celles du fluide. Nous appellerons  $b_i$  les coordonnées d'un point de la coque au repos. Durant le mouvement, ce point subit un déplacement  $\lambda w_i$  et prend donc la position

$$x_i = b_i + \lambda w_i$$

Nous noterons  $\nabla_i$  les dérivées par rapport aux  $b_i$ ,  $\partial_i$  les dérivées par rapport aux  $x_i$ , et  $\mathcal{J}$  le déterminant jacobien  $\partial(x)/\partial(b)$ .

#### 2. EQUATIONS DU MOUVEMENT

Les équations du mouvement sont semblables à celles du fluide

$$\rho_s \ddot{\lambda} w_i = \rho_s g_i + \nabla_j t_{ji}$$

Ici, cependant, on utilisera de préférence les contraintes de KIRCHHOFF-TREFFTZ, liées à celles de PIOLA par la relation

$$t_{ji} \lambda D_j \delta w_i = s_{ji} \delta \gamma_{ij} = s_{j\ell} (\delta_{\ell i} + \lambda \nabla_\ell w_i) \lambda \nabla_j \delta w_i$$

soit

$$t_{ji} = s_{j\ell} (\delta_{\ell i} + \lambda \nabla_\ell w_i)$$

Nous décomposerons encore les contraintes en

$$s_{ji} = s_{ji}^0 + \lambda \sigma_{ji}$$

ce qui donne

$$t_{ji} \approx s_{ji}^0 + \lambda (\sigma_{ji} + s_{j\ell}^0 \nabla_\ell w_i) \quad (1)$$

Le mouvement est donc régi par les équations

$$-\rho_s \lambda \omega^2 w_i = \rho_s g_i + \nabla_j s_{ji}^0 + \lambda \nabla_j (\sigma_{ji} + s_{j\ell}^0 \nabla_\ell w_i)$$

soit

$$\text{- à l'ordre zéro : } \nabla_j s_{ji}^0 + \rho_s g_i = 0 \quad (2)$$

$$- \text{à l'ordre un} : -\rho_s \omega^2 w_i = \nabla_j (\sigma_{ji} + s_{jl}^0 \nabla_l w_i) \quad (3)$$

### 3. RELATIONS CONSTITUTIVES

Nous adopterons une relation linéaire entre les contraintes de KIRCHHOFF-TREFFTZ  $\sigma_{ij}$  et le tenseur de GREEN, à savoir

$$\lambda \sigma_{ij} = C_{ijkl} \gamma_{kl}$$

avec

$$\gamma_{kl} = \frac{\lambda}{2} (\nabla_k w_l + \nabla_l w_k) + \frac{\lambda^2}{2} \nabla_k w_i \nabla_l w_i$$

En se limitant à l'ordre un, on a

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4)$$

avec

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (\nabla_k w_l + \nabla_l w_k) \quad (5)$$

### 4. PRINCIPE VARIATIONNEL POUR LA STRUCTURE

Multiplions l'équation (3) par  $\delta w_i$  et intégrons sur la structure : il vient

$$-\int_{V_s} \rho \omega^2 w_i \delta w_i dV_s - \int_{V_s} \nabla_j (\sigma_{ji} + s_{jl}^0 \nabla_l w_i) \delta w_i dV_s$$

Une intégration par partie du second terme donne

$$\begin{aligned} & -\int_{V_s} \rho \omega^2 w_i \delta w_i dV_s - \int_S (\sigma_{ji} + s_{jl}^0 \nabla_l w_i) n_j \delta w_i dS \\ & + \int_{V_s} (\sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} + s_{jl}^0 \nabla_l w_i \nabla_j \delta w_i) dV = 0 \end{aligned}$$

Le second terme représente le travail virtuel en surface. Sur la partie  $S_0$  de celle-ci qui est fixée, c'est zéro ; sur la partie  $S_1$  où des charges mortes  $f_i$  sont imposées, le travail virtuel n'a pas de termes du premier ordre.

Enfin, nous écrirons  $\delta \mathcal{T}_f$  pour la partie  $S_f$ . Il vient donc, en tenant compte de (4)

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_{V_s} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + s_{ij}^0 \nabla_i w_k \nabla_j w_k - \rho \omega^2 w_i w_i \right\} dV - \delta \mathcal{T}_f = 0 \quad (6)$$



## Chapitre III

### CONNEXION DE LA COQUE ET DU FLUIDE

#### 1. INTRODUCTION

Le moment est venu d'examiner la connexion de la coque avec le fluide. Il nous faut déterminer deux choses : les conditions cinématiques et les conditions d'équilibre.

#### 2. CONDITIONS CINEMATIQUES

La condition exacte est que pendant le mouvement, la particule de fluide qui se trouve en  $x_1$  sur la coque a la même vitesse normale que celle-ci

$$\dot{\lambda} u_1 [ a(x) ] n_1^*(x) = \dot{\lambda} w_1 [ b(x) ] n_1^*(x)$$

Au point  $x$  correspond pour le fluide le point de départ  $a$  et pour la coque, le point de départ  $b$ . On a donc

$$x_1 = a_1 + \lambda u_1 = b_1 + \lambda w_1$$

Donc

$$a_1 = b_1 + \lambda (u_1 - w_1)$$

et

$$u_1 [ a(x) ] = u_1(b) + \lambda [ D_{j_1} u_1 ]_b [ u_1(a) - w_1(b) ]$$

Mais ceci amène une correction du second ordre. On a donc

$$\dot{\lambda} [ u_1(b) - w_1(b) ] n_1^* = 0$$

De même, la correction de la normale est du second ordre. Au premier ordre, les déplacements normaux de points initialement en contact sont donc égaux.

#### 3. TRAVAIL DE LA PRESSION A L'INTERFACE

Il nous faut trouver l'expression  $\delta \mathcal{T}_f$  du travail effectué par la pression du fluide sur la coque. Soit un point  $b$  de la coque, dont les coordonnées aux temps  $t$  sont  $x_1$ . L'élément de surface  $dS^*$  qui entoure ce point subit une force

$$p [ a(x) ] n_1^* dS^*$$

où  $n_1^*$  est la normale déplacée, pointant vers l'extérieur du fluide. La notation  $p [ a(x) ]$  rappelle que la pression agissant en  $b$  est la pression de la particule de fluide initialement située au point  $a(x)$ , et non  $b$ .

On a

$$p(a) = p_0(a) + \lambda q(a)$$

et, comme

$$a_i = b_i + \lambda w_i(b) - \lambda u_i(a) = b_i + \lambda [ w_i(b) - u_i(b) ] + O(\lambda^2)$$

on peut écrire

$$p(a) = p_0(b) + \lambda D_i p_0(b) [ w_i(b) - u_i(b) ] + \lambda q(b) + O(\lambda^2)$$

La pression à prendre en considération est donc, en omettant les  $(b)$ ,

$$p(a) = p_0 + \lambda \rho_f g_i (w_i - u_i) + \lambda q$$

Notant que

$$q = \rho_f g_i u_i + \rho_f \omega^2 \varphi$$

on a encore

$$p(a) = p_0 + \lambda \rho_f g_i w_i + \lambda \rho_f \omega^2 \varphi \quad (1)$$

Le bien-fondé de cette assertion apparaît immédiatement en considérant par exemple un mouvement rigide de rotation de la coque autour d'un point choisi de telle façon que la surface libre ne bouge pas. Lorsqu'un point de la coque descend, la pression qu'il subit augmente au prorata de son déplacement vertical, le fluide ne bougeant pas.

Pour évaluer  $n_1^* dS^*$ , imaginons une fonction  $\psi$  définie arbitrairement dans la structure et à sa surface. On a

$$-\int_{S^*} \psi n_1^* dS^* = \int_{V^*} \partial_i \psi dV^* = \int_V \mathcal{F} \partial_i b_j \nabla_j \psi dV$$

Tenant compte de l'identité classique de Jacobi [9]

$$\nabla_j (\mathcal{F} \partial_i b_j) = 0$$

l'intégrale sur  $V$  devient

$$\int_V \nabla_j (\mathcal{F} \partial_i b_j \psi) dV = - \int_S n_j \mathcal{F} \partial_i b_j \psi dS$$

La fonction  $\psi$  étant arbitraire, il faudra nécessairement que

$$n_i^* dS^* = \mathcal{J} \partial_i b_j n_j dS$$

Cela étant, et à partir des relations

$$\mathcal{J} = 1 + \lambda \nabla_k w_k + O(\lambda^2)$$

$$\partial_i b_j = \delta_{ij} - \lambda \nabla_i w_j + O(\lambda^2)$$

on obtient

$$n_i^* dS^* = [ n_i + \lambda (\nabla_k w_k n_i - \nabla_i w_j n_j) ] dS \quad (2)$$

Le coefficient de  $\lambda$  de cette expression s'écrit encore

$$\nabla_p w_q n_r (\delta_{pq} \delta_{ri} - \delta_{pi} \delta_{qr}) = e_{jpr} e_{jqil} n_r \nabla_p w_q \quad (3)$$

Il ne fait donc intervenir que des dérivées *tangentes*, ce qui est normal sur une surface. Rassemblant les résultats (1), (2) et (3), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{S_f^*} p(a) n_i \delta w_i dS = \\ &= \int_{S_f} [ p_0 + \lambda \rho_f g_k w_k + \lambda \rho_f \omega^2 \varphi ] [ n_i + \lambda e_{jpr} e_{jqil} n_r \nabla_p w_q ] \delta w_i dS \\ &= \int_{S_f} p_0 n_i \delta w_i dS + \lambda \int_{S_f} [ \rho_f \omega^2 \varphi n_i \delta w_i + \rho_f g_k w_k \delta w_i n_i + p_0 e_{jpr} e_{jqil} n_r \nabla_p w_q \delta w_i ] dS \end{aligned} \quad (4)$$

Le dernier terme peut être intégré par parties à la Stokes-Ampère, en notant que sur frontière  $\bar{S}_f \cap \bar{\Gamma}$  de  $S_f$ ,  $p_0 = 0$ . Nous procéderons de la sorte pour la moitié de ce terme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{S_f} p_0 e_{jpr} e_{jqil} n_r \nabla_p w_q \delta w_i dS &= -\frac{1}{2} \int_{S_f} e_{jpr} e_{jqil} n_r \nabla_p p_0 w_q \delta w_i dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{S_f} p_0 e_{jpr} e_{jqil} n_r w_q \nabla_p \delta w_i dS \end{aligned} \quad (5)$$

La première intégrale du second membre se transforme en

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \int_{S_f} (\delta_{pq} \delta_{ri} - \delta_{pi} \delta_{rq}) \rho_f g_p n_r w_q \delta w_i dS \\ &-\frac{1}{2} \int_{S_f} \rho_f g_p w_p n_i \delta w_i dS + \frac{1}{2} \int_{S_f} \rho_f g_p \delta w_p n_r w_r dS \end{aligned} \quad (6)$$

La seconde équivaut à

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_{S_f} p_0 (\delta_{pq} \delta_{ri} - \delta_{pi} \delta_{rq}) n_r w_q \nabla_p \delta w_i \, dS \\
 & = -\frac{1}{2} \int_{S_f} p_0 (n_i w_p \nabla_p \delta w_i - n_r w_r \nabla_i \delta w_i) \, dS \quad (7)
 \end{aligned}$$

Enfin, la moitié du dernier terme du second membre de (4) s'écrit explicitement

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{S_f} p_0 (\delta_{pq} \delta_{ri} - \delta_{pi} \delta_{qr}) n_r \nabla_p w_q \delta w_i \, dS \\
 & = \frac{1}{2} \int_{S_f} p_0 (n_r \delta w_r \nabla_p w_p - n_q \delta w_i \nabla_i w_p) \, dS \quad (8)
 \end{aligned}$$

Rassemblant les résultats (4) à (8), on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} & = \int_{S_f} p_0 n_i \delta w_i \, dS + \lambda \int_{S_f} [\rho_f \omega^2 \varphi n_i \delta w_i + \frac{1}{2} \rho_f g_k w_k n_i \delta w_i + \frac{1}{2} \rho_f g_k \delta w_k n_i w_i \\
 & \quad - \frac{1}{2} p_0 (n_i w_j \nabla_j \delta w_i + n_i \delta w_j \nabla_j w_i) + \frac{1}{2} p_0 (n_i w_i \nabla_j \delta w_j + n_i \delta w_i \nabla_j w_j)] \, dS \\
 & = \int_{S_f} p_0 n_i \delta w_i \, dS + \lambda \int_{S_f} \rho_f \omega^2 \varphi n_i \delta w_i \, dS + \\
 & \quad + \frac{\lambda}{2} \delta \int_{S_f} [\rho_f g_k w_k n_i w_i + p_0 (n_i w_i \nabla_j w_j - n_i w_j \nabla_j w_i)] \, dS
 \end{aligned}$$

Le premier terme, d'ordre zéro, ne nous intéresse pas. Le second est  $\delta \mathcal{J}_f$ , qui peut être écrit

$$\delta \mathcal{J}_f = -\delta U_f + \int_{S_f} \rho_f \omega^2 \varphi n_i \delta w_i \, dS$$

où  $U_f$  est l'énergie introduite par la pression du fluide

$$U_f = -\frac{1}{2} \int_{S_f} [\rho_f g_k w_k n_i w_i + p_0 (n_i w_i \nabla_j w_j - n_i w_j \nabla_j w_i)] \, dS \quad (9)$$

La structure admet donc l'équation variationnelle

$$\delta U(w) - \omega^2 \delta T(w) - \delta P_1(w) - \omega^2 \int_{S_f} \rho_f \varphi n_i \delta w_i \, dS = 0 \quad (10)$$

avec

$$U = U_e + U_g + U_f$$

en notant

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_s} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(w) \varepsilon_{kl}(w) dV_s$$

$$U_g = \frac{1}{2} \int_{V_s} s_{ij}^0 \nabla_i w_k \nabla_j w_k dV_s$$

$$U_f = (9)$$

On constate que sur la surface mouillée  $S_f$  de la structure, l'influence du fluide se résume, outre le terme de couplage entre  $\varphi$  et  $n_i w_i$ , à une énergie potentielle supplémentaire ne faisant intervenir que les déplacements de la structure. Sur ce point, les résultats ci-dessus divergent de ceux de l'U.T.C., qui s'écrivent

$$\int_{S_f} [ \rho_f g_k u_k n_i \delta w_i + p_0 (D_j u_j n_i \delta w_i - D_i u_j n_j \delta w_i) ] dS$$

La différence semble résulter du fait que, dans l'étude de l'U.T.C., la distinction entre les coordonnées initiales du fluide et celles de la structure n'a pas été faite. La présence du champ  $u$  dans cette expression conduit d'ailleurs à des problèmes embarrassants.

Trois faits militent pour l'expression ne faisant intervenir que les déplacements de la structure :

- (a) Les mêmes termes ont été obtenus en 1978 par une approche énergétique directe [8] qui sert de base à la formulation SAMCEF actuelle.
- (b) MORAND [10] a obtenu les mêmes termes. Son intégrale contenant  $p_0$  est en effet

$$\frac{1}{2} \int_{S_f} p_0 n_i(w) \cdot w dS$$

où  $n_i$  est défini par la condition

$$n^* dS^* = [ n + n_1(w) + O(w^2) ] dS$$

ce qui implique, par (2)

$$(n_1)_i = \nabla_k w_k n_i - \nabla_i w_j n_j$$

On peut donc dire que la présente formulation, la formulation SAMCEF et

celle de MORAND sont identiques. Nous leur donnerons dans la suite le nom commun de *formulation de TONG corrigée*.

- (c) Une étude approfondie du comportement du système fluide-structure lors d'un déplacement rigide montre que la formulation de TONG corrigée mène à des résultats qui, quoique paradoxaux, sont totalement en accord avec la physique du problème [11].

#### 4. PRINCIPE VARIATIONNEL POUR L'ENSEMBLE FLUIDE-STRUCTURE

La surface libre est décrite par l'équation variationnelle

$$\delta \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \rho_f g \eta^2 dS - \omega^2 \int_{\Gamma} \rho_f \varphi \delta \eta dS = 0 \quad (11)$$

Quant à l'intérieur du fluide, il vérifie

$$\delta \int_{V_f} \frac{1}{2} \rho_f D_i \varphi D_i \varphi dV - \int_{S_f} \rho_f n_i w_i \delta \varphi dS - \int_{\Gamma} \rho_f \eta \delta \varphi dS = 0 \quad (12)$$

Faisons la somme des équations (10) et (11) et soustrayons-y l'équation (12) multipliée par  $\omega^2$ . On obtient

$$\delta \left( U + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho_f g \eta^2 dS \right) - \omega^2 \delta \left( T - \frac{1}{2} \int_{V_f} \rho_f D_i \varphi D_i \varphi dV + \int_{S_f} \rho_f \varphi n_i w_i dS + \int_{\Gamma} \rho_f \varphi \eta dS \right) = 0 \quad (13)$$

C'est le principe de TONG dans sa forme corrigée [6,8,10]. Peut-on éliminer  $\varphi$ ? A priori non, car le problème de Neumann pour le potentiel n'admet pas de solution unique. Il faut donc fixer à zéro une certaine forme linéaire de  $\varphi$  (dans l'expression discrétisée du principe, on annule le potentiel en un point). Mais ce faisant, on perd le résultat de la variation particulière  $\delta \varphi = \text{cte}$ , qui s'écrit

$$\text{cte} \left\{ \int_{S_f} \rho_f n_i w_i dS + \int_{\Gamma} \rho_f \eta dS \right\} = 0 \quad (14)$$

et est précisément la condition d'existence de la solution du problème de Neumann considéré. Il est donc nécessaire, en contrepartie de cette fixation, d'assurer l'incompressibilité globale à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ . Ceci revient à écrire le principe suivant

$$\delta \left\{ \left( U + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho_f g \eta^2 dS \right) - \omega^2 \left( T - \frac{1}{2} \int_{V_f} \rho_f D_i \varphi D_i \varphi dV + \int_{S_f} \rho_f \varphi n_i w_i dS + \int_{\Gamma} \rho_f \varphi \eta dS \right) + \lambda \left( \int_{S_f} \rho_f n_i w_i dS + \int_{\Gamma} \rho_f \eta dS \right) \right\} = 0 \quad (15)$$

L'élimination de  $\varphi$  fournit une relation

$$\varphi = \Phi (n_1 w_1, \eta) \quad (16)$$

Ce potentiel particulier peut également être choisi comme  $\delta\varphi$  dans (12), ce qui donne

$$\int_V \rho_f D_1 \varphi D_1 \varphi dV = \int_{S_f} \rho_f \varphi n_1 w_1 dS + \int_{\Gamma} \rho_f \varphi \eta dS$$

et ramène le principe à

$$\delta \left\{ (U + \frac{1}{2} \int_{S_f} \rho_f g \eta^2 dS) - \omega^2 (T + \frac{1}{2} \int_{S_f} \rho_f \varphi n_1 w_1 dS + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho_f \varphi \eta dS) + \lambda \left( \int_{S_f} \rho_f n_1 w_1 dS + \int_{\Gamma} \rho_f \eta dS \right) \right\} = 0$$

moyennant la condition (16). On remarquera que celle-ci ne doit en fait être connue que sur  $S_f$  et  $\Gamma$ . En particulier, elle peut être obtenue par une méthode intégrale.

## 5. FORME DISCRETISEE DU PRINCIPE VARIATIONNEL

On peut décrire les variables  $w$ ,  $\varphi$ ,  $\eta$  sous la forme

$$w = W(x)q \quad \varphi = a^T(x)f \quad \eta = b^T(x)y \quad (17)$$

Il en découle

$$U = \frac{1}{2} q^T K_s q \quad \text{où} \quad K_s = 2U(W)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho_f g \eta^2 dS = \frac{1}{2} y^T K_f y \quad \text{où} \quad K_f = \int_{\Gamma} \rho_f g b b^T dS$$

$$T = \frac{1}{2} q^T M_s q \quad \text{où} \quad M_s = 2T(W)$$

$$\frac{1}{2} \int_{S_f} \rho_f \varphi n_1 w_1 dS = \frac{1}{2} f^T A q \quad \text{où} \quad A = \int_{S_f} \rho_f a n_1 W_1 dS$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho_f \varphi \eta dS = \frac{1}{2} f^T B y \quad \text{où} \quad B = \int_{\Gamma} \rho_f a b^T dS$$

Enfin, en notant  $e$  le vecteur  $f$  particulier dont tous les éléments sont 1, on a

$$\int_{S_f} \rho_f n_1 w_1 dS = e^T A q$$

et

$$\int_{\Gamma} \rho_f \eta \, dS = e^T B y$$

Le principe discrétisé est donc

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} (q^T K_s q + y^T K_f y) - \frac{\omega^2}{2} (q^T M_s q + f^T A q + f^T B y) + \lambda (e^T A q + e^T B y) \right\} = 0$$

La relation (16) donnant le potentiel en fonction des déplacements normaux de frontière a la forme

$$f = Qq + Yy \quad (18)$$

Nous verrons au chapitre 4 comment la déterminer. On a alors

$$f^T A q = q^T Q^T A q + y^T Y^T A q = q^T \frac{1}{2} (Q^T A + A^T Q) q + y^T Y^T A q$$

et

$$f^T B y = q^T Q^T B y + y^T Y^T B y = q^T Q^T B y + y^T \frac{1}{2} (Y^T B + B^T Y) y$$

ce qui ramène le principe à

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} (q^T K_s q + y^T K_f y) - \frac{\omega^2}{2} (q^T M_{qq} q + 2y^T M_{yq} q + y^T M_{yy} y) + \lambda (e^T A q + e^T B y) \right\} = 0$$

où

$$M_{qq} = M_s + \frac{1}{2} (Q^T A + A^T Q)$$

$$M_{yq} = \frac{1}{2} Y^T A + \frac{1}{2} B^T Q$$

$$M_{yy} = \frac{1}{2} (Y^T B + B^T Y)$$

Il y correspond le problème matriciel

$$\begin{bmatrix} K_s & 0 & Ae \\ 0 & K_f & Be \\ e^T A & e^T B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{qq} & M_{qy} & 0 \\ M_{yq} & M_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = 0$$



## Chapitre IV

### EQUATIONS INTEGRALES POUR LE FLUIDE

#### 1. PRELIMINAIRES

##### 1.1 Notations

Dans tout ce qui suit, nous noterons X le point potentié et Y le point potentialant. Le vecteur  $\mathbf{r}$  sera porté de Y vers X :

$$\mathbf{r} = \mathbf{YX}$$

Il en résulte les formules suivantes

$$\begin{aligned} \text{grad}_x r &= \frac{\mathbf{r}}{r} & \text{grad}_y r &= -\frac{\mathbf{r}}{r} \\ \text{grad}_x \frac{1}{r} &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3} & \text{grad}_y \left(\frac{1}{r}\right) &= +\frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned}$$

##### 1.2 Angle solide

Soit S une surface bornée ne passant pas par le point X. Traçons le cône de sommet X qui s'appuie sur le contour de S. Traçons encore la sphère de rayon R et de centre X. Le cône y détermine une surface  $S_R$ . Soit alors V le volume limité par S,  $S_R$  et le cône. Nous noterons  $S_{\text{lat}}$  l'intersection du cône et de la frontière de V (fig. 1). On a alors

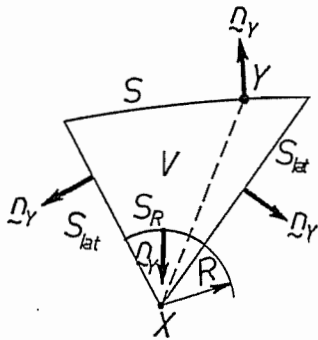


FIGURE 1

$$\int_{S \cup S_{\text{lat}} \cup S_R} \mathbf{n}_y \cdot \text{grad}_y \left(\frac{1}{r}\right) dS = \int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dV = 0$$

Or, sur la surface latérale,  $\mathbf{n}_y$  est orthogonal à  $\mathbf{r}$ . Il reste donc

$$\int_S \mathbf{n}_y \cdot \text{grad}_y \left(\frac{1}{r}\right) dS = \int_{S_R} (-\mathbf{n}_y) \cdot \text{grad}_y \left(\frac{1}{r}\right) dV = 0$$

Remarquons que sur  $S_R$ , on a

$$(-\mathbf{n}_y) \cdot \text{grad}_y \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{R^2}$$

On a donc

$$\int_S \mathbf{n}_y \cdot \text{grad}_y \left(\frac{1}{r}\right) dS_y = -\frac{1}{R^2} S_R$$

La grandeur  $\Omega = S_R / R^2$ , indépendante du rayon de la sphère, caractérise en fait le cône. On l'appelle *angle solide* du cône de sommet X qui s'appuie sur S. Pour plus de précision, on peut noter

$$\Omega_X(S) = - \int_S \mathbf{n}_y \cdot \text{grad}_y \left( \frac{1}{r} \right) dS_y = - \int_S d\omega_x(Y)$$

1.3 Rappelons le théorème de Stokes-Ampère : soit une surface S orientable, de normale  $\mathbf{n}$ , bordée par un contour  $\mathcal{C}$ . On note  $d\mathbf{s}$  l'élément de contour orienté à partir de  $\mathbf{n}$  par la règle du tire-bouchon de Maxwell (et réciproquement, la même règle donne le sens de  $\mathbf{n}$  à partir de celui du contour) (fig. 2). On a alors

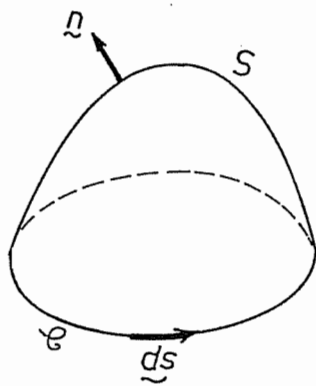


FIGURE 2

$$\int_b f d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{n} \times \text{grad } f dS$$

et

$$\int_b \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{a} dS$$

## 2. FORMULE DES TROIS POTENTIELS

Partons de la formule générale

$$\begin{aligned} \int_V \psi \nabla^2 \varphi dV &= \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \int_V \text{grad } \psi \cdot \text{grad } \varphi dV \\ &= \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS + \int_V \varphi \nabla^2 \psi dV \end{aligned}$$

et appliquons-la à la fonction  $\psi(y) = 1/r$  qui est harmonique dans tout ensemble contenant pas le point X. Nous supposons naturellement que X n'est pas élément de V. Il vient

$$\int_V \frac{1}{r} \nabla_y^2 \varphi dV_y = \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_y} dS_y - \int_S \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) \varphi(y) dS_y$$

Insistons sur la nécessité de préciser à chaque instant ce qui dépend de X et ce qui dépend de Y. Négliger cette précaution mènerait rapidement à des formules incompréhensibles ou à des confusions regrettables.

Cette formule ne s'applique pas lorsque  $X \in V$ . Dans ce cas, entourons le point X d'une boule  $V_\epsilon$  de rayon  $\epsilon$ , de frontière  $S_\epsilon$  (fig. 3). La formule précédente, appliquée sur  $V - V_\epsilon$ , donne

$$\int_{V-V_\varepsilon} \frac{1}{r} \nabla_y^2 \varphi \, dV_y = \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_y} \, dS_y - \int_S \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) \varphi(y) \, dS_y$$

$$+ \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_y} \, dS_y - \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) \varphi(y) \, dS_y$$

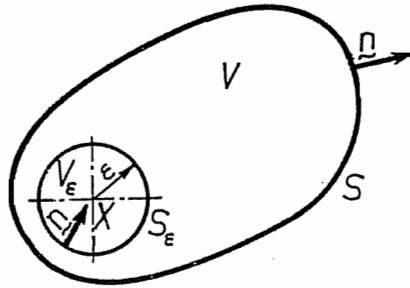


FIGURE 3

Evaluons les contributions sur  $S_\varepsilon$ , pour  $\varepsilon$  petit. Tout d'abord, en supposant les dérivées de  $\varphi$  bornées,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial n_y} \right| \leq M$$

on a

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_y} \, dS_y \leq M \int_{S_\varepsilon} \frac{dS_y}{r} \leq M \cdot \int_{S_\varepsilon} \frac{\varepsilon^2 d\omega}{\varepsilon} = 4\pi M \varepsilon$$

Ce terme tend donc vers zéro avec  $\varepsilon$ . Examinons le second : on a

$$\varphi(Y) = \varphi(X) + O(\varepsilon)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) = \mathbf{n}_y \cdot \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = d\omega \quad (\text{car la normale pointe vers } X)$$

donc

$$-\int_{S_\varepsilon} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) \, dS_y = -\int_{S_\varepsilon} [\varphi(X) + O(\varepsilon)] \, d\omega = -4\pi \varphi(X) + O(\varepsilon)$$

Remarquons enfin que dans  $V_\varepsilon$ ,  $dV_y = r^2 d\omega$ , donc pour  $\nabla_y^2 \varphi$  borné, on a

$$\int_{V_\varepsilon} \frac{1}{r} \nabla_y^2 \varphi \, dV_y = \int_{V_\varepsilon} \nabla_y^2 \varphi \cdot r \, d\omega = O(\varepsilon)$$

Il en résulte que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V-V_\varepsilon} \frac{1}{r} \nabla_y^2 \varphi \, dV_y = \int_V \frac{1}{r} \nabla_y^2 \varphi \, dV_y$$

En définitive, on obtient, en passant à la limite,

$$\int \frac{1}{r} \nabla_y^2 \varphi \, dV_y = \int \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_y} \, dS_y - \int \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) \varphi(Y) \, dS_y - 4\pi \varphi(X)$$

ce qui implique

$$\varphi(X) = \frac{1}{4\pi} \left\{ - \int_V \frac{1}{r} \nabla_y^2 \varphi \, dV_y + \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_y} \, dS_y - \int_S \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) \varphi(Y) \, dS_y \right\} \quad (1)$$

C'est la *formule des trois potentiels*. En général, on appelle

- *potentiel de volume* un potentiel de la forme

$$\varphi(X) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \rho(Y) \, dV_y$$

- *potentiel de simple couche* un potentiel de la forme

$$\varphi(X) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma(Y)}{r} \, dS_y$$

- *potentiel de double couche* un potentiel de la forme

$$\varphi(X) = \frac{1}{4\pi} \int_S M(Y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) \, dS_y$$

Dans le cas de fonctions *harmoniques*, le potentiel de volume disparaît. Nous nous limiterons ici à ce cas, qui seul nous intéresse pour la suite.

### 3. DERIVEES NORMALES SUR LA FRONTIERE

Par dérivée normale en un point *régulier* de la frontière (c'est-à-dire où elle admet un plan tangent), on entend la limite de la dérivée normale quand on converge vers la frontière *par l'intérieur*. Cette précision est importante, car dans le cas d'une simple couche, la limite par l'extérieur *n'est pas la même*.

#### 3.1. Préliminaires géométriques

Soit X un point régulier de la frontière. On peut utiliser, au voisinage de ce point, un système d'axes dont les deux premiers sont dans le plan tangent au point X et le troisième normal à celui-ci, et pointant vers l'extérieur de V. Les coordonnées locales étant  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , nous écrirons encore

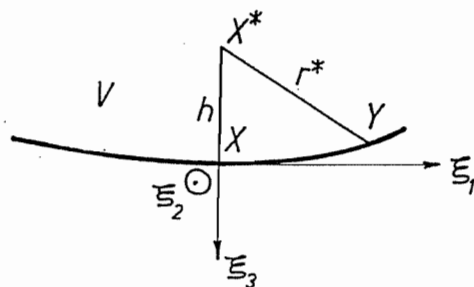


FIGURE 4

$$\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 \quad \text{et}$$

$$\xi_1 = \rho \cos \theta \quad \xi_2 = \rho \sin \theta$$

Au voisinage du point X, la surface admet pour équation

$$\xi_1 = -\frac{1}{2} (A_{11} \xi_1^2 + 2A_{12} \xi_1 \xi_2 + A_{22} \xi_2^2) + O(\rho^3) \quad (2)$$

où  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  et  $A_{22}$  sont les éléments du tenseur de courbure en S. On a encore

$$\xi_3 = -\frac{1}{2} (A_{11} \cos^2 \theta + 2A_{12} \sin \theta \cos \theta + A_{22} \sin^2 \theta) \rho^2 + O(\rho^3) \quad (3)$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_1} = -\rho \alpha(\theta) + O(\rho^2) \quad \text{avec} \quad \alpha(\theta) = A_{11} \cos \theta + A_{12} \sin \theta$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_2} = \rho \beta(\theta) + O(\rho^2) \quad \text{avec} \quad \beta(\theta) = A_{12} \cos \theta + A_{22} \sin \theta$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_y \cdot d\mathbf{S}_y &= \frac{\partial Y}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial Y}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 = [e_1 - \rho \alpha e_3 + O(\rho^2)] \times [e_2 - \rho \beta e_3 + O(\rho^2)] d\xi_1 d\xi_2 \\ &= [(e_3 + \rho \alpha e_1 + \rho \beta e_2 + O(\rho^2))] d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

Enfin,

$$dS_y = \|\mathbf{n}_y \cdot d\mathbf{S}_y\| = \sqrt{1 + \rho^2(\alpha^2 + \beta^2)} d\xi_1 d\xi_2 = [1 + O(\rho^2)] \rho d\rho d\theta$$

Nous noterons  $S_\varepsilon$  le voisinage de X défini par la condition  $\rho < \varepsilon$  et  $\mathcal{C}_\varepsilon$  la frontière de  $S_\varepsilon$ .

Appelons  $X^*$  le point situé à l'intérieur de V, sur la normale issue du point X et à distance h de ce point. On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}_x} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial h}$$

Le vecteur  $\mathbf{r}^*$  va de Y à  $X^*$ . Il a donc pour composantes

$$\mathbf{r}^* = -\xi_1 \mathbf{e}_1 - \xi_2 \mathbf{e}_2 - (h + \xi_3) \mathbf{e}_3$$

et pour longueur

$$r^* = \{ \rho^2 + (h + \xi_3)^2 \}^{1/2}$$

On peut encore calculer

$$\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{r} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{r} = -(h + \xi_3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_y \cdot \mathbf{r} dS_y &= [-\rho \alpha \xi_1 - \rho \beta \xi_2 - (h + \xi_3)] d\xi_1 d\xi_2 \\ &= [-h - \frac{1}{2} \rho^2 (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) + O(\rho^3)] d\xi_1 d\xi_2 \\ &= [-(h + \xi_3) + O(\rho^3)] d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

### 3.2 Simple couche

Au point  $X^*$ , on a

$$\varphi(X^*) = \frac{1}{4\pi} \int_{S-S_\varepsilon} \sigma(Y) \frac{1}{r^*} dS_y + \frac{1}{4\pi} \int_{S_\varepsilon} \sigma(Y) \frac{1}{r^*} dS_y$$

La seule intégrale litigieuse est la seconde. Sa dérivée est

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{S_\varepsilon} \sigma(Y) \frac{\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{r}^*}{r^{*3}} dS_y$$

Pour  $h \rightarrow 0$ , le groupe contenant  $\mathbf{r}^*$  est  $\mathcal{O}(\frac{1}{\rho^2})$ . Comme  $dS_y$  est  $\mathcal{O}(\rho)$ , on peut faire toute espèce d'approximation  $\mathcal{O}(\rho)$  sans modifier la limite pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Tenant compte du fait que

$$\sigma(Y) = \sigma(X) + \mathcal{O}(\rho)$$

$$\mathbf{n}_x dS_y = \mathbf{n}_y dS_y [1 + \mathcal{O}(\rho)]$$

il nous suffira d'évaluer

$$- \frac{\sigma(X)}{4\pi} \int_{S_\varepsilon} \frac{\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{r}^*}{r^{*3}} dS_y = + \frac{\sigma(X)}{4\pi} \Omega_{X^*}(S_\varepsilon)$$

dont la limite est  $\sigma(X)/2$ . Il vient donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_x} = \frac{\sigma(X)}{2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S-S_\varepsilon} \sigma(Y) \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{1}{r} \right) dS_y$$

Examinons le comportement de l'intégrale du second membre. Dans le voisinage de  $X$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{1}{r} \right) &= - \frac{\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{r}}{r^3} = - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot (-\xi_1 \mathbf{e}_1 - \xi_2 \mathbf{e}_2 - \xi_3 \mathbf{e}_3)}{(\rho^2 + \xi_3^2)^{3/2}} = \frac{\xi_3}{(\rho^2 + \xi_3^2)^{3/2}} \\ &\approx - \frac{\frac{1}{2} \rho^2 (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)}{\rho^3 [1 + \mathcal{O}(\rho^2)]} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{1}{r} \right) dS_y = \mathcal{O}(1) d\rho d\theta$$

et l'intégrale est *convergente*. On peut donc écrire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_x} = \frac{\sigma(X)}{2} + \int_S \sigma(Y) \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{1}{r} \right) dS_y \quad (4)$$

### 3.3 Double couche

Au point  $X^*$ , on a

$$\varphi(X^*) = \frac{1}{4\pi} \int_{S-S_\varepsilon} M(Y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r^*} \right) dS_y + \frac{1}{4\pi} \int_{S_\varepsilon} M(Y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r^*} \right) dS_y$$

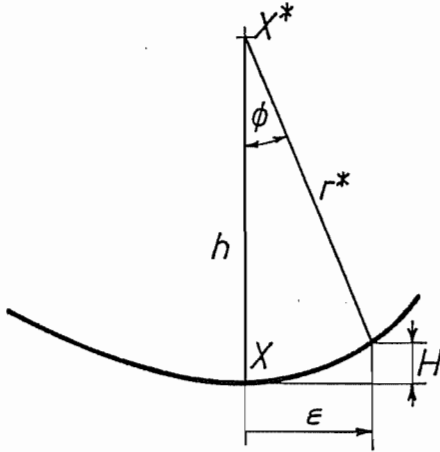


FIGURE 5

Nous appellerons encore  $\varphi_\varepsilon$  l'intégrale sur  $S_\varepsilon$ . Pour un angle  $d\theta$ , on a (fig. 5)

$$d\omega = (1 - \cos\phi) d\theta$$

donc

$$\varphi_\varepsilon = -\frac{M(X)}{4\pi} \int_0^{2\pi} [1 - \cos\phi(\theta)] d\theta + O(\varepsilon)$$

Or

$$\cos\phi = \frac{h - H}{\sqrt{(h - H)^2 + \varepsilon^2}}$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial h} \cos\phi = \frac{\sqrt{(h-H)^2 + \varepsilon^2} - \frac{(h-H)^2}{\sqrt{(h-H)^2 + \varepsilon^2}}}{(h-H)^2 + \varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2}{[(h-H)^2 + \varepsilon^2]^{3/2}}$$

soit, en faisant  $h \rightarrow 0$ ,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial h} \cos\phi \right]_{h=0} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^3 [1 + O(\varepsilon^2)]} = \frac{1}{\varepsilon} [1 + O(\varepsilon^2)]$$

Il vient donc

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial n_x} = -\frac{M(X)}{2\varepsilon}$$

et

$$\varphi(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S-S_\varepsilon} M(Y) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) dS_y - \frac{M(X)}{2\varepsilon} \right\} \quad (5)$$

Mais cette limite est-elle finie ? Il s'agit d'étudier le comportement de l'intégrale au voisinage de X. Observons d'abord que

$$\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) dS_y = \mathcal{O} \left( \frac{1}{\rho^2} \right) d\rho d\theta$$

On peut, au voisinage de X, développer M(Y) en série de Taylor de  $\xi_1$  et  $\xi_2$  :

$$M(Y) = M(X) + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + \mathcal{O}(\rho^2)$$

Le dernier terme donnera une intégrale convergente. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{S-S_\varepsilon} M(X) \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) dS_y &= -M(X) \Omega_X(S - S_\varepsilon) \\ &= -M(X) [4\pi - \Omega_X(S_\varepsilon)] \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \int_{S-S_\varepsilon} M(X) \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) dS_y = M(X) \frac{\partial}{\partial n_x} \Omega_X(S_\varepsilon) = \frac{M(X)}{2\varepsilon}$$

par le même raisonnement que ci-dessus. Examinons les autres termes. Intégrant de  $\varepsilon$  à  $R > \varepsilon$  mais relativement petit, on a

$$b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 = (b_1 \cos\theta + b_2 \sin\theta) \rho$$

A ce terme correspond une singularité  $\mathcal{O}(\frac{1}{\rho})$ , donc tout terme d'ordre de grandeur relatif  $\mathcal{O}(\rho)$  mène à une intégrale régulière et peut être négligé.

On a (fig. 5)

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r^*} \right) = \frac{\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{n}_x [1 + \mathcal{O}(\rho)] \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{(h - \xi_3)}{\rho^3} [1 + \mathcal{O}(\rho)] = \frac{h}{\rho^3} [1 + \mathcal{O}(\rho)]$$

Il vient donc

$$-\frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r^*} \right) = -\frac{1}{\rho^3} [1 + \mathcal{O}(\rho)]$$

ce qui mène à calculer

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^R \frac{(b_1 \cos\theta + b_2 \sin\theta)}{\rho} d\rho$$

Mais

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$$



si bien que cette intégrale admet une valeur principale de Cauchy finie. (Ce n'est que par la *symétrie* du passage à la limite qu'il y a convergence)

Une limite d'intégrale régularisée comme la formule (3) s'appelle *partie finie d'HADAMARD*. Son évaluation numérique est assez délicate. On peut cependant y parvenir aisément en se référant à l'exposé initial d'HADAMARD [13]. Nous raisonnons, pour simplifier, dans le cas unidimensionnel : soit l'intégrale

$$\int_0^a \frac{f(x)}{x^m} dx$$

La fonction  $f(x)$  admet, autour de l'origine, le développement de Taylor

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \dots + x^{m-1} f^{(m-1)}(0) + g(x)$$

avec  $g(x) = O(x^m)$ , ce qui entraîne que l'intégrale

$$\int_0^a \frac{g(x)}{x^m} dx$$

est régulière. Pour les autres termes, on a

$$\int_{\varepsilon}^a \frac{f(0) + x f'(0) + \dots + x^{m-1} f^{(m-1)}(0)}{x^m} dx = f(0) \left[ \frac{1}{(m-1)a^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)\varepsilon^{m-1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + f^{(m-1)}(0) \ln \left| \frac{a}{\varepsilon} \right| \right]$$

La partie finie est ce que l'on obtient en supprimant tous les termes en  $\varepsilon$  : c'est donc

$$\text{Pf} \int_0^a \frac{f(x)}{x^m} dx = \int_0^a \frac{g(x)}{x^m} dx + \frac{f(0)}{(m-1)a^{m-1}} + \dots + f^{(m-1)}(0) \ln |a|$$

grandeur qui s'évalue sans grande difficulté. Il est curieux de constater que cette méthode, vieille de 70 ans, semble avoir été redécouverte par GUIGGIANI et CASALINI (5).

#### 4. EQUATION INTEGRALE POUR LE PROBLEME DE NEUMANN

Le problème de Neumann pour l'équation de Laplace

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

est caractérisé par des conditions aux limites

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = W$$

Rappelons qu'il n'admet de solution que moyennant la condition

$$\int_S W(X) dS_x = 0$$

du moins pour un problème *intérieur* [2].

En vertu de l'équation (1), la fonction  $\varphi$  est la superposition d'un potentiel de simple couche de densité

$$\sigma(Y) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_y}$$

et d'un potentiel de double couche de densité

$$M(Y) = -\varphi(Y)$$

Il découle donc des résultats (2) et (3) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n_x} = W(X) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{1}{r} \right) W(Y) dS_y + \frac{W(X)}{2} \\ &- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{S-S_\varepsilon} \varphi(Y) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) dS_y - \frac{\varphi(X)}{2\varepsilon} \right\} \end{aligned}$$

ce qui se ramène à

$$\begin{aligned} \frac{W(X)}{2} &= \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{1}{r} \right) W(Y) dS_y \\ &- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{S-S_\varepsilon} \varphi(Y) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) dS_y - \frac{\varphi(X)}{2\varepsilon} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

## 5. MISE SOUS FORME VARIATIONNELLE

Multiplions la relation précédente par  $\delta\varphi(X)$ , puis intégrons sur  $S$ . Il vient

$$\begin{aligned} \int_S \delta\varphi(X) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{S-S_\varepsilon} \varphi(Y) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) dS_y - \frac{\varphi(X)}{2\varepsilon} \right\} dS_x = \\ \int_S \delta\varphi(X) \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{1}{r} \right) W(Y) dS_y dS_x - \frac{1}{2} \int_S \delta\varphi(X) W(X) dS_x \end{aligned} \quad (7)$$

HAMDI [3] a montré que l'on peut mettre le premier membre sous une forme symétrique fort simple. Considérons en effet l'intégrale

$$\int_S (\mathbf{n}_x \times \text{grad}_x \delta\varphi) \cdot \int_S (\mathbf{n}_y \times \text{grad}_y \varphi) \frac{1}{r} dS_y dS_x$$

On remarquera que

$$\int_S (\mathbf{n}_y \times \text{grad}_y \varphi) \frac{1}{r} dS_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S-S_\varepsilon(X)} (\mathbf{n}_y \times \text{grad}_y \varphi) \frac{1}{r} dS_y$$

En notant  $\mathcal{C}_\varepsilon$  la frontière de  $S - S_\varepsilon(X)$  (fig. 6), cette intégrale vaut encore, par le théorème de Stokes-Ampère

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{\varphi(Y)}{r} ds - \int_{S-S_\varepsilon(X)} \varphi(Y) \mathbf{n}_y \times \text{grad}_y \left( \frac{1}{r} \right) dS \right\}$$

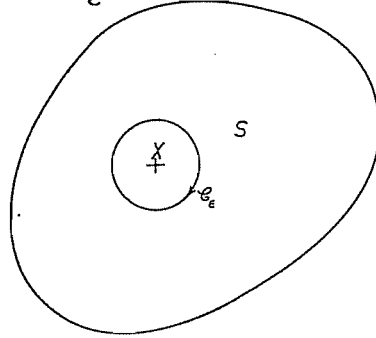


FIGURE 6

L'intégrale sur  $\mathcal{C}_\varepsilon$  s'évalue comme

$$\int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{\varphi(X) + O(\varepsilon)}{\varepsilon} ds = O + O(\varepsilon)$$

Il ne reste donc que

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S-S_\varepsilon(X)} \varphi(Y) \mathbf{n}_y \times \text{grad}_y \left( \frac{1}{r} \right) dS = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S-S_\varepsilon(X)} \beta(X,Y) dS$$

avec

$$\beta(X,Y) = \varphi(Y) \mathbf{n}_y \times \text{grad}_y \left( \frac{1}{r} \right)$$

Nous avons en définitive à calculer

$$-\int_S (\mathbf{n}_x \times \text{grad}_x \delta\varphi) \cdot \left[ \int_{S-S_\varepsilon(X)} \beta(X,Y) dS_y \right] dS_x$$

En notations indicielles, ceci se ramène à

$$-\int_S e_{ijk} n_{x_i} \frac{\partial \delta\varphi}{\partial x_j} \left[ \int_{S-S_\varepsilon(X)} \beta_k(X,Y) dS_y \right] ds_x$$

ce qui, par le théorème de Stokes-Ampère, équivaut à

$$\int_S e_{ijk} n_{x_i} \delta\varphi(X) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \int_{S-S_\varepsilon(X)} \beta_k(X,Y) dS_y \right] dS_x \quad (6)$$

La dérivation de l'intégrale sur  $S - S_\epsilon(X)$  fait intervenir deux termes.

Le premier est

$$\int_{S-S_\epsilon(X)} \frac{\partial \beta_k(X,Y)}{\partial x_j} dS_y \quad (9)$$

Le second provient du fait que  $S - S_\epsilon(X)$  varie avec  $X$ . Pour une variation  $\Delta X_n$  normale à la surface,  $S_\epsilon$  ne varie pas. Mais pour une variation  $\Delta X_t$  tangente à celle-ci, il correspond à chaque élément  $ds$  du contour  $\mathcal{C}_\epsilon$  une variation de  $S - S_\epsilon$  égale à (fig. 7)

$$\begin{aligned} -(\mathbf{ds} \times \Delta X_t) \cdot \mathbf{n}_y &= -(\mathbf{ds} \times \Delta X) \cdot \mathbf{n}_y \\ &= -(\mathbf{n}_y \times \mathbf{ds}) \cdot \Delta X \end{aligned}$$

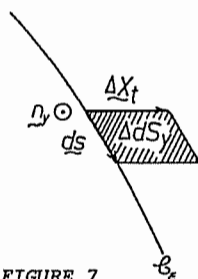


FIGURE 7

Il faut donc ajouter le terme

$$\begin{aligned} &-\int_{\mathcal{C}_\epsilon} (\mathbf{n}_y \times \mathbf{ds})_j \beta_k(X,Y) \\ &= -\int_{\mathcal{C}_\epsilon} e_{jlm} n_{y_l} \beta_k(X,Y) ds_m \end{aligned} \quad (10)$$

Nous devons donc calculer

$$\begin{aligned} &-\int_S \int_{\mathcal{C}_\epsilon} e_{ijk} e_{jlm} n_{x_i} n_{y_l} \delta\varphi(X) \beta_k(X,Y) ds_m dS_x \\ &= -\int_S \int_{\mathcal{C}_\epsilon} e_{ijk} e_{jlm} n_{x_i} n_{y_l} \delta\varphi(X) e_{krs} n_{y_r} \frac{\partial}{\partial y_s} \left( \frac{1}{r} \right) \varphi(Y) ds_m dS_x \end{aligned}$$

On note que

$$e_{ijk} e_{jlm} e_{krs} = (\delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}) e_{jlm} = \delta_{ir} e_{silm} - \delta_{is} e_{rlm}$$

ce qui donne

$$-\int_S \int_{\mathcal{E}_\varepsilon} [ e_{s\ell m} n_{x_1} n_{y_\ell} n_{y_1} \delta\varphi(X) \frac{\partial}{\partial y_s} \left( \frac{1}{r} \right) ds_m - e_{r\ell m} n_{x_1} n_{y_\ell} n_{y_r} \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{1}{r} \right) ds_m ] \varphi(Y) dS_x$$

Le dernier terme est nul, car

$$e_{r\ell m} n_{y_\ell} n_{y_r} = 0$$

Dans le premier,

$$n_{x_1} n_{y_1} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon);$$

Il reste à évaluer

$$e_{s\ell m} n_{y_\ell} \frac{\partial}{\partial y_s} \left( \frac{1}{r} \right) ds_m = \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{n}_y \right) \cdot d\mathbf{s} = - \frac{1}{\varepsilon^2} ds = - \frac{1}{\varepsilon} d\theta$$

ce qui mène à

$$+ \frac{2\pi}{\varepsilon} \int_S \delta\varphi(X) \varphi(X) dS_x \quad (11)$$

Enfin, le terme régulier (7) est

$$\begin{aligned} \int_{S-S_\varepsilon(X)} \frac{\partial \beta_k(X,Y)}{\partial x_j} dS_y &= \int_{S-S_\varepsilon(X)} \varphi(Y) \frac{\partial}{\partial x_j} [ \mathbf{n}_y \times \text{grad}_y \left( \frac{1}{r} \right) ]_k dS_y \\ &= \int_{S-S_\varepsilon(X)} \varphi(Y) \frac{\partial}{\partial x_j} [ e_{k\ell m} n_{y_\ell} \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \frac{1}{r} \right) ] dS_y \end{aligned}$$

Intégrant selon (5), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_S \int_{S-S_\varepsilon(X)} \delta\varphi(X) \varphi(Y) e_{ijk} e_{k\ell m} n_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} [ n_{y_\ell} \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \frac{1}{r} \right) ] dS_y dS_x \\ &= \int_S \int_{S-S_\varepsilon(X)} \delta\varphi(X) \varphi(Y) [ \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} ] n_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} [ n_{y_\ell} \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \frac{1}{r} \right) ] dS_y dS_x \\ &= \int_S \int_{S-S_\varepsilon(X)} \delta\varphi(X) \varphi(Y) [ n_{x_1} n_{y_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} \left( \frac{1}{r} \right) - n_{x_1} n_{y_j} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_1} \left( \frac{1}{r} \right) ] dS_y dS_x \end{aligned}$$

Notant que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} \left( \frac{1}{r} \right) = 0$$

et que

$$n_{x_i} n_{y_j} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_i} \left( \frac{1}{r} \right) = n_{x_i} n_{y_j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right)$$

on obtient

$$- \int_S \int_{S-S_\varepsilon(X)} \delta\varphi(X) \varphi(Y) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) dS_y dS_x \quad (12)$$

Il ne nous reste plus qu'à rassembler les résultats (11) et (12), ce qui donne

$$\begin{aligned} & \int_S (\mathbf{n}_x \times \text{grad}_x \delta\varphi) \cdot \int (\mathbf{n}_y \times \text{grad}_y \varphi) \frac{1}{r} dS_y dS_x \\ &= - \int_S \delta\varphi(X) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S-S_\varepsilon} \varphi(Y) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) dS_y - \frac{2\pi}{\varepsilon} \varphi(X) \right\} dS_x \end{aligned}$$

On retrouve, au facteur  $(4\pi)$  près, le premier membre de (7). En d'autres termes, on a obtenu le principe variationnel suivant

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_S \int_S (\mathbf{n}_x \times \text{grad}_x \delta\varphi) \cdot (\mathbf{n}_y \times \text{grad}_y \varphi) \frac{1}{r} dS_y dS_x = \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_S \delta\varphi(X) \int_S \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{1}{r} \right) W(Y) dS_y dS_x + \frac{1}{2} \int_S \delta\varphi(X) W(X) dS_x \end{aligned}$$

(13)

permettant de déterminer  $\varphi$  à partir de  $W$ . Dans son calcul, *l'évaluation de parties finies est éliminée*. Le premier membre est la variation d'une forme bilinéaire symétrique. Ce résultat est tout à fait remarquable.

Il est à noter que pour un champ  $\delta\varphi(X) = 1$  sur toute la surface, le premier membre de l'équation est nul. On en déduit la condition

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \int_S \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{1}{r} \right) W(Y) dS_y dS_x - \frac{1}{2} \int_S W(X) dS_x = 0$$

Or, la première intégrale se transforme en

$$\frac{1}{4\pi} \int_S W(Y) dS_y \int_S \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{1}{r} \right) dS_x$$

où l'intégrale en  $X$  est, au signe près, l'angle solide sous lequel  $Y$  voit  $S$ , à savoir  $(2\pi)$ . On obtient donc finalement

$$-\int_S W(X) dS_x = 0$$

c'est-à-dire la condition de nullité du flux, qui est donc, comme dans la formulation en volume, associée à la singularité de la matrice du fluide [7,8].

## 6. DISCRETISATION

Posant, comme au chapitre précédent

$$w(x) = W(x)q, \quad \varphi(x) = a^T(x)f, \quad \eta(x) = b^T(x)y$$

on obtient

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \int_S (\mathbf{n}_x \times \text{grad}_x \delta\varphi) \cdot (\mathbf{n}_y \times \text{grad}_y \delta\varphi) dS_y dS_x = \delta f^T N f$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \delta\varphi(X) \int_{S_f} \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{1}{r} \right) n_i w_i(Y) dS_y dS_x = \delta f^T C q$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \delta\varphi(X) \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \frac{1}{r} \right) \eta(Y) dS_y dS_x = \delta f^T D y$$

L'équation (11) devient donc

$$\delta f^T N f = \delta f^T \left[ \left( \frac{1}{2} A - C \right) q + \left( \frac{1}{2} B - D \right) y \right]$$

A et B ayant la même signification qu'au chapitre 3. Moyennant la fixation à zéro d'une valeur du potentiel, on peut écrire

$$f = N^{-1} \left[ \left( \frac{1}{2} A - C \right) q + \left( \frac{1}{2} B - D \right) y \right] = Qq + Yy$$

avec

$$Q = N^{-1} \left( \frac{1}{2} A - C \right)$$

$$Y = N^{-1} \left( \frac{1}{2} B - D \right)$$

## Chapitre 5

### QUELQUES REMARQUES

#### 1. REGULARITE DE LA SURFACE

La formulation précédente a le gros inconvénient de postuler la régularité de la surface. Ceci exclut toutes espèces d'angles. Que faire dans le cas d'un cube ? Comme, par ailleurs, la matrice du fluide est pleine et sert à construire des matrices non symétriques, on ne voit pas très bien l'intérêt majeur que présente une matrice symétrique. A cet égard, il est facile de démontrer la formule

$$\varphi(X) = \frac{1}{\Omega(X)} \left\{ \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_y} dS_y - \int_S \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) \varphi(Y) dS_y \right\}$$

où  $\Omega(X)$  est l'angle solide du cône tangent à  $S$  au point  $X$ . Il  $y$  correspond l'équation variationnelle

$$\int_S \delta \varphi(X) \varphi(X) dS_x = \int_{S_x} \frac{\delta \varphi(X)}{\Omega(X)} \int_S \frac{1}{r} W(Y) dS_y dS_x - \int_{S_x} \frac{\delta \varphi(X)}{\Omega(X)} \int_{S_y} \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{r} \right) \varphi(Y) dS_y dS_x$$

non symétrique, certes, mais plus générale.

#### 2. IMPORTANCE DES CALCULS

Imaginons un cube découpé en 10 selon chaque axe. Dans la formulation intégrale, cela donne 600 éléments de frontière. Dans la formulation volumique, il y en aura 1000. Si l'on admet que l'on utilise, par élément, deux points de Gauss dans chaque direction, on aura donc  $4 \times 600 = 2400$  points de Gauss dans la formulation par éléments de frontière et  $8 \times 1000 = 8000$  points de Gauss dans la formulation volumique. Mais il faut, dans la formulation intégrale, parcourir tous les points de Gauss pour chacun d'eux, ce qui fait des calculs en  $(2400)^2 = 5\,760\,000$  points de Gauss à envisager, au lieu de 8000 dans la formulation volumique. Peut-on dire, dans ces conditions, que la formulation intégrale est plus économique ? Sa génération semble a priori bien plus lourde.

#### 3. MAILLAGE

L'avantage évident de la formulation intégrale réside dans le fait qu'il n'est pas nécessaire de mailler l'intérieur du fluide.

#### 4. CONCORDANCE DES FORMULATIONS

Il a été montré que la présente formulation, celle du logiciel SAMCEF et



celle de MORAND sont identiques. Celle de l'U.T.C. en diffère par les termes de couplage à l'interface fluide-structure. Il existe de solides arguments pour justifier les résultats concordants des trois premières.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] *Calcul des modes de ballonnement de fluides et des modes hydroélastiques de réservoirs par une méthode d'éléments finis de frontières*, U.T.C., Compiègne
- [ 2 ] J. NECAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris et Academia, Prague, 1967
- [ 3 ] M.A. HAMDI, *Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul des champs acoustiques proches et lointains*, Thèse d'Etat, U.T.C., 1982
- [ 4 ] I.M. GUELFAND, G.E. CHILOV, *Les distributions*, tome I, Dunod, Paris, 1972
- [ 5 ] M. GUIGGIANI, P. CASALINI, *Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements*, Int. Jl. Num. Meth. Engng, 24 (1987), pp. 1711-1720
- [ 6 ] J.F. DEBONGNIE, *On a purely lagrangian formulation of sloshing and fluid-induced vibrations of tanks*, Comp. Meth. Appl. Mech. and Engng., 58 (1986), pp. 1-18
- [ 7 ] J.F. DEBONGNIE, A. HUCK, *Analyse dynamique des systèmes hydroélastiques de révolution par la méthode des éléments finis. Application à l'étude du phénomène "POGO" dans les lanceurs à ergols liquides*, Coll. Pub. Fac. Sc. Appl., Univ. de Liège, n° 50, 1974
- [ 8 ] J.F. DEBONGNIE, *Modélisation de problèmes hydroélastiques par éléments finis. Application aux lanceurs aérospatiaux*, Thèse de doctorat en sciences appliquées, Liège, 1978
- [ 9 ] H.G. GARNIR, *Fonctions de variables réelles I*, Gauthier-Villars, 1965
- [ 10 ] H.J.P. MORAND, *Flight vibrations of launch vehicles : complete symmetric variational formulation*, dans *Calcul des structures et intelligence artificielle*, vol. 1, publié par J.M. FOUET, P. LEDEVEZE, R. OHAYON, Pluralis, Paris, 1987
- [ 11 ] J.F. DEBONGNIE, *Sur la représentation des modes rigides dans la formulation SAMCEF des problèmes hydroélastiques* (manuscrit)
- [ 12 ] P. TONG, *Liquid sloshing in an elastic container*, AFOSR 66-0943, 1966
- [ 13 ] J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, Dover, New York, 1952 (Reprint of Yale University Press, 1923)