

Journal de Mécanique,
Vol. 17, N° 4, 1978.

Sur la formulation de Herrmann pour l'étude des solides incompressibles

par

J. F. DEBONGNIE*

RÉSUMÉ. — On expose d'abord la formulation de Herrmann, étendue par une méthode nouvelle au cas anisotrope. Notre présentation a l'avantage de se prêter à une automatisation complète du calcul des matrices caractéristiques du matériau. On examine ensuite la question de l'existence de la solution, pour le problème exact et pour le problème discrétisé. Quatre critères sont obtenus, dont trois nécessaires et suffisants, le dernier n'étant qu'une condition nécessaire, mais ayant l'avantage d'une très grande simplicité. Ces considérations sont illustrées par des exemples.

ABSTRACT. — An exposition of Herrmann's formulation is given first, and its extension to the anisotropic case is presented following a new way. Using this method, the matrix of material coefficients can be computed in a fully automated manner. The existence of the solution is discussed next. Four criteria are obtained. Three of these are necessary and sufficient, and the fourth, only necessary but of fairly simple use. Some applications are presented to illustrate the theoretical results.

1. Introduction

En 1965, Herrmann [1] a proposé une formulation mixte, basée sur un principe où apparaissent à la fois les déplacements et la pression, pour résoudre le problème des structures aussi bien compressibles qu'incompressibles. Dans cet article, la formulation est développée dans le cas des structures isotropes. Son extension aux cas orthotropes a été faite par Taylor, Pister et Herrmann [2] et, peu après, Key [3] en a donné une formulation très voisine pour les corps anisotropes.

Nous présentons ici la formulation de Herrmann dans le cas anisotrope, par une voie originale [8].

* Université de Liège, Laboratoire d'Aéronautique, 75, rue du Val-Benoît, 4000 Liège, Belgique.

A la différence de Key, qui utilise comme variables le déviateur des déformations et la pression moyenne, nous utilisons les déformations elles-mêmes et la pression. Partant d'une matrice de relations déformations-tensions, la construction du noyau de la fonctionnelle selon notre méthode peut être rendue entièrement automatique, et ce fait n'est pas à négliger.

Mais contrairement à ce que pourrait faire croire un examen hâtif de la formulation, le passage au cas strictement incompressible peut s'accompagner d'une discontinuité, en ce sens que l'existence et l'unicité de la solution peuvent ne plus être garanties [10]. C'est pourquoi une étude théorique sérieuse s'impose. Une telle étude est donnée et elle fait ressortir un certain nombre de limitations qui, si elles s'expliquent aisément, n'avaient rien de trivial *a priori*.

2. Formulation variationnelle pour les corps élastiques anisotropes compressibles ou incompressibles

2.1. Expression de l'incompressibilité

Dans le principe de Reissner :

$$\int_V \left[\frac{1}{2} \tau_{ij} (D_i u_j + D_j u_i) - \Phi(\tau) - F_i u_i \right] dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS,$$

les termes contenant les tensions τ_{ij} peuvent s'écrire :

$$\int_V [\tau_{ij} \varepsilon_{ij} - \Phi(\tau)] dV,$$

soit, sous forme matricielle,

$$(1) \quad \int_V \left[t^T e - \frac{1}{2} t^T B t \right] dV,$$

où

$$(2) \quad \begin{cases} t^T = [\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}], \\ e^T = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}], \end{cases}$$

avec $\gamma_{ij} = 2 \varepsilon_{ij}$, B étant la matrice de flexibilité locale.

La variation des tensions conduit alors à l'équation

$$(3) \quad e = B t.$$

Pour une structure incompressible, on a la condition

$$r^T e = 0, \quad r^T = [1, 1, 1, 0, 0, 0],$$

dont on déduit que, pour tout vecteur t :

$$(4) \quad r^T B t = 0,$$

soit $B r = 0$.

La matrice de flexibilité locale d'une structure incompressible est donc singulière, et admet le vecteur r comme zéro.

2.2. La matrice D

Un vecteur quelconque p peut être décomposé en un déviateur c'est-à-dire un vecteur $\hat{p}$ tel que $r^T \hat{p} = 0$, et un multiple de r ; on peut en effet écrire :

$$p = \hat{p} - \frac{1}{3}(r^T p) r + \frac{1}{3}(r^T p) r;$$

si l'on pose $\hat{p} = p - (r^T p) r/3$, on a visiblement $r^T \hat{p} = r^T p - (r^T p) r^T r/3$ et, comme $r^T r = 3$, $r^T \hat{p} = 0$.

On notera que

$$(5) \quad \hat{p} = p - \frac{1}{3} r r^T p = \left(I - \frac{1}{3} r r^T \right) p = D p,$$

ce qui introduit la matrice

$$(6) \quad D = I - \frac{1}{3} r r^T.$$

Cette matrice est symétrique et sa propriété essentielle est de filtrer la dilatation isotrope

$$(7) \quad D r = 0.$$

En outre, elle est idempotente

$$(8) \quad D D = D \left(I - \frac{1}{3} r r^T \right) = D - \frac{1}{3} D r r^T = D.$$

2.3. La matrice A

Dans le cas d'une structure incompressible, la singularité de la matrice B rend l'inversion de la relation (3) impossible, ce qui signifie qu'il n'existe pas de matrice de Hooke. En outre, si la structure est quasi incompressible, c'est-à-dire si l'énergie complémentaire du vecteur r est très faible, la matrice de Hooke risque d'être mal conditionnée. L'inverse de B, si elle existe, vérifie $B^{-1}B = I$. Il en résulte que $B^{-1}BD = D$.

Or, c'est cette dernière relation qui nous intéresse en premier chef. Montrons que si la matrice B admet comme seule singularité éventuelle le vecteur r , il existe une matrice symétrique A telle que

$$(9) \quad ABD = D$$

et telle que A soit inversible et bien conditionnée.

En effet, considérons la matrice

$$(10) \quad \bar{B} = B + \frac{\alpha}{3} rr^T, \quad \alpha > 0.$$

On peut toujours choisir α pour que $\bar{B}r \neq 0$, car si $Br = 0$,

$$(11) \quad \bar{B}r = \frac{\alpha}{3} rr^T r = \alpha r.$$

D'autre part, pour tout déviateur, on a

$$(12) \quad \bar{B}Dp = BDp + \frac{\alpha}{3} rr^T Dp = BDp.$$

Dès lors, si B n'admet pas de zéro autre que r , la matrice $\bar{B}$ est inversible. On pose alors :

$$(13) \quad A = \bar{B}^{-1}.$$

La matrice A est évidemment inversible. En outre,

$$A\bar{B} = A\left(B + \frac{\alpha}{3} rr^T\right) = I,$$

d'où

$$D = \bar{B}^{-1}BD = ABD + \frac{\alpha}{3} A rr^T D = ABD,$$

ce qui démontre la relation (9).

Quant au conditionnement, il est déterminé par le choix du scalaire α . Nous utiliserons comme mesure du conditionnement d'une matrice le rapport $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$. Si l'on introduit le quotient de Rayleigh d'un vecteur x non nul

$$\rho(x) = \frac{x^T \bar{B} x}{x^T x},$$

on a

$$\lambda_{\min} = \inf_x \rho(x), \quad \lambda_{\max} = \sup_x \rho(x).$$

Un choix logique du paramètre α consiste donc à imposer que $\rho(r)$ soit intermédiaire entre $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$, ce qui signifie que le conditionnement n'est pas dicté par le vecteur r . On arrive à ce résultat d'une manière particulièrement simple en égalant $\rho(r)$ à la moyenne des valeurs propres de $\bar{B}$, qui n'est autre que le sixième de la trace de $\bar{B}$: nous écrirons donc :

$$r^T \bar{B} r = 3 \frac{\text{tr}(\bar{B})}{6} = \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{B})$$

$\text{tr}(\bar{B})$ représentant la trace de $\bar{B}$.

Or, de toute évidence,

$$\text{tr}(\bar{B}) = \text{tr}(B) + \alpha$$

et

$$r^T \bar{B} r = r^T B r + \frac{\alpha}{3} (r^T r)^2 = r^T B r + 3\alpha.$$

Il vient donc :

$$r^T B r + 3\alpha = \frac{1}{2} \text{tr}(B) + \frac{\alpha}{2},$$

ce qui donne finalement :

$$(14) \quad 5\alpha = \text{tr}(B) - 2r^T B r.$$

Considérons par exemple le cas isotrope : la matrice B a la forme

$$(15) \quad B = \frac{1+\nu}{E} I - \frac{\nu}{E} r r^T,$$

où E représente le module de Young et ν , le coefficient de Poisson. On a successivement :

$$\begin{aligned} \text{tr}(B) &= 6 \frac{1+\nu}{E} - \frac{3\nu}{E} = \frac{6+6\nu-3\nu}{E} = \frac{6+3\nu}{E}, \\ 2r^T B r &= 2 \frac{1+\nu}{E} r^T r - \frac{2\nu}{E} (r^T r)^2 = \frac{6+6\nu-18\nu}{E} = \frac{6-12\nu}{E}, \\ 5\alpha &= \frac{6+3\nu-6+12\nu}{E} = \frac{15\nu}{E}, \\ (16) \quad \alpha &= \frac{3\nu}{E}, \end{aligned}$$

d'où

$$(17) \quad \bar{B} = \frac{1+\nu}{E} I - \frac{\nu}{E} r r^T + \frac{\nu}{E} r r^T = \frac{1+\nu}{E} I.$$

On est donc conduit à un multiple de la matrice unité. On vérifie d'ailleurs aisément que, dans ce cas,

$$\begin{aligned} A &= \frac{E}{1+\nu} I, \\ ABD &= \frac{E}{1+\nu} I \left[\frac{1+\nu}{E} I - \frac{\nu}{E} r r^T \right] D = \frac{E}{1+\nu} I \frac{1+\nu}{E} D = D. \end{aligned}$$

La matrice A jouit de quelques propriétés très particulières qui nous seront utiles dans la suite.

(a) Pour toute matrice symétrique A telle que $ABD = D$, il existe un nombre μ tel que

$$(18) \quad BA r = \mu r.$$

En effet, si $BA r = s$, $DBA r = D s$, soit $D s = D r = 0$, donc $s = \mu r$.

(b) Lorsqu'il s'agit de la matrice $A = (B + (\alpha/3) r r^T)^{-1}$ la valeur du scalaire μ défini par (18) peut être aisément calculée : on a en effet

$$\left(B + \frac{1}{3} \alpha r r^T \right) A r = I r,$$

ce qui entraîne

$$BA r = r \left(1 - \frac{1}{3} \alpha r^T A r \right),$$

soit

$$(19) \quad \mu = 1 - \frac{1}{3} \alpha r^T A r.$$

(c) Dans le cas *incompressible*, on a

$$(20) \quad A r = \frac{1}{\alpha} r.$$

En effet, on a par définition $A (B + (\alpha/3) r r^T) = I$, d'où l'on déduit

$$AB + \frac{\alpha}{3} A r r^T = I, \quad AB r + \frac{\alpha}{3} A r r^T r = r.$$

De la relation $B r = 0$, on déduit alors : $\alpha A r = r$.

(d) Comme corollaire de (c), on obtient $\mu = 0$ dans le cas incompressible.

(e) La matrice $A = (B + (\alpha/3) r r^T)^{-1}$ vérifie l'équation

$$(21) \quad (AB - I) = -\frac{\alpha}{3} A r r^T.$$

En effet, de la relation $A (B + (\alpha/3) r r^T) = I$, on déduit $AB + (\alpha/3) A r r^T = I$, et $(AB - I) = -(\alpha/3) A r r^T$.

(f) En corollaire de (e), on a les relations

$$(22) \quad (AB - I) r = -\alpha A r,$$

$$(23) \quad (AB - I) D = ABD - D = 0,$$

$$(24) \quad (BA - I) BD = BABD - BD = B(ABD - D) = 0.$$

2.4. Transformation du principe de Reissner

La relation (3) peut s'écrire :

$$e = B D t + \frac{1}{3} B r r^T t;$$

prémultipliant par A , on obtient donc :

$$(25) \quad A e = D t + \frac{1}{3} AB r r^T t.$$

Or, en chaque point, le vecteur $D t$ appartient à un sous-espace de dimension 5, orthogonal au vecteur r .

On peut donc choisir indépendamment un vecteur Dt et une pression $\pi = -(1/3) r^T t$, à condition d'imposer par ailleurs la relation $r^T Dt = 0$. L'équation (25) peut donc s'écrire :

$$(26) \quad Dt = Ae + \pi AB r,$$

d'où

$$(27) \quad t = Dt - \pi r = Ae + \pi(AB - I)r.$$

Il vient alors :

$$(a) \quad t^T e = e^T Ae + \pi r^T (BA - I)e,$$

$$(b) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} t^T B t &= \frac{1}{2} e^T A B t + \frac{1}{2} \pi r^T (BA - I) B t \\ &= \frac{1}{2} e^T A B D t - \frac{1}{2} e^T A B r \pi + \frac{1}{2} \pi r^T (BA - I) B D t \\ &\quad - \frac{1}{2} \pi r^T (BA - I) B r \pi. \end{aligned}$$

Or, le premier terme de cette dernière expression vaut

$$\frac{1}{2} e^T A B D t = \frac{1}{2} e^T D t = \frac{1}{2} e^T A e + \frac{1}{2} e^T \pi A B r$$

tandis que le troisième est nul en vertu de (24).

Regroupant tous les termes, on obtient alors :

$$(28) \quad \frac{1}{2} e^T A e + \pi r^T (BA - I) e + \frac{1}{2} r^T (BA - I) B r \pi^2 = \varphi(e, \pi).$$

Vérifions que la fonctionnelle correspondante,

$$\int_V [\varphi(Du, \pi) - F_i u_i] dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS$$

est bien stationnaire à la solution du problème élastique. En effet,

$$(29) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial e} = Ae + (AB - I)r\pi = t,$$

ce qui conduira donc aux équations d'équilibre

$$\begin{aligned} D_j \tau_{ji} + F_i &= 0 \quad \text{dans } V, \\ n_j \tau_{ji} &= \bar{t}_i \quad \text{sur } S_2. \end{aligned}$$

Quant à la variation de π , elle fournit la condition

$$(30) \quad r^T(BA - I)e + r^T(BA - I)Br\pi = 0$$

ce qui, par (22) entraîne

$$(31) \quad -\alpha r^T(Ae + AB r\pi) = 0.$$

Vu la relation (26), cette équation revient précisément à assurer que Dt soit bien un déviateur, condition d'indépendance de la pression. On peut encore donner une autre interprétation de cette relation. En effet,

$$\alpha r^T AB r\pi = 3\alpha\mu\pi,$$

en vertu de (18). Tenant compte de (19), on a alors :

$$(32) \quad \pi = -\frac{r^T A e}{3(1 - (1/3)\alpha r^T A r)},$$

relation qui lie la pression aux déformations. Dans le cas isotrope, on a

$$A = \frac{E}{1+\nu}I, \quad r^T A r = \frac{3E}{1+\nu}, \quad \alpha = \frac{3\nu}{E},$$

et

$$1 - \frac{1}{3}\alpha r^T A r = 1 - \frac{3\nu}{1+\nu} = \frac{1-2\nu}{1+\nu}.$$

La relation (31) prend alors la forme simple de l'équation de compressibilité :

$$\pi = -\frac{E}{3(1-2\nu)}r^T e.$$

Dans le cas général, la fonction ϕ peut être mise sous la forme matricielle

$$(33) \quad \phi(e, \pi) = \frac{1}{2}(e^T \pi) \bar{H} \begin{bmatrix} e \\ \pi \end{bmatrix},$$

$$(34) \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} A & (AB - I)r \\ r^T(BA - I) & r^T(BA - I)Br \end{bmatrix},$$

$$(35) \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} A & -\alpha A r \\ -\alpha r^T A & -\alpha r^T AB r \end{bmatrix}.$$

On remarquera d'ailleurs que $-\alpha r^T AB r = -3\alpha\mu$. Lorsque la structure est incompressible, on a, par (20) et (21), la matrice

$$(36) \quad \bar{H}_{(inc)} = \begin{bmatrix} A & -r \\ -r & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculons enfin la matrice $\bar{H}$ dans le cas d'une structure isotrope, avec la valeur de α définie en (16). Il vient successivement :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{E}{1+\nu} I, & -\alpha r^T A &= -\frac{3\nu}{E} \frac{E}{1+\nu} r^T = \frac{-3\nu}{1+\nu} r^T; \\
 -\alpha r^T A B r &= -\frac{3\nu}{E} \frac{E}{1+\nu} r^T \frac{E}{1+\nu} B r \\
 &= -\frac{3\nu}{1+\nu} r^T B r = -\frac{3\nu}{1+\nu} \frac{3(1-2\nu)}{E}, \\
 \bar{H} &= \begin{bmatrix} \frac{E}{1+\nu} I & -\frac{3\nu}{1+\nu} r^T \\ -\frac{3\nu}{1+\nu} r^T & -\frac{3\nu}{1+\nu} \frac{3(1-2\nu)}{E} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

Évidemment, cette matrice peut être obtenue plus simplement en faisant directement l'hypothèse d'isotropie dans le principe de Reissner. Mais les développements plus compliqués que nous avons fait nous permettent en revanche de traiter une matrice de Hooke quelconque; bien plus, chacune des opérations décrites ci-dessus peut être effectuée de manière entièrement automatique, et cet avantage mérite d'être souligné.

2.5. Précisions sur les conditions d'applicabilité de la méthode

Revenons un instant sur la condition d'existence de la matrice A. Une singularité s de la matrice B est un mode tel que, pour tout t ,

$$s^T B t = 0. \tag{38}$$

Il s'agit donc d'un champ de tensions tel que les déformations correspondantes soient nulles. Un cas connu est celui de l'état plan de déformation, où les vecteurs

$$s_1^T = (0, 0, 1, 0, 0, 0), \quad s_2^T = (0, 0, 0, 0, 1, 0), \quad s_3^T = (0, 0, 0, 0, 0, 1), \tag{39}$$

sont singuliers, puisque

$$s_1^T e = \varepsilon_{33}, \quad s_2^T e = \gamma_{13}, \quad s_3^T e = \gamma_{23}. \tag{40}$$

Mais au lieu d'exprimer l'état plan de déformation *a priori* dans l'expression de la matrice B, on peut d'abord construire la matrice A, puis exprimer les conditions ε_{13} , ε_{23} , $\varepsilon_{33} = 0$, ce qui revient simplement à exprimer des fixations, soit dans ce cas simple, à supprimer 3 lignes et 3 colonnes de la

matrice $\bar{H}$. Dans le cas général, une singularité de la matrice B est toujours équivalente à une condition sur les déformations, et celle-ci peut théoriquement toujours être exprimée *a posteriori* dans la matrice $\bar{H}$.

2.6. Introduction d'effets thermiques

Si, en un point donné, la température diffère de θ de la température de référence, il y a lieu d'ajouter à l'énergie complémentaire le terme $\theta x^T t$, où x est le vecteur des coefficients de dilatation thermique.

L'intégrale (1) se transforme alors en

$$(41) \quad \int_V \left[t^T (e - x \theta) - \frac{1}{2} t^T B t \right] dV,$$

ce qui montre que tous les développements antérieurs restent valables, à condition de remplacer partout e par $(e - x \theta)$.

2.7. Conditions d'existence de la fonctionnelle

Pour garantir l'existence de la fonctionnelle, il faut d'abord que les dérivées des déplacements aient leurs carrés intégrables, ce qui est certainement satisfait si les déplacements sont des polynômes par morceaux, continus sur les interfaces. Quant à la pression, elle doit seulement être de carré sommable. En particulier, un polynôme par morceaux, discontinu aux interfaces, est suffisant.

3. Existence et unicité de la solution

3.1. Dans tout ce paragraphe, nous écrivons :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} e^T(u) A e(v) dx$$

[cette forme quadratique est elliptique sur l'espace V des déplacements admissibles, qui est un sous-espace fermé de l'espace de Sobolev $(H^1(\Omega))^3$],

$$c(p, p) = \int_{\Omega} \alpha (r^T A B r) p^2 dx$$

[cette forme quadratique est continue sur l'espace P des pressions admissibles, qui est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$],

$$b(p, u) = - \int_{\Omega} \alpha A r^T e(u) \cdot p dx,$$

et $f(u)$ pour le travail des charges.

Moyennant ces conventions, le problème peut être mis sous la forme suivante : *chercher $u \in V$ et $p \in P$ qui rendent la fonctionnelle*

$$(42) \quad \frac{1}{2} a(u, u) + b(p, u) - \frac{1}{2} c(p, p) - f(u)$$

stationnaire.

Nous utiliserons aussi les notations de dualité suivantes :

$$a(u, v) = \langle A u, v \rangle, \quad b(p, v) = \langle B p, v \rangle, \quad b(p, v) = \langle p, B' v \rangle, \\ c(p, q) = \langle C p, q \rangle, \quad f(u) = \langle f, u \rangle,$$

où apparaissent les opérateurs

$$A \in \mathcal{L}(V, V'), \quad B \in \mathcal{L}(P, V'),$$

$$B' (\text{dual de } B) \in \mathcal{L}(V, P'), \quad C \in \mathcal{L}(P, P').$$

La notation $\mathcal{L}(\star, \times)$ désigne comme d'habitude l'ensemble des opérateurs linéaires continus de l'espace $\star$ dans l'espace $\times$, tandis que V' et P' sont les espaces duaux de V et P respectivement.

La solution (u, p) du problème (42) est caractérisée par les relations

$$(43) \quad \begin{cases} a(u, v) + b(p, v) = f(v), \\ b(q, u) - c(q, p) = 0, \end{cases}$$

quels que soient $v \in V$ et $q \in P$.

Nous envisagerons d'abord le cas le plus simple, où les formes $b(p, v)$ et $c(p, p)$ sont identiquement nulles (pour les structures isotropes, cela équivaut à dire que le coefficient de Poisson ν est nul). Dans ce cas, la pression disparaît du problème (43), qui se réduit à la recherche de l'élément $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$, on ait

$$(44) \quad a(u, v) = f(v).$$

En vertu de l'ellipticité de la forme bilinéaire a , la solution existe et est unique [4]. Nous ne nous occuperons plus de ce cas dans la suite.

3.2. Le cas compressible

Lorsque la structure est *compressible*, c'est-à-dire lorsque la forme c est elliptique sur P , il est aisé de démontrer l'existence et l'unicité de la solution. Pour la plus grande simplicité, nous écrirons le système (43) en termes d'opérateurs :

$$(45) \quad \begin{cases} A u + B p = f, \\ B' u - C p = 0. \end{cases}$$

L'opérateur C étant elliptique, on peut inverser la deuxième équation, ce qui donne

$$(46) \quad p = C^{-1} B' u.$$

Introduisant cette valeur dans la première relation, on obtient :

$$A u + B C^{-1} B' u = f,$$

soit

$$(47) \quad (A + B C^{-1} B') u = f.$$

L'opérateur

$$\bar{A} = A + B C^{-1} B'$$

est la somme d'un opérateur elliptique et d'un opérateur semi-défini positif : il est donc elliptique, ce qui entraîne l'existence d'un déplacement unique u vérifiant la condition (47). La relation (46) fournit alors la pression, ce qui achève la démonstration.

3.3. Unicité de la solution dans le cas incompressible

Le cas *incompressible* se caractérise par $b(p, u) \neq 0$ et $c(p, p) = 0$. Le problème revient alors à chercher un couple $(u, p) \in V \times P$ tel que

$$(48) \quad \begin{cases} a(u, v) + b(p, v) = f(v), \\ b(q, u) = 0 \end{cases}$$

pour tout $v \in V$ et tout $q \in P$.

La seconde relation est l'expression variationnelle de l'incompressibilité. Nous allons d'abord supposer que ce problème admet une solution, et chercher sous quelles conditions elle est unique. Supposons donc qu'il existe deux solutions (u_1, p_1) et (u_2, p_2) . En soustrayant les relations (48) écrites pour chacune de ces solutions, on obtient :

$$(49) \quad a(u_1 - u_2, v) + b(p_1 - p_2, v) = 0$$

pour tout $v \in V$.

$$(50) \quad b(q, u_1 - u_2) = 0$$

pour tout $q \in P$.

Choisissons les éléments particuliers $q = p_1 - p_2$ et $v = u_1 - u_2$, introduisons-les dans (49) et (50) et soustrayons. Il vient :

$$(51) \quad a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0,$$

ce qui entraîne $u_1 = u_2$. Le déplacement est donc unique. Ceci posé, les relations (49) et (50) se réduisent à la seule condition

$$(52) \quad b(p_1 - p_2, v) = 0,$$

pour tout $v \in V$. Dès lors, pour assurer l'unicité des pressions, il faut que la condition suivante soit vérifiée :

CONDITION (C 1). — *Pour toute pression $p \in P - \{0\}$, il existe un déplacement $v \in V$ tel que $b(p, v) \neq 0$.*

Cette condition, semblable à celle qu'a énoncé Thomas [5] pour les éléments hybrides, n'est, rappelons-le, nécessaire que dans le cas *incompressible*.

3.4. Existence de la solution dans le cas incompressible

Pour établir l'unicité de la solution, nous avons dû faire l'hypothèse (C 1). Pour en démontrer l'existence, il faut introduire une condition plus forte, établie par Brezzi dans sa théorie des points de selle [6] et que nous donnerons ici sans démonstration. Elle s'écrit :

CONDITION (C 2). — *Il existe une constante $\beta > 0$ telle que pour tout $p \in P$, on ait*

$$\sup_{v \in V - \{0\}} \frac{|b(p, v)|}{\|v\|_V} \geq \beta \|p\|_P,$$

où $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_P$ sont des normes définissant les topologies de V et P . Pour l'espace V , on peut utiliser la norme

$$(53) \quad \|u\|_V^2 = a(u, u)$$

et pour l'espace P , on peut définir un produit scalaire $c(p, p)$ d'où se déduit la norme voulue : comme P est un sous-espace de $L^2(\Omega)$, on posera naturellement

$$\|p\|_P^2 = \int_{\Omega} p^2 dx.$$

3.5. Vérification de la condition (C 2)

Comme dans le cas incompressible on a toujours

$$(55) \quad b(p, u) = \int_{\Omega} p \operatorname{div} u dx,$$

il convient de vérifier qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que pour tout $p \in P$:

$$(56) \quad \sup_{u \in V - \{0\}} \frac{\int_{\Omega} p \operatorname{div} u \, dx}{\|u\|} \geq \beta \|p\|.$$

En fait, cette inégalité est vérifiée moyennant la condition suivante :

CONDITION (K 1). — Si S_2 est la partie de la surface où les déplacements sont libres, il existe dans V un déplacement u tel que

$$(57) \quad \int_{S_2} u \cdot n \, dS \neq 0.$$

La démonstration comporte quatre étapes.

(a) Moyennant cette condition, l'image $\operatorname{div}(V)$ de V par l'opérateur divergence est dense dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire que le critère (C 1) est vérifié.

En effet, si pour tout $u \in V$, $\int_{\Omega} p \operatorname{div} u \, dx = 0$, c'est en particulier vrai pour $u \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$, espace des déplacements indéfiniment continûment dérivables à support compact dans Ω . Donc $\operatorname{grad} p = 0$ au sens des distributions, ce qui implique que p est la fonction constante, $p = p_0$. Considérant alors u quelconque dans V , on a donc

$$\int_{\Omega} p \cdot \operatorname{div} u \, dx = p_0 \int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx = p_0 \int_{S_2} u \cdot n \, dS = 0,$$

ce qui, par la condition (K 1), implique $p_0 = 0$.

(b) Appelons I le sous-espace incompressible de V :

$$I = \{u \in V \mid \operatorname{div} u = 0\}.$$

C'est un fermé, comme noyau de l'opérateur borné div . Son complément orthogonal sera appelé C . C'est également un fermé.

Soit alors une fonctionnelle $f \in V'$. Elle peut se mettre sous la forme

$$f(u) = \int_{\Omega} s_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) \, dx, \quad s_{ij} = s_{ji}, \quad (s_{ij}) \in (L^2(\Omega))^6.$$

Supposons qu'elle soit nulle sur I . Dans le cas où $(s_{ij}) \in (\mathcal{D}(\Omega))^6$, pour tout déplacement de la forme

$$u_i = e_{ijk} D_j a_k, \quad a_k \in H^2(\Omega), \quad u_i(a_k) \in V,$$

e_{ijk} étant le symbole alternateur, on doit avoir :

$$\int_{\Omega} s_{ij} e_{ipq} D_j D_p a_q dx = - \int_{\Omega} a_q e_{ipq} D_p (D_j s_{ij}) dx = 0,$$

d'où

$$e_{ijp} D_p (D_j a_{ij}) = 0,$$

ce qui entraîne l'existence d'une fonction $\pi \in C^\infty(\Omega)$, définie à une constante près, telle que

$$D_j s_{ij} = D_i \pi.$$

Il vient donc :

$$- \int_{\Omega} D_j s_{ij} u_i dx = - \int_{\Omega} D_i \pi u_i dx = \int_{\Omega} \pi D_i u_i dx - \int_{S_2} \pi n_i u_i dx,$$

S_2 étant la portion de surface où les déplacements sont libres. Reprenant $u_i = e_{ijk} D_j a_k$, on obtient :

$$0 = - \int_{S_2} \pi n_i e_{ijk} D_j a_k dS = \int_{S_2} n_i e_{ijk} D_j \pi a_k dS,$$

d'où $n \wedge \text{grad } \pi = 0$, c'est-à-dire que π est constante sur S . On peut donc lever l'indétermination sur π en posant $\pi = 0$ sur S_2 , d'où

$$\int_{\Omega} s_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) dx = \int_{\Omega} \pi D_i u_i dx,$$

soit $s_{ij} = \pi \delta_{ij}$. Cette conclusion s'étend au cas où $(s_{ij}) \in (L^2(\Omega))^6$ du fait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Donc toute fonctionnelle nulle sur I est de la forme

$$(58) \quad f(u) = \int_{\Omega} p D_i u_i dx, \quad p \in L^2(\Omega).$$

Cet élément p est unique, car si deux éléments p_1 et $p_2 \in L^2(\Omega)$ correspondent à la même fonctionnelle, on a pour tout $u \in V$:

$$\int_{\Omega} (p_1 - p_2) D_i u_i dx = 0,$$

donc $p_1 - p_2 = 0$.

(c) A tout $p \in L^2(\Omega)$, on peut associer un élément unique $u = R p \in C$ par la relation linéaire

$$(59) \quad (R p, v)_V = \int_{\Omega} p D_i v_i dx$$

pour tout $v \in V$. Cette relation est bornée, car

$$\|R p\|_V^2 = \int_{\Omega} p \operatorname{div}(R p) dx \leq \|p\|_P \|\operatorname{div} R p\|_P \leq \alpha \|p\|_P \|R p\|_V$$

puisque l'opérateur divergence est borné dans V , donc :

$$\|R p\|_V \leq \alpha \|p\|_P.$$

En rassemblant ce résultat avec celui de l'étape (b), on déduit que l'opérateur R est une bijection linéaire entre P et C , continue dans un sens. C'est donc un homéomorphisme, ce qui implique qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\|R p\|_V \geq \beta \|p\|_P.$$

(d) Enfin, on conclut en remarquant que

$$\|R p\|_V = \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_{\Omega} p D_i v_i dx}{\|v\|}.$$

En effet, pour tout $v \in V$, on a

$$\int_{\Omega} p \frac{D_i v_i}{\|v\|} dx = \left(R p, \frac{v}{\|v\|} \right)_V \leq \|R p\|_V.$$

Dans le cas où la condition (57) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire si le flux des déplacements est nul *a priori* dans V , il faut restreindre le sous-espace P en imposant la condition supplémentaire :

CONDITION (K 2). — Si $p \in P$, $p = \text{Cte}$ entraîne $p = 0$.

ce qui rend l'ensemble des divergences dense dans P . On peut alors reprendre la démonstration au point (b), ce qui entraîne l'existence et l'unicité de la solution.

En résumé, on peut dire qu'en dehors du cas où la nullité du flux sur Ω est vérifiée *a priori*, la formulation de Herrmann fournit toujours une solution unique.

Si le flux est nul pour tout $u \in V$, il existe une solution si l'on impose la condition (K 2). Cette absence d'unicité s'interprète aisément. Considérons, pour fixer les idées, une sphère pleine incompressible et soumettons-la à une pression uniforme p_0 sur sa surface. La sphère ne peut se contracter, donc les déplacements restent égaux à zéro, mais elle est le siège d'une pression uniforme p_0 . Par conséquent, la seule donnée des déplacements ne permet de définir l'état de tension qu'à cette pression uniforme près.

4. Étude de l'existence et de l'unicité d'une solution du problème discrétisé

La discrétisation par éléments finis consiste en fait à choisir deux sous-espaces $V_h \subset V$ et $P_h \subset P$, de dimensions respectives n et r finies. Le problème à résoudre a alors exactement la même forme que (42), si ce n'est que l'on cherche $(u_h, p_h) \in V_h \times P_h$, et que les relations (43) ne doivent plus être vraies que pour tout $v_h \in V_h$ et pour tout $q_h \in P_h$. Par des raisonnements analogues à ceux du paragraphe 2, on introduit les conditions (C 1') et (C 2'):

CONDITION (C 1'). — Pour toute pression $P_h \neq 0$ de l'espace P_h , il existe un champ de déplacement $v_h \in V_h$ tel que

$$b(p_h, v_h) \neq 0.$$

CONDITION (C 2'). — Il existe une constante $\beta_h > 0$ telle que

$$\sup_{v_h \in V_h - \{0\}} \frac{b(p_h, v_h)}{\|v_h\|} \geq \beta_h \|p_h\|.$$

Ici, le problème exact et le problème discrétisé diffèrent de deux manières. D'une part, aucune de ces deux relations n'est nécessairement vérifiée dans le problème discrétisé (en effet, on n'a pas, dans les discrétisations par éléments finis $(\mathcal{D}(\Omega))^3 \subset V_h$). D'autre part, les conditions (C 1') et (C 2') deviennent équivalentes. Comme l'implication (C 2') $\Rightarrow$ (C 1') est triviale, il suffit de montrer que (C 1') $\Rightarrow$ (C 2'). Pour cela, décomposons V_h et P_h dans leurs bases respectives $\{u^k, k = 1, \dots, n\}$ et $\{\varphi^k, k = 1, \dots, r\}$: nous écrirons donc :

$$u = \sum_{k=1}^n v^k u^k(x), \quad p = \sum_{k=1}^r p_k \varphi^k(x)$$

Alors, posant

$$B_{kl} = b(\varphi^k, u^l),$$

la condition (C 1') revient à dire que pour tout vecteur $p \in R^r$, il existe un vecteur $v \in R^n$ tel que

$$v^T B^T p \neq 0.$$

Cette condition équivaut à :

CONDITION (C 1''). — $r \leq n$ et B est de rang r .

Montrons donc que (C 1'') $\Rightarrow$ (C 2'). Pour cela, on remarquera que si (C 1'') est vérifiée, tout $v \in \mathbb{R}^n$ peut être décomposé en $v = B^T q + \hat{v}$, avec $\hat{v}^T B^T p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}^r$. Il en découle que

$$\sup_v \frac{|p^T B v|}{\|v\|_2} = \sup_{q, \hat{v}} \frac{|p^T B B^T q|}{(q^T B B^T q + \hat{v}^T \hat{v})^{1/2}} = (p^T B B^T p)^{1/2} \geq \beta \|p\|_2,$$

car la matrice $B B^T$ est définie positive. La condition (C 2') s'en déduit directement, en vertu de l'équivalence des différentes normes d'un espace de dimension finie.

Le problème de l'existence et de l'unicité se ramène donc à l'examen de la condition (C 1'). Soit $\mathcal{T}_h$ l'ensemble des éléments du maillage, $\mathcal{J}_h$ l'ensemble de leurs interfaces non situés sur la frontière. On a évidemment

$$\int_{\Omega} p_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h dx.$$

A ce stade, nous ferons l'hypothèse suivante sur le champ p_h :

HYPOTHÈSE. — Sur chaque élément K , la pression p_h est de la forme

$$p_h|_K = p_h^{(1)} + p_h^{(2)},$$

où $p_h^{(1)}$ est constant, tandis que tout $p_h^{(2)}$ vérifie

$$\int_K p_h^{(2)} \operatorname{div} \mathbf{u}_h dx \neq 0$$

pour au moins un $\mathbf{u}_h$ vérifiant $\mathbf{u}_h = 0$ sur $\dot{K}$ (« mode bulle »). Cette condition, assez compliquée en apparence, est souvent vérifiée en pratique. Elle permet de ne s'occuper que des $p_h^{(1)}$. On a alors :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p_h^{(1)} \operatorname{div} \mathbf{u}_h dS = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\dot{K}} p_h^{(1)} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} dS.$$

Sur les interfaces $I \in \mathcal{J}_h$, on distinguera un côté noté $+$ et un côté noté $-$, ce qui permet d'écrire la dernière intégrale sous la forme

$$J = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\dot{K} \cap \Omega} p_h^{(1)} \operatorname{div} \mathbf{u}_h dS + \sum_{I \in \mathcal{J}_h} \int_I (p_{h+}^{(1)} - p_{h-}^{(1)}) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_+ dS.$$

Tout revient donc à chercher les conditions d'annulation de cette expression. Pour cela, nous introduirons une condition sur le maillage :

CONDITION (C 3'). — Aux éléments $K_1, \dots, K_r \in \mathcal{T}_h$, on peut associer un système $\mathcal{J}_h^*$ de $(r-1)$ interfaces différentes $I_1, \dots, I_{r-1} \in \mathcal{J}_h$, ayant les propriétés suivantes :

(i) tout élément K_1 est lié à l'ensemble des $(r-1)$ autres éléments par au moins une de ces interfaces;

(ii) à chaque $I_k \in \mathcal{I}_h^*$, on peut associer une fonction v^k différente de la base des déplacements, de telle sorte que

$$\int_{I_k} v^k \cdot n \, dS \neq 0, \quad \int_{\Omega} v^k \cdot n \, dS = 0.$$

Il est aisé de vérifier que si (C 3') est vérifiée, J ne peut s'annuler que moyennant la double condition :

$-p_h$ est la fonction constante;

$$-\int_{\Omega} u_h \cdot n \, dS = 0 \text{ pour tout } u_h \in V_h;$$

c'est-à-dire que l'on se retrouve dans les mêmes conditions que pour le problème non discrétisé. Dès lors, si (C 3') est vérifiée, (C 1') le sera si tous les déplacements normaux ne sont pas fixés ou dans le cas contraire, à condition que l'on annule $p_h^{(1)}$ dans un élément. On vérifie sans peine que la réciproque est également vraie, c'est-à-dire $(C 1') \Leftrightarrow (C 2') \Leftrightarrow (C 3')$.

Un cas pratique où (C 3') est toujours vérifiée est celui où à chaque interface I correspond une fonction de base s'annulant sur la frontière de I , ce qui a lieu dans le cas d'éléments de degré supérieur à 1 en les déplacements.

Au degré 1, il faut vérifier la condition (C 3') pour chaque maillage. Cette vérification est d'ailleurs assez simple. On notera cependant que cette condition est certainement violée si $n \leq r$. Le critère :

CONDITION (C 0'). — $n \leq r$, n'est donc que nécessaire, mais en pratique, il suffit à écarter la plupart des cas malheureux. Signalons que le critère de Nagtegaal, Parks et Rice [9], consistant à caractériser un élément en général en calculant

$$\bar{\eta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-r}{n}$$

sur des maillages réguliers en est une application.

Nous terminerons par quelques mots sur l'interprétation du fait qu'il faut annuler le terme constant de pression dans un élément, lorsque tous les déplacements normaux de frontière sont nuls. Nous nous limiterons au cas où la pression est constante dans chaque élément. En un langage intuitif, on peut dire que chaque pression est « responsable » de l'invariance du volume d'un élément. Un assemblage d'éléments invariants en volume

a évidemment son volume fixe. Or, le volume du dernier élément est la différence entre le volume global et la somme des volumes de tous les autres éléments. Dès lors, si ces deux volumes sont invariants, le dernier élément est automatiquement de volume constant, ce qui signifie que la dernière pression n'a plus de raison d'être.

5. Exemple

Considérons la structure représentée à la figure 1. Il s'agit d'un cylindre creux en matériau souple et incompressible prisonnier d'une coque métal-

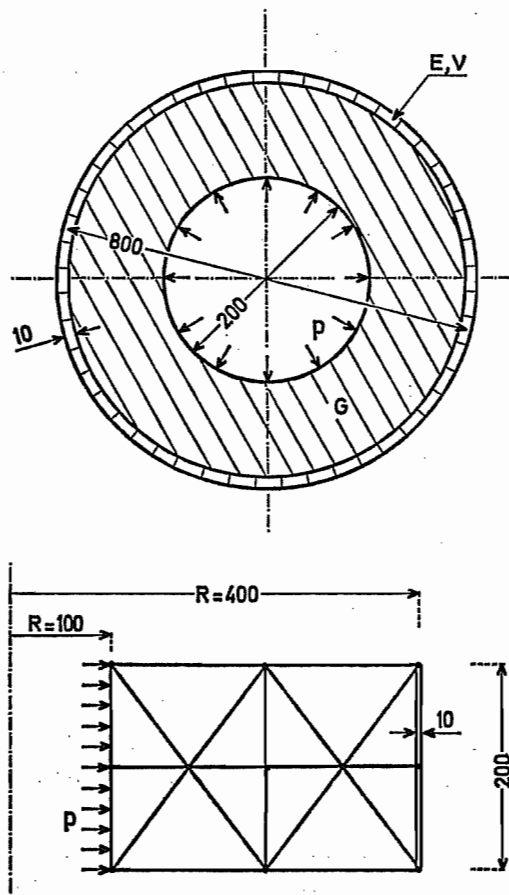


Fig. 1

lique. L'ensemble est soumis à pression interne, et on fait l'hypothèse de l'état plan de déformation. Pour représenter cette dernière condition, on bloque les déplacements longitudinaux.

On remarque que cette structure contient 12 éléments de tore axisymétrique incompressible et 11 nœuds. Au degré 1, on aura donc 11 degrés de liberté et 12 liaisons, ce qui signifie que la solution ne peut exister. Cette prédiction est d'ailleurs confirmée par un essai numérique (lors d'une inversion par la méthode de Gauss on obtient, après un certain nombre de pivotages, un ensemble de pivots nuls).

Par contre, au deuxième degré, on a toujours 12 liaisons mais, en plus des 11 degrés de liberté aux nœuds, on dispose de 22 degrés de liberté d'interfaces $[(n-r)/n = 21/33 = 0,636]$; enfin, au troisième degré, on dispose de $11 + 44 = 55$ degrés de liberté pour 12 liaisons $[(n-r)/n = 43/55 = 0,78]$. On s'attend donc à obtenir des résultats convenables dans ces deux derniers cas.

La solution analytique de ce problème s'obtient aisément par la méthode énergétique : dans le cylindre incompressible, les seules solutions vérifiant à la fois l'équation de Navier et la condition d'incompressibilité sont de la forme

$$u_r = \frac{A}{r}.$$

On en déduit aisément :

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = \frac{A}{r^2}; \quad \varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} = -\frac{A}{r^2},$$

si bien que l'énergie du cylindre s'écrit :

$$U_1 = \frac{1}{2} K_1 A^2,$$

avec

$$K_1 = h A^2 \int_a^b 2\pi r G (\varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\theta\theta}^2) dr = 4\pi G h \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2}.$$

Pour la coque, on a simplement

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{E t}{1-\nu^2} \frac{u^2}{b^2} 2\pi b h = \frac{1}{2} K_2 A^2, \quad K_2 = \frac{2\pi E t}{1-\nu^2} \frac{h}{b^3}.$$

Quant au travail de la pression, il s'écrit simplement :

$$= 2 \pi a h p u = g A \quad \text{avec} \quad g = 2 \pi h p.$$

La solution est donc donnée par

$$A = \frac{g}{K_1 + K_2}, \quad \mathcal{T} = g A, \quad N_{00}(\text{coque}) = \frac{E t}{1 - \nu^2} \frac{A^2}{b}.$$

Dans notre cas, les données numériques sont :

$E = 21\,000$ hbar, $t = 10$ mm, $1 - \nu^2 = 0,91$, $h = 200$ mm, $b = 400$ mm, $a = 100$ mm, $G = 7,962$ hbar, $p = 1$ hbar.

Les résultats obtenus sont donc :

TABLEAU I

	Exact	Éléments finis (troisième degré)
Énergie.....	248,933 89.10 ³	248,919 8.10 ³
N_{00} (hb.mm).....	285,7	285,7

TABLEAU II
Energie potentielle

Degré	Élément (*)	$\nu = 0,49$	$\nu = 0,499$	$\nu = 0,499\,9$	$\nu = 0,499\,99$	$\nu = 0,499\,999$	$\nu = 0,5$
1.....	H	3,358 223	2,560 309	2,460 611	2,450 394	2,449 370	—
	C	2,377 885	0,647 680	0,085 141	0,008 806	0,000 884	—
2.....	H	3,433 747	2,601 914	2,498 709	2,488 142	2,487 082	—
	C	3,352 144	2,330 433	1,714 860	0,678 295	0,098 106	—
3.....	H	3,438 266	2,604 381	2,500 965	2,490 377	2,489 316	2,489 19
	C	3,432 883	2,582 317	2,430 949	2,286 522	1,534 954	—

On constate que la correspondance est excellente. Poussant plus loin l'analyse, on peut se demander si des résultats comparables n'auraient pas pu être obtenus au moyen d'éléments *cinématiquement admissibles*. Les essais, dont les résultats sont repris aux tableaux II et III, montrent qu'aux degrés 1 et 2, il n'en est rien; au troisième degré, par contre, il est possible d'obtenir une solution convenablement approchée en posant $\nu = 0,499$. Mais au-delà de cette valeur, l'énergie décroît rapidement vers zéro. On peut montrer ([11], [12]) que ce phénomène est lié au fait que la discrétisation ne contient aucun mode incompressible. Par contre, l'élément de

Herrmann donne d'excellents résultats, tant au premier degré qu'aux degrés supérieurs, excepté pour la valeur $v = 0,5$ qui ne peut être atteinte par des éléments linéaires. Mais il est surprenant de constater que même pour $v = 0,499\,999$, les éléments linéaires donnent toujours d'excellents résultats. Ces résultats sont reportés aux figures 2 et 3.

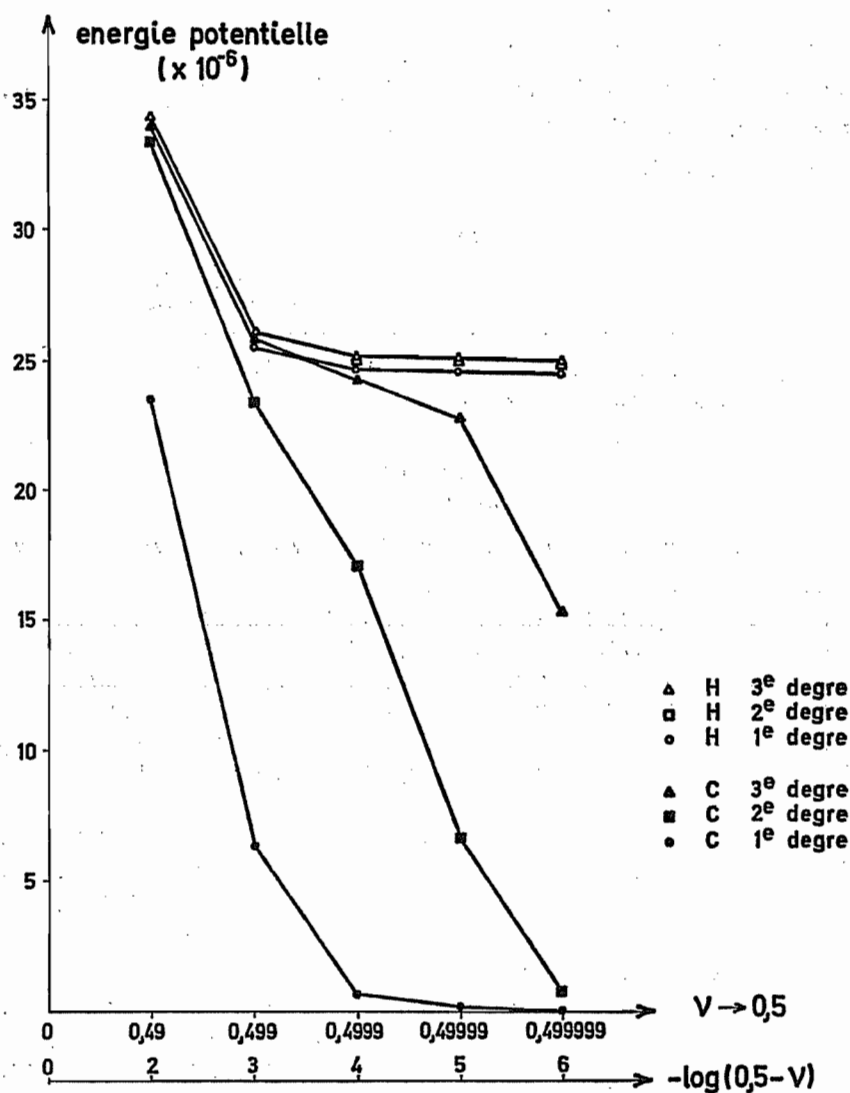


Fig. 2

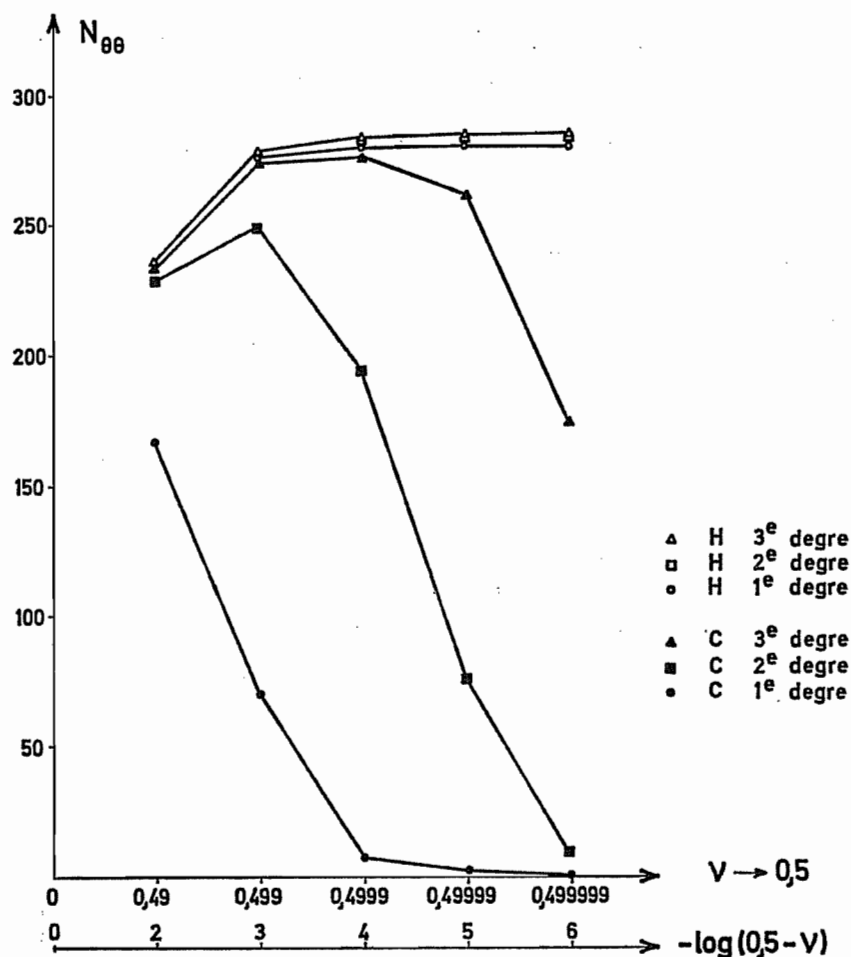


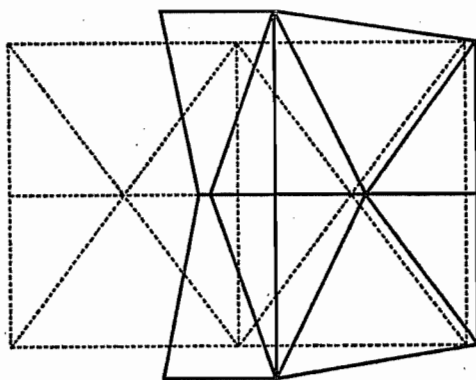
Fig. 3

TABLEAU III
Effort N_{00} dans la coque

Degré	Élément (*)	$v = 0,49$	$v = 0,499$	$v = 0,4999$	$v = 0,49999$	$v = 0,499999$	$v = 0,5$
1.....	H	231,6	275,1	280,5	281,1	281,1	—
	C	167,1	70,90	9,885	1,029	0,103 3	—
2.....	H	236,5	279,6	284,8	285,4	285,4	—
	C	231,2	250,6	195,5	77,81	11,26	—
3.....	H	236,8	279,3	285,1	285,6	285,7	285,7
	C	236,5	236,5	277,1	262,3	176,2	—

(*) H, formulation de Herrmann; C, cinématiquement admissible.

On constate d'autre part que pour $\nu = 0,49$, les résultats sont très différents de ceux de la structure incompressible : l'effort circonférentiel dans la coque vaut 236,8 hbar pour $\nu = 0,49$ et 285,7 hbar pour $\nu = 0,5$ (valeurs calculées par la formulation de Herrmann au troisième degré).



DEFORMEE EN L'ABSENCE DE
FIXATIONS LONGITUDINALES
($\nu = 0,5$)

Fig. 4

Cette grande sensibilité à la valeur du coefficient de contraction latérale provient de ce que le problème posé est très particulier. Étant donné les fixations, seuls les déplacements radiaux sont possibles; or la solution générale de l'équation de Navier est dans ce cas

$$u_2 = \alpha r + \frac{\beta}{r}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

De ces deux termes, seul β/r est incompressible. Donc, lorsqu'on passe de $\nu = 0,5$ à $0,49$, il apparaît subitement une nouvelle forme de déplacements possibles, à savoir, αr . On conçoit aisément que le passage d'un mode possible à deux modes possibles s'accompagne d'une importante modification de la solution.

Le problème se pose tout différemment si l'on considère que la même portion de structure libre peut se dilater axialement, c'est-à-dire sans

fixations verticales. Dans ce cas, le nombre de modes incompressibles est plus élevé, puisqu'une dilatation longitudinale est possible. Dès lors, le passage du cas incompressible au cas compressible devrait se faire d'une manière beaucoup plus progressive. C'est ce que confirme un essai numérique : on obtient les résultats suivants :

TABLEAU IV

ν	N_{00}	Énergie
0,49	94,47	$5,966 \cdot 10^5$
0,50	91,60	$5,950 \cdot 10^5$

L'examen de la figure 4 permet par ailleurs de constater que la déformée est beaucoup plus torturée dans ce dernier cas. Elle diffère peu d'un cas à l'autre. Ceci semble confirmer l'hypothèse souvent admise (bien que, nous venons de la voir, non toujours vérifiée) selon laquelle la solution pour $\nu = 0,49$ est généralement proche de la solution incompressible.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HERRMANN L. R., *Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by a Variational Theorem* (A.I.A.A. Journal, vol. 3, 1965, p. 1896-1900).
- [2] TAYLOR R. L., PISTER K. S. et HERRMANN L. R., *On a Variational Theorem for Incompressible and Nearly Incompressible Orthotropic Elasticity* (Int. J. Solids Structures, vol. 4, 1968, p. 875-883).
- [3] KEY S. W., *A variational Principle for Incompressible and Nearly Incompressible, Anisotropic Elasticity* (Int. J. Solids Structures, vol. 5, 1969, p. 951-964).
- [4] CHOQUET-BRUHAT Y., *Distributions, Théorie et Problèmes*, Masson, Paris, 1973.
- [5] THOMAS J. M., *Méthodes hybrides. Applications* (Séminaires Ciarlet-Glowinski-Raviart, 8 novembre 1974, Université de Paris-VI).
- [6] BREZZI F., *On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Point Problems, arising from Lagrangian Multipliers* (R.A.I.R.O., vol. 8, R 2, 1974, p. 129-151).
- [7] RIESZ F. et NAGY B. Sz., *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 6^e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1975.
- [8] DEBONGNIE J. F., *Etude des structures anisotropes pouvant être incompressibles et application à un élément fini de tore triangulaire*, Rapport LTAS SF-32, Université de Liège.
- [9] DEBONGNIE J. F., PARKS D. M. et RICE J. R., *On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range* (Computer Math. in Appl. Mech. and Eng., vol. 4, 1974, p. 153-177).

- [10] HUGHES T. J., TAYLOR R. L. et SACKMAN J. L., *Finite Element Formulation and Solution of Contact Impact Problems in Continuum Mechanics*, III, SESM Report, n° 75-7, University of California, Berkeley.
- [11] FRIED I., *Finite Element Analysis of Incompressible Material by Residual Energy Balancing* (*Int. J. Solids Structures*, vol. 10, 1974, p. 993-1002).
- [12] DEBONGNIE J. F., *On the Approximation of Incompressible Solids in the Displacement Method*, Rapport LTAS SA-42, Université de Liège.
- [13] DEBONGNIE J. F., *A New Look at Herrmann's Formulation of Incompressibility* (*Proc. Symposium on Applications of Computer Methods in Engineering*, University of Southern California, Los Angeles August 23-26, 1977).

(Manuscrit reçu le 19 avril 1977,
révisé le 19 décembre 1977.)