MÉMOIRE

SUR

LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE

PAR

M. F. FOLIE,
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

ET

M. C. LE PAIGE,
CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

(PREMIÈRE PARTIE.)

(Présenté à la Classe des sciences de l'Académie le 3 janvier 1880.)

MÉMOIRE

SUR

LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE.

CHAPITRE PREMIER.

HOMOGRAPHIE.

1. La théorie des sections coniques repose, tout entière, sur les propriétés des ponctuelles ou des faisceaux homographiques. Aussi a-t-on étudié, dans les moindres détails, la forme bilinéaire

$$f=\sum_{i=1}^{i=2}\sum_{k=1}^{k=2} a_{ik}x_iy_k.$$

La construction des courbes d'ordres supérieurs, conçue par STEINER et appliquée spécialement par M. CHASLES et M. DE JONQUIÈRES, conduit à d'autres formes à deux séries de variables.

On s'en est moins occupé au point de vue analytique qu'au point de vue géométrique.

Enfin, les travaux de M. AUGUST et de M. CREMONA, sur les surfaces du troisième ordre, conduisent à la forme trilinéaire

$$f=\Sigma\Sigma\Sigma a_{ikl}x_iy_kz_l, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

appelée par le premier de ces géomètres, *duploprojective*.

Cette dernière forme, pensons-nous, n'a pas encore fait, néanmoins, l'objet de recherches analytiques, du moins dans sa forme complétement générale. Nous aurons l'occasion de mentionner, dans le cours de ce travail, les résultats que nous avons rencontrés dans les écrits de quelques géomètres, et qui se rattachent à cette question.

Nous commencerons par déterminer les covariants et les invariants de f, en ramenant d'abord cette forme à une somme de polaires d'expressions ne contenant qu'une seule série de variables, en nous servant des méthodes de M. Gordan.

Pour plus d'uniformité dans les notations, nous représenterons, en général, par

$$D_{xy},$$

l'opération

$$\frac{1}{m}\left(x_1\frac{d}{dy_1}+x_2\frac{d}{dy_2}\right),$$

m désignant le degré, par rapport aux variables y, de la fonction à laquelle on applique l'opération.

Nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned} f &= a_{111}x_1y_1z_1+a_{112}x_1y_1z_2+a_{121}x_1y_2z_1+a_{211}x_2y_1z_1+a_{122}x_1y_2z_2+a_{212}x_2y_1z_2+a_{221}x_2y_2z_1+a_{222}x_2y_2z_2 \\ &= D_{xy}D_{xz}\left[a_{111}x_1^3+(a_{112}+a_{121}+a_{211})x_1^2x_2+(a_{122}+a_{212}+a_{221})x_1x_2^2+a_{222}x_2^3\right] \\ &\quad+\frac{2}{3}(xz)D_{xy}\left[\left(a_{112}-\frac{a_{121}+a_{211}}{2}\right)x_1-\left(a_{221}-\frac{a_{212}+a_{122}}{2}\right)x_2\right] \\ &\quad+\frac{1}{2}(xy)D_{zx}\left[(a_{121}-a_{211})x_1-(a_{212}-a_{122})x_2\right]. \end{aligned}$$

Les trois expressions, entre crochets, sont des covariants de f.

Il suffira, pour trouver tous les covariants de f, de former le système complet de ces trois covariants (*).

Posons

$$\varphi_x^3=a_{111}x_1^3+(a_{112}+a_{121}+a_{211})x_1^2x_2+(a_{122}+a_{212}+a_{221})x_1x_2^2+a_{222}x_2^3, \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \chi_1 &= (a_{121}-a_{112})x_1-(a_{212}-a_{221})x_2, \\ \chi_2 &= (a_{112}-a_{211})x_1-(a_{221}-a_{122})x_2, \\ \chi_3 &= (a_{211}-a_{121})x_1-(a_{122}-a_{212})x_2. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(*) Clebsch, *Theorie der binären Formen*, p. 26.

Puis

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 = \chi_2 - \chi_3 = (a_{112} + a_{121} - 2a_{211})x_1 - (a_{221} + a_{212} - 2a_{122})x_2,\\ \psi_2 = \chi_3 - \chi_1 = (a_{211} + a_{112} - 2a_{121})x_1 - (a_{122} + a_{221} - 2a_{212})x_2,\\ \psi_3 = \chi_1 - \chi_2 = (a_{121} + a_{211} - 2a_{112})x_1 - (a_{212} + a_{122} - 2a_{221})x_2.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

De cette manière, nous aurons

$$f = D_{yz}D_{zx}\varphi - \tfrac{1}{3}(xz)D_{yx}\psi_3 - \tfrac{1}{2}(xy)D_{zx}\chi_3.$$

A cause des relations évidentes

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 \equiv 0,$$
$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \equiv 0,$$

et des formules (4), nous pouvons prendre, comme covariants de f, les formes

$$\varphi_x^3,\ \chi_1,\ \chi_2.$$

Nous obtenons le système suivant :

	0	1	2	3
1		$\chi_1,\ \chi_2$		φ_x^3
2	$(\chi_1,\ \chi_2)$		$H = (\varphi\varphi')^2\varphi_x\varphi'_x$ $\Gamma_1 = (\varphi, \chi_1),\ \Gamma_2 = (\varphi, \chi_2)$	
3		$\varpi_1 = (H, \chi_1)$ $\varpi_2 = (H, \chi_2)$		$Q = (\varphi\varphi')^2(\varphi'\varphi'')\varphi_x\varphi''^2_x$
4	$(H, H')^2$ (ϖ_1, χ_2)		$\rho_1 = (Q, \chi_1)$ $\rho_2 = (Q, \chi_2)$	
5		$\sigma_1 = (\rho_1, \chi_2)$		

Il est inutile d'écrire les autres formes que l'on pourrait introduire pour la symétrie.

2. Supposons maintenant que,

$$f = 0,$$

définisse un ensemble de points situés sur une droite ou sur trois droites.

Nous remarquerons tout d'abord que si l'on se donne deux points, l'un de la série des y, l'autre de celle des z, par exemple, le troisième point correspondant, x, est complétement déterminé.

Cependant, comme l'on a,

$$x_1 \frac{df}{dx_1} + x_2 \frac{df}{dx_2} = 0,$$

le rapport $\frac{x_1}{x_2}$ est indéterminé si l'on a, en même temps,

$$\frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dx_2} = 0,$$

ou

$$a_{111}y_1z_1 + a_{112}y_1z_2 + a_{121}y_2z_1 + a_{122}y_2z_2 = 0,$$
$$a_{211}y_1z_1 + a_{212}y_1z_2 + a_{221}y_2z_1 + a_{222}y_2z_2 = 0.$$

Le rapport $\frac{y_1}{y_2}$ est alors racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_{111}y_1 + a_{121}y_2 & a_{112}y_1 + a_{122}y_2 \\ a_{211}y_1 + a_{221}y_2 & a_{212}y_1 + a_{222}y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, nous trouvons,

$$\Sigma_2 \equiv (a_{111}a_{212} - a_{112}a_{211})y_1^2 + (a_{111}a_{222} + a_{121}a_{212} - a_{112}a_{221} - a_{122}a_{211})y_1y_2 + (a_{121}a_{222} - a_{122}a_{221})y_2^2 = 0.$$

Le premier membre de cette équation est, comme l'on voit, égal à

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx_1dz_1} & \frac{d^2f}{dx_1dz_2} \\ \frac{d^2f}{dx_2dz_1} & \frac{d^2f}{dx_2dz_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous pouvons former les expressions analogues Σ_1, Σ_3.

$$\Sigma_1 \equiv (a_{111}a_{122} - a_{112}a_{121})x_1^2 + (a_{111}a_{222} + a_{211}a_{122} - a_{121}a_{212} - a_{221}a_{112})x_1x_2 + (a_{211}a_{222} - a_{212}a_{221})x_2^2 = 0,$$
$$\Sigma_3 \equiv (a_{111}a_{221} - a_{121}a_{211})z_1^2 + (a_{111}a_{222} + a_{112}a_{221} - a_{211}a_{122} - a_{121}a_{212})z_1z_2 + (a_{112}a_{222} - a_{122}a_{212})z_2^2.$$

On s'aperçoit sans peine que, le point x étant indéterminé, les points z, correspondant aux points y, racines de l'équation $\Sigma_2 = 0$, sont eux-mêmes racines de l'équation $\Sigma_3 = 0$.

Nous pourrions aisément prouver, en nous fondant sur la forme même des Σ, que ces fonctions sont des covariants de f. Mais les relations suivantes, en nous permettant de rattacher Σ_1, Σ_2, Σ_3, au système de f, démontrent ce théorème.

Nous trouvons

$$H_1 - 3(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3) + \tfrac{1}{2}(\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2) \equiv 0, \quad \ldots \quad (5)$$

$$3(\Sigma_1 - \Sigma_2) = \Gamma_3 - \chi_3(\chi_1 - \chi_2), \quad \ldots \quad (6)$$

$$3(\Sigma_2 - \Sigma_3) = \Gamma_1 - \chi_1(\chi_2 - \chi_3), \quad \ldots \quad (7)$$

$$3(\Sigma_3 - \Sigma_1) = \Gamma_2 - \chi_2(\chi_3 - \chi_1) \quad \ldots \quad (8)$$

De ces équations se déduisent les suivantes :

$$9\Sigma_1 = H_1 + \Gamma_3 - \Gamma_2 - 2\chi_2^2 - 2\chi_3^2 - 5\chi_2\chi_3, \quad \ldots \quad (9)$$

$$9\Sigma_2 = H_1 + \Gamma_1 - \Gamma_3 - 2\chi_1^2 - 2\chi_3^2 - 5\chi_1\chi_3, \quad \ldots \quad (10)$$

$$9\Sigma_3 = H_1 + \Gamma_2 - \Gamma_1 - 2\chi_2^2 - 2\chi_1^2 - 5\chi_1\chi_2 \quad \ldots \quad (11)$$

Nous mentionnerons encore les covariants

$$\Pi_1 = \Sigma_2 - \Sigma_3, \quad \Pi_2 = \Sigma_3 - \Sigma_1, \quad \Pi_3 = \Sigma_1 - \Sigma_2,$$

et

$$P_1 = \Sigma_2 + \Sigma_3, \quad P_2 = \Sigma_3 + \Sigma_1, \quad P_3 = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Des trois premières égalités résulte l'identité

$$\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \equiv 0 \quad \ldots \quad (12)$$

Il est aisé de se rendre compte de la signification géométrique de la plupart des covariants que nous avons rencontrés.

Supposons que

$$f = 0,$$

définisse trois séries homographiques sur une droite.

L'équation

$$\varphi_x^3 = 0,$$

représentera les points triples de cette homographie.

Si

$$\chi_1 = 0,$$

on a

$$a_{121} = a_{122}, \quad a_{212} = a_{221}.$$

La forme f devient

$$y_1 z_1 (a_{111} x_1 + a_{211} x_2) + (y_1 z_2 + y_2 z_1)(a_{112} x_1 + a_{212} x_2) + y_2 z_2 (a_{122} x_1 + a_{222} x_2) = 0.$$

Donc :

Si le covariant $\chi_1 = 0$, *à chaque point de la série des* x, *correspondent deux séries de points* y *et* z *en involution.*

Si de plus

$$\chi_2 = 0,$$

$$a_{112} = a_{211}, \quad a_{221} = a_{122}.$$

La forme f devient

$$f = a_{111} y_1 x_1 z_1 + a_{112}(y_1 z_1 x_2 + y_1 z_2 x_1 + y_2 z_1 x_1) + a_{122}(y_1 z_2 x_2 + x_1 y_2 z_2 + z_1 x_2 y_2) + a_{222} x_2 y_2 z_2 = 0.$$

Par conséquent, l'égalité

$$f = 0,$$

définit trois séries de points telles que, quelles que soient les séries où l'on choisit deux points, le troisième point qui leur correspond est toujours le même.

Nous dirons que les trois séries sont en involution et nous étudierons plus loin, d'une manière spéciale, les propriétés de ces séries.

En outre, le point donné par

$$\chi_1 = 0,$$

jouit d'une propriété particulière.

Si nous posons

$$x_1 = a_{212} - a_{221}, \quad x_2 = a_{121} - a_{112},$$

f devient

$$y_1z_1\left[a_{111}(a_{212}-a_{221})+a_{211}(a_{121}-a_{112})\right]+(y_1z_2+y_2z_1)\left[a_{212}a_{121}-a_{112}a_{221}\right]$$
$$+y_2z_2\left[a_{122}(a_{212}-a_{221})+a_{222}(a_{121}-a_{112})\right]=0.$$

Les deux séries de points qui correspondent au point particulier donné par

$$\chi_1=0,$$

sont en involution du second ordre.

Les points doubles de cette involution correspondent aux racines de l'équation

$$y_1^2\left[a_{111}(a_{212}-a_{221})+a_{211}(a_{121}-a_{112})\right]+2y_1y_2\left[a_{212}a_{121}-a_{112}a_{221}\right]$$
$$+y_2^2\left[(a_{212}-a_{221})a_{122}+a_{222}(a_{121}-a_{112})\right]=0,$$

c'est-à-dire aux racines de

$$\Pi_1=0.$$

La même chose a lieu pour les points définis par

$$\chi_2=0,\quad \chi_3=0,$$

et, en vertu de l'identité

$$\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3\equiv 0,$$

ces six points sont eux-mêmes en involution.

Soit

$$f=z_1(a_{111}x_1y+a_{121}x_1y_2+a_{211}x_2y_1+a_{221}y_2x_2)+z_2(a_{112}x_1y_1+a_{122}x_1y_2+a_{212}x_2y_1+a_{222}x_2y_2)$$
$$=z_1u+z_2v.$$

Posons

$$u_1=\frac{du}{dx_1},\quad u_2=\frac{du}{dx_2}.$$

Nous aurons

$$u-\frac{u_1u_2}{a_{111}}=u-\frac{(a_{111}y_1+a_{121}y_2)(a_{111}x_1+a_{211}x_2)}{a_{111}}=\left(\frac{a_{111}a_{221}-a_{121}a_{211}}{a_{111}}\right)y_2z_2\ (^*).$$

(*) Baltzer, *Theorie und Anwendungen der Determinanten*, p. 187.

D'où

$$u = \frac{(a_{111}y_1 + a_{121}y_2)(a_{111}x_1 + a_{211}x_2)}{a_{111}} + \frac{a_{112}a_{222} - a_{122}a_{212}}{a_{111}} x_2 y_2.$$

De même

$$v = \frac{(a_{112}y_1 + a_{122}y_2)(a_{112}x_1 + a_{212}x_2)}{a_{112}} + \frac{a_{112}a_{222} - a_{122}a_{212}}{a_{112}} x_2 y_2.$$

Lorsque

$$\Sigma_1 \equiv 0,$$

$$\left.\begin{aligned} a_{111}a_{122} - a_{112}a_{121} &= 0, \\ a_{111}a_{222} + a_{211}a_{122} - a_{121}a_{212} - a_{221}a_{112} &= 0, \\ a_{211}a_{222} = a_{221}a_{212} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

En combinant ces trois équations, on met la seconde sous la forme

$$(a_{112}a_{221} - a_{122}a_{211})(a_{121}a_{212} - a_{122}a_{211}) = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

$$\Sigma_1 \equiv 0,$$

équivaut donc à l'un des deux systèmes suivants :

$$\left.\begin{aligned} a_{111}a_{122} - a_{112}a_{121} &= 0, \\ a_{112}a_{221} - a_{122}a_{211} &= 0, \\ a_{211}a_{222} - a_{221}a_{212} &= 0; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

ou

$$\left.\begin{aligned} a_{111}a_{122} - a_{112}a_{121} &= 0, \\ a_{121}a_{212} - a_{122}a_{211} &= 0, \\ a_{211}a_{222} - a_{221}a_{212} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

De (16), on déduit

$$\frac{a_{111}}{a_{112}} = \frac{a_{121}}{a_{122}} = \frac{a_{211}}{a_{212}} = \frac{a_{221}}{a_{222}} = \lambda.$$

f prend la forme

$$(z_1 + \lambda z_2)(a_{112}x_1y_1 + a_{122}x_1y_2 + a_{212}x_2y_1 + a_{222}x_2y_2).$$

Le système (15) conduit, de son côté, aux égalités suivantes :

$$\frac{a_{111}}{a_{211}} = \frac{a_{121}}{a_{221}}; \quad \frac{a_{122}}{a_{222}} = \frac{a_{112}}{a_{212}};$$

ou

$$a_{111}a_{221} - a_{121}a_{211} = 0; \quad a_{122}a_{212} - a_{112}a_{222} = 0.$$

D'où

$$f=\frac{(a_{111}y_1+a_{121}y_2)(a_{111}x_1+a_{211}x_2)}{a_{111}}z_1+\frac{(a_{112}y_1+a_{122}y_2)(a_{112}x_1+a_{212}x_2)}{a_{112}}z_2.$$

Mais

$$\frac{a_{111}}{a_{112}}=\frac{a_{121}}{a_{122}}.$$

En conséquence

$$f=\frac{a_{112}y_1+a_{122}y_2}{a_{112}}(a_{111}x_1z_1+a_{211}x_2z_1+a_{112}x_1z_2+a_{212}x_2z_2).$$

Lorsque les systèmes (15) et (16) sont vérifiés en même temps, on a, en outre,

$$\frac{a_{111}}{a_{112}}=\frac{a_{211}}{a_{212}}.$$

Dans ce cas

$$f=\frac{(a_{112}y_1+a_{122}y_2)(a_{112}x_1+a_{212}x_2)(a_{111}z_1+a_{112}z_2)}{a_{112}^2}.$$

Par suite :

Lorsque $\Sigma_1=0$, *la forme* f *se décompose en deux ou en trois facteurs.*

Il n'existe plus, alors, d'homographie du troisième ordre. La même chose a lieu, naturellement, lorsque $\Sigma_2=0$, ou $\Sigma_3=0$.

Voyons ce que deviennent, dans cette hypothèse particulière, les trois covariants linéaires

$$\chi_1,\quad \chi_2,\quad \chi_3.$$

Lorsque les deux systèmes (15) et (16) sont vérifiés en même temps, on trouve

$$\chi_1=\frac{a_{221}-a_{212}}{a_{212}}(a_{112}x_1+a_{212}x_2),$$

$$\chi_2=\frac{(a_{122}-a_{221})a_{211}}{a_{221}a_{112}}(a_{112}x_1+a_{122}x_2),$$

$$\chi_3=\frac{(a_{212}-a_{122})a_{121}}{a_{122}a_{111}}(a_{111}x_1+a_{112}x_2).$$

On en déduit

$$f=\mathrm{M}.\chi_1\chi_2\chi_3.$$

Mais il est assez facile de voir que, dans ce cas,

$$\Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 = 0, \quad \Sigma_3 = 0.$$

D'où

$$H_1 = -\tfrac{1}{2}(\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2).$$

C'est le résultat que nous devions obtenir, d'après la théorie des formes algébriques (*).

Car on a, dans le cas actuel,

$$\varphi_x^3 = A.\chi_1.\chi_2.\chi_3.$$

Or, on sait que si

$$f = (\zeta - \eta)(\zeta - \omega\eta)(\zeta - \omega^2\eta) = \left[\omega^2(\zeta - \eta).\omega(\zeta - \omega\eta).(\zeta - \omega^2\eta)\right] = XYZ,$$
$$H = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Nous avons encore mentionné les trois covariants

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3.$$

On peut se rendre aisément compte de leur signification géométrique

$$f = z_1(a_{111}x_1y_1 + a_{121}x_1y_2 + a_{211}x_2y_1 + a_{222}x_2y_2) + z_2(a_{112}x_1y_1 + a_{122}x_1y_2 + a_{212}x_2y_1 + a_{222}x_2y_2).$$

Si nous supposons que les points de la série des y et deux de la série des x, coïncident, à chaque point z, correspond une série de points doubles en involution.

Or, un léger calcul fait voir que les points doubles de cette involution sont donnés par l'équation

$$P_3 = 0.$$

3. Puisque trois points appartenant aux trois séries homographiques satisfont à la condition

$$f = \Sigma\Sigma\Sigma a_{ikl}x_iy_kz_l = 0,$$

(*) V., par exemple: Clebsch, *Op. cit.*, p. 128.

il existe, entre huit groupes de trois points, la relation :

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}y_1^{(1)}z_1^{(1)} & x_1^{(1)}y_1^{(1)}z_2^{(1)} & x_1^{(1)}y_2^{(1)}z_1^{(1)} & x_2^{(1)}y_1^{(1)}z_1^{(1)} & \ldots\ldots & x_2^{(1)}y_2^{(1)}z_2^{(1)} \\ x_1^{(2)}y_1^{(2)}z_1^{(2)} & x_1^{(2)}y_1^{(2)}z_2^{(2)} & x_1^{(2)}y_2^{(2)}z_1^{(2)} & x_2^{(2)}y_1^{(2)}z_1^{(2)} & \ldots\ldots & x_2^{(2)}y_2^{(2)}z_2^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(8)}y_1^{(8)}z_1^{(8)} & x_1^{(8)}y_1^{(8)}z_2^{(8)} & x_1^{(8)}y_2^{(8)}z_1^{(8)} & x_2^{(8)}y_1^{(8)}z_1^{(8)} & \ldots\ldots & x_2^{(8)}y_2^{(8)}z_2^{(8)} \end{vmatrix} = 0,$$

condition qui peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=8} p_i (X_1x_2^{(i)} - X_2x_1^{(i)})(Y_1y_2^{(i)} - Y_2y_1^{(i)})(Z_1z_2^{(i)} - Z_2z_1^{(i)}) \equiv 0 \text{ (*)}.$$

Nous pouvons concevoir d'un autre côté, des séries homographiques formées par les ternes communs aux deux homographies

$$f = \Sigma\Sigma\Sigma a_{ikl}x_iy_kz_l,$$
$$f_1 = \Sigma\Sigma\Sigma b_{ikl}x_iy_kz_l.$$

Il en résulte que sept ternes de points satisfont à la condition

$$\begin{Vmatrix} x_1^{(1)}y_1^{(1)}z_1^{(1)} & x_1^{(1)}y_1^{(1)}z_2^{(1)} & \ldots\ldots & x_2^{(1)}y_2^{(1)}z_2^{(1)} \\ x_1^{(2)}y_1^{(2)}z_1^{(2)} & x_1^{(2)}y_1^{(2)}z_2^{(2)} & \ldots\ldots & x_2^{(2)}y_2^{(2)}z_2^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(7)}y_1^{(7)}z_1^{(7)} & x_1^{(7)}y_1^{(7)}z_2^{(7)} & \ldots\ldots & x_2^{(7)}y_2^{(7)}z_2^{(7)} \end{Vmatrix} = 0,$$

et, par suite, à l'identité

$$\sum_{i=1}^{i=7} p_i (X_1x_2^{(i)} - X_2x_1^{(i)})(Y_1y_2^{(i)} - Y_2y_1^{(i)})(Z_1z_2^{(i)} - Z_2z_1^{(i)}) \equiv 0.$$

Nous dirons qu'une telle identité définit une homographie du troisième ordre et du premier rang. On démontre aisément la propriété suivante de cette homographie :

Théorème. — *Trois séries homographiques, du troisième ordre et du premier rang, possèdent quatre points doubles* (**).

(*) C. Le Paige, *A. F. A.*, pp. 17 et suiv.

(**) La même chose a lieu si l'on combine la série des y avec celle des z ou celle des z avec celle des x.

En effet, en éliminant x_1, x_2, entre les deux équations $f=0$, $f_1=0$, nous trouvons

$$\frac{\dfrac{df}{dx_1}}{\dfrac{df}{dx_2}} = \frac{\dfrac{df_1}{dx_1}}{\dfrac{df_1}{dx_2}},$$

ou

$$\begin{vmatrix} \dfrac{df}{dx_1} & \dfrac{df}{dx_2} \\ \dfrac{df_1}{dx_1} & \dfrac{df_1}{dx_2} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(A')}$$

Si, dans cette relation, nous faisons $\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$, nous obtenons une équation du quatrième degré.

Le déterminant (A′) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a_{111}y_1z_1 + a_{112}y_1z_2 + a_{121}y_2z_1 + a_{122}y_2z_2 & a_{211}y_1z_1 + a_{212}y_1z_2 + a_{221}y_2z_1 + a_{222}y_2z_2 \\ b_{111}y_1z_1 + b_{112}y_1z_2 + b_{121}y_2z_1 + b_{122}y_2z_2 & b_{211}y_1z_1 + b_{212}y_1z_2 + b_{221}y_2z_1 + b_{222}y_2z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

et en développant

$$\begin{aligned} & y_1^2\left[(a_{111}b_{211} - a_{211}b_{111})z_1^2 + (a_{111}b_{212} - a_{212}b_{111} + a_{112}b_{211} - a_{211}b_{112})z_1z_2 + (a_{112}b_{212} - a_{212}b_{112})z_2^2\right] \\ + & y_1y_2\left[(a_{111}b_{221} - a_{221}b_{111} + a_{121}b_{211} - a_{211}b_{121})z_1^2 + (a_{111}b_{222} - a_{222}b_{111} + a_{112}b_{221} - a_{221}b_{112})z_1z_2\right. \\ & \qquad \left. + (a_{112}b_{221} - a_{221}b_{112} + a_{121}b_{212} - b_{121}a_{212})z_1^2\right] \\ + & y_2^2\left[(a_{121}b_{221} - a_{221}b_{121})z_1^2 + (a_{122}b_{221} - a_{221}b_{122} + a_{121}b_{222} - a_{222}b_{121})z_1z_2 + (a_{122}b_{222} - a_{222}b_{122})z_2^2\right] = 0. \quad (\alpha) \end{aligned}$$

On sait aussi qu'il existe quatre points correspondant aux quatre groupes de quatre points doubles.

Ces points sont représentés par l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le discriminant de la forme précédente, regardée comme forme quadratique de y.

On pourrait appeler ces points, en se servant d'une expression employée par M. EM. WEYR, *points de ramification* (*).

(*) EM. WEYR, *Sitzb. der k. Akad. der Wissenschaften zu Wien*, vol. LXXIII, mai, 1876.
Voir aussi : *Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen*, p. 7, t. VII, 6e série, 1874, des MÉM. DE LA SOC. ROY. DES SCIENCES, de Prague.

CHAPITRE II.

INVOLUTIONS DU TROISIÈME ORDRE.

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que la relation d'homographie prend une forme particulière lorsque

$$\chi_1 \equiv 0, \quad \chi_2 \equiv 0.$$

Dans ce cas, nous avons

$$f = a_{111}x_1y_1z_1 + a_{112}(x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1) + a_{122}(x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1) + a_{222}x_2y_2z_2 = 0.$$

Il est nécessaire que nous rappelions brièvement quelques résultats que nous avons déjà eu l'occasion de faire connaître.

On voit, tout d'abord, qu'il existe entre quatre ternes de points en involution la relation

$$D = \begin{vmatrix} x_1y_1z_1 & x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1 & x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1 & x_2y_2z_2 \\ x_1'y_1'z_1' & x_1'y_1'z_2' + x_1'y_2'z_1' + x_2'y_1'z_1' & x_1'y_2'z_2' + x_2'y_1'z_2' + x_2'y_2'z_1' & x_2'y_2'z_2' \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ x_1'''y_1'''z_1''' & x_1'''y_1'''z_2''' + x_1'''y_2'''z_1''' + x_2'''y_1'''z_1''' & x_1'''y_2'''z_2''' + x_2'''y_1'''z_2''' + x_2'''y_2'''z_1''' & x_2'''y_2'''z_2''' \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous regardons les quatre ternes de points comme définis par les quatre formes

$$a_x^3 = 0, \quad b_x^3 = 0, \quad c_x^3 = 0, \quad d_x^3 = 0,$$

cette condition peut s'écrire

$$D' = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en employant les notations symboliques,

$$(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd) = 0.$$

A cause de l'identité :

$$3(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd) \equiv (ab)^3(cd)^3 + (ac)^3(db)^3 + (ad)^3(bc)^3 \text{ (*)}, \quad \ldots \quad \text{(A)}$$

cette condition devient

$$(ab)^3(cd)^3 + (ac)^3(db)^3 + (ad)^3(bc)^3 = 0. \quad \ldots \quad \text{(B)}$$

On conclut également de

$$D' = 0,$$

qu'il existe une relation

$$k_1 a_x^3 + k_2 b_x^3 + k_3 c_x^3 + k_4 d_x^3 \equiv 0. \quad \ldots \quad (17)$$

THÉORÈME I. — *L'involution de douze points, ou du troisième ordre et de la quatrième classe, possède trois points triples* (**).

A cause de la relation (17), une telle involution peut être définie par trois formes

$$a_x^3, \quad b_x^3, \quad c_x^3.$$

Les points triples sont donnés par l'équation

$$A_x^3 \equiv (ab)(bc)(ca)a_x b_x c_x = 0.$$

THÉORÈME II. — *L'invariant linéo-linéaire de la forme* A_x^3 *et d'une autre forme* $\lambda_1 a_x^3 + \lambda_2 b_x^3 + \lambda_3 c_x^3$, *est nul.*

THÉORÈME III. — *Les points triples d'une involution du troisième ordre et du premier rang font partie de l'involution.*

(*) C. LE PAIGE, *Sur certains combinants des formes algébriques binaires*, BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELG., t. XLVIII, p. 533.

(**) Voir à ce sujet le Mémoire de M. ROSANES, inséré au tome LXXVI du JOURNAL DE CRELLE, et le Mémoire de M. STURM, inséré au tome LXXXVI du même recueil.

Sur les involutions des différentes classes, voir un travail important de M. EM. WEYR, *Sitzb. der k. Akad. der Wissensch.*, t. LXXIX, avril 1879.

Si dans l'identité (A), nous faisons $d_2 = x_1$, $d_1 = -x_2$, nous obtenons l'identité

$$3(ab)(bc)(ca)a_x b_x c_x \equiv (ab)^3 c_x^3 + (bc)^3 a_x^3 + (ca)^3 b_x^3, \quad \ldots \ldots \quad (C)$$

ce qui démontre le théorème.

Si l'on désigne par J_x^4 le covariant $(ab)a_x^2 b_x^2$ et par $J_x'^4$ le covariant $(cd)c_x^2 d_x^2$, la condition $D' = 0$ peut aussi s'écrire

$$6(JJ')^4 - (ab)^3(cd)^3 = 0.$$

Il résulte de l'équation qui définit les points en involution

$$\lambda_1 a_x^3 + \lambda_2 b_x^3 + \lambda_3 c_x^3 = 0,$$

qu'il suffit, en général, de deux points d'un terne pour déterminer le terne.

Nous avons vu, dans la théorie de l'homographie, qu'il existe des couples de points tels que le troisième point est indéterminé.

La même chose a lieu pour l'involution.

Lorsque

$$\chi_1 \equiv 0, \quad \chi_2 \equiv 0, \quad \chi_3 \equiv 0,$$

on a

$$\Sigma_1 \equiv \Sigma_2 \equiv \Sigma_3 \equiv \mu H_4 \text{ (*)}.$$

On a donc ce théorème :

THÉORÈME IV. — *Les points définis par l'équation*

$$(AA')^2 A_x A'_x = 0,$$

sont tels que le troisième point de l'involution, qui lui correspond, est entièrement indéterminé.

Nous verrons plus loin l'interprétation géométrique de ce fait.

Réciproquement, si deux points sont tels qu'il soit possible de déterminer

(*) On retrouve ainsi un théorème dû à M. APPELL, *Ann. de l'École norm. sup.*, t. V, p. 348, 1876. Voir aussi GARBIERI, *Nuovo teorema algebrico, etc.* p. 35, t. XVI du JOURNAL DE BATTAGLINI. 1878.

deux points distincts qui leur correspondent, ces deux points sont donnés par les racines de l'équation

$$(AA')^2 A_x A'_x = 0,$$

et il existe une infinité de points qui correspondent aux deux points donnés.

Il est inutile de s'arrêter à la démonstration de ce théorème.

Si nous désignons par $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$, les racines des deux équations

$$a_x^3 = 0, \quad b_x^3 = 0,$$

il est visible que l'invariant

$$(ab)^3,$$

est égal à

$$a_0 b_0 (x_1 x_2 x_3 - \tfrac{1}{3}\Sigma x_1 x_2 \Sigma y_i + \tfrac{1}{3}\Sigma x_1 \Sigma y_1 y_2 - y_1 y_2 y_3).$$

Mais on a l'identité

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 x_3 - \tfrac{1}{3}\Sigma x_1 x_2 \Sigma y_1 + \tfrac{1}{3}\Sigma x_1 \Sigma y_1 y_2 - y_1 y_2 y_3 \\ = & \tfrac{1}{3}\left[(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)(x_3 - y_3) + (x_1 - y_2)(x_2 - y_3)(x_3 - y_1) + (x_1 - y_3)(x_2 - y_1)(x_3 - y_2)\right]. \end{aligned}$$

Nous avons, dans d'autres travaux, désigné ces fonctions de six lettres, qui figurent dans le second membre, par $I_{q_1 q_2 q_3}$.

Si nous les introduisons dans l'identité (B), nous en pouvons conclure la proposition suivante :

THÉORÈME V. — *L'involution du troisième ordre et du second rang s'exprime, par la réduction à zéro, d'une somme de produits deux à deux d'invariants* $I_{q_1 q_2 q_3}$.

Le quotient de deux de ces fonctions $I_{q_1 q_2 q_3}$ est un invariant absolu : nous l'avons appelé *rapport anharmonique* du troisième ordre (*).

Nous avons désigné par

$$\mathfrak{I}_{q_1 q_2 q_3},$$

(*) F. FOLIE, *Note sur l'extension de la notion du rapport anharmonique*, BULL. DE L'ACAD., t. XLIV, p. 469.

C. LE PAIGE, *Sur l'extension des théories de l'involution et de l'homographie*, IBID., p. 546.

le rapport

$$\frac{I_{q_1 q_2 q_3}}{I_{123}}.$$

Nous ferons dans le chapitre suivant une étude détaillée de ces fonctions, auxquelles on est amené naturellement, comme on vient de le voir, par la théorie de l'involution.

En désignant par x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3; u_1, u_2, u_3, les racines de quatre équations

$$a_x^3 = 0, \quad b_x^3 = 0, \quad c_x^3 = 0, \quad d_x^3 = 0,$$

la condition d'involution, D, devient

$$\begin{vmatrix} 1 & -\Sigma x_1 & \Sigma x_1 x_2 & -x_1 x_2 x_3 \\ 1 & -\Sigma y_1 & \Sigma y_1 y_2 & -y_1 y_2 y_3 \\ 1 & -\Sigma z_1 & \Sigma z_1 z_2 & -z_1 z_2 z_3 \\ 1 & -\Sigma u_1 & \Sigma u_1 u_2 & -u_1 u_2 u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

On en déduit sans peine la condition d'involution sous la forme suivante

$$\sum_{i=1}^{i=4} p_i (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) \equiv 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

On en peut conclure les diverses formes de l'involution de douze points.

Nous rappellerons seulement la suivante :

Théorème VI. — *Lorsque douze points sont en involution, on a la relation*

$$\mathfrak{J}_{2'}\mathfrak{J}'_{3'} - \mathfrak{J}_3\mathfrak{J}'_{2'} + \mathfrak{J}_{1'}\mathfrak{J}'_{2'} - \mathfrak{J}_2\mathfrak{J}'_1 + \mathfrak{J}_{3'}\mathfrak{J}'_{1'} - \mathfrak{J}_1\mathfrak{J}'_3 = 0 \ (^*).$$

$\mathfrak{J}_1$ désigne la fonction

$$\frac{(x_1 - z_3)(x_2 - y_1)(x_3 - u_2)}{(x_1 - u_2)(x_2 - z_3)(x_3 - y_1)},$$

et $\mathfrak{J}'_1$, la fonction

$$\frac{(x_1 - z_3)(x_2 - y_1)(x_3 - u_2)}{(x_1 - y_1)(x_2 - u_2)(x_3 - z_3)}.$$

(*) C. Le Paige, *A. F. A.*, p. 59.

Les autres fonctions $\mathfrak{J}$ se rapportent aux combinaisons de x_1, x_2, x_3 avec z_1, u_2, y_3; u_1, y_2, z_3; u_1, z_2, y_3; z_1, y_2, u_3; y_1, u_2, z_3.

Nous avons vu que l'on peut considérer une homographie particulière, du troisième ordre et du premier rang, définie par les deux relations

$$f = \Sigma\Sigma\Sigma a_{ikl} x_i y_k z_l = 0,$$
$$f_1 = \Sigma\Sigma\Sigma b_{ikl} x_i y_k z_l = 0.$$

Cette homographie peut se particulariser comme l'homographie la plus générale et donne alors lieu à l'involution, caractérisée par deux relations simultanées, que nous appellerons *involution du troisième ordre et du premier rang*.

Soient

$$f = a_1 x_1 y_1 z_1 + a_2(x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) + a_3(x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + a_3 x_2 y_2 z_2 = 0,$$
$$f_1 = b_1 x_1 y_1 z_1 + b_2(x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) + b_3(x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + b_3 x_2 y_2 z_2 = 0.$$

On voit, d'abord, qu'il existe entre trois ternes de points la relation

$$\mathbf{D}_1 = \left\| \begin{matrix} x_1 y_1 z_1 & x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1 & x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1 & x_2 y_2 z_2 \\ x'_1 y'_1 z'_1 & x'_1 y'_1 z'_2 + x'_1 y'_2 z'_1 + x'_2 y'_1 z'_1 & x'_1 y'_2 z'_2 + x'_2 y'_1 z'_2 + x'_2 y'_2 z'_1 & x'_2 y'_2 z'_2 \\ x''_1 y''_1 z''_1 & x''_1 y''_1 z''_2 + y''_1 x''_2 z''_1 + x''_2 y''_1 z''_1 & x''_1 y''_2 z''_2 + x''_2 y''_1 z''_2 + x''_2 y''_2 z''_1 & x''_2 y''_2 z''_2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Si nous regardons les trois ternes de points comme définis par les équations

$$a_x^3 = 0, \quad b_x^3 = 0, \quad c_x^3 = 0,$$

cette condition peut s'écrire

$$\mathbf{D}'_1 = \left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\| = 0,$$

ou, en employant les notations symboliques

$$(ab)(bc)(ca) a_x b_x c_x \equiv 0.$$

On peut conclure d'une propriété des déterminants rectangulaires, ou de l'identité (C), qu'il existe entre les trois formes a_x^3, b_x^3, c_x^3, une relation linéaire

$$k_1 a_x^3 + k_2 b_x^3 + k_3 c_x^3 = 0. \qquad (19)$$

Théorème VII. — *L'involution du troisième ordre et du premier rang, définie par les conditions* $\mathrm{f} = 0$, $\mathrm{f}_1 = 0$, *possède quatre points doubles* (*).

Nous obtenons l'équation dont les racines représentent des points doubles, en faisant

$$a_{111} = a_1; \quad a_{112} = a_{121} = a_{211} = a_2; \quad a_{122} = a_{212} = a_{221} = a_3; \quad a_{222} = a_4;$$
$$b_{111} = b_1; \quad b_{112} = b_{121} = b_{211} = b_2; \quad b_{122} = b_{212} = b_{221} = b_3; \quad b_{222} = b_4,$$

dans l'équation (α), p. 14, où l'on pose $y_1 = z_1$, $y_2 = z_2$.

On trouve ainsi

$$y_1^4(a_1b_2 - a_2b_1) + 2y_1^3y_2(a_1b_3 - a_3b_1) + y_1^2y_2^2\left[(a_1b_4 - a_4b_1) + 3(a_2b_3 - a_3b_2)\right] + 2y_1y_2^3(a_2b_4 - a_4b_2) + y_2^4(a_3b_4 - a_4b_3) = 0.$$

C'est, comme l'on voit, le Jacobien des deux formes,

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \between x_1,\ x_2)^3,$$
$$(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4 \between x_1,\ x_2)^3.$$

Théorème VIII. — *L'involution du troisième ordre et du premier rang, définie par les conditions* $\mathrm{f} = 0$, $\mathrm{f}_1 = 0$, *possède quatre points de ramification.*

Ces points sont donnés par les racines de l'équation que l'on obtient en posant, dans le discriminant de l'équation (α), les conditions précédentes.

On trouve ainsi l'équation

$$y_1^4\left[(a_1b_3 - a_3b_1)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1)(a_2b_3 - a_3b_2)\right] + \cdots = 0. \qquad (20)$$

(*) Nous avons publié le théorème général dans notre *Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques*, p. 52, et aussi, dans le Bull. de l'Acad., t. XLVI, août 1878.
Voir, à ce sujet, le travail de M. Weyr.

THÉORÈME IX. — *Les ternes de points appartenant à une involution du troisième ordre et du premier rang sont conjugués harmoniques de deux ternes de points* (*).

Pour une raison que nous développerons dans le chapitre suivant, nous avons appelés conjugués harmoniques deux ternes de points définis par les équations

$$a_x^3 = 0, \quad b_x^3 = 0,$$

telles que l'invariant

$$(ab)^3 = 0.$$

La démonstration de ce théorème résulte immédiatement des conditions $f = 0$, $f_1 = 0$.

En effet, soit

$$(c_1, \; c_2, \; c_3, \; c_4 \between x_1, \; x_2)^3 = c_x^3 = 0,$$

l'équation qui représente un terne de points de l'involution.

Les conditions $f = 0$, $f_1 = 0$, peuvent s'écrire

$$a_1c_4 - 3a_2c_3 + 3a_3c_2 - a_4c_1 = 0,$$
$$b_2c_4 - 3b_2c_3 + 3b_3c_2 - b_4c_1 = 0.$$

Réciproquement, lorsque trois ternes de points sont conjugués harmoniques de deux mêmes ternes, ils appartiennent à une involution du troisième ordre et du premeir rang.

On peut définir l'involution de douze points de la manière suivante :

THÉORÈME X. — *Lorsque quatre formes* a_x^3, b_x^3, c_x^3, d_x^3, *sont telles que les invariants* $(\mathrm{ag})^3$, $(\mathrm{bg})^3$, $(\mathrm{cg})^3$, $(\mathrm{dg})^3$, *sont nuls*, g_x^3 *étant une autre forme du troisième ordre, il existe une relation.*

$$k_1a_x^3 + k_2b_x^3 + k_3c_x^3 + k_4d_x^3 = 0.$$

Nous avons vu plus haut (théor. II) que pour une involution caractérisée

(*) Ce théorème, sous sa forme purement analytique, appartient à M. ROSANES.

par l'équation

$$\lambda_1 a_x^3 + \lambda_2 b_x^3 + \lambda c_x^3 = 0,$$

la forme g_x^3, n'est autre chose que le covariant

$$A_x^3 = (ab)(bc)(ca)a_x b_x c_x.$$

On a un théorème analogue pour l'involution de neuf points.

THÉORÈME XI. — *Lorsque trois formes* a_x^3, b_x^3, c_x^3 *sont telles que les covariants* $(a\rho)^3\rho_x$, $(b\rho)^3\rho_x$, $(c\rho)^3\rho_x$, ρ_x^4 *étant une forme du quatrième ordre, sont identiquement nuls, il existe une relation*

$$k_1 a_x^3 + k_2 b_x^3 + k_3 c_x^3 \equiv 0.$$

Pour une involution caractérisée par l'équation

$$\lambda_1 a_x^3 + \lambda_2 b_x^3 = 0, \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

la forme ρ_x^4 est égale au covariant

$$-2IJ + 6\Theta^2 - 24\triangle\nabla.$$

Dans cette expression

$$I = (ab)^3, \quad J = (ab)a_x^2 b_x^2, \quad \Theta = (ab)^2 a_x b_x, \quad \triangle = \tfrac{1}{2}(aa')^2 a_x a'_x, \quad \nabla = \tfrac{1}{2}(bb')^2 b_x b'_x.$$

Lorsque l'involution est définie par l'équation

$$\lambda_1 a_x^3 + \lambda_2 b_x^3 = 0,$$

les points doubles sont donnés, comme l'on sait, par l'équation

$$(ab)a_x^2 b_x^2 = 0.$$

Ce sont les mêmes que ceux de l'involution définie par les deux conditions.

$$\left.\begin{aligned} f &= a_0 x_1 y_1 z_1 + a_1(x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) + a_2(x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + a_3 x_2 y_2 z_2 = 0, \\ f_1 &= b_0 x_1 y_1 z_1 + b_1(x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) + b_2(x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + b_3 x_2 y_2 z_2 = 0. \end{aligned}\right\} (22)$$

Les points de ramification de l'involution (21) sont donnés par l'équation

$$\psi_x^4 = -3(IJ + 3L_1 a_x^3 + 3L_2 b_x^3) = 0. \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Ceux de l'involution (22) sont donnés, au contraire, par l'équation

$$\varphi_x^4 = \Theta^2 - 4\triangle\nabla = 0. \qquad (24)$$

On peut vérifier sans peine que les covariants ψ_x^4, φ_x^4, J, sont liés par la relation

$$\psi_x^4 - 9\varphi_x^4 + 12IJ \equiv 0 \qquad (25)$$

En conséquence, on a le théorème suivant :

THÉORÈME XII. — *Les points doubles, communs aux involutions* (21) *et* (22), *et leurs points de ramification, sont douze points en involution du quatrième ordre et de la troisième classe.*

M. EM. WEYR a signalé d'autres propriétés de ces groupes de quatre points (*).

De l'identité (25), on peut conclure cette relation

$$IJ - L_1 a_x^3 - L_2 b_x^3 - \Theta^2 + 4\triangle\nabla \equiv 0. \qquad (26)$$

Des expressions précédentes de ρ_x^4, ψ_x^4, φ_x^4, on peut aussi déduire les identités

$$\rho_x^4 - \psi_x^4 + 5\varphi_x^4 - 10IJ \equiv 0, \qquad (27)$$

$$6\rho_x^4 - \psi_x^4 - 27\varphi_x^4 \equiv 0. \qquad (28)$$

La théorie de l'involution du troisième ordre et de la troisième classe conduit, comme l'on voit, à l'étude d'un certain nombre de combinants de deux cubiques, de la forme (2, 2 ; 4), qui s'expriment tous en fonction de deux d'entre eux.

On peut encore exprimer d'une autre façon que trois formes a_x^3, b_x^3, c_x^3 sont en involution.

Soit

$$J_x^4 = (ab)a_x^2 b_x^2,$$

$$w_x^2 = (cc')^2 c_x c'_x,$$

(*) Voir aussi : C. LE PAIGE, *Ueber eine Relation zwischen den singulären Elementen cubischer Involutionen* et *Bemerkungen ueber cubische Involutionen.* SITZB. DER K. AKAD. DER WISS. ZU WIEN. Bd. LXXXI, pp. 159 et 845.

cette condition peut s'écrire

$$(\mathrm{J}c)^3\mathrm{J}_x \cdot c_x^3 - 3(\mathrm{J}w)\mathrm{J}_x^3 w_x \equiv 0 \ (^*).$$

On peut aussi exprimer l'involution de neuf points par l'égalité de rapports anharmoniques du troisième ordre.

Soient

$$x_1,\ x_2,\ x_3;\quad y_1,\ y_2,\ y_3;\quad z_1,\ z_2,\ z_3,$$

trois ternes de points en involution.

On a, entre eux, l'égalité suivante :

$$\frac{(x_1 - y_2)(y_1 - z_2)(z_1 - x_2)}{(x_1 - z_2)(y_1 - x_2)(z_1 - y_2)} = \frac{(x_1 - z_3)(y_1 - x_3)(z_1 - y_3)}{(x_1 - y_3)(y_1 - z_3)(z_1 - x_3)},$$

et d'autres analogues.

Ce n'est pas, d'ailleurs, la seule façon d'exprimer que des séries de points sont en involution, au moyen du rapport anharmonique de troisième ordre.

On a, par exemple,

$$\prod_{i=1}^{i=3} \frac{(x_1 - y_i)(x_2 - z_i)(x_3 - u_i)}{(u_i - x_1)(y_i - x_2)(z_i - x_3)} = -1 \ (^{**}).$$

Cette relation a lieu entre quatre ternes de points appartenant à l'involution du troisième ordre et du premier rang et s'étend aux ordres supérieurs.

Nous mentionnerons encore les propriétés suivantes, dont nous aurons l'occasion de tirer parti dans la suite de notre travail.

Théorème XIII. — *Lorsque deux involutions du troisième ordre et du premier rang ont un groupe commun, deux groupes non communs, pris dans chaque série, sont en involution du troisième ordre et du second rang.*

(*) C. Le Paige, *Sur certains covariants d'un système cubo-biquadratique*, Bull. de l'Acad., t. XLVI, p. 769.

(**) F. Folie, *Éléments d'une théorie des faisceaux*, p. 66.

THÉORÈME XIV. — *Si quatre ternes de points sont en involution, du troisième ordre et du second rang, on peut toujours trouver un terne de points en involution du premier rang, avec chaque couple de ternes de points fixes pris dans cette involution* (*).

Nous avons

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0;$$

d'où

$$ka_i + k'b_i + k''c_i + k'''d = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Par suite, si nous posons

$$lA_i + ka_i + k'b_i = 0,$$

nous avons

$$lA_i - k''c_i - k'''d_i = 0.$$

(*) Le théorème géométrique équivalent est dû à M. CREMONA, *Einleitung in eine Theorie der ebenen Curven*, p. 131.

CHAPITRE III.

RAPPORT ANHARMONIQUE DU TROISIÈME ORDRE.

Nous avons, dans quelques travaux antérieurs, étudié spécialement pour le troisième ordre, la notion du rapport anharmonique et sa liaison avec la théorie de l'homographie et de l'involution.

Cependant, nous n'avions pu, jusqu'ici, faire du rapport anharmonique du troisième ordre, une étude analogue à celle que M. CAYLEY et, après lui, CLEBSCH ont fait du rapport anharmonique du second ordre (*).

Nous nous proposons aujourd'hui d'entreprendre ce travail (**).

On sait que si l'on représente par

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,$$

les racines de l'équation

$$a_x^4 = 0, \qquad (29)$$

le rapport anharmonique σ, des quatre points représentés par les racines, est donné par l'équation réciproque du sixième ordre

$$\frac{(1-\sigma+\sigma^2)^3}{(1+\sigma)^2(2-\sigma)^2(1-2\sigma)^2} = \frac{i^3}{24j^2}, \qquad (30)$$

(*) CAYLEY. V. *Mem. upon Quantics*, PHILOS. TRANS. t. CXLVIII.

CLEBSCH, *Theor. der binären algebraischen Formen*, p. 169, et *Journal de Crelle*, t. LIX.

La théorie purement analytique de cette fonction de quatre lettres avait déjà été donnée par M. HERMITE, dans son beau travail *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées*, J. DE CRELLE, t. LII, pp. 1 et suiv.

(**) La plupart des résultats contenus dans ce chapitre sont consignés dans un pli cacheté, déposé par M. C. Le Paige dans la séance du 1er février 1879.

où i et j représentent les invariants

$$(ab)^4, \quad (ab)^2(bc)^2(ca)^2$$

de la quartique

$$a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = \cdots.$$

L'équation (30) donne, en même temps, l'interprétation géométrique des deux relations

$$i = 0, \quad j = 0;$$

elle permet, en outre, de trouver l'expression de ces deux invariants au moyen des fonctions

$$u = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4), \quad v = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3),$$

et de l'invariant absolu $\frac{i^3}{j^2}$ au moyen du rapport σ, comme l'exige la théorie des formes algébriques.

Sans avoir résolu toutes les questions analogues, pour le troisième ordre, nous avons néanmoins abordé la plupart d'entre elles et nous en avons poursuivi assez loin l'étude.

Bien que le degré élevé des équations auxquelles on arrive ne permette pas de tirer, des résultats obtenus, toute l'utilité qu'on aurait pu s'en promettre, nous avons cru nécessaire de compléter, autant que possible, le travail que nous avions entrepris.

Tout d'abord, nous désirions présenter, dans tous leurs détails, les notions qui pourraient trouver leur emploi dans la théorie des cubiques planes.

De plus, outre l'intérêt analytique que nous semblent offrir ces questions, les surfaces du troisième ordre, dont le mode de génération est complétement analogue à celui des coniques, pourront donner lieu à quelques études, même après les travaux si complets d'illustres géomètres, parmi lesquels nous citerons surtout Steiner et M. Cremona, où les recherches actuelles trouvent d'utiles applications.

Soit

$$a_x^6 = 0,$$

une équation du sixième ordre, dont nous représenterons les racines par

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6.$$

Nous conviendrons de représenter, par le symbole (ik), la différence

$$(x_i - x_k).$$

Nous avons précédemment appelé $I_{q_1 q_2 \ldots q_n}$, des expressions telles que

$$(12)(34)(56).$$

Cette notation, utile, nous semble-t-il, dans le cas général, offrirait, ici, le désavantage d'être assez compliquée : nous n'en ferons pas usage dans le présent travail.

Il est visible que l'on peut former quinze de ces quantités (*).

Ce sont

$$\begin{array}{lll}
(12)\ (35)\ (46), & (12)\ (34)\ (65), & (12)\ (36)\ (54), \\
(13)\ (24)\ (56), & (13)\ (25)\ (64), & (13)\ (26)\ (45), \\
(14)\ (25)\ (36), & (14)\ (23)\ (65), & (14)\ (26)\ (53), \\
(15)\ (26)\ (34), & (15)\ (23)\ (46), & (15)\ (24)\ (63), \\
(16)\ (23)\ (54), & (16)\ (25)\ (43), & (16)\ (24)\ (35).
\end{array}$$

Nous les désignons par

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5;\quad \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4;\ \beta_5,\quad \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \gamma_5.$$

Le quotient de deux d'entre elles est, on le voit, un des invariants que nous avons représentés par $\mathfrak{I}_{q_1 q_2 \ldots q_n}$.

On peut former deux cent dix de ces fonctions, inverses deux à deux. Nous retrouverons plus loin, d'une autre manière, ce résultat, évident par la théorie des combinaisons.

Cependant, parmi ces cent cinq rapports distincts, il n'en est que soixante qui contiennent les six lettres x_1, x_2, x_3, ... x_6.

Comme il est facile d'écrire, à l'aide des quinze quantités données plus haut, ces soixante rapports anharmoniques, nous nous dispenserons de les reqroduire ici.

(*) Terquem avait déjà donné ce résultat, *Nouv. Ann. de math.*, 1re série, t. VI, p. 68, et t. XIII, pp. 24 et 90. Cependant le savant rédacteur des *Nouvelles Annales* ne semble pas avoir aperçu la corrélation intime qui existe entre ces fonctions et le rapport anharmonique, au double point de vue de l'Analyse et de la Géométrie.

Nous allons maintenant nous occuper, d'une façon plus spéciale, des fonctions α, β, γ, et chercher les relations qui existent entre elles.

On connaît, depuis longtemps, les relations qui existent entre les rapports anharmoniques du second ordre, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5, σ_6, relations qui peuvent se déduire de l'équation (30).

Elles résultent, d'ailleurs, de l'identité

$$\begin{vmatrix} \alpha-\delta & \beta-\delta & \gamma-\delta \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Pour le troisième ordre, on peut également écrire le déterminant, identiquement nul,

$$\begin{vmatrix} \alpha-\varpi & \beta-\varpi & \gamma-\varpi & \delta-\varpi \\ \alpha-\varepsilon & \beta-\varepsilon & \gamma-\varepsilon & \delta-\varepsilon \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv 0.$$

En le développant, par le théorème de Laplace, on trouve :

$$\begin{aligned} &(\alpha-\varpi)(\beta-\varepsilon)(\delta-\gamma)-(\beta-\varpi)(\alpha-\varepsilon)(\delta-\gamma)+(\alpha-\varpi)(\gamma-\varepsilon)(\beta-\delta)-(\gamma-\varpi)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\delta) \\ +&(\alpha-\varpi)(\delta-\varepsilon)(\gamma-\beta)-(\delta-\varpi)(\alpha-\varepsilon)(\gamma-\beta)+(\beta-\varpi)(\gamma-\varepsilon)(\alpha-\delta)-(\gamma-\varpi)(\beta-\varepsilon)(\alpha-\delta) \\ +&(\beta-\varpi)(\delta-\varepsilon)(\gamma-\alpha)-(\delta-\varpi)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\alpha)+(\gamma-\varpi)(\delta-\varepsilon)(\beta-\alpha)-(\delta-\varpi)(\gamma-\varepsilon)(\beta-\alpha)\equiv 0; \end{aligned}$$

ou, en remplaçant α, β, γ, δ, ρ, $\tilde{\omega}$, par les symboles 1, 2, 3, 4, 5, 6,

$$\begin{aligned} &(16)(25)(34)-(15)(26)(43)+(16)(24)(35)-(15)(24)(36) \\ +&(16)(45)(32)-(15)(32)(46)+(14)(26)(35)-(14)(25)(36) \\ +&(13)(26)(54)-(14)(46)(53)+(12)(36)(54)-(12)(35)(64)\equiv 0. \end{aligned}$$

Cependant, il existe d'autres relations, plus simples, que nous avons eu déjà l'occasion de publier.

On trouve, par exemple,

$$(12)(34)(56)+(14)(36)(52)+(16)(32)(54)=(14)(32)(56)+(12)(36)(54)+(16)(34)(52),$$

$$[(12)(34)(56)][(14)(36)(52)][(16)(32)(54)]=[(14)(32)(56)][(12)(36)(54)][(16)(34)(52)].$$

Au reste, ces identités dérivent des relations, au nombre de quinze, qui lient les quantités α, β, γ, et qui ont la forme

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0, \quad \text{etc.}$$

Il est facile d'écrire les autres.

Nous ne nous arrèterons pas à faire voir qu'elles se réduisent, en réalité, à dix relations linéaires.

Par une méthode dont nous ferons encore usage plus bas, on en peut déduire les valeurs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_5$; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5$, en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$.

On trouve ainsi :

$$\left.\begin{aligned}
2\beta_1 &= -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5,\\
2\beta_2 &= -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5,\\
2\beta_3 &= \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5,\\
2\beta_4 &= -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5,\\
2\beta_5 &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5,\\
2\gamma_1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5,\\
2\gamma_2 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5,\\
2\gamma_3 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5,\\
2\gamma_4 &= \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5,\\
2\gamma_5 &= -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Il nous reste à chercher la liaison qui existe entre les α; pour cela, transformons les variables de la sextique, par une substitution unimodulaire, et telles qu'aux valeurs x_1, x_2, correspondent les valeurs ∞, 0.

Les quantités α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, n'auront pas varié par la substitution et nous sommes conduits aux équations :

$$\left.\begin{aligned}
&a) \ \ldots\ldots\ldots & x_3x_4 - x_3x_6 - x_4x_5 + x_5x_6 &= \alpha_1,\\
&b) \ \ldots\ldots\ldots & - x_4x_5 + x_4x_6 &= \alpha_2,\\
&c) \ \ldots\ldots\ldots & - x_4x_5 + x_4x_6 &= \alpha_3,\\
&d) \ \ldots\ldots\ldots & - x_3x_6 + x_4x_6 &= \alpha_4,\\
&e) \ \ldots\ldots\ldots & - x_3x_6 + x_3x_4 &= \alpha_5
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

La combinaison de $b)$ et $d)$, donne

$$(x_4x_6)^2 - (\alpha_2 + \alpha_4)x_4x_6 + \alpha_2\alpha_4 = x_3x_5 \cdot x_4x_6. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

On a de même

$$(x_3x_5)^2 + (\alpha_3 + \alpha_5)x_3x_5 + \alpha_3\alpha_5 = x_3x_5 . x_4x_6. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Enfin, la combinaison des cinq équations (32) conduit à

$$2x_4x_6 - 2x_3x_5 = \Sigma\alpha - 2\alpha_1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Posons

$$x_4x_6 = y, \quad x_3x_5 = x. \quad \alpha_2\alpha_4 = \mathrm{A}', \quad \alpha_2 + \alpha_4 = \mathrm{B}',$$

$$\alpha_3\alpha_5 = \mathrm{A}, \quad \alpha_3 + \alpha_5 = \mathrm{B}. \quad \frac{\Sigma\alpha - 2\alpha_1}{2} = \mathrm{S}.$$

Nous aurons

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{A} - xy = 0, \\ y^2 - \mathrm{B}'y + \mathrm{A}' - xy = 0, \\ y - x = \mathrm{S}; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

ou

$$(\mathrm{B} - \mathrm{S})x + \mathrm{A} = 0,$$

$$(\mathrm{S} - \mathrm{B}')x - (\mathrm{B}'\mathrm{S} - \mathrm{S}^2 - \mathrm{A}') = 0.$$

Le résultant de ces deux équations est donc nul, et l'on a

$$(\mathrm{B} - \mathrm{S})(\mathrm{B}'\mathrm{S} - \mathrm{S}^2 - \mathrm{A}') + \mathrm{A}(\mathrm{S} - \mathrm{B}') = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Soient, par exemple,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 5, \quad x_6 = 6.$$

On en conclut

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 27, \quad \alpha_4 = 16, \quad \alpha_5 = -5.$$

$$\mathrm{A} = -135, \quad \mathrm{B} = 22, \quad \mathrm{A}' = 64, \quad \mathrm{B}' = 20, \quad \mathrm{S} = 19.$$

En substituant dans (37), on obtient

$$3(20.19 - 19^2 - 64) + 135 = -3.45 + 135 = 0.$$

En remplaçant, dans (37), A, B, A′, B′, S par leurs valeurs et développant, on voit que cette identité devient :

$$\begin{aligned}&\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+\alpha_4^3+\alpha_5^3-\alpha_1^2(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-\alpha_2^2(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)\\&-\alpha_3^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)-\alpha_4^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5)-\alpha_5^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\\&+2(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_5+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_5+\alpha_1\alpha_4\alpha_5+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_5+\alpha_2\alpha_4\alpha_5+\alpha_3\alpha_4\alpha_5)\equiv 0,\end{aligned}$$

ou encore

$$2\Sigma\alpha^3-\Sigma\alpha^2\Sigma\alpha+2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\equiv 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Les relations (31) et (38) permettent, comme l'on voit, de ramener les quinze fonctions α, β, γ, à quatre d'entre elles, et les deux cent dix rapports anharmoniques aux trois rapports

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_4}.$$

Il est visible que toute fonction symétrique, Θ, de ces quantités α, β, γ, reste invariable par les substitutions, opérées sur les racines de la sextique, qui laissent invariable la racine carrée du discriminant de cette forme.

Nous savons donc, par un théorème de LAGRANGE, que ces fonctions pourront s'exprimer rationnellement au moyen des coefficients de la sextique, en s'adjoignant la racine carrée du discriminant (*).

En conséquence; si Δ représente le discriminant de a_x^6, les quantités α, β, γ seront racines d'une équation qui peut s'écrire :

$$z^{15}+a_2z^{13}+a_4z^{11}+a_5\sqrt{\Delta}z^{10}+a_6z^9+\cdots+a_{15}\sqrt{\Delta}=0. \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Nous pourrions, en nous fondant sur les propriétés des racines de cette équation, en calculer les coefficients.

En effet, si l'on remplace les variables x, y, de la sextique, par des variables nouvelles X, Y, liées aux premières par les relations

$$x=m\mathrm{X}+n\mathrm{Y},$$
$$y=m'\mathrm{X}+n'\mathrm{Y},$$

(*) LAGRANGE, OEuvres, t. III, p. 374. V. aussi C. JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 265.

et si l'on représente par δ, le déterminant

$$\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix},$$

les racines de l'équation (39) deviennent

$$\delta^3 z_1,\quad \delta^3 z_2,\quad \text{etc.}$$

Par suite, l'équation transformée

$$Z^{16} + a_2' Z^{13} + a_4' Z^{11} + a_6' \sqrt{\Delta'} Z^{10} + \cdots + a_{15}' \sqrt{\Delta'} = 0,$$

a pour racines

$$\delta^3 z_1,\quad \delta^3 z_2,\quad \ldots\ldots$$

on en déduit

$$a_2' = \delta^6 a_2,\quad a_4' = \delta^{12} a_4,\quad a_6' = a_6,\ \text{etc.}$$

En conséquence, les coefficients a_2, a_4, a_6, sont des invariants de la sextique, respectivement du second, du quatrième, du sixième ordre.

Cependant, il nous a semblé plus rapide de nous servir des résultats obtenus par le P. JOUBERT, dans son beau travail *Sur l'équation du sixième degré* (*).

Dans ce Mémoire, l'auteur représente par

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4;\quad v_0,\ v_1,\ \ldots\ v_4;\quad w_0,\ w_1,\ \ldots\ w_4,$$

des fonctions telles que

$$a_0\big[(12)(34)(56) - (14)(36)(52)\big],$$

et forme, à l'aide de ces quantités, des fonctions nouvelles,

$$U,\ U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,$$

racines de l'équation

$$U^6 + 2.3.5AU^4 + 2^2.3^2.5(3A^2 - 25B)U^2 + \sqrt{\Delta}U + 2^3.3^3.5(250C + 25AB - A^3) = 0. \quad (40)$$

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 1867.

Dans cette équation

$$A = (ab)^6, \quad B = (ii')^4, \quad C = (ii')^2 (i'i'')^2 (i''i)^2,$$

i étant égal à

$$(ab)^4 a_x^2 b_x^2.$$

Or, il résulte du travail de ce savant géomètre que les sommes des racines prises deux à deux, de l'équation en U, sont précisément les fonctions que nous avons eu à considérer.

En employant la méthode de LAGRANGE, on calcule aisément les coefficients de l'équation (39).

Nous posons, pour abréger :

$$2.3.5A = A',$$
$$2^2.5^2.5(3A^2 - 25B) = B',$$
$$2^5.5^3.5(250C + 25AB - A^3) = C'.$$

En désignant par S_p les sommes des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation (40), par Σ_p, les sommes des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation (39), et conservant à a_2, a_4, a_5, etc., la même signification que tantôt, nous trouvons :

$$S_1 = 0,$$
$$S_2 = -2A',$$
$$S_3 = 0,$$
$$S_4 = 2A'^2 - 4B',$$
$$S_5 = 5\sqrt{\Delta},$$
$$S_6 = -2A'^3 + 6A'B' - 6C',$$
$$S_7 = -7A'\sqrt{\Delta},$$
$$S_8 = 2A'^4 - 8A'^2B' + 4B'^2 + 8A'C',$$
$$S_9 = 9A'^2\sqrt{\Delta} - 9B'\sqrt{\Delta},$$
$$S_{10} = -2A'^5 + 10A'^3B' - 10A'B'^2 - 10A'^2C' + 10B'C' + 5\Delta,$$
$$S_{11} = -11A'^3\sqrt{\Delta} + 22.A'B'\sqrt{\Delta} - 11C'\sqrt{\Delta},$$
$$S_{12} = 2A'^6 - 12A'^4B' + 18A'^2B'^2 + 12A'^3C' - 24A'B'C' - 12A'\Delta - 4B'^3 + 6C'^2,$$
$$S_{13} = (13A'^4 - 39A'^2B' + 26A'C' + 13B'^2)\sqrt{\Delta},$$
$$S_{14} = -2A'^7 + 14A'^5B' - 28A'^3B'^2 - 14A'^4C' + 42A'^2B'^2C' + 21A'^2\Delta + 14A'B'^3$$
$$- 14A'C'^2 - 14B'^2C' - 14B'\Delta.$$
$$S_{15} = (-15A'^5 + 60A'^3B' - 45A'^2C' - 45A'B'^2 + 30B'C' + 5\Delta)\sqrt{\Delta}.$$

On en déduit les valeurs suivantes de Σ_p; nous les avons calculées jusqu'à $p = 14$, ces valeurs étant les seules qui doivent servir à la détermination des a.

$$\Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 = -8A', \quad \Sigma_3 = 0, \quad \Sigma_4 = 8A'^2 + 8B'.$$

$$\Sigma_5 = -50\sqrt{\Delta}, \quad \Sigma_6 = -8A'^3 - 36A'B' + 156C'.$$

$$\Sigma_7 = 196A'\sqrt{\Delta}, \quad \Sigma_8 = 8A'^4 + 80A'^2B' - 640A'C' + 72B'^2,$$

$$\Sigma_9 = -(486A'^2 + 270B')\sqrt{\Delta},$$

$$\Sigma_{10} = -8A'^5 - 140A'^3B' - 340A'B'^2 + 1820A'^2C' - 20B'C' + 620\Delta.$$

$$\Sigma_{11} = (968A'^3 + 1694A'B' + 25058C')\sqrt{\Delta},$$

$$\Sigma_{12} = 8A'^6 - 3744A'^4B' + 996A'^2B' - 4176A'^3C' + 1416A'B'C' - 3876A'\Delta \\ + 248B'^3 + 4380C'^2.$$

$$\Sigma_{13} = (-13^2.109A'^4 + 13.1908A'^2B' + 13.17916A'C' - 13.1219B'^2)\sqrt{\Delta}.$$

$$\Sigma_{14} = -8A'^7 - 1400A'^5B' - 14.47A'^3B'^2 + 14.594A'^4C' + 14.636A'^2B'C' \\ + 14.1033A'^2\Delta - 14.126A'B'^3 - 14.2188A'C'^2 + 14.178B'^2C' + 14.1036B'\Delta.$$

Nous avons cru utile de reproduire ces deux séries de valeurs, qui seront peut-être de nature à être employées dans d'autres recherches.

A l'aide de ces quantités, on forme les coefficients a_2, a_4, etc.

On trouve ainsi :

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 4A', \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 6A'^2 - 2B', \quad a_5 = 10,$$

$$a_6 = 4A'^3 - 2A'B' - 26C', \quad a_7 = -12A', \quad a_8 = A'^4 + 2A'^2B' - 24A'C' - 7B'^2,$$

$$a_9 = -2A'^2 - 10B', \quad a_{10} = 2A'^3B' - 6A'B'^2 - 18A'^2C + 54B'C' - 12\Delta.$$

$$a_{11} = -2A'B' + 2538C'.$$

$$a_{12} = -294A'^4B' + A'^2B'^2 + 48A'^3C' - 218A'B'C' - 5A'\Delta - 4B'^3 - 27C'^2,$$

$$a_{13} = -13.99A'^4 + 2376A'^2B' + 26540A'C' - 1089B'^2,$$

$$a_{14} = -A'^2\Delta - 712B'\Delta,$$

$$a_{15} = -411\Delta.$$

Il resterait à former l'équation qui a pour racines les rapports anharmoniques du troisième ordre que l'on peut former en combinant les six racines de la sextique de toutes les manières possibles.

Soit, pour un instant,

$$F(z) = 0,$$

l'équation (39), et représentons par z_1, z_2, ... z_{15}, les racines de cette équation.

Il est visible que l'équation

$$F(z_1 x) = 0$$

aura pour racines les rapports $\frac{z_1}{z_1}$, $\frac{z_2}{z_1}$, ... $\frac{z_{15}}{z_1}$, parmi lesquels le rapport 1.

Par suite

$$\frac{F(z_1 x) F(z_2 x) \dots F(z_{15} x)}{(x-1)^{15}} = 0$$

sera l'équation qui aura pour racines les rapports anharmoniques des six points.

On voit que cette équation est du deux cent dixième ordre; on s'aperçoit aussi, par le mode de formation, qu'elle est réciproque.

Symboliquement, elle peut s'écrire

$$\frac{R\,\{F(z_1),\ F(z_1 x)\}}{(x-1)^{15}} = 0. \quad \dots\dots\dots \quad (41)$$

L'équation (41) a des racines telles que

$$\frac{(12)(34)}{(13)(24)},\quad \frac{(13)(24)}{(14)(23)},\quad \frac{(14)(23)}{(12)(34)} \text{ et leurs inverses.}$$

Elle est donc divisible par le facteur

$$24(1 - x + x^2)^3 j^2 - i^3 (1-x)^2 (2-x)^2 (1-2x)^2,$$

où i et j représentent le quadrinvariant et le cubinvariant de

$$\frac{(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6 \between x, y)^6}{(xy_5 - x_5 y)(xy_6 - x_6 y)}, \quad \dots\dots\dots \quad (D)$$

et par tous les autres facteurs analogues répondant aux combinaisons 1, 2; 3, 4, etc., au nombre de quinze.

Le produit de ces quinze facteurs est évidemment un polynôme du quatre-vingt-dixième ordre, dont tous les coefficients sont des fonctions symétriques des racines de l'équation

$$a_x^6 = 0,$$

et par conséquent exprimables en fonction des coefficients de la sextique.

Il en résulte que le premier membre de l'équation (41) est décomposable en deux facteurs, respectivement du cent vingtième ordre et du quatre-vingt-dixième, dont le premier, égalé à zéro, a pour racines les cent vingt rapports anharmoniques du troisième ordre.

Revenons à l'équation (39), que nous écrirons

$$V_1(z) = f(z) + \sqrt{\Delta}\,\varphi(z) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

et voyons quelle pourrait être la signification géométrique du discriminant de la forme $V_1(z)$.

Les différences des racines de l'équation (42) sont de la forme suivante :

$$(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (\alpha_1 - \alpha_3), \quad \text{etc.}$$

Parmi ces différences, il en existe quinze qui sont les facteurs de l'invariant gauche E de la sextique.

Ces facteurs, d'après une remarque du P. Joubert, ne sont autre chose que les différences des racines de l'équation en U.

Or, ces racines peuvent s'écrire, en changeant un peu la notation,

$$\begin{aligned}
8U_1 &= 2\Sigma\alpha, \\
8U_2 &= 8\alpha_1 - 2\Sigma\alpha, \\
8U_3 &= 8\alpha_2 - 2\Sigma\alpha, \\
8U_4 &= 8\alpha_3 - 2\Sigma\alpha, \\
8U_5 &= 8\alpha_4 - 2\Sigma\alpha, \\
8U_6 &= 8\alpha_5 - 2\Sigma\alpha.
\end{aligned}$$

Les différences sont donc

$$8\alpha_1 - 4\Sigma\alpha, \quad 8\alpha_2 - 4\Sigma\alpha, \quad \ldots\ldots \quad 8\alpha_5 - 4\Sigma\alpha,$$

et les différences des α.

Les premières sont

$$4(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5),\quad 4(\alpha_2-\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5),\quad 4(\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_4-\alpha_5),$$
$$4(\alpha_4-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_5),\quad 4(\alpha_5-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4),$$

ou

$$2(\beta_2-\alpha_4),\quad 2(\gamma_3-\alpha_5),\quad 2(\gamma_2-\alpha_1),\quad 2(\gamma_1-\alpha_2),\quad 2(\beta_1-\alpha_3).$$

Mais on a

$$\gamma_4-\alpha_5=\beta_5-\alpha_2=\gamma_2-\alpha_3=\beta_3-\alpha_4,$$
$$\gamma_2-\beta_4=\alpha_1-\alpha_2=\beta_3-\gamma_1=\gamma_4-\gamma_5,$$

et ainsi de suite.

Par conséquent, chaque facteur de l'invariant gauche entre quatre fois dans le produit des différences des racines de (42), et huit fois dans le discriminant.

On a donc

$$\Delta(V_1)=E^8.P.$$

P contient le produit des carrés des quarante-cinq autres différences.

Parmi celles-ci figure

$$\alpha_1-\beta_1,\quad \alpha_1-\gamma_1,\quad \beta_1-\gamma_1,\quad \alpha_2-\beta_2,\quad \alpha_2-\gamma_2,\quad \text{etc.},$$

au nombre de quinze.

Puis

$$\alpha_1-\beta_2,\quad \alpha_1-\beta_4,\quad \beta_1-\beta_4,\quad \text{etc.}$$

Le produit des quinze premiers contient donc

$$(12)^3(13)^3(14)^3(15)^3(16)^3\ldots,$$

puis

$$(23)^3(24)^3(25)^3(26)^3,\ \text{etc.}$$

Par suite

$$\Delta(V_1)=E^8\Delta^3P'.$$

Il reste encore à chercher la signification géométrique de P′.

Or, par exemple,

$$\alpha_1-\beta_2=(46)\{(12)(35)+(13)(25)\}.$$

La partie entre crochets s'annule lorsque quatre des points représentés par la sextique sont conjugués harmoniques du second ordre.

Par conséquent $P' = 0$ indique que quatre des six points représentés par la sextique sont conjugués harmoniques.

Dans ce cas, l'un des facteurs j des équations (D) s'annule.

D'où

$$P' = (j_1 j_2 \ldots j_{15})^2.$$

D'après le mode de formation, il est visible que le produit des j est une fonction symétrique des racines de a_x^6 et un invariant de cette forme.

L'équation

$$V_2(z) = f(z) - \sqrt{\Delta}\,\varphi(z) \qquad (43)$$

a les mêmes racines que l'équation (42), prises en signe contraire.

Formons encore l'équation

$$V = f^2(z) - \Delta\varphi^2(z). \qquad (44)$$

D'après un théorème connu

$$\Delta(V) = \Delta(V_1)\Delta(V_2)\,R^2(V_1,\ V_2).$$

Il est visible que

$$\Delta(V_1) = \Delta(V_2).$$

Il reste encore à examiner la forme des facteurs de

$$R(V_1,\ V_2).$$

Les racines de (42) étant

$$\alpha_1,\ \alpha_2 \ldots \gamma_5,$$

celles de (43) seront

$$-\alpha_1,\ -\alpha_2,\ \ldots\ -\gamma_5.$$

Par conséquent

$$R(V_1,\ V_2) = 2^{15}\alpha_1\alpha_2\ldots\gamma_5\left[(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_1+\beta_2)\ldots(\gamma_4+\gamma_5)\right]^2.$$

Or, parmi ces facteurs,

$$\alpha_1+\beta_1 = -\gamma_1,\quad \alpha_3+\gamma_4 = -\gamma_1,\quad \alpha_5+\gamma_2 = -\gamma_1.$$

En conséquence, R est divisible par γ_1^7, et de même par α_1^7, β_1^7, etc.

Des cent cinq facteurs de la quantité entre crochets, il en reste soixante correspondants aux facteurs de E.

Nous avons, par exemple,

$$\alpha_1 + \alpha_2, \quad \gamma_2 + \beta_4, \quad \beta_3 + \gamma_1, \quad \gamma_4 + \gamma_5.$$

Lorsque $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, les six points sont en *évolution*.

De même, lorsque

$$\gamma_2 + \beta_4 = (15)(23)(46) + (13)(26)(45) = 0.$$

Donc

$$R(V_1, V_2) = 2^{15}(\alpha_1\alpha_2 \ldots \gamma_5)^7\Pi^2.$$

Or

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \gamma_6 = 411\sqrt{\Delta}\Delta.$$

Par suite

$$\Delta(V) = \Delta^2(V_1)2^{30}.411^{14}\Delta^{21}\Pi^4.$$

Or

$$\Delta(V_1) = E^{16}\Delta^6P'^2.$$

On a enfin

$$\Delta(V) = m.E^{16}\Delta^{27}.P'^2\Pi^4. \qquad (45)$$

Nous avons désigné, dans un autre travail, par fonction anharmonique, la somme que l'on obtient en multipliant chacun des invariants tels que α, β, γ, par une constante et ajoutant entre eux ces différents produits, en ayant soin de choisir ces constantes de telle sorte que la somme soit nulle.

Reprenons cette notion.

Séparons, pour cela, les variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, en deux groupes, par exemple de la manière suivante :

$$(x_1, x_3, x_5), \quad (x_2, x_4, x_6),$$

et formons les fonctions

$$(12)(34)(56) = I_{246},$$
$$(14)(36)(52) = I_{462},$$

et ainsi de suite.

La fonction anharmonique est

$$m_{246}I_{246} + m_{462}I_{462} + \cdots = 0.$$

Nous pouvons observer que, pour le second ordre, les quatre points représentés par une quartique

$$a_x^4 = 0,$$

seront conjugués harmoniques, si

$$m_{24} = m_{42}.$$

Nous avons étendu cette définition aux ordres supérieurs.

Nous dirons donc, dans le cas actuel, que six points sont conjugués harmoniques lorsque

$$m_{246} = m_{462} = \cdots.$$

Mais alors la fonction anharmonique ne diffère que par un facteur numérique de

$$x_1x_3x_5 - \tfrac{1}{3}(x_1x_3 + x_3x_5 + x_5x_1)(x_2 + x_4 + x_6) + \tfrac{1}{3}(x_1 + x_3 + x_5)(x_2x_4 + x_4x_6 + x_6x_2) - x_2x_4x_6.$$

On peut encore considérer la fonction anharmonique particulière

$$M_{246}I_{246} + M_{462}I_{462} + M_{624}I_{624} = 0,$$

que nous appellerons *cyclique,* parce qu'elle ne contient que les invariants $I_{q_1q_2q_3}$, à permutations cycliques des éléments q_1, q_2, q_3.

Lorsque

$$M_{246} = M_{462} = M_{624},$$

les six points sont conjugués harmoniques.

Nous rappellerons encore la condition nécessaire et suffisante pour que six points représentés par la sextique

$$a_x^6,$$

soient conjugués harmoniques du troisième ordre.

Comme nous l'avons fait voir, cette condition s'exprime par la réduction à zéro, d'un invariant du dixième ordre de la sextique.

Les facteurs de cet invariant, au nombre de dix, sont de la forme

$$(12)(34)(56) + (14)(36)(52) + (16)(32)(54).$$

Or, il est bien facile de faire voir que ces facteurs ne sont autre chose que les sommes des racines de l'équation (40), prises trois à trois.

En nous appuyant sur cette remarque, nous avons calculé l'invariant $\mathfrak{D}$, lié aux invariants A, B, C, Δ, par l'équation

$$\mathfrak{D} = \Delta + (250C + 25AB - A^3)\left\{5^3.6^5.A^2 - 4.5^2.6^5.(5A^2 - 25B)\right\} (*). \quad . \quad . \quad (46)$$

(*) Voir C. Le Paige, *Sur un invariant du dixième ordre d'une sextique binaire*, Mém. de la Soc. roy. des sciences de Liége, 2me série, t. IX.