

Rapport SF-35

L'INTEGRATION DANS LES ELEMENTS FINIS

J.F. DEBONGNIE

Septembre 1976

## INTRODUCTION

L'intégration est une étape décisive dans la génération des éléments finis. Tout d'abord, sa précision conditionne le résultat final d'une manière évidente; l'organisation des calculs peut, pour un même résultat théorique, modifier considérablement le résultat effectivement obtenu numériquement, du seul fait des erreurs d'arrondi. Le deuxième facteur important est le temps d'exécution. Dans certains cas, on est même amené à admettre une légère altération des résultats pour accélérer le calcul (et, par là même, diminuer son coût).

Le présent rapport présente un certain nombre de méthodes applicables aux éléments finis.

Le premier chapitre est consacré aux méthodes analytiques dans le plan. Il existe en effet un certain nombre de géométries où les méthodes analytiques sont extrêmement simples. Il s'agit essentiellement des triangles et des parallélogrammes. Pour ces cas là, nous les trouvons au moins égales, si pas supérieures au meilleures méthodes numériques, tant par leur précision que par leur rapidité d'exécution.

Le deuxième chapitre constitue une introduction aux méthodes numériques d'intégration à une dimension. Diverses méthodes y sont présentées. On y trouvera aussi une discussion de la convergence et de la précision numérique. Pour ce dernier point, il ressort que les formules à poids positifs sont supérieures aux autres.

Les polynômes orthogonaux jouent un rôle privilégié dans la théorie des formules polynomiales. C'est en effet en choisissant leurs zéros comme support d'interpolation que l'on obtient les meilleures formules, c'est-à-dire celles de GAUSS et de LOBATTO.

Leur théorie fait l'objet du chapitre 3; on trouvera en fin de ce chapitre un certain nombre d'applications des propriétés des polynômes orthogonaux à la connexion des tractions de surface et des déplacements le long des interfaces des éléments finis plans.

La théorie de l'intégration numérique à plusieurs dimensions est nettement moins avancée que dans le cas unidimensionnel. On trouvera au chapitre 4 un certain nombre de méthodes, mais cet exposé n'a nullement la prétention d'être exhaustif. L'accent est surtout mis sur les méthodes par produits, les seules à pouvoir être construites d'une façon générale, du moins dans l'état actuel de nos connaissances.

Le chapitre 5 est consacré à la mise en oeuvre pratique de l'intégration. Celle-ci peut être menée de plusieurs manières. Nous en présentons essentiellement deux, dont la première, abondamment pratiquée dans le logiciel SAMCEF<sup>\*</sup>, est encore assez peu connue. Le cas des éléments isoparamétriques est traité à part. En particulier, le degré minimum de la formule d'intégration est discuté, et une remarque illustre les dangers liés à l'utilisation d'une formule dont tous les poids ne sont pas positifs.

On trouvera en annexe une note sur la recherche des points de Gauss. Il s'agit simplement de quelques remarques et résultats issus de l'expérience acquise en la matière au LTAS.

---

\* SAMCEF : "Système d'Analyse des Milieux Continus par Eléments Finis" développé par le Laboratoire des Techniques Aéronautiques et Spatiales, de l'Université de Liège.

CHAPITRE 1METHODES ANALYTIQUES D'INTEGRATION A DEUX DIMENSIONS1. Introduction

Il existe un certain nombre de formes géométriques sur lesquelles l'intégration des monômes de la forme  $x^m y^n$  peut être effectuée très simplement par voie analytique. Cependant, les diverses méthodes possibles ne sont pas équivalentes : dans certains cas, en effet, la séquence des calculs est telle que les résultats peuvent être numériquement instables. Supposons, par exemple, que l'on désire intégrer  $x^n y^m$  sur la portion d'aire comprise entre l'axe horizontal et le segment d'équation

$$y = A(x+B),$$

pour  $x$  variant entre  $x_1$  et  $x_2$  (fig. 1.1). La méthode la plus simple consiste à intégrer d'abord par rapport à  $y$ , ce qui donne:

$$\begin{aligned} \int_S x^n y^m dS &= \int_{x_1}^{x_2} x^n dx \int_0^{A(x+B)} y^m dy \\ &= \int_{x_1}^{x_2} x^n \frac{A^{m+1}}{m+1} (x+B)^{m+1} dx ; \end{aligned}$$

on développe alors  $(x+B)^{m+1}$  par le binôme de Newton :

$$(x+B)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k B^{m+1-k} x^k ,$$

ce qui conduit finalement à la formule

$$\int_S x^n y^m dS = \frac{A^{m+1}}{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k B^{m+1-k} \frac{x_2^{n+k+1} - x_1^{n+k+1}}{n+k+1} \quad (1.1)$$

Malheureusement, cette formule peut mener à des résultats extrêmement imprécis lorsque  $x_1 \approx x_2$ , avec une pente  $A$  très grande. On s'aperçoit aisément, en effet, que dans ce cas, le calcul des expressions

$$\frac{x_2^{n+k+1} - x_1^{n+k+1}}{n+k+1}$$

entraîne la soustraction de nombres très voisins, ce qui sera nécessairement imprécis; de plus, cette erreur est multipliée par le facteur  $A^{m+1}$ , qui est très grand. Pour les puissances élevées, l'erreur qui en résulte peut être énorme. Considérons par exemple le triangle de la figure 1.2. Dans la zone non hachurée, le calcul est encore plus simple, puisque l'équation du côté 1-3 est simplement  $y = \frac{y_2}{x_2} x$ ; la méthode ci-dessus est utilisée pour la partie hachurée. Le tableau ci-dessous donne la comparaison des intégrales de  $y^7$  et de  $x^{13} y^{13}$ , calculées par trois méthodes, avec une précision de  $2^{-56} \approx 10^{-16,8}$ .

La méthode I est celle que nous venons d'exposer; la méthode II consiste à supprimer la contribution du côté 2-3 si sa pente est supérieure à  $10^3$ ; enfin, la méthode III est une méthode basée sur un changement de variables, que nous exposerons plus loin (formule 1.17).

Forme du triangle		$\int g^7 ds$			$\int x^{13} y^{13} ds$			
$x_2$	$x_3$	$y_3$	I	II	III	I	II	III
10	6	5	$5,425.10^4$	$5,425.10^4$	$5,425.10^4$	$4,183.10^{18}$	$4,183.10^{18}$	$4,183.10^{18}$
10	10	5	$5,425.10^4$	$5,425.10^4$	$5,425.10^4$	$1,557.10^{21}$	$1,557.10^{21}$	$1,557.10^{21}$
10	9,999	5	$2,538.10^{22}$	$5,425.10^4$	$5,425.10^4$	$-3,649.10^{64}$	$1,555.10^{21}$	$1,555.10^{21}$

On constate que, pour une pente de  $5.10^3$ , la méthode I conduit à une véritable explosion numérique; le seul fait de supprimer la contribution de ce côté améliore sensiblement la situation.

Dans les paragraphes qui suivent, on trouvera un certain nombre de méthodes dont la mise en oeuvre n'implique que des additions et des multiplications, garantissant ainsi une précision numérique optimum.

## 2. Méthodes analytiques d'intégration sur des triangles

### 2.1. Axes obliques et double mise à échelle

Les premiers éléments de membrane étaient écrits en coordonnées obliques, avec double mise à échelle. Soit par exemple l'élément représenté à la figure (1.3) : on y définissait des axes affines  $Ox$  et  $Oy$  tels que les coordonnées des trois sommets  $y$  soient respectivement  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ . On donnait aux déplacements la forme

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \dots$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 \dots$$

Il est clair que, dans le cas où il s'agit de polynômes complets, les déplacements gardent une forme identique en axes rectangulaires. On remarquera d'autre part que le choix des axes obliques simplifie singulièrement le calcul de la matrice de connexion, qui ne dépend plus que du degré. Quant à l'intégration, elle est, elle aussi, fortement facilitée. Soit par exemple à calculer

$$I(m,n) = \int_S x^m y^n dS \quad (1.2)$$

On a visiblement

$$dS = ab \sin\phi \, dx dy, \quad (1.3)$$

où a et b représentent les longueurs des côtés 1-2 et 2-3, tandis que  $\phi$  est l'angle entre ces deux côtés. Il suffit donc de calculer

$$\int_0^1 x^m dx \int_0^{1-x} y^n dy = \int_0^1 x^m \frac{(1-x)^n}{n-1} dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^m (1-x)^{n+1} dx \quad (1.4)$$

Or cette dernière intégrale n'est autre que

$$B(m+1, n+2),$$

où B représente la seconde intégrale eulérienne (fonction Bêta). Cette fonction vérifie les égalités générales

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \quad (1.5)$$

la dernière n'étant valable que pour m et n entiers. Il vient donc

$$I(m, n) = ab \sin\phi \frac{1}{n+1} \frac{m!(n+1)!}{(m+n+2)!} = ab \sin\phi \frac{m!n!}{(m+n+2)!} \quad (1.6)$$

On a visiblement  $I(m, n) = I(n, m)$ ; de plus, si  $m \geq n$ ,

$$\frac{m!n!}{(m+n+2)!} = \frac{1}{m+n+2} \cdot \frac{1}{m+n+1} \prod_{k=1}^n \frac{k}{m+n+1-k}$$

ce qui permet de les calculer par un nombre limité de produits.

La caractéristique de cette méthode est que la matrice des intégrales<sup>(\*)</sup> ne varie que par le facteur multiplicatif  $ab \sin \phi$ .

On notera que les intégrales sont symétriques en  $m$  et  $n$  :

$$I(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n+2)!} = I(n, m) \quad (1.8)$$

En outre, on peut les calculer par récurrence, à l'aide des formules suivantes, dont la démonstration est élémentaire :

$$I(0, 0) = \frac{ab \sin \phi}{2}$$

$$I(m, n) = \frac{m}{m+n+2} I(m-1, n) \quad (1.9)$$

$$I(m, n) = \frac{n}{m+n+2} I(m, n-1).$$

Au lieu d'utiliser la seconde intégrale eulérienne, on peut aussi développer  $(1-x)^{n+1}$  par la formule de NEWTON

$$(1-x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (-1)^k x^k,$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \frac{ab \sin \phi}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (-1)^k \int_0^1 x^{m+k} dx \\ &= \frac{ab \sin \phi}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{C_{n+1}^k}{m+k+1} \end{aligned} \quad (1.10)$$

\* Matrice définie par la relation :

$$A_{mn} = \int_S x^{m-1} y^{n-1} dS,$$

Cette expression, équivalente à la formule (1.6), se prête cependant moins bien au calcul numérique, car elle implique des sommes alternées, tandis que l'expression (1.6) se calcule uniquement à l'aide de produits; en outre, s'il s'agit de calculer la matrice des intégrales, le schéma de récurrence (1.9) est nettement plus économique.

## 2.2. Axes obliques et simple mise à échelle

Une variante de la méthode précédente consiste à choisir une échelle identique pour les deux coordonnées [6] (fig. 1.4). Ce sera par exemple

$$\varrho = \sqrt{a b} . \quad (1.11)$$

Dans l'espace transformé, on a donc un triangle rectangle, mais il n'est plus isocèle, puisque les côtés (1-2) et (2-3) y prennent des longueurs  $a^* = \frac{a}{\varrho}$  et  $b^* = \frac{b}{\varrho}$ . L'avantage de cette méthode est que tout se ramène à une échelle uniforme, ce qui est plus parlant; on peut même construire le triangle réduit et appliquer finalement un facteur d'échelle. Le problème de l'intégration se ramène alors à celui de  $I(m,n)$  par le changement de variables

$$\xi = \frac{x}{a^*} , \quad \eta = \frac{y}{b^*} \quad (1.12)$$

on obtient en effet

$$\sin\phi \, dx \, dy = a^* b^* \sin\phi \, d\xi \, d\eta$$

$$x^m y^n = a^{*m} b^{*n} \xi^m \eta^n ,$$

ce qui entraîne visiblement

$$\begin{aligned}
 F(a^*, m, b^*, n) &= \int_{S^*} x^m y^n dS = a^{*m} b^{*n} a^* b^* \sin\phi \int_0^1 \xi^m d\xi \int_0^{1-\xi} \eta^m d\eta \\
 &= a^{*m+1} b^{*n+1} I(m, n). \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

A nouveau, ces intégrales peuvent se calculer par récurrence, par les formules

$$F(a, 0, b, 0) = \frac{ab \sin\phi}{2}$$

$$F(a, m, b, n) = \frac{m}{m+n+2} a F(a, m-1, b, n) \quad (1.14)$$

$$F(a, m, b, n) = \frac{n}{m+n+2} b F(a, m, b, n-1)$$

Cependant, on perd la symétrie de la matrice des intégrales. Enfin, il est également possible de calculer  $F(a, m, b, n)$  à l'aide de la formule (1.10), ce qui donne

$$F(a, m, b, n) = a^m b^n \frac{ab \sin\phi}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{C_{n+1}^k}{m+k+1} \quad (1.15)$$

Cette expression appelle d'ailleurs les mêmes remarques que son homologue (1.10).

### 2.3. Axes rectangulaires

En contrepartie de leurs avantages évidents pour l'intégration et la connexion, les axes oblique entraînent un certain nombre de difficultés dans la construction des éléments finis. Tout d'abord, il faut transformer la matrice de Hooke, et cette opération, assez compliquée, est une importante source d'erreurs lors de la rédaction des programmes.

En outre, lorsque les déplacements sont eux-mêmes exprimés en coordonnées obliques (ce qui, cependant, n'est nullement obligatoire) il convient de distinguer les coordonnées covariantes et contravariantes, ce qui peut mener à des confusions. Cet ensemble de

raisons a, dans bien des cas, justifié l'utilisation d'axes rectangulaires. On choisit généralement la droite 1-2 comme premier axe, le second axe étant choisi dans le plan de l'élément, perpendiculaire au premier, et orienté de façon que l'ordonnée du troisième sommet soit positive (fig. 1.5)

Il est encore possible, dans ce cas, de réduire l'intégrale à une somme de contributions positives en posant

$$\begin{aligned}x &= \xi x_2 + \eta x_3 \\y &= \eta y_3 ,\end{aligned}\tag{1.16}$$

ce qui revient d'ailleurs à utiliser des coordonnées obliques réduites. Il vient alors

$$\int_S x^m y^n dS = S \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} (\xi x_2 + \eta x_3)^m \eta^n y_3^n d\eta ,$$

avec  $S = x_2 y_3$ . Développant par le binôme de Newton, on obtient

$$\begin{aligned}S \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} \sum_{k=0}^m C_m^k \xi^k \eta^{m+n-k} x_2^k x_3^{m-k} y_3^n d\eta \\= S x_2^m y_3^n \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} \sum_{k=0}^m C_n^k \xi^k \eta^{m+n-k} \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^{m-k} d\eta \\= S x_2^m y_3^n \sum_{k=0}^m C_m^k \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^{m-k} \frac{k!(m+n-k)!}{(m+n+2)!} \\= S x_2^m y_3^n \frac{m!}{(m+n+2)!} \sum_{k=0}^m \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^{m-k} \frac{(m+n+k)!}{(m-k)!}\end{aligned}$$

Posant alors

$$\rho(m, n) = \frac{(m+n)!}{m!} = \begin{cases} (m+1) \dots (m+n), & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

on obtient finalement

$$\int_S x^m y^n dS = \frac{x_2^{m+1} y_3^{n+1}}{\rho(m, n+2)} \sum_{k=0}^m \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^{m-k} \rho(m-k, n)$$

(1.17)

Pour  $\frac{x_3}{x_2} = 0$  (triangle rectangle), il faut attribuer la valeur 1 à  $\left(\frac{x_3}{x_2}\right)^0$ . Dans ce cas, l'intégrale se réduit à

$$x_2^{m+1} y_3^{n+1} \frac{\rho(0, n)}{\rho(m, n+2)} = x_2^{m+1} y_3^{n+1} \frac{m!n!}{(m+n+2)!}$$

ce qui équivaut à la formule (H.11)

Cette méthode, bien que nettement plus compliquée que les précédentes, est encore très praticable, et conduit à des temps de calcul raisonnables. En outre, l'expérience numérique a montré que la précision numérique reste très bonne lorsque le sommet 3 est pratiquement sur la verticale d'un des sommets 1 ou 2.

### 3. Méthodes analytiques d'intégration sur les rectangles et parallélogrammes

Les rectangles et les parallélogrammes mènent à des formules encore plus simples. Pour les parallélogrammes, il convient d'utiliser des coordonnées obliques parallèles aux côtés (fig. 1.6): le jacobien vaut alors  $\sin\phi$ , et l'intégrale de  $x^m y^n$  s'écrit simplement

$$R(m,n) = \sin\phi \int_{-a}^a x^m dx \int_{-b}^b y^n dy = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ ou } n \text{ impair} \\ \sin\phi \cdot \frac{2^{m+n+2}}{(m+1)(n+1)} a^{m+1} b^{n+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

sinon le cas du rectangle correspond à  $\sin\phi = 1$ .

4. En dehors des quelques cas que nous venons d'envisager il existe peu de formes où l'intégration analytique reste simple. Il convient alors d'utiliser une méthode numérique. Ces méthodes font l'objet des trois chapitres qui suivent.

CHAPITRE 2.INTRODUCTION DES METHODES NUMERIQUES D'INTEGRATION1. Généralités

L'objet de l'intégration numérique est d'évaluer certaines mesures du type

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x) dx, \quad (2.1)$$

où  $w(x)$  est une fonction donnée, appelée densité de la mesure  $I$ . Les fonctions pour lesquelles  $I(f)$  existent sont appelées sommables pour  $I$  et leur ensemble forme un espace vectoriel que nous noterons  $L_I^1$ .

Nous dirons que la mesure  $I$  est positive si

$$f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0, \quad (2.2)$$

Cette propriété entraîne que les relations d'ordre entre fonctions subsistent après passage à la mesure. Enfin, nous appellerons définie positive une mesure telle que

$$(f \geq 0 \text{ et } I(f) = 0) \Rightarrow f=0 \quad \text{p.p.}, \quad (2.3)$$

l'abréviation p.p. signifiant presque partout au sens de la mesure de Lebesgue.

Cela étant, l'intégration numérique consiste à remplacer la mesure  $I$  par une mesure discrète  $\tilde{I}$  de la forme

$$\tilde{I}(f) = \sum_{i=0}^n H_i f(x_i), \quad (2.4)$$

---

(\*) ou  $I$ -sommables

où l'ensemble  $X_n = x_0, \dots, x_n$  est appelé support d'intégration et les nombres  $H_i$ , poïds d'intégration. Il va de soi que la formule (2.4) n'a de sens que si la fonction  $f(x)$  est bornée. C'est pourquoi, dans la suite, nous poserons

$$S(f) = \sup_{x \in [a, b]} \{|f(x)|\} < \infty$$

Le plus souvent, on se donne un sous-espace d'interpolation  $B_n \subset L^1_I$ , de dimension  $(n+1)$ , tel que, quel que soit  $i$  entier contenu entre 0 et  $n$ , il existe une fonction  $L_i(x)$  de  $B_n$  vérifiant la condition

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \quad j=1, \dots, n \quad (2.5)$$

Cette condition exprime la possibilité d'interpoler. Lorsqu'elle est vérifiée, on peut écrire l'interpolation sous la forme

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) . \quad (2.6)$$

L'intégration numérique revient alors à intégrer l'interpolation  $\tilde{f}(x)$  à la place de  $f(x)$ , c'est-à-dire à poser

$$\tilde{I}(f) = I(\tilde{f}) \quad (2.7)$$

ce qui entraîne, en tenant compte de (2.4) et (2.6) :

$$H_i = I(L_i) \quad (2.8)$$

Parfois aussi, on divise préalablement l'intervalle en sous-intervalles dans lesquels on applique la méthode exposée ci-dessus.

Nous passerons d'abord en revue les méthodes générales d'interpolation polynomiale et d'interpolation trigonométrique; ensuite, nous étudierons la convergence et la précision numérique des diverses formules.

## 2. Interpolation polynomiale - formule générale

L'interpolation polynomiale correspond à la base des monômes:  $B_n$  est donc la fermeture linéaire de l'ensemble

$$\{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}; \quad (2.9)$$

Le support d'interpolation sera composé de  $(n+1)$  points distincts  $x_1, \dots, x_n$ . Suivant en ceci LAGRANGE, on peut choisir pour base de  $B_n$  l'ensemble des fonctions

$$\psi_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j) \quad (2.10)$$

L'interpolation de  $f$  prend alors la forme

$$f(x) = \sum_i \alpha_i \psi_i(x),$$

et la condition d'interpolation s'écrit donc

$$f(x_i) = \tilde{f}(x_i) = \alpha_i \psi_i(x_i) = \alpha_i \prod_{j \neq i} (x_i - x_j).$$

On en déduit que

$$\tilde{f}(x) = \sum_i L_i(x) f(x_i),$$

avec

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}. \quad (2.11)$$

Les fonctions  $1, x, \dots, x^n$  sont évidemment égales à leur interpolation; il en découle  $(n+1)$  relations concernant les fonctions  $L_i(x)$  :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_i L_i(x) \\ x &= \sum_i x_i L_i(x) \\ x^n &= \sum_i x_i^n L_i(x) . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Remarquons encore que si l'on pose

$$\mathcal{P}(x) = \prod_j (x - x_j) ,$$

on a

$$\psi_i(x) = \frac{\mathcal{P}(x)}{x - x_i} ;$$

dès lors, comme  $\mathcal{P}(x_i) = 0$ ,

$$\psi_i(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{\mathcal{P}(x)}{x - x_i} = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(x_i)}{x - x_i} = \mathcal{P}'(x_i) ,$$

ce qui permet d'écrire

$$L_i(x) = \frac{1}{\mathcal{P}'(x_i)} \frac{\mathcal{P}(x)}{x - x_i} . \tag{2.13}$$

L'interpolation est alors chose simple : rassemblant les formules (2.8) et (2.13), on obtient directement

$$H_i = I(L_i) = \frac{1}{\mathcal{P}'(x_i)} I\left(\frac{\mathcal{P}}{x - x_i}\right) \tag{2.14}$$

Signalons enfin qu'on appelle degré d'une formule basée sur une interpolation polynomiale, la plus haute puissance de  $x$  que la formule est capable d'intégrer exactement. Comme nous le verrons plus loin, cette notion joue un rôle essentiel dans l'étude de la convergence de la formule.

### 3. Méthode de NEWTON-COTES

La méthode de NEWTON-COTES consiste à choisir pour support  $(n+1)$  points équidistants. On distingue généralement la méthode de Newton-Cotes fermée, où les points sont donnés par

$$x_k = \frac{k}{n} h \quad k=0, \dots, n \quad (2.15)$$

pour l'intervalle  $[0, h]$ , et la méthode de Newton-Cotes ouverte, correspondant au choix (2.16)

$$x_k = \frac{k+1}{n+2} h, \quad k=0, \dots, n$$

pour le même intervalle (fig. 2.2). Le degré de ces formules est généralement  $n$ . Cependant, dans le cas des formules fermées comportant un nombre impair de points, la différence  $f(x) - \hat{f}(x)$  est un polynôme de degré  $(n+1)$  s'annulant en  $(n+1)$  points équidistants : il a donc la forme

$$P_{n+1}(y) = (h-y)(h-x_1-y) \dots y = (-1)^{n+1} P_{n+1}(x)$$

Dès lors, si  $w(x) = w(h-x)$  (symétrie de la densité), on a

$$\int_0^h w(x) P_{n+1}(x) dx = \int_h^0 w(y) (-P_{n+1}(y)) (-dy) = - \int_0^h w(y) P_{n+1}(y) dy$$

ce qui entraîne

$$\int_0^h w(x) P_{n+1}(x) = 0,$$

c'est-à-dire que la formule est de degré  $(n+1)$ .

Pour  $w(x) \equiv 1$ , les formules de Newton-Cotes les plus simples sont bien connues; elles sont reprises dans le tableau suivant:

$\int_0^h f(x) dx = \alpha \sum_0^n \beta_i f(x_i)$				
n	$\alpha$	$\beta_i$	Nom	degré
1	h	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	Formule du trapèze	1
2	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}$	Formule de Simpson	3
3	h	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	Formule des $\frac{3}{8}$	3
4	$\frac{h}{4}$	$\frac{14}{45}, \frac{64}{45}, \frac{24}{45}, \frac{64}{45}, \frac{14}{45}$	Formule de Villarceau	5
5	$\frac{h}{5}$	$\frac{19}{288}, \frac{75}{288}, \frac{50}{288}, \frac{50}{288}, \frac{75}{288}, \frac{19}{288}$	-	5
6	$\frac{h}{6}$	$\frac{41}{140}, \frac{216}{140}, \frac{27}{140}, \frac{272}{140}, \frac{27}{140}, \frac{216}{140}, \frac{41}{140}$	Formule de Hardy	6

A partir de  $n=9$ , les formules de Newton-Cotes fermées contiennent des poids négatifs; c'est aussi le cas pour la plupart des formules de Newton-Cotes ouvertes.

#### 4. Interpolation trigonométrique

Citons encore les méthodes basées sur l'interpolation trigonométrique, qui permettent d'évaluer simplement les harmoniques de Fourier d'une fonction. Dans ce cas, on choisit un espace de dimension  $(2n+1)$ , composé des fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx.$$

(2.19)

L'interpolation sera donc de la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

les coefficients  $a_0, a_k, b_k$  étant déterminés par les  $(2n+1)$  conditions

$$f(x_i) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx_i + b_k \sin kx_i) \quad i=1, \dots, 2n+1$$

(2.20)

Ces conditions s'écrivent sous forme matricielle

$$C q = g \tag{2.21}$$

où

$$q^T = (a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n),$$

$$g^T = (f(x_1), \dots, f(x_{2n+1})),$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos x_1 & \sin x_1 & \cos 2x_1 & \sin 2x_1 & \dots & \sin nx_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos x_2 & \sin x_2 & \cos 2x_2 & \sin 2x_2 & \dots & \sin nx_2 \\ \vdots & & & & & & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos x_{2n+1} & \sin x_{2n+1} & \dots & & & \sin nx_{2n+1} \end{bmatrix}$$

(2.22)

On a donc

$$q = C^{-1} g$$

et, par conséquent,

$$I(f) = I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \sin nx\right) C^{-1} g \quad (2.23)$$

Pour des intégrales du type

$$I(f) = \int_0^{2\pi} f(x) \begin{cases} \cos nx \\ \sin nx \end{cases} dx ,$$

une seule des fonctions de base a son intégrale non-nulle, puisque

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = \pi \delta_{mn} (1 + \delta_{m0})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx = \pi \delta_{mn}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx dx = 0 ;$$

par conséquent, une seule ligne de la matrice  $C^{-1}$  est nécessaire.

Si l'on choisit comme support les points

$$x_i = \frac{2k\pi}{2n+1} + \phi , \quad (2.24)$$

avec  $0 \leq \phi \leq \frac{2\pi}{2n+1} ,$

on a les relations d'orthogonalité

$$\sum_{k=0}^{2n} \sin px_i \sin qx_i = \frac{2n+1}{2} \delta_{pq}$$

$$\sum_{k=0}^{2n} \cos px_i \cos qx_i = \frac{2n+1}{2} \delta_{pq} (1 + \delta_{p0}) \quad (2.25)$$

$$\sum_{k=0}^{2n} \sin px_i \cos qx_i = 0$$

dont la vérification est aisée [4] . Dès lors,

$$C^{-1} = \frac{2}{2n+1} C^T, \quad (2.26)$$

ce qui constitue une simplification considérable: il vient en effet

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2n+1} \sum_i f(x_i) \\ a_k &= \frac{2}{2n+1} \sum_i f(x_i) \cos kx_i \\ b_k &= \frac{2}{2n+1} \sum_i f(x_i) \sin kx_i ; \end{aligned} \quad (2.27)$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{\sqrt{2}} dx = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_i f(x_i) \\ \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx &= \int_0^{2\pi} a_k \cos^2 kx dx = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_i f(x_i) \cos kx_i \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \int_0^{2\pi} b_k \sin^2 kx dx = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_i f(x_i) \sin kx_i$$

(2.28)

Si l'on choisit  $\phi = \frac{k \pi}{2n+1}$  ; ces formules sont identiques à celles que l'on aurait obtenues en divisant l'intervalle en  $(2n+1)$  sous-intervalles égaux, et en prenant la valeur de la fonction au milieu de chaque intervalle (Formule de la valeur centrale). Cette méthode permet en outre d'intégrer exactement les polynômes jusqu'au degré 1.

## 5. Convergence

Il est légitime de se demander si les diverses formules d'une même famille convergent effectivement vers la mesure que l'on veut évaluer. Pour les formules basées sur une interpolation polynomiale, l'approche classique se base sur le développement en série de TAYLOR. On peut toujours, par une transformation linéaire affine, se ramener à l'intervalle  $[0, h]$ , et il suffit donc de se limiter à ce cas. Si  $f(x) \in C^{n+1}$ , on a

$$f(x) = f_0 + xf'_0 + \frac{x^2}{2} f''_0 + \dots + \frac{x^n}{n!} f_0^{(n)} + R_n(x)$$

(2.29)

Si l'on suppose que la formule utilisée est de degré  $n$ , on a

$$\tilde{I}(x^k) = I(x^k) \quad k = 0, \dots, n \quad (2.30)$$

Dès lors, il vient visiblement

$$e_n = |I(f) - \tilde{I}(f)| = |I(R_n) - \tilde{I}(R_n)|.$$

Nous admettrons que la norme

$$\|I\| = \sup_{f \in C^0} \frac{|I(f)|}{\|f\|_{C^0}} \quad (2.31)$$

avec

$$\|f\|_{C^0} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (2.32)$$

est finie. Dès lors,

$$|I(R_n)| \leq \|I\| \|R_n\|_{C^0},$$

tandis que

$$|I'(R_n)| \leq \sum_i |H_i| \|R_n\|_{C^0}$$

Par conséquent,

$$e_n \leq [\|I\| + \sum_i |H_i|] \|R_n\|_{C^0}$$

Dès lors, si la fonction est analytique, la convergence résulte du fait que  $R_n$  est le reste de la série de Taylor, ce qui entraîne

$$\|R_n\|_{C^0} \rightarrow 0,$$

à condition cependant qu'il existe une constante  $\eta$  telle que l'on ait toujours

$$\sum_i |H_i| \leq \eta < \infty \quad (2.33)$$

Cette dernière condition est automatiquement vérifiée si les poids sont positifs, car alors

$$\sum_i |H_i| = \sum_i H_i = I(1) = n$$

Enfin, on a

$$\|R_n\|_{C^0} \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\xi \in [a,b]} f^{(n+1)}(\xi),$$

ce qui permet d'obtenir la majoration

$$e_n \leq [ \|I\| + \sum_i |H_i| ] \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\xi \in [a,b]} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2.34)$$

Ce raisonnement permet donc de garantir la convergence si la fonction est analytique. Mais il s'agit là d'une restriction tout à fait anormale dans le cadre de l'évaluation d'une intégrale [11]. D'ailleurs, la convergence des formules polynomiales à poids positifs dépasse largement le cadre des fonctions analytiques. Pour l'illustrer, considérons les trois fonctions suivantes, définies dans  $]-1,+1[$

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{dans } [-1,0[ \\ x & \text{dans } [0,1] \end{cases} \quad \text{(rampe)}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,-0,5[ \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = -0,5 \\ 1 & \text{si } x \in ]-0,5; 1[ \end{cases} \quad \text{(échelon simple)}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1;-0,5[ \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = -0,5 \\ 1 & \text{si } x \in ]-0,5; 0,5[ \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0,5 \\ 0 & \text{si } x \in ]0,5; 1[ \end{cases} \quad \text{(échelon double)} \quad (2.35)$$

On a visiblement

$$I(f_1) = 0,5 \quad , \quad I(f_2) = 1,5 \quad , \quad I(f_3) = 1$$

Les calculs ont été effectués à 9 décimales par la méthode de Gauss, qui sera exposée au chapitre 3. Ils ont donné les résultats suivants :

nombre de points	$\tilde{I}(f_1)$	$\tilde{I}(f_2)$	$\tilde{I}(f_3)$
1	0	2	2
2	0,577350269	1	0
3	0,4303314828	1,444444444	0,8888888888
4	0,521267484	1,652145155	1,304290310
5	0,4724252180	1,284444444	0,5688888888
6	0,5099470228	1,467913898	0,935827869
7	0,4852693509	1,590809642	1,181619285
8	0,5057640315	1,362683782	0,7253675666
9	0,4908448781	1,477466754	0,9549335090
exact	0,5	1,5	1

Ces valeurs sont reprises aux figures (2.3), (2.4), (2.5).

Il y a, certes, des oscillations du fait du déplacement des points, mais leur amplitude décroît d'une manière indiscutable.

Lorsque la mesure  $I$  est strictement positive, on peut tenir un raisonnement différent, basé sur les propriétés de l'espace  $L^2_I$  des fonctions de carré sommable. On peut démontrer que cet espace est complet [1], ce qui permet de développer les fonctions de carré sommable en série trigonométrique ou en série de polynômes orthogonaux. L'existence de ces derniers sera montrée indépendamment au chapitre 3. Les propriétés de cette base de fonctions dont nous

ferons usage dans la démonstration sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0(x) = 1 \\ (\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

ce qui suppose en particulier que la fonction constante soit sommable. Alors, si  $f(x)$  est bornée et de carré sommable, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \phi_k(x), \quad (2.37)$$

ce que l'on peut encore écrire, pour  $n$  donné,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \phi_k(x) + R_n(x), \quad (2.38)$$

avec

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \phi_k(x). \quad (2.39)$$

Or, du fait des relations d'orthogonalités (2.36), on a

$$I(\phi_k) = 0 \quad k=1, \dots, n \quad (2.40)$$

c'est-à-dire

$$I(f) = \alpha_0 I(1) \quad (2.41)$$

Par conséquent, si l'on suppose que

$$\tilde{I}(\phi_k) = I(\phi_k) \quad k=0, \dots, n, \quad (2.42)$$

on a

$$e_n = |I(f) - \tilde{I}(f)| = |I(R_n) - \tilde{I}(R_n)| = |\tilde{I}(R_n)| \quad (2.43)$$

Dès lors

$$e_n = \left| \sum_i H_i R_n(x_i) \right| \leq \left( \sum_i |H_i| \right) \sup_{x \in [a, b]} |R_n(x)|$$

et, s'il existe une constante  $\eta$  ayant la propriété (2.33), on a

$$|e_n| \leq \eta \sup_{x \in [a, b]} |R_n(x)| \quad (2.44)$$

Or, du fait de la bornation de  $f(x)$ , la série (2.37) converge et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in [a, b]} |R_n(x)| \right\} = 0$$

ce qui achève la démonstration. On remarque qu'elle vaut aussi bien pour l'interpolation trigonométrique que pour l'interpolation polynomiale. Signalons que l'interpolation trigonométrique donne souvent d'excellents résultats pour les fonctions peu régulières, du fait de la convergence rapide des séries de Fourier. Revenons par exemple aux fonctions  $f_1, f_2, f_3$  définies en (2.21): on a les résultats suivants :

nombre de points	$\tilde{I}(f_1)$	$\tilde{I}(f_2)$	$\tilde{I}(f_3)$
1	0	2	2
3	0,4444444	1,3333333	0,666666666
5	0,480000000	1,60000000	1,200000000
7	0,4897959184	1,428571429	0,8571428571
9	0,4938271505	1,55555555	1,11111111
11	0,4958677686	1,45454545	0,90909091
13	0,4970414201	1,538461538	1,076923077
15	0,497777777	1,46666666	0,933333333

Ces résultats sont tout-à-fait consevables, et ce fait mérite d'être noté, surtout si l'on tient compte de la simplicité de la méthode.

## 6. Précision numérique

Les valeurs de la fonction sont généralement entachées d'erreurs d'arrondi. Ces erreurs sont indépendantes, et leur sens n'est pas déterminé, mais en général, il existe une constante telle que

$$|\Delta f(x_i)| \leq \varepsilon |f(x_i)| \quad (2.45)$$

L'intégrale étant évaluée par la somme

$$\tilde{I}(f) = \sum_i H_i f(x_i) \quad (2.46)$$

l'erreur sur le résultat est donnée par

$$\Delta \tilde{I} = \sum_i H_i \Delta f(x_i) \quad (2.47)$$

A son tour, cette quantité admet la majoration

$$|\Delta \tilde{I}| \leq \left[ \sum_i |H_i| \right] \cdot \varepsilon \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad (2.48)$$

Visiblement, si tous les poids sont positifs, on a

$$\sum_i |H_i| = \sum_i H_i = \tilde{I}(1),$$

si bien que

$$\Delta \tilde{I} \leq \tilde{I}(1) \cdot \varepsilon \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \quad (2.49)$$

c'est-à-dire que l'erreur est majorée par l'intégrale numérique de la fonction constamment égale à l'erreur maximum .

Si au contraire, certains poids sont positifs et les autres négatifs, on a évidemment

$$\sum_i |H_i| > \sum_i H_i ,$$

ce qui signifie que si tous les poids ne sont pas de même signe, l'erreur peut être supérieure à l'intégrale numérique de la fonction constamment égale à l'erreur maximum.

Comparons, en guise d'illustration, quatre formules à trois points sur l'intervalle  $[0,1]$  , avec  $w(x) \equiv 1$  :

Méthode	Poids	$\sum_i  H_i $
Newton-Cotes ouverte	$\frac{2}{3} , -\frac{1}{3} , \frac{2}{3}$	1,667
Newton-Cotes fermée (Simpson)	$\frac{1}{6} , \frac{4}{6} , \frac{1}{6}$	1
Gauss	$\frac{5}{18} , \frac{8}{18} , \frac{5}{18}$	1
Poids identiques	$\frac{1}{3} , \frac{1}{3} , \frac{1}{3}$	1

Alors que dans toutes les formules à poids positifs,  $\sum_i |H_i|$  vaut 1, pour la méthode de Newton-Cotes ouverte, on a  $\sum_i |H_i| = 1,667$

Lorsqu'il existe une constante vérifiant l'inégalité (1.33), on remarquera que

$$\Delta I^v \leq \varepsilon \eta \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| , \quad (2.50)$$

c'est-à-dire que l'erreur numérique admet une majoration indépendante du nombre de points. C'est toujours le cas lorsque tous les poids sont positifs .

Il convient de citer à ce sujet la méthode de TCHEBYCHEFF. Puisque des poids positifs sont désirables, on impose simplement  $H_i = H = I(1)/(n+1)$  , ce qui assure déjà l'intégration correcte de la fonction constante. On détermine alors le support par les  $(n+1)$  équations non-linéaires,

$$H \sum_i x_i^k = I(x^k) \quad , \quad k=1, \dots, (n+1) \quad (2.51)$$

ce qui conduira à une méthode de degré  $(n+1)$ . Malheureusement les points  $x_i$  ne sont tous réels que pour les valeurs  $n=1,2,3,4,5,6,8$ , ce qui limite le nombre de formules possibles à 7.

## 7. Formules polynomiales de degré élevé

Les formules de Newton-Cotes et de Tchébycheff sont de degré  $n$  ou  $(n+1)$  pour  $(n+1)$  points. Dans la méthode de Tchébycheff, on impose les poids, ce qui permet de gagner un degré; d'autre part, dans les formules de Newton-Cotes fermées à nombre impair de points, la disposition de ceux-ci permet de gagner un degré. Ne peut-on pas trouver un support particulier pour lequel le degré serait encore plus élevé? La réponse est affirmative, du moins pour les mesures définies positives. Il s'agit des formules de Gauss et de Lobatto, dont la théorie repose sur les propriétés des polynômes orthogonaux. Elle fera l'objet du chapitre suivant. Disons tout de suite que la méthode de Lobatto permet d'obtenir un degré  $(2n-1)$  , et celle de Gauss , un degré  $(2n+1)$ .

8. Propriétés des quadratures numériques en tant que mesures différentes de la mesure approchée.

L'intégration numérique consistant à remplacer une mesure  $I$  par une autre mesure  $\tilde{I}$ , il va sans dire que l'espace des fonctions sommables pour  $I$  et celui des fonctions sommables pour  $\tilde{I}$  seront généralement différents. Dans certains cas, ce fait peut être mis à profit. Considérons en particulier une fonction  $f$ , sommable pour  $I$ , et telle que

$$\tilde{I}(f) = I(f) \quad (2.52)$$

Supposons que l'on ne connaisse pas  $f$  a priori, mais que l'on sache que

$$f(x) = g(x) + h(x) , \quad (2.53)$$

avec  $g(x) \notin L_I^1$ ,  $h(x) \notin L_I^1$ . Si l'on choisit une formule numérique pour laquelle  $g(x)$  et  $h(x)$  sont sommables, il suffit d'écrire

$$I(f) = \tilde{I}(f) = \tilde{I}(g) + \tilde{I}(h) , \quad (2.54)$$

ce qui résout le problème. Ce cas se présente en pratique dans les structures de révolution: les fixations sur l'axe de symétrie sont telles qu'à la solution, la densité d'énergie est finie partout. Mais dans certains cas, on ne peut les exprimer qu'a posteriori, à l'aide de contraintes linéaires par exemple. Dans chaque élément touchant l'axe, il est alors nécessaire d'intégrer des fonctions du type

$$\frac{a_{-3}}{r^3} + \frac{a_{-2}}{r^2} + \frac{a_{-1}}{r} + a_0 + a_1 r + \dots , \text{ avec } r \in [0, R]$$

tout en sachant que la solution ne contiendra que des combinaisons

linéaires intégrables de ces fonctions. L'utilisation d'une formule de quadrature ouverte (c'est-à-dire ne contenant pas les sommets) permet alors de résoudre le problème; de plus, si tous les poids sont positifs, on est certain que les termes diagonaux correspondants de la matrice de raideur seront positifs.

CHAPITRE 3POLYNOMES ORTHOGONAUX ET INTEGRATION NUMERIQUE1. Introduction

La théorie des polynômes orthogonaux permet de donner une réponse élégante au problème de l'évaluation des mesures définies positives en fournissant des formules de degré élevé et à poids positifs.

Dans ce qui suit, la mesure  $I(f)$  dont nous parlerons répondra toujours aux conditions suivantes

C1 :  $I(f)$  est définie positive

C2 : Le support de la mesure est un intervalle  $[a, b]$  d'un seul tenant.

C3 : La mesure  $I(f)$  existe chaque fois que  $f$  est un polynôme.

Comme dans le chapitre 2, nous appellerons  $L_I^1$  l'espace des fonctions sommables pour la mesure  $I$ . La théorie des polynômes orthogonaux est basée sur les propriétés de l'espace  $L_I^2$  des fonctions dont le carré est sommable pour  $I$ . Sur cet espace, on définit le produit scalaire

$$(f, g) = I(fg) \quad (3.1)$$

La condition (C3) garantit que ce produit scalaire existe chaque fois que  $f$  et  $g$  sont des polynômes. On notera qu'il jouit en outre des propriétés suivantes :

. Si  $f$  et  $\zeta g \in L_I^2$ , ou si  $\zeta f$  et  $g \in L_I^2$ . on a

$$(f, \zeta g) = I(f\zeta g) = (\zeta f, g) \quad (3.2)$$

. Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions positives et ne sont pas nulles presque partout dans  $]a, b[$ , la positive définition de la mesure  $I$  entraîne

$$(f, g) = I(fg) > 0 \quad (3.3)$$

Nous ne nous occuperons pas ici du problème de la complétion de  $L^2_I$ . Pour ces questions, on pourra se référer à l'ouvrage de RIESZ et NAGY [1].

## 2. Polynômes orthogonaux dans $L^2_I$

L'espace des polynômes de degré  $k \leq n$  est l'ensemble des combinaisons linéaires

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i \quad (3.4)$$

des  $(n+1)$  monômes  $1, x, \dots, x^n$ . C'est donc un espace vectoriel de dimension  $(n+1)$ . Nous étudierons spécialement les éléments particuliers de cet espace que sont les polynômes orthogonaux.

2.1. Il existe toujours une suite de polynômes  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_i \text{ de degré } i \\ (\phi_i, \phi_j) = 0 \text{ pour } i \neq j \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Une telle suite peut en effet être construite de la façon suivante : on pose

$$\phi_0(x) = 1, \quad (3.6)$$

puis on orthogonalise successivement la base des monômes par le procédé de Schmidt :

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= x - \frac{(x, \phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)} \phi_0 \\ \phi_p(x) &= x^p - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(x^p, \phi_i)}{(\phi_i, \phi_i)} \phi_i\end{aligned}\quad (3.7)$$

Il est clair que cette opération n'altère pas le degré des polynômes, puisqu'elle consiste à soustraire à  $x^p$  des combinaisons de polynômes de degré strictement inférieur à  $p$ .

2.2. Soient  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$  des polynômes orthogonaux. Il est clair que tout polynôme  $P_k$  de degré  $k < n$  est décomposable en

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^k \lambda_i \phi_i(x) . \quad (3.8)$$

Dès lors,

$$(P_k, \phi_n) = \sum_{i=0}^k \lambda_i (\phi_i, \phi_n) = 0 ; \quad (3.9)$$

ce qui signifie que  $\phi_n$  est orthogonal à tout polynôme de degré  $k < n$ .

2.3. Si  $\phi_n$  est orthogonal à tout polynôme de degré  $k < n$ , tous ses zéros sont contenus dans l'ouvert  $]a, b[$ . En effet, supposons que  $\phi_n$  n'ait que  $\ell < n$  zéros  $x_1, \dots, x_\ell$  dans  $]a, b[$ . Entre deux zéros,  $\phi_n$  a donc un signe constant. Considérons alors le polynôme

$$Q_\ell(x) = \alpha \sum_{i=1}^{\ell} (x - x_i) , \quad (3.10)$$

où  $\alpha$  est une constante arbitraire non-nulle. Le signe de  $Q_\ell$  est constant entre deux zéros de  $\phi_n$ . On peut donc choisir  $\alpha$  de façon que  $\phi_n(x) Q_\ell(x) \geq 0$  dans  $]a,b[$ . Dès lors, en vertu de la propriété (3.3),  $(\phi_n, Q_\ell) > 0$ . Mais cette dernière relation contredit l'hypothèse d'orthogonalité.

Cette démonstration reste vraie dans le cas des zéros multiples, à condition de respecter leur multiplicité dans la construction du polynôme  $Q_\ell$ .

2.4. Si  $\phi_n$  est orthogonal à tout polynôme de degré  $k < n$  dans  $]a,b[$ , il ne peut avoir que des zéros simples. Admettons en effet que cette propriété soit fautive : le polynôme

$$Q_\ell(x) = \alpha \prod_{\substack{\text{zéros de} \\ \text{multi.impaire}}} (x-x_i) \quad (3.11)$$

s'annule simplement aux zéros de multiplicité impaire et ne s'annule pas aux zéros de multiplicité paire. Visiblement, il est de degré inférieur à  $n$ , et on peut choisir  $\alpha$  pour qu'il garde partout le même signe que  $\phi_n$ . Mais alors,

$$(\phi_n, Q_\ell) > 0,$$

ce qui est contradictoire.

2.5. Il n'existe qu'une base de polynômes orthogonaux de la forme

$$\phi_i = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{ik} x^k + x^i \quad (3.12)$$

En effet, le polynôme  $\phi_i$  doit être orthogonal à tous les polynômes de degré  $k < i$ . Si l'on choisit l'ensemble particulier des monômes

$$1, x, \dots, x^{i-1},$$

on obtient les conditions

$$\left( \sum_{\ell=0}^{i-1} \alpha_{i\ell} x^\ell + x^i, x^k \right) = 0 \quad \text{pour } k < i ,$$

soit

$$\sum_{\ell=0}^{i-1} \alpha_{i\ell} (x^\ell, x^k) + (x^i, x^k) = 0 .$$

La matrice A définie par

$$A_{\ell k} = (x^\ell, x^k) \tag{3.13}$$

ne peut être singulière, en vertu de l'indépendance des  $x^k$ :  
dès lors, les coefficients  $\alpha_{i\ell}$  sont définis d'une manière  
univoque par

$$\alpha_{i\ell} = - \sum_{k=1}^{i-1} (A^{-1})_{\ell k} (x^i, x^k) , \tag{3.14}$$

ce qui démontre la proposition.

## 2.6. Relations de récurrence [2]

Considérons le polynôme  $x\phi_n$ . Il s'agit d'un polynôme de degré  
(n+1), ce qui permet d'écrire

$$x\phi_n = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k \phi_k = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x\phi_n, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)} \phi_k \tag{3.15}$$

Or, en vertu de (3.2),

$$(x\phi_n, \phi_k) = (\phi_n, x\phi_k) . \tag{3.16}$$

Pour  $k < (n-1)$ ,  $x\phi_k$  est de degré strictement inférieur à n et  
 $(\phi_n, x\phi_k) = 0$ . On a donc

$$x\phi_n = \alpha_{n-1} \phi_{n-1} + \alpha_n \phi_n + \alpha_{n+1} \phi_{n+1} \quad (3.17)$$

ce qui entraîne

$$\alpha_{n+1} \phi_{n+1} = (x - \alpha_n) \phi_n - \alpha_{n-1} \phi_{n-1} \quad (3.18)$$

Le coefficient  $\alpha_{n+1}$  ne peut être nul, sans quoi  $x\phi_n$  serait, en vertu de (3.17), de degré  $n$ . Bien plus, s'il s'agit des polynômes définis par (3.12), on s'aperçoit aisément que  $\alpha_{n+1} = 1$ . Par conséquent, on a en général une relation de la forme

$$\phi_{n+1} = x\phi_n - \alpha\phi_n - \beta\phi_{n-1} \quad (3.19)$$

## 2.7. Procédés de construction des polynômes orthogonaux

2.7.1. Pour obtenir tous les polynômes orthogonaux jusqu'au degré  $n$ , une première méthode consiste à utiliser le procédé de Schmidt (3.7). Mais cette méthode qui, nécessite de nombreuses orthogonalisations et un grand nombre d'opérations algébriques, est assez lourde.

Une deuxième méthode peut être basée sur les relations de récurrence (3.19): il est clair que, si  $P_k$  est un polynôme de degré  $k$ ,

$$(x\phi_n, P_k) = (\phi_n, xP_k) = 0 \text{ pour } (k+1) < n$$

$$(\phi_n, P_k) = 0 \text{ pour } k < n$$

$$(\phi_{n-1}, P_k) = 0 \text{ pour } k < (n-1)$$

Il suffit donc d'assurer que, pour deux polynômes  $P_n$  et  $P_{n-1}$  indépendants,

$$(\phi_{n+1}, P_n) = 0 \text{ et } (\phi_{n+1}, P_{n-1}) = 0 ; \quad (3.20)$$

ces relations s'écrivent explicitement

$$(\phi_{n+1}, P_n) = (x\phi_n, P_n) - \alpha(\phi_n, P_n) - \beta(\phi_{n-1}, P_n) = 0 \quad (3.21)$$

et

$$(\phi_{n+1}, P_{n-1}) = (x\phi_n, P_{n-1}) - \alpha(\phi_n, P_{n-1}) - \beta(\phi_{n-1}, P_{n-1}) = 0 \quad (3.22)$$

Le choix particulier

$$P_n = \phi_n, \quad P_{n-1} = \phi_{n-1} \quad (3.23)$$

conduit aux équations

$$\alpha = \frac{(x\phi_n, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} \quad (3.24)$$

$$\beta = \frac{(x\phi_n, \phi_{n-1})}{(\phi_{n-1}, \phi_{n-1})} \quad (3.25)$$

On peut aussi choisir les monômes, ce qui assure des orthogonalisations plus simples : pour

$$P_n = x^n, \quad P_{n-1} = x^{n-1}, \quad (3.26)$$

on tire de (3.22)

$$\beta = \frac{(\phi_n, x^n)}{(\phi_{n-1}, x^{n-1})} ;$$

l'équation (3.21) donne alors

$$\alpha = \frac{(\phi_n, x^{n+1})}{(\phi_n, x^n)} - \frac{(\phi_{n-1}, x^n)}{(\phi_{n-1}, x^{n-1})} \quad (3.27)$$

Ces méthodes ont l'avantage de la simplicité. On remarquera cependant que lors d'un calcul numérique, les erreurs d'arrondi peuvent entraîner une violation des relations (3.20), ce qui oblige à refaire toutes les orthogonalisations.

2.7.2. Lorsqu'il ne s'agit que de calculer un polynôme particulier, on peut aussi utiliser la méthode d'inversion de la matrice de Gram, exposée au paragraphe (2.5) (formule (3.14))

2.7.3. Il convient encore de signaler la formule de RODRIGUES [5] qui, dans un certain nombre de cas, permet un calcul direct du polynôme.

Pour une certaine classe de poids  $w(x)$ , les fonctions

$$\psi_n(x) = \frac{1}{w(x)} D^n [w(x) u^n(x)] \quad , \quad (3.28)$$

avec  $u(x) = (x-a)(b-x)$ , sont des polynômes de degré  $n$ .

Si tel est le cas, il s'agit automatiquement des polynômes orthogonaux. Remarquons tout d'abord que

$$\psi_0(x) = \frac{1}{w(x)} D^0 w(x) = 1;$$

Pour  $n < m$ , on a

$$\int_a^b w \psi_n \psi_m dx = \int_a^b \frac{1}{w} D^n (w u^n) D^m (w u^m) dx =$$

$$\left[ \frac{1}{w} D^n (w u^n) D^{m-1} (w u^m) \right]_a^b - \int_a^b D \left[ \frac{1}{w} D^n (w u^n) \right] D^{m-1} (w u^m) dx$$

Le terme intégré s'annule visiblement, car il est multiple de  $u=(x-a)(b-x)$ . De proche en proche, on obtient ainsi

$$\int_a^b w \psi_n \psi_m dx = (-1)^n \int_a^b D^{n+1} \left[ \frac{1}{w} D^n (w u^n) \right] D^{m-n-1} (w u^m) dx = 0$$

Par conséquent, les fonctions  $\psi_n$  sont les polynômes orthogonaux recherchés.

Exemple: dans l'intervalle  $(-1, +1)$ , les polynômes de Legendre sont orthogonaux par rapport à la fonction constante. Posant donc

$$w(x) \equiv 1,$$

on obtient

$$\psi_n(x) = D^n [(x^2 - 1)^n]$$

ce qui donne

$$\phi_0 = 1$$

$$\phi_1 = D [x^2 - 1] = 2x$$

$$\phi_2 = D^2 [(x^2 - 1)^2] = D [2(x^2 - 1) \cdot 2x] = 4D [x^3 - x] = 4(3x^2 - 1)$$

etc...

### 3. Polynômes orthogonaux et meilleure approximation

Soit  $P_n$  un polynôme de degré  $n$ . Cherchons le polynôme de degré  $(n-1)$  qui en constitue la meilleure approximation au sens de la norme

$$||f|| = (f, f)^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

L'approximation peut évidemment être mise sous la forme

$$Q_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \phi_i ; \quad (3.30)$$

dès lors, le problème consiste à chercher le minimum de

$$e(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (P_n - Q_{n-1}, P_n - Q_{n-1}) = (P_n, P_n) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (P_n, \phi_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 (\phi_i, \phi_i) ,$$

où l'on a tenu compte de l'orthogonalité des  $\phi_i$ . Le minimum s'obtient en annulant le gradient de  $e$  dans l'espace des  $\lambda_i$  :

$$\frac{\partial e}{\partial \lambda_i} = \lambda_i (\phi_i, \phi_i) - (P_n, \phi_i) = 0, \quad (3.31)$$

ce qui fournit immédiatement la solution :

$$Q_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \phi_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(P_n, \phi_i)}{(\phi_i, \phi_i)} \phi_i . \quad (3.32)$$

La différence des deux polynômes

$$R = P_n - Q_{n-1} = P_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(P_n, \phi_i)}{(\phi_i, \phi_i)} \phi_i$$

jouit de la propriété

$$(R, \phi_j) = (P_n, \phi_j) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(P_n, \phi_i)}{(\phi_i, \phi_i)} (\phi_i, \phi_j) = (P_n, \phi_j) - \frac{(P_n, \phi_j)}{(\phi_j, \phi_j)} (\phi_j, \phi_j) = 0 \quad (3.33)$$

ce qui signifie qu'il s'agit d'un polynôme orthogonal à tous les polynômes de degré  $k < n$ . En vertu du théorème d'unicité (2.5), ce polynôme ne peut être qu'un multiple de  $\phi_n$  et doit donc s'annuler aux zéros de celui-ci, ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

" Le polynôme de degré  $(n-1)$  réalisant la meilleure approximation au sens de la norme (3.29) d'un polynôme quelconque de degré  $n$ , interpole celui-ci aux zéros de  $\phi_n$  ".

#### 4. Polynômes orthogonaux et intégration numérique

4.1. Le lien entre les polynômes orthogonaux et l'intégration numérique est exprimé par le théorème suivant [10] :

" Soit  $\psi_{n+1}$  un polynôme de degré  $(n+1)$ , dont tous les zéros sont distincts et contenus dans  $[a,b]$ . Si  $\psi_{n+1}$  est orthogonal à tous les polynômes de degré  $\leq m$ , la formule polynomiale ayant pour support les  $(n+1)$  zéros de  $\psi_{n+1}$  est de degré  $(n+m+1)$ ."

En effet, soit  $P_{n+m+1}$  un polynôme quelconque de degré  $(n+m+1)$ . On peut le diviser par  $\psi_{n+1}$ , ce qui donne

$$P_{n+m+1} = \psi_{n+1} Q_m + R_n, \quad (3.34)$$

où  $Q_m$  et  $R_n$ , quotient et reste de la division sont respectivement des polynômes de degré  $m$  et  $n$ . Intégrant, on obtient

$$I(P_{n+m+1}) = I(\psi_{n+1} Q_m) + I(R_n) \quad (3.35)$$

Or la première intégrale du second membre est nulle en vertu des propriétés d'orthogonalité de  $\psi_{n+1}$ . Par conséquent, l'intégrale de  $P_{n+m+1}$  se ramène à celle de  $R_n$ . Mais précisément, aux zéros  $x_i$  des  $\psi_{n+1}$ , on a

$$P_{n+m+1}(x_i) = R_n(x_i), \quad (3.36)$$

et, ces  $(n+1)$  points suffisent pour intégrer  $R_n$ , ce qui achève la démonstration.

La formule correspondante se construit alors par le procédé classique exposé au chapitre 2.

4.2. Méthode de GAUSS

La plus célèbre des formules basées sur les polynômes orthogonaux est due à GAUSS. Il s'agit du choix particulier

$$\psi_{n+1} = \phi_{n+1}, \quad (3.37)$$

ce qui, en vertu du théorème précédent, garantit le degré  $(2n+1)$  à la formule comportant  $(n+1)$  points. Le support est composé des zéros de  $\phi_{n+1}$ , appelés points de GAUSS. Les poids correspondants sont appelés poids de GAUSS.

Montrons que les poids de GAUSS sont strictement positifs. Pour cela, il suffit de considérer les polynômes particuliers

$$\rho_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (3.38)$$

où les  $x_j$  sont les points de Gauss de la formule considérée. Ces polynômes sont visiblement de degré  $n$ , et s'annulent en tous les points de Gauss sauf un, où ils valent 1. Leurs carrés sont des polynômes de degré  $(2n)$  et sont donc intégrés exactement par la formule de Gauss. Comme ils sont strictement positifs, on a visiblement

$$0 < I(\rho_i^2) = \tilde{I}(\rho_i^2) = H_i. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

On a vu au chapitre 2 que la positivité des poids garantit à la fois la convergence et le bon comportement numérique de la formule. Ces qualités, jointes à un degré maximum, permettent de considérer les formules de Gauss comme les meilleures formules polynomiales.

Signalons enfin que pour  $n=0$ , on obtient la formule du centre d'intervalle, qui est donc de degré 1.

#### 4.3. Méthode de LOBATTO

Dans certains cas, on peut préférer une formule dont le support contient les extrémités de l'intervalle. Considérons la mesure définie par

$$L(f) = I((x-a)(b-x) f(x)), \quad (3.39)$$

et le produit scalaire

$$(f, g)_L = L(fg) . \quad (3.40)$$

On peut construire des polynômes orthogonaux  $\chi_n$  pour ce nouveau produit scalaire, par le procédé de Schmidt décrit au paragraphe 2 du présent chapitre. Dès lors, le polynôme

$$\psi_{n+1}^{(x)} = (x-a)(b-x) \chi_{n-1}(x) \quad (3.41)$$

est visiblement orthogonal à tous les polynômes de degré  $\leq (n-2)$ , pour le produit scalaire défini par la mesure  $L$ . Nous sommes donc dans les conditions du théorème 4.1, ce qui signifie que la formule ayant pour support les zéros de  $\psi_{n+1}$  est de degré  $(n+1) + (n-2) = 2n-1$ . Cette formule est appelée formule de Lobatto.

Les poids de Lobatto sont tous positifs. Pour le montrer, considérons d'abord les polynômes

$$\gamma_i(x) = \frac{(x-a)(b-x)}{(x_i-a)(b-x_i)} \prod_{j \neq i} \frac{(x-x_j)^2}{(x_i-x_j)^2}, \quad (3.42)$$

où les  $x_j$  sont les points du support situés à l'intérieur de  $]a, b[$ . Ces polynômes sont de degré  $2(n-2) + 2 = 2n-2$ . Ils sont donc intégrés exactement et visiblement positifs. Par conséquent,

$$0 < I(\gamma_i) = \tilde{I}(\gamma_i) = H_i ,$$

ce qui démontre le théorème pour les poids relatifs aux points intérieurs. Considérons alors les deux polynômes de degré  $(2n-1)$

$$\alpha(x) = \frac{b-x}{b-a} \prod_j \frac{(x-x_j)^2}{(a-x_j)^2} \quad (3.43)$$

$$\beta(x) = \frac{x-a}{b-a} \prod_j \frac{(x-x_j)^2}{(b-x_j)^2} , \quad (3.44)$$

les  $x_j$  étant, toujours les points intérieurs. On a

$$\alpha(x) \geq 0 \quad , \quad \beta(x) \geq 0 \quad ,$$

et comme ils sont intégrés exactement,

$$0 < I(\alpha) = \tilde{I}(\alpha) = H_a$$

$$0 < I(\beta) = \tilde{I}(\beta) = H_b \quad . \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Les deux plus simples des formules de Lobatto, obtenues pour  $n=1$  et  $n=2$  s'identifient respectivement à la formule du trapèze et à la formule de Simpson. Leurs degrés sont respectivement 1 et 3.

## 5. Applications des propriétés des polynômes orthogonaux à l'étude de la connexion des éléments finis

### 5.1. Eléments "délinquants"

Les éléments délinquants sont des éléments où l'on discrétise un des deux champs, déplacements ou tensions, mais où la connexion de ce champ n'est pas réalisée exactement. Pour certifier la validité de la discrétisation, on a généralement recours au patch test de B. IRONS. Sous la forme que lui a donné STRANG [9] ce test peut être exprimé, pour les modèles cinématiquement admissibles sous la forme suivante :

" Il doit exister un champ de tensions, au moins constant dans un groupe d'éléments, tel que le travail virtuel de ces tensions soit nul pour les discontinuité contenues dans le modèle".

Dans la plupart des cas, le patch-test sera vérifié en choisissant un champ constant dans chaque élément. Mais il existe aussi un grand nombre d'éléments qui le vérifient interface par interface, s'assimilant ainsi à des éléments hybrides [3]. Ce dernier cas est d'ailleurs le seul où la vérification du patch test ne dépend pas de la forme de l'élément. Les polynômes orthogonaux y jouent un rôle intéressant.

a) Considérons l'interface entre deux éléments de plaque du troisième degré. Il est nécessaire de transmettre les déplacements  $w$  aux sommets pour assurer le passage des faces de coin; sur l'interface même, choisissons un effort tranchant de Kirchhoff  $K$  constant. On assurera alors la condition

$$\int_0^l K \Delta w \, ds = 0 \quad (3.45)$$

quel que soit  $K$  constant. Le polynôme  $\Delta w$ , de degré  $(n+1)=3$  doit donc être orthogonal au polynôme  $K$ , de degré  $(n-2)=0$ , ce qui signifie qu'il doit s'annuler aux points de Lobatto, soit aux extrémités et au centre de l'intervalle. De même, si  $\Delta w$  est du quatrième degré, et  $K$  du premier, il suffira de connecter aux 4 points de Lobatto (fig. 3.1).

Pour les rotations tangentiels, on choisira un moment d'un degré inférieur à celui des rotations. En vertu des propriétés d'orthogonalité, il suffira donc de connecter les rotations aux points de Gauss, zéros du polynôme de Legendre dont le degré est égal à celui des rotations (fig. 3.2).

b) Considérons à présent l'interface entre deux membranes de degré 3. La connexion parfaite exigerait 4 points de connexion, dont les deux sommets. Si l'on choisit un champ de tensions constant pour vérifier le Patch-test, on se rend compte qu'il suffit de connecter, outre les deux sommets, le milieu de l'interface, point de Lobatto (fig. 3.3). Au quatrième degré, on connecterait de même aux 4 points de Lobatto, assurant ainsi un patch test de degré 1.

## 5.2. Transmission de la variable conjuguée

Les points de GAUSS et de LOBATTO jouissent de propriétés remarquables quant à la transmission de la variable conjuguée à celle que l'on discrétise. Nous allons en donner quelques exemples simples.

### a) Éléments cinématiquement admissibles de membrane

Considérons une interface faisant la frontière entre deux éléments de membrane, que nous noterons par les indices 1 et 2. Nous supposons que ces éléments ont un degré  $k \geq 2$ . Fixons tous les degrés de liberté sauf les déplacements  $u_x$  sur l'interface considérée. On a donc un travail virtuel égal à (fig. 3.4)

$$\int_0^{\ell} (t_x(1) + t_x(2)) \delta u_x ds . \quad (3.46)$$

En l'absence de charge, ce travail doit s'annuler. Or les tractions de surface dérivant des déplacements sont de degré  $(k-1)$ , tandis que  $u_x$  est de la forme

$$\delta u_x = s(\ell - s) P_{k-2}(s) ,$$

où  $P_{k-2}$  est un polynôme arbitraire de degré  $(k-2)$ . La relation (64) se réduit donc à

$$\int_0^{\ell} s(\ell - s) [t_x(1) + t_x(2)] P_{k-2}(s) ds = 0 ,$$

pour tout  $P_{k-2}$ . Cette relation signifie que le polynôme  $t_x(1) + t_x(2)$  doit s'annuler aux points intérieurs de LOBATTO.

Par conséquent, les tractions de surface se transmettent exactement en ces points. On peut évidemment répéter ce raisonnement avec les déplacements  $u_y$  dans la direction  $y$ .

En particulier, pour  $k=2$ , les tractions de surface sont transmises exactement au milieu des interfaces. (fig. 3.5)

#### b) Éléments statiquement admissibles de membrane

Pour des éléments de degré  $k$ , la connexion des tractions de surface se fait en  $(k+1)$  points sur chaque interface. Considérons un élément triangulaire: on peut définir un champ de déplacements continus de degré  $(k+1)$ , vérifiant les conditions cinématiques moyennes. En effet, pour chaque déplacement, on a  $(k+1)$  conditions par interfaces, ce qui donne en tout  $3(k+1)$  conditions. Le champ de déplacements, de degré  $(K+1)$ , possède un nombre

$$n_1 = \frac{(k+2)(k+3)}{2}$$

de paramètres, dont il convient cependant de soustraire le

nombre de "bulles", égal à

$$n_2 = \frac{k_+(k-1)_+}{2}$$

(Les bulles doivent être fixées a priori d'une manière quelconque)

On obtient donc :

$$- \text{ si } k \geq 2 : n_1 - n_2 = \frac{k^2 + k + 6 - k^2 + k}{2} = 3(k+1)$$

$$- \text{ si } k \leq 1 : n_1 - n_2 = \frac{k^2 + 5k + 6}{2}$$

soit en détail :

$$k=0 \rightarrow n_1 - n_2 = 3 = 3(k+1)$$

$$k=1 \rightarrow n_1 - n_2 = 6 = 3(k+1)$$

Par conséquent, après fixation des bulles, il est toujours possible de définir un champ de déplacements de degré  $(k+1)$  vérifiant les conditions cinématiques moyennes.

Sur une interface, les deux éléments adjacents possèdent en général des champs de déplacements de degré  $(k+1)$  différents. Mais leur différence doit annuler les moyennes pondérées jusqu'à l'ordre  $k$ ; par conséquent, elle doit être orthogonale aux polynômes de degré  $\leq k$ , c'est-à-dire qu'il s'agit du polynôme de Legendre de degré  $k$ . En conséquence, la transmission des déplacements est correcte aux points de Gauss (fig. 3.6).

## CHAPITRE 4

### INTEGRATION NUMERIQUE A PLUSIEURS DIMENSIONS

Lorsqu'il s'agit d'intégrer sur une surface ou un volume on peut distinguer essentiellement deux catégories de formules:

- les formules par produit
- les formules directes .

Les premières consistent à transformer l'ensemble d'intégration en un cube et à y effectuer successivement l'intégration numérique par rapport à chacune des variables; les secondes sont des formules obtenues directement pour la géométrie considérée, sans faire appel aux formules unidimensionnelles. Nous donnerons ici quelques méthodes, en les classant d'après la forme de l'ensemble. Cette liste n'a rien d'exhaustif. Pour un exposé plus complet, on pourra consulter STROUD [10] .

#### 1. Intégration sur un cube

Sur un cube il est naturel d'utiliser une formule par produits. On écrit simplement

$$I(f) = \int_V f(x) dx = \int_0^1 dx_n \int_0^1 dx_{n-1} \dots \int_0^1 f(x) dx_1 ,$$

(4.1)

et on remplace chacune des intégrales par une formule numérique, ce qui donne

$$I(f) = \sum_{i_n} \sum_{i_{n-1}} \dots \sum_{i_1} H_{i_1} H_{i_2} \dots H_{i_n} f(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n})$$

(4.2)

où les  $H_i$  et les  $\xi_i$  sont respectivement les points et les poids d'une formule numérique. Si la formule numérique utilisée est de degré  $d$ , la formule par produit permettra d'intégrer tous les produits de monômes dont chacun est de degré  $d$  au plus. Il va de soi qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser la même formule pour chaque variable. Pour obtenir un minimum de points, on utilisera de préférence des formules de Gauss; mais s'il convient en outre de calculer des intégrales superficielles, les formules de Lobatto peuvent être plus simples, car elles suppriment la nécessité d'utiliser deux réseaux de points (fig. 4.1). Le tableau suivant donne le nombre de points nécessaire pour obtenir un degré donné sur un carré:

Tableau 4.1. Nombre de points pour un carré		
degré $d$ (*)	GAUSS	LOBATTO
1	1	4
3	4	9
5	9	16
7	16	25
9	25	36
11	36	49
13	49	64
15	64	81
17	81	100

(\*) pour  $x^m y^n$ ,  $d = \max (m,n)$

## 2. Intégration sur un quadrilatère convexe

Le cas du quadrilatère convexe se ramène aisément à celui du carré par la transformation

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_3 v + \alpha_4 u v \quad (4.3)$$

$$y = \beta_1 + \beta_2 u + \beta_3 v + \beta_4 u v ,$$

en imposant la correspondance des sommets homologues (fig. 4.2). Il est clair que pour  $v = \text{cte}$ ,  $x$  et  $y$  varient linéairement. De même pour  $u = \text{cte}$ . On peut donc dire que les côtés du carré correspondent aux côtés du quadrilatère. Les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont aisés à obtenir : des équations

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 \\ x_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ x_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ x_4 &= \alpha_1 + \alpha_3 \quad , \end{aligned} \quad (4.4)$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1 \\ \alpha_2 &= x_2 - x_1 = x_2 - \alpha_1 \\ \alpha_3 &= x_4 - x_1 = x_4 - \alpha_1 \\ \alpha_4 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = x_3 - x_4 - \alpha_2 ; \end{aligned} \quad (4.5)$$

les mêmes relations gouvernent le calcul des  $\beta_i$ . Le jacobien de la transformation vaut

$$\begin{aligned}
 |J| &= \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = |(\alpha_2 + \alpha_4 v)(\beta_3 + \beta_4 u) - (\alpha_3 + \alpha_4 u)(\beta_2 + \beta_4 v)| = \\
 &= |(\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) + (\alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2)u + (\alpha_4 \beta_3 - \alpha_3 \beta_4)v|
 \end{aligned}$$

(4.6)

Il s'agit d'une fonction linéaire de u et v. On a alors

$$I(f) = \int_S f(x) dx dy = \int_0^1 f(x(u,v), y(u,v)) |J(u,v)| dv,$$

ce que l'on calcule numériquement par

$$\tilde{I}(f) = \sum_i \sum_j H_i H_j f[x(\xi_i, \xi_j), y(\xi_i, \xi_j)] |J(\xi_i, \xi_j)|,$$

(4.7)

$\xi_i$  et  $H_i$  étant comme ci-dessus les points et poids de la formule unidimensionnelle sur laquelle on se base.

Quel est le degré de cette formule ? Pour répondre à cette question, on remarquera qu'un monôme  $x^m y^n$  se transforme en

$$(\alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_3 v + \alpha_4 uv)^m (\beta_1 + \beta_2 u + \beta_3 v + \beta_4 uv)^n \tag{4.8}$$

Il contiendra donc, comme termes de degré le plus élevé,  $u^{m+n} v^{m+n}$ . Il faut encore tenir compte du jacobien, qui est de degré 1, si bien que l'intégration de  $x^m y^n$  implique celles de  $u^{m+n+1} v^{m+n}$  et de  $u^{m+n} v^{m+n+1}$ . Par conséquent, la formule (4.7) permet d'intégrer les monômes de degré total (d-1) à partir de formules unidimensionnelles de degré d. Cependant, la transformation des rectangles et parallélogrammes en carré est linéaire affine, et il n'y a pas de perte de degré. Pour ces formes géométriques simples, n se référera au tableau (4.1) pour déterminer le nombre de points nécessaires. Le nombre de points nécessaires dans le cas général

est donné par le tableau suivant

Tableau 4.2		Nombre de points pour un quadrilatère	
degré d (*)	GAUSS	LOBATTO	
0	1	4	
2	4	9	
4	9	16	
6	16	25	
8	25	36	
10	36	49	
12	49	64	
14	64	81	
16	81	100	
(*) pour $x^m y^n$ , $d = m+n$			

### 3. Intégration sur un triangle

La formule par produit sur le triangle s'obtient directement par dégénérescence du quadrilatère, en posant

$$x_1 = x_4, \quad y_1 = y_4 \quad (4.9)$$

dans les relations (4.5). Il vient alors

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1 \\ \alpha_2 &= x_2 - x_1 \\ \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_4 &= x_3 - x_2, \end{aligned} \quad (4.10)$$

et ces relations restent valables pour obtenir les coefficients  $\beta_i$  en fonction des  $y_i$ . Le triangle est alors représenté par les équations paramétriques

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_4 uv \quad (4.11)$$

$$y = \beta_1 + \beta_2 u + \beta_4 uv .$$

La correspondance entre le triangle et le carré de référence est illustrée par la figure (4.3). Le jacobien de la transformation s'obtient en posant  $\alpha_4 = 0$ ,  $\beta_4 = 0$  dans la formule (4.6) Il vaut

$$|J| = |\alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2| \cdot u = |(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)| u . \quad (4.12)$$

On constate que  $|J| = 0$  pour  $u=0$ , c'est-à-dire que le point 1 est singulier. Cette singularité provoque une grande concentration de points au voisinage de ce sommet (fig. 4.4.) On peut améliorer quelque peu la situation en utilisant une formule classique pour la variable  $v$ , et une formule définie avec le poids  $u$  pour la variable  $u$ . Cette façon de faire permet, d'une part, de gagner un degré, d'autre part, d'obtenir des points un peu mieux distribués dans les formules de Gauss. Dans les formules de Lobatto, le sommet 1 disparaît puisque le poids  $y$  est nul. Le nombre de points nécessaire pour les différents formules est donné par le tableau suivant :

degré $d$ (*) formule simple	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
degré $d$ (*) formule améliorée	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Gauss	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Lobatto	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110
(*) Pour $x^m y^n$ , $d = m+n$										

Face à ces formules, certes très efficaces, mais correspondant à des distributions de points à tout le moins inesthétiques, on est tenté de chercher des formules directes. Il convient de citer tout d'abord l'extension de la méthode de Newton-Cotes au triangle (et plus généralement au simplexe). Elle conduit à une distribution de points parfaitement symétrique (fig. 4.5), mais pour obtenir un degré  $d$ , il faut  $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$  points, ce qui donne les résultats suivants :

Tableau 4.4. Nombre de points de Newton-Cotes sur un triangle															
Degré $d$ (*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
nb de pts	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136
* Pour $x^m y^n$ , $d = m+n$															

La théorie de ces formules est exposée en détail dans le rapport [7]. Mais outre le fait qu'elles nécessitent un plus grand nombre de points que les formules par produits, ces formules n'ont pas nécessairement leurs poids positifs.

Il existe quelques formules de degré élevé comportant moins de points que les méthodes par produits, telles les formules de HAMMER [12]. Mais jusqu'à présent, on n'a pas encore trouvé de méthode permettant de construire de telles formules pour un degré quelconque; en outre, elles n'ont pas toutes tous leurs poids positifs.

Enfin, lorsqu'il s'agit d'intégrer des polynômes, les formules analytiques définies au chapitre 1 sont à la fois simples et performantes.

#### 4. Intégration sur un polygone convexe

Pour effectuer l'intégration sur un polygone convexe, on peut décomposer celui-ci en triangles. Dans chacun de ces triangles, on utilisera une formule définie ci-dessus. Supposons qu'il s'agisse de formules de Gauss et de Lobatto.

- Par Gauss, il faut autant de fois le nombre de points d'un triangle, qu'il y a de côtés
- Par Lobatto, les points situés sur les interfaces n'apparaissent qu'une fois.

Tenant compte de ces considérations, le nombre  $N$  de points nécessaires pour obtenir un degré  $d$  est donné par

$$N = C f(d) \quad (4.13)$$

où  $C$  est le nombre de côtés du polygone, tandis que la fonction  $f(d)$  est donnée dans le tableau suivant :

Tableau 4.4. - Valeurs de $f(d)$										
degré $d$ (*) (formules simples)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
degré $d$ (*) (formules améliorées)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$f(d)$ Gauss	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$f(d)$ Lobatto	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
(*) Pour $x^m y^n$ , $d = m+n$										

Il s'agit d'un des rares cas où les formules de Lobatto sont aussi avantageuses que celles de Gauss. Les distributions respectives de points sont représentées à la figure 4.6.

CHAPTRE 5

ORGANISATION DES OPERATIONS D'INTEGRATION DANS LES ELEMENTS FINIS

Ce chapitre se propose de décrire la manière de calculer la matrice de raideur d'un élément fini. Pour la matrice des masses, les charges thermiques, etc ..., les procédures sont fort semblables et se déduisent d'un façon évidente de celles que nous décrivons ici.

1. Méthode de traitement automatique des polynômes

Nous considérons ici le cas d'un élément bidimensionnel pour garder un formalisme suffisamment simple. Un polynôme complet de degré k peut être ordonné sous la forme

$$(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \dots + \alpha_n y^k \tag{5.1}$$

où

$$n = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \tag{5.2}$$

On peut encore le considérer comme le produit scalaire du vecteur r défini par

$$r^T = (1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, y^k) \tag{5.3}$$

par le vecteur a des coefficients :

$$a^T = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \tag{5.4}$$

Si la mémorisation du vecteur a ne pose aucune difficulté-il s'agit de scalaires,-il n'en va pas de même de celle du vecteur

r de monômes, Pour celle-ci, on peut procéder de la façon suivante : le vecteur r est représenté par un ensemble de 3 vecteurs  $v_r$ ,  $i_r$ ,  $j_r$ , contenant respectivement des coefficients multiplicatifs des monômes, leurs exposants en x et leurs exposants en y. Ainsi, le vecteur r a pour représentation l'ensemble des trois vecteurs:

$$\begin{aligned} v_r^T &= (1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1) \\ i_r^T &= (0, 1, 0, 2, 1, 0, \dots, 0) \\ j_r^T &= (0, 0, 1, 0, 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (5.5)$$

La correspondance entre  $\phi(x)$ ,  $u_r$ ,  $i_r$ ,  $j_r$  et a est alors donnée par la formule

$$\phi(x) = \sum_{\ell=1}^n a(\ell) v_r(\ell) x^{i_r(\ell)} y^{j_r(\ell)}, \quad (5.6)$$

où l'on écrit le numéro de la composante d'un vecteur entre parenthèses.

Ce formalisme peut être appliqué directement sur ordinateur. En particulier, les opérations de dérivations sont très simples: si l'on appelle  $r_x$  la dérivée par rapport à x du vecteur r,  $v_{r_x}$ ;  $i_{r_x}$  et  $j_{r_x}$  les vecteurs qui la représentent, ils s'obtiennent par les instructions

$$\left[ \begin{array}{l} v_{r_x}(i) \leftarrow v_r(i) \cdot i_r(i) \\ i_{r_x}(i) \leftarrow i_r(i) - 1 \\ j_{r_x}(i) \leftarrow \begin{cases} j_r(i) & \text{si } i_r(i) \neq 0 \\ 0 & \text{si } i_r(i) = 0 \end{cases} \end{array} \right. , \quad (5.7)$$

où la flèche signifie que l'on attribue à la variable du premier membre la valeur donnée au second. Effectivement, si l'on applique cet algorithme aux vecteurs (5.5), on obtient

$$\left[ \begin{array}{l} v_{r_x}^T = (0, 1, 0, 2, 1, \dots, 0) \\ i_{r_x}^T = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0) \\ j_{r_x}^T = (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) \end{array} \right. \quad (5.8)$$

La dérivée de  $\phi$  est alors donnée par  $r_x^T a$ , soit

$$\begin{aligned} \phi_x(x) &= \sum_{\ell=1}^n a(\ell) v_{r_x}(\ell) x^{i_r(\ell)} y^{j_r(\ell)} \\ &= 0.\alpha_1 + \alpha_2 + 0.\alpha_3 + 2 \alpha_4 x + \alpha_5 y + \dots + 0.\alpha_n, \end{aligned} \quad (5.9)$$

résultat que l'on vérifie aisément à partir de (5.1). On remarquera que cette opération s'est faite indépendamment du vecteur  $a$ . En particulier, celui-ci peut être constitué d'un ensemble de variables inconnues.

Dans les modèles cinématiquement admissibles, on donne aux déplacements la forme

$$u = M a, \quad (5.10)$$

où  $a$  est un vecteur de paramètres, tandis que  $M$  est une matrice de fonctions. En pratique, il s'agit d'une matrice de monômes, c'est-à-dire contenant des vecteurs comme  $r$  défini en (5.3) On représente donc cette matrice par une matrice de coefficients  $v_M$ , et deux matrices d'exposants  $i_M$  et  $j_M$ .

Le calcul des déformations n'est en fait qu'une opération de dérivation, et on peut écrire

$$\partial u = \partial M a = B a, \quad (5.11)$$

où  $\partial$  est l'opérateur de dérivation en question. La matrice  $B$  est représentée par sa matrice de coefficients  $v_B$  et ses matrices d'exposants  $i_B$  et  $j_B$ , ces trois matrices étant obtenues par application de la procédure (5.7).

On définit enfin une matrice de Hooke  $H$ , également variable dans l'élément, sous la forme

$$H = \sum_{\ell} H(\ell) \begin{matrix} x^{i_H(\ell)} & y^{j_H(\ell)} \end{matrix}, \quad (5.12)$$

où chaque  $H(\ell)$  est le coefficient d'un terme du développement polynomial de la matrice. L'énergie de déformation vaut alors

$$U = a^T \left( \int_S B^T H B dS \right) a = a^T I a, \quad (5.13)$$

avec

$$I = \int_S B^T H B dS \quad (5.14)$$

Or

$$B_{pq} = v_B(p,q) \cdot \begin{matrix} x^{i_B(p,q)} & y^{j_B(p,q)} \end{matrix}$$

$$H_{sp} = \sum_{\ell} H_{sp}(\ell) \begin{matrix} x^{i_H(\ell)} & y^{j_H(\ell)} \end{matrix},$$

si bien que

$$\begin{aligned}
 I_{pq} &= \sum_{rs\ell} \int_S B_{rp} H_{rs} B_{sq} dS = \\
 &= \sum_{rs\ell} v_B(r,p) v_B(s,q) H_{rs}(\ell) \int_S x^c y^d dS \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 c(p,q,r,s,\ell) &= i_B(r,p) + i_B(s,q) + i_H(\ell) \\
 d(p,q,r,s,\ell) &= j_B(r,p) + j_B(s,q) + j_H(\ell). \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Si l'on définit une matrice des intégrales A telle que

$$A(c+1,d+1) = \int_S x^c y^d dS, \quad (5.17)$$

matrice que l'on peut calculer une fois pour toutes, on obtient l'expression suivante, tout à fait indépendante du type d'élément:

$$I_{pq} = \sum_{rs\ell} v_B(r,p) v_B(s,q) H_{rs}(\ell) A(c,d) \quad (5.18)$$

Ce calcul peut donc faire l'objet d'un sous-programme général. On constate que l'intégration se réduit à l'évaluation de la matrice des intégrales de l'élément. Par conséquent, des relations de symétrie ou de récurrence, comme celles que nous avons rencontrées au chapitre 1 peuvent être très utiles.

Le passage aux déplacements généralisés q se fait alors par l'intermédiaire d'une matrice de connexion, telle que

$$q = Ca \quad (5.20)$$

La matrice de raideur en termes de ces déplacements est donnée par

$$K = C^{-T} IC^{-1} \quad (5.20)$$

Cette méthode, extrêmement souple, permet d'utiliser n'importe quelle méthode d'intégration. En outre, elle permet de programmer des familles d'éléments ayant une même géométrie mais de degrés différents. La structure systématique de la matrice des intégrales permet d'effectuer les calculs d'une manière particulièrement économique: pratiquement, s'il s'agit d'intégration numérique ce calcul nécessite, pour chaque, point de Gauss, une multiplication par composante de la matrice S'il y en a  $n_a$  et si  $N$  est le nombre de points de Gauss, on obtient donc

$$n_a \times N \quad (5.21)$$

multiplications pour la construction de la matrice des intégrales Il reste à effectuer l'opération (5.18): si  $n_b$ ,  $n$  et  $n_h$  sont respectivement le nombre de lignes de la matrice  $B$ , le nombre de composantes du vecteur  $a$ , et le nombre de termes du développement polynomial de la matrice  $H$ , elle nécessite

$$n_b^2 \cdot n^2 \cdot n_h \quad (5.22)$$

multiplications. Si l'on néglige les multiplications de nombres entiers, la construction de la matrice  $v_B$  exige généralement 4 à 6 fois  $n$  multiplications. Au total, on obtient donc un nombre

$$m_1 = n_a \cdot N + n_b^2 \cdot n^2 \cdot n_h + 6n \quad (5.23)$$

de multiplications. On remarquera que ce nombre ne dépend qu'assez peu du nombre  $N$  de points d'intégration.

Mais cette méthode ne se prête pas, du moins sous la forme présentée ci-dessus à la construction des éléments isoparamétriques.

## 2. Méthode d'intégration numérique du produit $B^T H B$

Cette méthode, qui ne s'applique que dans le cas de l'intégration numérique, consiste à calculer les valeurs numériques des matrices B et H aux différents points d'intégration, à les multiplier par les poids, et à faire la somme de ces différentes contributions. Chaque produit  $B^T H B$  nécessite

$$n_b \cdot n (n_b + n) \quad (5.24)$$

opérations; le résultat doit être multiplié par le poids, ce qui fait encore  $n^2$  opérations. On a donc au total

$$N n_b^2 \cdot n + n^2 (n_b + 1) \quad (5.25)$$

opérations. Quant à l'évaluation des matrices B et H, on peut la faire à partir d'une matrice de monômes, ce qui nécessitera un certain nombre  $n_a$  de multiplications.

Finalement, on obtient donc

$$m_2 = N \left[ n_a + n_b^2 \cdot n + n^2 (n_b + 1) \right] \quad (5.24)$$

A l'inverse de  $m_1$ ,  $m_2$  dépend fortement du nombre de points d'intégration. Considérons par exemple un élément de membrane d'épaisseur constante. On a  $n_b = 3$ ,  $n_h = 1$  et

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 &= N \quad 3n + 4n^2 - 9n^2 - 4n \\ &= (4N-9) n^2 + (3N-4)n \end{aligned}$$

On s'aperçoit que si  $N \geq 3$ ,  $m_2 > m_1$ , c'est-à-dire que la deuxième méthode nécessite plus de calculs. Ce cas est assez général et l'utilisation de la deuxième méthode nécessite l'emploi d'une formule à haut degré pour rester économique.

### 3. Cas des éléments isoparamétriques

Dans les éléments isoparamétriques, les coordonnées et les déplacements sont exprimés par des polynômes de même degré des paramètres. Plaçons-nous dans un cas bidimensionnel pour simplifier les écritures; on aura alors

$$\begin{aligned}x &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 \\y &= \alpha_7 + \alpha_8 \xi + \alpha_9 \eta + \alpha_{10} \xi^2 + \alpha_{11} \xi \eta + \alpha_{12} \eta^2 \\u &= \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi^2 + \beta_5 \xi \eta + \beta_6 \eta^2 \\v &= \beta_7 + \beta_8 \xi + \beta_9 \eta + \beta_{10} \xi^2 + \beta_{11} \xi \eta + \beta_{12} \eta^2\end{aligned}\tag{5.25}$$

Appêlons

$$J = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\tag{5.26}$$

la matrice jacobienne de la transformation. Le calcul des déformations se fait alors à l'aide de la formule

$$\begin{vmatrix} D_x \\ D_y \end{vmatrix} = J^{-1} \begin{vmatrix} D_\xi \\ D_\eta \end{vmatrix}\tag{5.27}$$

La matrice jacobienne inverse est composée de fractions rationnelles, et il n'est donc pas possible de calculer exactement l'énergie de déformation. La question qui se pose alors consiste à savoir quelle précision il faut exiger de la formule d'intégration.

Pour ce qui est de la convergence, on se réfère généralement à un critère dû à B. IRONS [8]. Les forces de l'élément sont données par

$$g = \left( \int_S B^T H B dS \right) a ;\tag{5.28}$$

les modes de déformation constante sont toujours présents dans un élément isoparamétrique. Cela étant, le critère de B. IRONS stipule que les forces correspondant à ces modes de déformation constante, soit

$$\int_S H B dS \quad (5.29)$$

doivent être intégrées exactement. Si l'on suppose que la matrice de Hooke est constante, cela revient à dire que les déformations doivent être intégrées exactement. Or ce calcul exige l'évaluation d'intégrales du type

$$\int_K \frac{1}{|J|} \{ \min_{ij} J \} \{ D_\xi u \} |J| d\xi d\eta = \int_K \{ \min_{ij} J \} \{ D_\xi u \} d\xi d\eta$$

Mais du fait de l'identité de forme des déplacements et des coordonnées, cette intégrale comporte les mêmes termes que le jacobien, ce qui signifie que le critère de B. IRONS revient à exiger que le volume de l'élément soit intégré exactement.

Ce critère admet une interprétation variationnelle; le principe général à trois champs contenant toutes les équations de l'élasticité peut s'écrire

$$U(e) - \int_V s^T (e - \partial u) dV - P(u) \quad \text{stat} \quad , (5.30) \\ u, s, c$$

où  $U(e)$  représente l'énergie de déformation,  $P(u)$  le travail des charges,  $e$  les déformations,  $s$  les tensions. La variation des tensions  $s$  conduit à l'équation

$$\int_V \delta s^T (e - \partial u) dV = 0. \quad (5.31)$$

Si l'on choisit un champ constant dans chaque élément, on obtient l'équation

$$\int_V e \, dV = \int_V \partial u \, dV \quad (5.32)$$

Définissons le champ de déformations  $e$  comme l'interpolation de  $u$  aux points d'intégration : l'équation (5.32) équivaut alors au critère de B. IRONS. Si elle est vérifiée, le principe (5.30) se ramène au principe simplifié

$$U(e) - P(u) \text{ stat.} \quad (5.33)$$

qui, vu la liaison entre  $e$  et  $u$ , s'assimile au principe de variation des déplacements. Enfin, on remplace l'énergie de déformation par une autre fonctionnelle

$$U^*(e) = \sum_i H_i U [e(x_i)] , \quad (5.34)$$

$H_i$  et  $x_i$  étant les poids et points d'intégration. Lorsque le nombre d'éléments croît,  $U^* \rightarrow U$ .

Mais il existe une deuxième limitation: si le nombre de points d'intégration est trop faible, certains modes peuvent être totalement dépourvus d'énergie, ce qui crée une singularité artificielle de la matrice de raideur. Considérons par exemple un champ thermique bilinéaire sur un rectangle (fig. 5.1) . On a

$$\begin{aligned} T &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha_3 + \alpha_4 x , \end{aligned} \quad (5.31)$$

si bien que selon le critère d'IRONS, il suffit d'un seul point de Gauss, situé en (0,0) pour effectuer l'intégration. Mais alors, le paramètre  $\alpha_4$  est dépourvu d'énergie, car  $x$  et  $y$  s'annulent à l'origine. On est donc obligé d'utiliser une formule à 4 points.

Dans ce même ordre d'idées, l'utilisation d'une formule comportant le nombre minimum de points pour éviter les modes dépourvus d'énergie peut conduire à des aberrations si tous les poids ne sont pas positifs. Supposons par exemple que l'on intègre une barre du troisième degré à l'aide d'une formule de Newton-Cotes ouverte à trois points (fig. 5.2). Les poids sont  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ . La déformation s'écrit en général

$$\varepsilon = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \quad (5.34)$$

Elle est du second degré, et sera donc correctement intégrée; elle est parfaitement définie par ses valeurs aux trois points; mais le mode de déformation

$$\varepsilon = \frac{(x - \frac{1}{4})(x - \frac{3}{4})}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})(\frac{1}{2} - \frac{3}{4})}$$

a une énergie égale à  $-\frac{1}{3} E \Omega$ , valeur négative! Ce résultat est tout à fait inadmissible, et illustre la nécessité d'utiliser une formule à poids positifs lorsque le nombre de points d'intégration est réduit au strict minimum.

## ANNEXE 1

### REMARQUE SUR LE CALCUL DES POINTS DE GAUSS

#### A.1. Influence de l'erreur sur les coefficients du polynôme dont on cherche les zéros

Le calcul des coefficients du polynôme ne peut être qu'approché; dans le meilleur des cas, on ne pourra que les obtenir à la précision de la machine. Quel est l'influence de cette erreur sur la valeur des zéros? Pour répondre à cette question, étudions le cas plus général d'une fonction dépendant, outre de la variable  $x$ , de  $n$  paramètres  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Nous la noterons  $f(x; \alpha)$ ; sa dérivée sera notée  $f'(x)$ , tandis que la notation  $D_i f$  sera utilisée pour représenter la dérivée de  $f(x; \alpha)$  par rapport au paramètre  $\alpha_i$ .

Cela étant, si  $x_0$  est un zéro de  $f(x; \alpha)$ , on a

$$f(x_0; \alpha) = 0. \quad (\text{A.1.1})$$

Du fait des erreurs numériques sur les coefficients, on recherche en réalité le zéro  $(x_0 + \Delta x_0)$  tel que

$$f(x_0 + \Delta x_0; \alpha + \Delta \alpha) = 0. \quad (\text{A.1.2})$$

Au premier ordre, cette équation s'écrit

$$f(x_0; \alpha) + f'(x_0; \alpha) \Delta x_0 + \sum_i D_i f \Delta \alpha_i = 0$$

ce qui, tenant compte de la définition (A.1.1) de  $x_0$ , entraîne

$$\Delta x_0 = - \frac{\sum_i D_i f(x_0; \alpha) \Delta \alpha_i}{f'(x_0; \alpha)} \quad (\text{A.1.3})$$

On peut obtenir une borne supérieure de cette valeur en faisant usage de l'inégalité de SCHWARZ-CAUCHY

$$\sum_i a_i b_i \leq \sqrt{\sum_i a_i^2} \sqrt{\sum_i b_i^2},$$

ce qui donne

$$|\Delta x_0| \leq \frac{\sqrt{\sum_i (D_i f(x_0; \alpha))^2} \sqrt{\sum_i \Delta \alpha_i^2}}{|f'(x_0; \alpha)|} \quad (\text{A.1.4})$$

Supposons que l'erreur relative sur tous les paramètres soit du même ordre de grandeur, c'est-à-dire que

$$\left| \frac{\Delta \alpha_i}{\alpha_i} \right| \leq \varepsilon \quad (\text{A.1.5})$$

L'expression (A.1.3) prend alors la forme

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = - \frac{\sum_i \alpha_i D_i f(x_0; \alpha)}{x_0 f'(x_0; \alpha)} \varepsilon$$

Recourant à la même majoration, on obtient

$$\left| \frac{\Delta x_0}{x_0} \right| \leq \eta(x_0; \alpha) \varepsilon, \quad (\text{A.1.6})$$

où apparaît le coefficient d'amplification

$$\eta(x_0; \alpha) = \frac{\sqrt{\sum_i (D_i f(x_0; \alpha))^2} \sqrt{\sum_i \alpha_i^2}}{|x_0| |f'(x_0; \alpha)|} \quad (\text{A.1.7})$$

Considérons par exemple la fonction

$$f(x; \pi) = \sin \pi x.$$

Quelle est l'erreur sur le zéro situé en  $x=1$  si la valeur de  $\pi$  est légèrement altérée? On a

$$\frac{\partial f}{\partial \pi} = [x \cos \pi x]_{x=1} = \cos \pi$$

$$f'(x) = \left| \pi \cos \pi x \right|_{x=1} = \pi \cos \pi .$$

Il vient donc

$$\eta(1; \pi) = \frac{|\cos \pi| |\pi|}{|\pi \cos \pi|} = 1,$$

ce qui signifie que le facteur d'amplification est égal à 1. Par contre, pour le zéro situé à l'origine, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \pi} = \left| x \cos \pi x \right|_{x=0} = 0$$

$$f'(x) = \left| \pi \cos \pi x \right|_{x=0} = \pi .$$

L'erreur relative n'a pas de sens dans ce cas-ci. Mais l'erreur absolue, donnée par la formule (A.1.4) vaut

$$\Delta x_0 = \frac{0 \cdot \pi}{\pi} \varepsilon = 0 ,$$

ce qui s'observe d'ailleurs aisément, puisque, quel que soit le nombre  $\beta$ , on a toujours eu  $x=0$

$$\sin \beta x = 0 .$$

Considérons à présent un polynôme de la forme

$$P_n(x; \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k + x^n \quad (\text{A.1.8})$$

On a visiblement

$$D_i P_n(x_0; \alpha) = x_0^i ,$$

ce qui entraîne

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_0^{2i} = \frac{1-x_0^{2n}}{1-x_0^2} .$$

Dès lors, la formule (A.1.4) devient

$$|\Delta x_0| \leq \sqrt{\frac{1-x_0^{2n}}{1-x_0^2}} \frac{\sqrt{\sum_i \Delta \alpha_i^2}}{|P'_n(x_0)|}, \quad (\text{A.1.9})$$

tandis que le facteur d'amplification de l'erreur relative est donné par

$$\eta(x_0; \alpha) = \sqrt{\frac{1-x_0^{2n}}{1-x_0^2}} \frac{\sqrt{\sum_i \alpha_i^2}}{|x_0| |P'_n(x_0)|} \quad (\text{A.1.10})$$

Illustrons cette formule sur un exemple simple: soit le trinôme

$$f(x) = x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

Nous supposons que les coefficients sont calculés avec trois décimales, ce qui donne

$$\bar{\alpha}_1 = -0,833 \quad , \quad \bar{\alpha}_2 = 0,167$$

L'erreur relative est donc inférieure à  $10^{-3}$ . Le trinôme considéré admet la racine  $x_0 = \frac{1}{2}$ . Evaluons l'erreur prévisible sur cette racine :

$$\cdot \sqrt{\frac{1-\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{4}}} = \frac{15}{16} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{4} \quad ; \quad \sqrt{\frac{5}{4}} = 1,118$$

$$\cdot \sum_i \alpha_i^2 = \frac{15}{36} + \frac{1}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

$$\cdot f'(\frac{1}{2}) = \left| 2x - \frac{5}{6} \right|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

Il vient donc

$$\eta(x_0, \epsilon) = 1,118 \cdot \frac{4}{9} \cdot 6 \cdot 2 = 5,862$$

L'erreur relative est donc pratiquement multipliée par 6.  
 Pour l'erreur absolue, on obtient

$$|\Delta x_0| \leq \eta \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{2} = 5,862 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 2,981 \cdot 10^{-3}.$$

Les racines du trinôme approché sont données par

$$\bar{x} = \frac{0,833 \pm \sqrt{0,833^2 - 4 \cdot 0,167}}{2};$$

choisissant la plus grande, on obtient

$$\bar{x}_0 = 0,49695029,$$

au lieu de 0,5. L'erreur est donc

$$\Delta x_0 = 0,00305,$$

et on constate que la précision était assez correcte.

Choisissons à présent un exemple plus concret : il s'agit en l'occurrence du polynôme  $\phi_9$  de la série des polynômes orthogonaux dans l'intervalle (0,1). Evaluons l'erreur prévisible sur le zéro  $x_0 = 0,5$ . Les coefficients du polynôme sont donnés approximativement par

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= - 0,0000256 \\ \alpha_2 &= 0,00185 \\ \alpha_3 &= - 0,04724 \\ \alpha_4 &= 0,38009 \\ \alpha_5 &= - 1,8529 \\ \alpha_6 &= 5,18823 \\ \alpha_7 &= - 8,6470 \\ \alpha_8 &= 8,4706 \\ \alpha_9 &= - 4,5000 \end{aligned} \tag{A.1.11}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \cdot \phi'_n(0,5) &= \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{3}{4} \alpha_4 + \frac{1}{2} \alpha_5 + \frac{5}{16} \alpha_6 + \frac{7}{64} \alpha_8 + \frac{1}{16} \alpha_9 + \frac{9}{256} \\ &= 0,0766975 \end{aligned}$$

$$\cdot \sqrt{\sum_i \alpha_i^2} = 14,04526 =$$

$$\cdot \sqrt{\frac{1-x_o^{2n}}{1-x_o^2}} \approx \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{81}}} = \sqrt{\frac{81}{80}},$$

ce qui conduit au facteur d'amplification

$$\eta = 368,5$$

On remarquera qu'il s'agit d'un facteur considérable. Ainsi, si l'on connaît les coefficients à  $10^{-6}$  près, on aura une erreur relative de  $6,8 \cdot 10^{-4}$ . Ce résultat montre qu'il est nécessaire de calculer les coefficients des polynômes avec la plus grande précision, sous peine de modifier sensiblement la valeur des zéros.

## A.2. Recherche des zéros par la méthode de division binaire de l'intervalle

Supposons que l'on connaisse deux points  $x_1 < x_2$  encadrant un seul zéro. De tels encadrements peuvent être obtenus assez aisément à l'aide d'un quadrillage grossier de l'intervalle  $(a,b)$  où sont situés les zéros. Comme tous les zéros sont simples, on a automatiquement

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0. \quad (\text{A.2.1})$$

Considérons alors le point

$$x^* = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (\text{A.2.2})$$

et calculons-y la valeur de la fonction. Si  $f(x_1).f(x^*) < 0$ , on est certain que le zéro est contenu dans l'intervalle  $(x_1, x^*)$ ; dans le cas contraire, il se trouve dans l'intervalle  $(x^*, x_2)$ . On se ramène ainsi à un intervalle deux fois plus petit. Si le calcul de la fonction est parfait, le nombre de division nécessaire pour obtenir le zéro avec une erreur absolue égale à  $2^{-p}$  est donné par l'équation

$$(x_2 - x_1) 2^{-n} = 2^{-p},$$

soit

$$2^{n-p} = x_2 - x_1,$$

ou encore

$$n-p = \log_2 (x_2 - x_1),$$

soit

$$n = p + \frac{\log(x_2 - x_1)}{0,30103}. \quad (\text{A.2.3})$$

Prenant par exemple  $p = 56$ , et  $(x_2 - x_1) = 10^{-2}$ , on a

$$n = 56 - \frac{2}{0,30103} \approx 53$$

Mais cette évaluation est purement théorique: en réalité, du fait des erreurs d'arrondi, il est impossible d'arriver à une telle précision sur le zéro. Examinons d'abord ce qui se produit si, par malheur, le signe de  $f(x^*)$  est faux.

Supposons que le zéro soit effectivement entre  $x_1$  et  $x^*$  : on le cherchera entre  $x^*$  et  $x_2$  et, dans le meilleur des cas, on convergera entre  $x^*$  au lieu du vrai zéro . La précision de la méthode dépend donc entièrement du seuil à partir duquel les erreurs d'arrondi ont le même ordre de grandeur que la fonction. Nous désignerons ce seuil par l'expression "seuil de signification", car il désigne la demi-largeur de l'intervalle où la valeur de la fonction est principalement déterminée par les erreurs d'arrondi.

L'évaluation du seuil de signification d'un polynôme en  $x_0$  suppose que l'on suive exactement le déroulement des calculs. En pratique, on calcule la valeur du polynôme

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$$

se décompose en les étapes suivantes :

- initialisation

$$f \leftarrow \alpha_n$$

- de  $k = 1$  à  $n$  :

$$f \leftarrow f \cdot x + \alpha_{n-k}$$

Pour évaluer les erreurs d'arrondi en un point  $x$ , on peut procéder comme suit:

- initialisation

$$f \leftarrow \alpha_n$$

$$\Delta f \leftarrow |\alpha_n| \cdot 2^{-p}$$

- de  $k = 1$  à  $n$  :

$$f \leftarrow fx + \alpha_{n-k}$$

$$A \leftarrow |\Delta f| \cdot |x| + |\alpha_{n-k}| 2^{-p}$$

$$B \leftarrow |f| \cdot 2^{-p}$$

$$\Delta f \leftarrow \sup (A.B)$$

Les calculs sont repris, pour le polynôme défini par les coefficients donnés en (A.1.11), dans le tableau ci-dessous.

Propagation de l'erreur dans le calcul	
$p = 56$	$x_0 = 0,5$ $2^{-p} = 1,38778784 \cdot 10^{-17}$
coefficients	$10^{17} \cdot \Delta f$
1	1,39
- 4,5	6,94
8,4706	15,2
- 8,6470	19,6
5,18823	17,0
- 1,8529	11,07
0,38009	6,06
- 0,04724	3,10
0,0185	1,55
- 0,0000256	0,776
erreur finale: $7,75806 \cdot 10^{-18}$	

On a donc  $f = 7,75806 \cdot 10^{-18}$

Le seuil de signification peut alors être déterminé par l'inégalité suivante :

$$|f(x)| \approx |x-x_0| |f'(x_0)| \leq \Delta f ,$$

soit

$$|x-x_0| \leq \frac{\Delta f}{|f'(x_0)|}$$

Dans notre cas, on obtient, compte tenu de la valeur (A.1.12) de la dérivée

$$|x-x_0| \leq \frac{7,75806 \cdot 10^{-18}}{7,66975 \cdot 10^{-2}} = 1,011514065 \cdot 10^{-16} \approx \underline{2^{-53}}$$

L'erreur relative sur le zéro est donc

$$\frac{|x-x_0|}{|x_0|} = 2 \cdot |x-x_0| \approx 2^{-52}$$

On peut donc estimer que les erreurs d'arrondi font perdre 4 chiffres binaires de précision. Dès lors, même si les coefficients sont parfaitement calculés, il faut s'attendre à une précision maximum de  $2^{-52} = 4,5 \cdot 10^{-15}$  sur le résultat.

La troncature des coefficients entraîne d'autre part une erreur relative sur le zéro égale à 368,5 fois celle sur les coefficients, ce qui entraîne encore la perte de 8,5 chiffres, ce qui ramène la précision à  $2^{-43,5} = 8,03 \cdot 10^{-14}$  au mieux. (13 chiffres corrects).

Ce résultat a effectivement été obtenu. Il faut cependant noter que pour les zéros plus petits que 0,5, l'erreur est plus petite, tandis que les zéros les plus proches de 1 n'ont été obtenus qu'avec 11 chiffres significatifs.

### A.3. Méthodes de calcul des coefficients du polynôme

L'étude ci-dessus a permis de dégager que l'erreur la plus importante provient du déplacement des zéros dû à l'imprécision sur les coefficients. Il convient donc de calculer ceux-ci dans les meilleures conditions, si possible même à la précision de la machine. Diverses méthodes ont été utilisées.

#### A.3.1. Méthode d'inversion matricielle

Soit à rechercher le polynôme  $\phi_n$  de degré  $n$ . Il doit être orthogonal aux  $n$  monômes  $1, x, \dots, x^{n-1}$ . Par conséquent, si l'on écrit

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k + x^n,$$

on obtient les  $n$  relations

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (x^k, x^i) = -(x^n, x^i) \quad i=0, \dots, (n-1).$$

Il s'agit d'un système matriciel à résoudre. Cette méthode, très simple en apparence, ne permet que d'obtenir 6 chiffres décimaux corrects sur les coefficients du polynôme de degré 9, lorsque les calculs sont faits avec 56 chiffres binaires.

#### A.3.2. Méthode basée sur les relations de récurrence

Une deuxième méthode possible consiste à utiliser les formules de récurrence (3.26) et (3.27). Par cette méthode, on obtient

automatiquement tous les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Mais le résultat est tout aussi décevant, puisqu'on n'a pu obtenir que 6 chiffres significatifs corrects sur les coefficients du polynôme de degré 9.

### A.3.3. Formule de RODRIGUES

La seule méthode qui nous ait donné satisfaction est basée sur la formule de RODRIGUES. Notre objet est de calculer les polynômes orthogonaux dans  $(0,1)$  à des poids de la forme  $x^r$ . Si la formule de RODRIGUES s'applique, on a donc, par (3.28)

$$\phi_n = \frac{1}{x^r} D^n \{x^r x^n (1-x)^n\} = \frac{1}{x^r} D^n \{x^{n+r} (1-x)^n\}.$$

Par le développement du binôme de Newton, on obtient donc

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{1}{x^r} D^n \left\{ \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k x^{k+n+r} \right\} \\ &= \frac{1}{x^r} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k (k+n+r)(k+n+r-1)\dots(k+r+1)x^{k+r}, \end{aligned}$$

soit en posant

$$\begin{aligned} \pi(n, k, r) &= \prod_{\ell=k+r+1}^{k+n+r} \ell, \\ \phi_n &= \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \pi(n, k, r) x^k \end{aligned}$$

On constate qu'il s'agit d'un polynôme, ce qui justifie a posteriori l'utilisation de la formule de Rodrigues. Contrairement à toute les précédentes, cette méthode n'implique que des calculs de produits, ce qui assure une précision optimum. Ce procédé nous a permis d'obtenir 16 décimales exactes sur les coefficients du polynôme.

ANNEXE 2 - POINTS DE GAUSS DANS L'INTERVALLE (0,1)

	POINTS	(densité $w(x) \equiv 1$ ) POIDS
1	0.5000000000000000Q+00	0.1000000000000000Q+01
2	0.211324865405187Q+00 0.788675134594813Q+00	0.5000000000000000Q+00 0.5000000000000000Q+00
3	0.112701665379258Q+00 0.5000000000000000Q+00 0.887298334620742Q+00	0.277777777777778Q+00 0.444444444444444Q+00 0.277777777777778Q+00
4	0.694318442029737Q+01 0.330009478207572Q+00 0.669990521792428Q+00 0.930568155797026Q+00	0.173927422568727Q+00 0.326072577431273Q+00 0.326072577431273Q+00 0.173927422568727Q+00
5	0.469100770306680Q-01 0.230765344947158Q+00 0.5000000000000000Q+00 0.769234655052842Q+00 0.953089922969332Q+00	0.118463442528095Q+00 0.239314335249683Q+00 0.284444444444444Q+00 0.239314335249683Q+00 0.118463442528095Q+00
6	0.337652428984240Q-01 0.169395306766868Q+00 0.380690406958402Q+00 0.619309593041598Q+00 0.830604693233132Q+00 0.966234757101576Q+00	0.856622461895852Q-01 0.180380786524069Q+00 0.233956967286346Q+00 0.233956967286346Q+00 0.180380786524069Q+00 0.856622461895952Q-01

	POINTS	POIDS
7	0.254460438286207Q-01	0.647424830844348Q-01
	0.1292344072C0303Q+00	0.139852695744638Q+00
	0.297077424311311Q+00	0.190915025252559Q+00
	0.500000000000000Q+00	0.208979591836735Q+00
	0.702922575688699Q+00	0.190915025252559Q+00
	0.870765592799697Q+00	0.139852695744638Q+00
	0.974553956171379Q+00	0.647424830844348Q-01
8	0.198550717512319Q-01	0.506142681451881Q-01
	0.101666761293187Q+00	0.111190517226687Q+00
	0.237233795041836Q+00	0.156853322938944Q+00
	0.408282678752175Q+00	0.181341891689181Q+00
	0.591717321247825Q+00	0.181341891689181Q+00
	0.762766204958164Q+00	0.156853322938944Q+00
	0.898333238706813Q+00	0.111190517226687Q+00
	0.980144928248768Q+00	0.506142681451881Q-01
9	0.159198802461870Q-01	0.406371941807872Q-01
	0.819844463366821Q-01	0.903240803474287Q-01
	0.193314283649705Q+00	0.130305348201468Q+00
	0.335873288298096Q+00	0.156173538520001Q+00
	0.500000000000000Q+00	0.165119677500630Q+00
	0.662126711701904Q+00	0.156173538520001Q+00
	0.806685716350295Q+00	0.130305348201468Q+00
	0.918015553663318Q+00	0.903240803474287Q-01
	0.984080119753813Q+00	0.406371941807872Q-01

## REFERENCES

- [1] F. RIESZ et B. Sz. NAGY  
"Leçons d'analyse fonctionnelle"  
Gauthier Villars, Paris, 6ème édition, 1975
- [2] M. DECUYPER  
"Compléments de mathématiques"  
Collection Dunod Université, Dunod, Paris, 1968
- [3] B. FRAEIJIS DE VEUBEKE  
"Variational principles and the patch test"  
Int. Jl. of Num. Meth. in Eng., vol. 8, n°4,  
pp. 783-801, 1974
- [4] M. LINSMAN  
"Cours d'Analyse numérique"  
Edition Derouaux, Liège
- [5] M. ABRAMOWITZ and A. STEGUN  
"Handbook of Mathematical Functions"  
Dover Publications, Inc., New York, 1965
- [6] P. BECKERS  
"Modèles d'éléments finis de membranes cinématiquement  
admissibles et codéformables. Triangles, quadrilatères  
et barres"  
Rapport LTAS SF-9
- [7] A. MOL  
"Eléments à symétrie axiale"  
Rapport LTAS SF-24

- [8] O.C. ZIENKIEWICZ  
"Isoparametric and allied numerically integrated elements  
A review"  
Int. Symp. on Num. and Comp. Math. in Struct. Mech.  
Chicago , 8-10 sept - 1971
- [9] G. STRANG and G. FIX  
"An analysis of the Finite Element Method"  
Prentice Hall, 1973
- [10] A.H. STROUD  
"Approximate Calculation of Multiple Integrale"  
Prentice Hall 1971
- [11] C. LANCZOS  
"Applied Analysis"  
Prentice Hall, 1956
- [12] G. R. COWPER  
"Gaussian quadrature formulas for triangles"  
Int. Jl. for Num. Meth. in Eng. , Vol. 7 n° 3.

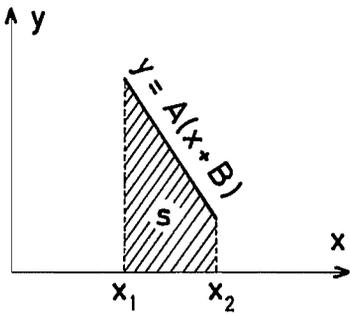


FIG. 1.1

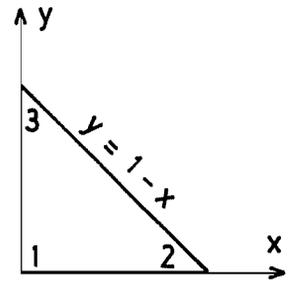
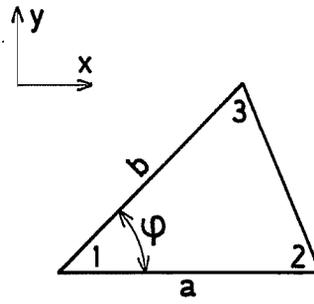


FIG. 1.3

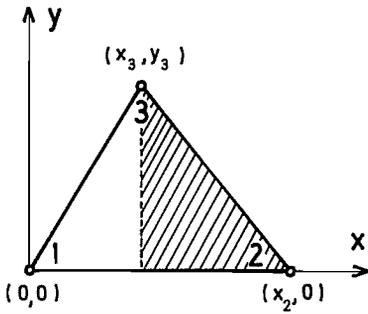


FIG. 1.2

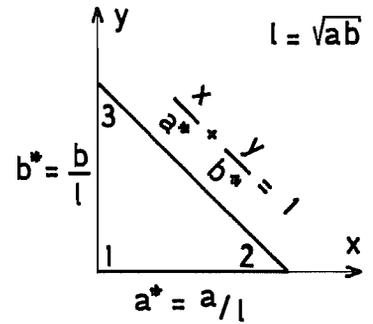
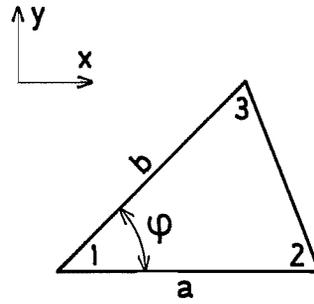


FIG. 1.4

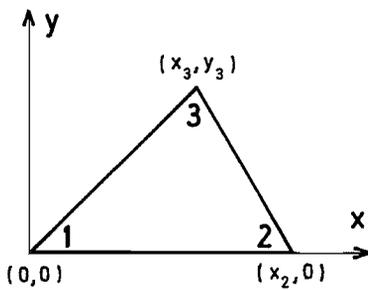


FIG. 1.5

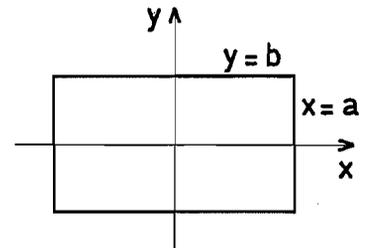
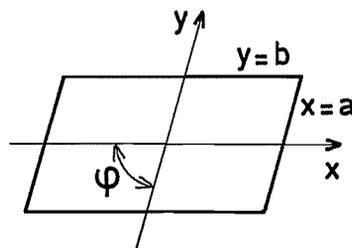


FIG. 1.6

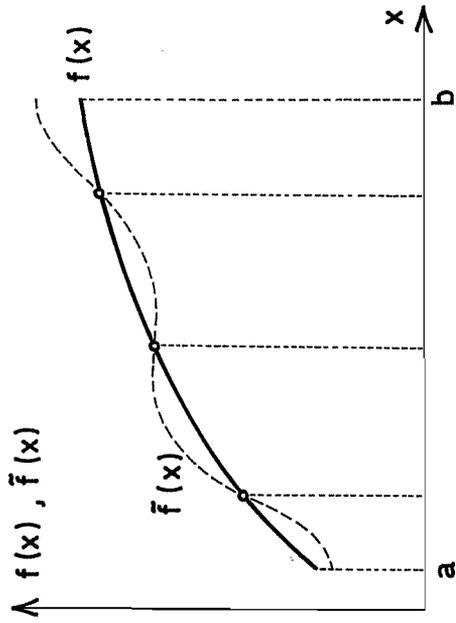
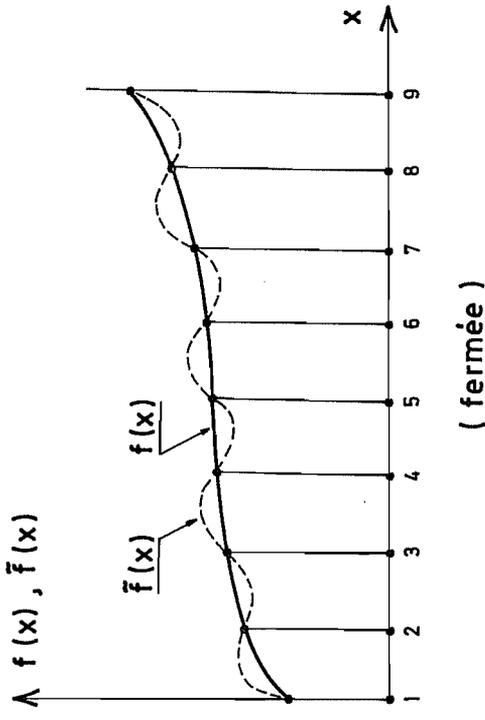
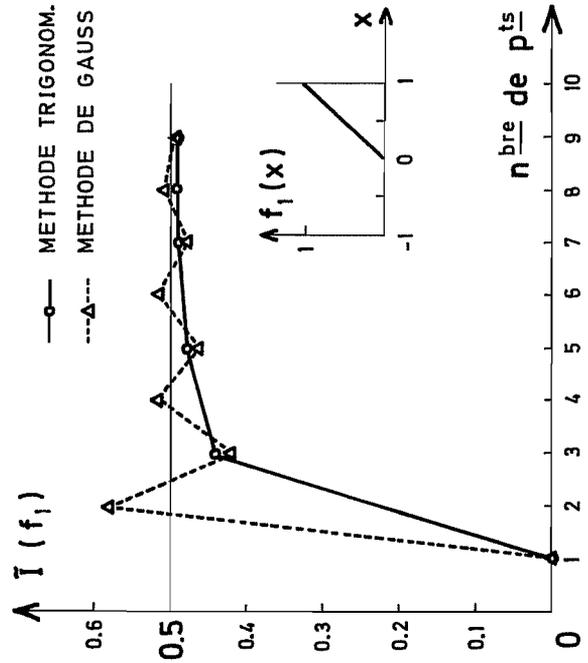


FIG. 2.1

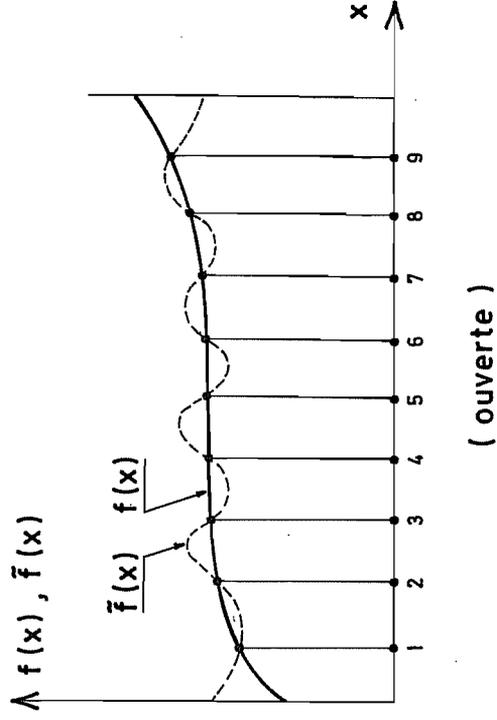
INTERPOLATION



( fermée )



INTEGRATION D'UNE RAMPE

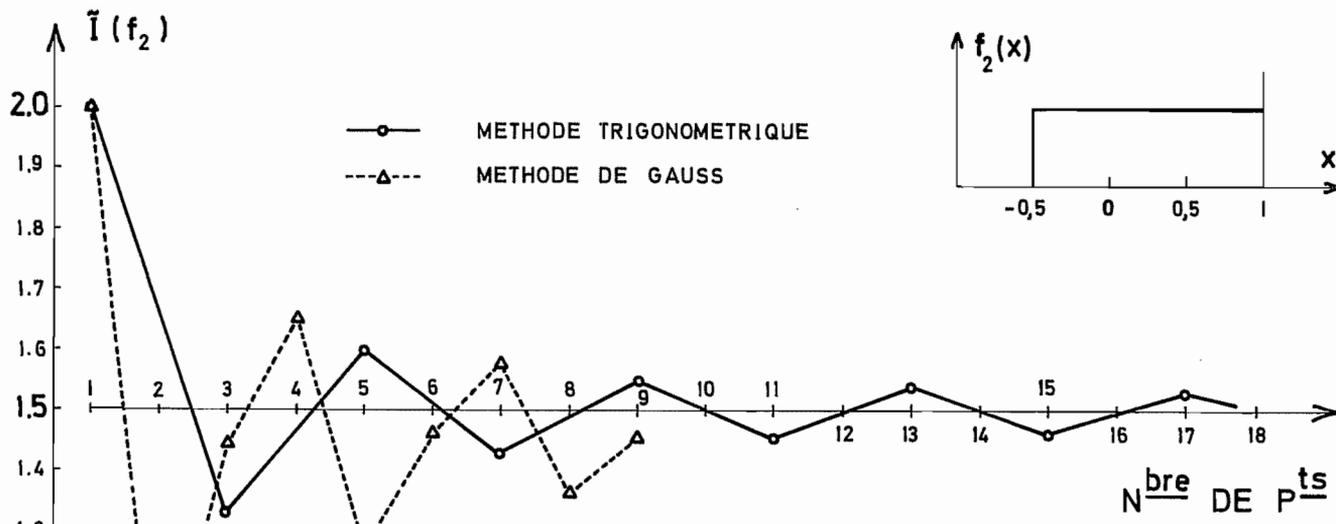


( ouverte )

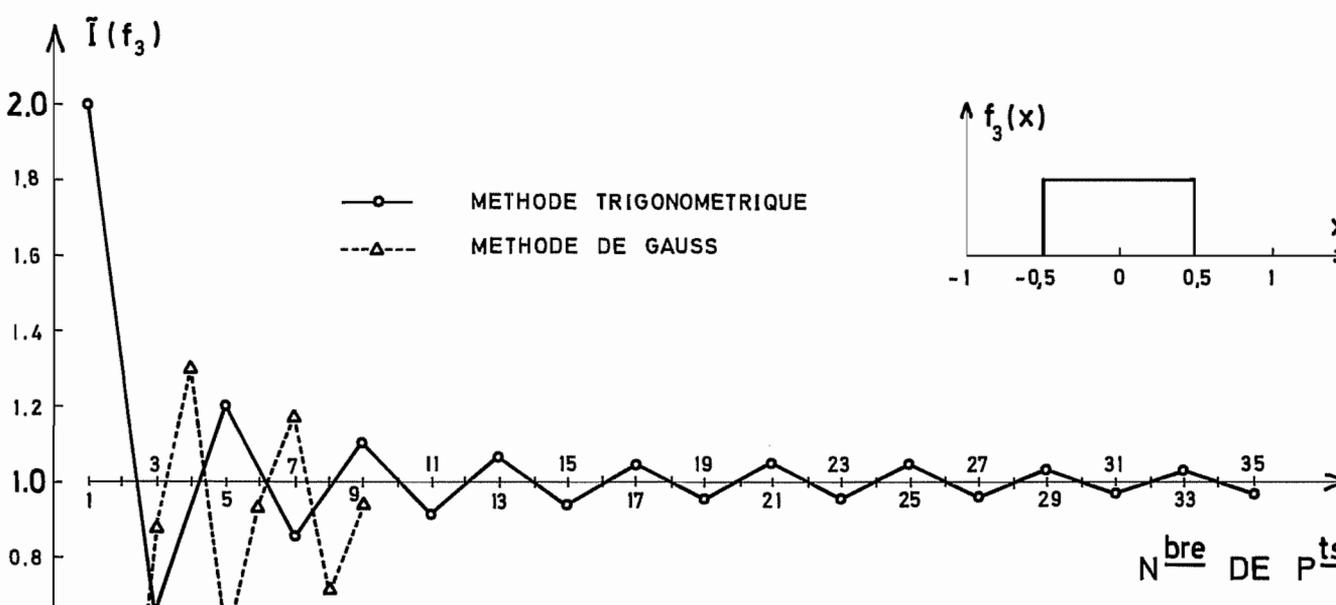
FIG. 2.3

METHODES DE NEWTON - COTES

FIG. 2.2



INTEGRATION D'UN ECHELON SIMPLE  
 FIG. 2.4



INTEGRATION D'UN ECHELON DOUBLE  
 FIG. 2.5

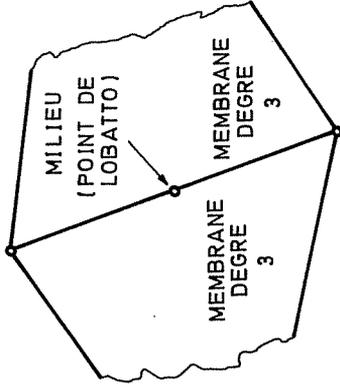
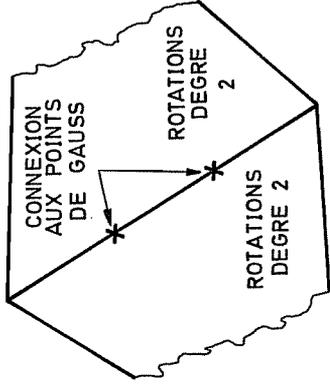
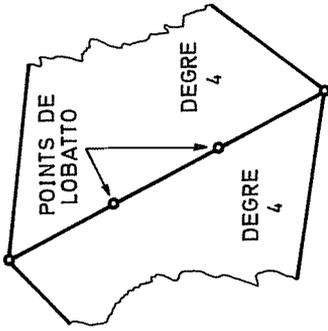
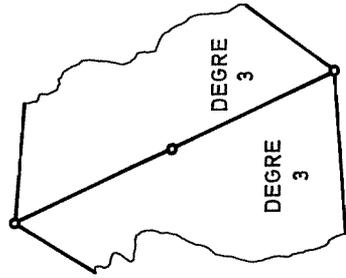


FIG. 3.1

FIG. 3.2

FIG. 3.3

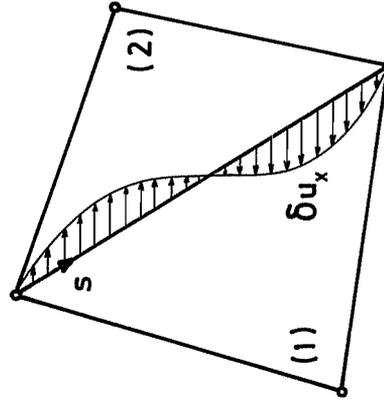


FIG. 3.4

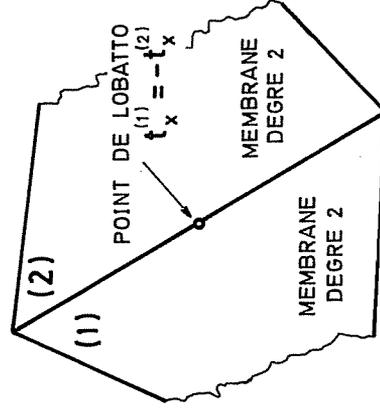


FIG. 3.5

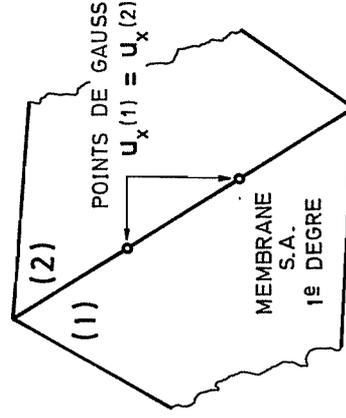
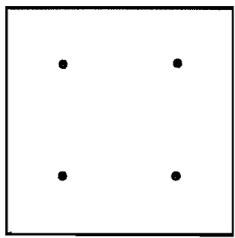
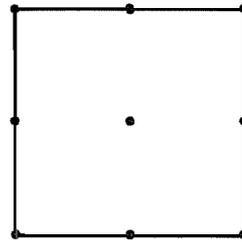


FIG. 3.6



( Gauss )



( Lobatto )

FIG. 4.1

FORMULES PAR PRODUITS SUR UN CARRE

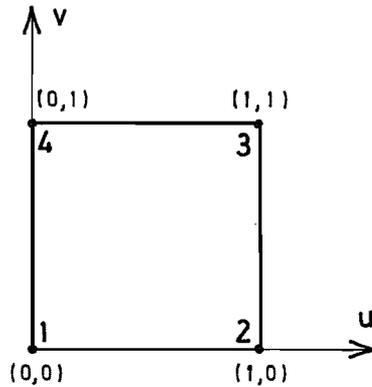
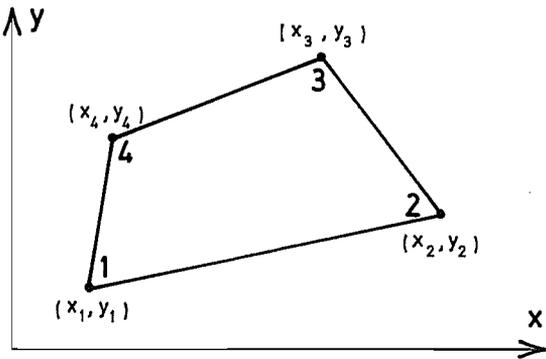


FIG. 4.2

TRANSFORMATION D'UN QUADRILATERE CONVEXE EN CARRE

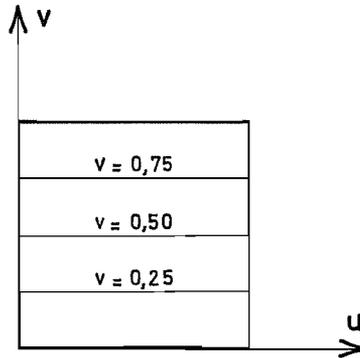
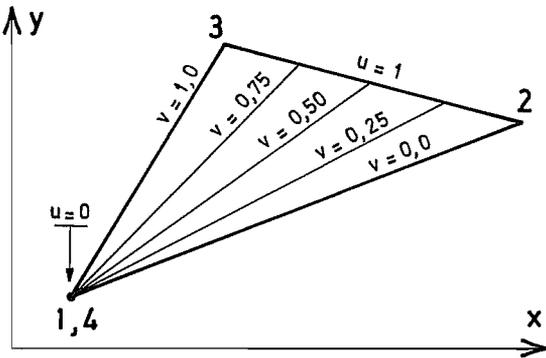
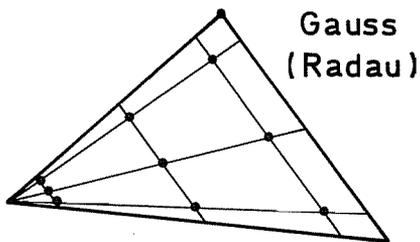
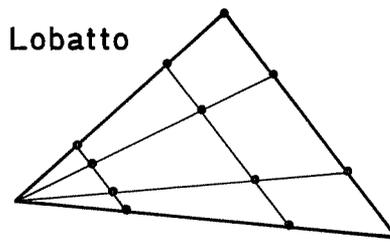


FIG. 4.3

TRANSFORMATION D'UN TRIANGLE EN CARRE



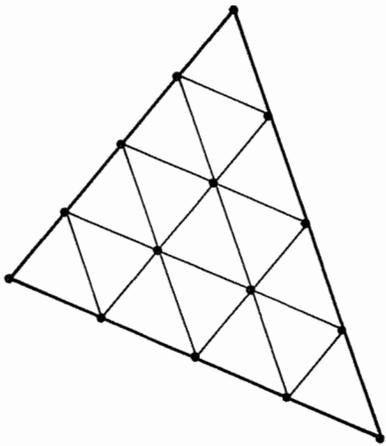
Gauss  
(Radau)



Lobatto

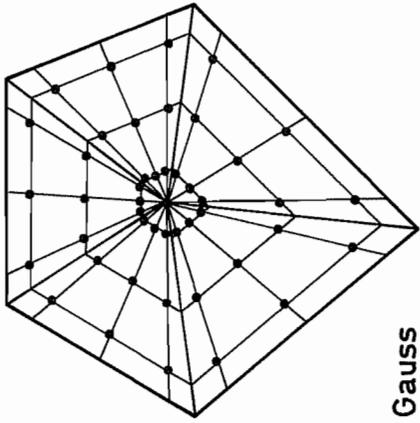
FIG. 4.4

REPRESENTATION DES P<sup>ts</sup> DE GAUSS ET DE LOBATTO  
DANS UN TRIANGLE ( formules par produits )

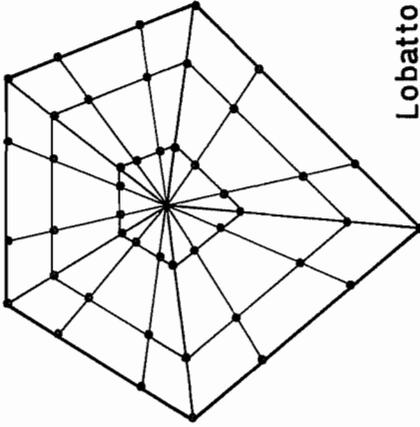


REPRESENTATION DES Pts  
DE NEWTON-COTES  
DANS UN TRIANGLE

FIG. 4.5



Gauss



Lobatto

REPRESENTATION DES Pts DE GAUSS  
ET DE LOBATTO DANS UN PENTAGONE

FIG. 4.6

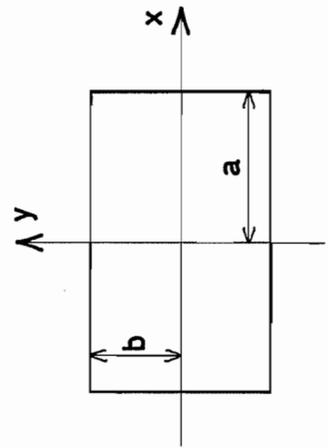


FIG. 5.1

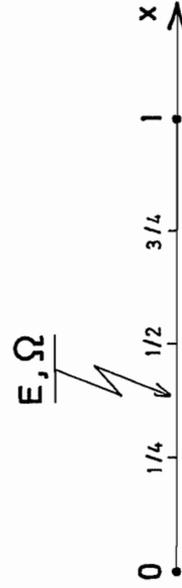


FIG. 5.2