

UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES



Calcul sismique des ouvrages d'art

Année académique 2000 – 2001

Travail de fin d'études présenté par

VINCENT DENOËL

En vue de l'obtention du grade
d'Ingénieur Civil des Constructions

Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées

Travail de fin d'études présenté par Vincent DENOEL en vue de l'obtention du
grade d'Ingénieur Civil des Constructions

Calcul sismique des ouvrages d'art

Lorsque le comportement sismique d'une structure n'est pas satisfaisant, il peut s'avérer nécessaire de recourir à l'installation d'amortisseurs. Ces éléments sont caractérisés par la relation $(F - v)$ entre l'effort F nécessaire pour déplacer leurs extrémités avec une vitesse axiale relative v . Ces amortisseurs sont caractérisés soit par une loi de comportement linéaire ($F = C.v$), soit par une loi $F = C . v^\alpha$ ($\alpha < 1$). L'intérêt de ce type d'équipement réside dans une plus grande absorption d'énergie ; la difficulté se situe au niveau de la prise en compte de leur comportement non linéaire.

L'objectif principal du travail consiste en la réalisation d'un programme permettant de réaliser l'analyse sismique de structures comprenant des dash-pots non linéaires obéissant à cette loi constitutive. Les non linéarités ne sont concentrées que dans ces éléments, c'est-à-dire que le reste de la structure est supposé se comporter linéairement. Dans un premier temps, des feuilles de calcul sont développées à l'aide du logiciel MathCad. Une fois ces développements acquis, ils seront implémentés dans un programme de calcul de structures plus complet, tel FINELG.

Un calcul sismique non linéaire doit être entrepris au moyen d'une analyse dynamique transitoire et non plus par une analyse spectrale. La donnée de base de ce premier type de calcul étant un accélérogramme, le second objectif du travail consiste en la rédaction d'un préprocesseur pour fournir des accélérogrammes générés sur base d'un spectre de réponse élastique.

L'ensemble des développements est validé sur des cas académiques et appliqué à l'un ou l'autre cas concret, tel que le pont canal d'Houdeng.

Le jury :

M. V. de Ville de Goyet

M. A. Plumier

M. R. Charlier

M. E. Spehl

Travail de fin d'études présenté par Vincent DENOEL en vue de l'obtention du
grade d'Ingénieur Civil des Constructions

Calcul sismique des ouvrages d'art

Résumé

Mots clés : non linéaire – dynamique – concentré – amortisseur – condensation – génération – accélérogramme

Le premier sujet développé dans ce document traite de l'analyse dynamique de structures non linéaires. Le type de non linéarité considéré est assez particulier dans la mesure où les degrés de liberté susceptibles d'être touchés par les non linéarités sont connus à l'avance et occupent une place limitée dans la structure. Sous l'hypothèse que le reste de celle-ci se comporte linéairement, l'équation du mouvement associée à une structure à plusieurs degrés de liberté peut être réduite par une condensation statique. La taille du système à résoudre se trouve donc limitée au nombre de degrés de liberté non linéaires de la structure.

Le document applique cette condensation pour des structures linéaires auxquelles sont ajoutés des amortisseurs à comportement non linéaire. Pour ce type de non linéarité concentrée, il définit les degrés de liberté linéaires et non linéaires qui doivent être considérés. Après quelques indications concernant les lois de comportement des amortisseurs réels, les équations à résoudre sont ensuite développées en conservant la loi constitutive exponentielle qui est la plus répandue. Le document reprend également les codes FORTRAN (et feuilles Mathcad) des routines rédigées permettant de réaliser ce type d'analyse.

Le second sujet traité concerne la génération d'accélérogrammes sur base de spectres de réponse. Différentes techniques de génération sont présentées mais les développements se focalisent essentiellement sur le filtrage d'un processus aléatoire. Cette méthode consiste à générer une suite de nombres aléatoires puis à la transformer à l'aide de fonctions enveloppes ou de filtres fréquentiels. Une correction fréquentielle itérative permet ensuite d'atteindre la correspondance entre les spectres cible et calculé. Le document indique les codes FORTRAN du programme GOSCA, qui applique la technique retenue à la génération d'accélérogrammes.

Finalement, deux applications, l'une simplifiée au maximum et l'autre concernant une structure plus complexe, permettent de valider les programmes rédigés. Pour chacun de ces deux cas, plusieurs analyses sont entreprises et les résultats sont comparés avec ceux d'un calcul simplifié ou, dans la mesure du possible, mené à l'aide d'un programme permettant ce même type d'analyse.

Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées

Travail de fin d'études présenté par Vincent DENOEL en vue de l'obtention du
grade d'Ingénieur Civil des Constructions

Calcul sismique des ouvrages d'art

Abstract

Keywords : non linear – dynamic – concentrated – dash-pot – condensation – generation – accelerogram

The first subject developed in this document concerns the dynamic analysis of non linear structures. The considered kind of non linearity is rather particular in the way that the degrees of freedom likely to be concerned by these non linearities are known in advance and occupy a limited place in the structure. Assuming that the rest of this structure behaves linearly, the equations of motion associated with a multi DOF structure can be reduced by a static condensation. The size of the subsequent system is thus reduced to the number of non linear DOF of the structure.

In this document the condensation is applied to linear structures containing non linear dash-pots. The linear and non linear degrees of freedom that must be considered are defined for this kind of concentrated non linearity. After a few indications about the constitutive laws of real dash-pots, the equations to be solved are then developed using the most common exponential form for the constitutive law. This document includes also the FORTRAN codes (and Mathcad sheets) of the written routines that allow realizing this kind of analysis.

The second subject concerns the generation of spectrum compatible accelerograms. Several generation techniques are presented but the developments focus mainly on the filtering of a random process. This method consists in generating a series of random numbers and then transforming it by envelope functions and frequency filters. An iterative frequency correction enables then the desired correspondence between the target and computed spectra to be reached. The document indicates the FORTRAN codes of the program GOSCA which applies the selected method of accelerogram generation.

Finally, two applications are treated. A first one simplified to its maximum and another one concerning a more complex structure allow validating the written programs. For each of these two, several analysis are realized and the results are compared with those resulting from a simplified computation or, when possible, realized using another program which could take into account the same kind of analysis.

Je tiens premièrement à remercier Monsieur Vincent de Ville de Goyet pour la confiance qu'il m'a témoignée et les responsabilités qu'il m'a attribuées. Je le remercie également pour avoir proposé ce sujet qui me tient beaucoup à cœur et que j'espère pouvoir approfondir davantage dans le futur.

Je tiens également à remercier les membres du Jury qui me font l'honneur de lire ce mémoire et d'assister à sa présentation.

Je remercie Monsieur Hervé Degée dont l'érudition et l'esprit critique m'ont fortement aidé, qui est un exemple dans la recherche scientifique et qui m'a permis d'effectuer mon mémoire dans les meilleures conditions.

Je remercie Patrick Nosbusch et Yves Duchêne très chaleureusement pour m'avoir aiguillé dans les bonnes directions au commencement de chacune des parties de ce travail.

Je remercie également tous les membres du service MSM pour leurs bons conseils et la sympathie qu'ils ont manifestée à mon égard, et tout particulièrement le Professeur S.Cescotto de m'avoir permis de disposer de son bureau pendant son absence.

Enfin je remercie mes parents et tous mes amis pour leur soutien de tous les instants.

Chapitre 1 : Introduction

L'objectif principal du travail consiste en la rédaction d'un programme de calcul pour l'analyse dynamique de structures comprenant des amortisseurs à comportement non linéaire. Les caractéristiques mécaniques de ces dispositifs sont principalement données par la relation ($F - v$) entre la vitesse axiale relative de leurs extrémités et l'effort requis pour les déplacer avec cette vitesse.

En raison des non linéarités, la méthode d'analyse à adopter pour appréhender le comportement dynamique d'une structure comprenant de tels éléments ne peut rigoureusement plus être basée sur le principe de superposition : alors qu'une structure à comportement linéaire peut être résolue, au premier ordre, par superposition modale, une structure non linéaire ne peut en pratique être calculée qu'à l'aide d'une analyse dynamique pas à pas.

Les structures du génie civil sont toujours sollicitées par des efforts verticaux dirigés de haut en bas, leur poids propre et les surcharges, dont l'intensité ne varie généralement pas assez vite au cours du temps que pour y induire des effets dynamiques. Il existe cependant des situations dans lesquelles, à ces efforts, viennent s'ajouter des sollicitations souvent qualifiables d'« exceptionnelles » pouvant engendrer des effets dynamiques non négligeables (tremblements de terre, vents turbulents, chocs de véhicules, explosions, ...). Malgré le caractère aléatoire lié d'une part à l'occurrence de ces phénomènes et d'autre part aux grandeurs mises en jeu lors de ces sollicitations, les codes et normes indiquent la manière de les prendre en compte lors du dimensionnement.

Pour les tremblements de terre, ils fournissent des spectres d'accélération qui permettent d'estimer assez précisément la réponse d'une structure linéaire. La méthode de résolution basée sur ces spectres, l'analyse spectrale, est fondée sur le principe de superposition. Elle n'est donc plus applicable aux structures comprenant une quelconque non linéarité – provenant soit du comportement d'un des matériaux constitutifs (non linéarité matérielle) comme dans le cas des dash-pots non linéaires, soit d'effets de second ordre (non linéarité géométrique) – .

Les méthodes d'analyse dynamique pas à pas, nécessaires à la résolution des structures non linéaires, requièrent la connaissance de la sollicitation en chaque instant si bien que le spectre de réponse élastique n'est plus suffisant. Au but principal du travail vient donc se joindre un second objectif qui consiste en la génération d'accélérogrammes compatibles avec un spectre désiré.

Etant donné qu'une certaine quantité d'information est perdue lors du passage de l'accélérogramme à son spectre de réponse, la génération d'un accélérogramme à partir d'un spectre recourt souvent à la formation d'une suite de nombres aléatoires. Des modifications appropriées de cette suite de nombres, a priori quelconque au départ, vont la transformer en un accélérogramme dont le spectre de réponse correspond au spectre cible avec une précision voulue.

Un premier chapitre resitue l'analyse dynamique par rapport aux autres types d'analyse et donne les principes généraux relatifs à la résolution des problèmes dynamiques non linéaires. Ensuite, deux autres chapitres décrivent en détail les développements théoriques nécessaires à la réalisation des deux objectifs ainsi que leur mise en œuvre. Puisque la suite logique d'un dimensionnement veut que les accélérogrammes soient générés avant la résolution du système, les objectifs sont présentés dans cet ordre : génération d'accélérogrammes (chapitre 3) puis résolution du système non linéaire (chapitre 4). Une dernière partie complète le travail en exposant quelques applications modestes des programmes rédigés (chapitre 5).

Chapitre 2 : Rappels théoriques

A. LES DIVERS TYPES D'ANALYSE

Le dimensionnement des ouvrages d'art du génie civil doit inévitablement passer par les deux phases que sont *l'analyse* et *la vérification*. C'est vers la première que ce document est essentiellement tourné.

L'analyse d'une structure peut être réalisée de multiples façons selon :

- les lois de comportement supposées pour les matériaux. On distingue ainsi l'analyse élastique, l'analyse plastique (avec redistribution des efforts entre sections), l'analyse élastique avec redistribution des efforts tenant compte d'une éventuelle fissuration du matériau ou encore les analyses non linéaires à associer à des matériaux dont les lois constitutives sont non proportionnelles ;
- l'importance relative des efforts parasites engendrés par la déformabilité de la structure vis-à-vis des efforts qui y existeraient si elle était supposée indéformable : on différencie alors les analyses au premier et au second ordre ;
- la vitesse d'application des efforts qui mène alors à distinguer les analyses statiques (ou pseudo-statiques) et dynamiques.

En choisissant une hypothèse dans chacun de ces trois critères de classification, on obtient les diverses méthodes existantes. Par exemple, ce document développe une méthode d'analyse dynamique (3^{ème} critère) au premier ordre (2^{ème} critère) avec des lois de comportement non linéaires (1^{er} critère).

Si le problème est effectivement non linéaire, il est important de remarquer que les non linéarités sont exclusivement concentrées dans un nombre limité d'éléments. Cette particularité influence fortement la méthode de résolution du système d'équations différentielles non linéaires.

B. L'EQUATION DU MOUVEMENT

L'analyse d'une structure consiste en la détermination des éléments de réduction et des déformées d'éléments. Selon l'ordre d'évaluation de ces grandeurs, la méthode d'analyse sera classée soit dans les méthodes des déplacements, soit dans les méthodes des forces. Les éléments finis du programme FINELG sont du type déplacement ; la méthode d'analyse qui leur est associée est donc une méthode des déplacements. Sous sollicitations statiques, l'analyse au premier ordre d'une structure linéaire est entreprise en résolvant le système :

$$[K]\{u\} = \{P\} \quad (2.1)$$

où $[K]$ est la matrice de raideur de la structure, $\{u\}$ est le vecteur des déplacements des nœuds de la structure et $\{P\}$ est le vecteur des charges extérieures énergétiquement équivalentes.

Lorsque les efforts appliqués sur une structure la mettent en mouvement de façon telle que les effets liés au mouvement de sa masse ne soient plus négligeables, l'équation caractérisant une analyse statique doit être complétée par les termes d'inertie et d'amortissement. Pour une structure linéaire, l'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\} \quad (2.2)$$

où $\{u\}$, $\{\dot{u}\}$, $\{\ddot{u}\}$ sont les déplacements, vitesses et accélérations des nœuds de la structure, $[M]$ est la matrice de masse de la structure, $[K]$ la matrice de raideur et $[C]$ la matrice d'amortissement. Cette dernière matrice est composée d'une part de l'amortissement structurel satisfaisant généralement l'hypothèse de Rayleigh $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ et d'autre part de l'amortissement concentré supplémentaire provenant des dash-pots. $\{P\}$ représente toujours le vecteur des charges extérieures énergétiquement équivalentes. Les dimensions de ces matrices sont $N \times N$ où N est le nombre de degrés de liberté de la structure.

Cette forme de l'équation du mouvement n'est en réalité qu'un cas particulier de l'équation générale :

$$\{F_M\} + \{F_C\} + \{F_K\} = \{P\} \quad (2.3)$$

dans laquelle $\{F_M\}$, $\{F_C\}$ et $\{F_K\}$ représentent respectivement les efforts d'inertie, d'amortissement et de raideur. Lorsque la structure se comporte linéairement, ces trois termes peuvent être exprimés respectivement comme combinaisons linéaires des accélérations, vitesses et déplacements ; l'équation 2.3 prend alors la forme 2.2.

Lors du dimensionnement d'une structure réelle (avec ses non linéarités), il appartient à l'ingénieur de mettre en évidence les termes de l'équation générale (Eq. 2.3) qui ne peuvent plus être exprimés comme combinaisons linéaires. En l'occurrence, dans le cas structures comprenant des dash-pots non linéaires, le terme $\{F_c\}$ doit être accommodé.

Dans certains cas particuliers comme celui d'un immeuble dont la réponse dynamique linéaire sous sollicitation horizontale peut être représentée assez correctement par une seule « forme »¹, l'équation du mouvement fournit une équation différentielle non linéaire. Cependant, le comportement d'une structure complexe ne peut généralement pas être exprimé à partir d'une seule « forme ». L'objectif premier du travail consiste donc à former, dans un premier temps, le système des N équations différentielles non linéaires caractérisant la structure à étudier, et à envisager ensuite les méthodes de résolution de ce système.

C. LES TREMBLEMENTS DE TERRE

C.1. L'équation du mouvement particularisée aux tremblements de terre

Les tremblements de terres constituent une catégorie importante de sollicitations dynamiques des structures du génie civil pour laquelle un raisonnement tout à fait général peut donner à l'équation du mouvement une forme particulière prenant en compte la spécificité du problème.

Etant donné qu'aucun effort n'est appliqué aux nœuds de la structure (supposée se comporter linéairement), l'équation du mouvement peut s'écrire sous cette forme :

$$[M]\{\ddot{u}_T\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (2.4)$$

où $\{u_T\}$ est le vecteur représentant les déplacements des nœuds de la structure dans un système d'axes fixes et $\{u\}$ dans un système d'axes liés au sol. Cette distinction est nécessaire car les efforts d'inertie s'appliquant sur un corps dépendent de son accélération absolue tandis que les efforts de raideur (et d'amortissement) dépendent du déplacement (et de la vitesse) relatif(ve) entre le sol et la structure.

On représente souvent par u_g le déplacement du sol et par $\{r\}$ le vecteur des coefficients d'influence, c'est à dire le vecteur dont chacune des N composantes est soit unitaire (si le degré de liberté correspondant est dans la direction du mouvement du sol),

¹ Le terme « forme » est préférable au terme « mode » dans la mesure où le comportement structurel peut ne pas être appréhendé par une superposition de modes propres de vibration (ainsi que le sous-entend le terme « mode ») mais peut aussi être décrit par une combinaison de vecteurs de Ritz.

soit nulle (dans le cas contraire). Ces deux nouvelles grandeurs permettent d'écrire une relation entre les déplacements dans les axes globaux et relatifs : $\{u_T\} = \{u\} + \{r\}u_g$.

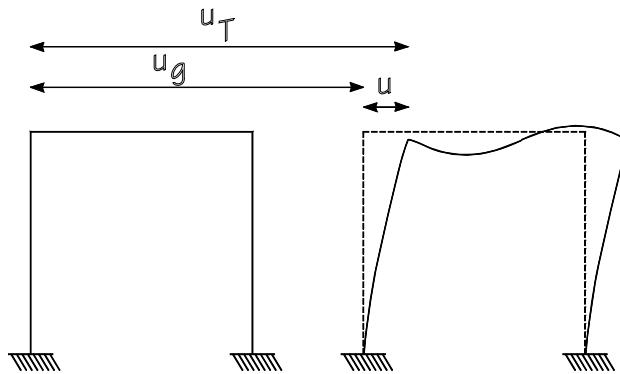


FIGURE 2.1. SYSTEMES DE REFERENCE

Dans le système d'axes relatifs lié au sol, l'équation du mouvement prend donc la forme particulière suivante :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\} = -[M]\{r\}\ddot{u}_g \quad (2.5)$$

C.2. Caractérisation des tremblements de terre : accélérogrammes et spectres

Alors que pour d'autres scientifiques, les paramètres importants caractérisant un tremblement de terre sont l'intensité, la magnitude ou encore la profondeur focale, l'expression (2.5) indique que l'accélération du sol \ddot{u}_g est la grandeur qui caractérise le mieux un tremblement de terre pour l'ingénieur.

Si l'accélérogramme (accélération du sol en fonction du temps) représente effectivement un paramètre extrêmement précieux lors du dimensionnement, les spectres de réponse qui en sont dérivés sont aussi très fréquemment utilisés.

Considérons le cas d'un oscillateur à un seul degré de liberté. L'équation du mouvement est une équation différentielle scalaire : $m\ddot{u} + c\dot{u} + k.u = p(t)$. En la réécrivant de la façon suivante :

$$\ddot{u} + 2.\omega.\xi.\dot{u} + \omega^2.u = \frac{p(t)}{m}, \quad (2.6)$$

les paramètres qui caractérisent la réponse du système à un degré de liberté apparaissent clairement :

- le pourcentage d'amortissement critique : $\xi = \frac{c}{2.m.\omega}$
- la pulsation propre de l'oscillateur : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- l'effort extérieur rapporté à la masse de l'oscillateur : $\frac{p(t)}{m}$

Dans le cas d'une sollicitation par déplacement d'appuis, l'équation (2.5) montre que l'effort appliqué $p(t)$ est égal à $-m\ddot{u}_g$, à condition d'exprimer les déplacements dans un référentiel lié au sol. Donc, pour un accélérogramme \ddot{u}_g donné et pour un taux d'amortissement critique ξ fixé, l'équation du mouvement ne dépend plus que de la pulsation propre de l'oscillateur ω :

$$\ddot{u} + 2\omega\xi\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{u}_g \tag{2.7}$$

Cette équation différentielle peut être résolue pour chaque valeur de la pulsation propre ω . Par exemple, la méthode de Duhamel donne comme solution :

$$u(t) = \frac{-1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega_d(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad \text{où } \omega_d = \omega \sqrt{1-\xi^2} \tag{2.8}$$

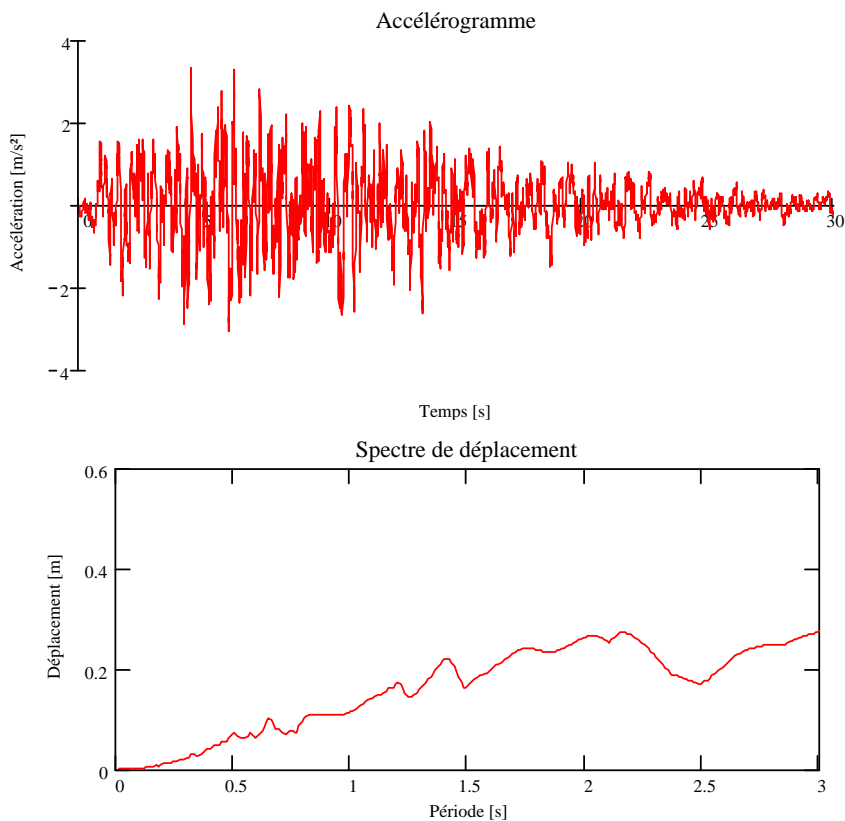


FIGURE 2.2. ACCELÉROGRAMME ET SPECTRE DE REPONSE ($\xi = 0,03$)

Le *spectre de déplacement* relatif à l'accélérogramme \ddot{u}_g et pour le taux d'amortissement ξ est obtenu en associant à chaque pulsation propre ω la valeur du

maximum de la réponse $u(t)$ pendant la durée du tremblement de terre. La figure 2.2 montre un exemple d'accélérogramme et son spectre de déplacement¹.

Connaissant l'expression du déplacement de l'oscillateur au cours du temps (Eq. 2.8), la vitesse et l'accélération peuvent facilement en être dérivées. Pour chacune de ces deux autres grandeurs, le maximum relevé en fonction de la pulsation propre de l'oscillateur définit les *spectres de vitesse et d'accélération* relatifs à l'accélérogramme \ddot{u}_g et pour le taux d'amortissement ξ . Alors que ces deux spectres ne sont principalement utilisés que pour vérifier certains critères physiologiques, le spectre de déplacement manifeste une plus grande importance puisque la connaissance des déplacements maxima permet de calculer les efforts élastiques maxima. Les spectres de vitesse et d'accélération ne sont donc utilisés que très rarement ; on leur préfère plutôt les spectres de pseudo-vitesse et de pseudo-accélération.

Considérons à nouveau un oscillateur à un seul degré de liberté. Au moment où il atteint son déplacement maximal², l'énergie totale stockée dans le système est :

$$E = E_{POT} + E_{CIN} = \frac{1}{2}.k.u^2 + \frac{1}{2}.m.\dot{u}^2 = \frac{1}{2}.k.u_{MAX}^2 \quad (2.9)$$

Supposons qu'au moment où l'oscillateur atteint sa vitesse maximale, environ un quart de période plus tard, l'énergie stockée dans l'amortisseur possède cette même valeur. Admettons aussi qu'à cet instant précis l'oscillateur repasse par sa position d'équilibre ($u = 0$), ce qui est réellement le cas s'il est non amorti et sollicité de façon harmonique ; les considérations énergétiques permettent d'obtenir une estimation de la vitesse maximum :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}.k.u_{MAX}^2 = E_{POT} + E_{CIN} = \frac{1}{2}.k.u^2 + \frac{1}{2}.m.\dot{u}^2 = \frac{1}{2}.m.\dot{u}_{MAX}^2 \\ \Rightarrow \dot{u}_{MAX} &= \sqrt{\frac{k}{m}}u_{MAX} = \omega.u_{MAX} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le *spectre de pseudo-vitesse* s'obtient donc en multipliant les valeurs du spectre de déplacement par la pulsation propre de l'oscillateur.

De même, en admettant encore que l'effort d'inertie maximum corresponde à l'effort élastique maximum (au moment où la vitesse s'annule), on peut obtenir une estimation de la valeur de l'accélération maximale :

¹ les abscisses du spectre ne sont pas toujours des pulsations. La figure donnée ici utilise par exemple les périodes propres ; on peut aussi tracer le spectre en fonction des fréquences propres.

² la vitesse est donc nulle à cet instant

$$\begin{aligned}
 F_I = F_E &\Rightarrow m.\ddot{u}_{MAX} = k.u_{MAX} \\
 &\Rightarrow \ddot{u}_{MAX} = \omega^2.u_{MAX}
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Le *spectre de pseudo-accelération* s'obtient donc en multipliant les valeurs du spectre de déplacement par le carré de la pulsation propre de l'oscillateur. La figure 2.3 représente les spectres de (pseudo-) vitesse et de (pseudo-) accélération correspondant à l'accélérogramme de la figure 2.2.

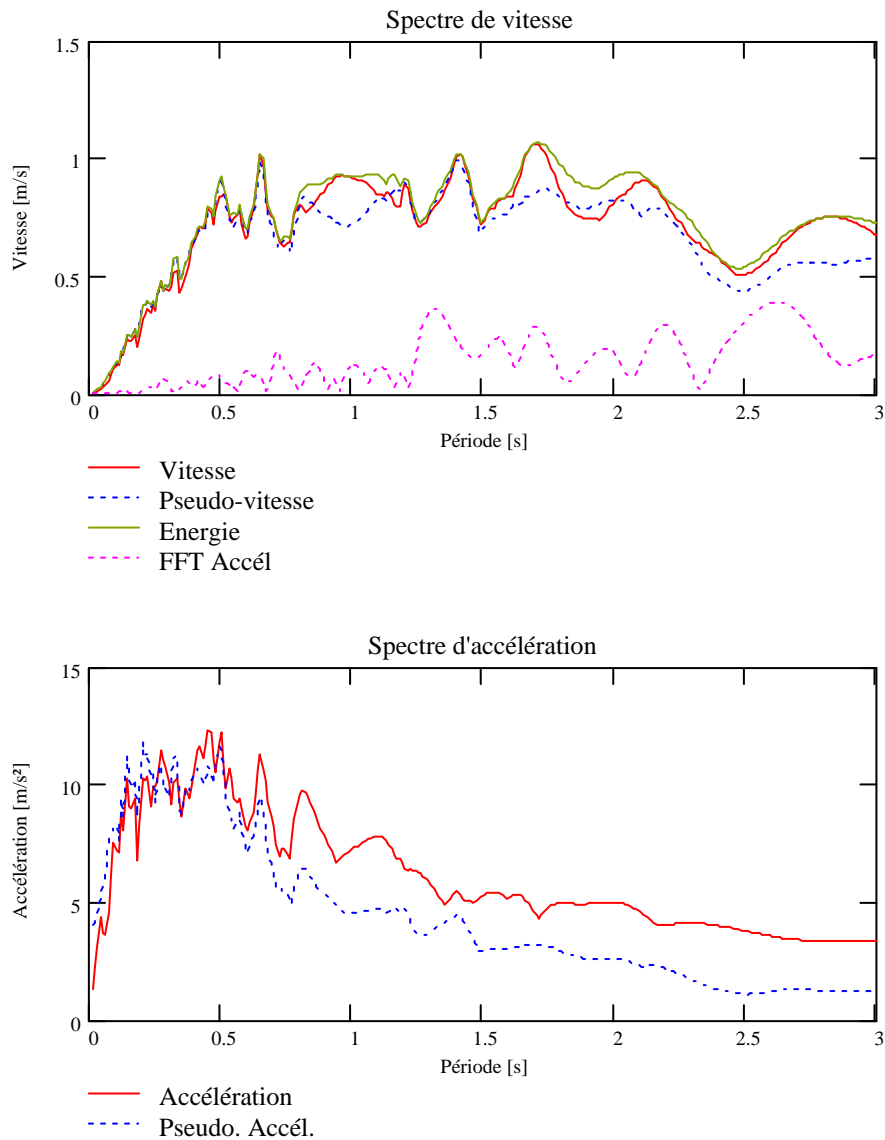


FIGURE 2.3. AUTRES SPECTRES ET PSEUDO-SPECTRES ($\xi = 0,03$)

Les deux nouveaux spectres ainsi définis ne s'éloignent pas trop de leur correspondant mais sont évidemment moins précis puisqu'ils ne représentent pas exactement les valeurs maximales de la vitesse et de l'accélération. Cependant :

- comme annoncé précédemment, les spectres de vitesse et accélération réels ne sont pas indispensables au dimensionnement ;

- les deux pseudo-spectres sont reliés au spectre de déplacement par des relations assez particulières qui permettent la représentation de ces trois spectres par une seule courbe dans des axes bi-logarithmiques (Fig. 2.4) ;
- la multiplication de la pseudo-accélération par la masse de l'oscillateur donne immédiatement la valeur maximale de l'effort élastique. Cette grandeur est nécessaire au dimensionnement des ouvrages ; c'est pour cette raison que les codes et normes fournissent généralement le spectre de pseudo-accélération.

La figure 2.4 montre la représentation en axes bi-logarithmiques des spectres relatifs à l'accélérogramme de la figure 2.2. Les abscisses sont à nouveau des périodes propres ; l'axe des ordonnées principales repère le spectre de pseudo-vitesse ; aux axes inclinés¹ à -45° et $+45^\circ$ correspondent respectivement les spectres de pseudo-accélération et de déplacement.

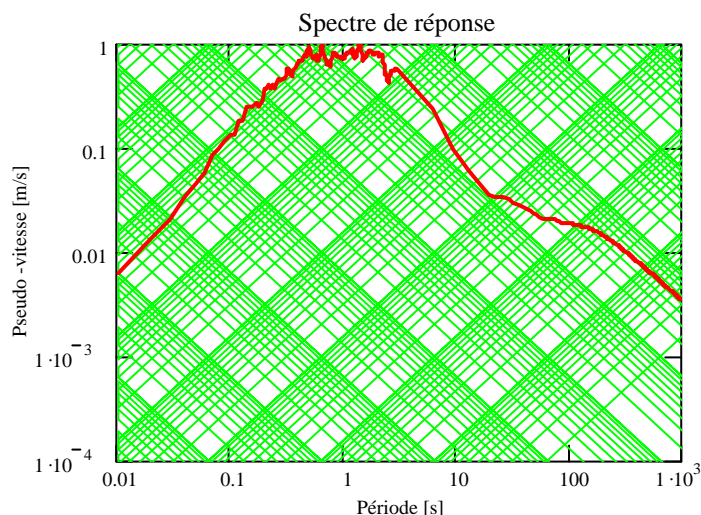


FIGURE 2.4. REPRÉSENTATION EN AXES BI-LOGARITHMIQUES

Pour les fréquences très faibles ou très hautes, la courbe est asymptotique aux axes inclinés à 45° . Cette constatation se démontre assez aisément : il suffit de remarquer que pour les structures raides, les termes d'inertie sont négligeables (elles se déforment peu, les déplacements dans les axes relatifs sont faibles), alors que pour les structures souples, les termes d'inertie prévalent (la masse de la structure se déplace peu dans les axes absolus).

Les équations de la figure 2.5 montrent que la pseudo-accélération tend vers l'accélération maximale du sol pour les structures raides alors que le déplacement relatif maximal tend vers le déplacement maximal du sol pour les structures souples. Voici donc quantifiées les deux asymptotes vers lesquelles tend la courbe de la figure 2.4.

¹ orientés dans le sens trigonométrique

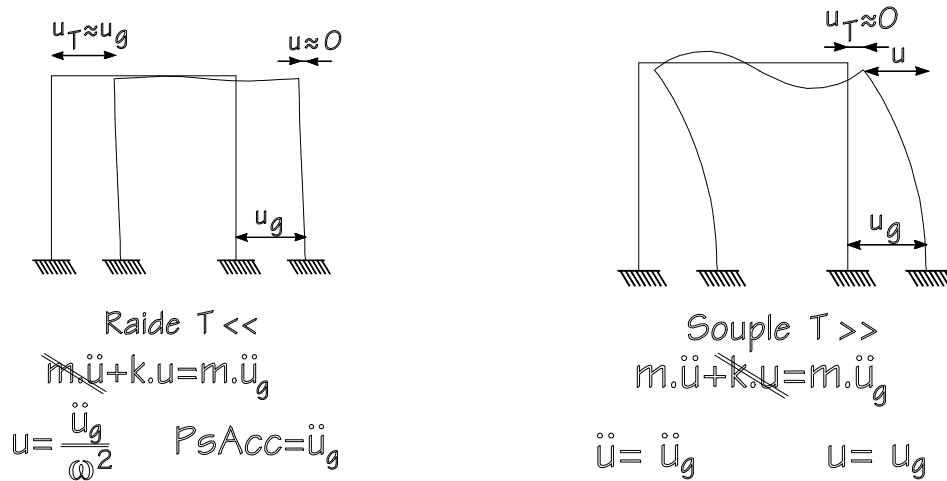


FIGURE 2.5. ILLUSTRATION DE STRUCTURES SOUPLES ET RAIDES

D. LA RESOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT

D.1. Les techniques de résolution

Dès que la sollicitation et les matrices caractérisant la structure sont établies, le problème consiste à déterminer le déplacement de chacun des nœuds de la structure au cours du temps. Pour ce faire, il existe de nombreuses méthodes de résolution traditionnellement classées :

- d'après le domaine dans lequel elles opèrent : résolution dans le domaine temporel ou fréquentiel.
- d'après l'utilisation ou non du principe de superposition selon lequel les effets (déformations et efforts internes) sur une structure d'une somme d'efforts extérieurs appliqués correspondent à la somme des effets résultant de ces efforts extérieurs agissant chacun séparément.

Etant donné que le problème à résoudre dans le cadre de ce travail est non linéaire, il est primordial de choisir une méthode qui n'est pas basée sur le principe de superposition. Les résolutions entreprises dans le domaine fréquentiel sont en général basées sur ce principe et les adaptations à réaliser pour prendre en compte d'éventuelles non-linéarités sont assez ardues.

C'est pourquoi les techniques retenues classiquement pour résoudre de tels problèmes sont les « méthodes pas à pas » opérant dans le domaine temporel. Elles consistent à découper le temps en intervalles pour lesquels des relations sont supposées entre les déplacements, vitesses et accélérations à la fin et au début des pas de temps.

Selon les hypothèses formulées, on distingue ainsi les méthodes de Newmark, de Houbolt, de la différence centrale, de Wilson,...

D.2. La méthode de Newmark

Parmi toutes les méthodes pas à pas, celle de Newmark est souvent employée car un choix approprié des coefficients intervenant dans la méthode permet d'obtenir un processus stable et assez précis. Pour un système à N degrés de liberté, les hypothèses relatives à cette méthode forment un ensemble de 2.N relations :

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + [(1-\delta).\{\dot{u}\}_t + \delta.\{\dot{u}\}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (2.12)$$

$$\{u\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \{\dot{u}\}_t . \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) . \{\ddot{u}\}_t + \alpha . \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} \right] . \Delta t^2 \quad (2.13)$$

Les N relations supplémentaires provenant de l'équation du mouvement¹ :

$$[M]\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} + [C]\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} + [K]\{u\}_{t+\Delta t} = \{P\}_{t+\Delta t} \quad (2.14)$$

permettent de former un système de 3.N équations dont les 3.N inconnues sont les déplacements, vitesses et accélérations à la fin du pas de temps. Ce système peut a priori être résolu d'une quelconque manière mais l'ingénieur, familiarisé au calcul des déplacements avant tout, réorganise les équations 2.12 et 2.13 sous la forme suivante :

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} [\{u\}_{t+\Delta t} - \{u\}_t] + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \{\dot{u}\}_t + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \{\ddot{u}\}_t \quad (2.15)$$

$$\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} [\{u\}_{t+\Delta t} - \{u\}_t] - \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{u}\}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{u}\}_t \quad (2.16)$$

Ainsi, l'injection des équations 2.15 et 2.16 dans l'équation du mouvement 2.14 fournit un système dont les N inconnues sont les déplacements $\{u\}_{t+\Delta t}$ à la fin du pas de temps :

¹ Tant que maintenant, la structure à résoudre est supposée se comporter linéairement ; la forme générale de l'équation du mouvement (Eq. 2.3) peut être particularisée à la forme de l'équation 2.2.

$$\left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} [M] + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} [C] + [K] \right) \{u\}_{t+\Delta t} = \{P\}_{t+\Delta t} +$$

$$[M] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \{u\}_t + \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{u}\}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{u}\}_t \right) + \quad (2.17)$$

$$[C] \left(\frac{\delta}{\alpha \Delta t} \{u\}_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \{\dot{u}\}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \{\ddot{u}\}_t \right)$$

Lorsque les déplacements sont déterminés, les équations 2.15 et 2.16 sont réutilisées pour obtenir les vitesses et accélérations à la fin du pas de temps.

Le choix des paramètres α et δ ne doit pas être quelconque ; en effet, le processus obtenu n'est inconditionnellement stable que si les relations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \delta \geq 0,5 \\ \alpha \geq 0,25.(0,5 + \delta)^2 \end{cases} \quad (2.18)$$

Dans le cas contraire, le pas de temps de calcul doit être inférieur à une limite de stabilité imposée par le processus.

E. LA RESOLUTION D'EQUATIONS NON LINEAIRES

E.1. Introduction

La résolution d'une équation ne représente en réalité rien d'autre que le calcul des racines d'une fonction ; il suffit pour s'en convaincre de regrouper les deux membres de l'équation du même côté du signe d'égalité. Si certaines fonctions non linéaires, telles les polynômes de degré inférieur à 4, bénéficient de racines dont l'expression analytique existe, il n'en est cependant pas de même pour les fonctions les plus générales.

Pour ce genre d'équations, la résolution analytique doit faire place à des techniques numériques. Parmi les méthodes traditionnelles, la méthode de Newton-Raphson est souvent utilisée en raison de son ordre de convergence élevé.

E.2. La méthode de Newton-Raphson

Résolution d'une équation non linéaire

Admettons que l'équation à résoudre soit exprimée sous la forme

$$F(x) = f \quad (2.19)$$

Le calcul des solutions de cette équation revient donc à trouver les racines de la fonction résidu $R(x) = f - F(x)$. Comme pour toutes les techniques itératives, la méthode de Newton-Raphson doit partir d'une estimation $x^{(0)}$ pour la racine¹. En toute généralité, cette valeur de x n'est pas celle qui satisfait l'équation à résoudre, c'est-à-dire que $F(x^{(0)}) \neq f$ ou encore que le résidu $R(x^{(0)}) = f - F(x^{(0)})$ associé à cette valeur de x est non nul.

A chaque itération, on estime la valeur du résidu $R^{(i)}$ et celle de la pente $F'(x^{(i)})$ de la fonction au point $x^{(i)}$. Ces deux valeurs permettent d'obtenir une nouvelle estimation de la racine :

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \frac{R(x^{(i)})}{F'(x^{(i)})} \quad (2.20)$$

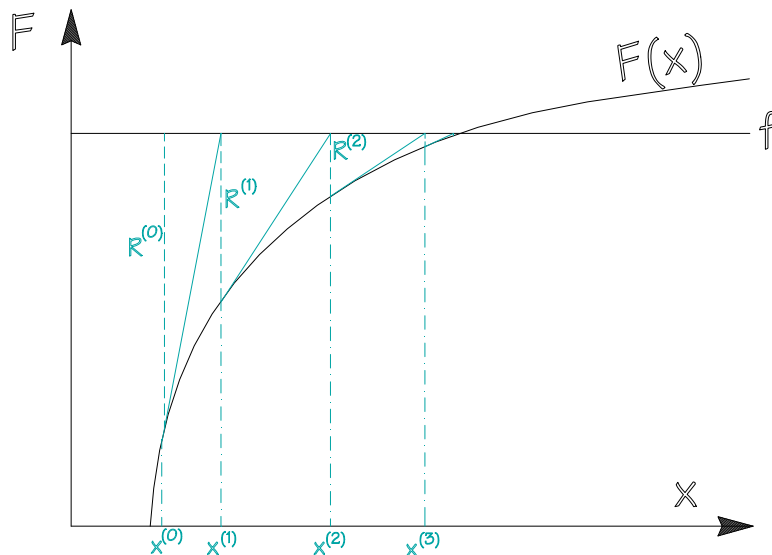


FIGURE 2.6. ILLUSTRATION DE LA METHODE DE NEWTON-RAPHSON

Cette manière de choisir la valeur de $x^{(i+1)}$ revient à tracer la tangente à la courbe $F(x)$ au point $x^{(i)}$ et prendre son intersection avec l'horizontale $F(x) = f$. L'abscisse du point ainsi obtenu constitue la nouvelle approximation de la racine $x^{(i+1)}$. La figure 2.6 montre une illustration de la méthode et la convergence de la suite des $x^{(i)}$ vers la solution de l'équation $F(x) = f$. Les itérations sont poursuivies jusqu'à l'atteinte d'un certain niveau de précision. Généralement, le critère d'arrêt porte sur les résidus :

$$\text{Critère d'arrêt : } \left| \frac{R^{(i)}}{f} \right| \leq 10^{-\text{precision}} \quad (2.21)$$

¹ La fonction traitée dans le cadre de ce travail est monotone et non bornée pour des valeurs de x tendant vers $+\infty$ et $-\infty$. La racine est donc unique et existe toujours ; on parlera donc de la racine

Où *precision* est une valeur à choisir. Selon la précision requise, des valeurs de 3 à 8 sont habituellement choisies.

La convergence de la méthode de Newton-Raphson est quadratique, c'est-à-dire qu'après un certain nombre d'itérations, l'erreur au pas $i+1$ est proportionnelle au carré de l'erreur au pas i . Il est néanmoins délicat de présenter la méthode de Newton-Raphson sans son inconvénient majeur : le passage des points d'inflexion.

Les itérés passent d'un côté à l'autre de la racine sans converger. Tous les itérés d'ordre pair tendent vers une même limite (A) alors que tous les itérés d'ordre impair tendent vers une autre limite (B). Il est possible de démontrer que ce phénomène se produit au moins lorsque la racine et sa première estimation $x^{(0)}$ se trouvent de part et d'autre d'un point d'inflexion.

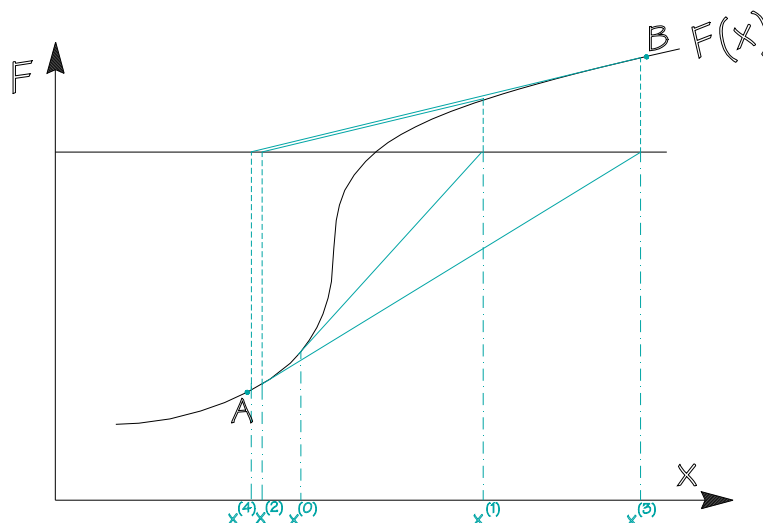


FIGURE 2.7. PROBLEME LIE AU PASSAGE DES POINTS D'INFLEXION

Lorsque la méthode de Newton-Raphson ne donne pas satisfaction, il est nécessaire de la suppléer par un autre processus. L'équation qui doit être résolue dans le cadre de ce travail possède un point d'inflexion à tangente verticale. Les seules méthodes itératives aptes à converger vers des points situés à proximité de ce point d'inflexion sont des méthodes d'ordre inférieur, ne requérant ni le calcul de la pente de la fonction $F(x)$ pour l'itéré $x^{(i)}$, ni l'utilisation d'une pente approchée¹. L'expression de l'itéré $x^{(i+1)}$ ne doit être obtenue qu'en estimant la valeur de la fonction $F(x)$ en différents points.

¹ La méthode de Newton-Raphson modifiée fonctionne bien pour le passage des points d'inflexion. Elle consiste à ne pas calculer la pente de la fonction $F(x)$ à chaque point x_i mais à considérer plutôt une pente fixe qui est plus grande que la pente de la fonction au point d'inflexion. Cette technique ne saurait guère être d'utilité pour l'équation à résoudre puisque le point d'inflexion est à tangente verticale !

Ainsi par exemple, pour la résolution d'une seule équation, la dichotomie est une technique assez lente mais convergeant avec certitude puisque la fonction est monotone et non bornée. Cette méthode consiste à séparer un intervalle en deux parties à chaque itération, et conserver celle dans laquelle la racine se trouve. Cette méthode est applicable car les limites A et B fournies par Newton-Raphson constituent un premier intervalle dans lequel la racine se trouve. Si la dichotomie fonctionne effectivement bien pour la résolution d'une équation non linéaire, il n'existe cependant pas d'adaptation de cette technique à la résolution de systèmes d'équations non linéaires. Puisque l'objectif du travail consiste en la résolution d'un système, cette technique ne sera pas employée.

La regula falsi est une autre méthode qui converge toujours dans le cas d'une fonction monotone. Pour ne pas calculer de pente, elle fonctionne avec deux points : un point de fuite x_f et un itéré courant identifiable au x_i de la méthode de Newton-Raphson. On obtient l'itéré suivant $x^{(i+1)}$ en prenant l'intersection entre l'horizontale $F(x) = f$ et la droite joignant les points $(x_f, F(x_f))$ et $(x^{(i)}, F(x^{(i)}))$.

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + (x_f - x^{(i)}) \frac{R(x^{(i)})}{R(x^{(i)}) - R(x_f)} \quad (2.22)$$

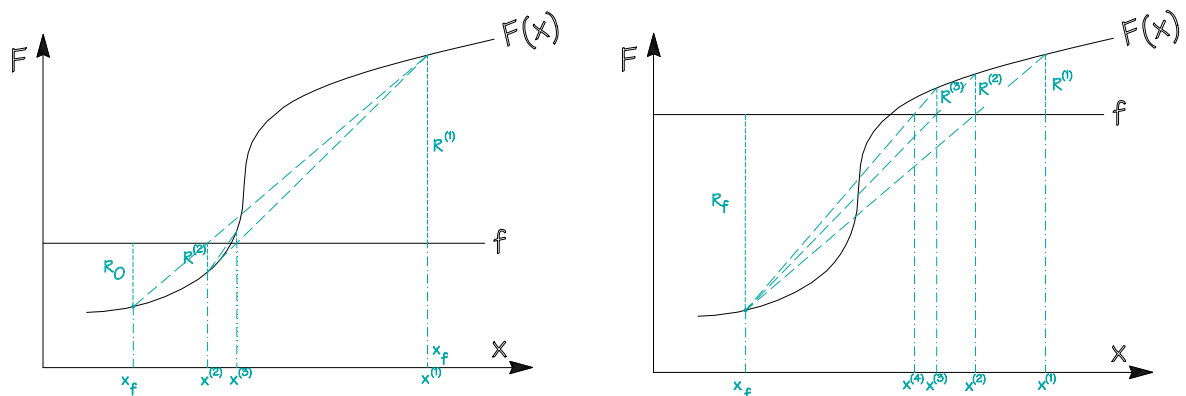


FIGURE 2.8. ILLUSTRATIONS DE LA REGULA FALSI

Ensuite, le résidu $R^{(i+1)}$ relatif à cette nouvelle estimation de la solution est calculé. S'il est du même signe que celui du point de fuite, ce dernier est modifié : il prend la valeur de l'itéré $x^{(i)}$ (Fig. 2.8, gauche ; $R^{(2)}$ est du même signe que R_f , x_f prend la valeur de $x^{(1)}$). Par contre, si le résidu $R^{(i+1)}$ est de signe contraire au résidu du point de fuite, ce dernier est conservé pour l'itération suivante (Fig. 2.8, droite ; $R^{(2)}$ est de signe contraire à R_f).

Les itérations se poursuivent donc en réduisant à chaque fois, pour un signe donné, la valeur absolue du résidu. Elles sont poursuivies jusqu'à l'obtention d'une précision suffisante souvent exprimée en fonction des résidus comme pour Newton-Raphson (Eq. 2.21).

Résolution d'un système d'équations non linéaires

L'objectif du travail consiste en la résolution d'un système d'équations non linéaires. Il était cependant avantageux de rappeler les principes élémentaires de la résolution d'une seule équation car la résolution d'un système se base sur la même philosophie.

Admettons que le système à résoudre s'écrive sous la forme suivante :

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots \\ F_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{cases} = \begin{cases} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{cases} \quad (2.23)$$

où F_1, F_2, \dots, F_N représentent N fonctions non linéaires des N inconnues x_1, x_2, \dots, x_N .

Les N fonctions résidus sont définies de la même façon que pour la résolution de l'équation à une seule inconnue : $R_j(x_1, x_2, \dots, x_N) = f_j - F_j(x_1, x_2, \dots, x_N)$; [$j = 1, 2, \dots, N$]. Le problème consiste donc à déterminer les N valeurs à donner aux variables x_j de façon à annuler simultanément les N résidus. En toute généralité, plusieurs N -uples de solutions pourraient satisfaire cette condition mais chacune des fonctions traitées dans le cadre de ce travail est monotone et non bornée, ce qui assure l'unicité de la solution.

La méthode de Newton-Raphson à N dimensions propose, en partant d'une première approximation $\{x\}^{(0)}$, de construire une suite d'itérés par la relation :

$$\{x\}^{(i+1)} = \{x\}^{(i)} + [J]^{(i)-1} \cdot \{R\}^{(i)} \quad (2.24)$$

où $[J]$ est la matrice jacobienne relative au système d'équations à résoudre. Elle est

définie par : $[J]_{jk}^{(i)} = \left. \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right|_{\{x\}=\{x\}^{(i)}} \quad [j, k = 1, 2, \dots, N]$.

Les itérations sont poursuivies jusqu'à l'obtention d'une précision suffisante, souvent exprimée en fonction d'une norme du résidu :

$$\text{Critère d'arrêt : } \frac{|\{R\}^{(i)}|}{|\{f\}|} \leq 10^{-\text{precision}} \quad (2.25)$$

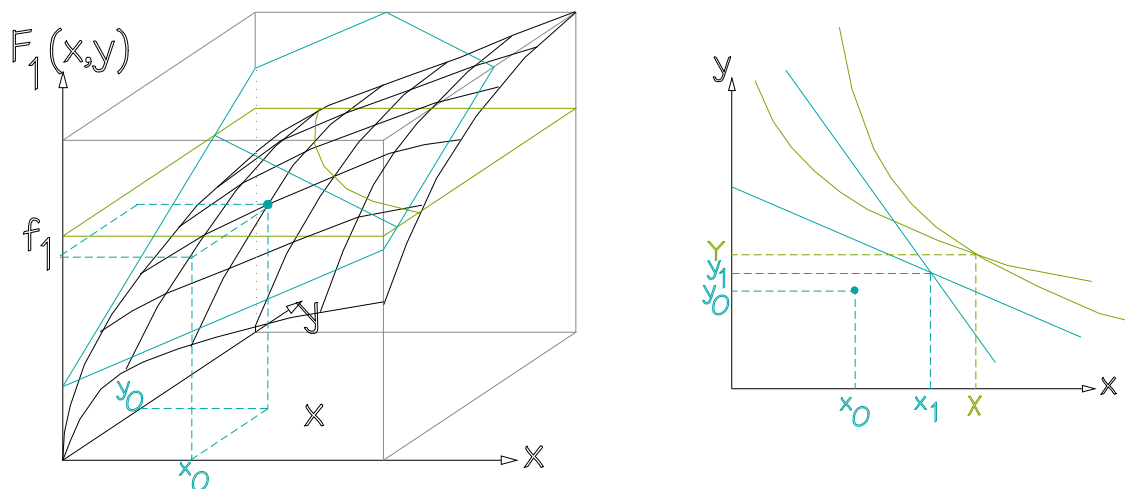


FIGURE 2.9. ILLUSTRATIONS DE NEWTON-RAPHSON A DEUX DIMENSIONS

L'interprétation géométrique devient rapidement compliquée dès que le nombre d'équations s'accroît. Ainsi, par exemple, pour un système de deux équations non linéaires à deux inconnues (x, y) , la figure 2.9 illustre la représentation géométrique de la méthode de Newton-Raphson. Le dessin de gauche représente la fonction $F_1(x, y)$; la fonction $F_2(x, y)$ n'est pas représentée sur le schéma. Ces deux fonctions doivent chacune prendre des valeurs connues : f_1 et f_2 . Partant d'une estimation $(x^{(0)}, y^{(0)})$ de la solution, la méthode revient à linéariser F_1 et F_2 dans le voisinage de $(x^{(0)}, y^{(0)})$. On obtient ainsi les plans tangents aux deux surfaces en ce point. Pour chacune des fonctions, on relève l'intersection entre le plan obtenu et le plan horizontal d'équation $F_j = f_j$ ($j = 1, 2$). On obtient ainsi les deux droites représentées sur la partie droite du schéma. L'intersection de ces deux droites représente une nouvelle estimation $(x^{(1)}, y^{(1)})$ de la solution du système.

De même que pour la résolution d'une seule équation non linéaire, cette méthode est défailante lors du passage des points d'inflexions. En cas de divergence, il est possible d'exécuter une regula falsi sur chacune des variables indépendamment l'une de l'autre. Ce principe est basé sur un vecteur de fuite $\{x_f\}$ et un vecteur courant $\{x\}^{(i)}$; les résidus associés à ces deux vecteurs sont respectivement notés $\{R_f\}$ et $\{R\}^{(i)}$. Chacune des composantes de l'itéré suivant $\{x\}^{(i+1)}$ est calculée séparément :

$$\{x\}_j^{(i+1)} = \{x\}_j^{(i)} + \left(\{x_f\}_j - \{x\}_j^{(i)} \right) \frac{\{R\}_j^{(i)}}{\{R\}_j^{(i)} - \{R_f\}_j}, [j = 1, 2, \dots, N] \quad (2.26)$$

Il faut ensuite calculer le vecteur résidu $\{R\}^{(i+1)}$ relatif à la nouvelle solution $\{x\}^{(i+1)}$ et mettre à jour le vecteur de fuite si nécessaire. Chacune de ses composantes est conservée si les composantes correspondantes des résidus $\{R\}^{(i+1)}$ et $\{R_f\}$ sont de signes contraires. Si par contre elles sont de même signe, la composante du vecteur de fuite doit être remplacée par la composante correspondante de l'ancien vecteur courant $\{x\}^{(i)}$.

E.3. Extrapolation d'Aitken

Malgré l'ordre de convergence élevé de la méthode de Newton-Raphson, il est possible, comme pour toute autre méthode de résolution d'ailleurs, d'utiliser un processus d'accélération de la convergence comme l'extrapolation d'Aitken.

L'itéré suivant $\{x\}^{(i+1)}$ fourni par la relation 2.24 sera désormais considéré comme *estimation de l'itéré suivant* : $\{\tilde{x}\}^{(i+1)}$. En effet, cette valeur et celle de l'itéré en cours $\{x\}^{(i)}$ sont utilisées afin d'obtenir le véritable itéré suivant $\{x\}^{(i+1)}$. Le résidu $\{R\}^{(i)}$ relatif à l'itéré en cours est connu puisqu'il a servi à définir $\{\tilde{x}\}^{(i+1)}$. Après avoir calculé le résidu $\{\tilde{R}\}^{(i+1)}$ relatif à l'estimation de l'itéré suivant, on dispose donc de deux valeurs différentes pour le vecteur $\{x\}$ et des résidus qui leurs sont associées.

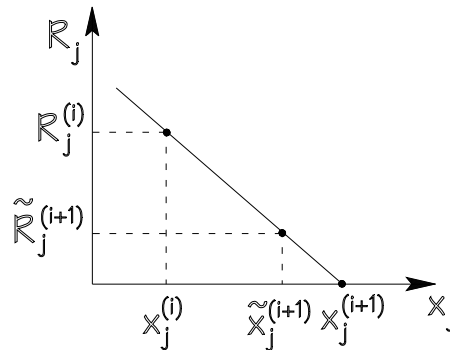


FIGURE 2.10. ILLUSTRATION DE LA METHODE D'EXTRAPOLATION D'AITKEN

L'idée de l'extrapolation d'Aitken consiste à supposer que chacune des fonctions résidus R_j ($j = 1, \dots, N$) est linéaire en l'inconnue x_j . L'estimation de l'itéré suivant $\{\tilde{x}\}^{(i+1)}$ fournie par la méthode de Newton-Raphson peut donc être remplacée par une valeur qui, selon l'hypothèse d'Aitken, serait caractérisée par un résidu nul :

$$\{x\}_j^{(i+1)} = \{x\}_j^{(i)} + \left(\{\tilde{x}\}_j^{(i+1)} - \{x\}_j^{(i)} \right) \frac{\{R\}_j^{(i)}}{\{R\}_j^{(i)} - \{\tilde{R}\}_j^{(i+1)}} \quad [j = 1, \dots, N] \quad (2.27)$$

Cette méthode sera systématiquement appliquée lors des itérations de Newton-Raphson. On peut démontrer que la convergence de la méthode obtenue en combinant Aitken et Newton-Raphson est maintenant cubique (et non plus quadratique).

Chapitre 3 : La génération d'accélérogrammes

A. INTRODUCTION

Ainsi que mentionné dans le chapitre 2, le dimensionnement sismique des ouvrages d'art à comportement non linéaire doit *de préférence*¹ passer par un accélérogramme. Mis à part certains codes de calcul nationaux, tels la norme iranienne qui fournit deux accélérogrammes réels enregistrés sur le territoire, seuls des spectres de réponse sont fournis dans les normes. Leur forme est souvent définie d'après l'accélération maximale du sol, le type de sous-sol et l'amortissement relatif de la structure.

En particulier, vu l'étendue géographique d'application de l'Eurocode 8, il paraît illusoire pour cette norme de pouvoir procurer des accélérogrammes représentatifs de chaque région. Le dimensionnement à partir d'accélérogrammes n'est pas proscrit mais il convient alors de recourir à leur génération ou à leur sélection. Les seules grandeurs quantitatives fournies par l'Eurocode sont des spectres de dimensionnement sur lesquels une analyse spectrale peut être basée. Ce type d'analyse n'est vraiment approprié qu'aux structures dont le comportement peut être considéré linéaire. Le dimensionnement d'une structure non linéaire, conformément à l'Eurocode 8, doit donc inévitablement recourir à la sélection d'un accélérogramme réel ou à sa génération, tout en s'assurant qu'il représente correctement l'action sismique. Les accélérogrammes utilisés pour le dimensionnement sont habituellement classés en trois catégories :

- les accélérogrammes *réels* enregistrés lors de tremblements de terre ;
- les accélérogrammes *synthétiques* générés à partir de modèles de ruptures ou glissements de failles ;
- les accélérogrammes *artificiels* générés de façon à correspondre à un spectre de réponse désiré.

¹ Certains auteurs n'excluent pas la possibilité de recourir à une analyse spectrale dans le cas de structures dont les non linéarités occupent une importance réduite.

A.1. Les accélérogrammes réels

Ce type d'accélérogramme se rencontre tout d'abord dans le cas de codes nationaux, pour des pays de petite superficie et tels que les caractéristiques géologiques puissent être considérées comme uniformes sur l'entièreté du territoire. Les accélérogrammes enregistrés peuvent ainsi être utilisés pour le dimensionnement d'ouvrages d'art. La plupart des pays dispose de ce type d'information ; la Belgique ne bénéficie cependant pas d'enregistrements réels utilisables pour le dimensionnement. Si un accélérogramme est nécessaire, il faudra soit en trouver un dans un pays voisin, soit avoir recours à la génération. D'autres états tels l'Iran et la Nouvelle-Zélande n'ont par contre la possibilité que d'utiliser des enregistrements ; les normes en vigueur ne permettent pas d'employer des accélérogrammes artificiels ou synthétiques.

L'autre cas fréquent d'utilisation d'accélérogrammes réels se rencontre dans le cas du dimensionnement d'ouvrages d'art pour lesquels une étude plus poussée peut être entreprise en ce qui concerne le risque sismique : type de faille, distance par rapport au plan de faille, profondeur focale,... L'estimation de ces grandeurs permet de rentrer dans une base de données d'accélérogrammes (comme par exemple le « CD-ROM of European accelerograms ») et de sélectionner les enregistrements réels représentant le mieux l'action sismique à escompter.

A.2. Les accélérogrammes synthétiques

Ce type d'accélérogramme est obtenu à partir de considérations géologiques du site à étudier. L'accélérogramme est généré à partir d'un schéma de rupture le long d'une faille. En raison de son évidente complexité au niveau des informations nécessaires à l'obtention de résultats cohérents, cette technique n'est employée que lors de projets spécifiques par leur importance ou par leur géologie locale.

A.3. Les accélérogrammes artificiels

Ce type d'accélérogramme correspond à celui décrit dans le chapitre 1 : à partir d'un processus aléatoire, il est généré de façon telle que son spectre de réponse élastique corresponde au spectre de projet (le spectre cible). Puisqu'un spectre est la seule donnée nécessaire à la génération d'un accélérogramme, cette méthode s'avère être la plus rapide quand aucun enregistrement n'est disponible pour la zone sismique considérée.

B. LES DIFFERENTES METHODES DE GENERATION

Le spectre de réponse associé à un accélérogramme est unique ; il peut par exemple être calculé par l'intégrale de Duhamel comme cela a été rappelé. Ce passage de l'accélérogramme au spectre de réponse est accompagné d'une perte de données puisque

qu'à un spectre déterminé correspond un infinité d'accélérogrammes. C'est pour cette raison que l'on parle de *génération* d'accélérogrammes.

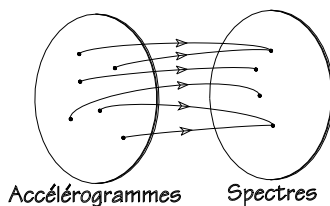


FIGURE 3.1. RELATIONS ENTRE ACCELEROGRAMMES ET SPECTRES

En raison du caractère non univoque lié au passage d'un spectre à un accélérogramme, la génération est généralement basée sur la création d'une suite de nombres aléatoires . Les méthodes de génération sont différentes d'après les paramètres affectés du caractère aléatoire et les lois de distribution choisies ; ci-dessous sont présentées les trois philosophies principales.

B.1. Décomposition de Fourier

Cette méthode, que l'on doit à Gasparini et Vanmarcke est présentée en premier lieu car historiquement, c'est la première qui ait été développée (1976). Ses deux concepteurs l'ont mise en application au moyen du programme SIMQKE qui a connu et connaît toujours une renommée internationale. L'idée consiste à décrire l'accélérogramme \ddot{u}_g par une intervalle de temps limité d'une fonction stationnaire aléatoire. Mathématiquement, la fonction est représentée par une superposition d'ondes sinusoïdales caractérisées chacune par une amplitude A_i et un angle de déphasage ϕ_i :

$$\ddot{u}_g = \sum_{i=1}^p A_i \cdot \sin (\omega_i \cdot t + \phi_i) \tag{3.1}$$

La théorie de l'analyse vibratoire fournit une relation entre le spectre de réponse S_{pe} et la fonction de densité spectrale $G(\omega)$ correspondante :

$$G(\omega_i) = \frac{1}{\omega_i \left(\frac{\pi}{4 \cdot \xi} - 1 \right)} \left[\frac{(S_{pe}(\omega_i))^2}{r^2} - \int_0^{\omega_i} G(\omega) d\omega \right] \tag{3.2}$$

où ξ représente le coefficient d'amortissement relatif et r le facteur de pic reliant la réponse spectrale d'un système à un degré de liberté et la déviation standard de la réponse.

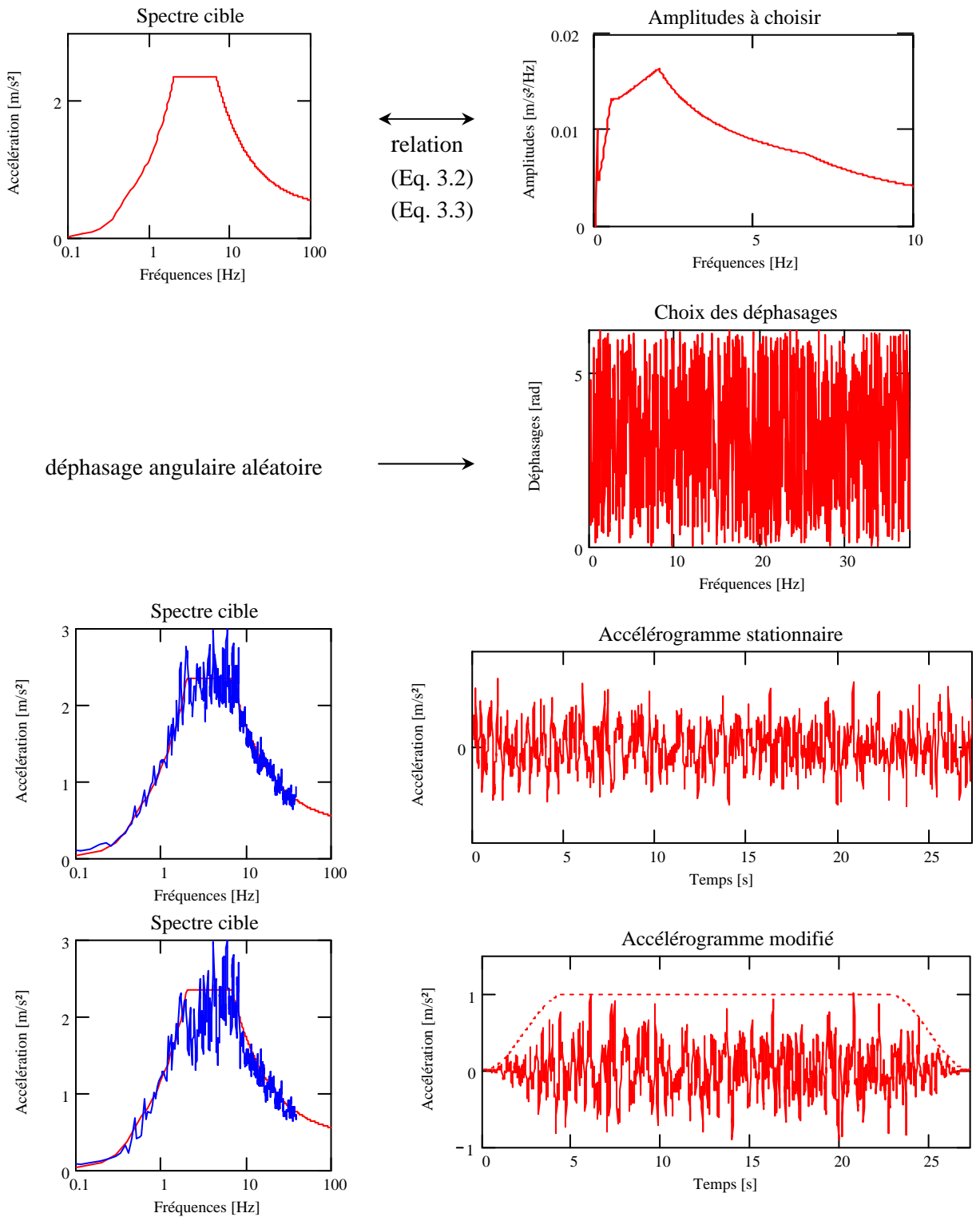


FIGURE 3.2. FONCTIONNEMENT DU PROGRAMME SIMQKE (GASPARINI / VANMARCKE)

Pour que le spectre de réponse de l'accélérogramme généré corresponde au spectre désiré $S_{pe}(\omega)$, les amplitudes A_i doivent être choisies de telle sorte que :

$$G(\omega_i)\Delta\omega_i = \frac{A_i}{2} \quad (3.3)$$

Quant aux déphasages ϕ_i , ils sont choisis de manière aléatoire avec une loi de distribution uniforme sur l'intervalle $[0 ; 2\pi[$.

On obtient ainsi une fonction stationnaire à multiplier par une enveloppe de façon à représenter le caractère transitoire des accélérogrammes réels. Ce premier accélérogramme est ensuite ajusté itérativement pour obtenir une meilleure concordance avec le spectre cible. La figure 3.2. résume schématiquement les étapes de la génération.

Cette méthode simple et attractive au premier abord est cependant dotée d'un inconvénient majeur : ce processus est assez lent puisqu'il nécessite, en chaque instant, l'addition des contributions des p harmoniques ; le nombre d'opérations devient vite très important si une bonne précision doit être atteinte.

B.2. Filtrage d'un processus aléatoire

Alors que la méthode de Gasparini et Vanmarcke attribuait le caractère aléatoire de la génération au déphasage angulaire, cette méthode consiste à supposer l'accélérogramme lui-même comme un processus aléatoire.

L'accélérogramme généré aléatoirement ne satisfait évidemment pas encore les critères de concordance requis. La méthode consiste à le modifier de façon à ce que son spectre corresponde au spectre cible. Les techniques sont très nombreuses mais toujours basées sur des modifications soit dans le domaine fréquentiel (filtrage des fréquences non désirées), soit dans le domaine temporel (transformation en un processus non stationnaire). Des exemples de ces modifications seront donnés lors du développement de la solution retenue.

B.3. Adaptation d'un accélérogramme réel

Cette troisième philosophie ne fait pas appel à la création d'une suite de nombres aléatoires. Cette fois, c'est un accélérogramme réel qui est utilisé et modifié itérativement de façon à ce que son spectre de réponse corresponde au spectre cible. Les modifications sont identiques à celles de la catégorie précédente, exception faite que dans ce cas, l'accélérogramme possède déjà les caractéristiques temporelles adéquates. Les modifications sont donc exclusivement réalisées dans le domaine fréquentiel. Ces méthodes fonctionnent aussi bien que les précédentes à condition de disposer d'un accélérogramme de départ dont les caractéristiques du sous-sol sont semblables à celles du site en question.

C. LA SOLUTION RETENUE

Les brèves descriptions des différentes philosophies montrent que la méthode la mieux appropriée aux exigences de ce travail est basée sur le filtrage d'un processus aléatoire. Puisque cette méthode peut encore être appliquée de multiples façons, ce paragraphe indique précisément les choix qui ont été réalisés.

C.1. Génération d'une première fonction du temps.

C'est à la première étape et à elle seule qu'est lié le caractère aléatoire de la génération. Elle consiste à choisir n_a nombres aléatoires avec une loi de distribution gaussienne de moyenne nulle et d'écart type unitaire. Une première *fonction du temps*¹ $y(t)$ peut être établie en associant les n_a valeurs choisies à n_a abscisses équidistantes sur l'axe temporel ($\Delta t, 2.\Delta t, \dots, n_a.\Delta t$). La valeur initiale en $t = 0$ est systématiquement choisie égale à zéro.

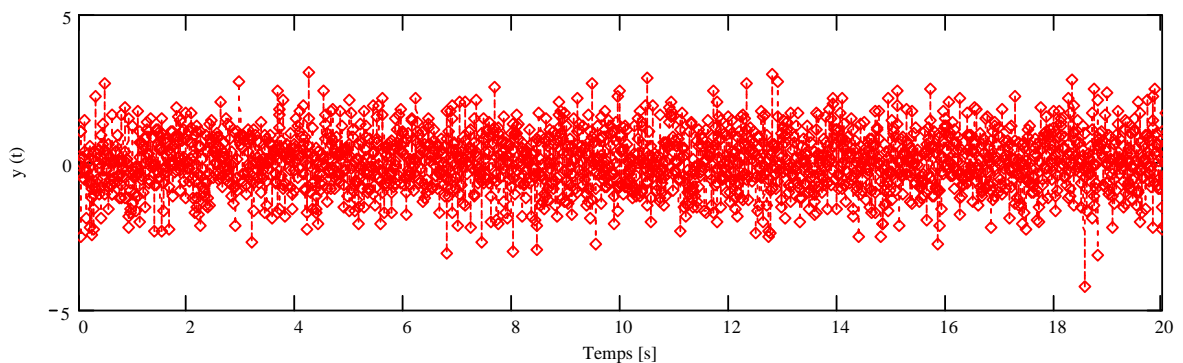


FIGURE 3.3 EXEMPLE : $N = 2000$ $\Delta T = 0.01$ s.

Pour rappel, le pas de temps à choisir lors d'un calcul dynamique doit être choisi :

- afin de représenter correctement la sollicitation ;
- inférieur à la limite de stabilité de l'algorithme dans le cas de méthodes conditionnellement stables ; ce critère est généralement exprimé en limitant le pas de temps de calcul par rapport aux périodes propres de la structure.

Le pas de temps habituellement choisi pour représenter correctement les tremblements de terre est généralement $\Delta t = 0,01$ s. Le pas de temps de génération aura donc cet ordre de grandeur pour autant qu'il satisfasse aussi l'autre condition.

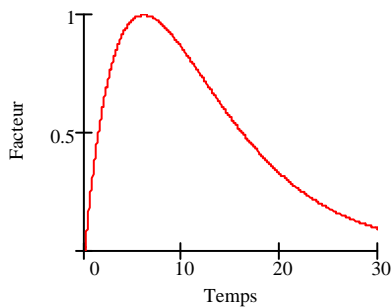
¹ La forme de cette fonction ne permet pas encore de l'appeler accélérogramme mais après modifications temporelles et fréquentielles, c'est cette fonction qui deviendra l'accélérogramme recherché.

Le nombre de pas de temps dépend de la durée de l'accélérogramme à générer. Cette grandeur est donnée dans les codes de calcul et est généralement comprise entre 15 et 30 à 40 secondes.

C.2. Modification temporelle

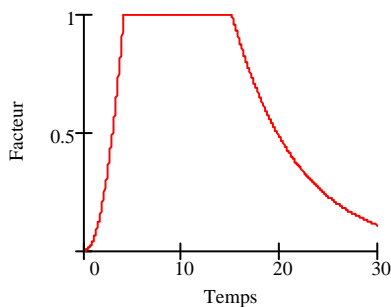
La fonction $y(t)$ a été générée par un processus aléatoire qualifiable de « stationnaire » puisqu'en chaque instant $i.\Delta t$ ($0 \leq i \leq n_a$), la fonction prend un valeur aléatoire respectant la même loi de distribution. Donc, a priori, la fonction $y(t)$ peut indifféremment prendre des « grandes valeurs » au début, au milieu ou à la fin de son intervalle de définition $[0, n_a.\Delta t]$. Ceci n'est évidemment pas cohérent avec les accélérogrammes réels pour lesquels on sait que l'amplitude est plus importante pendant 10 à 20 secondes puis s'atténue doucement.

La première modification s'opère donc dans le domaine temporel et consiste à multiplier la fonction $y(t)$ par une fonction non stationnaire $f(t)$ reproduisant les variations d'amplitudes d'accélérogrammes réels. Puisque cette fonction enveloppe ne sert finalement qu'à donner un aspect acceptable à l'accélérogramme, il n'est pas étonnant qu'elle prenne des formes différentes selon les auteurs. Cependant, vu leur emploi fréquent, les trois fonctions décrites ci-dessous méritent d'être mentionnées :



$$f(t) = a_1.t.e^{-a_2.t}$$

$$[a_1 = 0,450 ; a_2 = 0,167]$$



$$f(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq t_1 \\ 1 & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ e^{c.(t-t_2)} & \text{si } t_2 \leq t \end{cases}$$

$$[t_1 = 4 \text{ s} ; t_2 = 15 \text{ s} ; c = 0,15]$$

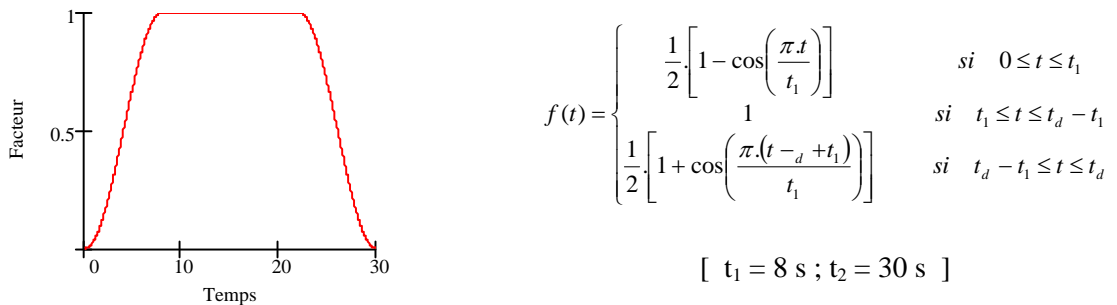


FIGURE 3.4. LES FONCTIONS ENVELOPPES

Du fait de sa simplicité, c'est la première fonction qui a été retenue. Les valeurs des paramètres $a_1=0,450$ et $a_2=0,167$ intervenant dans cette fonction ont été obtenues à partir de traitements statistiques d'un grand nombre de tremblements de terre et seront conservées dans le programme. Cette forme ne donne cependant pas de bons résultats pour les accélérogrammes de courtes durées (car la valeur de la fonction est trop importante et le tremblement de terre s'arrête trop brusquement). Pour de telles sollicitations, la troisième forme est systématiquement utilisée. Il s'agit de la fenêtre de Hanning que Gasparini et Vanmarcke utilisent dans SIMQKE. L'avantage de cette fonction est l'interprétation directe des coefficients t_1 et t_2 qui interviennent dans sa formulation. Ces deux coefficients peuvent être adaptés facilement en fonction de la durée de l'accélérogramme à générer.

Après multiplication, la fonction $y(t)$ donne une première forme d'accélérogramme $a(t)$:

$$a(t)=y(t).f(t) \tag{3.4}$$

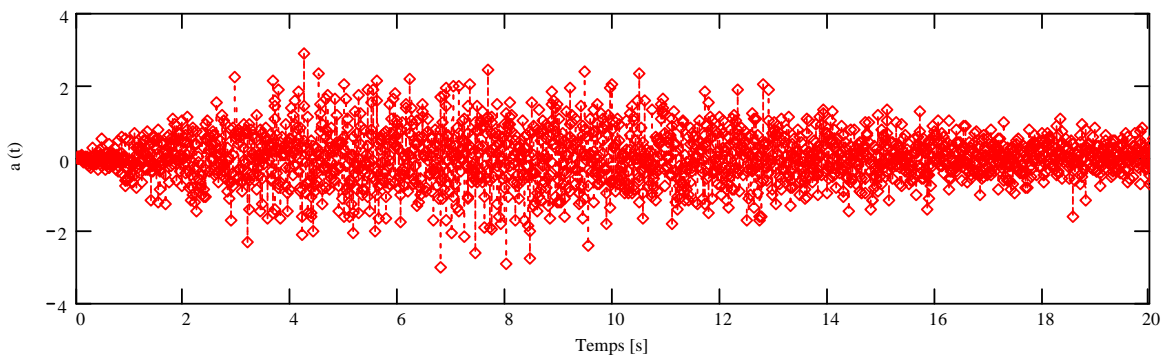


FIGURE 3.5. « ACCELEROGRAMME » APRES MODIFICATION TEMPORELLE

C.3. Modifications fréquentielles

Maintenant que la fonction générée montre un aspect présentable dans le domaine temporel, il reste à lui donner un contenu fréquentiel semblable à celui d'un accélérogramme réel. En effet, le spectre de réponse de la fonction obtenue n'a pas encore la forme traditionnelle des spectres de réponse d'accélérogrammes réels et encore moins la forme de celui désiré.

Le spectre de réponse présente généralement une amplitude plus importante dans le domaine de fréquence compris dans l'intervalle [2 Hz ; 10 Hz]. Cette étape consiste donc à filtrer la transformée de Fourier $A(f)$ de l'accélérogramme $a(t)$ de façon à atténuer d'une part les fréquences trop élevées (filtre H_1) et d'autre part les fréquences faibles (filtre H_2).

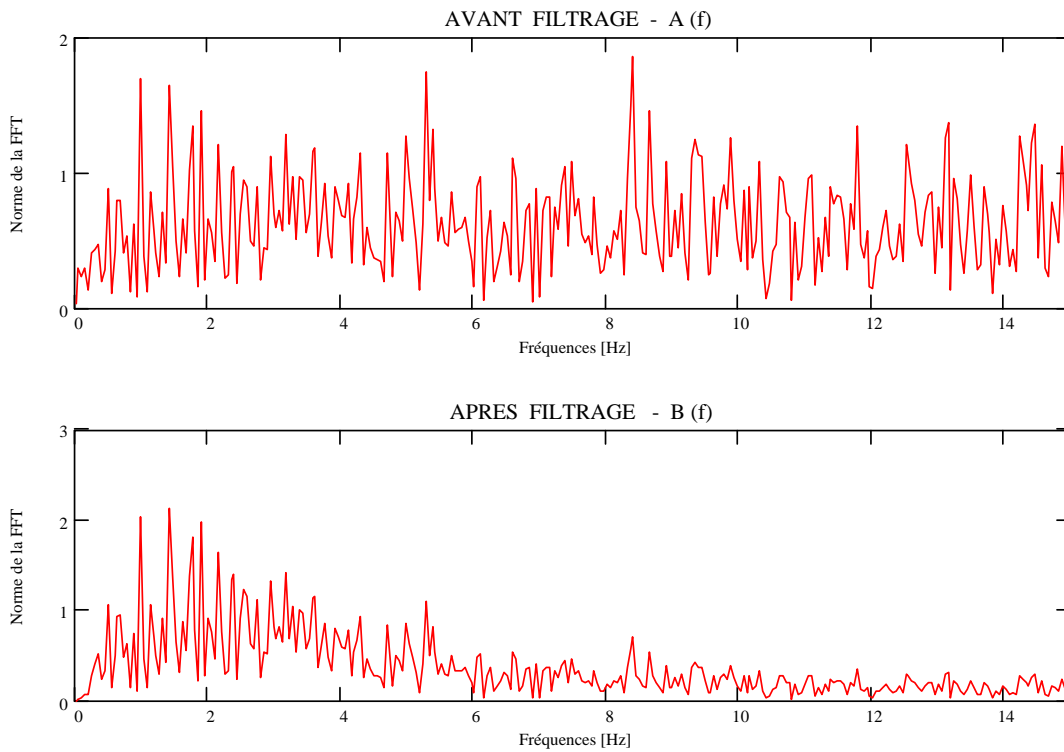


FIGURE 3.6. CONTENU FREQUENTIEL AVANT ET APRES FILTRAGE

On obtient donc un nouveau contenu fréquentiel :

$$B(f) = A(f).H_1(f).H_2(f) \tag{3.5}$$

$$\text{où } H_1(f) = \frac{1 + 2.i.\xi_1.\frac{f}{f_1}}{1 - \left(\frac{f}{f_1}\right)^2 + 2.i.\xi_1.\frac{f}{f_1}}$$

est le filtre de Kanai/Tajimi destiné à accroître le

contenu dans le voisinage de la fréquence f_1 et diminuer le contenu pour les fréquences plus grandes ;

$$\text{et } H_2(f) = \frac{\left(\frac{f}{f_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{f}{f_2}\right)^2 + 2.i.\xi_2.\frac{f}{f_2}}$$

est le filtre atténuant les basses fréquences.

Après avoir filtré la transformée de Fourier de la fonction $a(t)$, on revient dans le domaine temporel à l'aide de la transformée de Fourier inverse et on obtient ainsi un premier accélérogramme $b(t)$ dont le contenu en fréquence et la forme dans le temps ressemblent à un accélérogramme réel.

Le plateau du spectre cible est généralement donné en fonction de l'accélération maximale du sol (paramètre a_g de l'Eurocode 8). Afin qu'il soit cohérent avec ce spectre, l'accélérogramme $b(t)$ doit être normé de sorte que son maximum corresponde à l'accélération ayant servi à la définition du spectre. Il faut cependant remarquer que le résultat de cette première génération va être modifié itérativement ; l'accélération maximale après convergence s'en trouvera donc légèrement modifiée.

C.4. Calcul du premier spectre

Puisque les données du spectre cible n'ont pas encore été utilisées jusqu'ici, il n'y a aucune raison que le spectre de réponse de l'accélérogramme généré corresponde au spectre demandé. Le graphique ci-dessous montre clairement la discordance entre le spectre calculé et un spectre cible quelconque (celui du graphique correspond à un spectre de l'Eurocode 8, $\alpha = 0,01$; Subsoil Class D et $\xi = 0,05$).

La correspondance des deux spectres va être obtenue en les comparant dans des intervalles de fréquences. Il est important de remarquer que les données du spectre cible auraient pu être introduites plus tôt dans les étapes de la génération. Mais, le calcul du spectre de réponse est coûteux en temps de calcul ; il est donc préférable de ne le calculer que lorsque l'accélérogramme a déjà un aspect et un contenu fréquentiel acceptables.

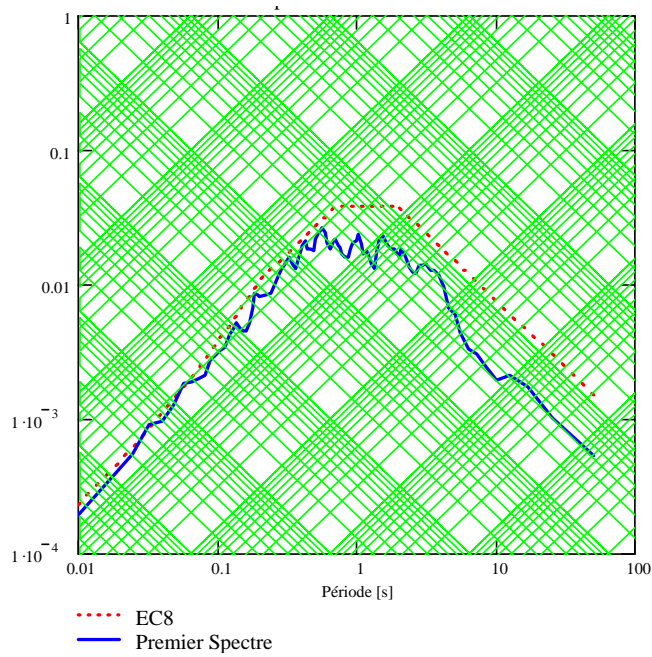


FIGURE 3.7. SPECTRE DU PREMIER ACCELEROGRAMME

C.5. Corrections fréquentielles

C'est seulement maintenant qu'interviennent les données relatives au spectre cible. Pour chacune des fréquences de la transformée de Fourier, on calcule le rapport entre les ordonnées des spectres cible et calculé ; un facteur correctif est attribué à chaque fréquence. La figure 3.8. donne l'évolution du facteur correctif correspondant aux spectres de la figure 3.7. :

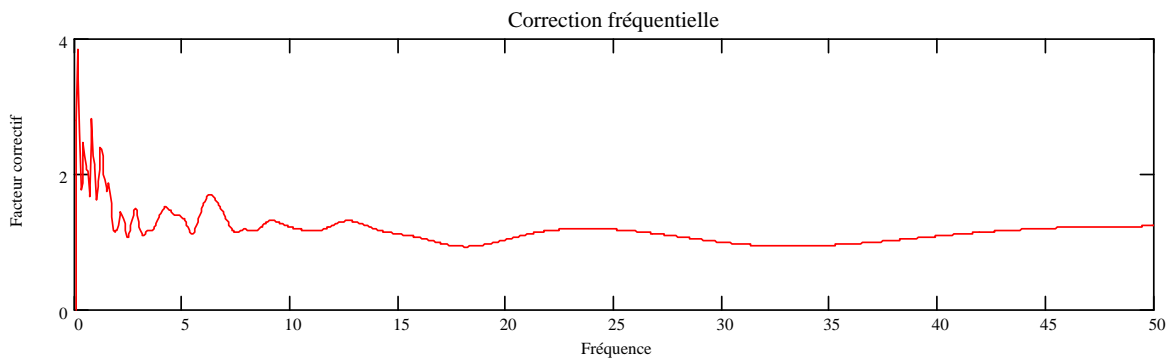


FIGURE 3.8. CORRECTION FREQUENTIELLE A APPLIQUER SUR LA TRANSFORMEE DU PREMIER ACCELEROGRAMME

L'idéal est que ce facteur correctif soit égal à l'unité pour chaque fréquence. L'adaptation de l'accélérogramme consiste à multiplier sa transformée de Fourier $B(f)$ par cette fonction de correction :

$$C(f) = B(f).correction(f) \tag{3.6}$$

La fonction $C(f)$ ainsi obtenue est la transformée de Fourier d'un accélérogramme $c(t)$ dont le spectre de réponse est bien plus proche du spectre cible que ce que ne l'étaient

les spectres des accélérogrammes $a(t)$ et $b(t)$. Pour l'exemple développé jusqu'ici, le spectre de réponse de l'accélérogramme $c(t)$ est donné à la figure 3.9.

Il est encore possible, à partir de ce spectre de calculer de nouveaux facteurs correctifs pour modifier la transformée $C(f)$ et ainsi obtenir une nouvelle transformée $D(f)$. En l'inversant, elle fournit un nouvel accélérogramme $d(t)$ dont le spectre de réponse est encore plus proche du spectre désiré. Les itérations peuvent ainsi être prolongées jusqu'à obtenir la concordance voulue.

Le procédé de génération qui vient d'être explicité est basé sur le filtrage d'un processus stationnaire aléatoire ; c'est la seule technique qui est vraiment développée dans le travail puisque c'est celle qui a été retenue ; néanmoins, on comprend aisément que la génération à partir d'un accélérogramme réel suive le même raisonnement, en débutant directement à la correction fréquentielle.

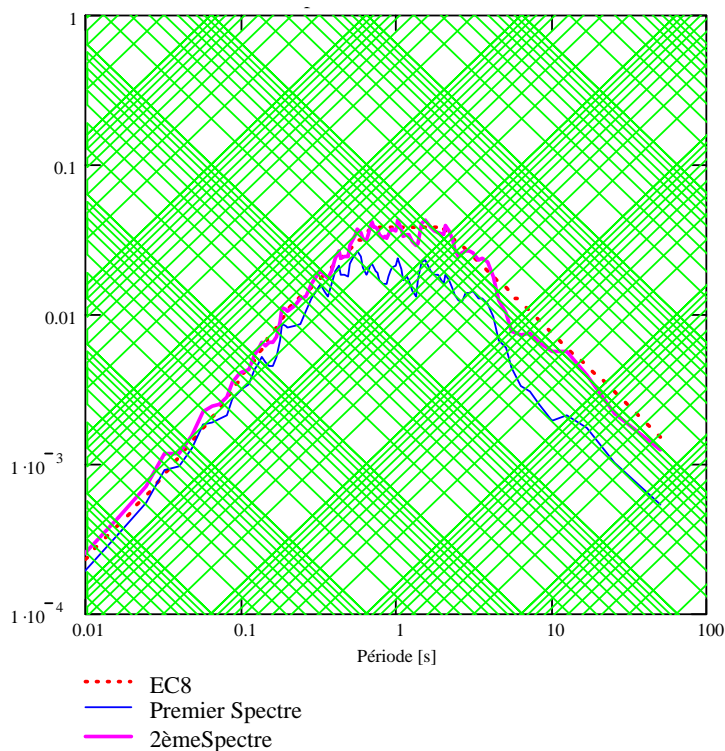


FIGURE 3.9. SPECTRE DE REPONSE APRES UNE ITERATION

D. LES RECOMMANDATIONS DE L'EUROCODE 8

D.1. Les spectres de réponse élastiques

Pour l'Eurocode 8, l'effet des tremblements de terre en un point de la surface du sol peut être apprécié à l'aide de spectres de réponse élastique. Ils sont maintenant

rassemblés en deux groupes, les spectres de Type 1 et de Type 2, selon la magnitude du tremblement de terre à attendre (proche ou lointain). Pour chacune de ces deux catégories, les spectres sont entièrement définis par trois paramètres :

- a_g , l'accélération maximale du sol. Elle est exprimée en pourcentage de l'accélération de la pesanteur g ;
- les caractéristiques du sous-sol sont prises en compte à l'aide d'une classe de sous-sol : il existe cinq classes (A, B, C, D et E). La classification dans l'une ou l'autre classe est réalisée à l'aide du profil stratigraphique du terrain, de la vitesse de propagation des ondes de cisaillement ou du nombre de coups de l'essai SPT.
- ξ , l'amortissement relatif de la structure

La classification du sous-sol détermine les valeurs des paramètres T_B , T_C , T_D et S . Elles sont données dans le tableau 3.1.

	Type 1				Type 2			
<u>Sous-sol</u>	<u>T_B</u>	<u>T_C</u>	<u>T_D</u>	<u>S</u>	<u>T_B</u>	<u>T_C</u>	<u>T_D</u>	<u>S</u>
A	0.1	0.4	2	1	0.05	0.25	1.2	1
B	0.15	0.5	2	1.1	0.05	0.25	1.2	1.1
C	0.2	0.6	2	1.35	0.1	0.25	1.2	1.5
D	0.2	0.7	2	1.35	0.1	0.3	1.2	1.8
E	0.15	0.5	2	1.4	0.05	0.25	1.2	1.5

TABLEAU 3.1. PARAMÈTRES INTERVENANT DANS LA DÉFINITION DES SPECTRES

L'amortissement relatif de la structure se manifeste dans la forme du spectre de réponse élastique par l'intermédiaire du paramètre $\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + \xi(\%)}}$.

L'équation analytique des spectres est donnée par morceaux en fonction de la période de vibration T et des paramètres donnés ci-avant.

$$\begin{aligned}
 0 \leq T \leq T_B & : a_g \cdot S \cdot \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (2,5 \cdot \eta - 1) \right] \\
 T_B \leq T \leq T_C & : a_g \cdot S \cdot 2,5 \cdot \eta \\
 T_C \leq T \leq T_D & : a_g \cdot S \cdot 2,5 \cdot \eta \cdot \frac{T_C}{T} \\
 T_D \leq T & : a_g \cdot S \cdot 2,5 \cdot \eta \cdot \frac{T_C \cdot T_D}{T^2}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

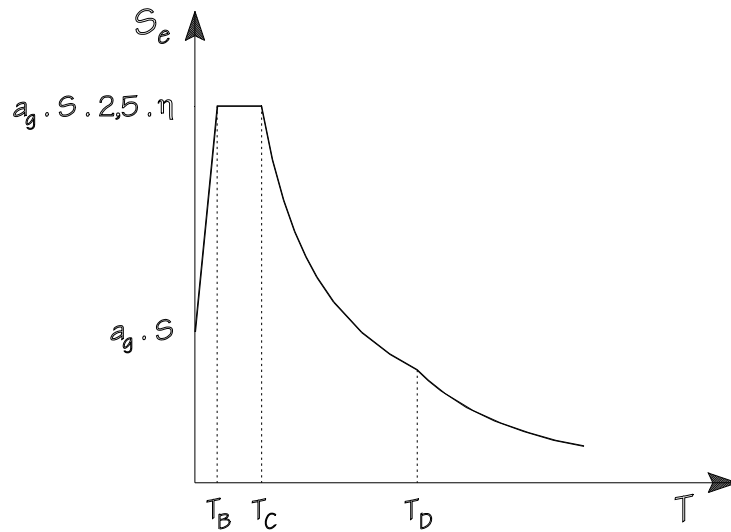


FIGURE 3.10. SPECTRE DE RÉPONSE ELASTIQUE (EUROCODE 8)

D.2. La génération d'accélérogrammes

Quand un accélérogramme est nécessaire pour le calcul sismique, l'Eurocode 8 permet d'utiliser des accélérogrammes soit réels (à condition qu'ils représentent correctement les sollicitations que les structures pourraient subir), soit artificiels. Les conditions nécessaires à l'utilisation de ces derniers sont les suivantes :

- (1) Les accélérogrammes artificiels doivent être générés de façon à correspondre au spectre de réponse (défini au point D.1.) ;
- (2) La durée de l'accélérogramme doit être cohérente avec la magnitude et les autres paramètres de l'action sismique qui ont servi à déterminer l'accélération maximale a_g ;
- (3) Quand les données spécifiques ne sont pas disponibles, la durée minimum T_s de la partie stationnaire de l'accélérogramme pour les régions épacentrales devrait être de 10 secondes ;
- (4) Le nombre d'accélérogrammes à utiliser doit être tel qu'ils fournissent une mesure statistique (moyenne et variance) stable des quantités importantes de la réponse. L'amplitude et le contenu fréquentiel des accélérogrammes devrait être choisi de telle sorte que leur emploi donne un niveau global de fiabilité comparable à celui relevant de l'utilisation du spectre de réponse élastique ;
- (5) Le paragraphe (4) est supposé satisfait si les règles suivantes sont respectées :
 - a.- Un minimum de 3 accélérogrammes est utilisé.

b.- La moyenne des valeurs du spectre d'accélération pour des périodes nulles n'est pas inférieure à la valeur $a_g.S$ pour le site en question.

c.- Dans l'intervalle de période T_B à T_C du spectre de réponse élastique correspondant au site en question, la moyenne des valeurs du spectre moyen (calculé sur tous les accélérogrammes), calculée sur au moins cinq périodes de contrôle, n'est pas inférieure à la valeur $2,5.a_g.S$ du spectre de réponse élastique.

d.- Aucune valeur du spectre moyen (calculé à partir de tous les accélérogrammes) n'est inférieure à la valeur correspondante du spectre de réponse élastique de plus de 10 %.

E. LE PROGRAMME : GOSCA

E.1. Introduction

Le programme GOSCA (Generation Of Spectrum Compatible Accelerograms) est un générateur d'accélérogrammes tels que leurs spectres de réponse soient compatibles avec des spectres donnés. Ceux-ci peuvent être soit choisis parmi les spectres de l'Eurocode 8, soit fournis points par points dans un fichier de données. La méthode employée a été présentée au paragraphe C et est principalement basée sur le filtrage d'un processus aléatoire puis une correction fréquentielle itérative afin d'obtenir la concordance requise entre les spectres cible et calculé. Le programme est séparé en sous-routines qui correspondent chacune aux étapes de la méthode. La figure 3.11 indique l'ordre dans lequel ces procédures sont appelées.

Le listing complet du programme ainsi que les détails particuliers relatifs à la programmation sont donnés à l'annexe 2. Ces détails ne sont intéressants que lorsqu'il s'agit de comprendre le programme en profondeur.

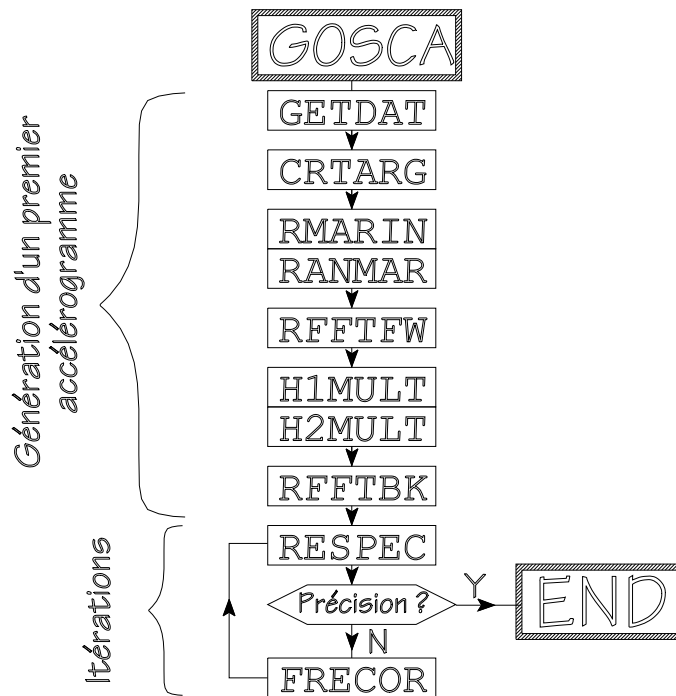


FIGURE 3.11. ORGANIGRAMME DU PROGRAMME GOSCA

E.2. Utilité de chacune des sous-routines

Si les détails de la programmation ne trouvent guère d'intérêt, il est cependant essentiel de mentionner l'utilité de chacune des sous-routines de façon à pouvoir opérer le lien avec la théorie développée au paragraphe C.

<u>Routine</u>	<u>Utilité</u>
GETDAT	Acquisition des données fournies par l'utilisateur
CRTARG	Création du spectre cible et choix des fréquences de comparaison ¹
RMARIN / RANMAR	Génération d'une suite de nombres aléatoires
FFFTFW / FFFTBK	Transformées de Fourier (FFT) directe (FW) et inverse (BK)
H1MULT / H2MULT	Multiplication par les filtres fréquentiels
RESPEC	Calcul du spectre de réponse
FRECOR	Calcul des corrections fréquentielles

¹ Ce choix ne doit pas être quelconque ! (voir paragraphe E.3.)

E.3. Quelques détails particuliers

Choix du pas de temps

La durée de l'accélérogramme est une grandeur fournie par l'utilisateur. Elle permet en principe de calculer le nombre de pas de temps nécessaires puisqu'il est recommandé de choisir des intervalles de 0,01 s. Puisqu'il sera nécessaire dans la suite de calculer la transformée de Fourier de l'accélérogramme, il serait préférable d'utiliser une puissance de deux pour le nombre de pas de temps. La valeur donnée à la *DUREE* fixe automatiquement cette puissance de deux *IPWR* :

$$IPWR = \left\lfloor \frac{\ln(100.DUREE)}{\ln 2} \right\rfloor + 1 \quad (3.8)$$

où la fonction $\lfloor x \rfloor$ représente le plus petit entier inférieur ou égal à x .

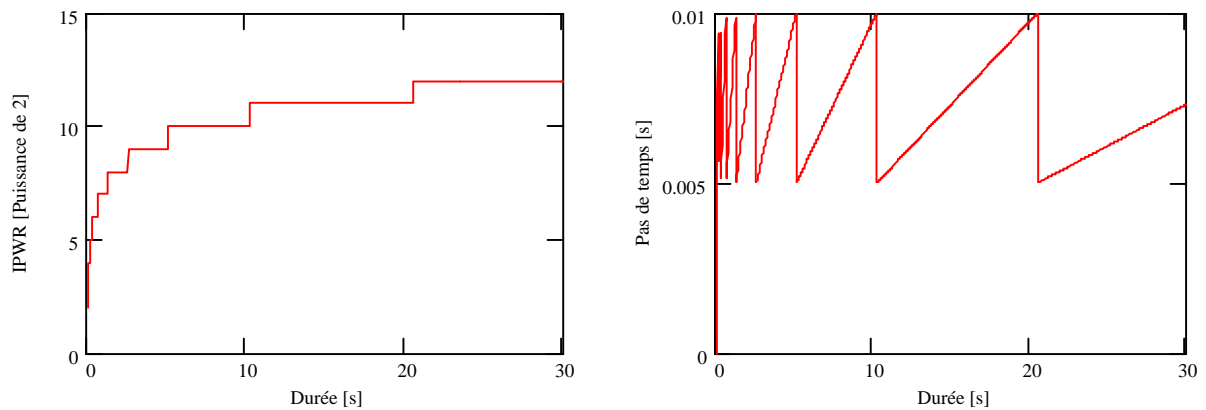


FIGURE 3.12. DETERMINATION DU NOMBRE DE PAS DE TEMPS EN FONCTION DE LA DUREE CHOISIE POUR LE TREMBLEMENT DE TERRE

Pour les valeurs habituellement données à la durée de la sollicitation, *IPWR* devrait être égal à 11 ou 12¹. La figure 3.12 montre que la définition de *IPWR* donnée par l'équation 3.8 correspond à choisir un pas de temps compris entre 0,005 s et 0,01 s.

Choix des fréquences de comparaison

Le spectre de réponse de l'accélérogramme généré est calculé pour un nombre discret de fréquences *NFREQ*. Il est inutile de préciser que ces *NFREQ* fréquences de comparaison doivent être choisies de façon à représenter correctement le spectre cible. Une répartition uniforme des ces fréquences sur chaque intervalle de définition du spectre

¹ Pour les tremblements de terre très longs, la valeur de *IPWR* est cependant plafonnée à 13.

n'est cependant pas le meilleur choix puisqu'elle ne le représente pas bien pour les basses périodes :

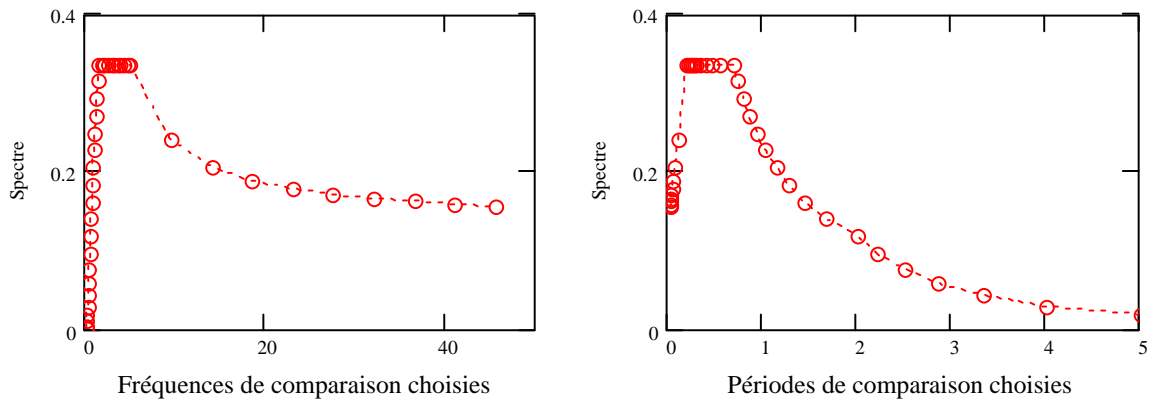


FIGURE 3.13. CHOIX DES FREQUENCES DE COMPARAISON ($N_{FREQ}=40$) - ΔF CONSTANT

Une répartition uniforme des périodes de comparaison n'est guère plus judicieuse puisqu'elle ne représente pas convenablement le spectre pour les basses fréquences :

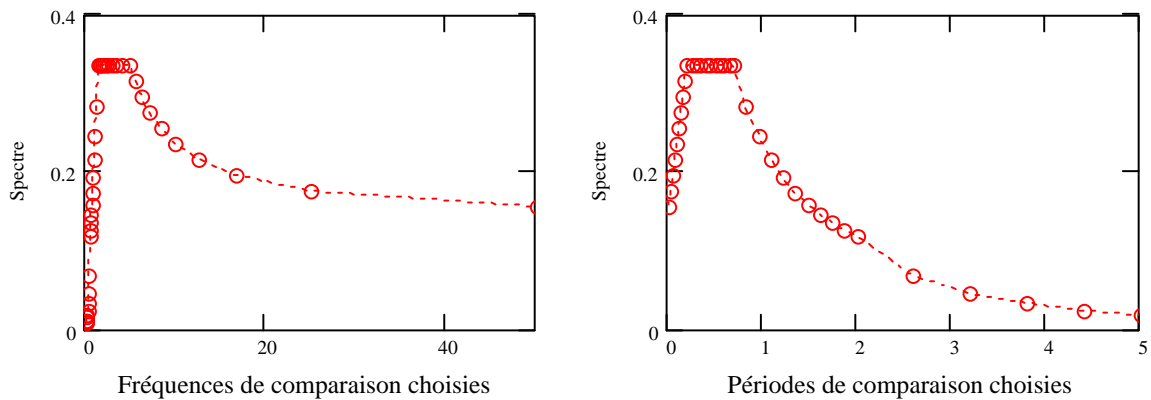


FIGURE 3.14. CHOIX DES FREQUENCES DE COMPARAISON ($N_{FREQ}=40$) - ΔT CONSTANT

C'est pourquoi, le choix qui a été retenu consiste à prendre une répartition uniforme des fréquences de comparaison pour les fréquences inférieures à $1/T_C$ et une répartition uniforme des périodes de comparaison pour les fréquences supérieures à $1/T_C$, ce qui procure une bien meilleure représentation :

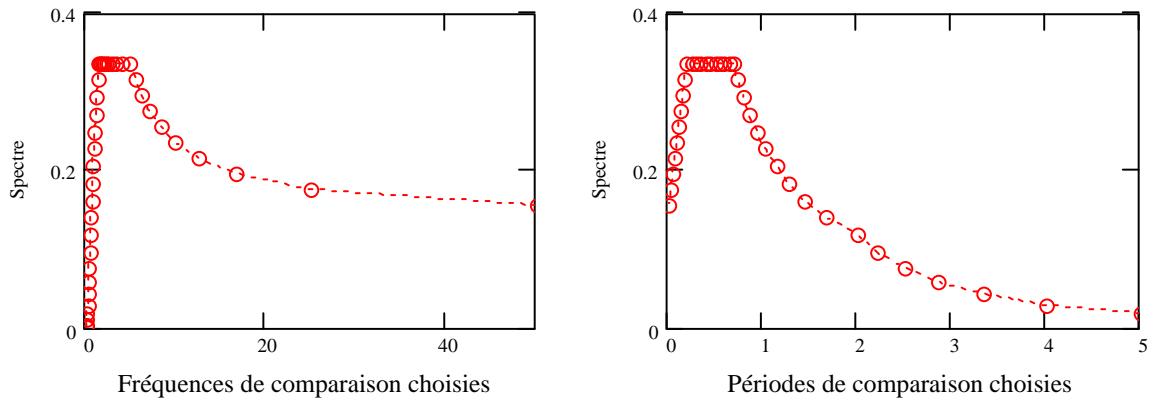


FIGURE 3.15. CHOIX DES FREQUENCES DE COMPARAISON (NFREQ=40) - MELANGE

Exemple

Des exemples de génération d'accélérogrammes sont fournis au chapitre 5. Conformément aux prescriptions de l'Eurocode 8, trois accélérogrammes ont été générés pour l'analyse dynamique transitoire du pont-canal.

Chapitre 4 : Calcul d'une structure à amortisseurs non linéaires

A. L'AMORTISSEMENT DANS LES STRUCTURES

A.1. Introduction

Le second chapitre rappelle que l'équation du mouvement utilisée pour l'analyse dynamique des structures n'est en réalité rien d'autre que l'équilibre entre les efforts d'inertie, d'amortissement et de déformation élastique, et les efforts extérieurs appliqués sur la structure. Dans le cas d'une structure élastique à comportement linéaire, cette équation prend la forme simplifiée de l'équation 4.1. :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\} \quad (4.1)$$

Les matrices [M] et [K] représentent les distributions de masse et de raideur dans la structure. Elles sont obtenues par assemblage des matrices élémentaires correspondantes. Quant à la matrice [C], on pourrait également imaginer attribuer à chaque élément une matrice de viscosité élémentaire [c] définie de la même manière que les matrices de masse et de raideur élémentaires. Par exemple, pour un élément poutre à section constante, les éléments c_{ij} de cette matrice élémentaire seraient définis par :

$$c_{ij} = \int_0^L c(x) \cdot \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) dx \quad (4.2)$$

Où ψ_i (resp. ψ_j) est le champ de déplacements correspondant à un déplacement unitaire du degré de liberté i (resp. j), tous les autres degrés de liberté restant bloqués.

Il n'est cependant guère concevable d'évaluer un paramètre de viscosité $c(x)$ le long de l'élément au même titre que l'on pouvait y imaginer une distribution de masse $m(x)$ ou de raideur $EI(x)$. C'est pour cette raison que la matrice d'amortissement structurel n'est jamais construite par assemblage de matrices élémentaires mais plutôt à l'aide de coefficients d'amortissement relatif ξ calibrés sur des structures de référence. Le

type de matériau constitutif a une importance prépondérante sur ce coefficient. Les valeurs du tableau 3.2. sont communément admises.

<u>Matériau</u>	<u>Amortissement relatif ξ (%)</u>
Structures métalliques soudées	2 à 4
Structures métalliques boulonnées	4 à 7
Structures en béton armé	4 à 7
Structures en béton précontraint	2 à 5
Tuyauterie	1 à 3

TABLEAU 3.2. COEFFICIENTS D'AMORTISSEMENT RELATIF

Cette manière d'exprimer l'amortissement dans une structure est particulièrement bien adaptée à la résolution de l'équation du mouvement par superposition modale. Cette méthode consiste d'abord à réaliser le changement de variables $\{u\} = [X]\{\eta\}$ où $[X]$ est la matrice des modes propres de la structure (rangés par colonnes). Ensuite, une multiplication à gauche des deux membres de l'équation du mouvement par cette même matrice transposée donne :

$$[X]^T \cdot [M][X]\{\ddot{\eta}\} + [X]^T \cdot [C][X]\{\dot{\eta}\} + [X]^T \cdot [K][X]\{\eta\} = [X]^T \cdot \{P\} \quad (4.3)$$

D'après la définition des modes propres, les matrices $[M^*] = [X]^T \cdot [M][X]$ et $[K^*] = [X]^T \cdot [K][X]$ sont diagonales (voire des matrices identités selon la façon dont les modes propres ont été normés). En admettant que la matrice d'amortissement bénéficie de la même propriété de diagonalisation, le système est découplé en N équations indépendantes :

$$M_n^* \cdot \ddot{\eta}_n + C_n^* \cdot \dot{\eta}_n + K_n^* \cdot \eta_n = P_n^* \quad [n \text{ de } 1 \text{ à } N] \quad (4.4)$$

Il reste à introduire les coefficients d'amortissement relatifs modaux ξ_n dans cette équation, puis résoudre l'équation associée à chaque mode :

$$\ddot{\eta}_n + 2 \cdot \omega_n \cdot \xi_n \cdot \dot{\eta}_n + \omega_n \cdot \eta_n = \frac{P_n^*}{M_n^*} \quad (4.5)$$

Comme annoncé précédemment, les coefficients d'amortissement relatifs sont principalement fonction du matériau constitutif de la structure. Chaque ξ_n doit donc prendre une valeur proche du coefficient d'amortissement relatif correspondant au matériau se déformant le plus dans le mode n. Dans le cas d'une structure formée d'un seul et même matériau, les ξ_n sont tous affectés de la même valeur correspondant à l'amortissement relatif du matériau en question.

En terme d'amortissement, l'avantage de la superposition modale est évidemment de ne pas devoir créer la matrice globale de la structure. Il existe des circonstances¹ pour lesquelles la superposition modale ne peut pas être utilisée et cette technique doit faire place à une méthode pas à pas (non basée sur le principe de superposition) pour la résolution de l'équation du mouvement. Dans ce cas, la matrice globale d'amortissement doit impérativement être construite. Quelque soit la raison pour laquelle les méthodes pas à pas doivent être utilisées, il est toujours utile de décomposer l'amortissement en deux composantes :

- *l'amortissement structurel* $[C_S]$ qui, par facilité, doit rester proportionnel². Il est conseillé de lui donner une forme explicite dépendant des matrices de masse et de raideur initiales ; cet amortissement restera donc toujours constant au cours du chargement même si par exemple des pertes de raideurs (plastifications) occasionnent des modifications de la matrice de raideur instantanée ;
- *l'amortissement concentré* $[C_D]$ attribuable aux effets des dash-pots. Il prend des formes différentes selon la loi de comportement choisie pour les dash-pots. Néanmoins, quelle que soit la loi constitutive choisie (même une loi linéaire), dès qu'un amortissement concentré existe, la matrice globale d'amortissement n'est généralement plus proportionnelle.

A.2. L'amortissement structurel $[C_S]$

La façon la plus simple d'obtenir une matrice d'amortissement proportionnelle consiste à choisir un multiple de la matrice de masse ($[C_S] = a_0.[M]$) ou un multiple de la matrice de raideur ($[C_S] = a_1.[K]$). Selon chacune de ces deux hypothèses, les termes diagonaux de la matrice $[X]^T.[C_S].[X]$ deviennent :

$$C_{S_n} = a_0.\{X_n\}^T.[M].\{X_n\} = a_0.M_n^* \quad \text{et} \quad C_{S_n} = a_1.\{X_n\}^T.[K].\{X_n\} = a_1.K_n^* \quad (4.6)$$

D'autre part, on sait aussi, par la définition du coefficient d'amortissement relatif, que $C_{S_n} = 2.M_n^*.\omega_n.\xi_n$. Chacune des deux hypothèses donne donc :

¹ Soit en cas de non linéarités dues à des détériorations de raideur, des pertes de masses, ou des effets de second ordre, soit en cas d'amortissement non proportionnel c'est-à-dire tel que la matrice $[X]^T.[C_S].[X]$ ne soit pas diagonale

² tel que la matrice $[X]^T.[C_S].[X]$ soit diagonale

$$\xi_n = \frac{a_0}{2.\omega_n} \quad \text{et} \quad \xi_n = \frac{a_1.K_n^*}{2.\omega_n.M_n^*} = \frac{a_1.\omega_n}{2} \quad (4.7)$$

Choisir l'une ou l'autre de ces hypothèses contraint donc le coefficient d'amortissement relatif modal à varier en fonction du mode considéré, même si la structure est constituée d'un seul matériau. Ceci n'est évidemment pas cohérent avec les notions introduites ci-avant. Dans le cas d'une structure pour laquelle plusieurs modes sont nécessaires à la représentation de sa réponse dynamique, la différence par rapport à une superposition modale peut être notable dans la mesure où certains modes importants sont amortis plus que ce qu'ils ne le devraient !

Une amélioration de ces hypothèses consiste à considérer la matrice d'amortissement $[C_S]$ comme étant une combinaison linéaire des matrices de masse $[M]$ et de raideur $[K]$:

$$[C_S] = a_0.[M] + a_1.[K] \quad (4.8)$$

Ainsi que le montre la figure 4.1, ce choix offre des coefficients d'amortissement relatif modaux moins sensibles aux variations de pulsation :

$$\xi_n = \frac{a_0}{2.\omega_n} + \frac{a_1.\omega_n}{2} \quad (4.9)$$

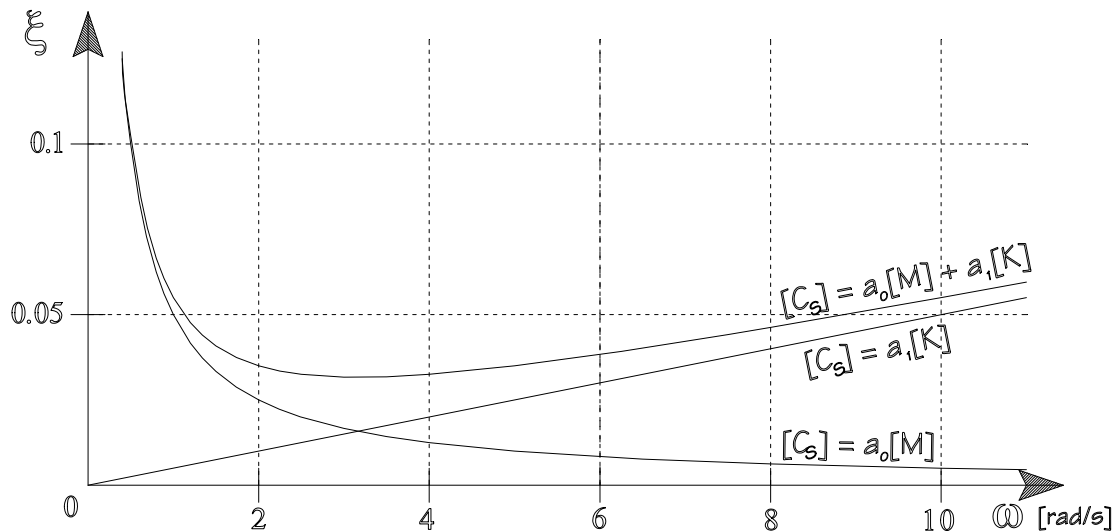


FIGURE 4.1. COEFFICIENTS D'AMORTISSEMENT RELATIF MODAUX

Les valeurs à donner à a_0 et a_1 sont obtenues en imposant les coefficients d'amortissement modaux correspondant à deux pulsations ω_m et ω_n . Dans le cas d'une structure homogène ($\xi_m = \xi_n = \xi$) :

$$\begin{cases} \xi = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1\omega_n}{2} \\ \xi = \frac{a_0}{2\omega_m} + \frac{a_1\omega_m}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{2\xi\omega_m\omega_n}{\omega_m + \omega_n} \\ a_1 = \frac{2\xi}{\omega_m + \omega_n} \end{cases} \quad (4.10)$$

Si deux modes seulement suffisent pour décrire le comportement complet de la structure, ω_m et ω_n peuvent être choisis comme ces deux modes. La figure 4.2 montre l'exemple d'une structure dont les deux modes $\omega_n = 2$ rad/s et $\omega_m = 10$ rad/s sont les seuls qui interviennent dans la représentation de la réponse. Si l'on admet que le coefficient d'amortissement relatif de cette structure est $\xi = 0,05$, les coefficients a_0 et a_1 sont ceux correspondant à la courbe en trait plein.

Si par contre ces deux modes ne sont pas suffisants – admettons par exemple que les cinq premiers modes soient nécessaires $\omega_1 = 2$ rad/s, $\omega_2 = 4$ rad/s, $\omega_3 = 6$ rad/s, $\omega_4 = 8$ rad/s, $\omega_5 = 10$ rad/s –, parmi ces cinq modes représentatifs, deux d'entre eux doivent être choisis pour calculer les coefficients de Rayleigh à l'aide de la formule 4.10.

Si ω_1 et ω_5 sont choisis, on obtient de nouveau la courbe en trait plein de la figure 4.2. La représentation des modes 2, 3 et 4 n'est pas trop mauvaise : leurs coefficients d'amortissement relatif sont légèrement inférieurs au coefficient imposé ($\xi = 0,05$). Par contre, si les modes retenus sont les modes 1 et 2, les valeurs de a_0 et a_1 sont différentes ; la courbe en trait pointillé correspond à ces valeurs. La figure 4.2 montre que cette attitude n'est pas sécuritaire puisque les modes 3, 4 et 5 sont plus atténués que ce qu'ils ne le sont en réalité.

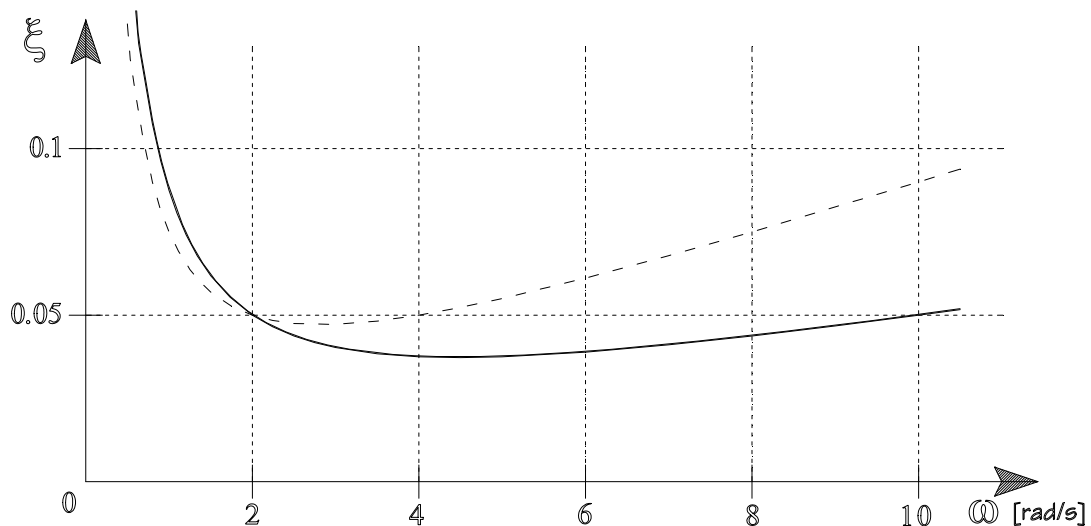


FIGURE 4.2. CHOIX DES COEFFICIENTS DE RAYLEIGH

Pour l'exemple considéré, le meilleur choix se trouve probablement entre ces deux cas extrêmes. En effet, en sélectionnant les modes 1 et 3 pour calculer les coefficients de Rayleigh, on obtient une courbe intermédiaire entre les deux courbes de la figure 4.2.

Lorsque le nombre de modes est trop important que pour obtenir une représentation correcte des coefficients d'amortissement modaux à l'aide d'une loi de Rayleigh (Eq. 4.8.), il est possible d'ajouter des termes à l'expression de $[C_S]$. Pour que la matrice $[C_S]$ soit proportionnelle, il faut que ces termes supplémentaires le soient aussi. On peut démontrer que la forme choisie dans l'équation 4.11 satisfait cette condition.

$$[C_S] = [M] \sum_b a_b [M^{-1} \cdot K]^b \quad (4.11)$$

La variable b peut a priori prendre n'importe quelle valeur entière positive ou négative. Le cas particulier d'une sommation sur b limitée aux deux valeurs $b = 0$ et $b = 1$ revient à exprimer $[C_S]$ comme un amortissement de Rayleigh (Eq. 4.8.). Cette manière plus générale d'obtenir une matrice d'amortissement proportionnelle revient à choisir des coefficients d'amortissement modaux :

$$\xi_n = \frac{1}{2 \cdot \omega_n} \sum_b a_b \cdot \omega_n^{2b} \quad (4.12)$$

L'amortissement de Rayleigh permettait de fixer les coefficients d'amortissement relatifs pour deux modes propres (ω_n et ω_m). Avec cette nouvelle expression pour la matrice $[C_S]$, il est possible d'imposer autant de valeurs que l'on désire en choisissant le nombre adéquat de termes dans les équations 4.11 et 4.12. En conservant par exemple quatre termes ($b = -1, b = 0, b = 1, b = 2$) et en imposant la valeur $\xi = 0,05$ aux modes 1, 2, 4 et 5 de l'exemple précédent, on obtient l'amortissement relatif modal de la figure 4.3.

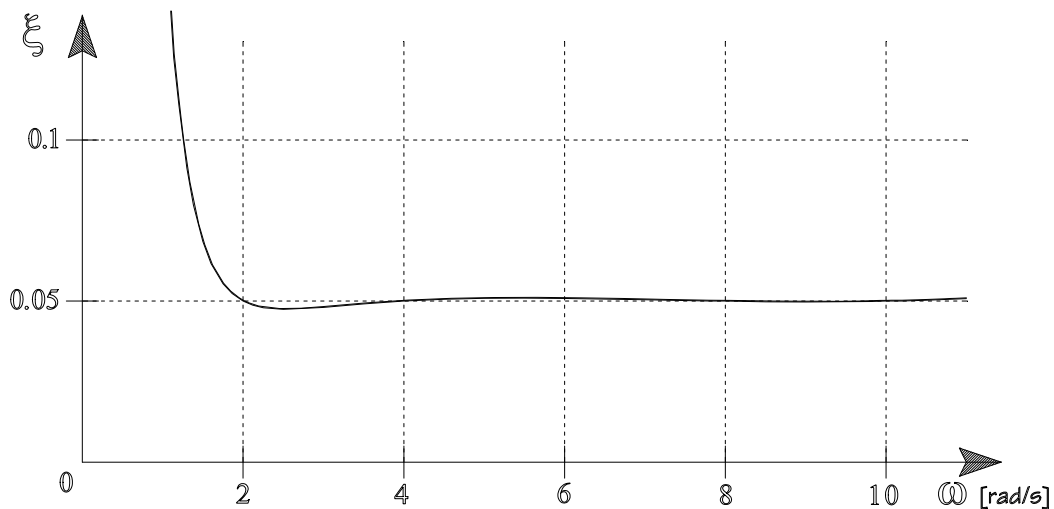


FIGURE 4.3. AMORTISSEMENT PROPORTIONNEL A 4 TERMES

A.3. L'amortissement concentré $[C_D]$

Le calcul dynamique des structures facilement excitable ou, en toute généralité, dont le comportement dynamique n'est pas satisfaisant peut mettre en évidence la nécessité de mettre en place des amortisseurs. Au niveau de l'amortissement global de la structure, ces nouveaux éléments ajoutent leur contribution à l'amortissement structurel.

La façon d'exprimer ce surplus d'amortissement est traitée de façon habituelle par la méthode des éléments finis. Elle consiste à attribuer une matrice d'amortissement concentré à chaque élément. La situation est maintenant différente de celle rencontrée lors de l'établissement de l'amortissement structurel relatif à un élément poutre par exemple pour lequel imaginer une distribution de raideur $c(x)$ le long de l'élément n'est pas concevable. Pour les amortisseurs, cette quantité peut être obtenue expérimentalement ou par analyse du comportement viscoélastique de chacun des composants.

Amortisseurs à comportement linéaire

Admettons dans un premier temps que les amortisseurs considérés soient à comportement linéaire, c'est à dire tels que l'effort $F_{CD,loc}$ nécessaire pour déplacer les extrémités l'une par rapport à l'autre soit proportionnel à leur vitesse axiale relative. Ainsi, si l'on appelle u_1 et u_2 les déplacements axiaux de ses extrémités, l'équation constitutive locale d'un tel amortisseur s'écrit :

$$\{F_{CD,loc}\} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Après avoir subi les opérations de rotation puis localisation, ces efforts locaux $\{F_{CD,loc}\}$ apportent leur contribution au terme $\{F_C\}$ de l'équation du mouvement :

$$\{F_M\} + \{F_C\} + \{F_K\} = \{P\} \quad (4.14)$$

Le vecteur $\{F_C\}$ représente alors la somme des efforts développés par l'amortissement structurel $\{F_{CS}\}$ et par l'amortissement concentré $\{F_{CD}\}$.

$$\{F_C\} = \{F_{CS}\} + \{F_{CD}\} \quad (4.15)$$

Puisque dans ce cas, le comportement des dash-pots est supposé linéaire, la forme générale de l'équation du mouvement (Eq. 4.14) peut être simplifiée en :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\} \quad (4.16)$$

où la matrice $[C]$ est la somme des matrices d'amortissement structurel $[C_S]$ (toujours présent) et concentré linéaire $[C_{D,lin}]$. Ce dernier terme représente lui-même la somme des matrices élémentaires $[C_{D,loc}]$ après rotation et localisation.

$$[C] = [C_S] + [C_{D,lin}] \quad (4.17)$$

$$[C_{D,loc}] = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Amortisseurs à comportement non linéaire

Il est impossible de caractériser tous les amortisseurs existants par une loi de comportement linéaire. Pour de tels dispositifs, les efforts $\{F_{CD,loc}\}$ appliqués par le dash-pot ne peuvent plus être exprimés proportionnellement aux vitesses axiales (comme dans l'équation 4.13). Ils prennent la forme plus générale :

$$\{F_{CD,loc}\} = \begin{Bmatrix} f_1(\dot{u}_1, \dot{u}_2) \\ f_2(\dot{u}_1, \dot{u}_2) \end{Bmatrix}_1 \quad (4.19)$$

De même que pour les amortisseurs linéaires, ces efforts locaux, après rotation et localisation, prennent place dans le terme d'amortissement $\{F_C\}$ de l'équation du mouvement ; plus précisément, ils interviennent dans le terme $\{F_{CD}\}$. Celui-ci peut être décomposé en deux parties : les contributions des amortisseurs linéaires et non linéaires :

$$\{F_{CD}\} = \{F_{CD,lin}\} + \{F_{CD,nonlin}\} \quad (4.20)$$

Etant donné que les termes linéaires peuvent toujours s'exprimer comme combinaisons linéaires des vitesses (Eq. 4.13), l'équation du mouvement prend alors la forme suivante :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C_S]\{\dot{u}\} + [C_{D,lin}]\{\dot{u}\} + \{F_{CD,nonlin}\} + [K]\{u\} = \{P\} \quad (4.21)$$

Cette équation représente le système à résoudre lors du calcul de la réponse dynamique d'une structure comprenant des amortisseurs à comportement non linéaire.

¹ Bien que dans la plupart des cas les efforts f_1 et f_2 ne dépendent effectivement que des vitesses axiales \dot{u}_1 et \dot{u}_2 , on pourrait cependant imaginer qu'ils soient également fonctions des déplacements u_1 et u_2 ou des accélérations \ddot{u}_1 et \ddot{u}_2 .

B. LES LOIS DE COMPORTEMENT DES AMORTISSEURS

Les essais réalisés pour déterminer le comportement d'un amortisseur, consistent à le solliciter de manière harmonique avec une fréquence f choisie. L'effort nécessaire à imposer ce type de déplacement est mesuré et les résultats des essais fournissent un diagramme de cet effort en fonction du déplacement relatif des extrémités. Par exemple, pour un amortisseur linéaire, la figure 4.4 montre la forme du diagramme relevé. Les développements suivants procèdent au calcul analytique de l'équation de cette courbe.

Après stabilisation, la course du piston et sa vitesse peuvent s'exprimer par :

$$\begin{aligned} d(t) &= A.\sin(\omega.t) \\ v(t) &= A.\omega.\cos(\omega.t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

où A représente l'amplitude du mouvement et ω la pulsation du cycle de chargement.

Puisqu'il s'agit d'un amortisseur à comportement linéaire, l'effort à appliquer est proportionnel à la vitesse relative des extrémités :

$$F(t) = C.v(t) = C.A.\omega.\cos(\omega.t) \quad (4.23)$$

L'équation de la courbe ($F - d$) s'obtient en éliminant le facteur temps entre les équations 4.21 et 4.23. Les diagrammes résultant d'essais réalisés sur des amortisseurs à comportement linéaire sont donc elliptiques :

$$\left[\frac{d}{A} \right]^2 + \left[\frac{F}{C.A.\omega} \right]^2 = \sin^2(\omega.t) + \cos^2(\omega.t) = 1 \quad (4.24)$$

La figure 4.4 montre l'exemple d'un diagramme susceptible d'être relevé.

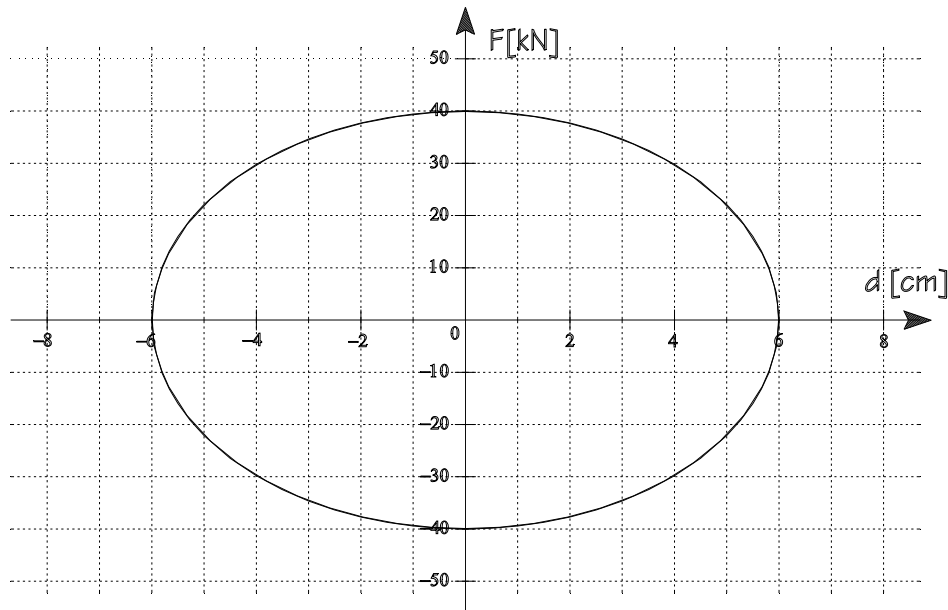


FIGURE 4.4. EXEMPLE DE DIAGRAMME $F-v$ CORRESPONDANT A UN AMORTISSEUR LINEAIRE

Si l'amplitude du mouvement et la fréquence d'essai sont connues, la valeur du paramètre de proportionnalité C peut être obtenue à partir du diagramme (par fitting par exemple).

Il arrive cependant d'obtenir des résultats d'essais qui n'ont pas cette forme elliptique. Cela provient simplement du fait que la loi de comportement du dash-pot testé n'est plus proportionnelle. Les fabricants d'amortisseurs fournissent souvent des diagrammes qui ont une forme plus rectangulaire que l'ellipse de l'amortisseur linéaire. La loi constitutive souvent attribuée à ce type de comportement est une loi exponentielle :

$$F = C.v^\alpha \quad (4.25)$$

Les articles publiés par les fabricants mentionnent effectivement ce type de loi sans pour autant fournir les paramètres caractérisant leurs produits. Néanmoins, ils procurent souvent un diagramme d'essai réalisé sur leurs amortisseurs. Afin de déterminer les paramètres α et C , il suffit de procéder comme pour l'amortisseur linéaire : trouver l'expression analytique de la courbe puis ajuster les paramètres pour avoir la meilleure concordance entre les résultats expérimentaux et la courbe paramétrique. En supposant la loi constitutive de l'équation 4.25, la forme analytique du diagramme est donnée par :

$$\left[\frac{d}{A} \right]^2 + \left[\frac{F^{1/\alpha}}{C^{1/\alpha} \cdot A \cdot \omega} \right]^2 = \sin^2(\omega.t) + \cos^2(\omega.t) = 1 \quad (4.26)$$

La figure 4.5. donne le résultat théorique d'un essai réalisé sur un amortisseur caractérisé par $\alpha = 0,25$ et $C = 50 \text{ kN} / (\text{mm/s})^{0,25}$. L'essai est réalisé sous une pulsation de 1 rad/s et l'amplitude du mouvement est de 270 mm.

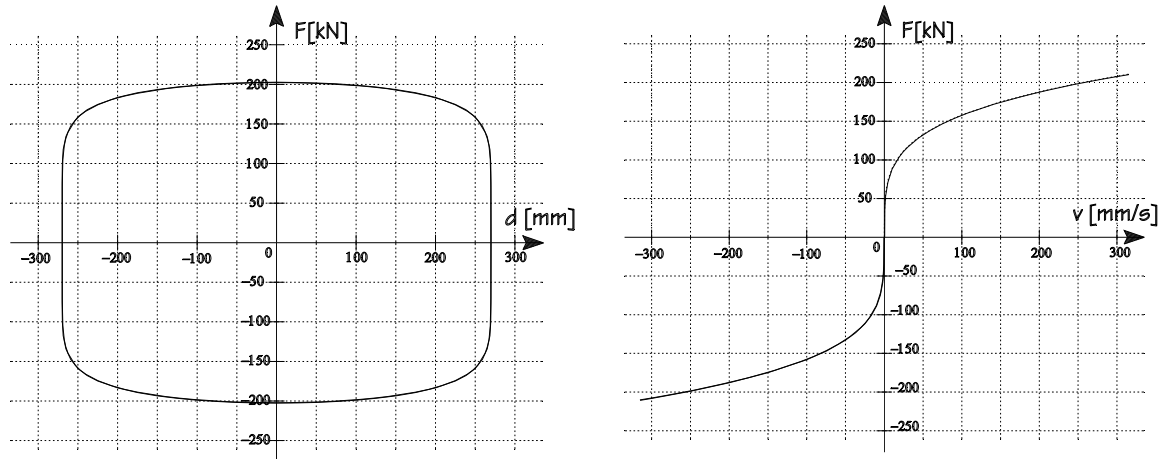


FIGURE 4.5. RESULTAT D'UN ESSAI REALISE AVEC UN AMORTISSEUR NON LINEAIRE ET SA LOI DE COMPORTEMENT

On trouve à l'annexe 1 les lois constitutives de quelques amortisseurs réels. Les paramètres α et C ont été déduits, d'après la méthode explicitée ci-avant, à partir de résultats d'essais fournis par les fabricants.

Si ces amortisseurs apportent un niveau de difficulté supplémentaire au niveau de l'analyse, leur efficacité en terme de dissipation d'énergie est bien plus intéressante que les dispositifs à comportement linéaire. En effet, en régime établi, la dissipation d'énergie peut être appréciée par la surface comprise à l'intérieur de la boucle du diagramme $F - d$. Ainsi, pour des efforts et déplacements maxima identiques, chacun des amortisseurs procure comme dissipation d'énergie :

$$\text{Amortisseur linéaire :} \quad E = \pi \cdot F_{MAX} \cdot v_{MAX} \quad (4.27)$$

$$\text{Amortisseur rigide parfaitement visqueux}^1 : \quad E = 4 \cdot F_{MAX} \cdot v_{MAX} \quad (4.28)$$

La comparaison des équations 4.27 et 4.28, permet d'obtenir le pourcentage d'énergie supplémentaire dissipée par les amortisseurs rigides parfaitement visqueux :

$$Q = \frac{4 - \pi}{\pi} = 27,3\% \quad (4.29)$$

L'intérêt des amortisseurs à comportement non linéaire se trouve effectivement là ! Les conditions nécessaires à l'obtention d'une surface maximale à l'intérieur de la boucle consistent à avoir une loi constitutive caractérisée par une courbe à forte viscosité

¹ De tels amortisseurs correspondent au cas limite obtenu lorsque α tend vers 0

aux basses vitesses suivie d'un palier le plus horizontal possible. Aujourd'hui, de nombreux amortisseurs obéissent à ce type de loi. L'équation 4.25 est fréquemment utilisée pour les représenter parce qu'elle permet de reproduire ce double comportement (très visqueux, puis lâche) ; le palier est d'autant plus horizontal et le coude marqué que la valeur du coefficient α est petite. La loi utilisée et retenue pour la programmation a donc cette forme exponentielle : $F = C.v^\alpha$.

C. DEVELOPPEMENT DE LA METHODE

En plus de rappeler les notions élémentaires à propos de l'amortissement dans les structures, le paragraphe A de ce chapitre aboutit, après quelques développements, au système d'équations différentielles non linéaires à résoudre dans le cadre du travail. Le paragraphe B, quant à lui, mentionne les raisons pour lesquelles une loi de comportement exponentielle a été choisie. Les éléments nécessaires au développement de la méthode sont obtenus en puisant encore quelques notions développées dans les rappels théoriques du chapitre 2.

Les deux caractéristiques principales des équations du système à résoudre 4.20 sont ses aspects « différentiel » et « non linéaire ». Ces deux aspects sont traités successivement ci-après.

C.1. Le caractère « différentiel »

La méthode utilisée afin de s'affranchir du caractère « différentiel » des équations est celle de Newmark. Le paragraphe D.2. du chapitre 2 rappelle ses hypothèses et le développement de la méthode pour un système d'équations linéaires :

$$[M]\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} + [C]\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} + [K]\{u\}_{t+\Delta t} = \{P\}_{t+\Delta t} \quad (4.30)$$

Ces développements doivent être adaptés puisque l'équation à résoudre est complétée par les termes non linéaires. De plus, au lieu d'avoir une matrice d'amortissement globale pour la structure, l'équation développée la dissocie en deux contributions (l'amortissement structurel et l'amortissement concentré linéaire) :

$$[M]\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} + ([C_s] + [C_{D,lin}])\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} + \{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t} + [K]\{u\}_{t+\Delta t} = \{P\}_{t+\Delta t} \quad (4.31)$$

L'introduction des relations 2.15 et 2.16 (hypothèses de Newmark) dans l'équation 4.31 fournit un système de N équations dont les N inconnues sont les déplacements $\{u\}_{t+\Delta t}$ aux nœuds de la structure à la fin du pas de temps :

$$\left(\frac{1}{\alpha.\Delta t^2} \cdot [M] + \frac{\delta}{\alpha.\Delta t} \cdot ([C_s] + [C_{D,lin}]) + [K] \right) \cdot \{u\}_{t+\Delta t} = \quad (4.32)$$

$$\{P\}_{t+\Delta t} + [M] \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \cdot \{u\}_t + \frac{1}{\alpha \Delta t} \cdot \{\dot{u}\}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \cdot \{\ddot{u}\}_t \right] +$$

$$([C_S] + [C_{D,lin}]) \left[\frac{\delta}{\alpha \Delta t} \cdot \{u\}_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \cdot \{\dot{u}\}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \cdot \{\ddot{u}\}_t \right] - \{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t}$$

Les deux différences entre les relations 4.32 et 2.17 sont attribuables aux dissemblances qui existent entre les équations à résoudre correspondantes (Eqs. 4.30 et 4.31) :

- la matrice [C] est remplacée par la matrice [C_S]+[C_{D,lin}] ;
- le second membre contient un terme supplémentaire provenant des effets des dash-pots à comportement non linéaire.

Dans le problème traité, les matrices de masse et de raideur sont supposées constantes. Il en est de même des matrices d'amortissement structurel et concentré linéaire. La matrice qui multiplie $\{u\}_{t+\Delta t}$ dans le premier membre de l'équation 4.32 reste donc constante au cours de la sollicitation.

$$\text{Soit } [A] = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \cdot [M] + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \cdot ([C_S] + [C_{D,lin}]) + [K] \quad (4.33)$$

Dans le second membre, les trois premiers termes peuvent être évalués au début de chaque pas de temps puisqu'ils ne dépendent que de la sollicitation extérieure connue et des déplacements, vitesses et accélérations obtenus à partir de l'itération (dans le temps) précédente.

$$\text{Soit } \{b\}_t = \{P\}_{t+\Delta t} + [M] \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \cdot \{u\}_t + \frac{1}{\alpha \Delta t} \cdot \{\dot{u}\}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \cdot \{\ddot{u}\}_t \right] +$$

$$([C_S] + [C_{D,lin}]) \left[\frac{\delta}{\alpha \Delta t} \cdot \{u\}_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \cdot \{\dot{u}\}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \cdot \{\ddot{u}\}_t \right] \quad (4.34)$$

L'équation 4.32 peut donc être réécrite sous la forme simplifiée :

$$[A] \{u\}_{t+\Delta t} = \{b\}_t - \{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t} \quad (4.35)$$

Ecrite sous cette forme, cette équation représente effectivement un système de N équations mais comprenant plus d'inconnues puisque, contrairement au vecteur {b}, les efforts $\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t}$ sont inconnus. L'hypothèse de Newmark fournit cependant des relations linéaires entre les vitesses et déplacements à la fin du pas de temps. Puisque les efforts $\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t}$ dépendent des vitesses à la fin du pas de temps¹, il est donc possible d'exprimer le second terme du membre de droite en fonction des déplacements à la fin du pas de temps, si bien que le système prend la forme finale :

¹ les relations entre ces efforts et vitesses représentent les lois de comportement des dash-pots.

$$[A]\{u\}_{t+\Delta t} + \{F_{CD,nonlin}(\{\dot{u}_{t+\Delta t}(\{u_{t+\Delta t}\}))\}\} = \{b\}_t \quad (4.36)$$

Cette équation représente maintenant un système de N équations comprenant N inconnues, les déplacements aux degrés de liberté non linéaires.

C.2. Le caractère « non linéaire »

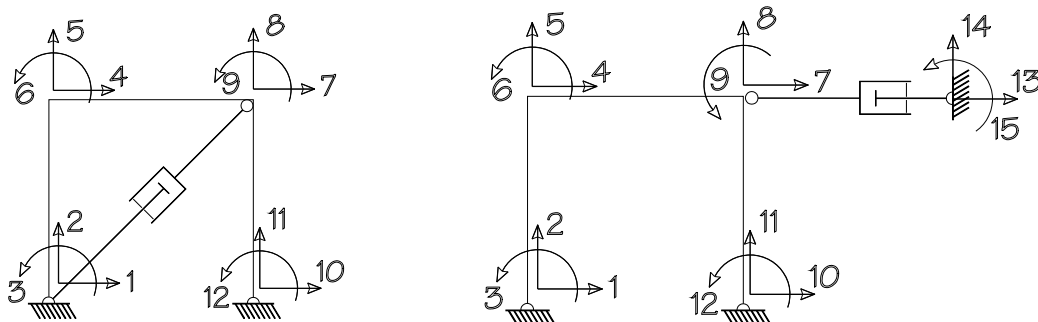
Condensation statique

Le premier objectif concernant l'affranchissement vis-à-vis du caractère temporel (différentiel) est atteint ; il ne reste plus qu'à résoudre le système d'équations non linéaires 4.36. Ainsi qu'exposé dans le chapitre 2, c'est la méthode de Newton-Raphson qui a été choisie pour la résolution du problème. Cette méthode nécessite, pour chaque itération à l'intérieur du pas de temps, la résolution d'un système de N équations (Eq. 2.24). Puisque cette opération est coûteuse en temps de calcul, il pourrait s'avérer intéressant de réduire les dimensions du système à résoudre. Vu la spécificité du problème à traiter, cela est réalisable sans formuler d'hypothèses supplémentaires.

En effet, le vecteur $\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t}$ représente les efforts appliqués sur la structure par les dash-pots non linéaires ; toutes les composantes relatives aux nœuds qui ne sont pas les extrémités de dash-pots non linéaires sont donc nulles. Cette information est évidemment très précieuse puisque s'il ne reste que n composantes non nulles dans le vecteur $\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t}$, parmi les N équations du système à résoudre, (N - n) équations sont linéaires. Il est donc intéressant de distinguer *les degrés de liberté linéaires et non linéaires*.

Un degré de liberté sera qualifié de *linéaire* si l'équation lui correspondant dans le système est linéaire. Il y a donc deux raisons pour lesquelles un degré de liberté puisse être linéaire :

- soit il correspond à un nœud qui n'est pas l'extrémité d'un dash-pot non linéaire ;
- soit il correspond à un nœud qui est l'extrémité d'un dash-pot non linéaire mais il représente une rotation ou une translation perpendiculaire à l'axe du dash-pot.



$$N = 12 ; n = 4$$

$$N = 15 ; n = 2$$

FIGURE 4.6. ILLUSTRATION DES DEGRES DE LIBERTE LINEAIRES ET NON LINEAIRES

D'après la définition qui vient d'être donnée, pour les exemples de la figure 4.6., les degrés de liberté non linéaires sont les DDL 1, 2, 7 et 8 pour la figure de gauche, 7 et 13 pour celle de droite. Cependant, les degrés de liberté fixés n'ont pas besoin d'être classés comme *non linéaires* puisqu'ils seront retirés du système d'équations (les déplacements relatifs à ces degrés de liberté sont nuls). Il convient donc de compléter la définition des degrés de liberté linéaires en ajoutant qu'un degré fixé est obligatoirement considéré comme linéaire. Pour les structures simples représentées à la figure 4.6., les nombres de degrés de liberté non linéaires sont donc respectivement 2 et 1.

Le système 4.36 peut être réordonné de façon à placer en tête les équations non linéaires : la matrice [A] est alors scindée en quatre parties et les vecteurs {b} et {u} en deux sous-vecteurs. En utilisant l'indice « N » pour représenter la partie non linéaire et l'indice « L » pour la partie linéaire, le système réorganisé s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [A_{NN}] & [A_{NL}] \\ [A_{LN}] & [A_{LL}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_N\} \\ \{u_L\} \end{Bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{Bmatrix} F_{CD,nonlin}(\{u_N\}_{t+\Delta t}) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{b_N\} \\ \{b_L\} \end{Bmatrix}_t \quad \begin{cases} n \text{ équations} \\ N - n \text{ équations} \end{cases} \quad (4.37)$$

Il reste donc à effectuer une condensation statique¹ des degrés de liberté linéaires de façon à obtenir le système d'équations réduit à n dimensions. Pour ce faire, il suffit d'extraire le sous-vecteur représentant les déplacements relatifs aux degrés de liberté linéaires {u_L} hors de la deuxième ligne du système 4.37 puis d'injecter la valeur trouvée dans la première ligne :

$$2^{\text{ème}} \text{ ligne : } [A_{LN}]\{u_N\} + [A_{LL}]\{u_L\} = \{b_L\} \Rightarrow \{u_L\} = [A_{LL}]^{-1} \cdot (\{b_L\} - [A_{LN}]\{u_N\}) \quad (4.38)$$

$$1^{\text{ère}} \text{ ligne : } [A_{NN}]\{u_N\} + [A_{NL}]\{u_L\} + \{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t} = \{b_N\} \quad (4.39)$$

$$\Rightarrow [A_{NN}]\{u_N\} + [A_{NL}] \cdot [A_{LL}]^{-1} \cdot (\{b_L\} - [A_{LN}]\{u_N\}) + \{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t} = \{b_N\} \quad (4.40)$$

$$\Rightarrow ([A_{NN}] - [A_{NL}] \cdot [A_{LL}]^{-1} \cdot [A_{LN}])\{u_N\} + \{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t} = \{b_N\} - [A_{NL}] \cdot [A_{LL}]^{-1} \cdot \{b_L\} \quad (4.41)$$

$$[A^*]\{u_N\} + \{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t} = \{f\} \quad (n \text{ équations}) \quad (4.42)$$

$$\text{où } [A^*] = [A_{NN}] - [A_{NL}] \cdot [A_{LL}]^{-1} \cdot [A_{LN}] \text{ et } \{f\} = \{b_N\} - [A_{NL}] \cdot [A_{LL}]^{-1} \cdot \{b_L\}$$

¹ Il est important de remarquer – et c'est en ce point précisément que réside l'avantage de la méthode – que la condensation ne doit être effectuée que lors du premier pas de temps puisque la matrice des coefficients [A] est constante.

L'équation 4.42 représente le système d'équations à résoudre. Il est exprimé dans les axes globaux de la structure ; c'est-à-dire que les déplacements non linéaires $\{u_N\}$ sont exprimés selon les axes globaux (Fig. 4.6).

Maintenant que la forme condensée est établie, il reste à appliquer la méthode de Newton-Raphson pour calculer les déplacements relatifs aux degrés de libertés non linéaires à la fin du pas de temps. Dans le formalisme utilisé dans les rappels théoriques, l'équation à résoudre s'écrit :

$$\{F(\{x\})\} = \{f\} \quad (4.43)$$

où $\{F(\{x\})\} = [A^*]\{x\} + \{F_{CD,nonlin}(\{x\})\}_{t+\Delta t}$ et $\{x\}$ représente le vecteur des inconnues. Les méthodes de résolution d'équations non linéaires sont itératives. En partant d'une première approximation $\{x^{(0)}\}$ de la solution, elles consistent à créer une suite de solutions intermédiaires convergeant vers la solution du système. Pour chacun de ces vecteurs $\{x^{(i)}\}$, la méthode de Newton-Raphson requiert l'évaluation de la fonction vectorielle $\{F\}$ ainsi que le jacobien $[J]$ qui y est associé. Les paragraphes suivants expliquent la façon de calculer chacune de ces deux grandeurs.

Le vecteur $\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t}$

En ce qui concerne la fonction $\{F\}$, le premier terme $[A^*]\{x\}$ ne pose pas de problème particulier (simple produit matriciel) ; le présent paragraphe établit la démarche nécessaire au calcul du second terme $\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t}$. Ce vecteur représente, dans les axes globaux de la structure, les efforts appliqués par les dash-pots non linéaires.

Il est intéressant de comprendre d'abord le développement de la méthode dans le cas d'amortisseurs parallèles aux axes globaux, c'est-à-dire tels que les déplacements axiaux (qui caractérisent le caractère non linéaire) puissent être extraits du vecteur inconnue $\{x\}$.



FIGURE 4.7. NUMEROTATION DES DEGRES DE LIBERTE DE L'ELEMENT DASH-POT

Soient $d_{p,1}$ et $d_{p,2}$ les déplacements des extrémités du $p^{\text{ième}}$ dash-pot et $F_{p,1}$ et $F_{p,2}$ les efforts internes à l'élément. Ces grandeurs sont définies positivement dans le sens des flèches de la figure 4.7. Pour la loi de comportement exponentielle choisie (C_p , α_p sont les paramètres de la loi constitutive), on peut écrire pour le $p^{\text{ième}}$ amortisseur :

$$\{F_{CD,élém}\}_p = \begin{Bmatrix} F_{p,1} \\ F_{p,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_p \cdot (\dot{d}_{p,1} - \dot{d}_{p,2})^{\alpha_p} \\ -C_p \cdot (\dot{d}_{p,1} - \dot{d}_{p,2})^{\alpha_p} \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

Pour le calcul de la fonction vectorielle $\{F\}$, une première étape consiste à évaluer le vecteur $\{F_{CD,élém}\}_p$ pour chaque amortisseur. Les vitesses $\dot{d}_{p,1}$ et $\dot{d}_{p,2}$ doivent correspondre au vecteur $\{x^{(i)}\}$ pour lequel la fonction $\{F\}$ doit être calculée. Ce vecteur représente une estimation des déplacements non linéaires à la fin du pas de temps. Les hypothèses de Newmark (Eq. 2.15) permettent, à partir de cette solution intermédiaire, de calculer les vitesses correspondantes à la fin du pas de temps. Avec les notations courantes, cette formule s'écrit :

$$\{\dot{x}\}^{(i)} = \frac{\delta}{\alpha\Delta t} [\{x\}^{(i)} - \{u_N\}_t] + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) \{\dot{u}_N\}_t + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) \{\ddot{u}_N\}_t \quad (4.45)$$

En fonction de la solution intermédiaire envisagée $\{x^{(i)}\}$, il est donc possible de calculer les vitesses $\{\dot{x}^{(i)}\}$ relatives à tous les degrés de liberté non linéaires. Les valeurs de $\dot{d}_{p,1}$ et $\dot{d}_{p,2}$ relatives à chaque amortisseur doivent être récupérées dans ce vecteur. Cette opération est généralement formulée à l'aide de matrices de localisation¹. Une matrice $[LOC_p]$ de dimensions $n \times 2$ est attribuée à chaque amortisseur : l'élément (j, k) de la matrice $[LOC_p]$ est unitaire si le j^{ième} degré de liberté non linéaire correspond au k^{ième} DDL de l'amortisseur p.

$$\begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{Bmatrix}_p = LOC_p^T \cdot \{\dot{x}_i\} \quad (4.46)$$

Finalement, les composantes des vecteurs $\{F_{CD,élém}\}_p$ relatifs à chaque amortisseur peuvent être calculées (Eq. 4.44) puis placées dans le vecteur $\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t}$ qui regroupe les efforts provenant de tous les dash-pots non linéaires. On schématise à nouveau cette opération à l'aide des mêmes matrices de localisation :

$$\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t} = \sum_{p=1}^{NbrDashPot} LOC_p \cdot \{F_{CD,élém}\}_p \quad (4.47)$$

Afin de simplifier les premières explications, les développements qui viennent d'être menés concernaient des dash-pots disposés parallèlement aux axes globaux de

¹ En pratique, les éléments sont simplement récupérés à un adresse fournie par un vecteur équivalent à la matrice de localisation. En effet, cette matrice est d'une efficacité réduite puisque l'opération de localisation nécessiterait la multiplication par une matrice dont la majorité des éléments sont nuls. Vu sa grande simplicité, cette notion est généralement utilisée pour les développements théoriques.

référence. En toute généralité, ils peuvent cependant être placés avec une inclinaison quelconque par rapport à chacun de ces axes.

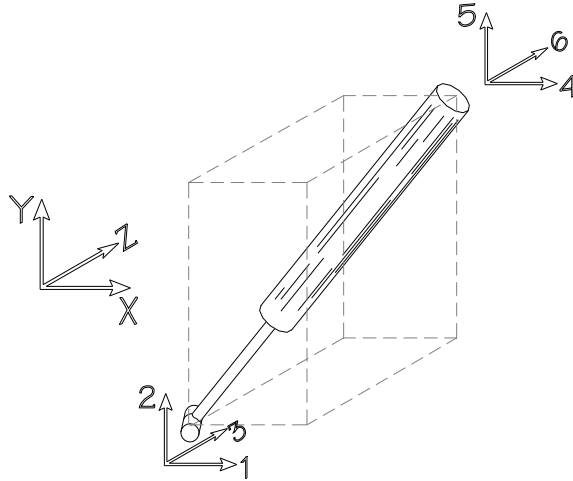


FIGURE 4.8. REPRESENTATION D'UN DASH-POT ET DE SES DEGRES DE LIBERTE

Soient $d_{p,1}$ à $d_{p,6}$ et $F_{p,1}$ à $F_{p,6}$ les déplacements et les efforts aux extrémités du $p^{\text{ième}}$ dash-pot. Ils sont comptés positivement dans le sens des flèches de la figure 4.8. Les efforts intérieurs $F_{p,1}$ à $F_{p,6}$ sont les projections selon les axes globaux de l'effort intérieur axial F_p ; celui-ci ne dépend¹ que de la vitesse relative axiale v_p qui est obtenue à partir des composantes des vitesses $\dot{d}_{p,1}$ à $\dot{d}_{p,6}$ dans les trois directions de l'espace. Si l'on nomme $C_{p,x}$, $C_{p,y}$ et $C_{p,z}$ les cosinus directeurs du $p^{\text{ième}}$ amortisseur dans les axes globaux, on peut noter :

$$v_p = C_{p,x} \cdot (\dot{d}_{p,1} - \dot{d}_{p,4}) + C_{p,y} \cdot (\dot{d}_{p,2} - \dot{d}_{p,5}) + C_{p,z} \cdot (\dot{d}_{p,3} - \dot{d}_{p,6}) \quad (4.48)$$

$$\{F_{CD,élém}\}_p = \begin{Bmatrix} F_{p,1} \\ F_{p,2} \\ F_{p,3} \\ F_{p,4} \\ F_{p,5} \\ F_{p,6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{p,x} \cdot F_p \\ C_{p,y} \cdot F_p \\ C_{p,z} \cdot F_p \\ -C_{p,x} \cdot F_p \\ -C_{p,y} \cdot F_p \\ -C_{p,z} \cdot F_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{p,x} \cdot C_p \cdot v_p^{\alpha_p} \\ C_{p,y} \cdot C_p \cdot v_p^{\alpha_p} \\ C_{p,z} \cdot C_p \cdot v_p^{\alpha_p} \\ -C_{p,x} \cdot C_p \cdot v_p^{\alpha_p} \\ -C_{p,y} \cdot C_p \cdot v_p^{\alpha_p} \\ -C_{p,z} \cdot C_p \cdot v_p^{\alpha_p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{p,x} \\ C_{p,y} \\ C_{p,z} \\ -C_{p,x} \\ -C_{p,y} \\ -C_{p,z} \end{Bmatrix} \cdot C_p \cdot v_p^{\alpha_p} \quad (4.49)$$

De nouveau, les hypothèses de Newmark permettent de calculer, pour la solution intermédiaire considérée $\{x^{(i)}\}$, le vecteur vitesse $\{\dot{x}^{(i)}\}$ qui lui est associé. Dans ce vecteur regroupant les vitesses correspondant à tous les degrés de liberté non linéaires, il faut récupérer les composantes relatives à chaque dash-pot ($\dot{d}_{p,1}$ à $\dot{d}_{p,6}$). Pour ce faire, on

¹ A travers les lois de comportement des dash-pots

utilise formellement les matrices de localisation dont les dimensions sont maintenant $n \times 6$.

Lorsque les vitesses locales sont déterminées, l'application de la formule 4.48 fournit les vitesses axiales relatives de chaque amortisseur. Ensuite, la relation 4.49 doit être utilisée pour obtenir les efforts (exprimés dans les axes globaux) appliqués par chaque amortisseur non linéaire. Afin d'obtenir le second terme de la fonction vectorielle $\{F\}$, il reste à additionner les contributions de chacun des dash-pots :

$$\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t} = \sum_{p=1}^{NbrDashPot} LOC_p \cdot \{F_{CD,élé} \}_p \quad (4.50)$$

Le jacobien $[J]$

L'évaluation du jacobien $[J]$ relatif à la fonction vectorielle $\{F\}$ relève en quelque sorte de la même démarche. Les éléments de cette matrice sont définis par la relation :

$$[J]_{jk} = [A^*]_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t})_k \quad (4.51)$$

où $(\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t})_k$ représente le $k^{ième}$ élément du vecteur $\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t}$.

Le premier terme de l'expression 4.51 ne pose toujours aucun problème. Quant au second, son évaluation peut être développée à partir de la définition de $\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t}$.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t})_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{p=1}^{NbrDashPot} (LOC_p \cdot \{F_{CD,élé} \}_p)_k \quad (4.52)$$

$(LOC_p \cdot \{F_{CD,élé} \}_p)_k$ représente le $k^{ième}$ élément du vecteur $LOC_p \cdot \{F_{CD,élé} \}_p$.

Considérons la $k^{ième}$ ligne de la matrice de localisation $[LOC_p]$. Par sa définition, un seul de ses éléments au plus peut être non nul (et dans ce cas égal à l'unité). Si tous les éléments sont effectivement nuls dans cette ligne, alors le $k^{ième}$ élément du produit $LOC_p \cdot \{F_{CD,élé} \}_p$ est également nul ; l'argument dans la somme relatif à cette valeur de p est nul : le $p^{ième}$ dash-pot n'apporte aucune contribution pour l'évaluation de l'élément (j, k) du jacobien. En d'autres termes, cela signifie que, parmi ses six degrés de liberté, ce $p^{ième}$ dash-pot ne comporte pas le $k^{ième}$ degré de liberté non linéaire de la structure.

Par contre, si un élément de cette $k^{ième}$ ligne est non nul – admettons par exemple que cet élément se trouve dans la $k_p^{ième}$ colonne –, cela signifie que le $k_p^{ième}$ degré de liberté de l'élément ($1 < k_p < 6$) correspond au $k^{ième}$ degré de liberté non linéaire de la structure. Dans ce cas, le $k^{ième}$ élément du produit $LOC_p \cdot \{F_{CD,élé} \}_p$ correspond au $k_p^{ième}$

élément du vecteur $\{F_{CD,élé\acute{m}}\}_p$ et le $p^{\text{ième}}$ dash-pot apporte une contribution à l'élément (j, k) du jacobien.

Mathématiquement, cela peut s'écrire sous la forme des équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t})_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{p=1}^{NbrDashPot} (\{F_{CD,élé\acute{m}}\}_p)_{k_p^*} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{p=1}^{NbrDashPot} \left(\begin{matrix} C_{p,x} \\ C_{p,y} \\ C_{p,z} \\ -C_{p,x} \\ -C_{p,y} \\ -C_{p,z} \end{matrix} \right)_{k_p^*} \cdot C_p \cdot v_p^{\alpha_p} \quad (4.53)^1$$

$$= \sum_{p=1}^{NbrDashPot} \left(\begin{matrix} C_{p,x} \\ C_{p,y} \\ C_{p,z} \\ -C_{p,x} \\ -C_{p,y} \\ -C_{p,z} \end{matrix} \right)_{k_p^*} \frac{\partial}{\partial x_j} (C_p \cdot v_p^{\alpha_p}) = \sum_{p=1}^{NbrDashPot} \left(\begin{matrix} C_{p,x} \\ C_{p,y} \\ C_{p,z} \\ -C_{p,x} \\ -C_{p,y} \\ -C_{p,z} \end{matrix} \right)_{k_p^*} C_p \cdot \alpha_p \cdot v_p^{\alpha_p-1} \frac{\partial v_p}{\partial x_j} \quad (4.54)$$

Certains termes doivent à nouveau être retirés de la sommation. En effet, si le $j^{\text{ième}}$ degré de liberté non linéaire ne correspond pas à un des six degrés de liberté relatifs au $p^{\text{ième}}$ dash-pot, la dérivée $\frac{\partial v_p}{\partial x_j}$ sera nulle puisque v_p dépend effectivement (à travers Newmark) de certaines des composantes du vecteur $\{x\}$ mais pas la $j^{\text{ième}}$. Donc si la $j^{\text{ième}}$ ligne de la matrice de localisation $[LOC_p]$ est une ligne de 0, le $p^{\text{ième}}$ dash-pot n'apporte pas de contribution au calcul de l'élément (j, k) du jacobien. Par contre, admettons qu'un élément de cette ligne soit non nul et qu'il soit situé dans la $j_p^{\text{ième}}$ colonne. Dans ce cas, dériver v_p par rapport au déplacement du $j^{\text{ième}}$ degré de liberté non linéaire revient à le dériver par rapport au déplacement de son $j_p^{\text{ième}}$ degré de liberté local :

¹ La sommation n'est étendue qu'aux dash-pots pour lesquels k_p^* a été défini

$$\frac{\partial v_p}{\partial x_j} = \frac{\partial v_p}{\partial d_{j_p^*}} = \begin{pmatrix} C_{p,x} \\ C_{p,y} \\ C_{p,z} \\ -C_{p,x} \\ -C_{p,y} \\ -C_{p,z} \end{pmatrix}_{j_p^*} \cdot \frac{\partial \dot{d}_{j_p^*}}{\partial d_{j_p^*}} = \begin{pmatrix} C_{p,x} \\ C_{p,y} \\ C_{p,z} \\ -C_{p,x} \\ -C_{p,y} \\ -C_{p,z} \end{pmatrix}_{j_p^*} \cdot \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad (4.55)$$

En regroupant les équations 4.51, 4.54 et 4.55, l'expression de l'élément (j, k) du jacobien devient finalement :

$$[J]_{jk} = [A^*]_{jk} + \sum_{p=1}^{NbrDashPot} \begin{pmatrix} C_{p,x} \\ C_{p,y} \\ C_{p,z} \\ -C_{p,x} \\ -C_{p,y} \\ -C_{p,z} \end{pmatrix}_{k_p^*} \begin{pmatrix} C_{p,x} \\ C_{p,y} \\ C_{p,z} \\ -C_{p,x} \\ -C_{p,y} \\ -C_{p,z} \end{pmatrix}_{j_p^*} C_p \cdot \alpha_p \cdot v_p^{\alpha_p-1} \cdot \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad (4.56)$$

Même si c'est une chose à laquelle on pouvait s'attendre avant les développements, il est important de noter que la sommation n'est étendue qu'aux amortisseurs pour lesquels j_p^* et k_p^* ont pu être déterminés, c'est-à-dire tels que les $j^{\text{ième}}$ et $k^{\text{ième}}$ degrés de liberté non linéaires représentent deux des degrés de liberté de l'élément¹.

Voici ainsi développées les méthodes permettant de calculer la fonction vectorielle et son jacobien pour chacune des solutions intermédiaires de la résolution de Newton-Raphson. Une fois que la précision requise a été obtenue, la solution $\{u_N\}$ du système d'équation est considérée comme atteinte. Il suffit alors d'utiliser la relation 4.38 de la condensation statique pour obtenir le sous-vecteur $\{u_L\}$ des déplacements relatifs aux degrés de liberté linéaires. Le vecteur $\{u\}_{t+\Delta t}$ représentant les déplacements aux nœuds de la structure à la fin du pas de temps est obtenu en disposant ces deux sous-vecteurs l'un après l'autre. Formellement, une réorganisation est nécessaire afin de retrouver les degrés de liberté dans le même ordre que celui présent avant la phase de condensation statique. Ensuite, les vitesses $\{\dot{u}\}_{t+\Delta t}$ et accélérations $\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}$ peuvent être estimées à partir des hypothèses de Newmark (Eqs. 2.15 et 2.16). Les grandeurs ainsi calculées peuvent servir de conditions initiales à un nouveau pas de temps. De retour au paragraphe C.1., une

¹ Les mêmes constatations sont valables pour le calcul de la fonction vectorielle $\{F\}$. Elles sont cependant cachées dans la matrice de localisation. Si le $j^{\text{ième}}$ degré de liberté non linéaire ne correspond pas à un des six degrés de liberté locaux du $p^{\text{ième}}$ dash-pot, alors cet amortisseur ne contribue pas au calcul du $j^{\text{ième}}$ élément de la fonction vectorielle. (Eq. 4.50)

nouvelle fonction vectorielle non linéaire est déterminée, les itérations à l'intérieur du pas de temps sont menés jusqu'à convergence et les pas de temps se succèdent ainsi jusqu'à l'atteinte du nombre d'intervalles désiré.

C.3. Détails particuliers relatifs à la méthode

Choix des inconnues (locales / globales)

La méthode qui vient d'être développée présente une technique de résolution de l'équation du mouvement dans le système d'axes global (Eq. 4.42). En résumé, les N degrés de liberté de la structure ont été classés en degrés linéaires (N-n) et non linéaires (n) si bien qu'après condensation statique des degrés de liberté linéaires, le système se trouve réduit à n équations.

Néanmoins, on imagine aisément, vu la forme particulière du problème traité, que le nombre d'inconnues puisse être réduit à son minimum : le nombre de dash-pots. En effet, les non linéarités concentrées dans le terme $\{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t}$ de l'équation 4.42 peuvent être exprimées à partir des seules vitesses axiales relatives de chaque amortisseur de telle sorte qu'une seule inconnue « non linéaire » apparaisse par dash-pot. Pour ce faire, il faudrait exprimer le système d'équations à résoudre dans des axes locaux et non plus globaux. Chacune des équations du système réduit correspondrait alors à l'équation d'équilibre d'un dash-pot.

Il est possible de passer à cette autre formulation en multipliant l'équation 4.42 à gauche par des matrices adéquates. Les développements suivants indiquent la démarche à suivre pour projeter les équations dans les axes relatifs au q^{ième} amortisseur. La première opération consiste à multiplier à gauche le système condensé par la matrice de localisation (du q^{ième} amortisseur) transposée. Cette étape revient à ne garder, parmi les n équations, que celles relatives au q^{ième} amortisseur¹ :

$$\underbrace{[LOC_q]^T}_{[A_q]} [A^*] \underbrace{[LOC_q]}_{\{u_q\}} \{u_N\} + [LOC_q]^T \{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t} = [LOC_q]^T \{f\} \quad (4.57)$$

Le vecteur $\{u_q\}$ représente donc les déplacements des degrés de liberté non linéaires du q^{ième} dash-pot. Admettons dans un premier temps qu'à un quelconque des degrés de liberté non linéaires de la structure ne corresponde qu'un et un seul degré de

¹ La multiplication par la matrice de localisation transposée (6 × n) fournit un système de 6 équations. Celles relatives aux degrés de liberté linéaires de l'amortisseur sont triviales (multiplication par une ligne de zéros !). Cette multiplication fournit donc autant d'équation qu'il y a de degrés de liberté non linéaires pour l'amortisseur.

liberté d'un quelconque amortisseur non linéaire. Cela revient à supposer que deux amortisseurs non linéaires n'aboutissent pas au même nœud. Dans ce cas, les matrices $[LOC_q]^T [LOC_p]$ sont des matrices de dimensions (6×6) remplies de zéros lorsque p est différent de q . Cette constatation permet de simplifier le second terme de l'équation 4.57 :

$$[LOC_q]^T \{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t} = [LOC_q]^T \sum_{p=1}^{NbrDashPot} [LOC_p] \{F_{CD,élé} \}_p = \{F_{CD,élé} \}_q \quad (4.58)$$

Après cette première étape qui consiste à sélectionner les degrés de liberté non linéaires relatif à l'amortisseur désiré, l'équation 4.57 peut s'écrire :

$$[A_q] \{u_q\} + \{F_{CD,élé} \}_q = [LOC_q]^T \{f\} \quad (4.59)$$

Considérons une matrice de rotation¹ $[R_q]$ qui permet d'amener l'axe X des axes globaux de référence sur l'axe du q^{ième} amortisseur :

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [R_q]^T \begin{Bmatrix} C_{q,x} \\ C_{q,y} \\ C_{q,z} \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

La seconde étape consiste à multiplier l'équation 4.59 à gauche par cette nouvelle matrice transposée. Les équations sont donc exprimées dans le système d'axe local relatif à l'amortisseur considéré :

$$\underbrace{[R_q]^T [A_q] [R_q]}_{[A_q^l]} \underbrace{[R_q]^T \{u_q\}}_{\{d_q^{(nl)}\}} + [R_q]^T \{F_{CD,élé} \}_q = [R_q]^T [LOC_q]^T \{f\} \quad (4.61)$$

Le second terme du membre de gauche représente les efforts appliqués par l'amortisseur dans ses axes locaux. Seuls les termes correspondant à la direction axiale sont non nuls :

¹ Il s'agit d'une matrice de rotation tridimensionnelle ; elle est souvent exprimée à l'aide des angles de précession (ψ), de nutation (θ) et de rotation propre (φ) :

$$[R_q] = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & [IDEM] \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

Cette matrice est orthogonale et unitaire. Elle n'est pas unique dans la mesure où un troisième point non situé sur l'axe du dash-pot est nécessaire pour définir la position de l'axe local y.

$$[R_q]^T \{F_{CD,élé\grave{e}m}\}_q = [R_q]^T \begin{Bmatrix} C_{p,x} \\ C_{p,y} \\ C_{p,z} \\ -C_{p,x} \\ -C_{p,y} \\ -C_{p,z} \end{Bmatrix} \cdot C_p \cdot v_p^{\alpha_p} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot C_p \cdot v_p^{\alpha_p} \quad (4.62)$$

Pour terminer, il reste à multiplier l'équation 4.61 à gauche par la matrice [T] de sorte que les deux équations correspondant aux déplacements axiaux deviennent l'équation relative au déplacement relatif axial et l'équation relative à la somme des déplacements axiaux.

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$\underbrace{[T]^{-1} [A_q^{II}] [T]^{-1} [T] \{d_q^{(nl)}\}}_{[A_q^{III}]} + \underbrace{[T]^{-1} [T] \{d_q^{(nl,mod)}\}}_{\{d_q^{(nl,mod)}\}} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot C_p \cdot v_p^{\alpha_p} = [T]^{-1} [R_q]^T [LOC_q]^T \{f\} \quad (4.64)$$

$$[A_q^{III}] \{d_q^{(nl,mod)}\} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot C_p \cdot v_p^{\alpha_p} = [T]^{-1} [R_q]^T [LOC_q]^T \{f\} \quad (4.65)$$

Parmi les équations subséquentes de la relation 4.65, seule la première reste non linéaire puisque pour les cinq autres, la composante correspondante dans $[T]^{-1} [R_q]^T [LOC_q]^T \{F_{CD,nonlin}\}_{t+\Delta t}$ est annulée. Le système d'équations 4.42 écrit dans les axes globaux vient d'être projeté dans les axes locaux relatifs au q^{ième} amortisseur. Parmi les cinq équations linéaires, certaines peuvent être triviales mais le principal est que, parmi les six équations de la relation 4.65, le nombre d'équations non triviales correspond au nombre de degrés de liberté non linéaires du q^{ième} amortisseur. On peut ainsi obtenir, en répétant l'opération pour tous les amortisseurs, un ensemble de n

équations équivalentes au système 4.42. Dans cet ensemble, le nombre d'équations non linéaires est réduit à son minimum : le nombre de dash-pots non linéaires. Le nouveau système obtenu peut être soumis à une condensation statique et le reste de la résolution suit la même démarche que celle expliquée pour la résolution du système 4.42.

Malgré l'aspect intéressant que peut montrer la méthode exposée, elle ne doit cependant pas être considérée sans les hypothèses inhérentes au développement. En l'occurrence, la supposition que deux amortisseurs n'aboutissent pas au même nœud peut être mise à défaut. Dans ce cas, plusieurs termes sont conservés dans la sommation de la relation 4.58. L'écriture des équations d'équilibre des autres amortisseurs intervenant dans la sommation fournit des relations redondantes de sorte que le système ne peut plus être résolu de cette manière. Cela se comprend aisément en constatant que si plusieurs amortisseurs aboutissent en un même nœud, les efforts appliqués par chacun d'eux s'additionnent et, vu la forme non linéaire qui leur est attribuée, aucune transformation linéaire du système (multiplication à gauche ou à droite par des matrices adéquates) ne saurait découpler ces efforts. Il n'est dès lors plus possible d'écrire les équations d'équilibre séparément pour chacun des dash-pots. C'est pour cette raison que les programmes rédigés se basent sur la résolution de l'équation dans les axes globaux.

Démarrage

Le calcul de la fonction vectorielle $\{F\}$ associée à la solution intermédiaire $\{x^{(i)}\}$ ne pose aucun problème. Cependant, dans le terme non linéaire intervenant dans l'expression du jacobien $[J]$, le facteur $|v_p|^{\alpha_p-1}$ apparaît. Etant donné que les amortisseurs sont caractérisés par des valeurs du paramètre α inférieures à l'unité, ce facteur tend vers l'infini lorsque la vitesse axiale relative d'un dash-pot tend vers zéro. Même si la vitesse est très petite, le compilateur FORTRAN n'a aucun mal à calculer l'expression du jacobien. Si par contre, la vitesse axiale est nulle, c'est-à-dire égale à 0.00^E+00 , le vrai zéro numérique, l'évaluation du facteur devient impossible. Lorsque le calcul de la structure est en cours, l'obtention d'une vitesse exactement nulle est très rare et ne relève pour ainsi dire que d'une mauvaise fortune.

Il existe néanmoins une situation dans laquelle les vitesses axiales relatives associées à chaque amortisseur sont nulles : il s'agit de la condition de repos. Cette condition est beaucoup plus fréquente étant donné qu'un calcul dynamique utilise souvent cet état comme condition initiale. La solution adoptée pour les programmes réalisés consiste simplement à ne pas calculer, dans l'expression du jacobien, les termes relatifs aux amortisseurs concentrés pour lesquels la vitesse axiale est nulle. En d'autres termes, pour les éléments (j, k) du jacobien tels que la contribution des amortisseurs non linéaires est théoriquement infinie, seul l'élément (j, k) de la matrice $[A^*]$ est considéré. La

simplification est donc très importante mais vite récupérée dans la mesure où la première itération à l'intérieur de ce premier pas de temps correspond à un état de la structure déformé à partir duquel le jacobien est dès lors estimé de manière exacte et ce, jusqu'à la fin des itérations dans le temps, sous réserve d'obtenir une vitesse exactement nulle pour un des dash-pots en cours de calcul.

Convergence

La méthode exposée au paragraphe C.2. détaille les étapes nécessaires au calcul de la fonction vectorielle $\{F\}$ et de son jacobien $[J]$. Ces deux grandeurs doivent être estimées dans le cadre d'une résolution d'un système d'équation par la technique de Newton-Raphson. Les rappels théoriques indiquent cependant que cette méthode ne converge pas au voisinage des points d'inflexion. Si la convergence n'est pas atteinte après une dizaine d'itérations, un autre procédé, une généralisation à plusieurs dimensions de la regula falsi, est utilisé pour suppléer le premier. Il ne nécessite que l'estimation de la fonction vectorielle (sans son jacobien) dont les principes viennent d'être développés.

D'autre part, lors des itérations de Newton-Raphson, une accélération de la convergence par extrapolation d'Aitken est systématiquement utilisée. En combinant ces deux méthodes, la convergence vers la racine du système à résoudre est atteinte assez rapidement. C'est pour cette raison que seulement dix itérations sont effectuées par le processus de Newton-Raphson : le processus devrait normalement avoir convergé après dix itérations ; s'il n'en est pas ainsi, c'est que la racine se trouve dans le voisinage d'un point d'inflexion.

D. L'ANALYSE DYNAMIQUE DANS FINELG

D.1. Principes de fonctionnement

L'objectif principal du travail consiste à appliquer la méthode décrite au paragraphe précédent.

Une première application a été réalisée dans une feuille de calcul Mathcad dont le listing est fourni à l'annexe 4. Cette feuille effectue, par la méthode des éléments finis, l'analyse dynamique transitoire de structures composées de poutres et de dash-pots non linéaires. Les détails relatifs à ces développements ne sont guère d'intérêt dans la mesure où ils appliquent la théorie dans le même ordre que celui dans lequel elle a été exposée.

Une autre application de la méthode consiste à s'intégrer dans le programme d'éléments finis FINELG. Ce programme propose déjà la possibilité d'analyser le comportement dynamique de structures composées de poutres, de ressorts et d'amortisseurs concentrés dont les lois constitutives sont exclusivement linéaires.

L'importance de ce document ne permet pas d'expliquer le fonctionnement des routines existantes¹ mais il est intéressant d'indiquer brièvement leur agencement. La figure 4.9. donne un organigramme succinct de l'organisation actuelle de l'analyse dynamique transitoire.

Le programme principal, FINELG, appelle deux routines : FIRST et DYNAMT. La première s'occupe d'abord de la lecture et du stockage des données. Ensuite, elle crée les matrices élémentaires puis les assemble de manière à établir les matrices de masse et de raideur de la structure complète. La seconde routine, quant à elle, aiguille la résolution vers d'autres procédures qui calculent d'abord les efforts appliqués sur la structure. Dès que ces efforts sont déterminés, tous les membres de l'équation du mouvement sont établis. La méthode de Newmark est employée de manière à former un système d'équation dont la résolution fournit les déplacements aux nœuds de la structure à la fin du pas de temps. Le procédé itératif est ainsi poursuivi jusqu'à avoir épuisé le nombre de pas de requis par l'utilisateur.

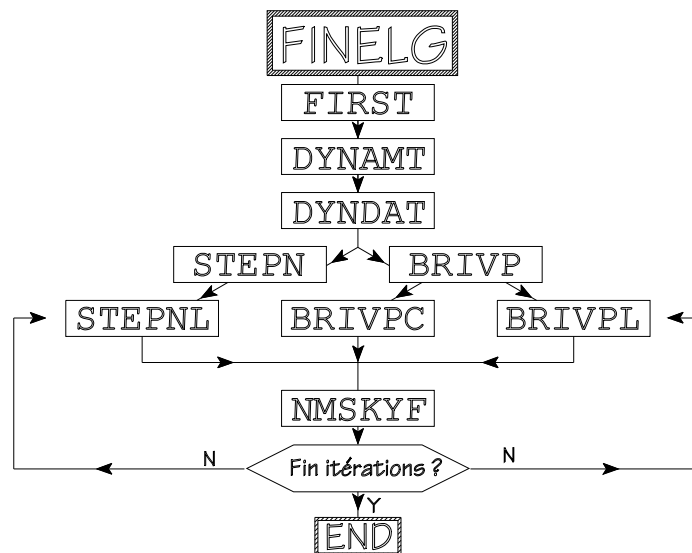


FIGURE 4.9. L'ANALYSE DYNAMIQUE TRANSITOIRE DANS FINELG

Puisque l'objectif du travail consiste à intervenir au niveau de la seconde routine, la figure 4.9. donne également quelques détails supplémentaires à propos de son organisation. La routine DYNAMT ne fait qu'appeler deux sous-routines dans lesquelles les opérations décrites ci-avant sont réalisées :

¹ Pour des renseignements complémentaires à ce sujet, consulter la thèse présentée par Yang Fuheng.

- DYNDAT : le rôle principal de cette routine consiste à découper le vecteur A dans lequel toutes les données sont stockées. Les zones ainsi délimitées contiennent toutes les informations nécessaires à la résolution du problème ;
- STEPN / BRIVP : ces deux routines s'occupent du reste des opérations. Le choix entre l'une ou l'autre dépend des charges extérieures. La première correspond à des charges appliquées fixes mais d'intensité variable alors que la seconde traite des charges mobiles d'intensité variable ou non (passage de piétons, véhicules, etc...); elle permet également d'apprécier l'interaction entre les véhicules et la structure qui les supporte.

Etant donné que la programmation de la méthode décrite au paragraphe C requiert le stockage d'une certaine quantité d'information, des modifications devront être opérées dans la routine DYNDAT. Les points importants du travail concernent néanmoins la résolution du système ; les routines STEPN et BRIVP vont être quelque peu détaillées.

Selon que l'une ou l'autre de ces deux dernières routines ait été appelée, une des trois procédures STEPNL, BRIVPL ou BRIVPC est lancée. C'est à cet endroit que débute la grande boucle des itérations dans le temps. A chaque pas, la procédure choisie appelle GETPBT qui crée le vecteur des charges extérieures énergétiquement équivalentes à l'instant considéré. Ensuite, elle appelle NMSKYF qui crée puis résout le système d'équations (2.17 – Newmark). Quand les déplacements, vitesses et accélérations des nœuds de la structure sont connus à la fin du pas de temps, l'exécution revient alors dans STEPNL, BRIVPL ou BRIVPC qui sauve les résultats obtenus avant de passer au pas suivant. Le calcul est terminé lorsque le dernier pas de temps est atteint.

D.2. La routine NMSKYF

Il est certain que toutes les routines mentionnées jusqu'ici devront être modifiées (ne serait-ce que pour transmettre les données à stocker jusqu'à DYNDAT où le découpage du vecteur A est réalisé), mais c'est bien sûr vers NMSKYF, qui régit la résolution du système, que le travail doit se focaliser.

La figure 4.10. indique l'organisation des opérations réalisées lors du passage dans la routine NMSKYF.

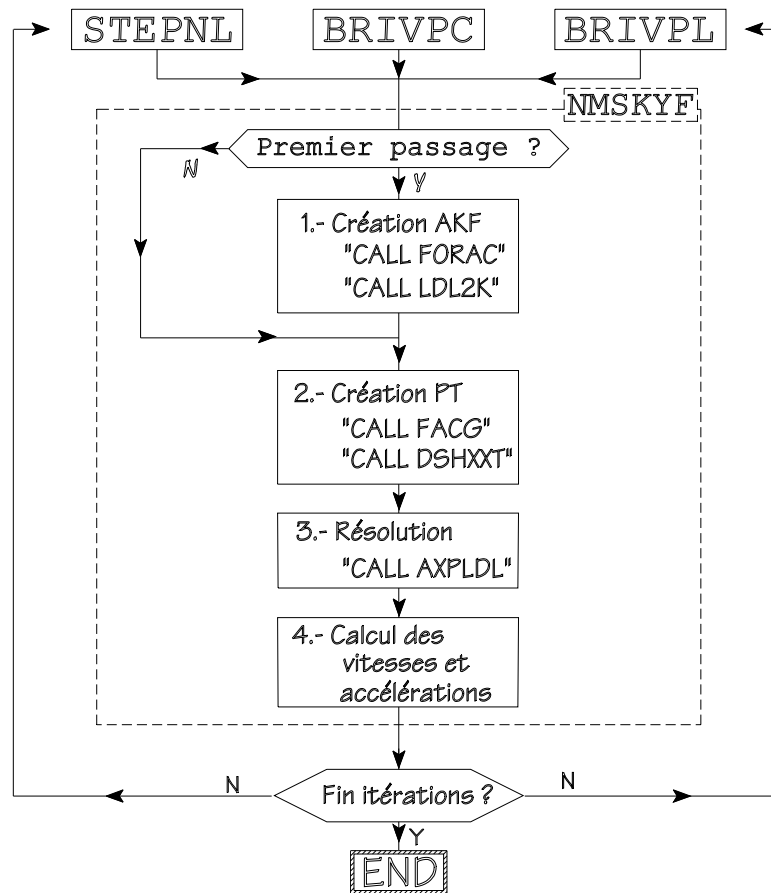


FIGURE 4.10. FONCTIONNEMENT DE LA ROUTINE NMSKYF

La routine NMSKYF traite la résolution de l'équation de Newmark. Pour un système linéaire, sans amortissement concentré, l'équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} [M] + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} [C] + [K] \right) \{u\}_{t+\Delta t} = \{P\}_{t+\Delta t} + [M] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \{u\}_t + \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{u}\}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{u}\}_t \right) + [C] \left(\frac{\delta}{\alpha \Delta t} \{u\}_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \{\dot{u}\}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \{\ddot{u}\}_t \right) \quad (4.63)$$

Les variables utilisées dans le programme sont la matrice [AKF] et le vecteur {PT}. Leur définition est immédiate par comparaison des équations 4.63 et 4.64.

$$[AKF] \{u\}_{t+\Delta t} = \{PT\} \quad (4.64)$$

(1) Puisque le système est linéaire, les caractéristiques de masse, raideur et amortissement sont constantes au cours du chargement. La matrice [AKF] est donc identique du début à la fin, si bien que son évaluation au premier pas de temps suffit. La routine débute donc avec une condition : s'il s'agit du premier passage, la matrice [AKF]

doit être formée. Les matrices [M] et [K] sont transmises si bien que les premier et dernier termes ne posent aucun problème. La matrice [C] n'est pas formée mais puisque l'amortissement est un amortissement de Rayleigh, la connaissance des matrices [M] et [K] et des coefficients de Rayleigh permet d'ajouter la contribution de l'amortissement aux éléments de [AKF] déjà calculés. La première version de la routine s'arrêtait ici. Depuis, des modifications ont été ajoutées de façon à pouvoir tenir compte d'un amortissement concentré. A la matrice déjà formée, il faut donc encore ajouter des contributions provenant de ce nouvel amortissement. Cela est réalisé à l'aide de la routine FORAC qui lit sur un fichier temporaire les données relatives aux amortisseurs concentrés (linéaires) : degrés de liberté considérés, paramètres de viscosité. Une fois formée, la matrice est décomposée sous la forme $L.D.L^T$ [CALL LDL2K].

(2) Les routines STEPNL, BRIVPL ou BRIVPC transmettent à NMSKYF le vecteur des charges extérieures $\{P\}_{t+\Delta t}$ à la fin du pas de temps¹. Ce vecteur est stocké dans PT qui doit représenter le second membre de l'équation 4.63. Il faut donc ajouter à ce vecteur les termes relatifs aux effets de la masse et de l'amortissement. Lorsque ces contributions sont ajoutées, il reste à leur additionner encore celles provenant de l'amortissement concentré. La routine DSHXXT (qui a été ajoutée simultanément à la routine FORAC) s'occupe de cette opération. Les données relatives aux amortisseurs sont lues sur le fichier temporaire puis interprétées et finalement les contributions sont ajoutées.

(3) & (4) Une fois le vecteur PT estimé, la routine AXPLDL² résout le système 4.64³ : elle remplace le contenu du vecteur PT, obsolète dans la suite, par les déplacements relatifs à chacun des degrés de liberté de la structure. Lorsque ces déplacements sont établis, il reste à calculer les vitesses et accélérations à la fin du pas de temps avant de retourner dans STEPNL, BRIVPL ou BRIVPC pour passer au pas suivant.

¹ En cas de sollicitation par tremblement de terre, PT est nul et l'effet du tremblement est pris en compte à l'aide de la routine FACG

² Résolution du système $[A]\{x\}=\{P\}$ lorsque [A] a été décomposée en $L.D.L^T$

³ La résolution du système a lieu pour chaque pas de temps. On pourrait imaginer d'inverser une seule fois la matrice [AKF] et d'utiliser cette inverse à chaque pas de temps ; le programmeur initial de la routine a plutôt décidé de stocker la matrice [AKF] au format skyline pour gagner de la place en mémoire aux dépens d'une résolution plus rapide.

E. MODIFICATIONS APPORTEES AU PROGRAMME

E.1. Aperçu des modifications

En plus de la discrétisation temporelle de Newmark, la méthode développée au paragraphe C laisse apparaître deux étapes importantes : la condensation statique des degrés de liberté linéaires [CONSTA] et la résolution itérative du système d'équations subséquent [RESDSH]. D'après l'organisation de la routine NMSKYF, il paraît assez logique d'intégrer chacune des ces deux opérations comme indiqué sur la figure 4.11.

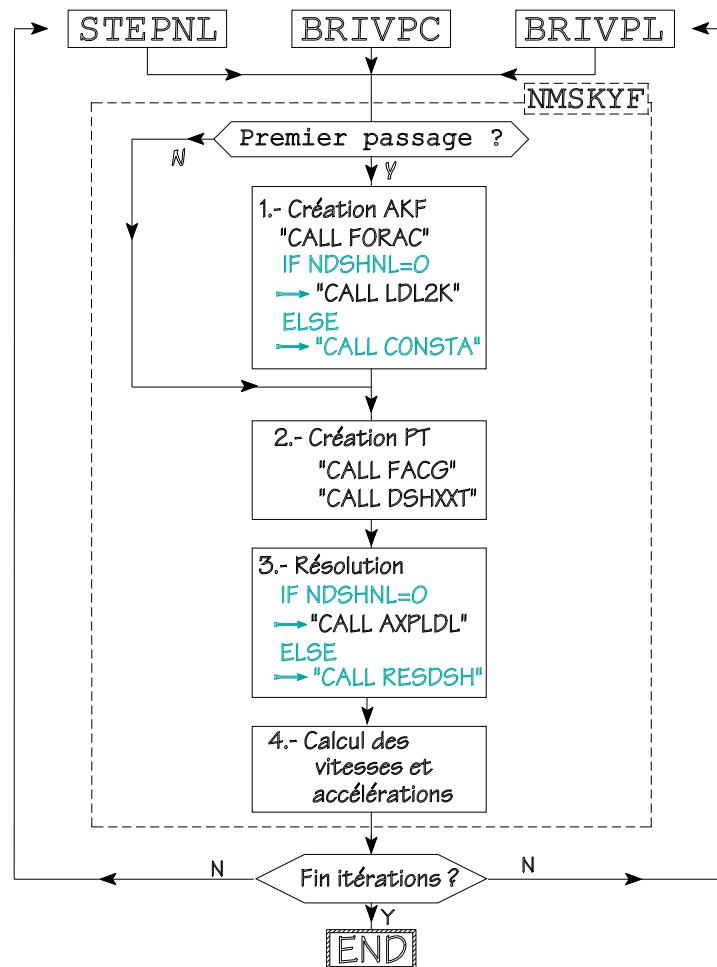


FIGURE 4.11. MODIFICATIONS OPEREES DANS NMSKYF

Lors de la lecture des données du problème (passage dans la routine FIRST, première routine appelée par FINELG), l'exécution passe par des routines relatives aux éléments utilisés. Par exemple, les dash-pots linéaires sont introduits dans la structure à l'aide des éléments RESS2A. Ainsi, pour une structure comportant de tels amortisseurs, l'exécution du programme passe dans la routine RESS2A. C'est à cet endroit qu'est créé le fichier temporaire contenant les informations relatives aux amortisseurs. Cette routine a également été modifiée : que l'amortisseur soit linéaire ou non, les données relatives à sa

position et son comportement sont stockées sur le fichier temporaire (unité 93). Lors de leur récupération dans la routine FORAC, ces données sont triées : soit elles correspondent à un amortisseur linéaire ; dans ce cas, elles sont traitées comme dans l'ancienne version (aucune modification n'a été opérée à ce niveau) ; soit elles concernent un amortisseur non linéaire et un traitement des données est réalisé. De ce traitement ressortent :

- le nombre de dash-pot non linéaires NDSHNL ;
- la matrice DATADSH (I, J) : où I est un indice représentant les dash-pots ($1 < I < \text{NDSHNL}$) et J, l'indice des colonnes qui varie de 1 à 6 selon la donnée à attribuer au dash-pot : cosinus directeurs par rapport aux axes globaux de référence, paramètres C et α de la loi de comportement si la loi choisie est exponentielle. Si par contre la loi constitutive est bi-linéaire, C représente la viscosité initiale, α la seconde viscosité et v_0 la vitesse limite entre les deux comportements ;

		Données relatives au dash-pot concerné					
		C_X	C_Y	C_Z	C	α	v_0
Dash-pot concerné	1						
	2						
	3						

- la matrice d'entiers IDSHDDL (I, J) qui, pour le degré de liberté¹ J ($1 < J < 6$) de l'amortisseur I, fournit le degré de liberté de la structure globale. Cette valeur est donc comprise entre 1 et NDOF où NDOF représente le nombre de degrés de liberté de la structure. IDSHDDL (I, J) peut néanmoins prendre la valeur « 0 » si le degré de liberté J de l'amortisseur I est un degré de liberté linéaire, c'est à dire s'il est fixé ou perpendiculaire à l'axe du dash-pot.

(1) A la sortie de FORAC, le nombre d'amortisseurs non linéaires placés dans la structure est donc connu. S'il est égal à zéro, aucune modification ne doit être entreprise par rapport à l'ancienne démarche de résolution (appel de LDL2K). Si par contre la structure comporte des dash-pots non linéaires, il faut procéder à la condensation statique des degrés de liberté linéaires. Cette opération [CALL CONSTA] peut n'être réalisée qu'une seule fois puisque les matrices de masse et de raideur sont constantes au long des itérations dans le temps. Elle est donc intégrée dans la partie de NMSKYF qui n'est exécutée qu'au premier pas de temps.

¹ Ce sont les degrés de libertés représentés à la figure 4.8. : trois translations par nœud et deux nœuds par amortisseur

(2) La création du second membre PT est toujours nécessaire (Eq.4.63), même si ce vecteur doit encore être complété par les efforts des dash-pots.

(3) Quant à la résolution du système, s'il n'y a pas de dash-pot non linéaire, elle est menée comme auparavant (AXPLDL) ; dans le cas contraire, c'est la routine RESDSH qui est appelée : elle résout alors par la méthode de Newton-Raphson le système d'équations condensé. Tout comme AXPLDL, cette routine remplace le vecteur PT par les déplacements des nœuds de la structure à la fin du pas de temps.

(4) Lorsque ces déplacements sont déterminés, les hypothèses de Newmark permettent de calculer les vitesses et accélérations.

Les deux paragraphes suivants détaillent, à l'aide d'organigrammes, les fonctionnements des deux routines principales ajoutées. De nouveau, il n'est guère intéressant de rentrer dans les détails de la programmation ; les listings relatifs aux routines développées se trouvent à l'annexe 3 ; il est conseillé de s'y référer pour une compréhension approfondie du programme.

E.2. La routine CONSTA

A partir des données relatives aux positions des dash-pots, cette procédure sépare les parties linéaire et non linéaire de la matrice [AKF] qui lui est fournie au format skyline. La figure 4.12. résume schématiquement le fonctionnement de cette routine.

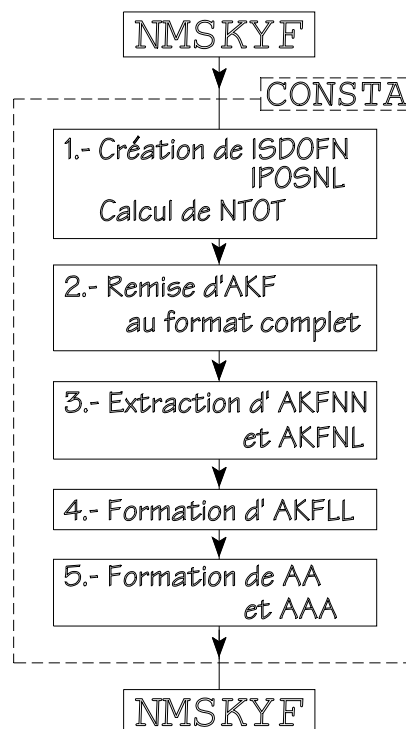


FIGURE 4.12. ORGANISATION DE LA ROUTINE CONSTA

(1) Pour commencer, le vecteur ISDOFN est créé. Il comporte NDOF composantes ; pour chacun des NDOF degrés de liberté de la structure, ISDOFN indique si ce degré de liberté est linéaire (= 1) ou non linéaire (= 0). Ensuite, la matrice IPOSNL (I, J) est formée : pour le degré de liberté J du dash-pot I, elle indique le numéro du degré de liberté non linéaire global qui lui correspond. Le nombre total de degrés de liberté non linéaires est appelé NTOT ; il est obtenu en prenant la somme des éléments de ISDOFN.

(2) Lorsque ces ultimes traitements des données relatives aux amortisseurs non linéaires sont effectués, la matrice [AKF] est remise au format complet. Elle arrive dans la routine CONSTA au format skyline ; elle est univoquement déterminée par deux vecteurs : AKF qui contient les morceaux de colonnes proches de la diagonale et NADDR qui contient les indices repérant les éléments diagonaux de la matrice dans le vecteur AKF. A partir de ces deux vecteurs, la matrice AAKF de dimensions NDOF × NDOF est reformée.

(3) & (4) Une fois la matrice AKF étendue, il reste à récupérer les parties linéaire (AKFLL), non linéaire (AKFNN) et croisée (AKFNL). Les dimensions des parties non linéaire et croisée sont respectivement NTOT × NTOT et NTOT × NDOF. Puisque le nombre total de degrés de liberté non linéaires à escompter ne doit pas être trop élevé, les éléments relatifs à ces matrices sont extraits de AKF et stockés dans de nouvelles matrices AKFNN et AKFNL. Quant à la matrice AKFLL, elle contient assurément beaucoup plus d'éléments. D'un autre côté, la matrice AKF complète ne sera plus d'aucune utilité après la condensation. C'est pourquoi, l'emplacement mémoire de la matrice AKF (NDOF × NDOF) est utilisé pour y stocker sa partie linéaire ((NDOF – NTOT) × (NDOF – NTOT)). Les éléments sont regroupés dans la partie supérieure gauche de la matrice AKF. Lorsque cette dernière partie est établie, son inverse est calculée (à l'aide de la routine POSINV qui remplace la matrice initiale par son inverse).

(5) Il reste finalement à calculer les matrices réduites qui seront utilisées dans la suite :

$$[AA] = [AKFNL][AKF]^{-1} \quad (4.61)$$

$$[AAA] = [AKFNN] - [AKFNL][AKF]^{-1}[AKFNL]^T \quad (4.62)^1$$

¹ Il s'agit du calcul des matrices réduites intervenant dans les équations 4.38 à 4.42

E.3. La routine RESDSH

L'organigramme de la figure 4.13 indique schématiquement les étapes rencontrées lors de l'exécution de la routine RESDSH. La partie gauche de la figure concerne essentiellement les itérations relatives à la méthode de Newton-Raphson et à l'accélération de la convergence (méthode d'Aitken) ; quant à la colonne de droite, elle schématise les opérations nécessaires à la regula falsi (qui, pour rappel, est utilisée lorsque le processus de Newton-Raphson ne converge pas).

Pour comprendre ce schéma, il est nécessaire d'introduire quelques notations utilisées dans le programme :

$X0 (I, J)$: matrice des déplacements, vitesses et accélérations aux nœuds de la structure et au début du pas de temps ($1 < I < NDOF$ et $1 < J < 3$ (déplacements $\equiv 1$; vitesses $\equiv 2$; accélérations $\equiv 3$)) ;

$XX0 (I, J)$: même matrice que $X0$ mais dont les éléments sont réorganisés de façon à placer en tête ceux relatifs aux degrés de liberté non linéaires ; mis à part $X0$, toutes les matrices utilisées dans la routine correspondent au même ordre d'équations que $XX0$;

$XT1 (I, J)$: cette matrice contient les déplacements et vitesses à la fin du pas de temps. Il s'agit de l'itéré en cours ;

$XT2 (I, J)$: cette matrice est utilisée de deux manières différentes : dans Newton-Raphson, elle contient l'estimation de l'itéré suivant. Cette valeur est utilisée, ainsi que l'itéré en cours, pour obtenir l'itéré suivant (accélération de convergence) ; dans la regula falsi, elle représente l'itéré suivant calculé à partir du vecteur de fuite ($XT3$) et de l'itéré en cours ($XT1$) ;

$XT3 (I, J)$: cette matrice représente d'une part les accroissements de déplacements pour la méthode de Newton-Raphson ($DELTA X$) et d'autre part le vecteur de fuite utilisé par la regula falsi.

Afin de simplifier les notations de la figure 4.13, seul le second indice est utilisé. $XT1(1)$ représente donc par exemple les déplacements de l'itéré en cours.

Il y a trois possibilités différentes pour sortir de la routine RESDSH :

- la méthode de Newton-Raphson permet d'atteindre le niveau de précision ($precision^1 = 4$) voulu avant un certain nombre d'itérations ($NITEMAX = 10$) ;
- ce nombre d'itérations est atteint et la convergence est obtenue à l'aide de la regula falsi. Il faut néanmoins que cette méthode ait convergé en un nombre d'itérations inférieur à $NITETOT (= 1500)$;
- le nombre d'itérations $NITETOT$ est atteint. Dans ce cas, la convergence n'est pas atteinte avec la précision voulue. Dans ce cas, le calcul continue quand même en affichant un warning dans le fichier de résultats (.OUT). Ce message indique aussi la précision atteinte après ce nombre d'itérations dans le pas de temps.

¹ Le critère de convergence utilisé est celui de l'équation 2.25.

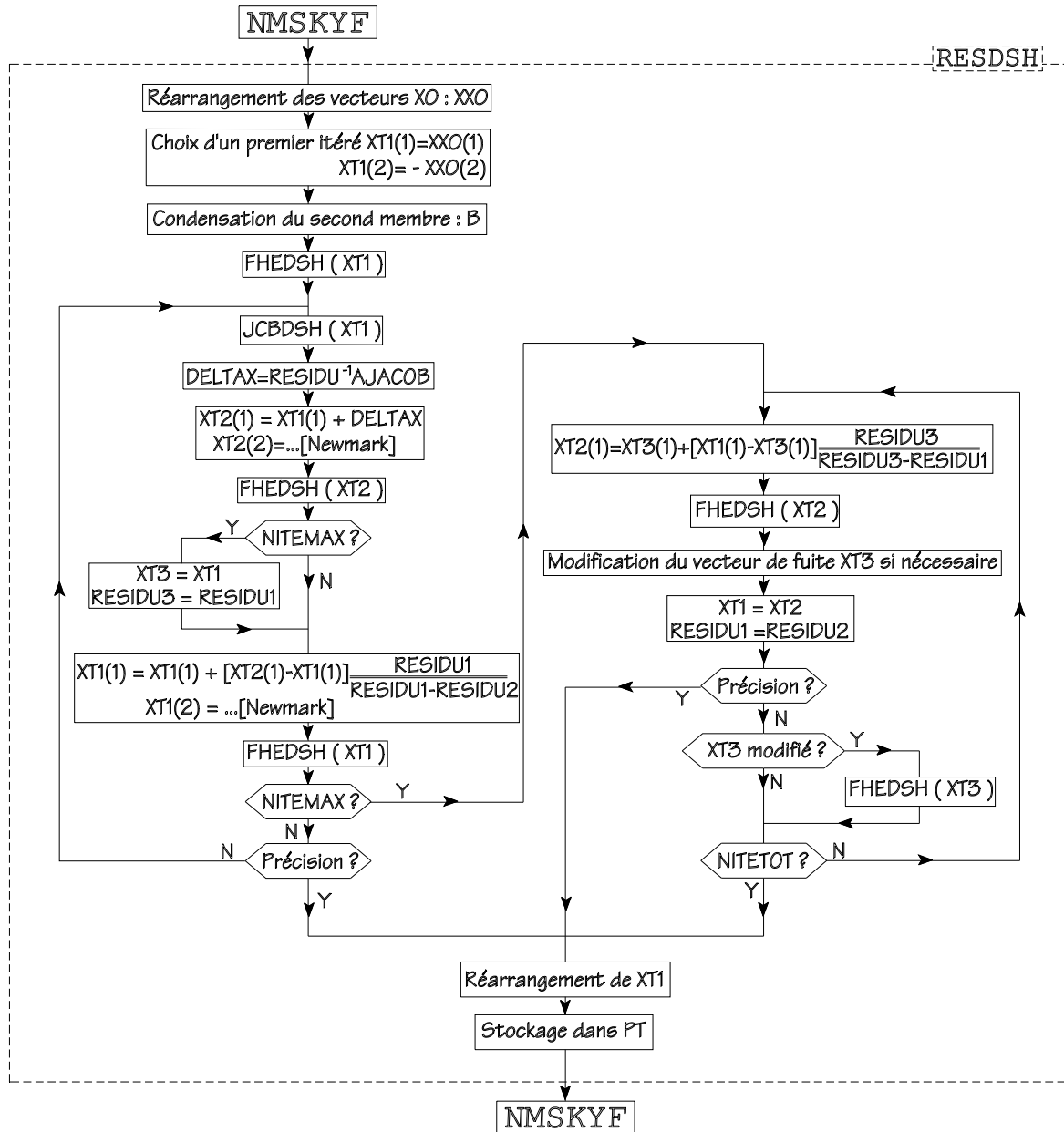


FIGURE 4.13. ORGANISATION DE LA ROUTINE RESDSH

Chapitre 5 : Applications

A. INTRODUCTION

Les deux buts principaux de ce chapitre sont :

- d'une part de fournir un exemple simple facilement reproductible et qui permet d'apprécier la justesse des nouvelles routines dans des cas particuliers. Cet exemple académique peut aussi servir de comparaison lors d'une éventuelle re-programmation des méthodes développées dans ce document ;
- d'autre part d'aborder une structure plus complexe comportant de nombreux degrés de liberté. Il s'agit en l'occurrence d'une modélisation (tout de même simplifiée) du pont-canal de Houdeng-Aimeries.

Pour chacun des exemples, les calculs sont réalisés à l'aide du programme FINELG et de feuilles de calcul Mathcad. Dans la mesure du possible, les résultats sont également comparés soit avec ceux obtenus par un calcul simplifié, soit avec les résultats simples analytiques lorsqu'ils existent. Plusieurs fichiers MathCad ont été développés ; ils permettent d'entreprendre différents types d'analyse. Le tableau ci-dessous résume les possibilités offertes.

Analyse Statique	Analyse Dynamique	
	<u>Linéaire</u>	<u>Non linéaire</u>
STATIC	1DDL	1DDLNL
	FREQPROP	1DDLILIN
	MULTIDDL	MULTINL
	SUPERP	MULTIBILIN
	RITZ	

TABLEAU 5.1. : FEUILLES DE CALCUL MATHCAD - PARTIE ANALYSE

Pour la génération d'accélérogrammes, quelques feuilles de calcul ont également été développées :

Génération	Calcul de spectre
GENERATION.MCD	SPECTRE.MCD

TABLEAU 5.2. : FEUILLES DE CALCUL MATHCAD - PARTIE SISMIQUE

A l'annexe 4 se trouve une liste de tous ces fichiers avec le type de calcul réalisé, les hypothèses prises en compte, etc. On y trouve également le listing du fichier MULTINL.MCD qui réalise le calcul d'une structure comprenant des amortisseurs non linéaires.

B. UN EXEMPLE SIMPLE ET ACADEMIQUE

B.1. La structure étudiée

La structure choisie est une console encastrée en base et libre de se déplacer au sommet. Dix éléments de poutre sont utilisés pour représenter ses 37 m de hauteur. Les caractéristiques géométriques et mécaniques de cette console sont constantes sur toute sa hauteur : $A = 14,3 \text{ m}^2$; $I = 38,3 \text{ m}^4$; le matériau choisi est supposé se comporter linéairement avec un module de Young $E = 23\ 600 \text{ MPa}$.

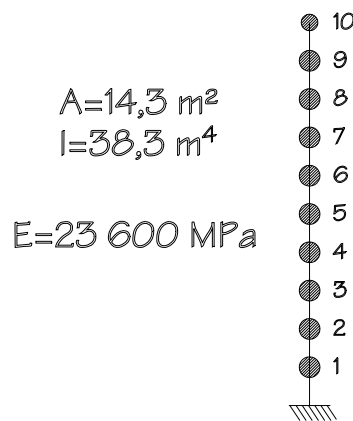


FIGURE 5.1. : MODELISATION DE LA PILE DE PONT

La masse volumique du matériau utilisé est $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$. La masse linéique μ vaut donc $\mu = \rho.A = 35750 \text{ kg/m}$, ce qui donne aussi une masse totale de 1322,75 tonnes. Dans les modélisations choisies, cette masse est supposée concentrée aux extrémités des éléments.

Le problème est étudié à partir de deux modélisations : l'une réalisée avec FINELG (éléments de poutre spatiale) et l'autre avec MathCad (éléments de poutre plane). Les paragraphes suivants fournissent les résultats obtenus avec chacun des deux

programmes : après un calcul de fréquences propres, on procède à une analyse dynamique transitoire de la structure non amortie ; on étudie ensuite le comportement de la pile à laquelle un amortisseur est ajouté en tête. Dans chacun des cas, le calcul de la réponse dynamique transitoire est entrepris sans amortissement structural ; le seul amortissement considéré provient donc des dash-pots ajoutés.

B.2. Les fréquences propres (répertoire 0)

Calcul avec les feuilles MATHCAD

Pour les huit premiers modes propres de vibration, le tableau 5.3 indique les fréquences correspondantes ainsi que les masses et raideurs généralisées¹. Il fournit également les facteurs de participation modale dans le cas d'un tremblement de terre à composante horizontale. On remarque par exemple que le mode 3 est caractérisé par une participation modale nulle ; ce mode est en effet symétrique par rapport à l'axe de la console (il s'agit d'un mode de vibration axiale).

Mode	Fréquences [Hz]	Masse généralisée (kg)	Raideur généralisée (N/m)	Participation modale (%)
1	2.046	1.100 ^{E5}	1.818 ^{E7}	2,710
2	12.68	1.088 ^{E5}	6.906 ^{E8}	1,514
3	20.7	1.202 ^{E5}	2.042 ^{E9}	0
4	35.1	1.070 ^{E5}	5.219 ^{E9}	0,894
5	61.7	1.202 ^{E5}	1.808 ^{E10}	0
6	68.1	1.048 ^{E5}	1.922 ^{E10}	0,646
7	101.2	1.202 ^{E5}	4.857 ^{E10}	0
8	111.4	1.026 ^{E5}	5.027 ^{E10}	0,506

TABLEAU 5.3. DONNEES RELATIVES AUX MODES DE VIBRATION (MATHCAD)

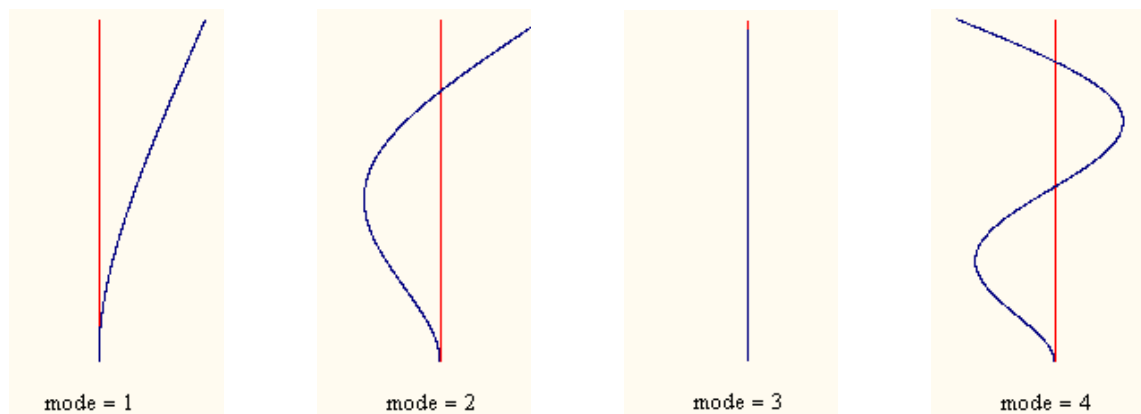


FIGURE 5.2. PREMIERS MODES PROPRES DE VIBRATIONS

¹ Ces deux grandeurs n'ont vraiment de signification qu'à partir du moment où est donnée la façon dont les modes propres sont normés. Le principal est que leur rapport soit égal au carré de la pulsation propre du mode correspondant.

Calcul avec FINELG

La console est caractérisée par les mêmes inerties principales. On retrouve donc les mêmes modes de vibration, associés aux mêmes fréquences, dans les deux plans perpendiculaires verticaux (X-Z et Y-Z). Seuls les modes de vibration dans le plan X-Z sont indiqués dans le tableau 5.4.

Mode	Fréquences [Hz]	Masse généralisée (kg)	Raideur généralisée (N/m)	Facteur de participation modale
1	2.04600	6.665 ^{E5}	0.110 ^{E9}	0,7784
2	12.6791	6.991 ^{E5}	0.444 ^{E10}	0,4223
3	20.7385	6.614 ^{E5}	0.112 ^{E11}	0,321 ^{E-9}
4	35.1464	7.629 ^{E5}	0.372 ^{E11}	0,2368
5	61.7049	6.614 ^{E5}	0.994 ^{E11}	0,106 ^{E-10}
6	68.1553	8.876 ^{E5}	0.163 ^{E12}	0,1568
7	101.1519	6.614 ^{E5}	0.267 ^{E12}	0,171 ^{E-9}
8	111.4130	13.716 ^{E5}	0.552 ^{E12}	0,1081

TABLEAU 5.4. DONNÉES RELATIVES AUX MODES DE VIBRATION (FINELG)

Les masses et raideurs généralisées données par FINELG sont systématiquement plus grandes puisque les modes propres sont normés de façon à ce que la plus grande composante en valeur absolue soit unitaire alors que dans Mathcad, les modes propres sont orthonormés (norme euclidienne unitaire)

Comparaison avec les résultats théoriques

Pour le cas simple d'une poutre encastree-libre, les pulsations propres peuvent être calculées analytiquement à l'aide de la formule :

$$\omega_n = \frac{\varphi_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (5.1)$$

où l représente la longueur de la console, EI sa raideur flexionnelle et μ sa masse linéique. Les φ_n sont des coefficients qui dépendent du mode considéré :

Mode	φ_n	ω_n [rad/s]	f_n [Hz]	Mode correspondant (FINELG)
1	1,88	12,982	2,066	1
2	4,69	80,790	12,858	2
3	7,85	226,34	36,022	4
4	11,0	444,43	70,732	6

TABLEAU 5.5 : MODES PROPRES DE FLEXION TRANSVERSALE (THEORIE)

La formule 5.1 donne les pulsations propres correspondant aux modes de flexion transversale. D'autres développements analytiques fournissent les modes propres de vibration axiale :

$$\omega_n = \frac{\varphi_n}{l} \sqrt{\frac{EA}{\mu}} \quad (5.2)$$

où EA la raideur extensionnelle de la console

Mode	φ_n	ω_n [rad/s]	f_n [Hz]	Mode correspondant (FINELG)
1	1,5708	130,44	20,76	3
2	4,7124	391,31	62,28	5
3	7,8540	652,19	103,80	7
4	10,9956	913,07	145,32	-

TABLEAU 5.6. MODES PROPRES DE VIBRATION AXIALE

L'estimation des premières fréquences propres est très bonne. Les modes plus élevés sont par contre moins bien évalués. Cette différence est attribuable d'une part à la concentration des masses aux nœuds des éléments et d'autre part à l'utilisation de la méthode des éléments finis. En effet, le champ de déplacements choisi (cubique par morceaux) n'est pas approprié pour représenter les modes de vibrations (sinusoïdales) pour de hautes fréquences.

B.3. Réponse dynamique transitoire : structure non amortie

Dans le cadre de cet exercice, la sollicitation choisie consiste en une action sismique représentée par un accélérogramme assez particulier :

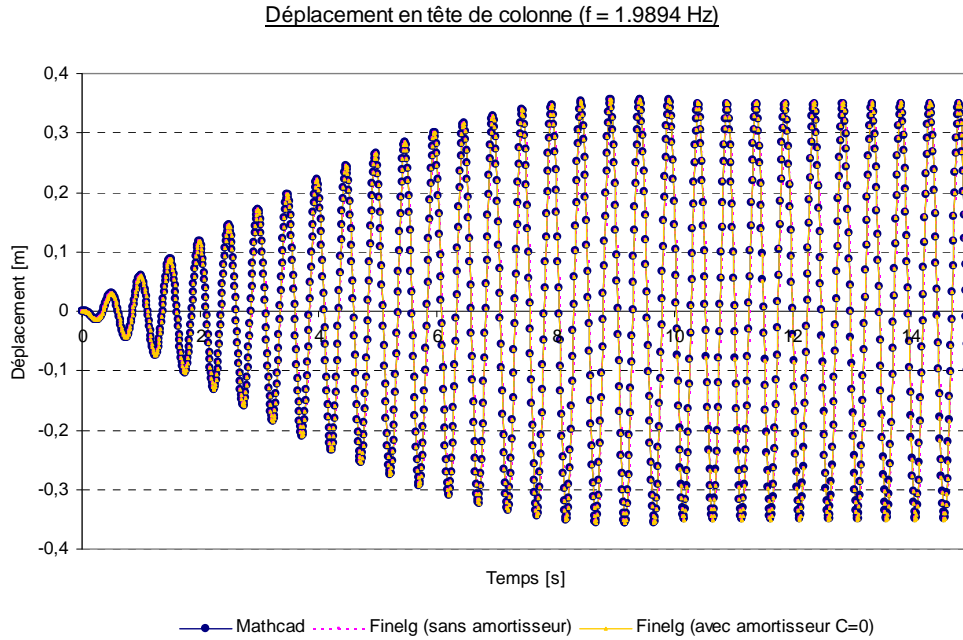
$$\ddot{u}_g = \begin{cases} \sin \frac{t}{8 \cdot \Delta t} & \text{si } t < 10 \text{ s} \\ 0 & \text{si } t \geq 10 \text{ s} \end{cases} \quad (5.3)$$

Il s'agit d'une sollicitation harmonique dont les pulsations et fréquences propres valent respectivement :

$$\omega = \frac{1}{8 \cdot \Delta t} = \frac{1}{8 \cdot 0,01} = 12,5 \text{ rad/s} \text{ et } f = \frac{1}{2\pi \cdot n \cdot \Delta t} = 1,9894 \text{ Hz} \quad (5.4)$$

Le déplacement transversal est calculé par une méthode pas à pas (Newmark [1/2-1/4]) avec un pas de temps $\Delta t = 0,01$ s. La réponse de la structure non amortie a été appréhendée de trois manières différentes : avec Mathcad, avec FINELG 84, avec les

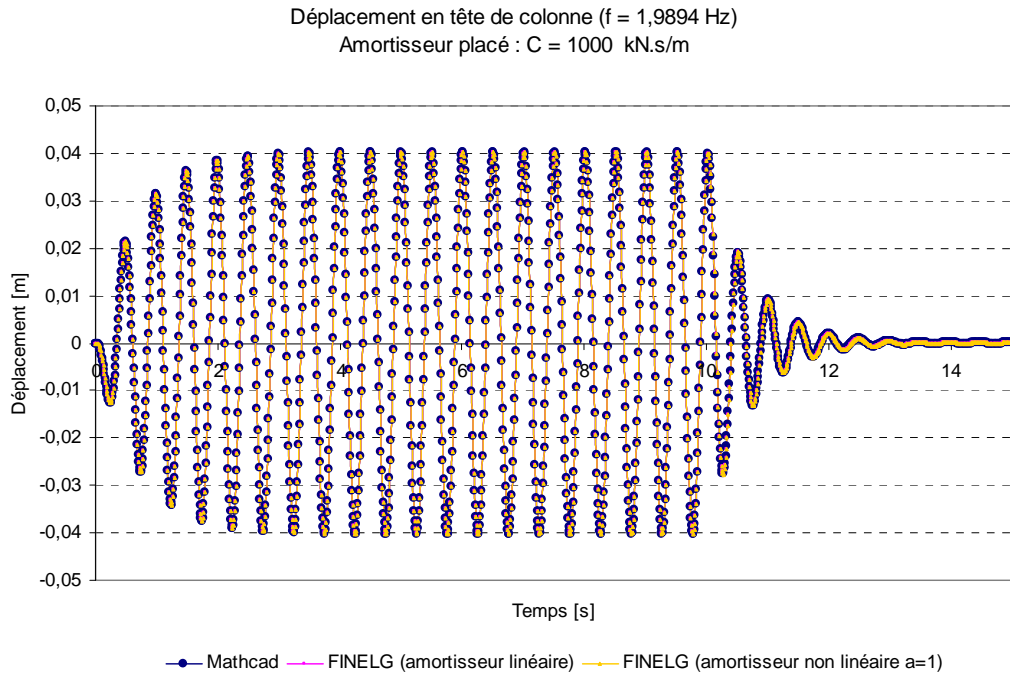
nouvelles routines implémentées dans FINELG (amortisseur non linéaire de caractéristiques $C = 0 \text{ kN.s/m}$ et $\alpha = 1$).



GRAPHIQUE 5.1.

Si l'on considère comme référence le résultat fourni par la version 84 du FINELG, on peut supposer, vu la concordance parfaite des courbes, que la feuille de calcul MathCad donne de bons résultats et que la routine implémentée dans FINELG dégenère correctement dans les cas simples.

B.4. Réponse avec amortisseurs linéaires



GRAPHIQUE 5.2.

Le calcul suivant a été réalisé en partant de la même structure et de la même sollicitation mais en ajoutant un amortisseur en tête de console. La loi constitutive de cet amortisseur est supposée linéaire avec un paramètre de viscosité $C = 1000 \text{ kN.s/m}$. De nouveau, la réponse de la structure a été calculée de trois manières différentes : avec Mathcad, avec FINELG 84 (et ses amortisseurs linéaires), à l'aide des nouvelles routines implémentées dans FINELG (amortisseur non linéaire : $C = 1000 \text{ kN.s/m}$ et $\alpha = 1$).

La bonne correspondance entre les courbes montre à nouveau que les routines implémentées dégènèrent correctement lorsque le paramètre α est unitaire, c'est-à-dire lorsque le comportement de l'amortisseur est en réalité linéaire.

B.5. Réponse avec amortisseurs non linéaires

La structure à étudier est maintenant munie d'amortisseurs à comportement non linéaire. La sollicitation choisie est toujours identique (accélérogramme harmonique de fréquence égale à 1,9894 Hz). Les lois constitutives des amortisseurs mis en place sont soit exponentielle, soit bilinéaire. Pour chacune de ces deux lois, voici les paramètres qui ont été choisis :

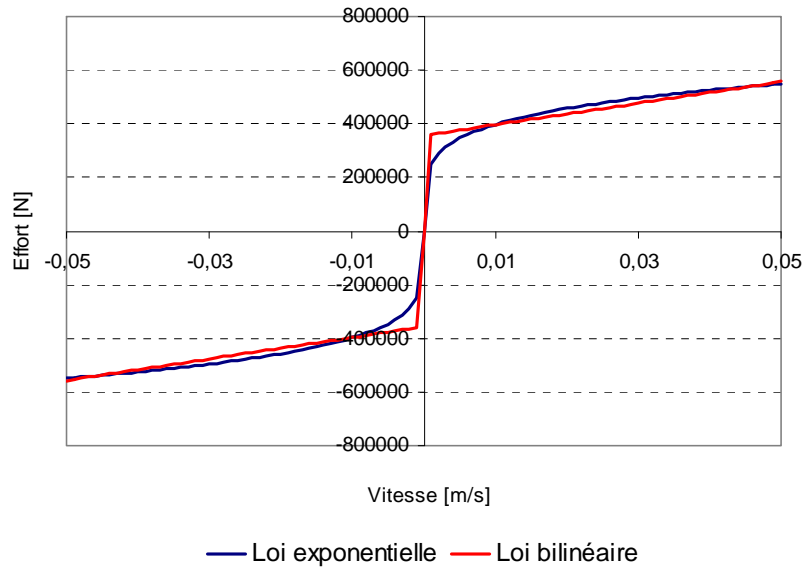
Loi à viscosité continue (loi exponentielle)

$$C = 1^E6 \text{ N.(s/m)}^{0,2} ; \alpha = 0,2$$

Loi bilinéaire

$$C_1 = 4.5^{E8} \text{ N.s/m} ; C_2 = 4^E6 \text{ kN.s/m} ; v_{lim} = 0,0008 \text{ m/s}$$

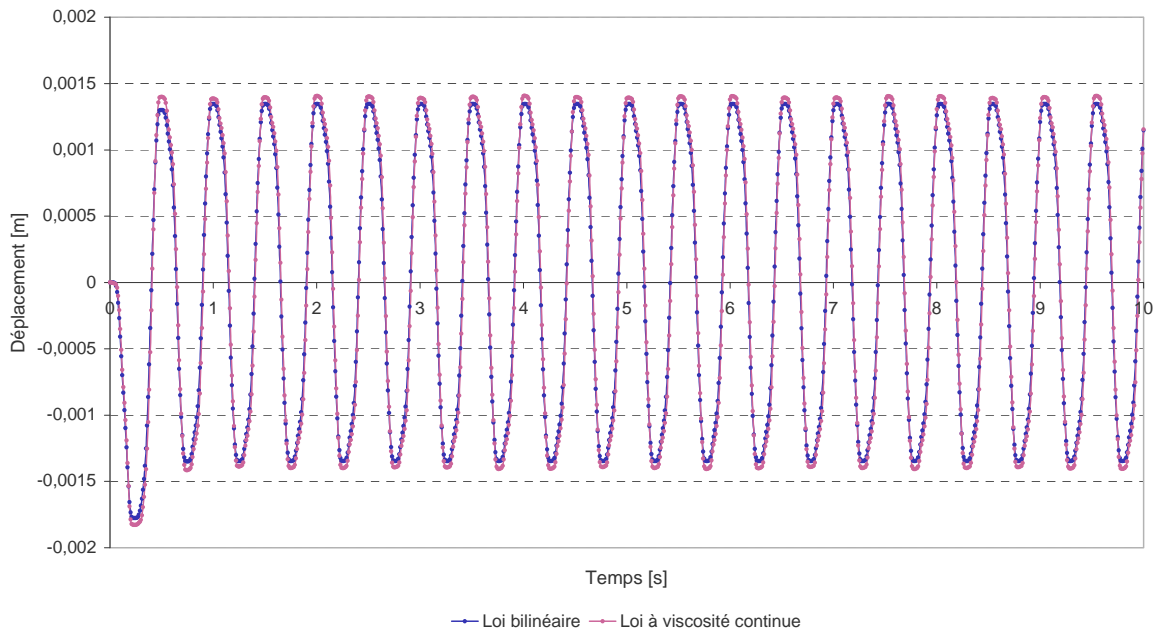
Loi de comportement choisies



GRAPHIQUE 5.3.

Les calculs ont été réalisés à l'aide de MathCad et des nouvelles routines implémentées dans FINELG. Un seul graphique est tracé pour chaque type de loi constitutive car les deux programmes donnent exactement les mêmes résultats.

Comparaison des déplacements en tête de pile



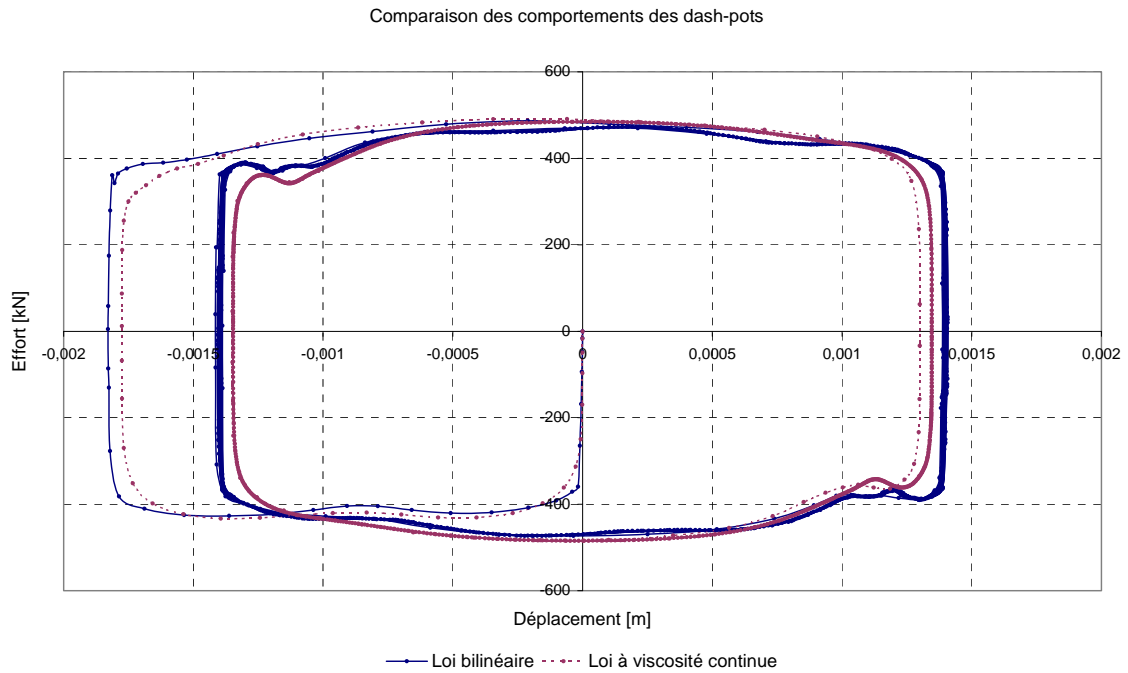
GRAPHIQUE 5.4.

Le graphique 5.4 représente les déplacements calculés en tête de colonne pour chacune des deux lois de comportement. Les résultats sont évidemment fort semblables puisque les lois constitutives ont été choisies de façon à correspondre au mieux. Cette bonne correspondance permet de justifier, dans un cas simple comme celui de l'exemple, le remplacement de la loi constitutive exponentielle par la loi bilinéaire. Ce dernier type de comportement pourrait donc être utilisé pour représenter les amortisseurs à loi constitutive exponentielle¹. Il faut cependant prendre garde de définir l'équivalence entre les deux lois de comportement dans un intervalle de vitesses représentatif de celui dans lequel l'amortisseur est effectivement sollicité. Ainsi, le graphique 5.3 représente les lois constitutives pour des abscisses variant de $-0,05$ m/s à $0,05$ m/s. Ces limites sont les vitesses relatives extrémales auxquelles l'amortisseur est soumis. Etant donné que ces valeurs sont a priori inconnues lors du premier calcul, une adaptation itérative doit être entreprise.

Par rapport à la structure non amortie, le déplacement maximal en tête de colonne est fortement réduit. Numériquement, ceci se traduit par une importance prépondérante des termes d'amortissement, c'est à dire des non linéarités. Les méthodes de résolution programmées (Newton-Raphson et regula falsi) permettent donc de traiter des systèmes fortement non linéaires.

Le graphique 5.5 est le diagramme de comportement du dash-pot. On y retrouve les boucles de forme plutôt rectangulaire qu'elliptique. Pour le diagramme relatif à l'amortisseur bilinéaire, on distingue clairement la différence de comportement au-delà et en deçà de l'effort $F=360$ kN (limite entre les parties douce et raide de la loi constitutive).

¹ Le paragraphe B du chapitre 4 nous apprend effectivement que les critères essentiels pour obtenir un diagramme de comportement pour le dash-pot plutôt rectangulaire sont une forte viscosité aux basses vitesses et une très faible viscosité aux vitesses plus élevées, ce que la loi bilinéaire permet aussi de représenter.



GRAPHIQUE 5.5.

Le tableau 5.7 donne quelques indications concernant l'efficacité des routines réalisées pour les deux lois de comportement. Il n'est pas étonnant de constater que le nombre d'itérations est plus élevé pour la loi exponentielle que pour la loi bilinéaire. En ce qui concerne les temps de calcul, les résultats peuvent paraître étranges. Ils ne sont donnés qu'à titre indicatif, pour avoir un ordre de grandeur du temps nécessaire à la résolution de la structure. La comparaison des deux temps de calcul n'est pas représentative car le calcul a été exécuté sur une machine travaillant en multi-tâches.

Amortisseur à viscosité continue (PILE4.DAT)	Amortisseur à comportement bilinéaire (PILE5.DAT)
7609 itérations	2681 itérations
CPU time : 0,7 s	CPU time : 0,75 s
Clock time : 14 s	Clock time : 16,5 s

TABLEAU 5.7. EFFICACITÉS RELATIVES AUX DEUX LOIS DE COMPORTEMENT

Les résultats de ce paragraphe montrent une assez bonne concordance entre eux. Cela ne démontre en aucune manière leur exactitude puisque la même méthode a été utilisée pour calculer les deux réponses. Le paragraphe suivant analyse la structure choisie par une superposition modale. Seul le premier mode est conservé. Malgré les non linéarités impliquées dans le problème, le découplage du premier mode peut être justifié. La méthode ainsi obtenue permettra, par comparaison aux résultats des graphiques 5.4 et 5.5, d'affirmer ou de réfuter l'exactitude des programmes réalisés.

B.6. Analyse par superposition modale

Afin de simplifier la charge de calcul, les structures comprenant de nombreux degrés de liberté sont souvent étudiées par superposition modale. Cette méthode revient à supposer que le système ne se déforme que dans certains de ses modes propres de vibration ; la déformée est alors exprimée comme combinaison linéaire d'un nombre p de modes propres. L'efficacité de cette méthode est exceptionnelle. En effet, on peut démontrer que parmi toutes les bases orthonormées de l'espace à p dimensions, celle représentant le mieux la déformée d'une structure linéaire est composée de ses p modes propres dont les fréquences correspondantes ont le plus d'importance dans la sollicitation¹.

Les équations relatives à la superposition modale ont été développées au chapitre 4 (Eq. 4.3). Pour la structure à étudier, non amortie intérieurement ($\xi_s = 0$), et comprenant un amortisseur non linéaire en tête de console, l'équation peut être particularisée à la forme suivante :

$$[X]^T \cdot [M] [X] \{\ddot{\eta}\} + [X]^T \cdot \{F_{CD,nonlin}\} + [X]^T \cdot [K] [X] \{\eta\} = [X]^T \cdot \{P\} \quad (5.5)$$

Le terme $\{F_{CD,nonlin}\}$ est un vecteur dont la $i^{\text{ème}}$ composante seulement est non nulle (amortisseur placé parallèlement aux axes globaux de référence et dont une extrémité est fixée). i représente le numéro du degré de liberté associé au déplacement transversal en tête de console. Le produit $[X]^T \cdot \{F_{CD,nonlin}\}$ est donc un vecteur comprenant la $i^{\text{ème}}$ composante de chacun des modes propres multipliée par $F_{CD,nonlin}$, l'élément non nul de $\{F_{CD,nonlin}\}$. La première équation du système (5.5) donne la déformation de la structure dans son premier mode :

$$M_1^* \ddot{\eta}_1 + X_{1,i} \cdot F_{CD,nonlin} + K_1^* \eta_1 = ([X]^T \{P\})_1 \quad (5.6)$$

La superposition modale ne peut fonctionner rigoureusement que pour des systèmes linéaires. Bien que, sous cette forme, le système semble découplé, les équations

¹ Le raisonnement suppose que la structure ne subit ni perte de masse, ni détérioration de raideur. S'il en était ainsi, les modes propres de vibration ne sont plus optimaux pour représenter la réponse de la structure ; ils doivent alors faire place aux modes propres non linéaires. Ces derniers modes peuvent être considérés comme des modes de vibrations instantanés correspondant aux masses et raideurs à l'instant considéré. Ils ne sont plus uniquement des fonctions spatiales mais également temporelles. Leur forme dépend du type de non linéarité à escompter.

sont toujours reliées par le terme non linéaire. En effet, le facteur $F_{CD,nonlin}$ dépend de la vitesse \dot{u}_i en tête de colonne ; l'hypothèse de la superposition $\{u\} = [X]\{\eta\}$ doit être utilisée pour calculer cette vitesse :

$$u_i = \sum_{j=1}^N X_{ij} \eta_j \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_i = \sum_{j=1}^N X_{ij} \dot{\eta}_j \quad (5.7)$$

Pour le cas particulier traité, les équations peuvent cependant être découplées. Cela suppose donc que, parmi tous les termes de la sommation (dans l'équation 5.7), le premier apporte la contribution la plus importante. Pour une sollicitation quelconque, cela revient à admettre que les X_{ij} ($j \neq 1$) sont négligeables vis-à-vis de X_{i1} ou, en d'autres termes que c'est dans le mode 1 que le déplacement en tête de colonne est le plus important. Le tableau suivant donne les composantes relatives au déplacement transversal en ce point pour les premiers modes propres :

Mode (j)	Déplacement en tête (X_{ij}) ¹
1	0,57461
2	0,55794
3	0
4	0,5297
5	0

TABLEAU 5.8 : DEPLACEMENT EN TETE DE PILE POUR LES PREMIERS MODES

Ces valeurs montrent clairement que le découplage ne peut en aucun cas provenir d'une prépondérance du déplacement X_{i1} par rapport aux X_{ij} ($j \neq 1$).

Puisque la sollicitation choisie est harmonique de fréquence proche de la première fréquence propre de vibration de la console et que l'introduction d'un amortisseur ne la force pas à travailler dans un autre mode, c'est essentiellement dans le premier mode qu'elle se déforme de sorte que :

$$\eta_1 \gg \eta_j \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_i = \sum_{j=1}^N X_{ij} \dot{\eta}_j \approx X_{i1} \dot{\eta}_1 \quad (5.8)$$

et que les équations puissent ainsi être découplées. Pour un amortisseur à loi de comportement exponentielle, l'équation 5.6. s'écrit :

¹ Ces valeurs des déplacements sont celles fournies par le calcul des fréquences propres de Mathcad. Les réponses fournies par FINELG sont différentes ; par exemple, pour le mode 1, le déplacement en tête est unitaire.

$$M_1^* \cdot \ddot{\eta}_1 + X_{i1} \cdot C \cdot [X_{i1} \dot{\eta}_1]^\alpha + K_1^* \eta_1 = -([X]^T [M] \{r\})_1 \cdot \ddot{u}_g \quad (5.9)^1$$

$$M_1^* \cdot \ddot{\eta}_1 + X_{i1}^{\alpha+1} \cdot C \cdot \dot{\eta}_1^\alpha + K_1^* \eta_1 = -([M^*] [X]^T \{r\})_1 \cdot \ddot{u}_g \quad (5.10)$$

$$\ddot{\eta}_1 + \frac{X_{i1}^{\alpha+1} \cdot C}{M_1^*} \dot{\eta}_1^\alpha + \omega_1^2 \eta_1 = -([X]^T \{r\})_1 \cdot \ddot{u}_g \quad (5.11)$$

Puisque l'on suppose que la structure se déforme essentiellement dans son premier mode propre de vibration, on peut écrire pour le déplacement en tête de colonne : $u_i = X_{i1} \eta_1$. En introduisant cette inconnue dans l'équation 5.11., on obtient finalement :

$$\ddot{u}_i + \frac{X_{i1}^2 \cdot C}{M_1^*} \dot{u}_i^\alpha + \omega_1^2 u_i = -X_{i1} \{X_1\}^T \{r\} \cdot \ddot{u}_g \quad (5.12)$$

où $\{X_1\}$ représente le premier mode propre de vibration

Le déplacement transversal u_i en tête de console peut donc être estimé à l'aide d'un oscillateur à un seul degré de liberté dont :

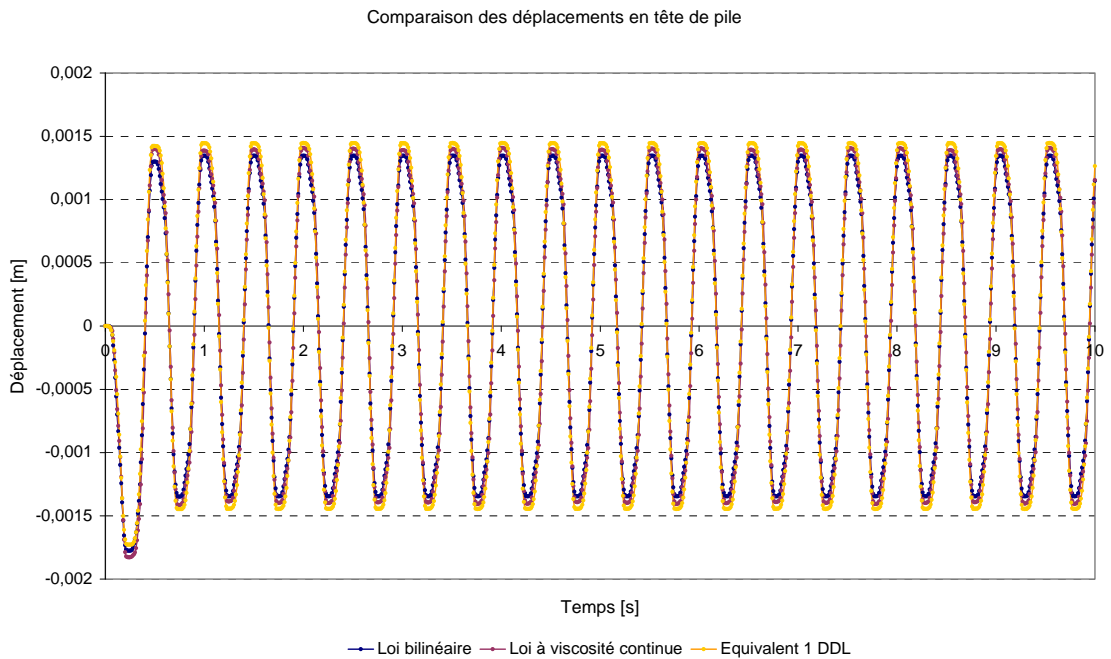
- la masse est unitaire et la raideur vaut le carré de la première pulsation propre ;
- l'excitation vaut $-X_{i1} \{X_1\}^T \{r\} \cdot \ddot{u}_g$
- les paramètres de comportement du dash-pot sont α (inchangé) et

$$C^* = \frac{X_{i1}^2 \cdot C}{M_1^*}.$$

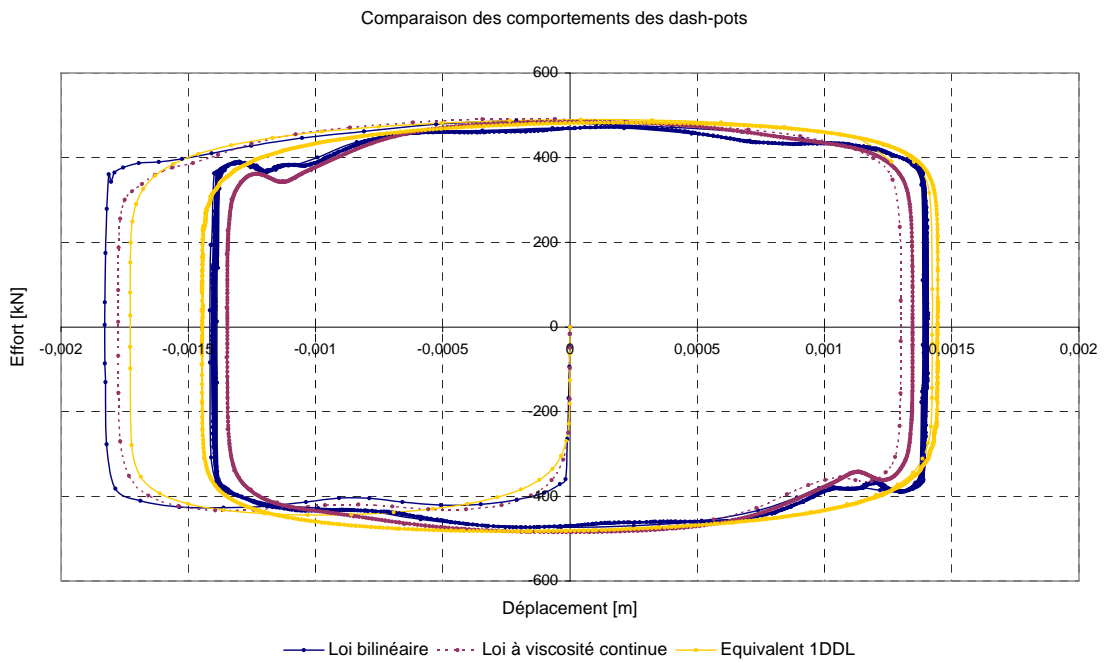
Les graphiques 5.7 représentent la réponse obtenue pour cet oscillateur à un degré de liberté ainsi que le diagramme de comportement du dash-pot. Les graphiques représentent également, pour faciliter la comparaison, les résultats obtenus sur la structure complète (avec tous ses degrés de liberté). C'est principalement avec la courbe bleue (amortisseur à loi exponentielle) que la comparaison doit être réalisée puisque la loi choisie pour l'amortisseur de l'oscillateur à un degré de liberté est de forme exponentielle. La réponse de cet oscillateur simple a été calculée à l'aide d'une feuille de calcul Mathcad (1DDLNL).

¹ Il ne faut pas perdre de vue que le découplage n'est valable que pour le type de sollicitation considérée

² $\{X_1\}^T \{r\}$ est le facteur de participation modale. Il représente la somme des composantes du premier mode qui correspondent à des degrés de liberté parallèles au sens d'action du tremblement de terre



GRAPHIQUE 5.6.



GRAPHIQUE 5.7.

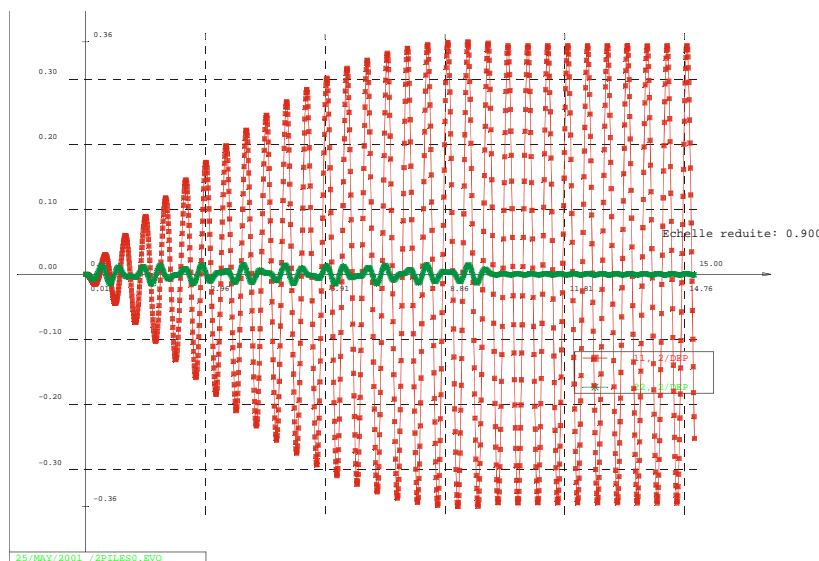
La bonne concordance des courbes des graphiques 5.6 et 5.7 montre que l'hypothèse réalisée au niveau du découplage ($\eta_i > \eta_j$ ($j \neq i$)) est tout à fait justifiée. De plus, cela laisse également supposer que les routines programmées sont correctes. En effet, les résultats de ces graphiques sont obtenus par deux méthodes tout à fait

différentes : résolution d'un système d'équations d'une part et résolution d'une seule équation non linéaire¹ d'autre part.

B.7. Modification de la structure étudiée

Les résultats obtenus jusqu'ici montrent que les amortisseurs semblent être programmés correctement. Cependant, les exemples développés ne mettent en œuvre que des dash-pots dont une extrémité est fixée. La structure étudiée est légèrement modifiée afin de vérifier le bon fonctionnement des programmes quand une vitesse relative doit être considérée plutôt qu'une vitesse absolue.

Une seconde pile est placée à côté de la console de la figure 5.1. Sa raideur flexionnelle est exactement le double de celle de la première pile ($I = 76,6 \text{ m}^4$) et la masse répartie est exactement la même. Le graphique 5.8 représente les déplacements aux têtes des colonnes pour la sollicitation utilisée jusqu'ici² (en rouge, pile souple ; en vert, pile raide). Il montre clairement l'amplification dynamique dont est victime la colonne souple puisque les réponses pseudo-statiques de ces deux parties de structure sont dans le rapport $\frac{1}{2}$.



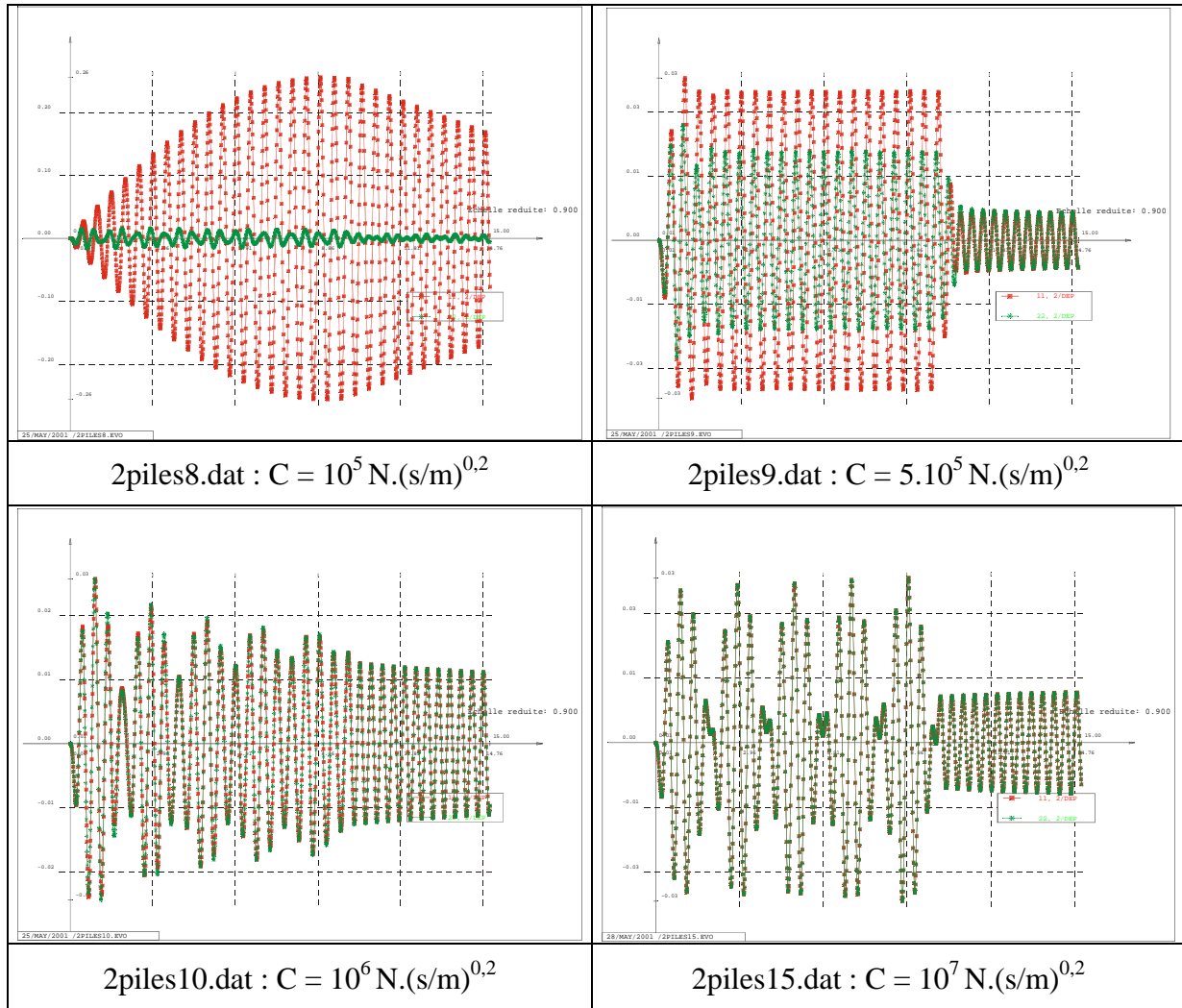
GRAPHIQUE 5.8. DEPLACEMENTS AUX TÊTES DES COLONNES (NON RELIÉES)

Un amortisseur à comportement non linéaire est placé entre les têtes de ces colonnes afin de voir dans quelle mesure la pile raide peut venir en aide à la pile souple pour réduire son amplification dynamique. La loi de comportement utilisée est une loi exponentielle ($F = C.v^\alpha$) où $\alpha = 0,2$. La valeur du paramètre C varie de façon à représenter des amortisseurs de plus en plus visqueux. Les graphiques 5.9. donnent les

¹ qui n'est même pas le résultat de la condensation statique puisque cette équation est obtenue à partir d'un découplage par les modes propres.

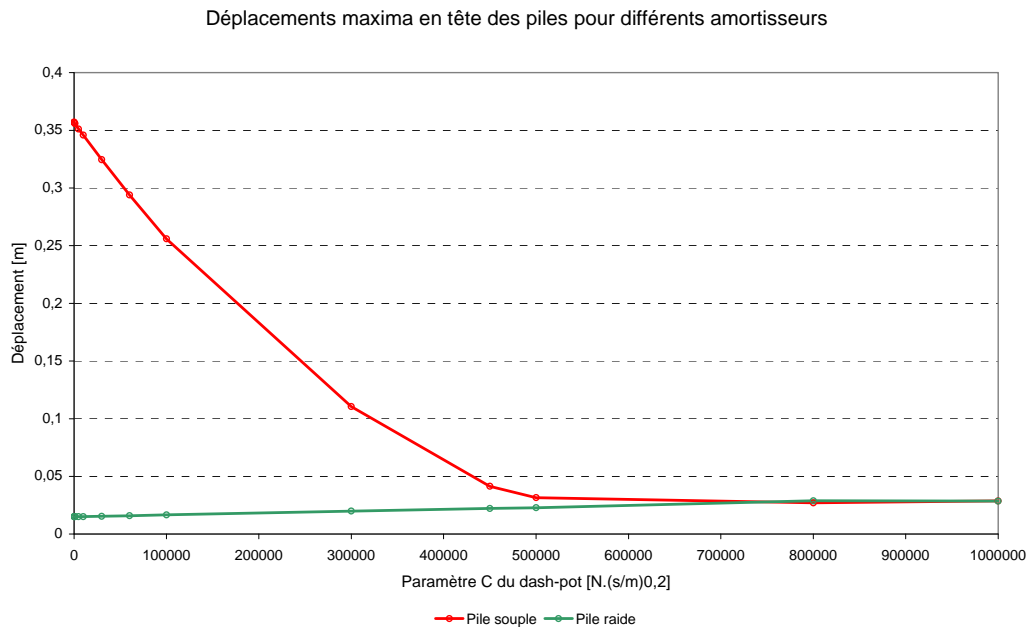
² Accélérogramme harmonique de fréquence proche de la fréquence propre de la pile souple.

déplacements des têtes de piles pour des valeurs du paramètre C de plus en plus grandes. Pour des amortisseurs très visqueux, les têtes des colonnes se déplacent en phase et avec la même amplitude : le dash-pot agit alors comme un lien rigide.



GRAPHIQUES 5.9.

Le graphique 5.10 représente, en fonction du paramètre C, les déplacements maxima pour chacune des piles. Il indique la convergence vers un comportement couplé des deux consoles et montre également que la valeur $C = 5 \cdot 10^5 \text{ N.(s/m)}^{0,2}$ semble représenter une limite à partir de laquelle l'amortisseur ajouté peut être considéré comme efficace.

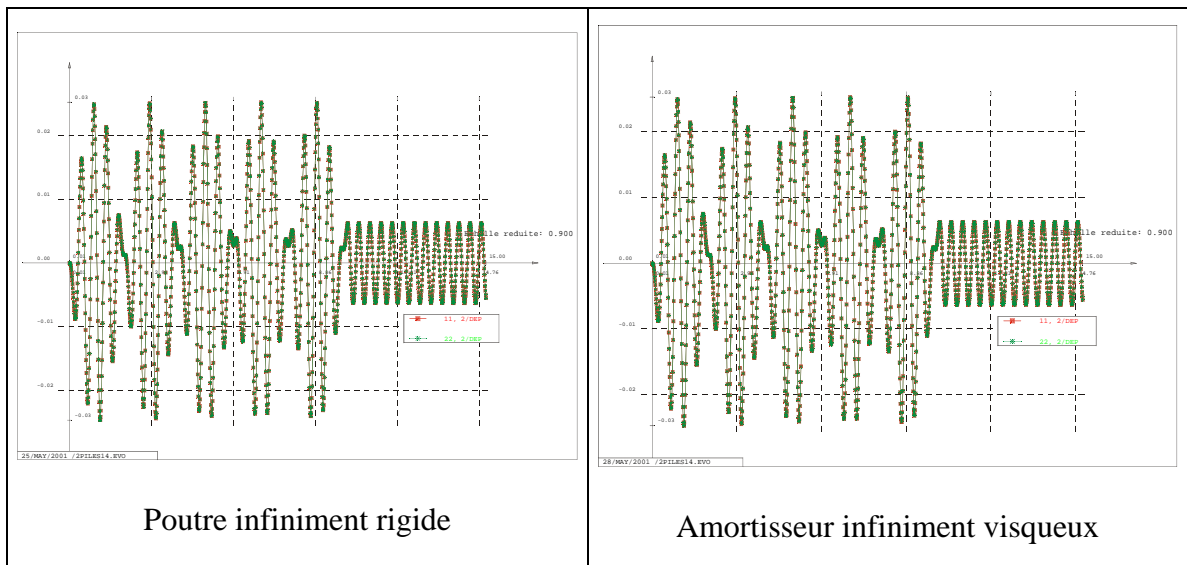


GRAPHIQUE 5.10

Les graphiques 5.11 représentent les déplacements de têtes des colonnes lorsqu'elles sont reliées soit par une poutre infiniment rigide, soit par un amortisseur linéaire infiniment visqueux. Ces deux résultats ont été calculés avec la version 84 du FINELG (2PILES13.DAT ; 2PILES14.DAT).

Sur le système formé des deux consoles non couplées, l'ajout d'une poutre infiniment rigide agit par une modification des fréquences et modes propres : au lieu d'avoir des fréquences de vibration associées à chaque pile séparément, de nouveaux modes de vibrations apparaissent, mettant à contribution chacune des deux piles simultanément. L'amortisseur infiniment visqueux quant à lui agit au niveau de la réponse en s'opposant à une modification de vitesse relative entre les extrémités des consoles. Une façon assez commode de voir cette différence réside dans la fonction de transfert¹. Alors que le premier lien modifie la position des pics de cette fonction de transfert, le second atténue leurs amplitudes. Quelque soit la modification opérée, le comportement des deux colonnes est identique et correspond à la limite obtenue lorsque le paramètre C devient très important. Le dernier des graphiques 5.8 correspond en effet assez bien aux graphiques 5.10. Cela signifie d'une part que la valeur $C = 10^7 \text{ N.(s/m)}^{0,2}$ peut être considérée comme la valeur à choisir pour obtenir un amortisseur non linéaire infiniment visqueux mais surtout que les algorithmes développés fonctionnent assez bien puisqu'ils convergent encore lorsque les non linéarités occupent une place prépondérante. Ceci dit, le même calcul avec une viscosité $C = 10^{10} \text{ N.(s/m)}^{0,2}$ ne fournit pas un résultat cohérent !

¹ On ne peut en toute rigueur parler de fonction de transfert que pour les systèmes linéaires.



GRAPHIQUE 5.11

Bien que l'ajout d'une poutre ou d'amortisseur entre les têtes des colonnes se manifeste différemment sur le mode d'action, leurs effets semblent identiques. On peut le prouver assez aisément en assimilant le système à étudier à un oscillateur à deux degrés de liberté connectés par un ressort de grande raideur (K^*) ou un amortisseur linéaire¹ de grande viscosité (C^*).

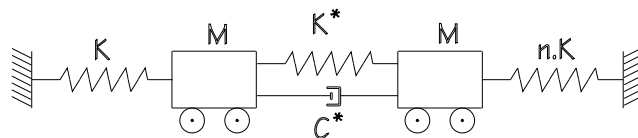


FIGURE 5.3 : PARAMETRES CARACTERISANT L'OSCILLATEUR A 2 DDL.

Les équations d'équilibre relatives à ce système sont :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C^* & -C^* \\ -C^* & C^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K + K^* & -K^* \\ -K^* & n.K + K^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ M \end{Bmatrix} \ddot{u}_g \quad (5.13)$$

Dans lesquelles les termes en K^* ou C^* doivent être considérés selon que l'on considère la présence d'une poutre ou d'un amortisseur.

Ajout d'une poutre infiniment raide

Les deux valeurs propres relatives au système de la figure 5.3. sont $\omega_1^2 = \frac{n+1}{M} K$ et $\omega_2^2 = \frac{2K^*}{M}$. Ces deux valeurs sont obtenues en résolvant analytiquement le problème

¹ Lorsque l'amortissement est très important, qu'il soit linéaire ou non, les résultats sont identiques.

aux valeurs propres et en développant au premier ordre la racine carrée intervenant dans l'expression (ceci est licite car $K^* \gg K$). La matrice des modes propres associés est :

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 + \frac{1-n}{2} \frac{K}{K^*} & \frac{K-K^*}{K^*} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Ces modes représentent donc presque les déplacements en phase et en opposition de phase que l'on obtiendrait si les trois ressorts du système avaient la même raideur. Le principe de superposition modale permet de découpler les équations :

$$\begin{bmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 2M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (n+1)K & -(n-1)K \\ -(n-1)K & 4K^* + (n+1)K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2M \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g \quad (5.15)$$

Les termes hors diagonale dans la matrice de raideur diagonalisée indiquent que les modes propres ne sont pas tout à fait corrects (cela provient de l'estimation au premier ordre des valeurs propres). Ils peuvent cependant être négligés : la raideur associée au second mode dans la deuxième équation est tellement grande (seul terme dans lequel intervient K^*) que η_2 peut être considéré comme nul et que le système se déforme dans son premier mode uniquement selon l'équation :

$$2M\ddot{\eta}_1 + (n+1)K\eta_1 = 2M\ddot{u}_g \quad (5.16)$$

Ajout d'un amortisseur infiniment visqueux

Les valeurs propres du système obtenu en ajoutant l'amortisseur sont $\omega_1^2 = \frac{K}{M}$ et $\omega_2^2 = \frac{n.K}{M}$. Elles correspondent aux vibrations libres de chacune des piles séparément. La matrice des modes propres associés est la matrice identité. Etant donné que l'amortissement n'est pas proportionnel, la matrice des modes propres n'est pas en mesure de diagonaliser la matrice d'amortissement. Pour ce problème, on lui préférera donc la matrice des « pseudo-modes propres » obtenus sur base des matrices de masse et d'amortissement et non plus des matrices de masse et de raideur :

$$[\tilde{X}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

En utilisant cette matrice de la même façon que la matrice des modes propres dans la superposition modale, on parvient à diagonaliser les matrices de masse et d'amortissement. Cette fois, il n'y a aucune raison que la matrice de raideur soit diagonale :

$$\begin{bmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 2M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{\eta}}_1 \\ \ddot{\tilde{\eta}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4C^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{\eta}}_1 \\ \dot{\tilde{\eta}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (n+1)K & -(n-1)K \\ -(n-1)K & (n+1)K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2M \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g \quad (5.18)$$

Le second mode est tellement amorti (C^* n'intervient que dans la seconde équation et pour l'amplitude dans le second mode), que l'on peut supposer que la structure se déforme entièrement dans son premier pseudo-mode propre. L'amplitude de la déformation dans ce premier mode est donc donnée par :

$$2M\ddot{\tilde{\eta}}_1 + (n+1)K\tilde{\eta}_1 = 2M\ddot{u}_g \quad (5.19)$$

La comparaison des équations 5.16 et 5.19 justifie la correspondance des résultats lors de l'ajout d'une poutre infiniment raide ou d'un amortisseur infiniment visqueux. Ces équations fournissent en effet des amplitudes égales dans des « modes » de déformation identiques (déplacement en phase des têtes de piles).

C. LE PONT-CANAL DE HOUDENG-AIMERIES

C.1. Introduction

L'objectif de cet ultime paragraphe consiste à réaliser une brève étude sismique du comportement longitudinal du pont canal de Houdeng-Aimeries, menant vers les fameux ascenseurs de Strépy-Thieux. Le calcul permettra ainsi de vérifier si les programmes réalisés fonctionnent aussi bien dans le cas de structures comprenant davantage de degrés de liberté. Il sera réalisé sur base du spectre de l'Eurocode 8 correspondant aux paramètres suivants :

- $a_g = 0,1$ (l'accélération maximale du sol vaut 10 % de l'accélération de la pesanteur ;
- Classe de sous-sol : A
- Amortissement relatif : $\xi = 0,05$ (valeur habituellement choisie pour les structures en béton)
- Spectre de type 1 (tremblement de terre proche)

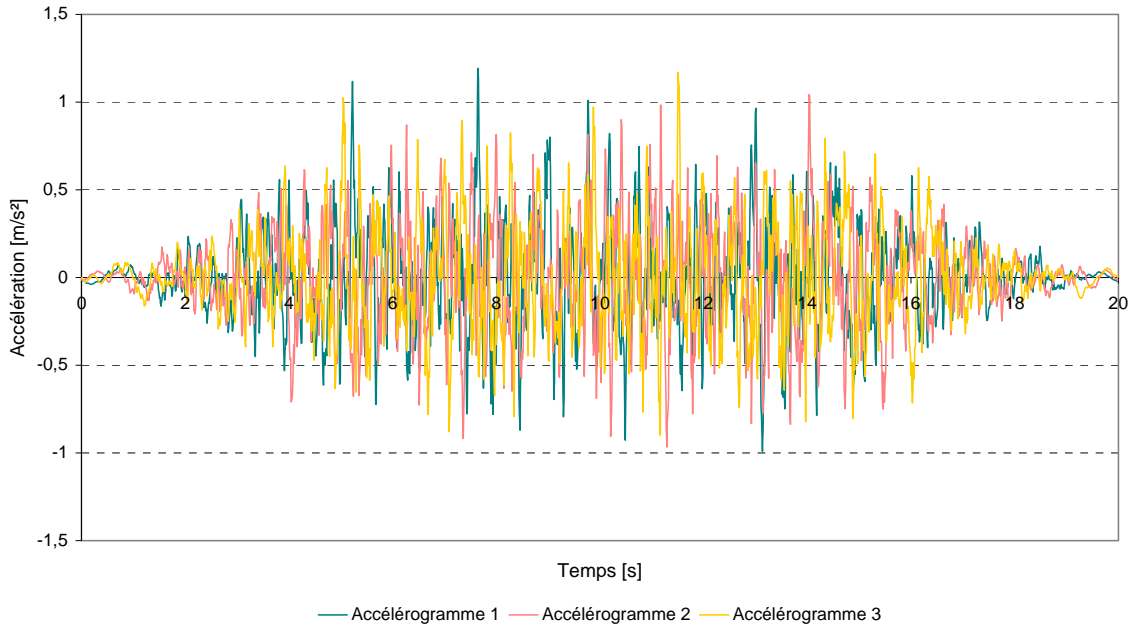
C.2. Génération d'accélérogrammes

Conformément aux recommandations de l'Eurocode 8, trois accélérogrammes ont été générés de manière telle que leurs spectres de réponse correspondent au spectre déterminé. Pour ce faire, le programme GOSCA a été utilisé ; les graphiques 5.12 et 5.13 montrent les accélérogrammes générés ainsi que leurs spectres de réponse. Il est évidemment impossible de pouvoir re-générer exactement les mêmes accélérogrammes que ceux de la figure ; un résultat similaire peut cependant être obtenu en utilisant les mêmes paramètres de génération :

- Spectre de l'Eurocode
- Durée de l'accélérogramme : 20 secondes

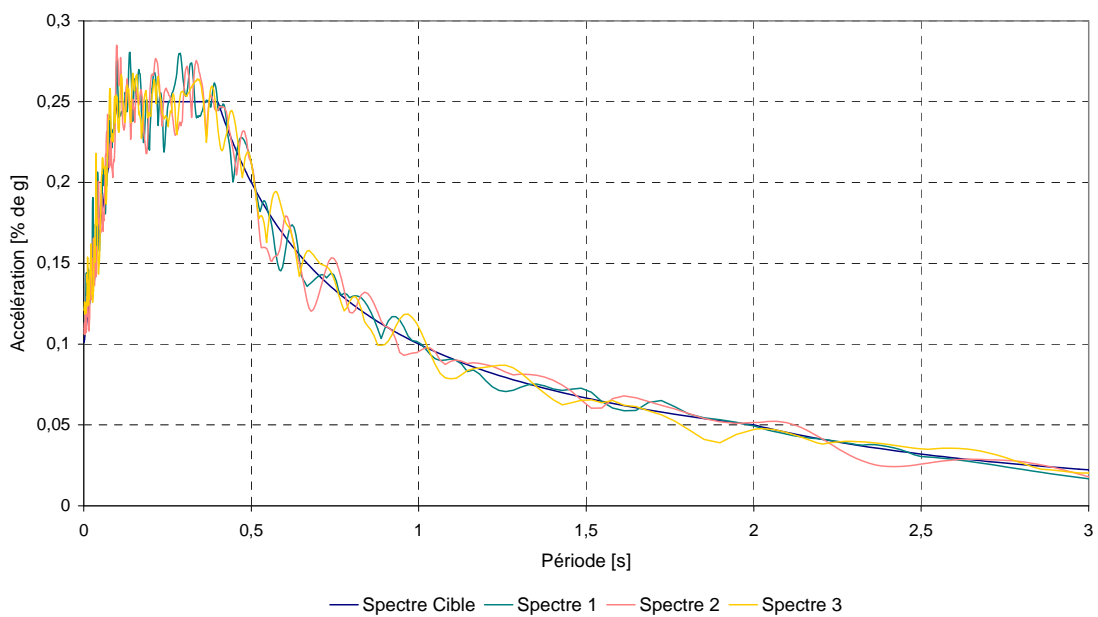
- Spectre de type 1
- Accélération maximale : 0,1 g
- Sous-sol de classe A
- Coefficient d'amortissement relatif : $\xi = 0,05$
- Précision pour le calcul des spectres : 30
- Précision pour la correspondance des spectres : 3 %

Accélérogrammes générés



GRAPHIQUE 5.12

Spectres de réponses des accélérogrammes générés



GRAPHIQUE 5.13

On constate, comme cela a été indiqué dans le développement théorique du programme, que l'accélération maximale des accélérogrammes n'est pas exactement égale à 0,1 g mais ne s'en éloigne pas trop. L'essentiel est que le spectre de réponse de l'accélérogramme généré soit proche du spectre cible.

C.3. Modélisation de la structure

Le comportement de l'eau rend le calcul sismique des structures hydrauliques assez délicat. Ainsi, par exemple, en cas de tremblement de terre transversal (perpendiculaire à l'axe du pont), une masse d'eau dans le fond reste immobile par rapport au pont tandis qu'une autre oscille en tête. Ce type de comportement est généralement traité à l'aide d'une équivalence : la masse d'eau est remplacée par une masse solidaire à la structure et une masse oscillante qui lui est reliée à l'aide de ressorts.

L'exemple traité dans le cadre de ce travail est cependant plus simple : en effet, lors d'un séisme longitudinal, la masse d'eau contenue dans le canal reste immobile si l'on suppose un glissement parfait entre le pont et l'eau. Cette masse ne doit donc être modélisée que pour un calcul dynamique au second ordre.

En ce qui concerne la partie structurelle de l'ouvrage, elle est représentée par des éléments de poutre plane à deux nœuds. Puisque le calcul concerne le comportement longitudinal de l'ouvrage, une représentation en long de la structure est suffisante. L'ouvrage est constitué de quinze travées dont deux d'approche (14,75 m de portée) et treize intermédiaires (36 m de portée).

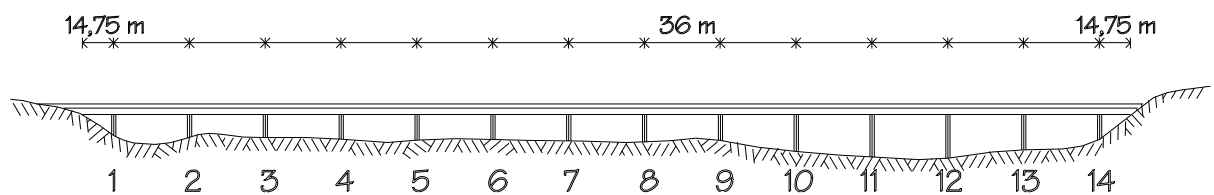


FIGURE 5.4. ILLUSTRATION DU PONT CANAL

Les piles jouent un rôle important en cas de sollicitation sismique puisqu'elles occupent la partie de la structure encourant les plus grandes déformations. Elles seront donc représentées par plusieurs éléments. Ce nombre varie d'une modélisation à l'autre¹. Les piles n'ont pas toutes la même hauteur ; le tableau 5.9 donne les hauteurs relatives à chacune des quatorze piles.

¹ Deux modèles ont été réalisés : l'un avec MathCad et l'autre avec FINELG

Pile	Hauteur [m]	Pile	Hauteur [m]
1	10	8	13
2	10,5	9	12,6
3	10,7	10	17,4
4	11,7	11	20,3
5	11,8	12	20,7
6	11,9	13	16,7
7	12,6	14	11,9

TABLEAU 5.9 : HAUTEUR DES PILES DU PONT-CANAL

Leurs caractéristiques géométriques choisies sont constantes sur toute la hauteur et représentent les deux piles (cylindriques de 3 m de diamètre) placées côte à côte :

$$I = 7,95 \text{ m}^4 \quad - \quad A = 14,14 \text{ m}^2 \quad - \quad E = 35\,000 \text{ Mpa}$$

En choisissant une masse volumique $\rho = 2500 \text{ kg / m}^3$, on obtient une masse linéique $\mu = 35350 \text{ kg / m}$.

Les seules liaisons existant entre les têtes de colonnes et le tablier sont de type translation. Les têtes des piles sont donc modélisées à l'aide de rotules. De plus, pour des raisons de déformations thermiques et différées, le tablier n'est fixé longitudinalement qu'à certaines piles (6 à 12). Les piles uniquement présentes pour supporter les charges verticales transmises par le bac (1 à 5, 13 et 14) ne doivent donc pas être reprises dans le modèle.

La densité d'éléments finis sur le tablier du pont-canal peut être moindre étant donné que cette partie joue un rôle moins important en cas de sollicitation sismique¹. Un point primordial ne doit cependant pas être négligé : la hauteur à laquelle se trouve concentrée la masse. Le bac réel est remplacé par des éléments de poutre dont la masse est supposée être concentrée au centre de la section. Il est important que la cote à laquelle ces éléments sont placés corresponde à la cote du centre de gravité de la section réelle. Pour qu'il en soit ainsi, des éléments très raides sont placés entre les têtes des colonnes et les éléments de poutre représentant le bac.

Les caractéristiques géométriques du tablier sont constantes sur toute sa longueur :

$$I = 248,7 \text{ m}^4 \quad - \quad A = 44,56 \text{ m}^2 \quad - \quad \mu = 129\,224 \text{ kg / m} \quad - \quad E = 35\,000 \text{ Mpa}$$

¹ en termes de déformation. Par contre, au point de vue de la masse, cette partie occupe le rôle principal.

² La masse volumique du béton est prise égale à 2900 kg / m^3 pour tenir compte des entretoises de 80 tonnes placées tous des 4,5 m.

Toutes ces considérations mènent donc à choisir le modèle de la figure 5.5.

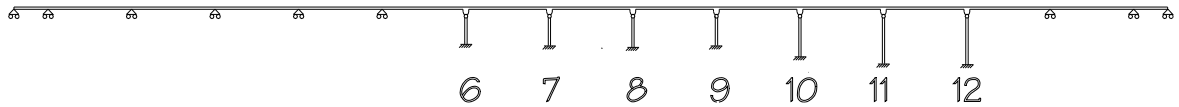


FIGURE 5.5. MODELE REPRESENTANT LE PONT-CANAL

Le découpage en éléments finis en réalisé de deux manières différentes :

- Mathcad : cinq éléments finis par colonne et un élément fini par travée. Masse distribuée (58 nœuds ; 57 éléments de poutre ; 146 degrés de liberté libres) ;
- FINELG : quatre éléments finis par colonne et quatre éléments finis par travée. Masse concentrée aux extrémités des éléments (103 nœuds ; 102 éléments de poutre ; 309 degrés de liberté).

C.4. Fréquences propres de vibration

Avant de calculer la réponse dynamique transitoire d’une structure, il est bon d’en estimer les fréquences propres de vibration. Ce premier calcul permettra en effet de déterminer si la structure en question sera susceptible aux tremblements de terres. Elle devrait en tout cas avoir un comportement d’autant meilleur que les modes facilement excitables par déplacements d’appui¹ ont des fréquences éloignées de celles du plateau du spectre réponse (1,5 à 10 Hz).

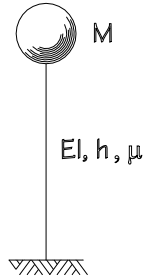
Le tableau 5.10 donne les fréquences propres calculées avec chacune des deux modélisations.

	Mode	Fréquences [Hz]	Masse généralisée (t)	Raideur généralisée (N/m)	Facteur de participation modale
Mathcad	1	0,8854	2327	7,200E7	5,335
	2	3,5138	2620	1,277E9	0,070
	3	7,0701	2036	4,018E9	0,121
	4	9,1375	855,6	2,820E9	5,154E-3
	5	9,2632	815,6	2,763E9	2,147E-4
FINELG	1	0,8855	61057,8	1,890E9	1,041
	2	3,5057	32282,9	1,566E10	0,0196
	3	7,0096	32298,2	6,265E10	0,0301
	4	10,422	31715,0	1,360E11	8,26E-3
	5	13,798	15247,9	1,146E11	1,95E-2

TABLEAU 5.10 : MODES ET FRÉQUENCES PROPRES

¹ ce qui est quantifié par les facteurs de participation modale

La première fréquence propre d'une console encastrée en base, libre en tête et comprenant une masse concentrée en son sommet est :



$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{h^3(M + 0,24.\mu h)}} \quad (5.13)$$

FIGURE 5.6.

Considérons la hauteur d'une console équivalente¹ aux sept piles qui reprennent les efforts engendrés par les sollicitations horizontales :

$$\frac{1}{h_{\text{eq}}^3} = \sum_{i=6}^{12} \frac{1}{h_i^3} \Rightarrow h_{\text{eq}} = 7,397 \text{ m} \quad (5.14)$$

Cela permet d'estimer la valeur de la première fréquence propre de vibration de la structure :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3,0,35 \cdot 10^{11} \cdot 7,95}{7,397^3 (497,5 \cdot 129224 + 0,24 \cdot 35350 \cdot \sum_{i=6}^{12} h_i)}} = 0,8951 \text{ Hz} \quad (5.15)$$

Ce résultat est très proche de ceux obtenus avec chacune des deux discrétisations.

C.5. Réponse de la structure non amortie extérieurement

Analyse spectrale

Les facteurs de participation modale obtenus par le calcul des fréquences propres permettent d'affirmer avec certitude que les modes supérieurs au troisième n'apportent aucune contribution à la réponse de la structure. Les modes 2 et 3 semblent avoir également une importance réduite mais il est plus prudent de les conserver pour le calcul dans la mesure où leurs fréquences correspondent à celles du plateau du spectre.

¹ L'équivalence est basée les raideurs (inversement proportionnelle au cube de la hauteur) : la raideur de la console équivalente est égale à la somme des raideurs de chacune des piles. Cette équivalence est justifiée par le fait que la masse des piles est faible vis-à-vis de celle du tablier ; il est par contre important de les représenter correctement au point de vue de leur raideur.

Le tableau 5.11 indique, pour les trois premières périodes propres, les ordonnées sur le spectre cible (de l'Eurocode 8) et sur les spectres générés.

Mode	Fréquence [Hz]	Période [s]	Eurocode 8 (% de g)	Spectre 1 (m/s ²)	Spectre 2 (m/s ²)	Spectre 3 (m/s ²)
1	0,8855	1,1293	0,08857	0,08732	0,08944	0,08125
2	3,5057	0,2852	0,25	0,2796	0,2365	0,2496
3	7,0096	0,1427	0,25	0,2569	0,2407	0,2556

TABLEAU 5.11 : SPECTRES DE PSEUDO-ACCELERATION

Le tableau 5.12 donne les ordonnées correspondant aux spectres de déplacement. Elles sont obtenues en divisant les ordonnées du spectre de pseudo-accelération par le carré de la pulsation.

Mode	Fréquence [Hz]	Période [s]	Eurocode (m)	Spectre 1 (m)	Spectre 2 (m)	Spectre 3 (m)
1	0,8855	1,1293	0,02807	0,02767	0,02834	0,02575
2	3,5057	0,2852	0,00505	0,00565	0,00478	0,00505
3	7,0096	0,1427	0,00126	0,00130	0,00122	0,00129

TABLEAU 5.12 : SPECTRES DE DEPLACEMENT

Il est possible de calculer le déplacement maximum d'un nœud dans chacun des modes en multipliant l'ordonnée du spectre de déplacement par le facteur de participation modale et par le déplacement du nœud dans le mode considéré. Le nœud 1 représente l'extrémité gauche du tablier. Le tableau 5.13 indique les déplacements maxima, dans le sens longitudinal, de ce nœud pour les trois premiers modes :

Mode	Facteur de participation	Déplacement au nœud 1	Eurocode (m)	Spectre 1 (m)	Spectre 2 (m)	Spectre 3 (m)
1	1,0415	1,000	0,02923	0,02882	0,02952	0,02682
2	0,0196	0,9984	9,89 ^E -5	11,1 ^E -5	9,36 ^E -5	9,87 ^E -5
3	0,0301	0,9907	3,77 ^E -5	3,87 ^E -5	3,63 ^E -5	3,86 ^E -5

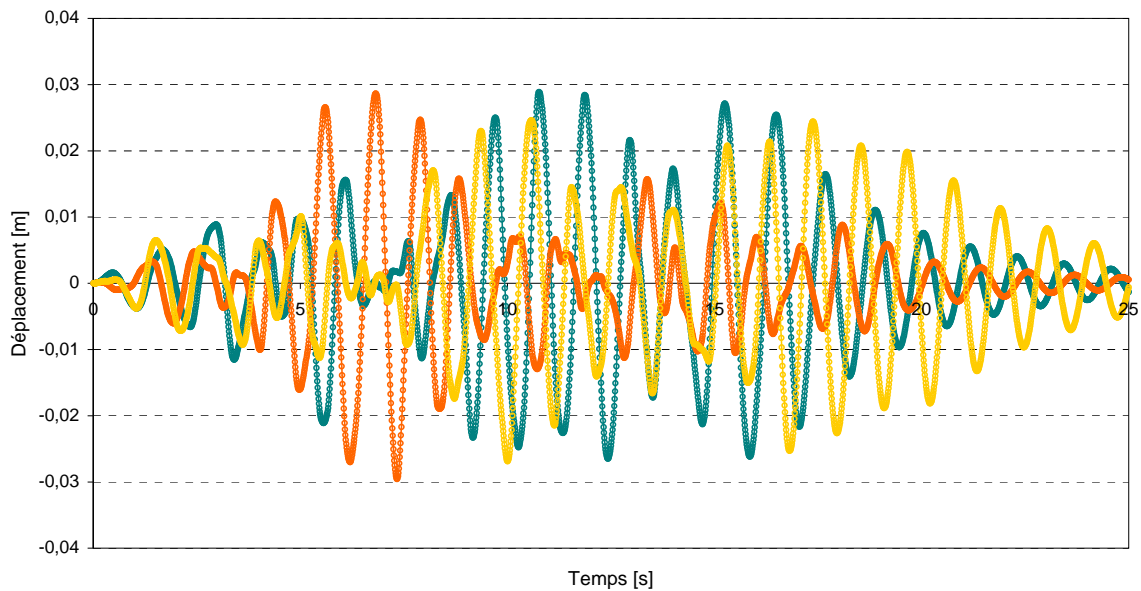
TABLEAU 5.13 : RESULTATS DE L'ANALYSE SPECTRALE

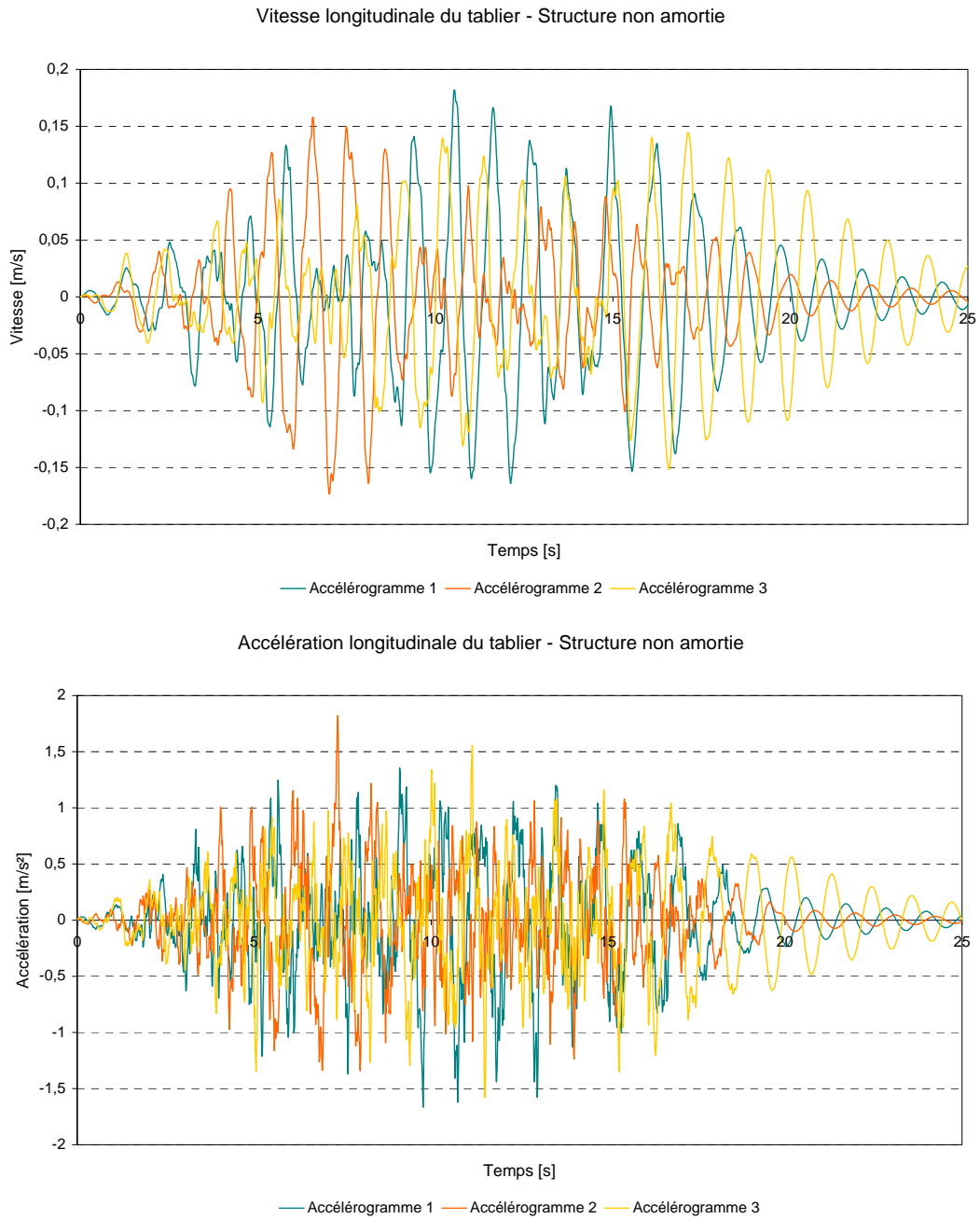
Selon le spectre considéré, le tableau 5.13 donne le résultat de l'analyse spectrale (valeur en gras). Il s'agit des déplacements dans le premier mode uniquement mais le tableau montre que les second et troisième modes apportent une contribution négligeable. Cela était imaginable à l'avance, vu leur faible facteur de participation modale (ces modes sont trop « symétriques » que pour pouvoir être excités facilement par un déplacement uniforme des appuis).

Analyse dynamique transitoire – Réponse pas à pas

Pour chacun des trois accélérogrammes générés, la réponse dynamique transitoire est calculée à l'aide de la méthode de Newmark ($\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$). Le pas de temps de calcul utilisé est $\Delta t = 0,01$ s et l'amortissement dans la structure provient exclusivement de l'amortissement structural. Pour celui-ci, une forme de Rayleigh a été choisie. Les coefficients (a_0 et a_1) ont été déterminés en imposant les valeurs des coefficients d'amortissement relatif modaux des deux premiers modes ($\xi_1 = 0,05$; $\xi_2 = 0,05$). Cette façon de procéder est tout à fait justifiée puisque l'analyse spectrale a démontré la prépondérance du premier mode.

Déplacement longitudinal du tablier - Structure non amortie





GRAPHIQUES 5.14. RÉPONSES DU PONT-CANAL SOUS LES TROIS ACCELÉROGRAMMES

Les graphiques 5.14 indiquent les déplacements, vitesses et accélérations du tablier pour chacun des trois accélérogrammes. A chaque accélérogramme correspond une couleur sur le graphique. Pour le graphique des déplacements, plusieurs séries sont représentées par accélérogramme. Les réponses obtenues par la résolution pas à pas sont les lignes continues.

Analyse dynamique transitoire – Superposition modale

Parmi les graphiques 5.14, celui relatif aux déplacements représente deux séries par accélérogramme :

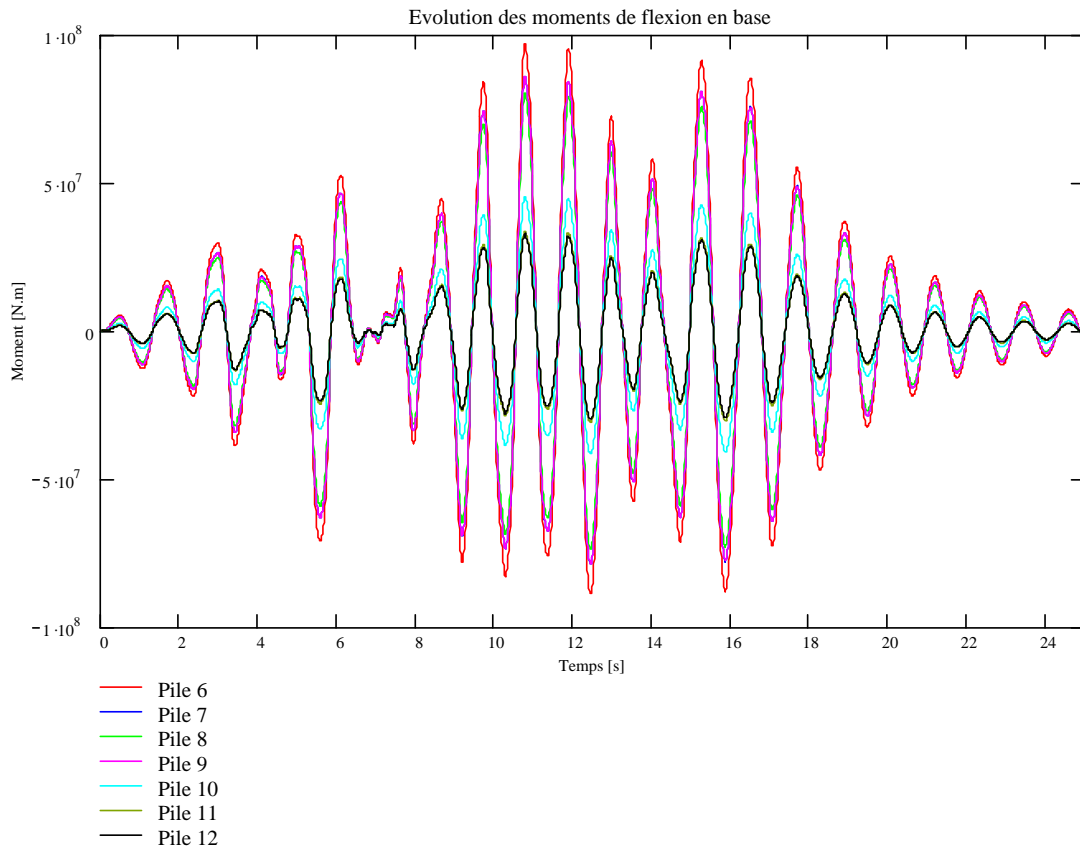
- une ligne continue : résultat du calcul réalisé à l'aide de FINELG ;
- des cercles non reliés : ce sont les déplacements calculés en procédant à une superposition modale.

Cette superposition modale a été réalisée à l'aide de la feuille de calcul Mathcad correspondant à ce type d'analyse. Seul le premier mode est conservé pour le calcul et le coefficient d'amortissement relatif modal choisi est $\xi = 0,05$.

Le tableau 5.14 regroupe les déplacements maxima (en centimètres) calculés pour l'extrémité gauche du tablier, avec les différentes méthodes d'analyse. Etant donné que la structure se déforme essentiellement dans son premier mode, les différentes méthodes donnent les mêmes résultats. D'autre part, les déplacements maxima calculés pour chaque accélérogramme ne s'éloignent pas trop du déplacement calculé par analyse spectrale sur base du spectre cible (de l'Eurocode 8) : la moyenne des déplacements obtenus à l'aide des spectres réels (2,837 cm) est seulement inférieure de 3 % à la valeur fournie par le spectre cible (2,923 cm) ! Ceci prouve donc la bonne concordance entre l'ensemble d'accélérogrammes générés et le spectre cible de l'Eurocode 8.

	Accélérogramme 1	Accélérogramme 2	Accélérogramme 3
Analyse spectrale	2,882	2,952	2,682
Réponse pas à pas (FINELG)	2,8856	2,9536	2,6821
Réponse pas à pas (Mathcad)	2,8870	2,956	2,6859
Superposition	2,8836	2,9499	2,6885

TABLEAU 5.14. RESUME DU CALCUL SANS AMORTISSEUR



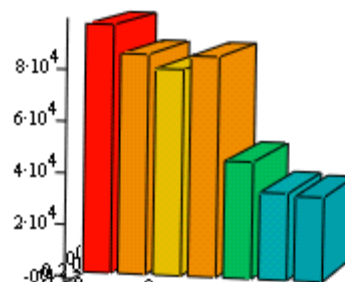
GRAPHIQUE 5.15

Le graphique 5.15 donne l'évolution des moments de flexion en base des piles lorsque le pont-canal est sollicité par le premier accélérogramme. On retrouve exactement, à une autre échelle, la forme du déplacement du tablier. Les oscillations obtenues sont parfaitement en phase, ce qui traduit à nouveau la prépondérance du premier mode de vibration, seul mode pour lequel le tablier se déplace sans se déformer.

Le tableau 5.15. reprend les valeurs maximales des moments de flexion pour chacune des piles. La distribution des efforts se fait au prorata de leurs raideurs. Il est donc logique que les piles 6, 7, 8 et 9, plus courtes, encaissent la majorité des efforts.

Pile	Moment de flexion maximum (kN.m)
6	96880
7	85730
8	80300
9	85620
10	45450
11	33800

Moment maxima pour les différentes piles



12

32780

TABLEAU 5.15. MOMENTS DE FLEXION MAXIMA EN BASE DES PILES

Les contraintes résultant de la flexion dans la première pile sont de l'ordre de 18,3 Mpa. A ces contraintes, doivent encore être ajoutées les contraintes normales provenant du poids non négligeable de l'ouvrage ainsi que de la masse d'eau supportée. Les piles en béton armé devront donc être soumises à une vérification de résistance en ajoutant aux contraintes provenant de l'étude statique, les contraintes flexionnelles supplémentaires calculées.

C.6. Réponse avec amortisseurs

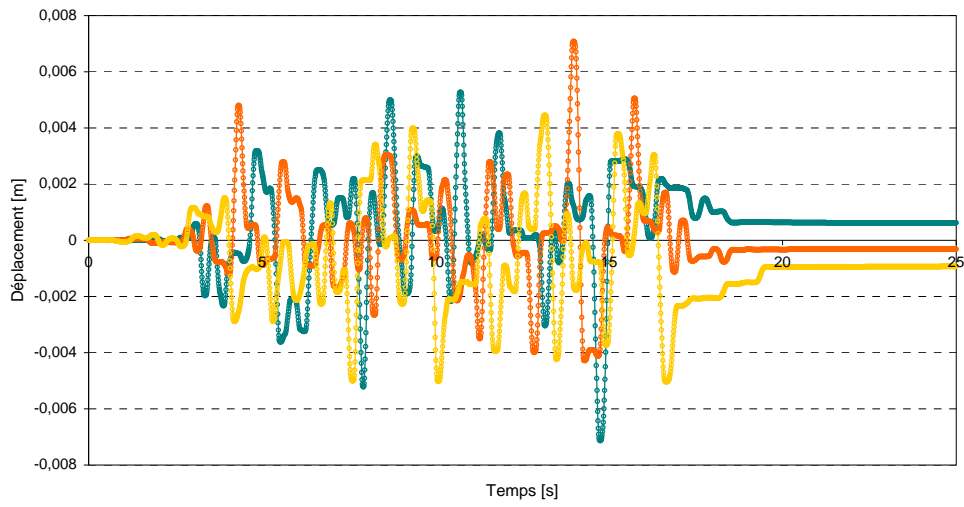
La structure a ensuite été étudiée en ajoutant des amortisseurs linéaires et non linéaires (comportements bilogarithmique et exponentiel). Seuls les résultats correspondant à une loi constitutive exponentielle sont donnés ici. Les caractéristiques de l'amortisseur ajouté sont :

$$C = 0,5561 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot (\text{s/m})^{0,28} \text{ et } \alpha = 0,28$$

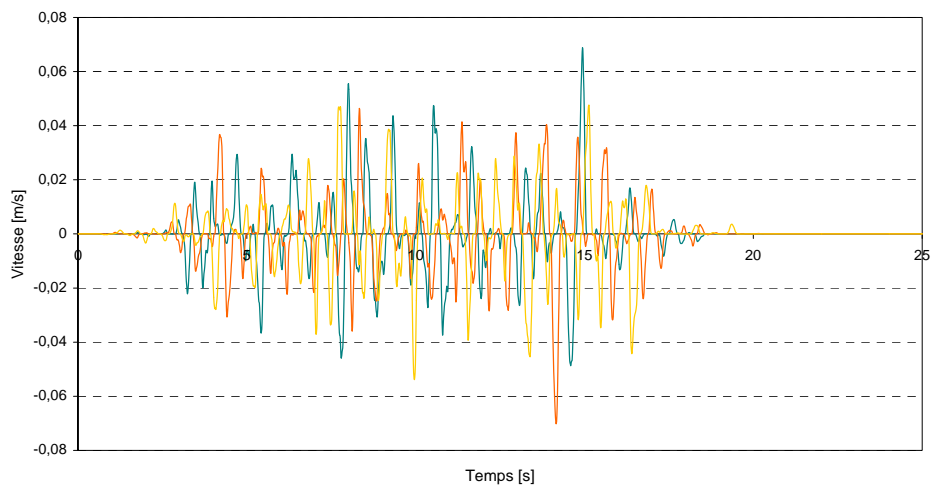
Les amortisseurs dont les lois de comportement sont données à l'annexe 1 ont été essayés sur le pont-canal mais ne sont guère efficaces. Ce sont des amortisseurs destinés à être employés pour des structures plus légères, ou du moins plus habituelles. Le pont-canal est un ouvrage massif (130 t/m !) comme on en rencontre rarement. Les efforts à mettre en œuvre pour limiter les mouvements d'une telle masse perchée ne sont pas comparables à ceux nécessaires à l'amélioration des comportements dynamiques des ponts courants. L'amortisseur choisi correspond à un amortisseur 100 fois plus visqueux que l'amortisseur « Jarret 1 » de l'annexe 1.

Cet amortisseur a été placé entre la culée (point supposé fixe par rapport au sol) et l'extrémité gauche du tablier (nœud 1). Les graphiques 5.16 indiquent les déplacements, vitesses et accélérations de ce nœud ainsi que le diagramme de comportement du dash-pot. Les trois couleurs utilisées représentent encore les trois accélérogrammes différents. Sur le graphique des déplacements, les séries représentées par des ronds non reliés sont les résultats obtenus avec les feuilles de calcul Mathcad alors que les lignes en trait plein représentent les résultats obtenus avec FINELG.

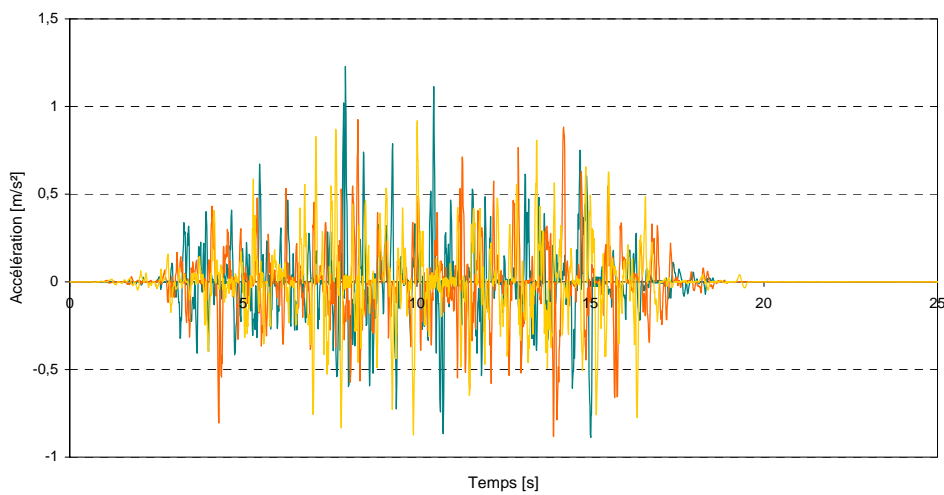
Déplacement longitudinal du tablier



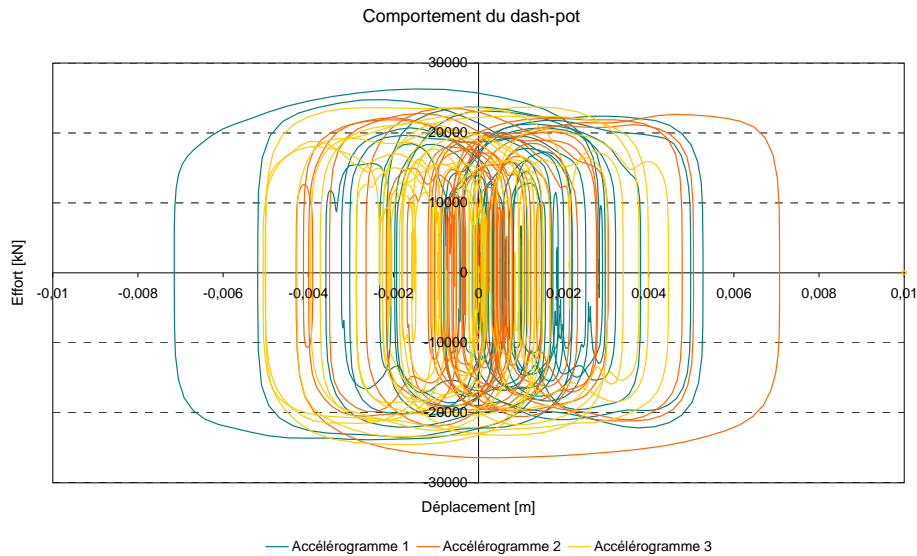
Vitesse longitudinale du tablier



Accélération longitudinale du tablier



— Accélérogramme 1 — Accélérogramme 2 — Accélérogramme 3



GRAPHIQUES 5.16

L'amortisseur mis en place a un effet non négligeable puisque le déplacement de l'extrémité gauche du tablier passe de 2,95 cm (avec l'amortissement structural uniquement) à 0,71 cm (avec amortisseur non linéaire).



GRAPHIQUE 5.17. MISE EN EVIDENCE DES DEFORMATIONS AXIALES DU TABLIER

En augmentant la viscosité de l'amortisseur installé, il est encore possible de diminuer le déplacement du point 1. Il ne faut cependant pas se focaliser sur ce nœud uniquement. En effet, en installant un amortisseur comme cela a été modélisé, l'extrémité gauche du tablier est astreinte à se déplacer dans une moindre mesure mais les effets d'inertie se font toujours sentir si bien que le tablier se voit désormais soumis à des contraintes de traction – compression dues aux déplacements différentiels de ses sections

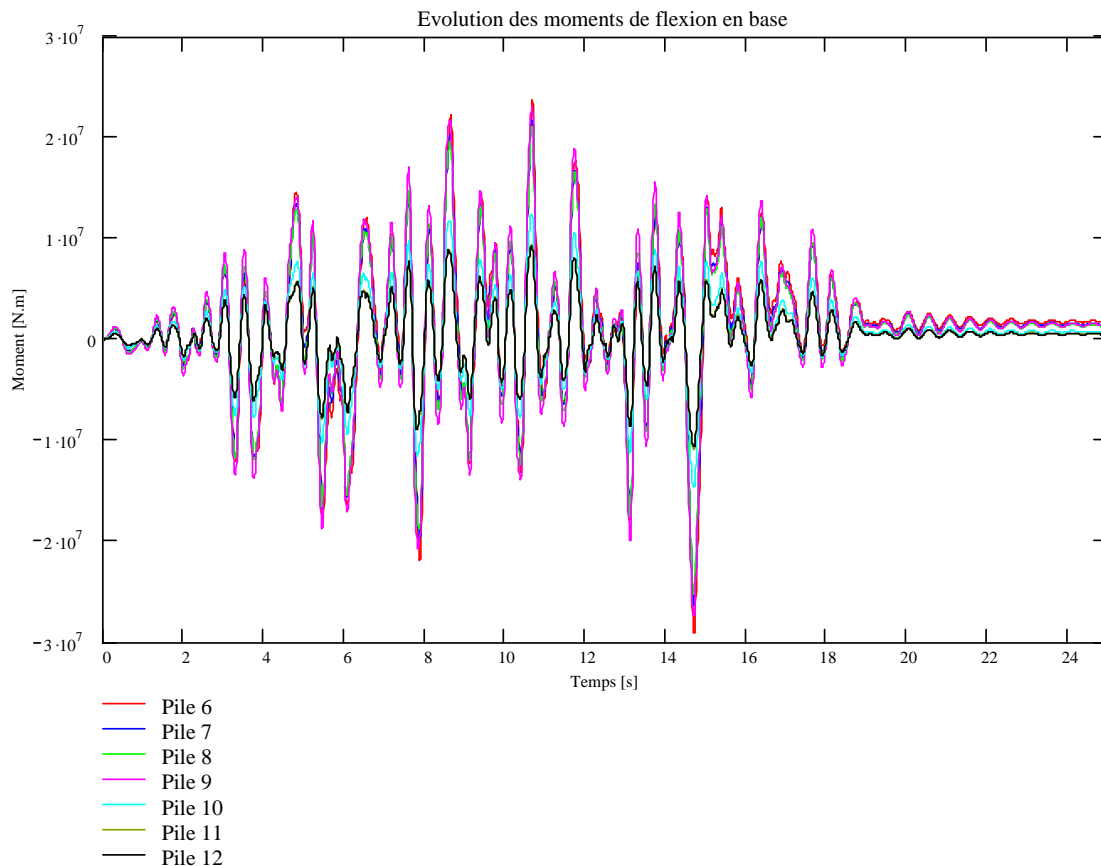
droites. Pour le premier accélérogramme, le graphique 5.17 représente les déplacements aux nœuds 1 (extrémité gauche du tablier, courbe rouge) et 25 (sommet de la pile n°6, courbe verte).

Pour l'amortisseur mis en place, le déplacement différentiel maximal entre ces deux nœuds est de 3,5 mm. Puisqu'ils sont distants de 194,75 m, la contrainte moyenne de traction sur cette partie du tablier vaut :

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta}{L} = 35000 \cdot \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{194,75} = 0,63 \text{ MPa} \quad (5.13)$$

Il est important de remarquer que cette contrainte est une contrainte moyenne et que la contrainte ponctuelle maximale peut atteindre le double de cette valeur. Il conviendra donc de vérifier si la poutre précontrainte est en mesure de supporter (sans se fissurer !), avec les coefficients de sécurité requis, des variations de contraintes dont l'amplitude vaut environ le Mpa.

Le graphique 5.18 représente les moments de flexion en base des piles. Les courbes obtenues pour chacune d'elles sont toujours plus ou moins en phase, ce qui indique, conformément à l'intuition, que les déformations axiales que subit le tablier sont localisées entre l'extrémité gauche du tablier et la tête de la première pile.



GRAPHIQUE 5.18

La tableau 5.16 indique les valeurs maximales des moments de flexion en base de chaque pile. Les efforts sont toujours répartis au prorata des raideurs (inverse du cube de la hauteur), ce qui laisse à nouveau supposer que la partie droite du tablier continue de se déplacer sans se déformer.

Pile	Moment de flexion maximum (kN.m)
6	29090
7	26420
8	25260
9	27360
10	14590
11	10880
12	10620

Moment maxima pour les différentes piles

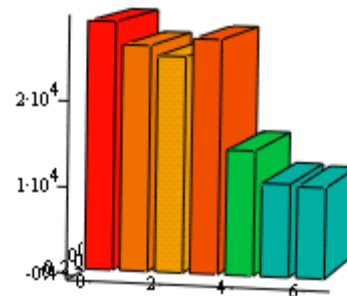
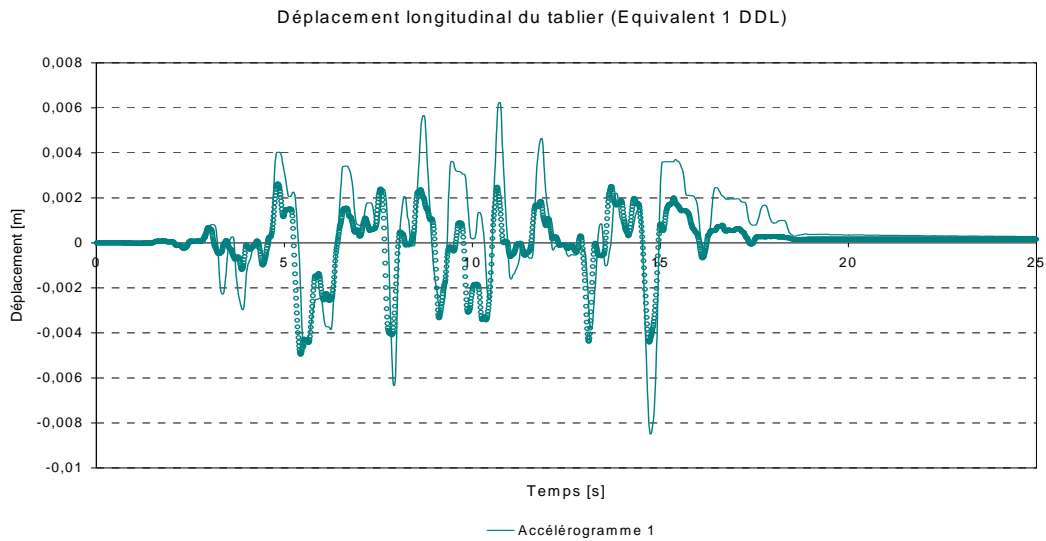


TABLEAU 5.16. MOMENTS DE FLEXION MAXIMA EN BASE DES PILES

De même que pour le cas de la console, le comportement non linéaire du pont-canal a été étudié à l'aide d'une « superposition modale » conservant uniquement le premier mode. Pour le premier accélérogramme, le graphique 5.17 donne le résultat obtenu en résolvant l'oscillateur à un degré de liberté équivalent. La courbe en trait plein représente la réponse du pont-canal muni de l'amortisseur non linéaire¹ et les cercles dispersés correspondent à la réponse obtenue sur l'oscillateur non linéaire équivalent au premier mode de déformation du pont-canal.

¹ et dont l'amortissement structural a été supprimé de manière à pouvoir utiliser les formules développées pour la console



GRAPHIQUE 5.17. APPROCHE DU CALCUL NON LINEAIRE DU PONT-CANAL PAR UN OSCILLATEUR A UN DEGRE DE LIERTE

La coïncidence entre les résultats est bien moins bonne que pour l'exemple de la console encastree. Ceci s'explique principalement par le fait que l'amortisseur ajoute oblige la structure à se déformer dans d'autres modes que le premier mode propre de vibration. Ceci est clairement mis en évidence par le graphique 5.17. qui dénonce les déformations axiales que subit le tablier.

Chapitre 6 : Conclusions

Le premier objectif du travail consiste en la génération d'accélérogrammes. Après avoir présenté les différentes méthodes de génération et évoqué brièvement SIMQKE, un des premiers programme de génération, l'exposé s'est focalisé vers la solution retenue. Elle consiste à générer un accélérogramme aléatoirement puis à transformer ses contenus temporels et fréquentiels respectivement à l'aide de fonctions enveloppes et de filtres. Une correction itérative basée sur la comparaison du spectre cible et du spectre de l'accélérogramme généré parachève la génération jusqu'à ce que la précision désirée soit atteinte.

Cette procédure a été mise en application à travers un programme (GOSCA) qui permet de générer des accélérogrammes sur base des spectres de l'Eurocode 8 ou de spectres définis par l'utilisateur. Il a permis de générer trois accélérogrammes pour le calcul du pont-canal de Houdeng. La réponse fournie en moyenne par une analyse transitoire (utilisant les accélérogrammes générés) s'approche à moins de 3 % de la réponse calculée par une analyse spectrale (à partir du spectre cible de l'Eurocode), ce qui laisse supposer l'atteinte d'un bon niveau de fiabilité.

Le second objectif du travail consiste en la rédaction d'un programme d'analyse de structure comprenant des amortisseurs à comportement non linéaire. Après quelques développements rappelant les principes généraux, parfois trop mal connus, de l'amortissement structurel, d'autres indications ont été mentionnées quant à l'utilisation d'amortisseurs non linéaires et leurs lois de comportement optimales. L'exposé s'est ensuite tourné vers l'objectif du sujet à proprement parler. Etant donné que les non linéarités ne touchent que certains degrés de liberté, la nécessité de condenser le système à résoudre a été mise en évidence. Une résolution dans les axes globaux de référence a été préférée à une résolution dans les axes locaux de chaque amortisseur qui serait plus efficace mais inadaptée aux structures pour lesquelles deux amortisseurs aboutissent en un même nœud.

La méthode ainsi développée a été mise en application à travers une feuille de calcul Mathcad d'une part, et implémentée dans le programme d'éléments finis FINELG d'autre part. Ces applications ont ensuite permis d'aborder l'analyse du comportement dynamique longitudinal du pont-canal de Houdeng. La bonne concordance des résultats obtenus par l'une ou l'autre application permet de justifier la bonne implémentation des routines dans le programme FINELG. Si les résultats sont effectivement fort semblables, il faut cependant noter que la résolution de la même structure est considérablement plus rapide à l'aide du programme FINELG (309 DDL, CPU time 10 s, clock time 40 s) qu'avec la feuille Mathcad (146 DDL, clock time ~ 5-6 min).

Les programmes réalisés ont également été testés dans un cas d'application académique. En plus de concourir avec l'intuition, les résultats obtenus sont justifiés par des développements simplifiés ou analytiques. Quelques méthodes assez particulières ont été utilisées : l'application d'une « superposition modale » à la résolution de cette structure non linéaire, la résolution analytique d'un système à deux degrés de liberté par une superposition de mode propres ou de « pseudo-modes propres ».

Il reste finalement à conclure le sujet en admettant que la méthode développée pour la résolution de ce travail est probablement la mieux adaptée mais difficilement généralisable à tous les cas de non linéarités. En résumé, elle ne devient efficace que lorsque le nombre de degrés de liberté affectés par les non linéarités est suffisamment faible vis-à-vis du nombre total de degrés de liberté. Un autre cas d'application imaginable est celui de structures pour lesquelles des rotules plastiques peuvent se former dans un nombre limité de sections dont la localisation est connue au préalable.

Bibliographie

BACHMANN H., AMMANN W., *Vibration in the structures induced by man and machine*, Association Internationale des Ponts et Charpentes, Zürich, 1987.

BOMMER J.J., RUGGERI C., *The specification of acceleration time-histories in seismic design codes*, Department of Civil & Environmental Engineering, Imperial College, London.

BOMMER J.J., SCOTT S.G., SARMA S.K., *Time history representation of the seismic hazard*, 11th European Conference on Earthquake Engineering, Balkema, Rotterdam, 1998.

BUCHHOLDT H.A., *Dynamics of the structures*, Thomas Telford Publications, London, 1997.

CLOUGH R.W., PENZIEN J., *Dynamics of the structures*, Mc Graw-Hill : Collection Civil Engineering series (Second Edition), 1993.

DAVIDOVICCI V., *La construction en zone sismique*, Le Moniteur, Génie parasismique 1985.

de VILLE de GOYET V., *Calcul non linéaire des structures du génie civil*, Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège – Notes de cours.

FONDER G., *Calcul des structures soumises aux effets dynamiques et sismiques*, Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège – Notes de cours.

FUHENG Y., *Vibration of cable-stayed bridges under moving vehicles*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège, 1996.

GERADIN M., RIXEN D., *Théorie des vibrations*, Ed. Masson, Paris, 1996.

LITT F.-X., *Analyse numérique*, Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège – Notes de cours.

ORTEGA J.M., RHEINBOLD W.C., *Iterative solution of non-linear equations in several variables*, Academic Press, New York, 1970.

PLUMIER A., *Conception parasismique* – Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège – Notes de cours.

ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., *The finite element method*, Mc Graw-Hill Book Company, London, 1991.

Table des matières

<u>Chapitre 1 : Introduction.....</u>	<u>1</u>
<u>Chapitre 2 : Rappels théoriques.....</u>	<u>3</u>
A. LES DIVERS TYPES D'ANALYSE.....	3
B. L'EQUATION DU MOUVEMENT.....	4
C. LES TREMBLEMENTS DE TERRE.....	5
<i>C.1. L'équation du mouvement particularisée aux tremblements de terre.....</i>	<i>5</i>
<i>C.2. Caractérisation des tremblements de terre : accélérogrammes et spectres.....</i>	<i>6</i>
D. LA RESOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT.....	11
<i>D.1. Les techniques de résolution.....</i>	<i>11</i>
<i>D.2. La méthode de Newmark.....</i>	<i>12</i>
E. LA RESOLUTION D'EQUATIONS NON LINEAIRES.....	13
<i>E.1. Introduction.....</i>	<i>13</i>
<i>E.2. La méthode de Newton-Raphson.....</i>	<i>13</i>
<i>E.3. Extrapolation d'Aitken.....</i>	<i>19</i>
<u>Chapitre 3 : La génération d'accélérogrammes.....</u>	<u>20</u>
A. INTRODUCTION.....	20
<i>A.1. Les accélérogrammes réels.....</i>	<i>21</i>
<i>A.2. Les accélérogrammes synthétiques.....</i>	<i>21</i>
<i>A.3. Les accélérogrammes artificiels.....</i>	<i>21</i>
B. LES DIFFERENTES METHODES DE GENERATION.....	21
<i>B.1. Décomposition de Fourier.....</i>	<i>22</i>
<i>B.2. Filtrage d'un processus aléatoire.....</i>	<i>24</i>
<i>B.3. Adaptation d'un accélérogramme réel.....</i>	<i>24</i>
C. LA SOLUTION RETENUE.....	25
<i>C.1. Génération d'une première fonction du temps.....</i>	<i>25</i>
<i>C.2. Modification temporelle.....</i>	<i>26</i>
<i>C.3. Modifications fréquentielles.....</i>	<i>28</i>
<i>C.4. Calcul du premier spectre.....</i>	<i>29</i>
<i>C.5. Corrections fréquentielles.....</i>	<i>30</i>
D. LES RECOMMANDATIONS DE L'EUROCODE 8.....	31
<i>D.1. Les spectres de réponse élastiques.....</i>	<i>31</i>
<i>D.2. La génération d'accélérogrammes.....</i>	<i>33</i>
E. LE PROGRAMME : GOSCA.....	34
<i>E.1. Introduction.....</i>	<i>34</i>
<i>E.2. Utilité de chacune des sous-routines.....</i>	<i>35</i>
<i>E.3. Quelques détails particuliers.....</i>	<i>36</i>

<u>Chapitre 4 : Calcul d'une structure à amortisseurs non linéaires</u>	39
A. L'AMORTISSEMENT DANS LES STRUCTURES	39
A.1. Introduction	39
A.2. L'amortissement structurel [C_S].....	41
A.3. L'amortissement concentré [C_D].....	45
B. LES LOIS DE COMPORTEMENT DES AMORTISSEURS	47
C. DEVELOPPEMENT DE LA METHODE	50
C.1. Le caractère « différentiel »	50
C.2. Le caractère « non linéaire »	52
C.3. Détails particuliers relatifs à la méthode.....	60
D. L'ANALYSE DYNAMIQUE DANS FINELG	64
D.1. Principes de fonctionnement.....	64
D.2. La routine NMSKYF.....	66
E. MODIFICATIONS APORTEES AU PROGRAMME	69
E.1. Aperçu des modifications	69
E.2. La routine CONSTA	71
E.3. La routine RESDSH.....	73
<u>Chapitre 5 : Applications</u>	76
A. INTRODUCTION	76
B. UN EXEMPLE SIMPLE ET ACADEMIQUE	77
B.1. La structure étudiée	77
B.2. Les fréquences propres (répertoire 0).....	78
B.3. Réponse dynamique transitoire : structure non amortie	80
B.4. Réponse avec amortisseurs linéaires.....	82
B.5. Réponse avec amortisseurs non linéaires.....	82
B.6. Analyse par superposition modale	86
B.7. Modification de la structure étudiée.....	90
C. LE PONT-CANAL DE HOUDENG-AIMERIES	95
C.1. Introduction.....	95
C.2. Génération d'accélérogrammes	95
C.3. Modélisation de la structure	97
C.4. Fréquences propres de vibration	99
C.5. Réponse de la structure non amortie extérieurement.....	101
C.6. Réponse avec amortisseurs	106
<u>Chapitre 6 : Conclusions</u>	112

Annexes

Annexe 1 : Caractéristiques d'amortisseurs réels

Annexe 2 : Listings du programme GOSCA

Annexe 3 : Listing des routines implémentées
dans FINELG

Annexe 4 : Listings des fichiers Mathcad

Annexe 1

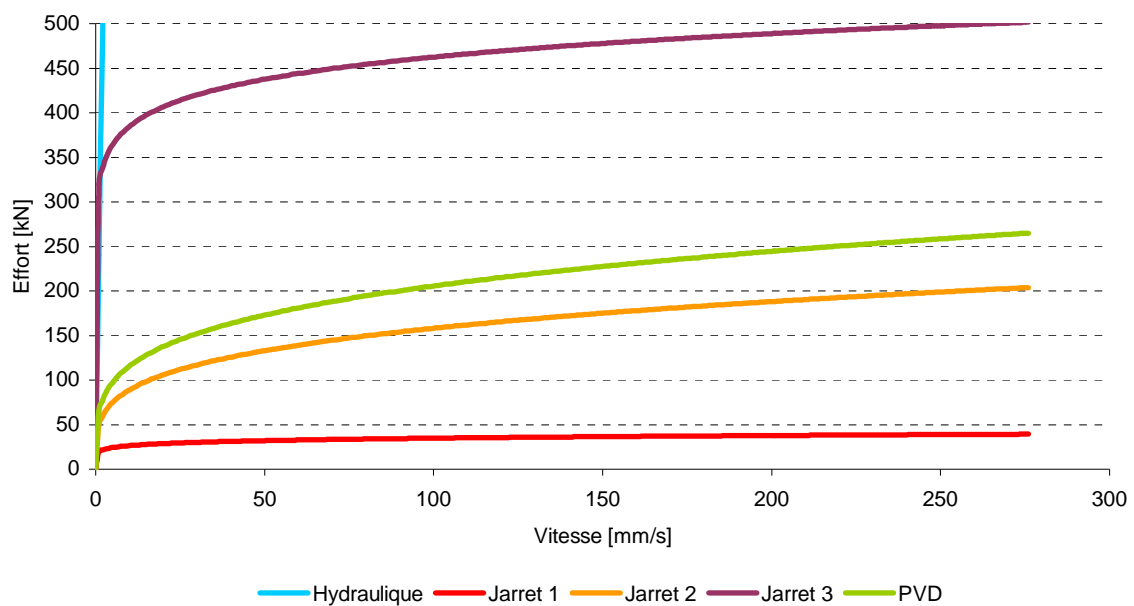
Caractéristiques d'amortisseurs réels

A partir de résultats d'essais fournis par des fabricants d'amortisseurs, la méthode expliquée au chapitre 4 a été appliquée pour déterminer les caractéristiques des dispositifs. Le tableau ci-dessous indique les paramètres de comportement correspondants à une loi de type exponentielle : $F = C.v^\alpha$.

Amortisseur	C	α
Hydraulique	240	1
Jarret 1	20	0,12
Jarret 2	50	0,25
Jarret 3	320	0,08
PVD	65	0,25

[Ces grandeurs ne sont valables que si les efforts sont exprimés en kN et les vitesses en mm/s]

Lois de comportement de quelques amortisseurs



Annexe 2

Listings du programme GOSCA

GOSCA.FOR..... 6

<i>GETDAT</i>	12
<i>CRTARG</i>	18
<i>H1MULT</i>	24
<i>H2MULT</i>	25
<i>RESPEC</i>	26
<i>FRECOR</i>	28

GOSCA.FOR

```

PROGRAM GOSCA
C Generation Of a Spectrum Compatible Accelerogram
  REAL VEC(8192),VEC2(8192),CORR(8192),WSAVE(16399)
  REAL FREQ(800),SPEC(800),TARGETSP(800),MEAN(40)
  REAL CUSTPER(50),CUSTSPEC(50),CUSTMIN,CUSTMAX
  REAL PARAM1,PARAM3,PARAM4
  REAL K SIS1,K SIS2,OMEGASOL1,OMEGASOL2,OMEGA0
  REAL DUREE,DT,PLATEAU,PRECISION
  INTEGER MAXZONE (60) , MINZONE (60) , ITYPSP , PARAM2 , NCUST
  INTEGER
IPWR,NFREQ,NALEA1,NALEA2,I,SOL,NBR,ERROR,ITERAT,NINTERV
  CHARACTER*90 TEXTE
  PARAMETER (PI=3.14159265359D0,G=9.81D0,
.   K SIS1=0.6D0,K SIS2=0.55D0,OMEGASOL1=15.6,OMEGASOL2=3.0D0)
C
C A.- Data acquisition
C -----
  ERROR=0
  ITERAT=0
C
  CALL GETDAT(DUREE,PARAM1,PARAM2,PARAM3,PARAM4,NBR,
C -----
.   PRECISION,NFREQ,ITYPSP,ERROR,IPWR,
.   CUSTPER,CUSTSPEC,NCUST,CUSTMIN,CUSTMAX,A1,A2)
  IF (ERROR.NE.0) GOTO 9999
  CALL
CRTARG(TARGETSP,FREQ,NBR,ITYPSP,PARAM1,PARAM2,PARAM3,
C -----
.   PARAM4,PLATEAU,MINZONE,MAXZONE,NINTERV,
.   CUSTPER,CUSTSPEC,NCUST,CUSTMIN,CUSTMAX)
C
C B.- Generation of a first random accelerogram
C -----
C B.1.- Generation of numbers with a rectangular distribution over [0,1[

```



```

C   2**IPWR numbers are stocked in the vector VEC
5   OPEN (UNIT=1, FILE='ALEA.DAT',FORM='FORMATTED')
   READ(1,1000) NALEA1
   NALEA2=ABS(MOD(9373541*NALEA1,30000))
   CALL RMARIN(NALEA1,NALEA2)
C   -----
   CALL RANMAR(VEC,2**IPWR)
C   -----
   CLOSE (UNIT=1,STATUS='DELETE')
   OPEN (UNIT=1, FILE='ALEA.DAT',FORM='FORMATTED')
   WRITE (1,1000), NALEA2
   CLOSE (UNIT=1,STATUS='KEEP')
C B.2.- Modification to a gaussian distribution with zero mean and unit variance
C   2**IPWR numbers are stocked in the vector VEC2
   DO 10,I=1,2**(IPWR-1)
       VEC2(2*I)=SQRT(-2*LOG(VEC(2*I)))*COS(2*PI*VEC(2*I-1))
       VEC2(2*I-1)=SQRT(-2*LOG(VEC(2*I)))*SIN(2*PI*VEC(2*I-1))
10  CONTINUE
C B.3.- Multiplication by the transient function
C   The first accelerogram-like function generated is stocked into the vector VEC
C   2**IPWR values are assumed to be spaced at equal intervals (DT) in time
       DT=DUREE/(2**IPWR)
       IF (A2.NE.0) THEN
           DO 20,I=1,2**IPWR
               VEC(I)=VEC2(I)*A1*(DT*(I-1))*EXP(-A2*DT*(I-1))
20  CONTINUE
       ELSE
           DO 21,I=1,2**IPWR
               IF (DT*(I-1).LE.A1) THEN
                   VEC(I)=VEC2(I)*0.5*(1-COS(PI*DT*(I-1)/A1))
                   END IF
               IF (DT*(I-1).GE.(DUREE-A1)) THEN
                   VEC(I)=VEC2(I)*0.5*(1+COS(PI*(DT*(I-1)-DUREE+A1)/A1))
                   END IF
               IF (AND((DT*(I-1).GT.A1),(DT*(I-1).LT.(DUREE-A1)))) THEN

```

```

        VEC(I)=VEC2(I)
    END IF
21  CONTINUE
    END IF
C B.4.- Modification of the frequency content
C   Multiplication of the accelerogram's FFT by two filters H1 & H2
C   The modified FFT is stocked into the vector VEC2
    CALL RFFTI1 (2**IPWR,WSAVE(2**IPWR+1),WSAVE(2**(IPWR+1)+1))
C   -----
    CALL RFFTFW (2**IPWR,VEC,WSAVE)
C   -----
        OMEGA0=2*PI/DUREE
        CALL H1MULT(VEC,2**IPWR,OMEGA0,OMEGASOL1,KSIS1)
C   -----
    CALL H2MULT(VEC,2**IPWR,OMEGA0,OMEGASOL2,KSIS2)
C   -----
C   Copy of the accelerogram's FFT to the vector VEC2 (needed again later)
30  DO 40,I=1,2**IPWR
        VEC2(I)=VEC(I)
40  CONTINUE
    CALL RFFTBK (2**IPWR,VEC,WSAVE)
C   -----
        DO 50,I=1,2**IPWR
            VEC(I)=PARAM1*VEC(I)/2**IPWR
50  CONTINUE
        VEC(1)=0
C
C C.- Modification of the first accelerogram
C -----
C C.1.- Computation of the elastic response spectrum
        CALL RESPEC (VEC,DT,2**IPWR,FREQ,NFREQ,PARAM3,SPEC)
C   -----
C C.2.- Check matching of the generated and target accelerograms
        DO 60,I=1,NINTERV
            MEAN(I)=0

```

```

60 CONTINUE
   DO 80,J=1,NBR+1
       DO 70,I=1,NINTERV
           MEAN(I)=MEAN(I)+SPEC(MINZONE(I)+J-1)
70 CONTINUE
80 CONTINUE
   DO 90,I=1,NINTERV
       MEAN(I)=MEAN(I)/((NBR+1)*PLATEAU)
       WRITE (*,81) I,NINTERV,MEAN(I)
81 FORMAT (10X,'Zone ',I1,' of ',I1,' - Precision : ',G8.3)
       IF (OR(MEAN(I).LE.(1-PRECISION),MEAN(I).GE.(1+2*PRECISION)))
THEN
           ITERAT=ITERAT+1
           WRITE (*,*) 'Iteration :',ITERAT
           IF (ITERAT.EQ.20) GOTO 9999
           GOTO 100
       END IF
90 CONTINUE
   GOTO 9999
C
C C.3.- Computation of the correction factors
100 CALL FRECOR(TARGETSP,SPEC,FREQ,NFREQ,IPWR,OMEGA0,CORR,
C -----
.       MINZONE,MAXZONE)
   DO 110,I=1,2**IPWR
       VEC(I)=VEC2(I)*CORR(I)
110 CONTINUE
   GOTO 30
C
*****
*****
1000 FORMAT (I)
1010 FORMAT (2F16.8)
1020 FORMAT (5G13.5)
C

```

```

9999  SELECT CASE (ERROR)
      CASE (1)
        TEXTE='ERROR ! You didn"t select a valid code or norm'
      CASE (2)
        TEXTE='ERROR ! You didn"t select a valid subsoil class'
      CASE (3)
        TEXTE='ERROR ! You didn"t define the precision correctly'
      CASE (4)
        TEXTE='ERROR ! You didn"t select a valid seismic zone'
      CASE (5)
        TEXTE='ERROR ! You didn"t select a valid spectrum type'
      CASE (6)
        TEXTE='ERROR ! The periods must be sorted in ascending order'
      CASE (7)
        TEXTE='ERROR ! Your spectrum is invalid ! There must be a
. constant spectral acceleration branch !'
      CASE DEFAULT
        IF (ITERAT.LT.20) THEN
          WRITE (*,*)
          WRITE (*,*) 'The accelerogram has been generated successfully.
. It fits the required response spectrum with the precision given
. by the code.'
C      Stocks the generated accelerogram in the files ACCEL.DAT
C      & its response spectrum in the file SPECTRE.DAT
          OPEN (UNIT=1, FILE='ACCEL.ACG',FORM='FORMATTED')
          WRITE(1,*) ' . Time [s]. .Acc. [m/s²]. '
          DO 99990,I=1,2**IPWR
            WRITE(1,1010) (I-1)*DT,VEC(I)*G
99990  CONTINUE
          WRITE(1,1010) -1.0,0.0
          CLOSE (1)
          OPEN (UNIT=1, FILE='SPECTRE.DAT',FORM='FORMATTED')
          WRITE(1,*) '.Period [s]. .Real Sp(%g). .Target Sp(%g).'
          DO 99991,I=NFREQ,1,-1
            IF (1/FREQ(I).LT.10) THEN

```

```
WRITE(1,1020) 1/FREQ(I),SPEC(I),TARGETSP(I)
END IF
99991 CONTINUE
CLOSE (1)
ELSE
WRITE (*,*) 'GOSCA couldn't generate an accelerogram
. corresponding to the required spectrum'
IF (PASSAGE.LT.3) THEN
WRITE (*,*) 'Do you want to try again with the same data
. (YES = 1 / NO = 2) ? '
READ (*,*) CHOIX
IF (CHOIX.EQ.1) THEN
ITERAT=0
GOTO 5
END IF
ELSE
WRITE (*,*) '... You should use a smaller precision...or
. review the given response spectrum if the generation is based on
. a data file... '
END IF
END IF
END SELECT
WRITE (*,*) , TEXTE
END
```

GETDAT

```

SUBROUTINE
GETDAT(DUREE,PARAM1,PARAM2,PARAM3,PARAM4,NBR,
.      PRECISION,NFREQ,ITYPSP,ERROR,IPWR,
.      CUSTPER,CUSTSPEC,NCUST,CUSTMIN,CUSTMAX,A1,A2)
REAL
PARAM1,PARAM3,PARAM4,DUREE,PRECISION,CUSTMIN,CUSTMAX
REAL CUSTPER(50),CUSTSPEC(50)
INTEGER PARAM2,NFREQ,NBR,ITYPSP,ERROR,NCUST,IFORM,ITEST
CHARACTER*20 FILENAME
C
WRITE (*,*) '***** GOSCA *****'
WRITE (*,*) '* Generation Of Spectrum Compatible Accelerograms *'
WRITE (*,*) "
WRITE (*,10)
10 FORMAT(/1X,'Which code do you want to use ?',/5X,'1.- Eurocode 8',
. /5X,'2.- Turkish code',/5X,'3.- Custom spectrum')
READ (*,*) ITYPSP
C
SELECT CASE (ITYPSP)
C ! *** EUROCODE 8 *****
CASE (1)
WRITE(*,*) 'What is the duration (in seconds) of the accelerogram
. to generate ?'
READ (*,*) DUREE
WRITE (*,*) 'Spectrum type (1 or 2) - close or far earthquake ?'
READ (*,*) PARAM4
IF (AND((PARAM4.NE.1.0),(PARAM4.NE.2.0))) THEN
ERROR = 5
GOTO 9999
END IF
WRITE (*,*) 'Alpha (% of g)?'
READ (*,*) PARAM1

```

```

WRITE (*,*) 'Subsoil class ? (A=1 B=2 C=3 D=4 E=5)'
  READ (*,*) PARAM2
  IF
(AND(AND(AND(AND((PARAM2.NE.1),(PARAM2.NE.2)),(PARAM2.NE.3))
.   ,(PARAM2.NE.4)),(PARAM2.NE.5))) THEN
  ERROR=2
  GOTO 9999
  END IF
  WRITE (*,*) 'Percentage of critical damping (ksi %) ?'
  READ (*,*) PARAM3
  IF (PARAM3.LT.1) THEN
    WRITE (*,11) 100*PARAM3,PARAM3
11  FORMAT (8X,'Do you mean (1)',F6.2,' % or (2)',F6.2,' % ?')
  WRITE (*,*) '  Choose 1 or 2'
  READ (*,*) ITEST
    IF (ITEST.EQ.2) PARAM3=PARAM3/100
  END IF
  PARAM3=PARAM3/100
  WRITE (*,*) 'Precision for the computation of the response
.spectrum (1-40) ?'
  READ (*,*) NBR
  IF (OR((NBR.GT.40),(NBR.LE.0))) THEN
    ERROR=3
    GOTO 9999
  ENDIF
  WRITE (*,*) 'Precision for the matching of the spectra (%)
. [Normal value : 3 %] ?'
  READ (*,*) PRECISION
  IF (PRECISION.LT.3) PRECISION=3
  PRECISION=PRECISION/100
  NFREQ=20*NBR ! NINTERV=5 - 4-INTERVAL DEFINITION
C *** TURKISH NORM *****
  CASE (2)
    WRITE(*,*) 'What is the duration (in seconds) of the accelerogram
. to generate - At least the maximum of 15 s and 5 times the first

```

```

. natural vibration period of the structure?'
  READ (*,*) DUREE
  WRITE (*,*) 'Seismic Zone (1,2,3 or 4) - this value is used for
. the definition of A0 - ?'
  READ (*,*) PARAM1
  IF (AND(AND(AND((PARAM1.NE.1),(PARAM1.NE.2)),(PARAM1.NE.3))
. ,(PARAM1.NE.4))) THEN
  ERROR=4
  GOTO 9999
  END IF
WRITE (*,*) 'Building importance factor I ?'
  READ (*,*) PARAM4
WRITE (*,*) 'Local Site Class (Z1=1 Z2=2 Z3=3 Z4=4) ?'
  READ (*,*) PARAM2
  IF (AND(AND(AND((PARAM2.NE.1),(PARAM2.NE.2)),(PARAM2.NE.3))
. ,(PARAM2.NE.4))) THEN
  ERROR=2
  GOTO 9999
  END IF
WRITE (*,*) 'Percentage of critical damping (ksi) - this value
. is used for the computation of the spectrum only ! - ?'
  READ (*,*) PARAM3
  IF (PARAM3.LT.1) THEN
  WRITE (*,12) 100*PARAM3,PARAM3
12  FORMAT (8X,'Do you mean (1)',F6.2,' % or (2)',F6.2,' % ?')
  WRITE (*,*) ' Choose 1 or 2'
  READ (*,*) ITEST
  IF (ITEST.EQ.2) PARAM3=PARAM3/100
  END IF
  PARAM3=PARAM3/100
  WRITE (*,*) 'Precision for the computation of the response
.spectrum (1-50) ?'
  READ (*,*) NBR
  IF (OR((NBR.GT.50),(NBR.LE.0))) THEN
  ERROR=3

```



```

        GOTO 9999
    ENDIF
        WRITE (*,*) 'Precision for the matching of the spectra (%)
. [Normal value : 3 %] ?'
        READ (*,*) PRECISION
        IF (PRECISION.LT.3) PRECISION=3
        PRECISION=PRECISION/100
        NFREQ=15*NBR ! NINTERV=5 - 3-INTERVAL DEFINITION
C *** CUSTOM SPECTRUM *****
        CASE (3)
            WRITE(*,*) 'What is the duration (in seconds) of the accelerogram
. to generate ?'
            READ (*,*) DUREE
            WRITE (*,*) 'Maximum ground acceleration (% of g)?'
            READ (*,*) PARAM1
            WRITE (*,*) 'Percentage of critical damping (ksi %) ?'
            READ (*,*) PARAM3
            IF (PARAM3.LT.1) THEN
                WRITE (*,13) 100*PARAM3,PARAM3
13    FORMAT (8X,'Do you mean (1)',F6.2,' % or (2)',F6.2,' % ?')
            WRITE (*,*) '    Choose 1 or 2'
            READ (*,*) ITEST
            IF (ITEST.EQ.2) PARAM3=PARAM3/100
        END IF
        PARAM3=PARAM3/100
        WRITE (*,*) 'File containing the custom spectrum (+ extension)?'
        WRITE (*,*) ' -- format : 2F10.5 --'
        READ (*,*) FILENAME
        OPEN (UNIT=1, FILE=FILENAME,FORM='FORMATTED')
        PARAM4=0
        DO 20 I=1,50
            READ(1,1000) CUSTPER(I),CUSTSPEC(I)
            IF (I.NE.1) THEN
                IF (CUSTPER(I).LT.CUSTPER(I-1)) THEN
                    ERROR = 6

```

```

        GOTO 9999
    END IF
END IF
    IF (CUSTSPEC(I).EQ.PARAM4) CUSTMAX=I
IF (CUSTSPEC(I).GT.PARAM4) THEN
    CUSTMIN=I
    CUSTMAX=0
    PARAM4=CUSTSPEC(I)
END IF
    IF (EOF(1)) GOTO 30
20  CONTINUE
30  CLOSE (1)
IF (CUSTMAX.EQ.0) THEN
    ERROR=7
    GOTO 9999
END IF
NCUST=I
IF (CUSTPER(NCUST).LT.6) THEN
    WRITE (*,*) '!! To get better accuracy you should provide
.spectrum values for periods up to 6-8 seconds - The
.generation is performed anyway !!'
    WRITE (*,*)
    CUSTPER(NCUST)=10
    CUSTSPEC(NCUST)=CUSTSPEC(NCUST-1) *
        (CUSTPER(NCUST-1)/CUSTPER(NCUST))**2
    END IF
IF (CUSTPER(NCUST).LT.10) THEN
    NCUST=NCUST+1
    CUSTPER(NCUST)=10
    CUSTSPEC(NCUST)=CUSTSPEC(NCUST-1) *
        (CUSTPER(NCUST-1)/CUSTPER(NCUST))**2
    END IF
    WRITE (*,*) 'Precision for the computation of the response
.spectrum (1-40) ?'
    READ (*,*) NBR

```

```

IF (OR((NBR.GT.40),(NBR.LE.0))) THEN
  ERROR=3
  GOTO 9999
ENDIF
  WRITE (*,*) 'Precision for the matching of the spectra (%)
. [Normal value : 3 %] ?'
  READ (*,*) PRECISION
  IF (PRECISION.LT.3) PRECISION=3
  PRECISION=PRECISION/100
NFREQ=15*NBR
CASE DEFAULT
  ERROR = 1
  GOTO 9999
END SELECT
C
A1=DUREE/3.2
A2=0
IF (DUREE.GE.25) THEN
  WRITE (*,40)
40  FORMAT(/1X,'Transient function?'/,5X,'1.- Exponential form',
.   /5X,'2.- Hanning"s window')
  READ (*,*) IFORM
  IF (IFORM.EQ.1) THEN
    A1=0.45D0
    A2=0.16667
  END IF
END IF
  IPWR=INT(1.442695*LOG(100*DUREE))+1
  IF (IPWR.GT.13) THEN
    IPWR = 13
  END IF
C
1000 FORMAT (2F10.5)
9999 RETURN
END

```

CRTARG

```

SUBROUTINE
CRTARG(TARGETSP,FREQ,NBR,ITYPSP,PARAM1,PARAM2,PARAM3,
.   PARAM4,PLATEAU,MINZONE,MAXZONE,NINTERV,
.   CUSTPER,CUSTSPEC,NCUST,CUSTMIN,CUSTMAX)
C This subroutine fills first the vector FREQ with the frequencies at which the
C target response spectrum is defined and further compared with the computed
C response spectrum of the generated accelerogram.
C Then, it fills the vector TARGETSP with the abscissa of the target elastic
C response spectrum corresponding to the NFREQ frequencies contained in the vector
C FREQ.
C For the moment, this routine works only with EC8's spectra and the the spectra of
C the Turkish norm. The subroutine can be easily modified to take account of other
C shapes of spectra : point 1 to 3 here under must be completed in the same way that
C it's already written for EC8 & Turkish spectra
      REAL TARGETSP(800),FREQ(800),LINTERP
      REAL PARAM1,PARAM3,PARAM4,TA,TB,TC,TD,S,ETA,PLATEAU
      REAL CUSTPER(50),CUSTSPEC(50),CUSTMIN,CUSTMAX,DELTAPER
      INTEGER
MINZONE(60),MAXZONE(60),PARAM2,NBR,I,ITYPSP,NINTERV,NCUST
      INTEGER NREF
C
C 1.- Reading the soil parameter
      SELECT CASE (ITYPSP)
      CASE (1) !*** EUROCODE 8 ***
        !PARAM1 : ALPHA
        !PARAM2 : SOL
        !PARAM3 : KSI
        !PARAM4 : SPECTRUM TYPE
        IF (PARAM4.EQ.1.0) THEN
          SELECT CASE (PARAM2)
          CASE (1)
            TB = 0.1
            TC = 0.4

```

```
    TD = 2
    S = 1
CASE (2)
    TB = 0.15
    TC = 0.5
    TD = 2
    S = 1.1
CASE (3)
    TB = 0.2
    TC = 0.6
    TD = 2
    S = 1.35
CASE (4)
    TB = 0.2
    TC = 0.7
    TD = 2
    S = 1.35
CASE (5)
    TB = 0.15
    TC = 0.5
    TD = 2
    S = 1.4
END SELECT
END IF
IF (PARAM4.EQ.2.0) THEN
    SELECT CASE (PARAM2)
    CASE (1)
        TB = 0.05
        TC = 0.25
        TD = 1.2
        S = 1
    CASE (2)
        TB = 0.05
        TC = 0.25
        TD = 1.2
```

```

    S = 1.1
CASE (3)
    TB = 0.1
    TC = 0.25
    TD = 1.2
    S = 1.5
CASE (4)
    TB = 0.1
    TC = 0.3
    TD = 1.2
    S = 1.8
CASE (5)
    TB = 0.05
    TC = 0.25
    TD = 1.2
    S = 1.5
END SELECT
END IF
ETA=SQRT(10/(5+PARAM3*100))
IF (ETA.GT.0.55) THEN ETA=0.55
NINTERV=5
CASE(2) ! *** TURKISH NORM ***
    ! PARAM 1 : A0 (after modification)
    ! PARAM 2 : Local site class (Z1 to Z4)
    ! PARAM 3 : Damping ratio of the structure (note : this factor doesn't
!       appear in the definition of the target spectrum
    ! PARAM 4 : Building Importance Factor (1 to 1.5)
PARAM1=0.1*(5-PARAM1)
SELECT CASE (PARAM2)
CASE (1)
    TA = 0.1
    TB = 0.3
CASE (2)
    TA = 0.15
    TB = 0.4

```

```

CASE (3)
  TA = 0.15
  TB = 0.6
CASE (4)
  TA = 0.2
  TB = 0.9
END SELECT
NINTERV=5
CASE (3) ! *** CUSTOM SPECTRUM ***
  ! PARAM 1 : PLATEAU
  ! PARAM 2 : USELESS
  ! PARAM 3 : USELESS
  ! PARAM 4 : USELESS
  NINTERV=5
END SELECT
C
C 2.- Creation of the vector FREQ
C
SELECT CASE (ITYPSP)
  CASE (1) !*** EUROCODE 8 ***
  DO 20,I=1,NINTERV*NBR
    FREQ(I)=I/(NINTERV*NBR*TD)
    FREQ(NINTERV*NBR+I)=1/TD+I/(NINTERV*NBR*TC)-
I/(NINTERV*NBR*TD)
    FREQ(2*NINTERV*NBR+I)=1/(TC-I*(TC-TB)/(NINTERV*NBR))
    FREQ(3*NINTERV*NBR+I)=1/(TB-TB*I/(NINTERV*NBR+1))
  20 CONTINUE
  CASE (2) ! *** TURKISH NORM ***
  DO 21,I=1,NINTERV*NBR
    FREQ(I)=I/(NINTERV*NBR*TB)
    FREQ(NINTERV*NBR+I)=1/TB+I/(NINTERV*NBR*TA)-
I/(NINTERV*NBR*TB)
    FREQ(2*NINTERV*NBR+I)=1/(TA-TA*I/(NINTERV*NBR+1))
  21 CONTINUE
  CASE (3) ! *** CUSTOM SPECTRUM ***

```

```

TA=CUSTPER(CUSTMIN)
TB=CUSTPER(CUSTMAX)
  TC=CUSTPER( NCUST )
  DO 22,I=1,NINTERV*NBR
    FREQ(I)=1/TC+(I-1)/(NINTERV*NBR*TB)-(I-1)/(NINTERV*NBR*TC)
    FREQ(NINTERV*NBR+I)=1/(TB-(I-1)*(TB-TA)/(NINTERV*NBR))
    FREQ(2*NINTERV*NBR+I)=1/(TA-TA*(I-1)/(NINTERV*NBR+1))
22  CONTINUE
  END SELECT
C
C 3.- Creation of the vector TARGETSP
C
  SELECT CASE (ITYPSP)
    CASE (1) !*** EUROCODE 8 ***
      DO 30,I=1,NINTERV*NBR
        TARGETSP(I)=PARAM1*S*ETA*2.5*TC*TD*(FREQ(I))**2
TARGETSP(NINTERV*NBR+I)=PARAM1*S*ETA*2.5*TC*FREQ(NINTERV*NBR+I)
        TARGETSP(2*NINTERV*NBR+I)=PARAM1*S*ETA*2.5
          TARGETSP(3*NINTERV*NBR+I)=PARAM1*S*(1+(ETA*2.5-1)
.          /FREQ(3*NINTERV*NBR+I)/TB)
30  CONTINUE
        PLATEAU=PARAM1*S*ETA*2.5
    CASE(2) ! *** TURKISH NORM ***
      DO 31,I=1,NINTERV*NBR
        TARGETSP(I)=PARAM1*PARAM4*2.5*(TB**0.8)*((FREQ(I))**0.8)
        TARGETSP(NINTERV*NBR+I)=PARAM1*PARAM4*2.5
        TARGETSP(2*NINTERV*NBR+I)=PARAM1*PARAM4*
.        (1+1.5/(TA*FREQ(2*NINTERV*NBR+I)))
31  CONTINUE
        PLATEAU=PARAM1*PARAM4*2.5
    CASE(3) ! *** CUSTOM SPECTRUM ***
      NREF=NCUST
      DO 34,I=1,3*NINTERV*NBR
        IF (CUSTPER(NREF-1).GT.(1/FREQ(I))) THEN

```



```

        DO 32, J=1,50
        NREF=NREF-1
        IF (CUSTPER(NREF-1).LE.(1/FREQ(I))) GOTO 33
32     CONTINUE
33     CONTINUE
        END IF
        LINTERP=(1/FREQ(I)-CUSTPER(NREF-1))/
        (CUSTPER(NREF)-CUSTPER(NREF-1))
        TARGETSP(I)= LINTERP * CUSTSPEC(NREF)
        + (1-LINTERP) * CUSTSPEC(NREF-1)
34     CONTINUE
        PLATEAU=PARAM4
        END SELECT

```

C

C 4.- Creation of the vectors MINZONE & MAXZONE for the convergence criterium

C

```

SELECT CASE (ITYPSP)
    CASE (1) !*** EUROCODE 8 ***
        DO 40,I=1,NINTERV
            MINZONE(I)=(2*NINTERV+I-1)*NBR
            MAXZONE(I)=(2*NINTERV+I)*NBR
40     CONTINUE
        CASE (2) ! *** TURKISH NORM ***
        DO 41,I=1,NINTERV
            MINZONE(I)=(NINTERV+I-1)*NBR
            MAXZONE(I)=(NINTERV+I)*NBR
41     CONTINUE
        CASE (3) ! *** CUSTOM SPRECTRUM ***
        DO 42,I=1,NINTERV
            MINZONE(I)=(NINTERV+I-1)*NBR+1
            MAXZONE(I)=(NINTERV+I)*NBR+1
42     CONTINUE
        END SELECT
        RETURN
        END

```

H1MULT

```
SUBROUTINE H1MULT(VEC,N,OMEGA0,OMS1,KSII)
```

C This routine multiplies the Fourier transform of the first accelerogram generated

C by the filter function H1 in order to attenuate the low frequency content

C Note : the vector VEC must contain the result of the FFT (of the accelerogram)

C computed with the subroutine RFFTF. N should be a power of 2

```
REAL OMEGA0,OMS1,KSII,A,B,P1,P2
```

```
INTEGER N
```

```
REAL VEC(N)
```

```
DO 65,I=1,N/2-1
```

```
  A=VEC(2*I)
```

```
  B=-VEC(2*I+1)
```

```
  P1=2*KSII*I*OMEGA0/OMS1
```

```
  P2=(1-(I*OMEGA0/OMS1)**2)
```

```
  VEC(2*I)=(P2*A-P1*P2*B+P1*B+P1**2*A)/(P1**2+P2**2)
```

```
  VEC(2*I+1)=-(P2*B+P1*P2*A-P1*A+P1**2*B)/(P1**2+P2**2)
```

```
65 CONTINUE
```

```
A=VEC(N)
```

```
P1=2*KSII*N/2*OMEGA0/OMS1
```

```
P2=(1-(N/2*OMEGA0/OMS1)**2)
```

```
VEC(N)=(P2*A+P1**2*A)/(P1**2+P2**2)
```

```
RETURN
```

```
END
```

H2MULT

SUBROUTINE H2MULT(VEC,N,OMEGA0,OMS2,KSI2)

C This routine multiplies the Fourier transform of the first accelerogram generated

C by the filter function H2 in order to attenuate the high frequency content

C Note : the vector VEC must contain the result of the FFT (of the accelerogram)

C computed with the subroutine RFFTF. N should be a power of 2

REAL OMEGA0,OMS2,KSI2,A,B,P1,P2

INTEGER N

REAL VEC(N)

DO 65,I=1,N/2-1

A=VEC(2*I)

B=-VEC(2*I+1)

P1=(I*OMEGA0/OMS2)**2

P2=1-P1

P3=2*KSI2*I*OMEGA0/OMS2

VEC(2*I)=(P1*P2*A+P1*P3*B)/(P2**2+P3**2)

VEC(2*I+1)=-(P1*P2*B-P1*P3*A)/(P2**2+P3**2)

65 CONTINUE

A=VEC(N)

P1=(N/2*OMEGA0/OMS2)**2

P2=1-P1

P3=N/2*KSI2*I*OMEGA0/OMS2

VEC(N)=P1*P2*A/(P2**2+P3**2)

RETURN

END

RESPEC

```

SUBROUTINE RESPEC(ACC,DT,NSTEP,FREQ,NFREQ,AMORT,SPEC)
C DATA:
C "ACC" is vector of "NSTEP" elements representing the values of the accelerogram.
C These values are spaced at equal intervals in time ("DT"). The computation of the
C response spectrum is achieved for a discrete number "NFREQ" of frequencies.
These
C frequencies are given in the vector "FREQ"
C METHOD :
C The subroutine solves NFREQ times the equation of motion of a single degree of
C freedom system. For each of these, a new frequency is considered and the maximum
C (absolute) value of the acceleration is stocked. The resolution is made for a
C percentage of the critical damping equal to "KSI"
C The resolution of the equation of motion is achieved considering the Newmark
method
C The values of the method's coefficients are : alpha = 0.25 - delta = 0.5 (constant
C acceleration steps)
      REAL ACC(8192),FREQ(800),SPEC(800),X(2,3)
      REAL DT,AMORT
      INTEGER NSTEP,NFREQ
      PARAMETER (PI=3.14159265359D0)
C
      DO 20,I=1,NFREQ
          X(1,1)=0
          X(1,2)=0
          X(1,3)=0
          SPEC(I)=0
          DO 10,J=2,NSTEP

DENOM=4/(DT**2)+8*PI*FREQ(I)*AMORT/DT+4*PI**2*(FREQ(I))**2
          SUP=ACC(J)+X(1,3)+4/DT*X(1,2)+4/(DT**2)*X(1,1)
          +4*PI*FREQ(I)*AMORT*(X(1,2)+2/DT*X(1,1))
          X(2,1)=SUP/DENOM
          X(2,2)=2/DT*(X(2,1)-X(1,1))-X(1,2)

```

```
X(2,3)=2/DT*(X(2,2)-X(1,2))-X(1,3)
  X(1,1)=X(2,1)
  X(1,2)=X(2,2)
  X(1,3)=X(2,3)
  IF ((2*PI*FREQ(I))**2*X(1,1).GT.SPEC(I)) THEN
    SPEC(I)=(2*PI*FREQ(I))**2*X(1,1)
  ELSEIF (-(2*PI*FREQ(I))**2*X(1,1).GT.SPEC(I)) THEN
    SPEC(I)=-(2*PI*FREQ(I))**2*X(1,1)
  END IF
10  CONTINUE
20  CONTINUE
    RETURN
    END
```

FRECOR

```
SUBROUTINE
FRECOR(TARGETSP,SPEC,FREQ,NFREQ,IPWR,OMEGA0,CORR,
      .      MINZONE,MAXZONE)
```

```
  C SUBROUTINE
  FACTCOR(TARGETSP,SPEC,FREQ,NFREQ,IPWR,OMEGA0,CORR)
```

```
  C This subroutine returns in the vector CORR the 2**IPW values of the coefficients
  C needed to correct an accelerogram's FFT. The values are known for the 20*NBR
  C frequencies of FREQ (these frequencies are the ones for which the target spectrum
  C has been defined and for which the actual spectrum has been computed). The
routine
```

```
  C proceeds to a linear interpolation between these values to get a correction factor
  C for all the frequencies of the Fourier transform (2**IPW values).
```

```
  C Note : the algorithm doesn't take account of the target spectrum's shape. The
NFREQ
```

```
  C frequencies must just be stocked in the vector FREQ.
```

```
    REAL FREQ(800),SPEC(800),TARGETSP(800)
      REAL OMEGA0,F0,CORR(8192),CORR1(800)
      INTEGER NFREQ,IPWR,I,ILAST,MINZONE(60),MAXZONE(60)
      PARAMETER (PI=3.14159265359D0)
```

```
  C 1.-Creation of the vector of the reference correction factors
```

```
    DO 10,I=1,NFREQ
      CORR1(I)=TARGETSP(I)/SPEC(I)
```

```
10  CONTINUE
```

```
  C 2.-Localisation of the first needed frequency (corresponding to omega0)
```

```
    F0=OMEGA0/(2*PI)
    ILAST=1
    DO 30,J=1,2**(IPWR-1)-1
      DO 20,I=ILAST,NFREQ-1
        IF (J*F0.LE.FREQ(I+1)) THEN
          GOTO 21
        ENDIF
```

```
20  CONTINUE
```

```
21  ILAST=I
      IF (J*F0.LE.FREQ(NFREQ)) THEN
```

```
      CORR(2*J)=((FREQ(I+1)-J*F0)*CORR1(I)+(J*F0-  
FREQ(I))*CORR1(I+1))  
      .      /(FREQ(I+1)-FREQ(I))  
      CORR(2*J+1)=CORR(2*J)  
      ELSE  
      CORR(2*J)=1  
      CORR(2*J+1)=1  
      END IF  
30 CONTINUE  
RETURN  
END
```

Annexe 3

Listings des routines implémentées
dans FINELG

NMSKYF..... 32
FORAC..... 39
CONSTA..... 42
RESDSH..... 48
FHEDSH..... 57
JCBDSH..... 61

Seules les routines principales sont fournies. Quelques autres routines ont été modifiées de manière à transmettre jusqu'à DYNDAT les données à stocker dans le vecteur A. NMSKYF et FORAC sont des routines qui ont été modifiées ; quant aux quatre autres, elles ont été ajoutées.

NMSKYF

```

SUBROUTINE NMSKYF(XT,PT,X0,DELTAT,AM,AK,AKF,AA,AAA,AAKF
C
C Historique de la routine (creation,modification,correction)
C +-----+
C !Programmeur! Commentaires           ! Date !Version!
C +-----!-----!-----!-----+
C ! NOSBUSCH ! PRISE EN COMPTE ACCELEROGRAMME (FACG) !20-12-00!
84 !
C +-----+
C
C      ,NADDR,NTOT,IDB,LIC,XTMP,IDFUNC,ACC,IDOF
C      ,AAKFNL,AAKFNN,IDSHNW,IPOSNL,DATADSH,IDSHDDL
C      ,ISDOFN,AJACOB,B,XT12,RES12,VAX12,TRAVAIL)
C
C SOLUTION OF THE DYNAMIC RESPONSE BY NEWMARK METHOD
C
C IDFUNC = 0 XT ==> XT, DXT, DDXT (NOT SOLVE THE
EQUATION, ONLY XT IS
C          MODIFIED)
C      1 PT ==> XT ( BUT XT IS NOT CONCERNED, THE RESULT IS
SAVE IN
C          PT VECTOR)
C      2 PT ==> XT, DXT, DDXT
C
C 1. K, M ARE SAVED IN SKYLINE FORM OF FINELG
C 2. ONE STEP SOLUTION STRATIGY
C 3. IDB = -1 THE FIRST ENTRANCE, KF IS NOT AVAILABLE BEFORE
ENTRANCE
C      OTHERS KF IS AVAABLE AND FACTORIZED
C 4. KF AND K CAN BE THE SAME ADDRESS
C
C BUT IF C IS NOT ZERO AND EXPRESSED BY M AND K, K SHOULD NOT
BE

```

```

C   DELETED BY KF.
C
C   K,M,C ARE THE COEFFICIENT MATRICES
C   ITMASS,ITDAMP ARE FOR THE DEFINITION OF M AND C.
C   HERE ITDAMP = 0 : C = 0
C       4 : C = ALPHAC * K + BETAC * M + dahspot
C   AND ITMASS = 2 : SKYLINE FORM
C       3 : DIAGONAL
C   LIC  LINEAR CONSTRAIN(.TRUE. OR .FALSE.)
C   XTMP  TEMPORARY VECTOR WITH NDOF C 5.  XT, X0 CAN BE THE
SAME ADDRESS.
C 6.  NADDR IS THE ADDRESS CODE AND IDENTICAL TO MAXA
C 7.  THE PROGRAM IS DESIGNED TO BE SUITABLE FOR THE CONSTANT
STEP, VARIABLE
C   STEP AND LINEAR, NON-LINEAR ANALYSIS. THE PROGRAM IS WELL
EXAMINED TO
C   ECONOMIZE THE USEAGE OF MEMORY.
C
C 8.  IERROR = 0.  NO ERRORS
C       1514  ERROR DURING FACTORIZATION
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C   PARAMETER (ZERO=0.0,ONE = 1.0, TWO=2.0 )
COMMON /SBVDAT/ ID2DYN,IF2DYN,NTOTAL,NDOF, NLIB,
.   NTNODE,NNODE, NTNDOF,NTADDR,NDOF1, NTELEM,NELEM,
.   NTCORD,NCORD, NTMECA,NTIMAT,NMECA, NCMECA,
.   NTGEOM,NTISEC,NCISEC,NGEOM, NCGEOM,
.   NTSOL, NSOL, NCSOL, NTISOL,NCISOL,NTCC, NCC,
.   NTSTFN,NSTFNL,NTFOR,
.   NTMASS,IDMASS,NTMAXA,NTLIC, NTIELD,
.   NTNDEC,NTRDEC,NTVQUE,NVEH, NTTRPA,NTCBL,
.   NTXMAX,NTENV, NTALL, NTEVO, NTNODY,NTTRAV,
.   NTAAKFNL,NTAAKFNN,NTAA,NTAAA,NTAAKF,
.   NTIDSH,NTISDOF,NTDATAD,NTIPOS,NTIDDL,NTAJCB,
.   NTBB,NTXT,NTRES,NTVAX

```

```

DIMENSION X0(NDOF,3),XT(NDOF,3),AM(*)
DIMENSION AK(*),AKF(*),PT(NDOF),NADDR(NDOF),XTMP(NDOF)
DIMENSION AAKFNL(MAXDSH,*),AAKFNN(MAXDSH,*)
DIMENSION AA(MAXDSH,*),AAA(MAXDSH,*),AAKF(NDOF,*)
DIMENSION DATADSH(MAXDSH+1,6),IDSHDDL(MAXDSH,6)
DIMENSION IDSHNW(NDOF),IPOSNL(MAXDSH,6),ISDOFN(NDOF)
DIMENSION XTMP3(3),AJACOB(MAXDSH,MAXDSH),B(MAXDSH)
DIMENSION
XT12(MAXDSH,2,3),RES12(MAXDSH,3),VAX12(MAXDSH/6,3)
DIMENSION TRAVAIL(*)
C   COMMON /NEWMRK/ALPHA,DELTA
COMMON /DYNAR/
EPSLON,DELTT,ALPHAC,BETAC,ETACOE,ALPHA,DELTA,
.       RVOIE
COMMON /FONLY/ VOLUME,INEX,
.
MAXMEC,MAXGEO,MAXCOR,MAXELM,MAXSOL,MAXCC,MAXAP,
.
MAXOB,MAXRES,MAXROS,MAXDEP,MAXREA,MANORA,MAXPAS,
.       MAXB,MAXM,MAXIN,MAXLIB,
.       NIP,LISDDL,LIBA,NOMAX,LONGA,MEMORY,LONUL,LBMAX,
.       NTOTL,NIMEC,NIGEO,NICOR,NMEL,NISOL,NICC,NIRES,
.       NRC,KALEN,
.       LTYP,LIA,IDON(40),IDEN,NOROT,LKARA,MAXDSH
COMMON /STABIL/ SHIFT,PSV,ISTAB,NVAP,NTYP,KSAS,KT1S,KT1P,
.       KT2,IFSS,ISHIFT,IDYNA,IRESI,ISPECT,ITMASS,ITDAMP
SAVE A1,A2,A3,A4,A5,A6,B1,B3,B4
DATA ONE/1.0D0/,EPS/1.0D-5/
C
IF(IDB.EQ.-1) THEN
C   DELTAT2 = DELTAT*DELTAT
TMP = ALPHA*DELTAT
A1 = ONE/( TMP*DELTAT)
A2 = DELTA / TMP
A3 = ONE/TMP

```

```

A4 = ONE/(ALPHA+ALPHA)-ONE
A5 = DELTA/ALPHA - ONE
A6 = (DELTA/(ALPHA+ALPHA)-ONE)*DELTAT
IF (ITDAMP.EQ.4) THEN
  A7 = ONE+ ALPHAC*A2
  A8 = A1 + BETAC*A2
  B1 = A1 + BETAC*A2
  B3 = A3 + BETAC*A5
  B4 = A4 + BETAC*A6
C   B2 =  ALPHAC*A2
C   B5 =  ALPHAC*A5
C   B6 =  ALPHAC*A6
ELSE
  A7 = ONE
  A8 = A1
  B1 = A1
C   B2 = ZERO
  B3 = A3
  B4 = A4
C   B5 = ZERO
C   B6 = ZERO
ENDIF
IF (IDFUNC.GT.0) THEN
  K = ABS(NADDR(NDOF+1))-1
  DO 10 I = 1, K
    AKF(I) = A7*AK(I)
10  CONTINUE
  IF (ITMASS.EQ.2) THEN
    DO 20 I = 1, K
      AKF(I) = AKF(I)+A8*AM(I)
20  CONTINUE
  ELSEIF (ITMASS.EQ.3) THEN
    DO 30 I = 1, NDOF
      K = ABS(NADDR(I))
      AKF(K) = AKF(K) + A8*AM(K)

```

```

30     CONTINUE
      ELSE
        CALL MISTA(1548)
C     -----
      ENDIF

C
C     AMORTISSEMENT LOCAL
C     AKF= AKF + A2*AMOR
      CALL FORAC (AKF,NADDR,NDOF,A2,NDSHNL,DATADSH,IDSHDDL)
C     -----
      IF (NDSHNL.NE.0) THEN
        CALL CONSTA (AKF,NADDR,NTOT,AA,AAA,AAKFNL,AAKFNN,
C     -----
          IDSHNW,IPOSNL,IDSHDDL,NDSHNL,AAKF,ISDOFN)
        DATADSH(NTOT+1,1)=0
      ELSE

C
        CALL LDL2K(AKF,NADDR,NDOF,LIC)
C     -----
      END IF
C     IF(IERROR.NE.0) GOTO 500
      IF(INEX.NE.0) GOTO 500
      ENDIF
    ENDIF

C
      IF(IDFUNC.GT.0) THEN
        DO 50 I = 1, NDOF
          XTMP(I) = B1*X0(I,1)+B3*X0(I,2)+B4*X0(I,3)
50     CONTINUE
C
C ACCELEROGRAMME SI IDOF>0 (SINON IDOF PAS UTILISE)
      IF(IDOF.GT.0) THEN
        CALL FACG(XTMP,ACC,IDOF)
C     -----
      ENDIF

```

```

C
  FACTOR = ONE
  CALL Y2A2KX (PT,AM,NADDR,NDOF,XTMP,FACTOR)
C  -----
  IF(ITDAMP.EQ.4) THEN
    DO 60 I = 1, NDOF
      XTMP(I) = A2*X0(I,1)+A5*X0(I,2)+A6*X0(I,3)
60   CONTINUE
    IF (ALPHAC.GT.EPS) THEN
      FACTOR = ALPHAC
      CALL Y2A2KX (PT,AK,NADDR,NDOF,XTMP,FACTOR)
C  -----
    ENDIF
C
C  AMORTISSEMENT LOCAL
C  PT=PT+Cdashpot*XTMP
  CALL DSHXXT(PT,XTMP,NDOF)
C  -----
  ENDIF
  M  = 1
  IMP7 = 0
  IF (NDSHNL.NE.0) THEN
    NPT=NTTRAV+3*NDOF
    IF(NPT.GT.LONGA) THEN
      CALL MISTA(1551)
C  -----
      WRITE (6,61) NPT
61   FORMAT (' LONGA MINIMUM=',I10)
      CALL SPSTOP(' ')
C  -----
    ENDIF
    CALL RESDSH (AA,AAA,NTOT,PT,X0,DELTAT,
C  -----
    .   AAKFNL,IDSHNW,IPOSNL,DATADSH,NDSHNL,AAKF,AJACOB,
    .   B,XT12,RES12,VAX12,TRAVAIL)

```

```

ELSE
  CALL AXPLDL(AKF,NADDR,NDOF,LIC,PT,M,IMP7)
C   -----
  END IF
ENDIF
C
IF(IDFUNC.EQ.2) THEN
  DO 100 I = 1, NDOF
    TMP   = PT(I) - X0(I,1)
    XTMP3(2) = A2*TMP-A5*X0(I,2) -A6*X0(I,3)
    XTMP3(3) = A1*TMP-A3*X0(I,2) -A4*X0(I,3)
    XT(I,1) = PT(I)
    XT(I,2) = XTMP3(2)
    XT(I,3) = XTMP3(3)
100  CONTINUE
  ENDIF
  IF(IDFUNC.EQ.0) THEN
    DO 200 I = 1, NDOF
      TMP   = XT(I,1) - X0(I,1)
      XT(I,2) = A2*TMP-A5*X0(I,2) -A6*X0(I,3)
200    XT(I,3) = A1*TMP-A3*X0(I,2) -A4*X0(I,3)
    ENDIF
  C
500  RETURN
  END

```


FORAC

```

SUBROUTINE
FORAC(AKF,MAXA,NDOF,A2,NDSHNL,DATADSH,IDSHDDL)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  LOGICAL IDEN
  COMMON LIB,NOMEL,N
  COMMON /FONLY/ VOLUME,INEX,
.
MAXMEC,MAXGEO,MAXCOR,MAXELM,MAXSOL,MAXCC,MAXAP,
.
MAXOB,MAXRES,MAXROS,MAXDEP,MAXREA,MANORA,MAXPAS,
.
  MAXB,MAXM,MAXIN,MAXLIB,
.
  NIP,LISDDL,LIBA,NOMAX,LONGA,MEMORY,LONUL,LBMAX,
.
  NTOTL,NIMEC,NIGEO,NICOR,NMEL,NISOL,NICC,NIRES,
.
  NRC,KALEN,
.
  LTYP,LIA,IDON(40),IDEN,NOROT,LKARA,MAXDSH
PARAMETER (LRIG=147,NBMAX=3)
DIMENSION AKF(1),MAXA(NDOF),RIGAC(LRIG),LOC(2,NBMAX)
DIMENSION DATADSH(MAXDSH+1,6),IDSHDDL(MAXDSH,6)
C
C  FORMATION DE K+A2*C
C    93 = UNITE DES MATRICES D'AMORTISSEMENT
C
  LILI= LIB*LIB
  INIT= -LILI-LIB
  NDSHNL=0
C
  REWIND 93
10  READ(93,END=999,ERR=999)IDEN,MAT2,NBLOC,((LOC(I,K),I=1,2),
.  K=1,NBLOC)
  NINI= NBLOC*LILI
  IF(NINI.GT.LRIG.OR.NBLOC.GT.NBMAX) CALL MISTA(9999)
C
  IF (MAT2.EQ.0) THEN

```

C

IF (IDEN) READ (93) (RIGAC(I),I=1,NINI)

MAK= INIT

DO 290 K=1,NBLOC

MAK= MAK+LILI

LLL=LOC(1,K)-1

LLC=LOC(2,K)-1

JJ=1

DO 280 I=1,LIB

MAI= MAK+I

IG=LLL+I

IF(MAXA(IG).LT.0) GO TO 280

IF(LLL.EQ.LLC) JJ = I

DO 270 J=JJ,LIB

MAJ= MAI+J*LIB

JG=LLC+J

JK=MAXA(JG)

IF(JK.LT.0) GO TO 270

KK=JK+JG-IG

C IG,JG : NO DES DDL A ASSEMBLER(GLOB.)

C KK : ADRESSE DANS MATRICE ASSEMBLEE

C MAJ : " " " ELEMENT

AKF(KK)=AKF(KK)+RIGAC(MAJ)*A2

270 CONTINUE

280 CONTINUE

290 CONTINUE

300 GOTO 10

C

ELSE

C

NDSHNL=NDSHNL+1

READ (93) CX,CY,CZ,LIBREF,AMORT,ALPHA,VLIMIT

DATADSH(NDSHNL,1)=CX

DATADSH(NDSHNL,2)=CY

DATADSH(NDSHNL,3)=CZ

```
      DATADSH(NDSHNL,4)=AMORT
      DATADSH(NDSHNL,5)=ALPHA
      DATADSH(NDSHNL,6)=VLIMIT
C
      DO 320, I=1,6
          IDSHDDL(NDSHNL,I)=0
320  CONTINUE
      IF ((DABS(CZ).GT.1E-8).AND.LIBREF.EQ.2)
.   WRITE (6,*) 'ERREUR...DASH POT HORS PLAN'
      IF (DABS(CX).GT.1E-8) IDSHDDL(NDSHNL,1)=LOC(1,1)
      IF (DABS(CY).GT.1E-8) IDSHDDL(NDSHNL,2)=LOC(1,1)+1
      IF (DABS(CZ).GT.1E-8) IDSHDDL(NDSHNL,3)=LOC(1,1)+2
      IF (DABS(CX).GT.1E-8) IDSHDDL(NDSHNL,4)=LOC(2,3)
      IF (DABS(CY).GT.1E-8) IDSHDDL(NDSHNL,5)=LOC(2,3)+1
      IF (DABS(CZ).GT.1E-8) IDSHDDL(NDSHNL,6)=LOC(2,3)+2
C
      GOTO 10
C
      END IF
C
999  CONTINUE
      RETURN
      END
```

CONSTA

SUBROUTINE CONSTA (AKF,NADDR,NTOT,AA,AAA,AAKFNL,AAKFNN,
 IDSHNW,IPOSNL,IDSHDDL,NDSHNL,AAKF,ISDOFN)

C La subroutine CONSTA est une sous routine qui realise une CONDensation

C STATique des DDL lineaires (calcul avec non linearites concentrees)

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

C*****

C Arguments : *

C AKF : matrice a *

C NADDR : AKF est stockee au format skyline. NADDR sont les adresses *

C des termes diagonaux dans le vecteur AKF *

C NTOT : nombre de degres de liberte non lineaires *

C AA/AAA: matrices reduites *

C AAKFNL \ *

C AAKFNN >: sous-matrices de AAKF (partie non lin et croisee) *

C IDSHNW : vecteur qui donne le nouvel ordre des equations (on place *

C les equations non lineaires en tete de liste *

C IPOSNL : indique le nouveau numero d'equation pour le ddl J du dashpot

C I (Cette valeur est plus petite ou egale a NTOT!) - IPOSNL *

C est nul si ce ddl est perpendiculaire a l'axe du dashpot ou *

C si ce ddl est bloque *

C IDSHDDL: parmi les NDOF ddl, IDSHDDL(I,J) donne la ligne relative au *

C ddl J du dashpot I. Les DDL des dashpots sont les DDL de *

C translation et il y en a trois par extremite. ils sont *

C definis dans les directions des axes globaux *

C ISDOFN : vecteur de booleens : 1 si le ddl est nonlineaire, 0 sinon. *

C La somme des elements de ISDOFN est NTOT, le nombre *

C d'equations non lineaires *

C NDSHNL : Nombre de dash-pot non lineaires *

C AAKF : Espace memoire reserve pour l'extension de la matrice AKF *

C En sortie, contient l'inverse de la partie lineaire *

C ISDOFN : =1 si le DDL est non lineaire / =0 si le DDL est lineaire *

```

C*****
*****
      DIMENSION AKF(*),NADDR(*)
      DIMENSION AAKF(NDOF,*)
      DIMENSION AAKFNL(MAXDSH,*),AAKFNN(MAXDSH,*)
      DIMENSION AA(MAXDSH,*),AAA(MAXDSH,*)
      DIMENSION IPOSNL(MAXDSH,6)
      DIMENSION IDSHDDL(MAXDSH,6),ISDOFN(NDOF),IDSHNW(NDOF)
      DATA DM10/1.D-10/
      COMMON /FONLY/ VOLUME,INEX,
.
MAXMEC,MAXGEO,MAXCOR,MAXELM,MAXSOL,MAXCC,MAXAP,
.
MAXOB,MAXRES,MAXROS,MAXDEP,MAXREA,MANORA,MAXPAS,
.
      MAXB,MAXM,MAXIN,MAXLIB,
.
      NIP,LISDDL,LIBA,NOMAX,LONGA,MEMORY,LONUL,LBMAX,
.
      NTOTL,NIMEC,NIGEO,NICOR,NMEL,NISOL,NICC,NIRES,
.
      NRC,KALEN,
.
      LTYP,LIA,IDON(40),IDEN,NOROT,LKARA,MAXDSH
      COMMON /SBVDAT/ ID2DYN,IF2DYN,NTOTAL,NDOF, NLIB,
.
      NTNODE,NNODE, NTNDOF,NTADDR,NDOF1, NTELEM,NELEM,
.
      NTCORD,NCORD, NTMECA,NTIMAT,NMECA, NCMECA,
.
      NTGEOM,NTISEC,NCISEC,NGEOM, NCGEOM,
.
      NTSOL, NSOL, NCSOL, NTISOL,NCISOL,NTCC, NCC,
.
      NTSTFN,NSTFNL,NTFOR,
.
      NTMASS,IDMASS,NTMAXA,NTLIC, NTIELD,
.
      NTNDEC,NTRDEC,NTVQUE,NVEH, NTTRPA,NTCBL,
.
      NTXMAX,NTENV,NTALL,NTEVO,NTNODY,NTTRAV,
.
      NTAAKFNL,NTAAKFNN,NTAA,NTAAA
C
C 0.- Elimination des DDL bloques hors de la liste des ddl non lineaires
      DO 20, I=1,NDSHNL
      DO 10, J=1,6
      IF (IDSHDDL(I,J).NE.0) THEN
      IF (NADDR(IDSHDDL(I,J)).LT.0) IDSHDDL(I,J)=0

```

```

        END IF
10    CONTINUE
20    CONTINUE
C 1.- Reconstitution de la matrice AKF globale
      DO 22 I=1,NDOF
        DO 21 J=1,NDOF
          AAKF(I,J)=0
21    CONTINUE
22    CONTINUE
      DO 40 I=1,NDOF
        K=0
        DO 30 J=I,1,-1
          IF (K.LT.(ABS(NADDR(I+1))-ABS(NADDR(I)))) THEN
            AAKF(I,J)=AKF(ABS(NADDR(I))+K)
            AAKF(J,I)=AKF(ABS(NADDR(I))+K)
            K=K+1
          ELSE
            GOTO 40
          END IF
30    CONTINUE
40    CONTINUE
C 2.- Creation de ISDOFN,IPOSNL et IDSHNW
      NTOT=0
      DO 50 I=1,NDOF
        ISDOFN(I)=0
50    CONTINUE
      DO 52 I=1,NDSHNL
        DO 51, J=1,6
          IPOSNL(I,J)=0
51    CONTINUE
52    CONTINUE
      DO 90 I=1,NDSHNL
        DO 80 J=1,6
          IF (IDSHDDL(I,J).NE.0) THEN
            ISDOFN(IDSHDDL(I,J))=ISDOFN(IDSHDDL(I,J))+1

```

```

      IF (ISDOFN(IDSHDDL(I,J)).GT.1) THEN
        ISDOFN(IDSHDDL(I,J))=1
        DO 70, K=1,I
          DO 60, L=1,6
            IF (IDSHDDL(K,L).EQ.IDSHDDL(I,J)) THEN
              IPOSNL(I,J)=IPOSNL(K,L)
              GOTO 70
            END IF
60      CONTINUE
70      CONTINUE
      ELSE
        NTOT = NTOT + 1
        IDSHNW(NTOT) = IDSHDDL(I,J)
        IPOSNL(I,J) = NTOT
      END IF
    END IF
80  CONTINUE
90  CONTINUE
    K=NTOT
    DO 100 I=1,NDOF
      IF (ISDOFN(I).EQ.0) THEN
        K=K+1
        IDSHNW(K)=I
      END IF
100 CONTINUE
C 3.- Formation des matrices ANN et ANL ( et ALL -> AAKF )
    DO 111 I=1,NTOT
      DO 110 J=1,NTOT
        AAKFNN(I,J)=AAKF(IDSHNW(I),IDSHNW(J))
110  CONTINUE
111 CONTINUE
    DO 121 I=1,NTOT
      DO 120 J=1,NDOF-NTOT
        AAKFNL(I,J)=AAKF(IDSHNW(I),IDSHNW(J+NTOT))
120 CONTINUE

```

```

121 CONTINUE
    DO 131 I=1,NDOF-NTOT
        DO 130 J=1,NDOF-NTOT
            AAKF(I,J)=AAKF(IDSHNW(I+NTOT),IDSHNW(J+NTOT))
130 CONTINUE
131 CONTINUE
C Les NTOT dernieres lignes et colonnes de AAKF sont desormais inutiles
DO 141 I=NDOF-NTOT+1,NDOF
    DO 140 J=1,I
        AAKF(I,J)=0
        AAKF(J,I)=0
140 CONTINUE
141 CONTINUE
C INVERSION DE LA PARTIE LINEAIRE D'AKF
CALL POSINV(AAKF,NDOF-NTOT,NDOF)
C -----
C Creation des matrices AA et AAA necessaires pour RESDSH
DO 200, I=1,NTOT
    DO 190, J=1,NDOF-NTOT
        S=0
        DO 180,K=1,NDOF-NTOT
            S=S+AAKFNL(I,K)*AAKF(K,J)
180 CONTINUE
        AA(I,J)=S
190 CONTINUE
200 CONTINUE
    DO 230, I=1,NTOT
        DO 220, J=1,NTOT
            S=0
            DO 210,K=1,NDOF-NTOT
                S=S+AA(I,K)*AAKFNL(J,K)
210 CONTINUE
            AAA(I,J)=S
220 CONTINUE
230 CONTINUE

```



```
DO 250, I=1,NTOT
  DO 240, J=1,NTOT
    AAA(I,J)=AAKFNN(I,J)-AAA(I,J)
240  CONTINUE
250  CONTINUE
    RETURN
    END
```

RESDSH

SUBROUTINE RESDSH(AA,AAA,NTOT,PT,X0,DELTAT,AAKFNL,
 .
 IDSHNW,IPOSNL,DATADSH,NDSHNL,AAKF,AJACOB,B,XT12,RES12,VAX12,
 . XX0)

C RESDSH est la routine qui permet la resolution du systeme d'equations

C non lineaires condense par CONSTA.

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

C*****

C Arguments : *

C AA : matrice reduite par la condensation *

C AAA : id.- coefficients de la partie qui reste lineaire *

C NDOF : nombre de DDL de la structure (transmis en common - SBVDAT) *

C NTOT : nombre de DDL non lineaires *

C PT : second membre de l'equation de Newmark *

C A la sortie, CONTIENT LA SOLUTION DU SYSTEME *

C X0 : deplacements, vit. et accel. au debut du pas de temps *

C DELTAT : pas de temps de calcul *

C AAKFNL : partie croisee de la matrice AKF au format global *

C IDSHNW : renumerotation des DDL pour avoir les DDL non-lin en tete *

C IPOSNL : numero de l'equ.non lin.correspondant au DDL J du dash-pot I *

C DATADSH: donnees relatives aux dash-pots.Le premier element de la ligne*

C NTOT + 1 contient le nombre total d'iterations *

C NDSHNL : nombre de dash-pots non lineaires *

C AAKF : inverse de la partie lineaire de la matrice AKF au format *

C complet.AAKF est dimensionne en NDOF,NDOF.Seuls les NDOF-NTOT,*

C NDOF-NTOT premiers elements sont necessaires *

C AJACOB : matrice jacobienne *

C B : second membre condense *

C XT12 : matrice contenant les iteres successifs de la resolution *

C RES12 : vecteurs de residus (dimensions:MAXDSH,3 -> jusqu'a trois *

C vecteurs residus stockes en meme temps) *

C VAX12 : vecteurs contenant les vitesses axiales des amortisseurs *

```

C XX0 : matrice des conditions initiales rearrangees selon IDSHNW *
C
*****
C Routines appelees : *
C FHEDSH : Calcul des residus (" forces hors equilibre ") *
C JCBDSH : Calcul du jacobien *
C
*****
C XT12 (MAXDSH,2,3) = (I,J,K) *
C ----- *
C I : repere un DDL non lineaire *
C J : 1 = déplacements / 2 = vitesses *
C K : trois vecteurs solutions peuvent etre stockes en meme temps *
C$$$ Newton - Raphson *
C K = 1 : Itere en cours *
C K = 2 : Premiere approximation de l'itere suivant (l'itere suivant *
C est obtenu a partir de K=1 et K=2 par extrapolation d'Aitken) *
C K = 3 : accroissement calcule *
C$$$ Regula falsi *
C K = 1 : Itere en cours *
C K = 2 : Itere suivant *
C K = 3 : Vecteur de fuite *
C *
C Les valeurs dans RES12 et VAX12 sont associees aux memes K *
C*****
*****

DIMENSION PT(NDOF),B(MAXDSH)
DIMENSION X0(NDOF,3),DATADSH(MAXDSH+1,6)
DIMENSION AJACOB(MAXDSH,MAXDSH),AAKF(NDOF,*)
DIMENSION IDSHNW(NDOF),IPOSNL(MAXDSH,6),AA(MAXDSH,*)
DIMENSION AAKFNL(MAXDSH,*),XX0(NDOF,3),AAA(MAXDSH,*)
DIMENSION
XT12(MAXDSH,2,3),RES12(MAXDSH,3),VAX12(MAXDSH/6,3)
LOGICAL XT2MOD
PARAMETER NITEMAX=10,NITETOT=1500,PRECI=1.0E-4

```

```

COMMON /DYNAR/
EPSLON,DELTT,ALPHAC,BETAC,ETACOE,ALPHA,DELTA,
.
RVOIE
COMMON /FONLY/ VOLUME,INEX,
.
MAXMEC,MAXGEO,MAXCOR,MAXELM,MAXSOL,MAXCC,MAXAP,
.
MAXOB,MAXRES,MAXROS,MAXDEP,MAXREA,MANORA,MAXPAS,
.
MAXB,MAXM,MAXIN,MAXLIB,
.
NIP,LISDDL,LIBA,NOMAX,LONGA,MEMORY,LONUL,LBMAX,
.
NTOTL,NIMEC,NIGEO,NICOR,NMEL,NISOL,NICC,NIRES,
.
NRC,KALEN,
.
LTYP,LIA,IDON(40),IDEN,NOROT,LKARA,MAXDSH
COMMON /SBVDAT/ ID2DYN,IF2DYN,NTOTAL,NDOF, NLIB,
.
NTNODE,NNODE, NTNDOF,NTADDR,NDOF1, NTELEM,NELEM,
.
NTCORD,NCORD, NTMECA,NTIMAT,NMECA, NCMECA,
.
NTGEOM,NTISEC,NCISEC,NGEOM, NCGEOM,
.
NTSOL, NSOL, NCSOL, NTISOL,NCISOL,NTCC, NCC,
.
NTSTFN,NSTFNL,NTFOR,
.
NTMASS,IDMASS,NTMAXA,NTLIC, NTIELD,
.
NTNDEC,NTRDEC,NTVQUE,NVEH, NTTRPA,NTCBL,
.
NTXMAX,NTENV,NTALL,NTEVO,NTNODY,NTTRAV,
.
NTAAKFNL,NTAAKFNN,NTAA,NTAAA

```

C Rearrangement du vecteur X0 -> XX0

```

DO 20 I=1,NDOF
DO 10 J=1,3
XX0(I,J)=X0(IDSHNW(I),J)

```

10 CONTINUE

20 CONTINUE

C Première estimation de la racine

```

DO 30 I=1,NTOT
XT12(I,1,1)=XX0(I,1)
XT12(I,2,1)=(1-DELTA/ALPHA)*XX0(I,2)
.
+ DELTAT*(1-DELTA/2/ALPHA)*XX0(I,3)

```

30 CONTINUE

```

C   Calcul du second membre condense : B et de sa norme BNORM
DO 80 I=1,NTOT
    S=0
    DO 70 J=1,NDOF-NTOT
        S=S+AA(I,J)*PT(IDSHNW(J+NTOT))
70   CONTINUE
    B(I)=S
80   CONTINUE
DO 90 I=1,NTOT
    B(I)=PT(IDSHNW(I))-B(I)
90   CONTINUE
    BNORM=0
DO 100 I=1,NTOT
    BNORM=BNORM+B(I)**2
100  CONTINUE
    BNORM = DSQRT(BNORM)
    ITERAT=0
C   DEBUT DES ITERATIONS A L'INTERIEUR DU PAS DE TEMPS
C   #####
CALL FHEDSH(XT12(1,1,1),B,NTOT,NDSHNL,AAA,IPOSNL
C   -----
.       ,DATADSH,VAX12(1,1),RES12(1,1))
    RNORM=0
DO 110 I=1,NTOT
    RNORM=RNORM+RES12(I,1)**2
110  CONTINUE
    RNORM = DSQRT(RNORM)
C
120  CONTINUE
C
    ITERAT=ITERAT+1
    CALL JCBDSH(XT12(1,1,1),NTOT,NDSHNL,AAA,IPOSNL
C   -----
.       ,DATADSH,VAX12(1,1),DELTAT,AJACOB)
C   Calcul itere suivant : resolution syst. AJACOB.DELTAX=RESIDU

```

```

C  DELTAX EST STOCKE DANS XT12(.,1,3)
C  Si le nombre d'equations NTOT est 1, le systeme est trivial !
  IF (NTOT.EQ.1) THEN
    XT12(1,1,3)=RES12(1,1)/AJACOB(1,1)
  ELSE
C   Triangularisation
    DO 150 I=2,NTOT
      DO 140, J=I,NTOT
        IF (AJACOB(J,I-1).EQ.0) GO TO 140
        FACTEUR = AJACOB(I-1,I-1)/AJACOB(J,I-1)
        DO 130 K=I-1,NTOT
          AJACOB(J,K)=AJACOB(I-1,K)-FACTEUR*AJACOB(J,K)
130    CONTINUE
        RES12(J,1)=RES12(I-1,1)-FACTEUR*RES12(J,1)
140    CONTINUE
150    CONTINUE
      XT12(NTOT,1,3)=RES12(NTOT,1)/AJACOB(NTOT,NTOT)
C   Backsubstitution
      DO 170 I=NTOT-1,1,-1
        S=RES12(I,1)
        DO 160 J=NTOT,I+1,-1
          S=S-AJACOB(I,J)*XT12(J,1,3)
160    CONTINUE
        XT12(I,1,3)=S/AJACOB(I,I)
170    CONTINUE
      END IF
C
C   Ajout de l'accroissement calcule : estimation de l'itere suivant
C   Cette solution est stockee dans XT12(...,2) puis son residu est
C   calcule. L'acceleration d'Aitken permet de calculer l'itere
C   suivant XT12(...,1)
      DO 180, I=1,NTOT
        XT12(I,1,2)=XT12(I,1,1)+XT12(I,1,3)
        XT12(I,2,2)=DELTA/ALPHA/DELTAT * (XT12(I,1,2)-XX0(I,1))
        .      +(1-DELTA/ALPHA) * XX0(I,2)

```

```

      +DELTAT*(1-DELTA/2/ALPHA) * XX0(I,3)
180 CONTINUE
      CALL FHEDSH(XT12(1,1,2),B,NTOT,NDSHNL,AAA,IPOSNL
C -----
      ,DATADSH,VAX12(1,2),RES12(1,2))
      IF (ITERAT.EQ.NITEMAX) THEN
C   MEMORISATION DU PREMIER VECTEUR DE FUITE (on se prepare pour
C   la regula falsi)
      DO 190 I=1,NTOT
          XT12(I,1,3)=XT12(I,1,1)
          XT12(I,2,3)=XT12(I,2,1)
          RES12(I,3)=RES12(I,1)
190 CONTINUE
      END IF
C   ACCELERATION D'AITKEN
      DO 200 I=1,NTOT
          IF (RES12(I,1).NE.RES12(I,2)) THEN
              XT12(I,1,1)=XT12(I,1,1)+(XT12(I,1,2)-XT12(I,1,1))*
              .
                  RES12(I,1)/(RES12(I,1)-RES12(I,2))
              XT12(I,2,1)=DELTA/ALPHA/DELTAT * (XT12(I,1,1)-XX0(I,1))
              .
                  +(1-DELTA/ALPHA)      * XX0(I,2)
              .
                  +DELTAT*(1-DELTA/2/ALPHA) * XX0(I,3)
          END IF
200 CONTINUE
      CALL FHEDSH(XT12(1,1,1),B,NTOT,NDSHNL,AAA,IPOSNL
C -----
      ,DATADSH,VAX12(1,1),RES12(1,1))
      RNORM=0
      DO 210 I=1,NTOT
          RNORM=RNORM+RES12(I,1)**2
210 CONTINUE
      RNORM = DSQRT(RNORM)
C
      IF ((ITERAT.LT.NITEMAX).AND.(RNORM/BNORM.GE.PRECI)) GOTO 120
      IF (RNORM/BNORM.LT.PRECI) GOTO 300

```

```

C *****
C Pas de convergence atteinte par Newton -Raphson -> REGULA FALSI
250 CONTINUE
C
C Calcul de l'itere suivant a partir de l'itere en cours et du
C vecteur de fuite
DO 260 I=1,NTOT
  IF (RES12(I,1).NE.RES12(I,3)) THEN
    XT12(I,1,2)=XT12(I,1,3)+(XT12(I,1,1)-XT12(I,1,3))*
      .      RES12(I,3)/(RES12(I,3)-RES12(I,1))
    XT12(I,2,2)=DELTA/ALPHA/DELTAT * (XT12(I,1,2)-XX0(I,1))
      .      +(1-DELTA/ALPHA) * XX0(I,2)
      .      +DELTAT*(1-DELTA/2/ALPHA) * XX0(I,3)
    END IF
260 CONTINUE
  ITERAT=ITERAT+1
  CALL FHEDSH(XT12(1,1,2),B,NTOT,NDSHNL,AAA,IPOSNL,DATADSH,
C -----
      .      VAX12(1,2),RES12(1,2))
C Mise a jour du vecteur de fuite, si necessaire
DO 270 I=1,NTOT
  IF (RES12(I,2)*RES12(I,3).GT.0) THEN
    XT12(I,1,3)=XT12(I,1,1)
    XT12(I,2,3)=XT12(I,2,1)
    XT2MOD=.TRUE.
  END IF
  XT12(I,1,1)=XT12(I,1,2)
  XT12(I,2,1)=XT12(I,2,2)
  RES12(I,1)=RES12(I,2)
270 CONTINUE
C La nouvelle solution est maintenant dans XT12(.,.,1)
RNORM=0
DO 280 I=1,NTOT
  RNORM=RNORM+RES12(I,1)**2
280 CONTINUE

```



```

RNORM = DSQRT(RNORM)
IF (RNORM/BNORM.LT.PRECI) GOTO 300
C   Calculer le residu du vecteur de vue s'il a ete modifie
IF (XT2MOD) THEN
  CALL FHEDSH(XT12(1,1,3),B,NTOT,NDSHNL,AAA,IPOSNL
C   -----
.      ,DATADSH,VAX12(1,3),RES12(1,3))
END IF
XT2MOD=.FALSE.
IF (ITERAT.LT.NITETOT) GOTO 250
  WRITE (6,298) NITETOT
  WRITE (6,299) RNORM/BNORM
298  FORMAT (8X,'WARNING ! NOMBRE TOTAL D"ITERATIONS ATTEINT :
',1I4)
299  FORMAT (8X,'PRECISION ATTEINTE : ',1G10.5)
C
*****
C Le processus a converge !
300  CONTINUE
C
  WRITE (6,301) ITERAT
301  FORMAT (25X,'ITERATIONS :',1I4)
  DATADSH(NTOT+1,1)=DATADSH(NTOT+1,1)+ITERAT
C
C   Stockage des DDL non lineaires dans XX0
DO 325 I=1,NTOT
  XX0(I,1)=XT12(I,1,1)
325  CONTINUE
C   Calcul des DDL lineaires, stockage dans XX0
DO 320 I=1,NDOF-NTOT
  S=0
  DO 310 J=1,NTOT
    S=S+AAKFNL(J,I)*XT12(J,1,1)
310  CONTINUE
  PT(IDSHNW(I+NTOT))=PT(IDSHNW(I+NTOT))-S

```

```
320 CONTINUE
    DO 340 I=1,NDOF-NTOT
        S=0
        DO 330 J=1,NDOF-NTOT
            S=S+AAKF(I,J)*PT(IDSHNW(J+NTOT))
330 CONTINUE
        XX0(NTOT+I,1)=S
340 CONTINUE
C   Rearrangement du vecteur XX0 -> PT
    DO 350 I=1,NDOF
        PT(IDSHNW(I))=XX0(I,1)
350 CONTINUE
2000 RETURN
    END
```

FHEDSH

SUBROUTINE

FHEDSH(XT,B,NTOT,NDSHNL,AAA,IPOSNL,DATADSH,VAXIAL,
RESIDU)

C Cette sous routine calcule le residu relatif a la matrice XT. La premiere
C colonne doit contenir les déplacements et la seconde les vitesses correspon-
C dantes (selon l'hypothese de Newmark). La fonction vectorielle est definie
C par le second membre B et les donnees relatives aux dash-pots concentres

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

C*****

C Arguments : *

C NDSHNL : Nombre de dash-pot non lineaires *

C NTOT : Nombre DDL non lineaires *

C AAA : Matrice de la condensation statique des DDL lineaires *

C IPOSNL : Matrice indiquant pour chaque DDL de chaque amortisseur non *

C lineaire l'equation correspondante apres condensation statique*

C Si cette valeur est nulle, le DDL en question n'est pas non *

C lineaire, ce qui n'empêche pas de dash-pot d'etre non lineaire*

C il suffit que ce DDL soit fixe ou perpendiculaire a l'axe du *

C dash-pot *

C DATADSH: Matrice comprenant les donnees relatives au positionnement et *

C a la loi de comportement du dash-pot : (1) CX, (2)CY, (3) CZ, *

C (4) C, (5) ALPHA, (6) VLIMIT *

C Le residu calcule est stocke dans le vecteur RESIDU *

C XT : Vecteur comprenant les dépl. et vitesses pour lesquels le *

C doit etre evalue *

C VAXIAL : vitesse axial relative a chaque amortisseur *

C V (6) : vecteur defini en local (cette routine uniquement) *

C vitesses des six DDL de l'amortisseur traie *

C*****

C SI VLIMIT = 0 : LA LOI DE COMPORTEMENT EST EXPONENTIELLE

*


```

10  CONTINUE
    RESIDU(I)=S
20  CONTINUE
C Contibution non lineaire
    DO 50 I=1,NDSHNL
C  Vitesses des extremités
    DO 30 J=1,6
        IF (IPOSNL(I,J).NE.0) THEN
            V(J)=XT(IPOSNL(I,J),2)
        ELSE
            V(J)=0.D0
        END IF
30  CONTINUE
C  Vitesse axiale (obtenue par les cos.directeurs)
    VAXIAL(I)=DATADSH(I,1)*(V(1)-V(4))+DATADSH(I,2)*(V(2)-V(5))
    + DATADSH(I,3)*(V(3)-V(6))
    IF (DABS(DATADSH(I,6)).LT.1E-8) THEN
C-----LOI DE COMPORTEMENT EXPONENTIELLE
        EFFORT=DATADSH(I,4)*DABS(VAXIAL(I)**DATADSH(I,5))
        IF (VAXIAL(I).LT.0) EFFORT=-EFFORT
    ELSE
C-----LOI DE COMPORTEMENT BILINEAIRE
        IF (DABS(VAXIAL(I)).LT.DATADSH(I,6)) THEN
            EFFORT=DATADSH(I,4)*VAXIAL(I)
        ELSE
            IF (VAXIAL(I).LT.(-DATADSH(I,6))) THEN
                EFFORT=DATADSH(I,5)*VAXIAL(I)+DATADSH(I,6)*
                (DATADSH(I,5)-DATADSH(I,4))
            ELSE
                EFFORT=DATADSH(I,5)*VAXIAL(I)+DATADSH(I,6)*
                (DATADSH(I,4)-DATADSH(I,5))
            END IF
        END IF
    END IF
C  Rotation et localisation des efforts

```

```
      DO 40 J=1,6
      IF (IPOSNL(I,J).NE.0) THEN
          IF (OR((J.EQ.1),(J.EQ.4))) ALPHA=DATADSH(I,1)
          IF (OR((J.EQ.2),(J.EQ.5))) ALPHA=DATADSH(I,2)
          IF (OR((J.EQ.3),(J.EQ.6))) ALPHA=DATADSH(I,3)
          IF (J.GT.3) ALPHA=-ALPHA
          RESIDU(IPOSNL(I,J))=RESIDU(IPOSNL(I,J))+EFFORT*ALPHA
      END IF
40  CONTINUE
50  CONTINUE
C   Residus
      DO 60 I=1,NTOT
          RESIDU(I)=B(I)-RESIDU(I)
60  CONTINUE
      RETURN
      END
```

JCBDSH

SUBROUTINE

JCBDSH(XT,NTOT,NDSHNL,AAA,IPOSNL,DATADSH,VAXIAL,
DELAT,AJACOB)

C Cette sous routine calcule le jacobien relatif a la matrice XT dont la
C premiere colonne contient les déplacements et la seconde les vitesses
C correspondantes (selon l'hypothese de Newmark).

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

C*****

C Arguments : *

C Voir details dans la routine FHEDSH *

C*****

DIMENSION B(MAXDSH),DATADSH(MAXDSH+1,6)

DIMENSION XT(MAXDSH,2)

DIMENSION AJACOB(MAXDSH,MAXDSH),VAXIAL(MAXDSH/6)

DIMENSION IPOSNL(MAXDSH,6),AAA(MAXDSH,*)

DATA DM10/1.D-10/,DM6/1.D-6/

COMMON /FONLY/ VOLUME,INEX,

MAXMEC,MAXGEO,MAXCOR,MAXELM,MAXSOL,MAXCC,MAXAP,

MAXOB,MAXRES,MAXROS,MAXDEP,MAXREA,MANORA,MAXPAS,

MAXB,MAXM,MAXIN,MAXLIB,

NIP,LISDDL,LIBA,NOMAX,LONGA,MEMORY,LONUL,LBMAX,

NTOTL,NIMEC,NIGEO,NICOR,NMEL,NISOL,NICC,NIRES,

NRC,KALEN,

LTYP,LIA,IDON(40),IDEN,NOROT,LKARA,MAXDSH

COMMON /SBVDAT/ ID2DYN,IF2DYN,NTOTAL,NDOF, NLIB,

NTNODE,NNODE, NTNDOF,NTADDR,NDOF1, NTELEM,NELEM,

NTCORD,NCORD, NTMECA,NTIMAT,NMECA, NCMECA,

NTGEOM,NTISEC,NCISEC,NGEOM, NCGEOM,

NTSOL, NSOL, NCSOL, NTISOL,NCISOL,NTCC, NCC,

NTSTFN,NSTFNL,NTFOR,

```

.      NTMASS,IDMASS,NTMAXA,NTLIC, NTIELD,
.      NTNDEC,NTRDEC,NTVQUE,NVEH, NTTRPA,NTCBL,
.      NTXMAX,NTENV,NTALL,NTEVO,NTNODY,NTTRAV,
.      NTAAKFNL,NTAAKFNN,NTAA,NTAAA,NTAAKF,
.      NTIDSH,NTISDOF,NTDATAD,NTIPOS,NTIDDL
C
C  Contribution lineaire [J]=[A]
DO 20 I=1,NTOT
    DO 10 J=1,NTOT
        AJACOB(I,J)=AAA(I,J)
10  CONTINUE
20  CONTINUE
C  Contribution non lineaire
C  Les vitesses axiales ont ete calculees dans FHEDSH
C  et non modifiees entre temps
DO 50 I=1,NDSHNL
    IF (DABS(DATADSH(I,6)).LT.1E-8) THEN
C-----LOI DE COMPORTEMENT EXPONENTIELLE
        IF (DATADSH(I,5).NE.1) THEN
C            ET NON LINEAIRE
                IF (VAXIAL(I).EQ.0) THEN
                    VJACOB=0
                ELSE
                    VJACOB=DATADSH(I,4)*DATADSH(I,5)*2/DELTAT/
.                    DABS(VAXIAL(I))*(1-DATADSH(I,5))
                END IF
            ELSE
C-----LOI LINEAIRE
                VJACOB=DATADSH(I,4)*2/DELTAT
            END IF
        ELSE
C            LOI BILINEAIRE
                IF (DABS(VAXIAL(I)).LT.DATADSH(I,6)) THEN
                    VJACOB=DATADSH(I,4)*2/DELTAT
                ELSE

```



```

VJACOB=DATADSH(I,5)*2/DELTAT
  END IF
END IF
DO 40 K=1,6
  IF (IPOSNL(I,K).NE.0) THEN
  IF (OR((K.EQ.1),(K.EQ.4))) ALPHA1=DATADSH(I,1)
    IF (OR((K.EQ.2),(K.EQ.5))) ALPHA1=DATADSH(I,2)
    IF (OR((K.EQ.3),(K.EQ.6))) ALPHA1=DATADSH(I,3)
    IF (K.GT.3) ALPHA1=-ALPHA1
    DO 30 J=1,6
    IF (IPOSNL(I,J).NE.0) THEN
      IF (OR((J.EQ.1),(J.EQ.4))) ALPHA=DATADSH(I,1)
      IF (OR((J.EQ.2),(J.EQ.5))) ALPHA=DATADSH(I,2)
      IF (OR((J.EQ.3),(J.EQ.6))) ALPHA=DATADSH(I,3)
      IF (J.GT.3) ALPHA=-ALPHA
      AJACOB(IPOSNL(I,K),IPOSNL(I,J))=
      .   AJACOB(IPOSNL(I,K),IPOSNL(I,J))+
      .   VJACOB*ALPHA*ALPHA1
    END IF
30    CONTINUE
  END IF
40  CONTINUE
50  CONTINUE
RETURN
END

```

Annexe 4

Listings des fichiers Mathcad

<i>Descriptif des fichiers</i>	65
<i>MULTIDDL.MCD</i>	67

Descriptif des fichiers

- STATIC** Analyse statique au premier ordre d'une structure composée de poutres et ressorts
- 1DDL** Résolution de l'équation du mouvement pour un oscillateur à un degré de liberté. [Méthode de Newmark $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$]
- FREQPROP** Calcul des fréquences propres d'une structure composée de poutres et ressorts
- MULTIDDL** Analyse dynamique au premier ordre d'une structure composée de poutres, ressort et amortisseurs concentrés. Ces éléments sont supposés se comporter linéairement. L'amortissement structural est de type Rayleigh avec un ou plusieurs matériaux. La résolution est entreprise selon les hypothèses de Newmark [$\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$].
- SUPERP** Mêmes possibilités que MULTIDDL mais la résolution est entreprise par superposition modale. Le nombre de modes à conserver pour l'analyse est à préciser au début du calcul
- RITZ** Mêmes possibilités que SUPER mais la réponse est estimée comme superposition de vecteurs de Ritz et non plus de modes propres. Cette technique est avantageuse dans la mesure où le calcul aux valeurs propres n'est pas nécessaire
- 1DDLNL** Résolution de l'équation du mouvement dont le terme d'amortissement est non linéaire. La loi de comportement choisie pour le dash-pot est de type exponentiel : $F = C.v^\alpha$
- 1DDLBINL** Mêmes possibilités que 1DDLNL mais le comportement du dash-pot est supposé bilinéaire.
- MULTINL** Mêmes possibilités que MULTIDDL mais ce fichier prend en compte la présence d'amortisseurs à comportement non linéaire. La loi de comportement est de type exponentiel et la méthode de résolution est celle présentée dans cet ouvrage (Chapitre 4)
- MULTIBINL** Mêmes possibilités que MULTINL, la loi de comportement de dash-pots non linéaires étant cette fois bilinéaire.
- GENERATION** Génération d'accélérogramme compatible avec les spectres de l'Eurocode 8. La méthode utilisée est celle présentée dans cet ouvrage (Chapitre 3)
- SPECTRE** Calcule les spectres de réponse d'un accélérogramme : déplacement,

vitesse et pseudo-vitesse, énergie, transformée de Fourier de
l'accélérogramme, accélération et pseudo-accélération

REMARQUES :

La résolution de structures à plusieurs degrés de liberté se fait sur base de la méthode des éléments finis. Les éléments programmés sont des éléments de poutre plane à deux nœuds et trois degrés de liberté par nœud, soit six degrés de liberté par élément.

Pour les divers types d'analyse (statique et dynamique), c'est un calcul au premier ordre qui est réalisé. Il y a cependant la possibilité d'associer un effort normal aux éléments de poutre ; cet effort est supposé constant tout au long du chargement. En plus de leur raideur matérielle, ces éléments se voient donc attribuer une raideur géométrique supplémentaire (négative s'il s'agit d'un effort de compression).

Contrairement à FINELG, les feuilles Mathcad n'offrent pas la possibilité d'analyser la structure sous des charges mobiles. Seule une analyse sismique est possible : l'action est donc uniquement représentable par un accélérogramme.

Toutes les feuilles de calcul réalisées sont toujours basées sur les mêmes parties : définition de la structure et des sollicitations, création de matrices élémentaires et assemblage. Selon l'objectif du calcul, les matrices globales sont soumises à un calcul aux valeurs propres ou utilisées pour la résolution de la structure. Lorsque cette partie plus spécifique à chaque fichier est passée, il reste à tracer la déformée de la structure (avec possibilité d'animation), puis à calculer et tracer le diagramme des éléments de réduction (seuls les moments sont calculés). Puisque le schéma de résolution est sensiblement identique pour chacune des feuilles rédigées, seul le listing du fichier MULTIDDL.MCD, l'objectif du travail, est fourni.

MULTIDDL.MCD

Le listing du fichier MULTIDDL.MCD est donné ci-après. Le cas traité correspond à la console encastrée et sollicitée de façon harmonique. Les caractéristiques du dash-pot mis en place sont :

$$C = 10^6 \text{ N} \cdot (\text{s/m})^{0,2} \quad \alpha = 0,2$$

Les dernières pages de la feuille de calcul correspondent aux résultats obtenus. On y retrouve les graphiques donnés dans le rapport (déplacement en tête de colonne et comportement de l'amortisseur).