THÉORIE

DES

MOUVEMENTS DIURNE, ANNUEL ET SÉCULAIRE

DE

L'AXE DU MONDE

(*suite et fin*)

par F. FOLIE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 3 janvier 1887.)

THÉORIE

DES

MOUVEMENTS DIURNE, ANNUEL ET SÉCULAIRE

DE

L'AXE DU MONDE

(suite et fin).

CHAPITRE IV.

Des termes du second ordre de la nutation en obliquité et en longitude.

59. Dans les articles précédents, nous avons intégré les équations du mouvement de l'axe du monde en nous conformant à la marche suivie par Laplace, Poisson et Peters, afin de pouvoir établir, sous la forme la plus simple, la comparaison de nos résultats avec les leurs, et nous avons trouvé néanmoins des différences assez notables entre nos coefficients et ceux qui se déduisent de leurs formules (art. 50).

Mais on peut, et l'on doit aujourd'hui (*) les intégrer d'une manière plus rigoureuse. On trouvera ainsi des termes dont il n'est tenu aucun compte dans les formules usuelles, que nous appellerons termes du second ordre, et qui ne sont nullement insignifiants à côté de ceux dont il est très généralement fait usage.

Pour comparer nos formules à celles de nos prédécesseurs, nous avons, comme eux, considéré, dans l'intégration de nos formules différentielles,

(*) Si Laplace ni Poisson ne l'ont fait, c'est parce qu'ils croyaient pouvoir s'en tenir aux dixièmes de seconde d'arc au plus. Mais les formules de Peters, qui a tenu compte des 0''.0001, sont à cet égard, comme on le verra, bien défectueuses.

l'obliquité de l'écliptique comme une constante, parce qu'elle n'est sujette qu'à une variation séculaire très faible et à une nutation qui peut à peine s'élever à $10''$.

Mais puisque les astronomes jugent à propos de conserver jusqu'aux $0''.0001$ dans leurs formules, il n'est plus permis de négliger la nutation en obliquité dans aucun des termes qui sont des fonctions de cette obliquité.

Nous allons donc l'y introduire, mais en nous bornant aux deux premiers termes seulement de la nutation ; c'est-à-dire que, dans nos équations différentielles, nous allons remplacer l'obliquité vraie θ par $\theta_0 + \varepsilon$, θ_0 désignant l'obliquité moyenne, considérée comme constante, et ε la nutation en obliquité, que nous ferons égale à

$$(96). \quad \varepsilon = N_1 \cos \Omega + N_2 \cos 2\odot,$$

N_1 représentant la constante de la nutation, $9''.223$ et N_2 la constante $0''.54$.

60. Commençons par nous occuper du terme qui donne la précession. Nous avons trouvé (61)

$$\sin\theta \frac{d\psi}{dt} = s_2 u_0 \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} = -s_2 P,$$

P désignant une constante.

En remplaçant θ par $\theta_0 + \varepsilon$, cette équation devient :

$$\frac{d\psi}{dt} = -2P(c_1 - s_1\varepsilon) = -2Pc_1(1 - t_1 N_1 \cos \Omega - t_1 N_2 \cos 2\odot).$$

Si nous faisons $2Pc_1 = P_1$, constante de la précession, nous aurons

$$(97). \quad \Delta\psi = -P_1 t + \frac{t_1 P_1 N_1}{\omega_1} \sin \Omega + \frac{t_1 P_1 N_2}{2m_1} \sin 2\odot.$$

Le premier terme du second membre est la précession.

Les deux autres, qui rentrent dans la nutation, ont été négligés par tous les géomètres.

Représentons-les par $\Delta^2\Psi$, et calculons-en la valeur numérique; il viendra

$$(98) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Delta^2\psi = -0''.002896 \sin \Omega + 0''.0000045 \sin 2\odot.$$

Tels sont les termes du second ordre, qui proviennent de ce que l'on n'a pas tenu compte de la nutation en obliquité dans l'intégration du terme qui donne la précession.

61. Recherchons maintenant ceux qui proviennent de la même négligence commise dans la recherche des termes de la nutation elle-même.

Nous pourrons écrire d'abord, en vertu des formules précédentes (64), (66), (84) et (11) :

$$\frac{d\theta}{dt} = k_1 \cos\theta \sin\Omega - k_2 \sin\theta \sin 2\odot,$$

k_1 et k_2 désignant des constantes.

En remplaçant θ par $\theta_0 + \varepsilon$ et posant, comme plus haut, les sinus, cosinus, tangente et cotangente de l'obliquité ou du double de l'obliquité égaux à s_1, c_1, t_1, c'_1; s_2, c_2, t_2, c'_2, il viendra

$$\frac{d\theta}{dt} = k_1 c_1 (1 - t_1\varepsilon) \sin\Omega - k_2 c_1 (t_1 + \varepsilon) \sin 2\odot;$$

ou par (96) :

$$= k_1 c_1 \sin\Omega - \frac{1}{2} k_1 s_1 [N_1 \sin 2\Omega + N_2 \sin(2\odot + \Omega) - N_2 \sin(2\odot - \Omega)]$$
$$- k_2 s_1 \sin 2\odot - \frac{1}{2} k_2 c_1 [N_1 \sin(2\odot + \Omega) + N_1 \sin(2\odot - \Omega) + N_2 \sin 4\odot].$$

L'intégration donnera

$$\Delta\theta = -\frac{k_1 c_1}{\omega_1} \cos\Omega + \frac{k_2 s_1}{2m_1} \sin 2\odot + \frac{1}{2} k_1 s_1 \left[\frac{N_1}{2\omega_1} \cos 2\Omega + \frac{N_2}{2m_1 + \omega_1} \cos(2\odot + \Omega) - \frac{N_2}{2m_1 - \omega_1} \cos(2\odot - \Omega)\right]$$
$$+ \frac{1}{2} k_2 c_1 \left[\frac{N_1}{2m_1 + \omega_1} \cos(2\odot + \Omega) + \frac{N_1}{2m_1 - \omega} \cos(2\odot - \Omega) + \frac{N_2}{2m_1} \cos 4\odot\right].$$

Les deux premiers termes de cette expression sont les termes connus de la nutation en obliquité ; les autres sont ceux qui proviennent de ce que, dans notre formule, nous avons substitué l'obliquité vraie à l'obliquité moyenne ; en les représentant par $\Delta^2\theta$, il vient :

$$\Delta^2\theta = \frac{1}{4}\frac{k_1 s_1 \mathrm{N}_1}{\omega_1}\cos 2\Omega + \frac{1}{2}\frac{k_1 s_1 \mathrm{N}_2 + k_2 c_1 \mathrm{N}_1}{2m_1 + \omega_1}\cos(2\odot + \Omega) + \frac{1}{2}\frac{k_2 c_1 \mathrm{N}_1 - k_1 s_1 \mathrm{N}_2}{2m_1 - \omega_1}\cos(2\odot - \Omega) + \frac{1}{4}\frac{k_2 c_1}{m_1}\mathrm{N}_2 \cos 4\odot.$$

Pour le calcul numérique de cette expression, on remarquera que

$$-\frac{k_1 c_1}{\omega_1} = \mathrm{N}_1 = 9''.225, \qquad \frac{k_2 s_1}{2m_1} = \mathrm{N}_2 = 0''.54.$$

En l'effectuant on trouvera

$$(99)\quad \Delta^2\theta = -0''.000045 \cos 2\Omega + 0''.000055 \cos(2\odot + \Omega) + 0''.000030 \cos(2\odot - \Omega).$$

Tels sont les termes du second ordre en obliquité.

62. On trouverait de même, en longitude :

$$\frac{d\psi}{dt} = k_1 \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\cos\Omega - k_2 \cos\theta \cos 2\odot,$$

et, en remplaçant θ par $\theta_0 + \varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt} &= k_1 \frac{c_2 - 2s_2\varepsilon}{s_1 + c_1\varepsilon}\cos\Omega - k_2 c_1(1 - t_1\varepsilon)\cos 2\odot \\
&= k_1 \frac{c_2}{s_1}\left[1 - (2t_2 + c_1')\varepsilon\right]\cos\Omega - k_2 c_1(1 - t_1\varepsilon)\cos 2\odot \\
&= \frac{k_1 c_2}{s_1}\cos\Omega - k_2 c_1 \cos 2\odot \\
&\quad - \frac{k_1}{s_1} c_2(2t_2 + c_1')\left[\mathrm{N}_1 \frac{1 + \cos 2\Omega}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{N}_2 \cos(2\odot + \Omega) + \frac{1}{2}\mathrm{N}_2\cos(2\odot - \Omega)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2} k_2 s_1\left[\mathrm{N}_1 \cos(2\odot + \Omega) + \mathrm{N}_1\cos(2\odot - \Omega) + \mathrm{N}_2(1 + \cos 4\odot)\right].
\end{aligned}$$

Intégrant, et nous bornant immédiatement à écrire les termes du second ordre, représentés par $\Delta^2\psi$, nous trouverons

$$\Delta^2\psi = -\frac{1}{2}k_1\frac{c_2}{s_1}(2t_2 + c_1')\left[N_1 t + N_1\frac{\sin 2\Omega}{2\omega_1}\right] + \frac{1}{2}k_2 s_1 N_2 t + \frac{1}{8}k_2 s_1 N_2\frac{\sin 4\odot}{m_1}$$
$$+\frac{1}{2}\left[-\frac{k_1 c_2}{s_1}(2t_2 + c_1')N_2 + k_2 s_1 N_1\right]\left[\frac{\sin(2\odot + \Omega)}{2m_1 + \omega_1} + \frac{\sin(2\odot - \Omega)}{2m_1 - \omega_1}\right].$$

Pour effectuer le calcul numérique, on pourra observer que $-\frac{k_1 c_2}{s_1\omega_1} = 17''.24$, $\frac{k_2 c_1}{2m_1} = 1''.25$, et l'on obtiendra

$$(100)\ldots \begin{cases} \Delta^2\psi = -0''.00057t + 0''.00087\sin 2\Omega + 0''.00002154\sin(2\odot + \Omega) \\ \qquad + 0''.00001849\sin(2\odot - \Omega) + 0''.00000035\sin 4\odot. \end{cases}$$

Un premier résultat qui frappe dans cette expression, est l'existence d'un terme non périodique, qui doit rentrer dans la précession.

Ainsi, de même que l'introduction de l'obliquité vraie au lieu de l'obliquité moyenne nous a donné, dans le terme de la précession, des termes du second ordre rentrant dans la nutation, de même elle nous donne, dans les termes principaux de la nutation en longitude, des termes du second ordre qui rentrent dans celui de la précession.

Ce n'est pas qu'en théorie pure il en puisse être ainsi. La présence de ces derniers termes provient en effet de ce que nous avons écrit $\sin\varepsilon = \varepsilon$. Sans cette simplification, les termes proportionnels au temps seraient devenus des termes périodiques. Mais leur période serait tellement longue qu'en pratique ils pourront se réduire à la première partie de leur développement, laquelle est proportionnelle au temps.

63. En combinant ces termes du second ordre avec ceux que nous avons déjà trouvés précédemment comme complément du terme qui donne la précession (98), et reproduisant les termes du second ordre en obliquité (99), nous aurons enfin :

$$(101)\ \begin{cases} \Delta^2\theta = -0''.000045\cos 2\Omega + 0''.000035\cos(2\odot + \Omega) + 0''.00003\cos(2\odot - \Omega), \\ \Delta^2\psi = -0''.00057t - 0''.00290\sin\Omega + 0''.00086\sin 2\Omega. \end{cases}$$

Tels sont les termes qui ont été négligés dans les formules relatives au mouvement de rotation de la Terre, et particulièrement dans celles de Peters, dont tous les astronomes font usage.

Afin de leur permettre de substituer à ces formules les formules plus exactes qui résultent de nos recherches, nous donnerons à la fin de ce travail les expressions complètes du mouvement de l'axe du monde, telles qu'elles résultent de la combinaison de nos précédentes formules (*) avec ces dernières (101), en les arrêtant toutefois aux termes vraiment utiles.

Il serait prématuré de donner dès à présent ces formules. On verra en effet que, si l'intérieur de la Terre est fluide, cette circonstance pourrait introduire de nouveaux termes dans les formules de la nutation annuelle.

(*) Nous y adopterons les coefficients trouvés par M. le Dr Ubaghs, qui a poussé nos développements jusqu'à la 4e puissance de l'excentricité. (*Mémoires cour. et des sav. étrangers de l'Académie royale de Belgique*, in-4°, t. XLVII.)

CHAPITRE V.

Calcul des termes dus aux inégalités du sphéroïde terrestre.

64. Dans les chapitres précédents de ce livre II, nous avons intégré les équations du mouvement de l'axe du monde, en considérant la Terre, au point de vue de l'action exercée sur elle par les astres attirants, comme un ellipsoïde de révolution.

Et de fait, nous pensons qu'aucun terme, sensible aux observations, ne peut provenir des inégalités du sphéroïde, dans le mouvement de l'axe de notre globe envisagé comme une masse solide.

Il n'en sera plus de même bien évidemment si, au lieu du mouvement de l'axe de la Terre, nous étudions, en lui-même, celui de l'axe de son écorce solide, abstraction faite du noyau fluide.

Or la nutation diurne, dont l'existence est aujourd'hui certaine (*), prouve le fait d'une indépendance assez grande entre le mouvement de l'écorce et celui du noyau; et l'axe, dont nous avons à déterminer le mouvement, est bien celui de l'écorce que nous habitons, et non celui de son noyau fluide, ni leur axe résultant, qui nous sont tous deux inconnus.

Nous allons donc rechercher les équations du mouvement de l'axe de la croûte terrestre.

Et ici nous ne pourrons certes pas négliger les inégalités de l'écorce.

Il en est une, en particulier, dont nous aurons à tenir compte, mais dont il n'est même pas possible de fixer le sens à priori.

Si, comme nous le ferons, nous regardons l'aplatissement comme étant le même dans les deux hémisphères, il n'en est pas moins vrai que la gravitation doit être évidemment plus grande dans l'hémisphère boréal que dans l'hémisphère austral, à cause de la prédominance marquée des continents dans le premier.

(*) *Comptes rendus*. Séance du 13 décembre 1886, et *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3e série, t. XIII.

Mais, d'autre part, il est aussi très probable, et cela pour la même raison, que l'épaisseur de la croûte solide est plus considérable dans ce dernier hémisphère. En sorte que le moment d'inertie de chaque hémisphère est à la fois augmenté et diminué, sans que nous puissions savoir dans quel rapport, par la même circonstance.

Celle-ci aura, dans tous les cas, absolument le même effet qu'aurait un aplatissement plus considérable de l'un des deux hémisphères. Pour la dénommer, nous nous servirons donc du terme *différence d'aplatissement*, mais en y attachant le sens que nous venons d'y donner.

65. Nous aurions pu prendre, comme point de départ de cette analyse, les formules par lesquelles Serret a exprimé l'action du Soleil et celle de la Lune sur le sphéroïde terrestre, dans son beau mémoire intitulé : *Théorie du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité* (*).

Pour rester, toutefois, fidèle au principe que nous avons adopté dans cet ouvrage, de permettre au lecteur de nous suivre, sans recourir à aucune source étrangère, nous rechercherons d'une façon sommaire les termes dont l'influence ne nous paraît pas négligeable dans les actions des astres attirants sur l'écorce solide du globe.

Soit L la masse de l'astre, supposée concentrée en son centre de gravité; x, y, z ses coordonnées ; $x_1\ y_1\ z_1$ celles d'un élément dm de l'écorce terrestre, rapportées toutes aux axes principaux de celle-ci.

La force attractive de l'astre L sur l'élément dm est, si nous prenons le coefficient de l'attraction égal à l'unité, $\frac{\mathrm{L}dm}{\Delta^2}$, Δ^2 étant égal à

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Les composantes de cette force suivant les trois axes sont $\mathrm{L}dm\,\frac{x - x_1}{\Delta^3}$, etc. Ses moments :

$$\frac{\mathrm{L}dm}{\Delta^3}\left\{(x - x_1)z_1 - (z - z_1)x_1\right\} = \mathrm{L}dm\,\frac{xz_1 - zx_1}{\Delta^3};\ \text{etc.}$$

(*) *Annales de l'Observatoire de Paris*, publié par Leverrier, t. V.

La somme de ces moments sera l'intégrale

$$\mathrm{L}\sum \frac{xz_1 - zx_1}{\Delta^3}\,dm,$$

étendue à toute la masse de l'écorce solide du globe. Or, $\mathrm{D} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ désignant la distance des centres de gravité des deux corps, on a :

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{\mathrm{D}^3}\left\{\begin{array}{l} 1 + 3\,\dfrac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{\mathrm{D}^2} \\ + \dfrac{3}{2}\left[5\,\dfrac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2}{\mathrm{D}^4} - \dfrac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{\mathrm{D}^2}\right] \\ + \dfrac{5}{2}\left[7\,\dfrac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)^3}{\mathrm{D}^6} - 3\,\dfrac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}{\mathrm{D}^2}\,\dfrac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)}{\mathrm{D}^2}\right] \\ + \cdots \end{array}\right\}.$$

L'intégrale $\mathrm{L}\Sigma\frac{xz_1 - zx_1}{\Delta^3}\,dm$ pourra se mettre sous la forme

$$3\mathrm{L}\,\frac{xz}{\mathrm{D}_0^5}\,\Sigma(z_1^2 - x_1^2)dm + \delta\mathrm{P} = \mathrm{P} + \delta\mathrm{P};$$

la quantité P étant celle qui produit les termes de la nutation annuelle et de la nutation diurne trouvés précédemment, et qui est représentée par cette même lettre dans l'article 2.

De même, l'intégrale $\mathrm{L}\Sigma\frac{zy_1 - yz_1}{\Delta^3}\,dm$ s'écrira $\mathrm{Q} + \delta\mathrm{Q}$.

66. Occupons-nous donc exclusivement du calcul de $\delta\mathrm{P}$.

Dans ce calcul, nous nous bornerons aux termes qui ne renferment que la première puissance des coordonnées x, y, z, multipliée ou non par x^2, y^2 ou z^2, puisqu'ils sont les seuls, comme nous le verrons, qui puissent introduire des corrections appréciables dans les résultats fournis par les termes qui proviennent de P.

Nous nous abstiendrons, dans le développement, d'avoir égard aux termes qui seront multipliés par des expressions de la forme $\Sigma x_1 dm$, etc., $\Sigma x_1 z_1 dm$, etc., puisque celles-ci sont nulles en vertu des propriétés du centre de gravité et des axes principaux d'inertie.

Ceci posé, nous pourrons nous borner à écrire, pour cette recherche :

$$\frac{xz_1 - zx_1}{\Delta^3} = \frac{3}{2}\frac{xz_1 - zx_1}{D^3}\left[5\frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2}{D^4} - \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{D^2}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\frac{xz_1 - zx_1}{D^5}\left[4y_1^2 - x_1^2 - z_1^2 + 5\frac{x^2}{D^2}x_1^2 + 5\frac{z^2}{D^2}z_1^2 - 5\frac{x^2 + z^2}{D^2}y_1^2 + 10\frac{xyx_1y_1 + xzx_1z_1 + yzy_1z_1}{D^2}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\frac{xz_1}{D^5}\left[4y_1^2 - x_1^2 - z_1^2 + 5\frac{x^2}{D^2}(x_1^2 - y_1^2) + 5\frac{z^2}{D^2}(z_1^2 - y_1^2 - 2x_1^2)\right]$$

$$- \frac{3}{2}\frac{zx_1}{D^5}\left[4y_1^2 - x_1^2 - z_1^2 + 5\frac{z^2}{D^2}(z_1^2 - y_1^2) + 5\frac{x^2}{D^2}(x_1^2 - y_1^2 - 2z_1^2)\right]$$

$$+ 15\frac{x_1y_1z_1}{D^4}\frac{4}{D}\frac{x^2 - z^2}{D^2} + 15\frac{y_1(z_1^2 - x_1^2)}{D^4}\frac{xyz}{D^3}.$$

On remarquera que la seconde parenthèse carrée se déduit de la première par la simple permutation des x et des z.

Or, celle-ci peut s'écrire

$$4y_1^2 - x_1^2 - z_1^2 + 5\frac{x^2 + z^2}{D^2}(x_1^2 - y_1^2) + 5\frac{z^2}{D^2}(z_1^2 - 3x_1^2),$$

ou bien, en remplaçant $x^2 + z^2$ par $D^2 - y^2$:

$$- y_1^2 + 4x_1^2 - z_1^2 - 5\frac{y^2}{D^2}(x_1^2 - y_1^2) + 5\frac{z^2}{D^2}(z_1^2 - 3x_1^2)$$

d'où, prenant la demi-somme, on déduira aisément, pour la valeur de la première parenthèse :

$$\frac{1}{2}\left[(3y_1^2 - 3x_1^2 - 2z_1^2)\left(1 - 5\frac{z^2}{D^2}\right) + 5(x_1^2 - y_1^2)\frac{x^2 - y^2 - 2z^2}{D^2}\right]$$

et, par suite, pour celle de la seconde :

$$\frac{1}{2}\left[(3y_1^2 + 3z_1^2 - 2x_1^2)\left(1 - 5\frac{x^2}{D^2}\right) + 5(z_1^2 - y_1^2)\frac{z^2 - y^2 - 2x^2}{D^2}\right].$$

Si maintenant nous posons, en représentant par r le rayon équatorial *moyen* de la Terre :

$$(102)\ .\ .\ \begin{cases} \Sigma dmx_1(3y_1^2+3z_1^2-2x_1^2)=A_1r; & \Sigma dmy_1(3z_1^2+3x_1^2-2y_1^2)=B_1r; \\ \Sigma dmz_1(3y_1^2+3x_1^2-2z_1^2)=C_1r; & \Sigma dmx_1(y_1^2-z_1^2)=D_1r, \\ \Sigma dmy_1(z_1^2-x_1^2)=E_1r; & \Sigma dmz_1(x_1^2-y_1^2)=F_1r; \quad \Sigma dmx_1y_1z_1=G_1r; \end{cases}$$

si, de plus, nous écrivons $\frac{r}{D}=\varpi=\varpi_0\frac{a}{D}$, a désignant la distance moyenne de l'astre, ϖ_0 sa parallaxe, et si nous nous rappelons que nous avons posé $P=(C-A)np$ et $\frac{L}{a^3}=fm_1^2$ (art. 2), il viendra :

$$\delta p=f\frac{m_1^2}{n}\varpi_0\left(\frac{a}{D}\right)^4\left\{\frac{3}{4}\frac{C_1}{C-A}\left(\frac{x}{D}-5\frac{xz^2}{D^3}\right)-\frac{3}{4}\frac{A_1}{C-A}\left(\frac{z}{D}-5\frac{zx^2}{D^3}\right)+\frac{15}{4}\frac{F_1}{C-A}\frac{x}{D}\frac{x^2-y^2-2z^2}{D^2}\right.$$
$$\left.+\frac{15}{4}\frac{D_1}{C-A}\frac{z}{D}\frac{z^2-y^2-2x^2}{D^2}+15\frac{G_1}{C-A}\frac{y}{D}\frac{x^2-z^2}{D^2}+15\frac{E_1}{C-A}\frac{xyz}{D^3}\right\}\ (^*).$$

Nous avons vu ci-dessus (102) que δQ se tire de δP en écrivant y au lieu de x et en changeant le signe ; mais pour passer de δp à δq on doit changer A en B et également changer le signe. On aura donc, mutatis mutandis :

$$\delta q=f\frac{m_1^2}{n}\varpi_0\left(\frac{a}{D}\right)^4\left\{\frac{3}{4}\frac{C_1}{C-B}\left(\frac{y}{D}-5\frac{yz^2}{D^3}\right)-\frac{3}{4}\frac{B_1}{C-B}\left(\frac{x}{D}-5\frac{zy^2}{D^3}\right)-\frac{15}{4}\frac{F_1}{C-B}\frac{y}{D}\frac{y^2-x^2-2z^2}{D^3}\right.$$
$$\left.-\frac{15}{4}\frac{E_1}{C-B}\frac{z}{D}\frac{z^2-x^2-2y^2}{D^2}+15\frac{G_1}{C-B}\frac{x}{D}\frac{y^2-z^2}{D^2}-15\frac{D_1}{C-B}\frac{xyz}{D^3}\right\}.$$

67. Les équations du mouvement de rotation de l'écorce solide seront évidemment les mêmes que celles de l'article 2, si nous y remplaçons P par $P+\delta P$, ou $p,\ldots$ par $p+\delta p,\ldots$ et l, m par $l+\delta l$, $m+\delta m\ldots$

En continuant à regarder la vitesse angulaire n comme constante, ces équations pourront s'écrire :

$$\frac{dl+d\delta l}{dt}=-\frac{b}{A}n(m+\delta m+q+\delta q), \qquad \frac{dm+d\delta m}{dt}=\frac{a}{B}(n(l+\delta l+p+\delta p),$$

(*) C'est par méprise que Serret n'a que le facteur $\left(\frac{a}{D}\right)^3$ dans son expression, au lieu de $\left(\frac{a}{D}\right)^4$ qui figure dans la nôtre.

ou en comparant aux équations (1) :

$$\frac{d\delta l}{dt} = -\frac{b}{A} n(\delta m + \delta q), \qquad \frac{d\delta m}{dt} = \frac{a}{B} n(\delta l + \delta p),$$

équations qui sont absolument de la même forme que les équations primitives (1), et qui pourront, par conséquent, s'intégrer exactement par la même méthode (art. 32).

Vu l'extrême petitesse de A_1, B_1, C_1 ... nous n'aurons à conserver, dans les expressions finales de δp et δq, que les seuls termes qui ne renferment pas la longitude de l'astre, en nous bornant même à la première puissance de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite.

Or, avec cette dernière restriction, $\left(\frac{a}{D}\right)^4$ se réduit (80) à $\left(\frac{a}{D}\right)^4 = 1 + 7e^2 + 4e_1 \cos(\lambda - \Gamma)$, en posant, pour abréger, $e(1 + \frac{19}{4}e^2) = e_1$.

Pour que les expressions qui seront multipliées par ce facteur donnent des termes indépendants de la longitude, nous ne devrons y conserver que ceux qui dépendent de la simple longitude de l'astre.

C'est ce que nous ferons dans les développements suivants.

68. Nos formules précédentes (81) nous donnent :

$$\begin{aligned}\frac{x}{D} - 5\frac{xz^2}{D^3} = {}& \frac{1}{2}\left\{1 + c_1 - \frac{5}{4}s_1^2(1 + 3c_1)\right\}\cos(\lambda - \varphi) + \frac{1}{2}\left\{1 - c_1 - \frac{5}{4}s_1^2(1 - 3c_1)\right\} \\ & \cos(\lambda + \varphi) - \frac{is_1}{4}(2 - 5s_1^2 + 10c_1^2)\left\{\cos(\lambda - \Omega - \varphi) - \cos(\lambda - \Omega + \varphi)\right\} \\ & + \frac{5}{8}is_1\left\{(s_1^2 - 2c_1 - 2c_1^2)\cos(\lambda + \Omega - \varphi) - (s_1^2 + 2c_1 - 2c_1^2)\cos(\lambda + \Omega + \varphi)\right\}.\end{aligned}$$

On en déduirait $\frac{y}{D} - 5\frac{yz^2}{D^3}$ en changeant φ en $90^\circ + \varphi$.

Quant aux termes en $\frac{z}{D}$, multipliés ou non par des termes du second ordre en x ou y, il est aisé de voir qu'ils ne donneront que des termes indépendants de φ ou renfermant 2φ; ces termes appartiendraient à la nutation diurne, et nous pouvons donc nous dispenser de les calculer.

A la rigueur, il y aurait lieu encore de tenir compte des termes de δp et de δq qui ont pour facteurs F_1 et G_1.

Mais ces facteurs sont, pour la Terre, considérée comme un ellipsoïde solide, de l'ordre de l'aplatissement par rapport à A_1, B_1 et C_1 (*), qui sont déjà eux-mêmes très petits.

Quoique cette dernière conclusion ne soit peut-être pas absolument vraie pour l'écorce solide, il est bien probable que F_1 et G_1 resteront très petits vis-à-vis de C_1, et nous négligerons les termes qui en seront affectés.

On voit par là qu'il n'y a plus à considérer que le terme en C_1 de δp et de δq.

Or, en désignant par E le facteur $\frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\frac{C_1}{C-A}e_1\varpi_0 f$, dans lequel f est égal à l'unité pour le Soleil, il est manifeste que le développement de $\frac{1}{E}\delta p$, si nous n'y conservons que les termes indépendants de λ, se déduira de celui que nous venons de trouver pour $\frac{x}{D} - 5\frac{xz^2}{D^3}$, par le changement de λ en Γ.

Nous l'écrirons pour abréger :

$$\begin{aligned}\frac{1}{E}\delta p = a_1\cos(\Gamma-\varphi) + a_1'\cos(\Gamma+\varphi) - b_1[\cos(\Gamma-\Omega-\varphi) - \cos(\Gamma-\Omega+\varphi)]\\ - g_1\cos(\Gamma+\Omega-\varphi) - g_1'\cos(\Gamma+\Omega+\varphi),\end{aligned}$$

d'où il résultera (98), en négligeant ici, pour éviter des complications superflues, la très petite différence qui existe entre A et B :

$$\begin{aligned}\frac{1}{E}\delta q = a_1\sin(\Gamma-\varphi) - a_1'\sin(\Gamma+\varphi) - b_1[\sin(\Gamma-\Omega-\varphi) + \sin(\Gamma-\Omega+\varphi)]\\ - g_1\sin(\Gamma+\Omega-\varphi) + g_1'\sin(\Gamma+\Omega+\varphi),\end{aligned}$$

où a_1 ... désignent les doubles valeurs numériques des coefficients respectifs des termes en $\cos(\lambda-\varphi)$... dans le développement de $\frac{x}{D} - 5\frac{xz^2}{D^3}$ (97).

69. Il s'agit actuellement de trouver les variations $\delta\theta$ et $\delta\psi$, que vont subir les quantités $\Delta\theta$ et $\Delta\psi$ précédemment trouvées, du chef de ces variations δp et δq de p et de q.

Or, de même qu'à l'article 30, nous pouvons affirmer que, si $\delta p_1, \delta p_2$... désignent chacun des termes dont la somme forme δp; $l_1, l_2, \ldots$ les valeurs

(*) Serret, Mémoire cité.

de l qui leur correspondent séparément, et ainsi des autres, et si l'on satisfait séparément à chacun des systèmes d'équations :

$$\frac{d\delta l}{dt} = -\frac{b}{A} n(\delta m_1 + \delta q_1); \quad \frac{d\delta m}{dt} = \frac{a}{B} n(\delta l_1 + \delta p_1);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

on aura

$$\delta l = \Sigma \delta l_1, \quad \delta m = \Sigma \delta m_1.$$

Écrivons maintenant

$$\delta p = \Sigma u_1 \cos(v_1 t \pm \varphi), \quad \delta q = \Sigma[\mp u_1 \sin(v_1 t \pm \varphi)],$$

ce qui est la forme générale des termes dont se composent δp et δq, et appliquons la méthode d'intégration que nous avons développée à l'art. 32, en considérant tout d'abord u_1 comme constant (*).

Nous trouverons, après avoir fait $\frac{a}{B} = \frac{b}{A} = \mu$, ce qui est permis ici, vu la petitesse des termes que nous obtiendrons :

$$(103). \quad \delta\theta = \sum \frac{u_1}{v_1} \frac{\mu}{1 + \mu \pm v_2} \sin v_1 t, \quad \sin\theta\delta\psi = \sum\left(\pm \frac{\mu_1}{v_1} \frac{\mu}{1 + \mu \pm v_2} \cos v_1 t\right),$$

formules dans lesquelles v_2 représente, comme dans les chapitres précédents, le rapport $\frac{v_1}{n}$.

70. Dans l'application de ces formules, nous ajouterons entre eux les termes qui proviennent des actions du Soleil et de la Lune.

On voit qu'ils auront pour facteur commun la quantité $\frac{3}{2} \frac{m_1^2}{n} \frac{C_1}{C - A}$ provenant de E, multipliée par $\mu = \frac{C - A}{B}$, ou $\frac{3}{2} \frac{m_1^2}{n} \frac{C_1}{B}$ que nous ferons égale à F'.

(*) Il est aisé de s'assurer que cette simplification n'aura, en pratique, aucune influence sur le résultat.

Nous accentuerons, comme ci-dessus, les quantités qui sont relatives à la Lune, et nous trouverons :

$$\frac{1}{F'}\delta\theta = a_1\left[\frac{e_1\varpi_0}{\gamma_1}\frac{\sin\Gamma}{1+\mu-\gamma_2} + f\frac{e'_1\varpi'_0}{\gamma'_1}\frac{\sin\Gamma'}{1+\mu-\gamma'_2}\right] + a'_1\left[\frac{e_1\varpi_0}{\gamma_1}\frac{\sin\Gamma}{1+\mu+\gamma_2} + f\frac{e'_1\varpi'_0}{\gamma'_1}\frac{\sin\Gamma'}{1+\mu+\gamma'_2}\right]$$
$$+ fe'_1\varpi'_0\left\{\frac{b_1}{\gamma'_1-\omega_1}\left[\frac{1}{1+\mu+\gamma'_2-\omega_2} - \frac{1}{1+\mu-\gamma'_2+\omega_2}\right]\sin(\Gamma'-\Omega)\right.$$
$$\left. - \frac{fe'_1\varpi'_0}{\gamma'_1+\omega_1}\left[\frac{g_1}{1+\mu-\gamma'_2-\omega_2} + \frac{g'_1}{1+\mu+\gamma'_2+\omega_2}\right]\sin(\Gamma'+\Omega)\right\}$$

et

$$\frac{1}{F'}\sin\theta\delta\psi = -a_1\left[\frac{e_1\varpi_0}{\gamma_1}\frac{\cos\Gamma}{1+\mu-\gamma_2} + f\frac{e'_1\varpi'_0}{\gamma'_1}\frac{\cos\Gamma'}{1+\mu-\gamma'_2}\right] + a'_1\left[\frac{e\varpi_0}{\gamma_1}\frac{\cos\Gamma}{1+\mu+\gamma_2} + f\frac{e'_1\varpi'_0}{\gamma'_1}\frac{\cos\Gamma'}{1+\mu+\gamma'_2}\right]$$
$$+ fe'_1\varpi'_0\left\{\frac{b_1}{\gamma'_1-\omega_1}\left[\frac{1}{1+\mu+\gamma'_2-\omega_2} + \frac{1}{1+\mu-\gamma'_2+\omega_2}\right]\cos(\Gamma'-\Omega)\right.$$
$$\left. + \frac{fe'_1\varpi'_0}{\gamma'_1+\omega_1}\left[\frac{g_1}{1+\mu-\gamma'_2-\omega_2} - \frac{g'_1}{1+\mu+\gamma'_2+\omega_2}\right]\cos(\Gamma'+\Omega)\right\}.$$

Dans ces termes, qui sont tous très petits, nous pourrons, sans erreur appréciable, négliger γ_2, γ'_2 et ω_2 vis-à-vis de l'unité. Le dénominateur $1+\mu$ deviendra alors commun à tous ces termes, et, si nous écrivons $\frac{F'}{1+\mu}$ ou $\frac{F'}{1.0033} = F$, et que nous remplacions les coefficients $a_1 \ldots$ par leurs valeurs numériques, déduites des données de l'article 51, il viendra, pour l'expression des variations produites par l'action de la Lune :

$$\frac{1}{Ffe'_1\varpi'_0}\delta\theta = \frac{1.1737+0.4299}{\gamma'_1}\sin\Gamma' - \frac{0.1505+0.0139}{\gamma'_1+\omega_1}\sin(\Gamma'+\Omega),$$

le terme en $\Gamma'-\Omega$ ayant un coefficient tout à fait insensible; et

$$(104)\ldots\quad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{Ffe'_1\varpi'_0}\sin\theta\delta\psi &= \frac{-1.1737+0.4299}{\gamma'_1}\cos\Gamma' + 2\,\frac{0.17246}{\gamma'_1-\omega_1}\cos(\Gamma'-\Omega)\\ &+ \frac{0.1505-0.0139}{\gamma'_1+\omega_1}\cos(\Gamma'+\Omega);\end{aligned}\right.$$

ou enfin, en calculant les valeurs numériques de ces coefficients et en écrivant, au lieu de ceux-ci, leurs logarithmes, pour la facilité du calcul :

$$\frac{1}{F/e'_1\varpi'_0}\delta\theta = [0.55275]\sin\Gamma' - [9.64465]\sin(\Gamma' + \Omega),$$

$$\frac{1}{F/e'_1\varpi'_0}\sin\theta\delta\varphi = [0.02009]\cos\Gamma' + [9.51844]\sin(\Gamma' - \Omega) + [9.56420]\cos(\Gamma' + \Omega).$$

Enfin, si l'on exprime les coefficients qui entrent dans les premiers membres en fonction de la quantité $\frac{C_1}{B}$, représentée par ν, on trouvera, en admettant pour la constante de la parallaxe lunaire la valeur ϖ'_0,

$$(105)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\theta &= \nu[1.38030]\sin\Gamma' - \nu[0.67222]\sin(\Gamma' + \Omega) \\ s_1\delta\psi &= -\nu[1.04866]\cos\Gamma' + \nu[0.54601]\cos(\Gamma' - \Omega) + \nu[0.59177]\cos(\Gamma' + \Omega)\ (^*). \end{aligned}\right.$$

En faisant usage de cette dernière formule, on ne doit pas oublier que nous avons compté Ψ dans le sens direct.

71. L'action du Soleil produira les variations suivantes, qui, à cause de la longueur excessive de leur période, ne devront pas rentrer, comme les précédentes, dans les termes de la nutation annuelle : en premier lieu, une variation séculaire de l'obliquité $\delta\theta$ donnée par

$$(106) \ldots\ldots \quad \frac{1}{Fe_1\varpi_0}\delta\theta = \frac{1.6056}{\gamma_1}\sin\Gamma = [3.72824]\sin\Gamma;$$

en second lieu, une variation en longitude, que nous devrons considérer comme une variation séculaire de la constante de la précession :

$$(107) \ldots\ldots \quad \frac{1}{Fe_1\varpi_0}\sin\theta\delta\psi = -\frac{0.7458}{\gamma_1}\cos\Gamma = -[3.39560]\cos\Gamma\ (^{**}).$$

(*) Nous avons, comme on le voit, considéré ici $\sin\theta$ comme une quantité constante dans l'intégration ; à cause de la valeur très petite de F, cette simplification n'est pas de nature à altérer le résultat d'une manière qui pourrait être sensible à l'observation.

(**) Pour l'époque 1850.0, les coefficients numériques des formules (99) deviendraient :

[1.38279] et [0.67362], [1.04943], [0.54742] et [0.59320].

72. On voit que le rapport des termes qui dépendent respectivement du périgée du Soleil et de celui de la Lune est une fraction qui approche de 0.4. Il est en effet égal à

$$\frac{e_1\varpi_0}{fe'_1\varpi'_0}\frac{\gamma'_1}{\gamma_1} = [9.5931] = 0.592.$$

Si donc les termes qui dépendent du périgée de la Lune ne sont pas négligeables (et nous pensons que tel est, en effet, le cas) on ne peut pas négliger non plus ceux qui dépendent du périgée du Soleil.

Comme leur période est extrêmement longue, il sera utile de rechercher les variations qui en résultent, en obliquité et en longitude, pendant un nombre d'années assez peu considérable relativement à cette période.

Écrivons les deux équations précédentes, pour abréger, sous la forme :

$$\delta\theta = \frac{\varkappa}{\gamma_1}\sin\Gamma \quad \text{et} \quad \sin\theta\delta\psi = -\frac{\varkappa'}{\gamma_1}\cos\Gamma,$$

ou, en faisant abstraction des constantes, qui rentrent dans les valeurs initiales de θ et de ψ

$$(108) \quad . \quad . \quad \delta\theta = \varkappa\cos\Gamma_0 . t - \frac{1}{2}\varkappa\gamma_1\sin\Gamma_0 t^2; \qquad s_1\delta\psi = \varkappa'\sin\Gamma_0 t + \frac{1}{2}\varkappa'\gamma_1\cos\Gamma_0 t^2.$$

Telles sont les variations en obliquité et en longitude qui proviennent de la différence d'aplatissement et qui, à cause de la longueur de leur période, ne doivent pas être considérées comme des termes de nutation.

Vu la petitesse des facteurs $\varkappa$ et $\varkappa'$, ces termes seront probablement très peu importants.

S'il n'en était pas ainsi, il y aurait dans l'obliquité un terme proportionnel au temps; et quant à la variation en longitude, elle se compose de deux parties, l'une $\frac{\varkappa'}{s_1}\sin\Gamma_0 . t$ qui rentre dans la précession; l'autre qui en est une variation séculaire. En sorte que si nous désignons par P_0 la constante de la précession luni-solaire trouvée ci-dessus, par P l'expression complète de cette précession (abstraction faite des variations séculaires dont il va être question), on aura :

$$(109). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P = P_0 + \frac{\varkappa'}{s_1}\sin\Gamma_0 + \frac{1}{2}\varkappa'\gamma_1\cos\Gamma . t.$$

Les quantités $\varkappa$ et $\varkappa'$, qui renferment en facteur la parallaxe du Soleil, sont tellement petites qu'il n'est pas possible de les déterminer par les observations. Si l'on veut faire usage des observations modernes, l'intervalle de temps t sera trop peu considérable, et quant aux observations anciennes de l'obliquité, elles sont trop peu précises pour qu'on puisse en déduire avec quelque assurance le facteur $\varkappa$.

Mais on pourra, sans doute, au moyen de bonnes observations bien réduites de circompolaires, déterminer le facteur ν qui entre dans les termes des formules (105) dépendants du périgée de la Lune.

Et de ce facteur se déduiront aisément les valeurs de ceux des formules (108).

LIVRE III.

LA NUTATION SÉCULAIRE.

CHAPITRE I.

Des variations liées à la variation d'excentricité.

73. Ce dernier Livre traitera des variations séculaires proprement dites de l'axe du monde.

Le titre de nutation séculaire qu'il porte sera justifié par la détermination de l'orbite elliptique, à grand axe variable, que le pôle moyen décrit autour du pôle fixe dans une période de 30000 ans environ.

La recherche de cette orbite exige que la nutation séculaire, tant en obliquité qu'en longitude, puisse s'exprimer, comme la nutation diurne et la nutation annuelle, par des fonctions périodiques.

Au surplus, les formules usitées, qui développent les variations séculaires suivant les puissances du temps, sont devenues fort insuffisantes, non seulement pour de longues périodes, auxquelles elles ne sont nullement applicables, mais peut-être même pour un intervalle de temps de quelques siècles à peine, à cause du degré de précision auquel atteignent les observations modernes.

On verra que la méthode d'intégration que nous avons exposée dans les deux Livres qui précèdent, pour la recherche de la nutation diurne et de la nutation annuelle, peut s'appliquer également à la recherche de la nutation séculaire.

Les résultats auxquels nous arriverons, développés suivant les puissances du temps, concorderont, à de très petites quantités près, qui ne sont cependant pas négligeables, avec les formules usitées, et la comparaison des valeurs de l'obliquité, dans les temps reculés, avec les résultats déduits de nos formules et de celles des géomètres, montrera la supériorité des premières, même sur celle de Laplace, qui renferme cependant aussi des fonctions périodiques du temps.

74. Occupons-nous d'abord des variations séculaires qui sont liées à la variation d'excentricité de l'orbite terrestre.

Si, dans l'expression de p donnée à l'article 47, nous posons $e = e_0 + e_1 t$, et que nous nous arrêtions à la première puissance des quantités e_1 et t, le seul terme complémentaire de p sera pour le Soleil,

$$\delta p = \frac{3}{4} h s_2 e_1 t \sin\varphi,$$

d'où

$$(110)\qquad \delta q = \frac{3}{4} h s_2 e_1 t \cos\varphi$$

que nous écrirons

$$\left\{ \begin{aligned} \delta p &= \alpha\varphi \sin\varphi, \\ \delta q &= \alpha\varphi \cos\varphi. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$l = h_1\varphi \sin\varphi + k_1 \cos\varphi + \Phi',$$

Φ' étant la dérivée, prise par rapport à φ, d'une fonction Φ de cette variable; et substituons dans la seconde des équations (1)

$$\frac{dl}{dt} = -n\mu(m+q), \qquad \frac{dm}{dt} = n\mu(l+p),$$

dans lesquelles nous ferons ici

$$\frac{a}{B} = \frac{b}{A} = \mu;$$

il viendra :

$$\frac{dm}{dt} = n\mu\left[(h_1 + \alpha)\varphi \sin\varphi + k_1 \cos\varphi + \Phi'\right]$$

et en intégrant :

$$m = \mu\left[-(h_1 + \alpha)(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi) - k_1 \sin\varphi + \Phi\right].$$

Cette expression, portée dans la première équation (1), donne

$$\frac{dl}{d\varphi} = -\mu^2\left[-(h_1+\alpha)(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi) - k_1\sin\varphi + \Phi\right] - \mu\alpha\varphi\cos\varphi.$$

Identifiant avec

$$\frac{dl}{d\varphi} = h_1\varphi\cos\varphi + (h_1 - k_1)\sin\varphi + \Phi''$$

on aura :

$$\mu^2(h_1+\alpha) - \mu\alpha - h_1 = 0, \qquad \mu^2(h_1+\alpha) + \mu^2 k_1 - (h_1 - k_1) = 0, \qquad \Phi'' + \mu^2\Phi = 0$$

De cette dernière équation on déduit :

$$\Phi = \alpha_1 \sin(\mu\varphi + \beta),$$

expression qui rentre dans les termes précédemment trouvés, et renfermant les constantes arbitraires.

Des deux autres on tire

$$h_1 = -\frac{\alpha\mu}{1+\mu}, \qquad k_1 = h_1\frac{1-\mu}{1+\mu^2}, \qquad h_1 + \alpha = \frac{\alpha}{1+\mu} = -\frac{h_1}{\mu};$$

et par là l et m deviennent :

$$l = h_1\left\{\varphi\sin\varphi + \frac{1-\mu}{1+\mu^2}\cos\varphi\right\}, \qquad m = h_1\left\{\varphi\cos\varphi - \frac{1+\mu}{1+\mu^2}\sin\varphi\right\}.$$

Les équations (11) donneront alors

$$\frac{d\theta}{dt} = -h_1\frac{(1-\mu)\cos^2\varphi + (1+\mu)\sin^2\varphi}{1+\mu^2} = -h_1\frac{1-\mu\cos^2\varphi}{1+\mu^2}$$

$$\sin\theta\frac{d\psi}{dt} = h_1\varphi - \frac{\mu}{1+\mu^2}\sin 2\varphi.$$

Intégrons, en faisant abstraction des termes qui rentrent dans la nutation diurne, nous aurons :

$$(111)\ldots\quad \delta\theta = -\frac{h_1\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}{1+\mu^2}t = \frac{\alpha\mu\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}{(1+\mu)(1+\mu^2)}t = \frac{3}{4}\frac{hs_2e_1\mu\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}{n(1+\mu)(1+\mu^2)}t.$$

$$\sin\theta_0\delta\psi = \frac{1}{2}h_1nt^2 = -\frac{1}{2}n\frac{\alpha\mu}{1+\mu}t^2 = -\frac{3}{8}\frac{hs_2e_1\mu}{1+\mu}t^2,$$

ou puisque $s_2 = \sin 2\theta_0$:

$$(111^{bis}) \ldots \ldots \quad \delta\psi = -\frac{3}{4}\frac{he_1e_1\mu}{1+\mu}t^2.$$

75. L'action de la Lune produirait des variations dont la forme serait absolument la même, à part le changement de e en e' et de h en h'; en recourant à l'expression p de l'article 47, on verrait immédiatement que $h' = f'h$, f' étant égal à $f\left(1 - \frac{3}{2}i^2\right)$.

En sorte que, si nous remplaçons, dans les formules précédentes (111) et (111^{bis}), h par $h(1+f')$, nous aurons les expressions complètes des variations qui sont liées à celle de l'excentricité de l'orbite terrestre.

La dernière expression, ainsi réduite en nombres, devient :

$$(112) \ldots \ldots \quad \delta\psi = -0''.00001946\,t^2.$$

Il en résulte que celle de $\delta\theta$ sera

$$\delta\theta = -0''.000000021\,t.$$

On peut donc considérer la variation d'obliquité, due à celle de l'excentricité de l'orbite terrestre, comme absolument négligeable.

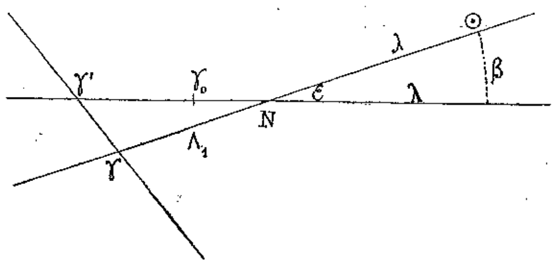
CHAPITRE II.

Des variations séculaires dues au mouvement de l'écliptique.

76. Jusqu'à présent le plan de l'écliptique a été considéré comme fixe. Ayons égard maintenant à son mouvement séculaire.

Soient γ_0 et $\gamma_0\gamma'$ l'équinoxe et l'écliptique fixes; $\gamma'\gamma$ et γN l'équateur moyen et l'écliptique vraie au temps t.

β, λ, Λ désigneront respectivement la latitude et la longitude du Soleil, ainsi que la longitude du nœud ascendant N de l'écliptique vraie, rapportées à l'écliptique fixe; l la différence $\lambda - \Lambda$, Λ_1 la longitude du nœud comptée sur l'écliptique vraie; ε et θ les inclinaisons de ce dernier plan sur l'écliptique fixe et sur l'équateur.



Nous aurons à former, comme précédemment, le produit $\frac{4xz}{D^2}\left(\frac{a}{D}\right)^3$, dans lequel $\frac{x}{D}$ et $\frac{z}{D}$ s'expriment au moyen de β et de λ.

Il s'agit donc de trouver ces dernières quantités en fonction de la longitude vraie λ du Soleil, et des quantités Λ, ψ et ε.

Nous avons d'abord (73) $tg\beta = tg\varepsilon \sin l$ que nous pourrons écrire

$$(113). \quad \sin\beta = \sin\varepsilon \sin l,$$

puis

$$(114). \quad \lambda = \Lambda_1 + l \sec\varepsilon.$$

Pour exprimer Λ_1 en fonction des données, on tire du triangle $\gamma\gamma'$N

$$115) \quad \text{cotg}(\Lambda - \psi)\sin\Lambda_1 = \cos\Lambda_1\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\,\text{cotg}\,\theta.$$

Afin de déduire Λ_1 de cette équation, sans négliger ε^2, nous poserons

$$\Lambda_1 = \Lambda' - k_1\sin\varepsilon - k_2\varepsilon^2,$$

Λ' représentant $\Lambda - \psi = N\gamma'$. D'où, en nous arrêtant aux termes en ε^2 :

$$\sin \Lambda_1 = \sin \Lambda' \left(1 - \frac{1}{2} k_1^2 \varepsilon^2\right) - \cos \Lambda' (k_1 \sin \varepsilon + k_2 \varepsilon^2)$$

et

$$\cos \Lambda_1 \cos \varepsilon = \cos \Lambda' \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{1}{2} k_1^2 \varepsilon^2\right) + \sin \Lambda' (k_1 \sin \varepsilon + k_2 \varepsilon^2).$$

La première de ces deux relations donne :

$$\operatorname{cotg} \Lambda' \sin \Lambda_1 = \cos \Lambda' \left(1 - \frac{1}{2} k_1^2 \varepsilon^2\right) - \frac{\cos^2 \Lambda'}{\sin \Lambda'} (k_1 \sin \varepsilon + k_2 \varepsilon^2).$$

En substituant ces expressions dans la relation (115) on trouvera :

$$k_1 = \operatorname{cotg} \theta \sin \Lambda'; \qquad k_2 = \frac{1}{4} \sin 2\Lambda';$$

d'où

$$\Lambda_1 = \Lambda' - \operatorname{cotg} \theta \sin \Lambda' \sin \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4} \sin 2\Lambda';$$

ou, plus simplement, χ désignant la précession planétaire $\gamma'\gamma_1$, et c_1, comme précédemment, $\cos \theta_0$:

(116) . . . . $$\Lambda_1 = \Lambda' - c_1 \sin \chi - \frac{\varepsilon^2}{4} \sin 2\Lambda'.$$

La relation (114) donnera alors :

(117) $$l \text{ ou } \lambda - \Lambda = (\lambda - \Lambda_1) \cos \varepsilon = \lambda - \Lambda' + c_1 \sin \chi - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\lambda + c_1 \sin \chi - \Lambda' - \frac{1}{2} \sin 2\Lambda'\right),$$

d'où l'on tirera

$$\lambda - \psi = \lambda + c_1 \sin \chi - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\lambda + c_1 \sin \chi - \frac{1}{2} f\Lambda'\right),$$

en faisant $2\Lambda' + \sin 2\Lambda' = f\Lambda'$.

Écrivant enfin, pour abréger, χ au lieu de $\sin \chi$ on aura :

(118). . . . $$\left\{\begin{aligned} \sin(\lambda - \psi) &= \sin(\lambda + c_1\chi) - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos(\lambda + c_1\chi) \sin\left(\lambda - \frac{1}{2} f\Lambda'\right). \\ \cos(\lambda - \psi) &= \cos(\lambda + c_1\chi) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin(\lambda + c_1\chi) \sin\left(\lambda - \frac{1}{2} f\Lambda'\right). \end{aligned}\right.$$

77. Reprenons maintenant les formules de l'article 44 :

$$\frac{2x}{D} = \cos\beta\left[(1 + c_1)\cos(\lambda - \psi - \varphi) + (1 - c_1)\cos(\lambda - \psi + \varphi)\right] - 2s_1 \sin\beta \sin\varphi.$$

$$\frac{z}{D} = s_1 \cos\beta \sin(\lambda - \psi) + c_1 \sin\beta.$$

Il ne nous restera plus qu'à y remplacer $\sin\beta$ et $\cos\beta$ par leurs valeurs tirées de la relation (113), $\sin(\lambda - \psi)$ et $\cos(\lambda - \psi)$ par celles que nous venons de trouver.

Dans les développements qui suivent, nous ferons abstraction des termes en ε^2, que nous avons conservés jusqu'à présent.

On voit alors, par les relations (118), que $\lambda - \psi$ pourra se remplacer simplement par $\lambda + c_1\chi$.

La combinaison des relations (113) et (117) donnera :

$$\sin\beta = \sin\varepsilon \sin(\lambda + c_1\chi - \Lambda') = \frac{1}{2}\left[\cos(\lambda + c_1\chi - \Lambda' - \varepsilon) - \cos(\lambda + c_1\chi - \Lambda' + \varepsilon)\right] \cos\beta = 1.$$

On trouvera alors :

$$(119)\left\{\begin{aligned} \frac{2x}{D} &= (1 + c_1)\cos(\lambda + c_1\chi - \varphi) + (1 - c_1)\cos(\lambda + c_1\chi + \varphi) \\ &- \frac{1}{2}s_1\left[\sin(\lambda + c_1\chi - \Lambda' + \varepsilon + \varphi) - \sin(\lambda + c_1\chi - \Lambda' + \varepsilon - \varphi) - \sin(\lambda + c_1\chi - \Lambda' - \varepsilon + \varphi)\right. \\ &\left. + \sin(\lambda + c_1\chi - \Lambda' - \varepsilon - \varphi)\right] \\ \frac{z}{D} &= s_1 \sin(\lambda + c_1\chi) + \frac{1}{2}c_1\left[\cos(\lambda + c_1\chi - \Lambda' - \varepsilon) - \cos(\lambda + c_1\chi - \Lambda' + \varepsilon)\right]. \end{aligned}\right.$$

Il reste à effectuer le produit $\frac{4xz}{D^2}$ et à le multiplier par $\left(\frac{a}{D}\right)^3$ dont l'expression est (80)

$$\left(\frac{a}{D}\right)^3 = 1 + \frac{9}{2}e^2 + 3e\left(1 + \frac{13}{4}e^2\right)\cos(\lambda - \Gamma) + \frac{5}{2}e^2\cos 2(\Lambda - \Gamma),$$

en omettant, dans le résultat, tous les termes qui renferment λ ou qui sont indépendants de ε et de Λ', puisqu'ils rentrent parmi ceux que nous avons trouvés précédemment dans les expressions de la précession et de la nutation annuelles.

Si l'on multiplie enfin l'expression ainsi obtenue de $\frac{4xz}{D^2}\left(\frac{a}{D}\right)^3$ par $-\frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}$, on obtiendra les termes de p qui dépendent du mouvement séculaire de l'écliptique, puisque (article 44)

$$p = -3\,\frac{m_1^2}{n}\,\frac{xz}{D^2}\left(\frac{a}{D}\right)^3.$$

Cela posé, en continuant à désigner par p ces termes complémentaires, on trouvera, toutes réductions faites :

$$(120)\left\{\begin{aligned}
p = {} & \frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\left(1+\frac{9}{2}e^2\right)\left[\begin{aligned}
& \frac{3}{4}s_2\left\{\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varepsilon+\varphi) + \frac{1}{2}\sin(2\varepsilon-\varphi)\right\} \\
& -\frac{1}{8}s_1(1+c_1)\left\{\sin(2\Lambda'-\varphi) - \frac{1}{2}\sin(2\Lambda'+2\varepsilon-\varphi) - \frac{1}{2}\sin(2\Lambda'-2\varepsilon-\varphi)\right\} \\
& -\frac{1}{8}s_1(1-c_1)\left\{\sin(2\Lambda'+\varphi) - \frac{1}{2}\sin(2\Lambda'+2\varepsilon-\varphi) - \frac{1}{2}\sin(2\Lambda'-2\varepsilon+\varphi)\right\} \\
& -\frac{1}{2}(c_1+c_2)\left\{\cos(\Lambda'+\varepsilon-\varphi) - \cos(\Lambda'-\varepsilon-\varphi)\right\} \\
& -\frac{1}{2}(c_1-c_2)\left\{\cos(\Lambda'+\varepsilon+\varphi) - \cos(\Lambda'-\varepsilon+\varphi)\right\}
\end{aligned}\right] \\
& -\frac{9}{32}e^2\frac{m_1^2}{n}\left[\begin{aligned}
& (c_1+c_2)\left\{\cos(2\Gamma+2c_1\chi-\Lambda'-\varepsilon-\varphi) - \cos(2\Gamma+2c_1\chi-\Lambda'+\varepsilon-\varphi)\right\} \\
& +(c_1-c_2)\left\{\cos(2\Gamma+2c_1\chi-\Lambda'-\varepsilon+\varphi) - \cos(2\Gamma+2c_1\chi-\Lambda'+\varepsilon+\varphi)\right\} \\
& +\frac{1}{2}s_1(1+c_1)\left\{\sin(2\Gamma+2c_1\chi-\varphi) + \frac{1}{2}\sin(2\Gamma+2c_1\chi+2\varepsilon-\varphi) + \frac{1}{2}\sin(2\Gamma+2c_1\chi-2\varepsilon-\varphi)\right\} \\
& +\frac{1}{2}s_1(1-c_1)\left\{\sin(2\Gamma+2c_1\chi+\varphi) + \frac{1}{2}\sin(2\Gamma+2c_1\chi+2\varepsilon+\varphi) + \frac{1}{2}\sin(2\Gamma+2c_1\chi-2\varepsilon+\varphi)\right\} \\
& +\frac{3}{4}s_2\left\{\begin{aligned}
& \sin(2\Gamma+2c_1\chi-2\Lambda'+\varphi) - \sin(2\Gamma+2c_1\chi-2\Lambda'-\varphi) \\
& -\frac{1}{2}\sin(2\Gamma+2c_1\chi-2\Lambda'-2\varepsilon+\varphi) + \frac{1}{2}\sin(2\Gamma+2c_1\chi-2\Lambda'-2\varepsilon-\varphi) \\
& -\frac{1}{2}\sin(2\Gamma+2c_1\chi-2\Lambda'+2\varepsilon+\varphi) + \frac{1}{2}\sin(2\Gamma+2c_1\chi-2\Lambda'+2\varepsilon-\varphi)
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right]
\end{aligned}\right.$$

78. Appliquons maintenant les formules d'intégration de l'article (32),

formules que nous écrirons en négligeant au dénominateur la quantité v_2 (69), qui est partout très petite :

$$\text{pour } p = \Sigma u \sin(v_1 t \pm \varphi) \left\{ \begin{aligned} &\Delta\theta = -\sum \frac{u}{v_1}\,\frac{\mu}{1+\mu}\cos v_1 t \\ &\sin\theta\Delta\chi = \pm \sum \frac{u}{v_1}\,\frac{\mu}{1+\mu}\sin v_1 t \end{aligned} \right. ;$$

$$\text{pour } p = \Sigma u \cos(v_1 t \pm \varphi) \left\{ \begin{aligned} &\Delta\theta = \sum \frac{u}{v_1}\,\frac{\mu}{1+\mu}\sin v_1 t \\ &\sin\theta\Delta\psi = \pm \sum \frac{u}{v_1}\,\frac{\mu}{1+\mu}\cos v_1 t \end{aligned} \right. ;$$

nous obtiendrons, en faisant provisoirement

$$\varepsilon = \varepsilon_1 t, \qquad \Lambda' = \Lambda_0 + \lambda'_1 t, \qquad \Gamma + c_1\chi = \Gamma_1 = \Gamma_0 + \gamma_1 t$$

et

$$(121)\ldots\ldots \quad \frac{5}{4}\,\frac{m_1^2}{n}\,\frac{\mu}{1+\mu}\left(1 + \frac{9}{2}e^2\right) = h_1; \qquad \frac{9}{32}e^2\,\frac{m_1^2}{n}\,\frac{\mu}{1+\mu} = h_2.$$

$$(122)\ldots \left\{ \begin{aligned} \Delta\theta = h_1 &\left[\begin{aligned} &c_1\left\{\frac{\sin(\Lambda'-\varepsilon)}{\lambda'_1-\varepsilon_1} - \frac{\sin(\Lambda'+\varepsilon)}{\lambda'_1+\varepsilon_1}\right\} \\ &+\frac{1}{4}s_1\left\{\frac{\cos 2\Lambda'}{2\lambda'_1} - \frac{\cos 2(\Lambda'+\varepsilon)}{2(\lambda'_1+\varepsilon_1)} - \frac{\cos 2(\Lambda'-\varepsilon)}{2(\lambda'_1-\varepsilon_1)}\right\} \end{aligned} \right] \\ - h_2 &\left[\begin{aligned} &2c_1\left\{\frac{\sin(2\Gamma_1-\Lambda'-\varepsilon)}{2\gamma_1-\lambda'_1-\varepsilon_1} - \frac{\sin(2\Gamma_1-\Lambda'+\varepsilon)}{2\gamma_1-\lambda'_1+\varepsilon_1}\right\} + 4s_1\frac{\cos 2\Gamma_1}{2\gamma_1} \\ &-s_1\left\{\frac{\cos 2\Gamma_1}{2\gamma_1} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos 2(\Gamma_1+\varepsilon)}{2(\gamma_1+\varepsilon_1)} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos 2(\Gamma_1-\varepsilon)}{2(\gamma_1-\varepsilon_1)}\right\} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(122^{bis}) \left\{ \begin{aligned} \sin\theta\Delta\psi = h_1 &\left[\begin{aligned} &-c_2\left\{\frac{\cos(\Lambda'-\varepsilon)}{\lambda'_1-\varepsilon_1} - \frac{\cos(\Lambda'+\varepsilon)}{\lambda'_1+\varepsilon_1}\right\} \\ &+\frac{1}{8}s_2\left\{\frac{\sin 2\Lambda'}{2\lambda'_1} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2(\Lambda'+\varepsilon)}{2(\lambda'_1+\varepsilon_1)} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2(\Lambda'-\varepsilon)}{2(\lambda'_1-\varepsilon_1)}\right\} + \frac{3}{4}s_2\left\{t - \frac{\sin 2\varepsilon}{2\varepsilon_1}\right\} \end{aligned} \right] \\ + h_2 &\left[\begin{aligned} &2c_2\left\{\frac{\cos(2\Gamma_1-\Lambda'-\varepsilon)}{2\gamma_1-\lambda'_1-\varepsilon_1} - \frac{\cos(2\Gamma_1-\Lambda'+\varepsilon)}{2\gamma_1-\lambda'_1+\varepsilon_1}\right\} + 2s_2\frac{\sin 2\Gamma_1}{2\gamma_1} \\ &-\frac{1}{2}s_2\left\{\frac{\sin 2\Gamma_1}{2\gamma_1} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2(\Gamma_1+\varepsilon)}{2(\gamma_1+\varepsilon_1)} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2(\Gamma_1-\varepsilon)}{2(\gamma_1-\varepsilon_1)}\right\} \\ &-\frac{3}{2}s_2\left\{\frac{\sin 2(\Gamma_1-\Lambda')}{2(\gamma_1-\lambda'_1)} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2(\Gamma_1-\Lambda'-\varepsilon)}{2(\gamma_1-\lambda'_1-\varepsilon_1)} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2(\Gamma_1-\Lambda'+\varepsilon)}{2(\gamma_1-\lambda'_1+\varepsilon_1)}\right\} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right.$$

79. Jusqu'à présent nous n'avons envisagé que les termes qui proviennent de l'action du Soleil. Abstraction faite de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique, il va de soi que l'action de la Lune introduira, dans $\Delta\theta$ et $\Delta\Psi$ des termes absolument analogues aux précédents, à part le seul changement de h_1 et h_2 en fh'_1 et fh'_2 respectivement, f désignant le coefficient de l'action lunaire, h'_1 et h'_2 ce que deviennent h_1 et h_2, si l'on y remplace l'excentricité e de l'orbite solaire par celle e' de l'orbite lunaire.

Nous verrons toutefois, en étudiant l'action provenant de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, qu'elle produit des termes de même forme que ceux en $\Lambda' \pm \varepsilon$ des expressions de $\Delta\theta$ et de $s_1\Delta\psi$; en sorte que ces termes, au lieu d'avoir pour coefficient h'_1, auront $h'_1\left(1 - \frac{3}{2}i^2\right)$; et nous introduirons immédiatement ce dernier dans les expressions de l'action combinée des deux astres.

Dans ces expressions, nous omettrons les termes en $\cos 2\Gamma_1$ et $\sin 2\Gamma_1$ qui dépendent exclusivement de leurs périgées. Il est bien évident, en effet, par cela même que ces termes sont indépendants de l'inclinaison et de la longitude du nœud de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe, qu'ils ne peuvent rentrer dans les variations séculaires qui proviennent du mouvement de l'écliptique. Ils se détruiraient du reste, identiquement, comme ils le font dans les formules du mouvement annuel de l'axe du monde, si l'on faisait le développement complet des termes qui renferment en facteur le carré de l'excentricité de l'orbite.

En faisant donc (voir 121)

$$(123)\quad\left\{\begin{aligned} &H_1 = \frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\frac{\mu}{1+\mu}\left[1 + \frac{9}{2}e^2 + f\left(1 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{9}{2}e'^2\right)\right],\\ &h'_1 = \frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\frac{\mu}{1+\mu}f\left(1 + \frac{9}{2}e'^2\right),\qquad h'_2 = \frac{9}{32}\frac{m_1^2}{n}\frac{\mu}{1+\mu}fe'^2,\end{aligned}\right.$$

on aura, pour les actions combinées du Soleil et de la Lune :

$$(124)\left\{\begin{aligned} \Delta\theta = H_1 &\left[c_1\left\{\frac{\sin(\Lambda'-\varepsilon)}{\lambda'_1-\varepsilon_1} - \frac{\sin(\Lambda'+\varepsilon)}{\lambda'_1+\varepsilon_1}\right\} + \frac{s_1}{4}\left\{\frac{\cos 2\Lambda'}{2\lambda'_1} - \frac{\cos 2(\Lambda'+\varepsilon)}{2(\lambda'_1+\varepsilon_1)} - \frac{\cos 2(\Lambda'-\varepsilon)}{2(\lambda'_1-\varepsilon_1)}\right\}\right]\\ -h_2&\left[2c_1\left\{\frac{\sin(2\Gamma_1-\lambda'-\varepsilon)}{2\gamma_1-\lambda'_1-\varepsilon_1} - \frac{\sin(2\Gamma_1-\Lambda'+\varepsilon)}{2\gamma_1-\lambda'_1+\varepsilon_1}\right\} - s_1\left\{\frac{\cos 2\Gamma_0}{2\gamma_1} - \frac{1}{2}\frac{\cos 2(\Gamma_1+\varepsilon)}{2(\gamma_1+\varepsilon_1)} - \frac{1}{2}\frac{\cos 2(\Gamma_1-\varepsilon)}{2(\gamma_1-\varepsilon_1)}\right\}\right]\\ -h'_2&\left[2c_1\left\{\frac{\sin(2\Gamma'_1-\Lambda'-\varepsilon)}{2\gamma'_1-\lambda'_1-\varepsilon_1} - \frac{\sin(2\Gamma'_1-\Lambda'+\varepsilon)}{2\gamma'_1-\lambda'_1+\varepsilon_1}\right\} - s_1\left\{\frac{\cos 2\Gamma'_1}{2\gamma'_1} - \frac{1}{2}\frac{\cos(2\Gamma'_1+\varepsilon)}{2(\gamma'_1+\varepsilon)} - \frac{1}{2}\frac{\cos 2(\Gamma'_1-\varepsilon)}{2(\gamma'_1-\varepsilon_1)}\right\}\right].\end{aligned}\right.$$

$$(124^{bis})\left\{\begin{aligned}
s_1\Delta\psi = \mathrm{H}_1\Bigg[&-c_2\left\{\frac{\cos(\mathrm{A}'-\varepsilon)}{\lambda_1'-\varepsilon_1}-\frac{\cos(\mathrm{A}'+\varepsilon)}{\lambda_1'+\varepsilon_1}\right\}+\frac{s_2}{8}\left\{\frac{\sin 2\mathrm{A}'}{2\lambda_1'}-\frac{1}{2}\frac{\sin 2(\mathrm{A}'+\varepsilon)}{2(\lambda_1'+\varepsilon_1)}-\frac{1}{2}\frac{\sin 2(\mathrm{A}'-\varepsilon)}{2(\lambda_1'-\varepsilon_1)}\right\}\\
&+\frac{3s_2}{4}\left\{t-\frac{\sin 2\varepsilon}{2\varepsilon_1}\right\}\Bigg]+h_2\Bigg[2c_2\left\{\frac{\cos(2\Gamma_1-\mathrm{A}'-\varepsilon)}{2\gamma_1-\lambda_1'-\varepsilon_1}-\frac{\cos(2\Gamma_1-\mathrm{A}'+\varepsilon)}{2\gamma_1-\lambda_1'+\varepsilon_1}\right\}\\
&-\frac{s_2}{2}\left\{\frac{\sin 2\Gamma_1}{2\gamma_1}-\frac{1}{2}\frac{\sin 2(\Gamma_1+\varepsilon)}{2(\gamma_1+\varepsilon_1)}-\frac{1}{2}\frac{\sin(\Gamma_1-\varepsilon)}{2(\gamma_1-\varepsilon_1)}\right\}\\
&-\frac{3s_2}{2}\left\{\frac{\sin 2(\Gamma_1-\mathrm{A}')}{2(\gamma_1-\lambda_1')}+\frac{1}{2}\frac{\sin 2(\Gamma_1-\mathrm{A}'+\varepsilon)}{2(\gamma_1-\lambda_1'+\varepsilon_1)}-\frac{1}{2}\frac{\sin 2(\Gamma_1-\mathrm{A}'-\varepsilon)}{2(\gamma_1-\lambda_1'-\varepsilon_1)}\right\}\Bigg]\\
&+h_2'\Bigg[2c_2\left\{\frac{\cos(2\Gamma_1'-\mathrm{A}'-\varepsilon)}{2\gamma_1'-\lambda_1'-\varepsilon_1}-\frac{\cos 2(\Gamma_1'-\mathrm{A}'+\varepsilon)}{2\gamma_1'-\lambda_1'+\varepsilon_1}\right\}-\frac{s_2}{2}\left\{\frac{\sin 2\Gamma_1'}{2\gamma_1'}-\frac{1}{2}\frac{\sin 2(\Gamma_1'+\varepsilon)}{2(\gamma_1'+\varepsilon_1)}-\frac{1}{2}\frac{\sin(\Gamma_1'-\varepsilon)}{2(\gamma_1'-\varepsilon_1)}\right\}\\
&-\frac{3s_2}{2}\left\{\frac{\sin 2(\Gamma_1'-\mathrm{A}')}{2(\gamma_1'-\lambda_1')}+\frac{1}{2}\frac{\sin 2(\Gamma_1'-\mathrm{A}'+\varepsilon)}{2(\gamma_1'-\lambda_1'+\varepsilon_1)}-\frac{1}{2}\frac{\sin 2(\Gamma_1'-\mathrm{A}'-\varepsilon)}{2(\gamma_1'-\lambda_1'-\varepsilon_1)}\right\}\Bigg].
\end{aligned}\right.$$

On remarquera que nous avons laissé subsister, dans ces formules, sous les coefficients h_2 et h_2', des termes en $2\Gamma_1$ et $2\Gamma_1'$, et, sous le coefficient H_1, un terme en t, qui, s'ils ne disparaissaient identiquement, ne pourraient être maintenus parmi ceux des variations séculaires. Mais ces termes sont détruits par ceux qui les suivent.

80. Afin de comparer plus aisément nos formules à celles dont on fait usage en astronomie, et de nous faire une idée plus nette de la valeur des termes qui se rencontrent dans les nôtres, et non dans ces dernières, nous commencerons par développer les formules (124) suivant les puissances du temps, en nous arrêtant à la troisième, et en nous bornant aux termes à longue période. Ceux qui dépendent du périgée de la Lune, et qui sont compris sous le coefficient h_2', devront figurer parmi les termes à courte période que nous trouverons en calculant l'action de cet astre (article 87).

Prenant les intégrales précédentes entre les limites 0 et t, on trouvera :

$$(125)\left\{\begin{aligned}
\Delta\theta = {}&\mathrm{H}_1 c_1\varepsilon_1 t^2\left\{\sin\mathrm{A}_0'+\frac{2}{3}\lambda_1'\cos\mathrm{A}_0'.t\right\}-\frac{1}{6}\mathrm{H}_1 s_1\varepsilon_1\left(\lambda_1'-\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\sin 2\mathrm{A}_0'.t^3\\
&-2h_2c_1\varepsilon_1t^2\left\{\sin(2\Gamma_0-\mathrm{A}_0')+\frac{2}{3}(2\gamma_1-\lambda_1')\cos(2\Gamma_0-\mathrm{A}_0')t\right\}-\frac{2}{3}h_2s_1\varepsilon_1\left(\gamma_1-\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\sin 2\Gamma_0.t^3.
\end{aligned}\right.$$

$$(125^{bis})\left\{\begin{aligned}
s_1\Delta\psi = {}&-\mathrm{H}_1c_2\varepsilon_1t^2\left\{\cos\mathrm{A}_0'-\frac{2}{3}\lambda_1'\sin\mathrm{A}_0'.t\right\}+\frac{1}{12}\mathrm{H}_1s_1\varepsilon_1\left(\lambda_1'-\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\cos 2\mathrm{A}_0'.t^3\\
&+\frac{1}{2}\mathrm{H}_1s_2\varepsilon_1^2.t^3+2h_2c_2\varepsilon_1t^2\left\{\cos(2\Gamma_0-\mathrm{A}_0')-\frac{2}{3}(2\gamma_1-\lambda_1')\sin(2\Gamma_0-\mathrm{A}_0')t\right\}\\
&-\frac{1}{3}h_2s_1\varepsilon_1\left(\gamma_1-\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\cos 2\Gamma_0.t^3-h_2s_2\varepsilon_1\left(\gamma_1-\lambda_1'-\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\cos 2(\Gamma_0-\mathrm{A}_0').t^3.
\end{aligned}\right.$$

81. Dans l'établissement de ces formules, nous avons posé provisoirement (article 78) $\Lambda' = \Lambda_0 + \lambda'_1 t = \Lambda_0 + (\lambda_1 - \psi_1)t$, et $\varepsilon = \varepsilon_1 t$. A la rigueur cependant Λ' est égal à $\Lambda_0 - \psi + \lambda_1 t = \Lambda_0 + \lambda'_1 t - \psi_2 t^2$, puisque $\psi = \psi_1 t + \psi_2 t^2$, si nous négligeons les termes du troisième ordre; et ε est égal à $\varepsilon_1 t - \varepsilon_2 t^2$.

Nous allons tenir compte des termes du second ordre; mais nous verrons que ceux du troisième auxquels ils donnent naissance dans les expressions de $\Delta\theta$ et de $\Delta\psi$ sont absolument sans importance, à moins qu'il ne s'agisse d'observations très reculées.

Si, au lieu des expressions de l'article 78, nous prenons $\Lambda' = \Lambda_0 + \lambda'_1 t - \psi_2 t^2$, $\varepsilon = \varepsilon_1 t - \varepsilon_2 t^2$ les intégrales des formules (124), $\sin\frac{(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda'_1 - \varepsilon_1}$ etc., qui provenaient de $\int \cos(\Lambda' - \varepsilon)dt$ etc., seront à remplacer par les expressions complètes de ces dernières intégrales.

Faisant donc

$$\Lambda' - \varepsilon = \Lambda_0 + (\lambda'_1 - \varepsilon_1)t - (\psi_2 - \varepsilon_2)t^2 = \Lambda'_1 - \varepsilon_1 t - (\psi_2 - \varepsilon_2)t^2,$$
$$\Lambda' + \varepsilon = \Lambda_0 + (\lambda'_1 + \varepsilon_1)t - (\psi_2 + \varepsilon_2)t^2 = \Lambda'_1 + \varepsilon_1 t - (\psi_2 + \varepsilon_2)t^2,$$

formules dans lesquelles Λ'_1 représente $\Lambda_0 + \lambda'_1 t$, on aura :

$$\begin{aligned}
\cos(\Lambda' - \varepsilon) &= \cos(\Lambda'_1 - \varepsilon_1 t) + \sin(\Lambda'_1 - \varepsilon_1 t).(\psi_2 - \varepsilon_2)t^2 \\
&= \cos(\Lambda'_1 - \varepsilon_1 t) + \sin(\Lambda'_1 - \varepsilon_1 t) - \sin(\Lambda'_1 - \varepsilon_1 t)\cos\sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2)}^{t} \\
&= \cos(\Lambda'_1 - \varepsilon_1 t) + \sin(\Lambda'_1 - \varepsilon_1 t) - \frac{1}{2}\sin\left[\Lambda'_1 - \left(\varepsilon_1 - \sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2)}\right)^{t}\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\sin\left[\Lambda'_1 - \left(\varepsilon_1 + \sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2)}\right)^{t}\right].
\end{aligned}$$

L'intégrale $\int^{t} \cos(\Lambda' - \varepsilon)dt$ sera donc égale à

$$\frac{\sin(\Lambda'_1 - \varepsilon_1^t)}{\lambda'_1 - \varepsilon_1} - \left\{\frac{\cos(\Lambda'_1 - \varepsilon_1^t)}{\lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{1}{2}\frac{\cos\left[\Lambda'_1 - \varepsilon_1^t + \sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2)}^{t}\right]}{\lambda'_1 - \varepsilon_1 + \sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2)}} - \frac{1}{2}\frac{\cos\left[\Lambda'_1 - \varepsilon_1^t - \sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2)}^{t}\right]}{\lambda'_1 - \varepsilon_1 - \sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2)}}\right\}.$$

Cette dernière parenthèse est l'expression qui provient des termes du second ordre en ε et en ψ; elle ne donne que des termes du troisième ordre.

Si on la développe, l'expression complète de l'intégrale précédente, c'est-à-dire celle par laquelle il faudra remplacer $\frac{\sin(\Delta'-\varepsilon)}{\lambda'_1-\varepsilon_1}$ dans les formules (124), sera

$$\frac{\sin(\Lambda'-\varepsilon)}{\lambda'_1-\varepsilon_1}+\frac{1}{3}\sin\Lambda_0(\psi_2-\varepsilon_2)t^3.$$

De même, au lieu de $\frac{\sin(\Delta'+\varepsilon)}{\lambda'_1+\varepsilon_1}$, il faudra écrire

$$\frac{\sin(\Lambda'+\varepsilon)}{\lambda'_1+\varepsilon_1}+\frac{1}{3}\sin\Lambda_0(\psi_2+\varepsilon_2)t^3;$$

de sorte qu'à la différence

$$\frac{\sin(\Lambda'-\varepsilon)}{\lambda'_1-\varepsilon_1}-\frac{\sin(\Lambda'+\varepsilon)}{\lambda'_1+\varepsilon_1}$$

il y aura à ajouter

$$-\frac{2}{3}\sin\Lambda_0\varepsilon_2 t^3.$$

Et à la différence

$$\frac{\cos(\Lambda'-\varepsilon)}{\lambda'_1-\varepsilon_1}-\frac{\cos(\Lambda'+\varepsilon)}{\lambda'_1+\varepsilon_1}$$

on ajoutera

$$-\frac{2}{3}\cos\Lambda_0\varepsilon_2 t^3.$$

Il est inutile que nous recherchions l'effet de la même circonstance dans les autres termes des formules (124), qui sont eux-mêmes très petits.

Si l'on complète, comme il vient d'être dit, les formules (125), et qu'on omette les termes tout à fait insignifiants, elles s'écriront :

$$(125^{bis})\left\{\begin{aligned}
\Delta\theta &= \mathrm{H}_1 c_1\left\{\varepsilon_1\sin\Lambda'_0 t^2+\frac{2}{3}\varepsilon_1\lambda'_1\cos\Lambda'_0 t^3-\frac{2}{3}\varepsilon_2\sin\Lambda'_0 t^3\right\}-\frac{1}{6}\mathrm{H}_1 s_1\varepsilon_1^2\sin 2\Lambda'_0 t^3-2h_2 c_1\varepsilon_1\sin(2\Gamma_0-\Lambda'_0)t^2,\\
\Delta\psi &= -\mathrm{H}_1\frac{c_2}{s_1}\left\{\varepsilon_1\cos\Lambda'_0 t^2-\frac{2}{3}\varepsilon_1\lambda'_1\sin\Lambda'_1 t^3-\frac{2}{3}\varepsilon_1^2\cos\Lambda'_0 t^3\right\}\\
&\quad+\mathrm{H}_1 c_1\varepsilon_1^2 t^3-\frac{1}{12}\mathrm{H}_1\varepsilon_1^2\cos 2\Lambda'_0 t^3+2h_2\frac{c_2}{s_1}\varepsilon_1\cos(2\Gamma_0-\Lambda'_0)t^2.
\end{aligned}\right.$$

82. Avant de comparer les formules (125) à celles dont les astronomes font usage, il sera utile de les réduire en nombres.

Dans cette réduction, nous pourrons omettre, comme tout à fait inappréciables aux observations, les termes qui renferment le produit de ε_1 par un moyen mouvement, tels que λ_1', γ_1, etc.

Nous prendrons, en partant des formules de Le Verrier, et en adoptant, pour les premiers termes de A et de ε, les valeurs données par Oppolzer (*) :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A} &= 173^\circ 0' 42'' - 8''.688\, t \\ \varepsilon &= 0''.47951\, t - 0''.00000323\, t^2 \end{aligned}\right\} \text{(Le Verrier et Oppolzer).}$$

$$-\psi = 50''.36838 \text{ (Bessel) (**)};$$

d'où

$$\lambda_1' = 41''.680.$$

Au moyen de ces valeurs et de celles de l'article 31, nous trouverons, en désignant par s le temps exprimé en siècles :

$$(126)\quad \left\{\begin{array}{r|rl|l} \Delta\theta = 0''.071809 & s^2 - 0''.0078798 & & s^3 = 0''.071791\ s^2 - 0''.007910\, s^3 \\ & - \quad \ldots.322 & & \\ - \ldots.\,18 & + \quad \ldots..\,20 & & \\ \Delta\psi = 1''.09360 & s^2 + 0''.0018085 & & s^3 = 1''.09367\ \ s^2 + 0''.001452\, s^3 \\ & - \quad \ldots.4911 & & \\ + \ldots.\,6 & + \quad \ldots.137 & & \\ & + \quad \ldots.1208 & & \end{array}\right.$$

Les formules données par Oppolzer sont :

$$\Delta\theta = 0.0713\ s^2 - 0.00786\ s^3,$$

$$\Delta\psi = 1.0888\ s^2 + 0.00174\ s^3.$$

(*) *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Planeten und Cometen*, Leipzig, 1882, t. I, pp. 186 et 192, et *Traité de la détermination des orbites des Planètes et des Comètes*, traduction de Pasquier, mêmes pages.

(**) Voir p. 53 ci-dessous.

Nous pouvons omettre de parler des nouveaux termes en s^2 introduits par nos formules, vu leur peu d'importance.

Quant aux termes en s^3, il n'en est pas de même, comme on voit; tandis que le coefficient du premier terme de cet ordre est, dans nos formules, à très peu près le même que dans celles d'Oppolzer, les coefficients des termes complets en s^3 sont assez différents des siens; et cela provient de ce qu'il a omis des termes qui ne sont nullement négligeables vis-à-vis de ceux qu'il conserve. Mais, nous le répétons, c'est afin de faciliter le calcul numérique que nous avons développé les formules (124) suivant les puissances du temps. Ces dernières seules donnent les véritables expressions des variations séculaires en obliquité et en longitude, et nous conduiront à la notion de la nutation séculaire.

83. Un criterium de l'exactitude de ces formules est leur application aux observations anciennes de l'obliquité de l'écliptique.

Parmi ces observations, nous choisirons les suivantes, comme étant les meilleures. Années : — 1100, — 250, + 173, 461, 880, 1000, 1279, 1487. Elles sont toutes rapportées par Laplace (*), à l'exception de la dernière, que nous avons empruntée aux observations de Regiomontanus (**). Le grand géomètre français en rapporte quelques autres également, que nous avons rejetées comme défectueuses (***); elles s'écartent au moins autant, du reste, de la formule de Laplace que de la nôtre.

Afin de calculer plus rigoureusement la réduction de l'écliptique fixe à l'écliptique vraie, au lieu de la formule usitée, nous avons tiré de

$$\cos\theta_1 = \cos\theta\cos\varepsilon - \sin\theta\sin\varepsilon\cos A',$$

θ étant l'inclinaison de l'équateur moyen sur le premier plan, θ_1 sur le

(*) Connaissance des temps pour 1811.

(**) HOUZEAU, *Constantes de l'astronomie* (ANNALES DE L'OBSERVATOIRE ROYAL DE BRUXELLES, 2e série, t. I.

(***) Voir la Notice sur ce sujet dans l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles pour 1886*.

second, l'expression suivante de l'obliquité moyenne :

$$\theta_1 = \theta + \varepsilon \cos \Lambda' + x,$$

l'arc x, qui se déduit de l'identification des deux valeurs de $\cos \theta_1$, étant donné par

$$x = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \Lambda' \cot \theta \, (1 - \varepsilon \cos \Lambda' \cot \theta).$$

En sorte que, si θ_0 est l'obliquité moyenne au temps $t = 0$, on aura, au temps t, en négligeant le terme en ε^3 :

$$(127) \quad \ldots\ldots \quad \theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta + \varepsilon \cos \Lambda' + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \Lambda^2 \cot \theta,$$

$\Delta\theta$ étant donné par la formule (125^{bis}).

Si l'on veut développer cette expression suivant les puissances du temps, elle s'écrira :

$$\theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta + \varepsilon_1 \cos \Lambda'_0 t + \left(- \varepsilon_2 \cos \Lambda'_1 - \varepsilon_1 \lambda'_1 \sin \Lambda'_0 + \frac{1}{2} c'_1 \varepsilon_1^2 \sin^2 \Lambda'_0\right) t^2$$
$$+ \left(\varepsilon_2 \lambda'_1 \sin \Lambda'_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \lambda'^2_1 \cos \Lambda'_0 + \frac{1}{2} c'_1 \varepsilon_1^2 \lambda'_1 \sin 2\Lambda'_0 - c'_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin^2 \Lambda'_0\right) t^3.$$

Réduisant en nombres d'après les données de l'article 82, on trouvera, pour la valeur de l'obliquité moyenne après s siècles :

$$(127^{bis}) \quad \ldots\ldots \quad \theta_1 = \theta_0 - 47''.594\, s - 0''.0127\, s^2 + 0''.001266\, s^3.$$

Oppolzer donne :

$$\theta_1 = \theta_0 - 47''.594\, s - 0''.00204\, s^3.$$

Les différences entre l'observation et le calcul, fait suivant notre formule et suivant celle d'Oppolzer, sont portées dans les deux dernières colonnes ci-après; dans la précédente figurent les différences que Laplace a trouvées en adoptant la variation séculaire de $52''$;

ANNÉES.	Observ.	O — L.	O — O.	O — F.
— 1100	23° 54′ 2″.0	+ 2′ 4″.1	+ 4′ 10″.4	+ 3′38″9.
— 250	45 7.0	— 12.0	+ 1 30.9	+ 1 3.2
+ 173	41 33.0	— 44.1	+ 56.6	+ 46.9
+ 461	38 52.3	— 1 0.7	+ 27.6	+ 21.7
+ 880	35 41.0	+ 28.0	+ 30.7	+ 28.8
+ 1000	34 26.0	— 24.0	+ 11.9	+ 11.2
+ 1279	32 2.4	— 20.0	— 0.3	— 0.0
+ 1460	30 49.0		+ 11.9	+ 11.0

84. Nous avons enfin à ajouter, aux expressions précédentes (126) des variations séculaires de l'axe du monde, celles que nous avons données ci-dessus (articles 71 et 72); les expressions complètes de ces variations deviendront ainsi :

$$(128)\quad \begin{cases} \Delta\theta = 0''.071791\ s^2 - 0''.0079100\ s^3 + \nu[9.11259] \cos \Gamma_0 s - \nu[7.2884] \sin \Gamma_0 s^2, \\ \Delta\psi = 1''.09367\ s^2 + 0''.0014519\ s^3 + \nu[9.17917] \sin \Gamma_0 s + \nu[7.3350] \cos \Gamma_0 s^2. \end{cases}$$

Le coefficient ν, qui entre dans ces formules, ne peut, comme nous l'avons dit, être déterminé que par l'observation.

85. Il nous reste à chercher la valeur de la précession générale ψ_1, qui est représentée par $N\gamma_0 - N\gamma'$ dans la figure de l'article 76.

Les formules de Gauss, appliquées au triangle $N\gamma'\gamma$, dont l'angle γ' est $\pi - \theta$, l'angle γ, θ_1, et dont les côtés $N\gamma'$, $N\gamma$ et $\gamma'\gamma$ sont respectivement $\Lambda - \psi_1$, $\Lambda - \psi$ et χ, cette dernière lettre représentant la précession planétaire, nous donneront :

$$\cos\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\psi_1 - \psi}{2} = \sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\theta_1 + \theta}{2},$$

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\Lambda - \frac{\psi_1 + \psi}{2}\right) = \sin\frac{\chi}{2}\sin\frac{\theta_1 + \theta}{2},$$

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\left(\Lambda - \frac{\psi_1 + \psi}{2}\right) = \cos\frac{\chi}{2}\sin\frac{\theta_1 + \theta}{2}.$$

Des deux dernières on tire, avec une exactitude amplement suffisante,

$$\chi^2 \sin^2 \frac{\theta_1 + \theta}{2} = \varepsilon^2 - (\theta_1 - \theta)^2,$$

et, si l'on remplace $\theta_1 - \theta$ par $\varepsilon \cos \Lambda_1$,

$$\frac{\theta_1 + \theta}{2} \text{ par } \theta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos \Lambda_1 t = \theta_0 - 0''.238\, t :$$

d'où

$$\chi^2 \sin^2 \theta_0 = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \Lambda}{1 - 0''.476\, t},$$
$$\chi \sin \theta_0 = \varepsilon \sin \Lambda\, (1 + 0''.238\, t),$$

ou, en écrivant, pour ε, $\varepsilon_1 t - \varepsilon_2 t^2$ et développant :

$$\chi \sin \theta_0 = \varepsilon_1 \sin \Lambda_0 t + \sin \Lambda_0 (0''.238\, \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, t^2 + \varepsilon_1 \lambda'_1 \cos \Lambda_0 t^2.$$

La première des trois formules précédentes peut s'écrire :

$$\psi_1 - \psi = \chi \left(\cos \theta_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sin \theta_0 \cos \Lambda_1 t\right) = \chi \sin \theta_0 \left(\cot \theta_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos \Lambda_0 t\right).$$

Substituant à $\chi \sin \theta_0$ l'expression qui vient d'être donnée, et effectuant les calculs numériques, on trouvera :

$$\psi_1 - \psi = 0''\, 13464\, t - 0''.0002216\, t^2;$$

or, pour 1750.0, Bessel a donné $\psi_1 = -50''.21129 t$.

Si nous combinons la formule précédente avec la formule (128), en appliquant cette donnée, nous obtiendrons, pour 1850 :

$$(129) \quad \ldots\ldots\ldots \quad -\psi = 50''.36838\, t - 0''.0001089\, t^2;$$

et la précession générale aura pour expression

$$(129^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad -\psi_1 = 50''.23383\, t + 0''.0001127\, t^2.$$

86. Mais les expressions (128) des variations séculaires de l'axe du monde ne sont applicables qu'à un nombre très limité de siècles. La nécessité de cette restriction résulte, en effet, de ce que les fonctions circulaires ont été développées en séries, dans lesquelles on s'est arrêté à la troisième puissance du temps.

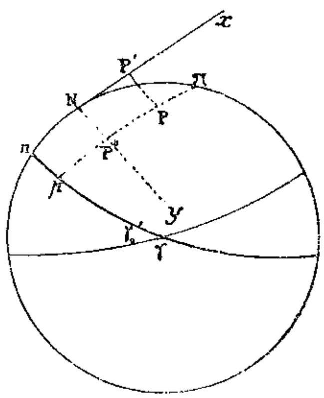
Si l'on veut se faire une idée précise du mouvement de l'axe du monde à travers une suite de siècles dont la durée soit en rapport avec celle des révolutions que la terre a subies depuis les premiers âges géologiques, il faudra recourir aux formules primordiales (124 et 124^{bis}).

Dans celles-ci, nous nous bornerons à tenir compte du premier terme seulement, à cause de la faiblesse des suivants vis-à-vis de celui-ci, et de la complication inextricable à laquelle on serait conduit, si l'on voulait faire usage des formules complètes.

Nous écrirons donc simplement, en omettant la constante, puisqu'elle rentre dans l'unique constante arbitraire de l'intégrale θ;

$$(130) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \Delta\theta &= \mathrm{H}_1 c_1 \left[\frac{\sin(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda_1' \varepsilon_1 -} - \frac{\sin(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda_1' + \varepsilon_1} \right] \\ \sin\theta_0 \Delta\psi &= -\mathrm{H}_1 c_2 \left[\frac{\cos(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda' - \varepsilon_1} - \frac{\cos(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda_1' + \varepsilon_1} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ces formules déterminent la variation séculaire de l'équateur, due au mouvement de l'écliptique, et estimée par rapport à l'équateur moyen, supposé soustrait aux variations séculaires, pris pour plan de référence.



Or π représentant le pôle boréal de l'écliptique fixe, N et P ceux du plan de référence et de l'équateur soumis à ses variations séculaires, menons par N un plan tangent à la sphère, et, dans ce plan, deux axes rectangulaires x et y, l'axe des x positifs étant dirigé vers le pôle de l'écliptique.

L'arc $\mathrm{P}\pi$ sera égal à θ, NP à $\theta - \delta\theta$, et on pourra les prendre tous deux comme égaux à θ; l'angle π, mesuré par l'arc np, sera égal à $\delta\psi$.

La distance des pôles P et N étant excessivement petite, nous pourrons admettre que les arcs PP' et PP'', normaux respectivement à $N\pi$ et à $n\gamma$, rencontrent, le premier l'axe x, et le second l'axe y; et, de plus, que x ou NP', abscisse du pôle moyen P est égal à $\operatorname{tg} \delta\theta$ ou à $\delta\theta$; quant à y, ou NP'', il sera égal à $\sin N\pi . \sin N\pi P''$ ou à $\sin \theta_0 . \delta\psi = s_1 \delta\psi$.

Si nous appelons pôle normal le pôle du plan de référence, plan qui se confond avec l'équateur moyen, non soumis aux variations séculaires, que nous nommerons également équateur normal, nous pourrons donc dire que les coordonnées de la position séculaire du pôle, rapportées à deux axes rectangulaires menés, par le pôle normal, dans l'équateur normal, sont simplement donnés par les seconds membres des formules précédentes (130).

Si l'on fait la somme des carrés de ces coordonnées, on trouvera :

$$\frac{1}{4H_1^2}\left(\frac{x^2}{c_1^2} + \frac{y^2}{c_2^2}\right) = \frac{\lambda_1'^2 \sin^2\varepsilon + \varepsilon_1^2 \cos^2\varepsilon}{(\lambda_1'^2 - \varepsilon_1^2)},$$

le second membre de cette équation peut s'écrire :

$$\frac{\varepsilon_1^2}{\lambda_1'^2 - \varepsilon_1^2} + \sin^2\varepsilon.$$

La valeur numérique du premier terme est 0.00013, et $\sin\varepsilon$ étant moindre que $0.000002\,t$, on peut dire que l'équation précédente représente, pour une époque déterminée, une ellipse dont le grand axe reste à très peu près constant pendant un grand nombre d'années.

87. En vertu du mouvement séculaire de l'écliptique, le pôle de l'équateur est donc animé d'un mouvement périodique autour du pôle normal défini ci-dessus.

A la différence près de la longueur des périodes, ce mouvement est complètement analogue à celui de la nutation annuelle. Il est donc naturel de lui donner le nom de NUTATION SÉCULAIRE.

Et le résultat de l'analyse précédente montre que :

En vertu de la nutation séculaire, le pôle moyen décrit autour du pôle normal, considéré comme fixe, une ellipse dont le grand axe, dirigé vers le *pôle de l'écliptique, reste sensiblement constant pendant plusieurs siècles ; et le rapport du grand axe au petit est égal à celui des cosinus de l'obliquité de l'écliptique et du double de cette obliquité.*

La trajectoire du pôle moyen est l'ensemble des éléments de ces ellipses à grand axe variable.

Si l'on recherche la valeur du demi-grand axe, en rendant l'expression de x maximum, on trouve qu'elle correspond à $\Lambda' = \pi$, et qu'elle est égale à :

$$a = 2H_1 c_1 \frac{\lambda_1' \sin \varepsilon_m}{\lambda_1'^2 - \varepsilon_1^2},$$

ε_m représentant la limite absolue de l'inclinaison de l'écliptique mobile sur l'écliptique fixe.

Quant à la période de T de la nutation séculaire, elle sera donnée par :

$$\Lambda_T' \quad \text{ou} \quad \Lambda_0' + \lambda_1' T = \Lambda_0' + 2\pi,$$

d'où

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_1'}.$$

88. Calculons les valeurs numériques de ces quantités, en nous bornant, toutefois, à considérer les termes de ε, ψ ..... qui ne dépendent que de la première puissance du temps.

La valeur que nous trouverons pour a sera, sous ces réserves, le maximum absolu de l'accroissement séculaire de l'obliquité de l'écliptique.

Nous prendrons, outre les données numériques de l'article 82, $\varepsilon_m = 3°6'$ (Stockwell).

Ceci posé, on obtiendra $a = 3°48'.4$.

Quant à la période T, on la trouvera de 31100 ans environ.

On peut donc dire, sous les réserves qui précèdent, que la limite des variations du pôle moyen, dues à la nutation séculaire, est de 3°48'.4, et que l'intervalle de temps nécessaire pour que cette limite soit atteinte est de 15550 ans.

Ces résultats sont fondés sur l'hypothèse de l'uniformité du mouvement séculaire de l'écliptique. Une connaissance plus exacte de ce mouvement serait indispensable, pour pouvoir affirmer la validité absolue, à travers une longue série de siècles, des conclusions qui précèdent, et que nous résumons en ces lignes :

Le demi-grand axe de la courbe décrite par le pôle moyen, dans son mouvement de nutation séculaire est de 3°48'.4 ;

La période de ce mouvement est de 31000 ans environ.

89. Les calculs exposés ci-dessus s'appliquent sans difficulté à l'action de la Lune.

Il suffira de remplacer la formule (113) par la suivante :

$$(131) \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{tg}\beta = \sin\varepsilon \sin(\lambda - \mathrm{A}) + i \sin(\lambda - \Omega),$$

et de multiplier, en outre, par le rapport f des actions de la Lune et du Soleil.

Évidemment les termes indépendants de i seront identiquement les mêmes pour les deux astres ; en sorte que le coefficient h_1 trouvé précédemment, article 78, dans le premier terme de l'action du Soleil deviendra $h_1 + fh'_1 = \mathrm{H}_1$, en faisant

$$(132) \quad \ldots\ldots \quad h'_1 = \frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\frac{\mu}{1+\mu}\cdot\left(1 + \frac{9}{2}e'^2 - \frac{3}{2}i^2\right)^{(*)};$$

le coefficient h_2 des deux termes suivants se changera de même, pour la Lune, en

$$(132^{\text{bis}}) \quad \ldots\ldots \quad h'_2 = \frac{9}{32}fe'^2\frac{m_1^2}{u}\cdot\frac{\mu}{1+\mu};$$

et le périgée du Soleil, Γ, sera remplacé par celui de la Lune Γ'.

C'est de cette manière que nous avons déjà écrit les formules (124).

(*) On remarquera que nous avons introduit dans la parenthèse, le facteur $-\frac{3}{2}i^2$, qui doit y figurer, comme il a été dit à l'article 75.

Mais ces formules sont encore incomplètes, puisque les termes dépendants de l'inclinaison et du nœud de l'orbite lunaire y sont omis.

Pour les trouver, nous aurons à substituer, dans le produit $\frac{4xz}{D^2}$, article 77, à $\sin 2\beta$ et à $\cos 2\beta$ leurs expressions tirées de (133) et à multiplier, de plus, le résultat par

$$\left(\frac{a}{D}\right)^3 = 1 + \frac{9}{2}e^2 + 3e\cos(\lambda - \Gamma) + \frac{3}{2}e^2\cos 2(\lambda - \Gamma),$$

en laissant toutefois de côté les termes indépendants de i et de Ω, dont la formule précédente a tenu compte, ainsi que ceux qui sont indépendants de ε ou de Λ, et qui rentrent dans la précession et la nutation annuelles.

Parmi ces derniers, nous mentionnerons en particulier celui qui provient du terme :

$$-\frac{3}{4}s_2 i^2 \left\{\sin(2\varepsilon + \varphi) - \sin(2\varepsilon - \varphi)\right\}$$

du développement précédent. Ce terme donnera, pour $s_1\Delta\psi$ une intégrale de la forme $-\frac{3}{4}s_2 i^2 \frac{\sin 2\varepsilon}{\varepsilon_1}$ qui se réduira, comme le terme analogue trouvé ci-dessus, à une variation séculaire insignifiante de la constante de la précession (125^{bis}).

On trouverait de même, affectés de $-\frac{3}{2}i^2$ tous les termes en Λ' des formules (122). C'est pourquoi nous avons introduit le facteur $1 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{9}{2}e'^2$ au lieu de $1 + \frac{9}{2}e'^2$ dans les formules (123).

Le développement des termes qui ne dépendent que de i, Ω, ε et Λ ne présente pas une grande complication, puisqu'il n'exige que la formation du produit $\frac{4xz}{D^2}$, dans lequel on peut tout d'abord faire abstraction des termes indépendants de la longitude λ de l'astre, de l'inclinaison i et du nœud Ω de son orbite.

Au contraire, celui des termes qui dépendent à la fois de l'inclinaison et du périgée est un peu plus long; il exige, en effet, que l'on conserve, dans le produit $\frac{4xz}{D^2}$, les termes en 2λ, qui sont multipliés par i et par i^2, puisque ce sont ces termes mêmes, dont le produit par $\frac{3}{2}e^2\cos 2(\lambda - \Gamma)$ donnera des termes dépendants du périgée de la Lune et de l'inclinaison de son orbite.

Avant de les calculer, il sera donc prudent de rechercher quelle en peut être l'importance.

Or, le terme de l'expression $\frac{4xz}{D^2}$:

$$\sin^2\beta\left[(1+c_1)\sin(2\lambda-\varphi)+(1-c_1)\sin(2\lambda+\varphi)\right],$$

par exemple, fournira ainsi des termes de la forme :

$$e^2 i\left\{\begin{array}{l}(1+c_1)\left[\cos(2\Gamma+\Omega-\mathrm{A}-\varepsilon-\varphi)-\cos(2\Gamma+\Omega-\mathrm{A}+\varepsilon-\varphi)\right]\\(1-c_1)\left[\cos(2\Gamma+\Omega-\mathrm{A}-\varepsilon+\varphi)-\cos(2\Gamma+\Omega-\mathrm{A}+\varepsilon+\varphi)\right]\end{array}\right\}$$

qui donneront, par l'intégration, des expressions telles que :

$$f\frac{m_1^2}{n}\frac{\mu}{1+\mu}e^2 i\left[\frac{\sin(2\Gamma+\Omega-\mathrm{A}-\varepsilon)}{2\gamma_1+\omega_1-\lambda_1-\varepsilon_1}-\frac{\sin(2\Gamma+\Omega-\mathrm{A}+\varepsilon)}{2\gamma_1+\omega_1-\lambda_1+\varepsilon_1}\right].$$

Le développement de celle-ci suivant les puissances du temps, se réduit à

$$f\frac{m_1^2}{n}\frac{\mu}{1+\mu}e^2 i\varepsilon_1\sin(2\Gamma_0+\Omega_0-\mathrm{A}_0).t^2.$$

Si l'on calcule les facteurs numériques qui entrent dans cette expression, on trouve que le produit n'en atteint pas même des cent millionièmes de seconde.

Ces termes seront donc tout à fait insensibles.

90. Pour la même raison, nous pouvons nous borner à ne considérer, dans le développement de $\frac{4xz}{D^2}$, que les seuls termes qui dépendent de la première puissance de l'inclinaison, et à écrire, par suite, en posant, pour abréger, $\lambda+c_1\sin\chi=\lambda'$:

$$\begin{aligned}\sin 2\beta&=\cos(\lambda'-\mathrm{A}'-\varepsilon)-\cos(\lambda'-\mathrm{A}'+\varepsilon)\\&-\frac{1}{2}i\left\{\begin{array}{l}2\sin(\lambda'-\Omega)-\sin(\lambda'-\Omega-2\varepsilon)-\sin(\lambda'-\Omega+2\varepsilon)\\+\sin(\lambda'+\Omega-2\mathrm{A}')-\frac{1}{2}\sin(\lambda'+\Omega-2\mathrm{A}'-2\varepsilon)-\frac{1}{2}\sin(\lambda'+\Omega-2\mathrm{A}'+2\varepsilon)\end{array}\right\},\end{aligned}$$

$$\sin^2\beta=\frac{1}{2}i\left\{\begin{array}{l}\sin(2\lambda'-\Omega-\mathrm{A}'-\varepsilon)-\sin(2\lambda'-\Omega-\mathrm{A}'+\varepsilon)\\-\sin(\Omega-\mathrm{A}'-\varepsilon)+\sin(\Omega-\mathrm{A}'+\varepsilon)\end{array}\right\}.$$

On trouvera alors que les termes à considérer se réduisent au produit de $\frac{1}{4}i$ par

$$
\begin{aligned}
&(c_1+c_2)\left[\begin{array}{c}\sin(\Omega-\varphi)-\sin(\Omega+2\varepsilon-\varphi)-\sin(\Omega-2\varepsilon-\varphi)\\ -\sin(\Omega-2\Lambda'-\varphi)+\frac{1}{2}\sin(\Omega-2\Lambda'+2\varepsilon-\varphi)+\frac{1}{2}\sin(\Omega-2\Lambda'-2\varepsilon-\varphi)\end{array}\right]\\
&+(c_1-c_2)\left[\begin{array}{c}2\sin(\Omega+\varphi)-\sin(\Omega+2\varepsilon+\varphi)-\sin(\Omega-2\varepsilon+\varphi)\\ -\sin(\Omega-2\Lambda'+\varphi)+\frac{1}{2}\sin(\Omega-2\Lambda'+2\varepsilon+\varphi)+\frac{1}{2}\sin(\Omega-2\Lambda'-2\varepsilon+\varphi)\end{array}\right]\\
&\qquad s_1\left\{\begin{array}{l}(1+c_1)\left[\cos(\Omega+\Lambda'-\varepsilon-\varphi)-\cos(\Omega+\Lambda'+\varepsilon-\varphi)\right]\\ +(1-c_1)\left[\cos(\Omega+\Lambda'-\varepsilon+\varphi)-\cos(\Omega+\Lambda'+\varepsilon+\varphi)\right]\end{array}\right\}\\
&\qquad +3s_2\left\{\begin{array}{l}\cos(\Omega-\Lambda'-\varepsilon-\varphi)-\cos(\Omega-\Lambda'+\varepsilon-\varphi)\\ -\cos(\Omega-\Lambda'-\varepsilon+\varphi)+\cos(\Omega-\Lambda'+\varepsilon+\varphi)\end{array}\right\}.
\end{aligned}
$$

91. Ces termes sont à multiplier par $-\frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}$ pour fournir les termes correspondants de p, qui seront donc le produit des précédents par $-\frac{3}{16}\frac{m_1^2}{n}i$; et, en tenant compte de la notation (123), on trouvera, par l'intégration :

$$
\begin{aligned}
\Delta\theta=\frac{1}{2}ih'_1c_1&\left[\begin{array}{l}\dfrac{2\cos\Omega}{\omega_1}-\dfrac{\cos(\Omega+2\varepsilon)}{\omega_1+2\varepsilon_1}-\dfrac{\cos(\Omega-2\varepsilon)}{\omega_1-2\varepsilon_1}\\ -\dfrac{\cos(\Omega-2\Lambda')}{\omega_1-2\lambda'_1}+\dfrac{\frac{1}{2}\cos(\Omega-2\Lambda'+2\varepsilon)}{\omega_1-2\lambda'_1+2\varepsilon_1}+\dfrac{\frac{1}{2}\cos(\Omega-2\Lambda'-2\varepsilon)}{\omega_1-2\lambda'_1-2\varepsilon_1}\end{array}\right]\\
+\frac{1}{2}ih'_1s_1&\left[\frac{\sin(\Omega+\Lambda'-\varepsilon)}{\omega_1+\lambda'_1-\varepsilon_1}-\frac{\sin(\Omega+\Lambda'+\varepsilon)}{\omega_1+\lambda'_1+\varepsilon_1}\right].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\psi=\frac{1}{2}ih'_1\frac{c_2}{s_1}&\left[\begin{array}{l}\dfrac{2\sin\Omega}{\omega_1}-\dfrac{\sin(\Omega+2\varepsilon)}{\omega_1+2\varepsilon_1}-\dfrac{\sin(\Omega-2\varepsilon)}{\omega_1-2\varepsilon_1}\\ -\dfrac{\sin(\Omega-2\Lambda')}{\omega_1-2\lambda'_1}+\dfrac{\frac{1}{2}\sin(\Omega-2\Lambda'+2\varepsilon)}{\omega_1-2\lambda'_1+2\varepsilon_1}+\dfrac{\frac{1}{2}\sin(\Omega-2\Lambda'-2\varepsilon)}{\omega_1-2\lambda'_1-2\varepsilon_1}\end{array}\right]\\
-\frac{1}{2}ih'_1c_1&\left[\frac{\cos(\Omega+\Lambda'-\varepsilon)}{\omega_1+\lambda'_1-\varepsilon_1}-\frac{\cos(\Omega+\Lambda'_1+\varepsilon)}{\omega_1+\lambda'_1+\varepsilon_1}\right]\\
+\frac{3}{2}ih'_1s_2&\left[\frac{\cos(\Omega-\Lambda'-\varepsilon)}{\omega_1-\lambda'_1-\varepsilon_1}-\frac{\cos(\Omega-\Lambda'+\varepsilon)}{\omega_1-\lambda'_1+\varepsilon_1}\right].
\end{aligned}
$$

La première partie de $\Delta\theta$, de même que de $\Delta\psi$, développée, donne, à la vérité, des termes qui dépendent de la troisième puissance du temps, mais qui sont affectés du coefficient ε_1^2, et, par conséquent, absolument négligeables.

Les expressions de $\Delta\theta$ et de $\Delta\psi$ se réduisent ainsi, la première à son dernier terme, la seconde aux deux derniers. Quant aux termes des formules (122), qui dépendent du mouvement de l'écliptique et du périgée de la Lune, ils sont tellement insignifiants, à cause du facteur très petit h_2' dont ils sont affectés, que nous pouvons les négliger complètement.

En ne conservant que les termes qui pourraient devenir sensibles, les variations à courte période qui sont liées au mouvement de l'écliptique se réduiront à

$$(133) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{1}{2} i h_1' s_1 \left[\frac{\sin(\Omega + A' - \varepsilon)}{\omega_1 + \lambda_1' - \varepsilon_1} - \frac{\sin(\Omega + A' + \varepsilon)}{\omega_1 + \lambda_1' + \varepsilon_1} \right] \\ \Delta\psi &= \frac{3}{2} i h_1' s_2 \left[\frac{\cos(\Omega - A' - \varepsilon)}{\omega_1 - \lambda_1' - \varepsilon_1} - \frac{\cos(\Omega - A' + \varepsilon)}{\omega_1 - \lambda_1' + \varepsilon_1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} i h_1' c_1 \left[\frac{\cos(\Omega + A' - \varepsilon)}{\omega_1 + \lambda_1' - \varepsilon_1} - \frac{\cos(\Omega + A' + \varepsilon)}{\omega_1 + \lambda_1' + \varepsilon_1} \right]. \end{aligned} \right.$$

92. Ces variations, quoique dépendant, par la longitude du nœud ascendant de l'écliptique et par son inclinaison sur l'écliptique fixe, du mouvement séculaire de ce plan, doivent évidemment, à cause de la brièveté de leur période, rentrer, comme nous l'avons dit, parmi les termes de la nutation annuelle.

Cela étant, les termes des formules (133) devront se calculer de la même manière que les termes usuels de la nutation; c'est-à-dire sans prendre les intégrales entre les limites 0 et t, comme nous l'avons fait pour les termes séculaires proprement dits (art. 76). Ce procédé est absolument rigoureux, quoiqu'il semble, au premier abord, que les termes des formules (133), complètement analogues aux termes séculaires, doivent se calculer de même que ceux-ci, et qu'il ne faudrait pas laisser subsister, dans leur développement, les termes indépendants du temps qui disparaissent dans ce dernier mode de calcul (*).

(*) Si l'on désigne par c la constante de la précession, par k une constante arbitraire, Dans le développement suivant des formules (133), nous n'écrirons que les deux premiers termes, les autres étant tellement faibles qu'ils ne pourraient devenir sensibles que pour une époque très-éloignée, et les observations qui ont été faites à une pareille époque ne possédant pas le degré de précision nécessaire pour que la présence de ces termes puisse s'y accuser.

Le développement se réduit ainsi à :

$$\Delta\theta = \frac{fih'_1 s_1 \varepsilon_1}{(\omega_1 + \lambda'_1)^2 - \varepsilon_1^2}\left[\sin(\Omega + \mathrm{A}') - (\omega_1 + \lambda'_1)\cos(\Omega + \mathrm{A}').t\right],$$

$$\Delta\psi = \frac{3fih'_1 c_1 \varepsilon_1}{(\omega_1 - \lambda'_1)^2 - \varepsilon_1^2}\left[\cos(\Omega - \mathrm{A}') + (\omega_1 - \lambda'_1)\sin(\Omega - \mathrm{A}').t\right]$$
$$- \frac{fih'_1 c_1 \varepsilon_1}{(\omega_1 + \lambda'_1)^2 - \varepsilon_1^2}\left[\cos(\Omega + \mathrm{A}') + (\omega_1 + \lambda'_1)\sin(\Omega + \mathrm{A}').t\right],$$

ou, en nombres, à

$$(134) \quad \ldots \quad \begin{cases} \Delta\theta = [5.1469]\sin(\Omega + \mathrm{A}') + [4.67266]\cos(\Omega + \mathrm{A}').t, \\ \Delta\psi = [5.8000]\cos(\Omega - \mathrm{A}') - [5.33092]\sin(\Omega - \mathrm{A}').t \\ \qquad - [5.5093]\cos(\Omega + \mathrm{A}') + [5.03508]\sin(\Omega + \mathrm{A}').t, \end{cases}$$

par F la fonction périodique qui remplace absolument tous les termes de la nutation, l'expression complète de ψ sera :

$$\psi = k + ct + \mathrm{F},$$

ou, en prenant l'intégrale entre 0 et t :

$$\psi = \psi_0 - \mathrm{F}_0 + ct + \mathrm{F}.$$

Or $\psi_0 - \mathrm{F}_0$ est la longitude moyenne au temps $t = 0$, c'est-à-dire celle que l'on obtient abstraction faite de la nutation; $\psi_0 - \mathrm{F}_0 + ct$ est donc la longitude moyenne au temps t ; la dernière formule devient, par suite :

$$\psi = \psi_m + \mathrm{F},$$

c'est-à-dire qu'en ajoutant à la longitude moyenne, au temps t, la nutation calculée pour ce même moment sans l'introduction d'une constante arbitraire, on obtient absolument le même résultat qu'en prenant l'intégrale entre les limites 0 et t.

Ces termes, dont aucun géomètre n'a tenu compte, Oppolzer excepté, pourront devenir sensibles lorsqu'on voudra comparer entre elles des observations séparées par un intervalle de plusieurs siècles. Les premiers d'entre eux, indépendants du temps, peuvent toujours être négligés, même dans la réduction des circompolaires.

RÉCAPITULATION

Nous arrêtons ici ce travail, quoi qu'il nous reste encore un point important à examiner : celui de l'uniformité du mouvement diurne à travers les siècles. On verra, dans l'Addition, que les irrégularités de ce mouvement sont du même ordre de grandeur que la nutation diurne.

L'existence aujourd'hui démontrée de cette nutation (*), celle aussi des termes nouveaux que nous avons trouvés dans l'expression de la nutation annuelle, nous imposent une tâche importante : la détermination des constantes de la nutation diurne d'abord ; et, ensuite, une détermination nouvelle des constantes de l'aberration et de la nutation annuelle du coefficient des termes qui, dans l'expression de cette dernière, dépendent des inégalités du sphéroïde terrestre, de ceux enfin qui renferment les constantes arbitraires, et dont la période, estimée égale à 305 jours environ, est, plus exactement, de $1 \frac{1}{305}$ jour.

C'est vers ce but que vont tendre actuellement nos premiers efforts.

Sa poursuite exigera l'emploi des formules qui ont fait l'objet du présent travail, et que nous allons récapituler.

La plupart des notations sont celles que nous avons employées précédemment, et qui sont, du reste, familières aux astronomes. On voudra bien ne pas oublier, toutefois, que ψ est pris partout dans le sens direct, et que nous conservons, pour les motifs énumérés à l'article 57, la longitude moyenne du Soleil, au lieu de la remplacer, comme on le fait généralement, par la longitude vraie.

Dans cette récapitulation, il sera plus simple et plus pratique à la fois d'exprimer les termes de la nutation diurne en coordonnées écliptiques,

(*) C. R., 13 décembre 1886. — *Bull. Acad. de Belgique,* 2 avril 1887. — A. N., nº 2768. — *Annuaire de l'Observatoire royal* pour 1888 et pour 1889. [Déc. 1888.]

d'une part, afin de les rapporter aux mêmes arguments que ceux de la nutation annuelle; d'autre part, afin de savoir, parmi ces derniers, quels sont ceux qu'il est indispensable de conserver.

A cette fin, on partira des formules (59), qui donnent les expressions tout à fait générales des composantes l et m de la vitesse angulaire de l'écorce solide du globe autour des axes principaux x et y, et d'où se déduisent celles de $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ (11).

Si l'on y tient compte à la fois de la nutation annuelle et de la nutation diurne, on trouvera que, pour obtenir cette dernière, il suffira d'ajouter aux seconds membres des formules (68)

$$(135)\ \ldots\ \begin{cases} \text{en } \Delta\theta: & \pm \dfrac{1}{2}\dfrac{u}{n}\dfrac{c}{A}\dfrac{1 \pm v_2}{(1 \pm \frac{1}{2} v_2)[(1 \pm v_2)^2 - \varpi]} \sin(vt \pm 2\varphi), \\ \text{en } \sin\theta\Delta\psi: & + \dfrac{1}{2}\dfrac{u}{n}\dfrac{c}{A}\dfrac{1 \pm v_2}{(1 \pm \frac{1}{2} v_2)[(1 \pm v_2)^2 - \varpi]} \cos(v_1 t \pm 2\varphi). \end{cases}$$

L'application de ces formules à chacun des termes de l'expression (84) de p donnera les termes de la nutation diurne. Ceux-ci auront tous pour coefficient

$$-\frac{h}{4} \times \frac{1}{2}\frac{c}{A}\frac{1}{n} = \frac{3}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2 \left(\frac{C-A}{B} - \frac{C-B}{A}\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2 (B-A)\frac{B+A-C}{AB},$$

que nous appellerons le coefficient de la nutation diurne, et que nous représenterons par k.

$\frac{B+A-C}{AB}$ peut s'écrire

$$\frac{C-(2C-A-B)}{AB} = \frac{C(1-2\mu_1)}{AB},$$

μ_1 représentant $\frac{\mu-\varpi}{1-\varpi}$; et, puisque $\frac{A+B}{2C} = 1 - \mu_1$, on pourra ici poser

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{C} = 1 - \mu_1, \quad \text{d'où} \quad \frac{AB}{C^2} = 1 - 2\mu_1.$$

Cela étant, le coefficient de la nutation diurne se réduit à $\frac{3}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2 \frac{B-A}{C}$.

Il est bien entendu que, dans cette expression, les moments d'inertie A, B, C sont relatifs à l'écorce solide du globe, et non au globe entier.

Dans ces formules intervient nécessairement encore une autre constante, dont il a été question dans le Livre I : c'est la longitude du premier méridien. t étant l'heure sidérale de l'observation, on a, en temps,

$$\varphi + L = t.$$

L étant la longitude orientale du lieu, rapportée au premier méridien.

Quand les constantes k et L seront déterminées, il n'y aura rien à changer aux formules (135), dans lesquelles il suffira de remplacer φ par $t - L$; et c'est ainsi que nous les développerons ci-dessous.

S'agit-il, au contraire, de déterminer ces constantes, il faudra procéder comme à l'article 13.

Pour être complètes, les formules de la nutation doivent renfermer encore les termes qui contiennent les constantes arbitraires, et qui proviennent de $l = \alpha_1 \sin(\iota\varphi + \beta_1)$, article 15.

Ces derniers seront, si l'on écrit simplement α_1 au lieu de $\frac{\alpha_1}{n(1+\iota)}$, et qu'on néglige la très petite différence qui existe entre l'unité et $\frac{a}{B}\frac{1}{\iota} = \sqrt{\frac{aA}{Bb}}$:

$$\Delta\theta = \alpha_1 \cos\left[(1+\iota)\varphi + \beta_1\right]; \qquad s_1\Delta\psi = -\alpha_1 \sin\left[(1+\iota)\varphi + \beta_1\right].$$

Ces termes sont nuls, si le mouvement de rotation initial de l'écorce s'est effectué autour de son axe polaire principal, et si celui-ci n'a pas varié. Mais la croûte s'étant durcie insensiblement, et plus rapidement sous les mers que sous les masses continentales, il est possible et même probable que l'axe principal, autour duquel tournait le globe dans son état fluide, n'est pas resté un axe principal de la croûte ou du sphéroïde. Dans quelle mesure s'en est-il écarté, c'est l'observation seule qui peut nous l'apprendre; et nous devrons conserver à cette fin les deux termes précédents dans les expressions de la nutation.

A la vérité, nous ne connaissons que très imparfaitement la valeur de

$$\iota^2 = \frac{ab}{AB} = \frac{(C-A)(C-B)}{AB}.$$

Nous ne savons pas même de science certaine si cette valeur doit se calculer pour le sphéroïde terrestre tout entier, ou pour la croûte solide seule. Nous ferons remarquer cependant que, dans ce dernier cas, il se pourrait que la valeur de l'expression précédente fût négative, ce qui modifierait la forme des intégrales au point qu'il ne serait plus possible d'y retrouver la période que plusieurs astronomes croient avoir découverte dans les variations de la latitude et du lieu apparent des étoiles.

On doit observer, de plus, que le coefficient de la nutation annuelle et celui de la précession concordent bien entre eux et avec la valeur assignée par la Mécanique Céleste à l'action de la Lune.

Il semble donc que l'intervention du frottement, qui s'exerce entre le noyau fluide et l'écorce, a pour effet de soumettre celle-ci, dans les mouvements à longue période, à ceux mêmes du noyau, en sorte que ces mouvements s'effectuent comme si le noyau et l'écorce étaient solidaires, tandis que le mouvement diurne de l'écorce serait à peu près indépendant de celui du noyau.

Quoiqu'il puisse sembler étonnant, au premier abord, que l'action du frottement s'exerce de deux manières aussi dissemblables, suivant la longueur de la période des mouvements de l'écorce, la théorie rend toutefois compte de cette dissimilitude.

Or, la révolution complète du mouvement que nous considérons actuellement, et qui dépend de l'angle $\iota\varphi$, serait de $\frac{1}{\iota} = \frac{1}{0.00325} = 308$ jours environ pour la Terre entière. Cette période est à peu près l'année ; et puisque, pour les mouvements qui dépendent de la durée beaucoup plus courte d'une lunaison, les coefficients, calculés pour le sphéroïde entier, semblent concorder fort bien avec les observations, sans nul doute sommes-nous en droit de calculer ι également pour le sphéroïde.

Dans les expressions suivantes de la précession et de la nutation, nous avons tenu compte de tous les résultats précédemment trouvés, ainsi que des inégalités de la Lune, que nous n'avons pas fait entrer dans nos formules (84) à (95) par les motifs exposés dans la préface.

Les formules sont calculées pour 1850.0.

Pour le calcul de la constante de la précession, nous sommes parti de la valeur $50''.36838$ de la précession luni-solaire, calculée ci-dessus (129) d'après la précession générale de Bessel (*); de cette quantité nous avons à retrancher $0''.00057$ pour obtenir la constante de la précession (art. 162) qui sera $P = 50''.36781$.

Réduite à l'année Julienne, prise pour unité dans nos formules, cette valeur sera $P = 50'',36886$.

Reprenant, avec cette donnée et la constante de la nutation de Peters, les calculs des articles 52 et suivants, on trouvera $f = 2.181$; $\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} = 0,0032693$; d'où l'on déduira $\mu = 0.00328$, $\varpi = 0.0000104$.

L'accord assez satisfaisant de cette valeur de f, avec celle que lui assigne la Mécanique Céleste, milite en faveur de l'exactitude de la constante de Peters et de la constante de la précession luni-solaire, qui résulte de notre théorie et de la précession générale déterminée par Bessel.

La constante de la nutation de Peters devra être multipliée dans nos formules par $(1 + \eta)$, en vue de la détermination ultérieure de sa correction; celle de la précession par $(1 + \varkappa)$.

Indépendamment des constantes arbitraires α_1 et β_1, il reste encore un facteur indéterminé dans nos formules : c'est ν, qui multiplie les termes dépendants des périgées de la Lune et du Soleil; ce facteur ne pourra être déterminé qu'au moyen d'observations bien précises. On verra ailleurs (**)

(*) On a vu qu'en théorie elle est préférable à celle de Struve (art. 53). Des recherches récentes ont confirmé ce résultat (1888.)

(**) Traité des réductions stellaires, p. 37.

que Bessel, Poisson, Peters et Nyrén ont commis une erreur de théorie quand ils ont cru pouvoir déterminer ν par des observations du pendule.

Nos formules donnent : pour la précession générale, d'après Bessel, 50.23383 ; pour la nutation annuelle, en tenant compte des termes du second ordre et de ceux qui proviennent des inégalités de la Lune, en obliquité (*) :

$$\begin{aligned}\Delta\theta = {} & 9''.2235 \cos ☊ - 0.08727 \cos 2☊ + 0.5314 \cos 2⊙ \\ & + 0.0887 \cos 2☾ + 0.02341 \cos (3⊙ - \Gamma) - 0.0092 \cos (⊙ + \Gamma) - 0.0017 \cos (2⊙ - ☊) \\ & + 0.0161 \cos (2☾ - ☊) + 0.0148 \cos (3☾ - \Gamma') \\ & - 0.0055 \cos (☾ + \Gamma') - 0.0010 \cos (☾ - \Gamma') \\ & - \alpha_1 \sin \left[(1 + \iota)\varphi + \beta_1\right] \\ & + \nu\,[1\cdot04265] \sin \Gamma' - \nu\,[0\ 53321] \sin (\Gamma' + ☊);\end{aligned}$$

en longitude :

$$\begin{aligned}-\Delta\psi = {} & -17''.2472 \sin ☊ + 0.2020 \sin 2☊ - 1.1403 \sin 2⊙ \\ & - 0.2044 \sin 2☾ + 0.1283 \sin (⊙ - \Gamma) - 0.0458 \sin (3⊙ - \Gamma) \\ & + 0.0215 \sin (⊙ + \Gamma) + 0.00317 \sin (2⊙ - ☊) \\ & + 0.0043 \sin (2⊙ - 2\Gamma') - 0.0322 \sin (2☾ - ☊) \\ & - 0,0301 \sin (3☾ - \Gamma') + 0\ 0108 \sin (☾ + \Gamma') + 0.0675 \sin (☾ - \Gamma') \\ & + \frac{\alpha_1}{s_1} \cos \left[(1 + \iota)\varphi + \beta_1\right] \\ & - \frac{\nu}{s_1}[0.11090] \cos \Gamma' + \frac{\nu}{s_1}[0.60566] \cos (\Gamma' - ☊) \\ & + \frac{\nu}{s_1}[0.65272] \cos (\Gamma' + ☊).\end{aligned}$$

Pour la nutation diurne, en désignant par k son coefficient, et par s_1 le sinus de l'obliquité, qui a pour logarithme 9.599980 :

$$\Delta\theta = k\Sigma_1 \cos 2\varphi + k\Sigma_2 \sin 2\varphi,$$

$$s_1\Delta\psi = k\Sigma_1 \sin 2\varphi - k\Sigma_2 \cos 2\varphi;$$

les symboles Σ_1 et Σ_2 représentent les facteurs suivants :

$$\begin{aligned}\Sigma_1 = &- 1.156 - 0.134 \cos ☊ + 0.346 \cos 2☉ + 0.819 \cos 2☾ \\ &+ 0.022 \cos (3☉ - \Gamma) + 0.139 \cos (2☾ - ☊) \\ &+ 0.160 \cos (3☾ - \Gamma') - 0.130 \cos (☾ - \Gamma') - 0.022 \cos (☾ + \Gamma'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_2 = &- 0.134 \sin ☊ + 0.376 \sin 2☉ + 0.888 \sin 2☾ \\ &+ 0.023 \sin (3☉ - \Gamma) + 0.183 \sin (2☾ - ☊) \\ &+ 0.173 \sin (3☾ - \Gamma') - 0.024 \sin (☾ + \Gamma');\end{aligned}$$

ou, si l'on préfère avoir les coefficients exprimés par leurs logarithmes :

$$\begin{aligned}\Sigma_1 = &- [0.0630] - [9.1271] \cos ☊ + [9.5391] \cos 2☉ + [9.9133] \cos 2☾ \\ &+ [8.3424] \cos (3☉ - \Gamma) + [9.1430] \cos (2☾ - ☊) \\ &+ [9.2041] \cos (3☾ - \Gamma') - [9.1139] \cos (☾ - \Gamma') - [8.3424] \cos (☾ + \Gamma').\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_2 = &- [9.1271] \sin ☊ + [9.5752] \sin 2☉ + [9.9484] \sin 2☾ \\ &+ [8.3617] \sin (3☉ - \Gamma) + [9.2625] \sin (2☾ - ☊) \\ &+ [9.2381] \sin (3☾ - \Gamma') - [8.3802] \sin (☾ + \Gamma').\end{aligned}$$

On voit que nous avons conservé, parmi les termes de la nutation annuelle, ceux qui se retrouvent, dans la nutation diurne, affectés d'un coefficient un peu important ; et l'on aperçoit les raisons pour lesquelles nous n'avons pas réduit les longitudes moyennes du Soleil en longitudes vraies : outre l'inexactitude forcée de cette réduction, la complication, qu'elle amène dans les termes de la nutation diurne, compense la simplification qu'elle introduit dans ceux de la nutation annuelle.

Sans doute ces formules sont bien compliquées, quoique nous ayons omis les termes dont le coefficient est inférieur à 0.01. Des tables, que nous nous proposons de dresser, en simplifieront considérablement le calcul.

Dans les longues séries d'observations, on pourra se dispenser d'avoir égard aux termes en $3☾ - \Gamma'$ et en $☾ \pm \Gamma'$; mais, dans le calcul des éphémérides, il ne semble pas qu'on puisse le faire.

ADDITION AU LIVRE I.

Dans toutes les théories qui précèdent, la vitesse de rotation de la Terre a été supposée constante.

Laplace, Poisson et Serret ont démontré qu'elle ne peut subir que des variations tout à fait inappréciables dans l'hypothèse, où ils se sont placés, d'une Terre solide.

Mais le fait de l'existence d'une nutation diurne, dans le mouvement de l'écorce solide du globe, rend également certain celui d'une variation correspondante dans son mouvement de rotation, sans que cette variation atteigne toutefois le noyau fluide intérieur, pas plus qu'il n'est affecté d'une façon appréciable par la nutation diurne.

Nous nous proposons de rechercher ici sommairement la variation de la vitesse angulaire de l'écorce solide, sous les actions combinées du Soleil et de la Lune.

Cette vitesse, représentée par n, est donnée par l'équation différentielle (21), article 2 :

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{C}}(lm + nr) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{C}}\left(lm - 3m_1^2\frac{x_0 y_0}{\mathrm{D}_0^2}\right).$$

Or il est facile de s'assurer que le rapport du terme lm au suivant est de l'ordre de $\frac{ab}{\mathrm{AB}}$; nous pourrons donc le négliger, et écrire

$$\frac{dn}{dt} = \frac{3}{4}m_1^2\frac{d}{\mathrm{C}}\left[\sin 2(\alpha-\varphi) + \frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\delta-\varphi) + \frac{1}{2}\ \varphi\sin 2(\alpha-\delta-\varphi)\right],$$

α et δ désignant comme ci-dessus les coordonnées équatoriales de l'astre attirant.

n étant égal à $\frac{d\varphi}{dt}$, si nous prenons φ pour variable indépendante, nous aurons, en représentant $\frac{dt}{d\varphi}$ par τ :

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{d\varphi}\frac{d\tau}{\tau^3}.$$

Portant cette valeur dans l'équation précédente, et faisant passer $d\varphi$ dans le second membre, le produit $-\frac{d\tau}{\tau^3}$ aura pour intégrale $\frac{1}{2\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$.

La constante à ajouter au second membre, après l'intégration, sera donc $\frac{1}{2}n^2$, et l'on aura :

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = n^2 - \frac{3}{4}m_1^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{C}}\left[\frac{\cos 2(\alpha-\varphi)}{1-a_2} + \frac{1}{2}\frac{\cos 2(\alpha+\delta-\varphi)}{1-a_2-d_2} + \frac{1}{2}\frac{\cos 2(\alpha-\delta-\varphi)}{1-a_2+d_2}\right]$$

En se bornant aux termes du premier ordre, ce qui suffit amplement, et en désignant par $\Delta\varphi$ la variation de la vitesse angulaire, on trouvera

$$\frac{d\Delta\varphi}{ndt} = -\frac{3}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{C}}\left[\frac{\cos 2(\alpha-\varphi)}{1-a_2} + \frac{1}{2}\frac{\cos 2(\alpha+\delta-\varphi)}{1-a_2-d_2} + \frac{1}{2}\frac{\cos 2(\alpha-\delta-\varphi)}{1-a_2+d_2}\right],$$

où l'on pourra écrire, au lieu du premier membre, $\frac{d\Delta\varphi}{d\varphi}$. L'intégration donnera alors :

$$\Delta\varphi = \frac{3}{16}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{C}}\left[\frac{\sin 2(\alpha-\varphi)}{(1-a_2)^2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2(\alpha+\delta-\varphi)}{(1-a_2-d_2)^2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2(\alpha-\delta-\varphi)}{(1-a_2+d_2)^2}\right].$$

On obtiendra l'expression complète et rigoureuse (autant que l'astronomie peut l'exiger) de la variation de l'angle φ, en ajoutant à l'expression précédente, que nous supposerons relative au Soleil, l'expression analogue pour la Lune, multipliée par le coefficient $f = 2.18$ de l'action lunaire.

En pratique, on pourra même négliger d_2 vis-à-vis de 1, ce qui est d'autant plus licite que cette très petite quantité intervient successivement avec les signes $+$ et $-$.

On obtiendra ainsi l'expression complète plus simple

$$\Delta\varphi = \frac{3}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{C}}\left[\frac{\sin 2(\alpha-\varphi)}{(1-a_2)^2}\cos^2\delta + f\frac{\sin 2(\alpha'-\varphi)}{(1-a_2')^2}\cos^2\delta'\right].$$

Cette expression (*) montre immédiatement que la variation de la vitesse de rotation de l'écorce solide est la plus grande, lorsque le Soleil et la Lune sont dans le plan de l'équateur, résultat évident à priori.

On voit, de plus, que le maximum absolu se présentera, dans ce cas, lorsque $\sin 2(\alpha - \varphi)$ et $\sin 2(\alpha' - \varphi)$ seront à la fois égaux à 1, c'est-à-dire aux syzigies. Dans ce même cas de $\alpha = \alpha'$ ou $\alpha' + 12^h$, la variation sera nulle pour $\varphi = \alpha$; elle atteindra son maximum positif pour $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{4}$; redeviendra nulle pour $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}$; arrivera à son maximum négatif pour $\varphi = \alpha + \frac{3\pi}{4}$; et ainsi de suite. C'est donc de 6 en 6 heures que cette variation passe du maximum au minimum.

Pour nous faire une idée de sa grandeur, commençons par remarquer que la valeur maximum de la parenthèse est égale à 3.2 environ, et que le coefficient $\frac{5}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2 \frac{d}{C}$ diffère très peu, comme il vient d'être dit, du coefficient de la nutation diurne, qui est probablement compris entre $0''.1$ et $0''.2$.

En prenant $0''.15$ en chiffre rond pour la valeur de ce coefficient, la plus grande variation de l'angle φ serait égale à $3.2 \times 0''.15 = 0''.48 = 0^s.032$ environ.

Il pourrait donc arriver, au moment des syzigies qui ont lieu lorsque le Soleil et la Lune sont dans le voisinage de l'équateur, qu'une pendule astronomique, dont la marche serait parfaite, accusât en 6^h, comparée au mouvement du ciel, une variation de $0^s.064$, due à un balancement de l'écorce solide autour de son axe de rotation. Ce balancement, qui n'affecte que l'heure, pourrait se nommer *libration de l'écorce terrestre*.

Dans les quadratures voisines de l'équateur et de l'équinoxe, l'action de la Lune sera contraire à celle du Soleil, et la variation de la vitesse angulaire se réduira, par suite, dans le rapport de 1.2 à 3.2 environ.

Enfin, pendant l'été et l'hiver, cette variation sera généralement moins sensible qu'au printemps et en automne.

De bonnes observations, instituées spécialement dans ce but, pourront permettre de vérifier l'existence de ce fait capital, qui provoquera chez les astronomes un étonnement très vif, peut-être accompagné de scepticisme.

(*) On trouvera l'expression de $\Delta\varphi$ en coordonnées écliptiques dans notre *Traité des réductions stellaires*. Bruxelles, Hayez. (Déc. 1888.)

Nous reconnaissons volontiers, au surplus, qu'on ne pourra pas tenir compte de notre formule, dans la détermination de l'heure, avant que le coefficient de la nutation diurne et la position du premier méridien aient été calculés avec une précision suffisante.

Il est un point toutefois que nous pouvons signaler dès à présent à l'attention des astronomes.

La théorie donne d'une manière indiscutable la formule de la variation de la vitesse angulaire.

Si même on hésite à en accorder l'existence, malgré celle de la nutation diurne, dont le coefficient est à très peu près égal à celui de cette variation, on reconnaîtra du moins que, s'il est possible d'éliminer cette variation de la détermination de l'heure, il y a tout intérêt à le faire.

Or cela est possible.

La variation de vitesse angulaire est nulle en effet si

$$\frac{\sin 2(\alpha-\varphi)}{(1-a_2)^2}\cos^2\delta + f\frac{\sin 2(\alpha'-\varphi)}{(1-a_2')^2}\cos^2\delta' = 0.$$

Si l'on résout cette équation par rapport à φ, on trouvera, en posant

$$f\frac{\cos^2\delta'}{\cos^2\delta}\frac{(1-a_2)^2}{(1-a_2')^2}\frac{\sin 2\alpha'}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\xi:$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sin 2(\alpha+\xi)}{\sin 2(\alpha'+\xi)}\frac{\sin 2\alpha'}{\cos 2\alpha}.$$

Or, L désignant la longitude occidentale du premier méridien par rapport au lieu de l'observation, T l'heure sidérale en ce lieu, on a $\varphi = T - L$, et, connaissant φ et L, on aura l'heure T à laquelle le mouvement diurne n'éprouve aucune variation du chef des attractions lunisolaires.

Ici encore, la connaissance de L est indispensable; mais avant peut-être que le présent travail ait vu le jour, la longitude du premier méridien sera déterminée d'une manière suffisante (*), pour que les astronomes puissent

(*) V. *Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles*, pour 1889. (Déc. 1888.)

effectuer des déterminations de l'heure, indépendantes des variations du mouvement de rotation de l'écorce terrestre.

Celles-ci, pour nous, existent bien certainement.

La nutation diurne, en effet, n'est possible que si le mouvement de l'écorce solide est plus ou moins indépendant de celui du noyau fluide qu'elle recouvre. Or la nutation diurne est prouvée par les meilleures observations. Cette indépendance existe donc. Pourquoi, dès lors, l'écorce n'obéirait-elle pas, dans son mouvement de rotation autour de son axe, aux attractions luni-solaires, de même que leur obéit l'Océan dans ses marées, dont les oscillations présentent la plus grande analogie avec celles de cette écorce?

Ainsi donc, cette majestueuse horloge du ciel, sur la régularité absolue de laquelle les astronomes de tous les temps ont cru pouvoir étayer leurs observations, est sujette elle-même à des fluctuations périodiques, dans le court intervalle de quelques heures. Et l'homme, à qui il a été donné, par le Créateur, de pénétrer de plus en plus les secrets de la nature, parviendra un jour, si même il n'y est déjà arrivé, à réaliser des appareils doués d'un mouvement plus uniforme que celui qui anime l'écorce solide du globe autour de son axe instantané de rotation.