

Laboratoire de Techniques
Aéronautiques & Spatiales
de l'Université de Liège,
Rue Ernest Solvay, 21
B - 4000 Liège
Belgique

Rapport SF-78

"COMPARAISON DE DIFFERENTS MODELES
D'ELEMENTS FINIS PLANS POUR L'ANALYSE
LINEAIRE DES COQUES"

J.F. DEBONGNIE,
Maître de Conférences

E. CARNOY,
Aspirant F.N.R.S.

Octobre 1978

OCTOBRE 1978

COMPARAISON DE DIFFERENTS MODELES D'ELEMENTS FINIS PLANS
POUR L'ANALYSE LINEAIRE DES COQUES

par J.F. DEBONGNIE *
et E. CARNOY **

* Maître de Conférences, Univ. Liège, Rue du Val Benoit, 75, B-4000
LIEGE

** Aspirant F.N.R.S., même adresse.

L'application des éléments finis à l'étude des coques peut se fonder sur deux familles distinctes de théories. Dans chacune de ces familles, on peut encore établir un classement en fonction de l'approximation géométrique.

La première de celles-ci consiste à décrire les déplacements et la géométrie dans le même système de coordonnées curvilignes. Pour les coques profondes, il s'agit de théories comme celles de KOITER [2], NAGHDI [3], BUDIANSKY - SANDERS [22]. Leur application stricte est malaisée, car elle implique de définir une géométrie dont les pentes sont continues. En outre, ces théories sont relativement compliquées. Elles se simplifient quelque peu dans le cas des coques plates (shallow shell), qui sont alors décrites par des équations semblables à celles de NOVOZHILOV [6]. Malheureusement, comme l'a montré IDELSOHN [11], l'application à des coques générales d'éléments finis basés sur cette théorie conduit à des solutions approchées convergeant vers une autre solution que celle de la théorie générale.

En outre, un inconvénient majeur de ces théories est que les déplacements de corps rigide ont une expression non polynomiale en termes des coordonnées curvilignes, si bien que les éléments finis courants ne les représentent pas correctement. Or, il existe des cas où la présence de ces modes de déplacement conditionne entièrement la capacité du modèle élément fini d'obtenir une solution raisonnable. Considérons par exemple un cylindre possédant deux fonds, l'un sphérique, l'autre plan (fig. 1). La structure est encastree au point A, tandis que le point B est libre d'avoir un mouvement le long de l'axe. Soumise à pression externe, cette structure prend une déformée telle que (a), où le fond sphérique a pratiquement un mouvement de corps rigide, tandis que le fond plat réagit grosso modo comme une plaque encastree à la coque sur la circonférence C. Une telle déformée est effectivement obtenue à l'aide d'éléments de troncs de cônes. Mais par une discrétisation par éléments courbes, on a obtenu une déformée de type (b), qui est très éloignée de la réalité.

Cette difficulté ne peut être résolue que par l'usage d'une théorie où les déplacements sont exprimés en coordonnées cartésiennes, ce qui introduit la deuxième famille de théories. Il existe, tout d'abord,

une théorie des coques profondes de ce type, qui est due à DUPUIS et GOEL [4] . Leur élément, plus que conforme, nécessite la définition en chaque noeud de 9 grandeurs pour assurer la continuité C^1 de la géométrie, et de même de 9 degrés de liberté.

Beaucoup plus simple est la théorie des coques plates de Marguerre, [5,8] . Elle est basée sur la donnée d'un plan de référence, la coque étant définie par sa distance à ce plan. Mais pour traiter des géométries générales, on est amené à changer de plan de référence d'un élément à l'autre, ce qui pose exactement le même problème que la connexion d'éléments plans dans l'espace.

Enfin, on peut également approcher la géométrie de la coque par polygonisation et utiliser des éléments plans. Cette approche, comme les deux précédentes, garantit la représentation des modes rigides.

Tous ces éléments sont obtenus par superposition d'un élément de plaque et d'un élément de membrane. Une difficulté importante surgit lors de la connexion, car les déplacements de membrane sont simplement continus et ceux de plaques, continûment dérivables, si bien qu'il n'y a pas, a priori, concordance des degrés de liberté. Aussi, tous les éléments proposés sont nécessairement soit non conformes, soit plus que conformes. Le deuxième cas est souvent aussi mauvais que le premier, car il mène à une raideur artificielle de la coque au droit des connexions, ce qui constitue un handicap lorsque les charges sont peu régulières.

Une solution assez ancienne est celle de HOGGE [9] , qui assemble simplement une membrane classique avec un élément de plaque conforme, qui est celui de HSIEH-CLOUGH-TOCHER dans le cas triangulaire ou celui de FRAELJS de VEUBEKE - SANDER dans le cas du quadrangle (fig. 2) . Les connexions y sont souvent très insuffisantes. Ainsi, comme le montre la figure 3, dans un assemblage à angle droit, les déplacements de la plaque de l'élément 1, ne correspondent aux déplacements de membrane de l'élément 2 qu'aux seuls sommets, ce qui ne permet pas un passage convenable des efforts. Bien souvent, l'idéalisation est beaucoup trop souple et est sujette à d'importantes déformations parasites. En particulier, ces éléments ne permettent pas de traiter convenablement les problèmes de bifurcation.

Une deuxième solution, proposée par FRAELJS de VEUBEKE [13] et mise en oeuvre par CARNOY [12] vise à obtenir une connexion parfaite des déplacements et des rotations. Elle consiste à redéfinir la membrane à champ cubique en termes de dilatations et de rotations de côtés (fig. 4) . La plaque est celle de HSIEH-CLOUGH-TOCHER et on obtient en superposition un élément légèrement surcompatible . On montre [12] que cette surcompatibilité se traduit par l'existence d'au plus trois relations linéaires homogènes entre les glissements des forces concourant en un sommet. En particulier si trois éléments concourent en un même sommet en formant une pyramide, ce sommet est rigide. Par ailleurs, l'utilisation de cet élément est rendue très malaisée par le fait que les connexions aux noeuds ne peuvent être rendues automatiques par un simple choix d'axes dans l'élément.

Ces deux exemples montrent clairement que la solution ne se trouve pas dans l'assemblage de deux éléments "déplacement" classiques. Au contraire, on remarquera, avec IDELSOHN [11] que les degrés de liberté d'une membrane déplacement correspondent à ceux d'une plaque équilibre, à

condition d'utiliser pour la membrane des déplacements moyens d'interface, ce qui est loisible. Les éléments obtenus sont représentés en figure 5. Cette solution assure visiblement une meilleure liaison à l'interface de deux éléments non coplanaires. Une justification de cet élément a été donnée a posteriori par SANDER et BECKERS [16], sur base du patch test sous la forme décrite par FRAELJS de VEUBEKE [14]. La vérification de ce test s'interprète comme la propriété des éléments de transmettre exactement la résultante des efforts sur l'interface. Pour les tests d'ordre plus élevé, on obtiendra également la transmission des moments de ces efforts. Ces éléments ont été utilisés avec succès par E. CARNOY [15] pour le calcul des modes de bifurcation, ce qui prouve leur grande qualité. Cependant ces éléments ont un certain nombre de défauts : du fait de la présence d'une plaque équilibre, la prise en compte de forces de volume est malaisée; il en est de même du calcul de la matrice des masses, qui doit être basé sur le principe de Toupin; le calcul des forces centrifuges semble poser des problèmes inextricables. D'autre part, il ne semble pas possible, si ce n'est par assemblage, de construire un élément quadrangulaire basé sur une approche semblable.

Pour éviter les inconvénients auxquels nous venons de faire allusion, il est nécessaire d'utiliser une formulation "déplacement" pour la plaque. La solution se trouve alors dans les éléments non conformes de plaque de la génération fondée par FRAELJS de VEUBEKE [14] : on obtient ainsi les mêmes degrés de liberté d'interface que pour des plaques équilibre. Pour le triangle, on part d'un champ de déplacement du quatrième degré, ce qui fait 15 paramètres. Les degrés de liberté d'interface sont au nombre de 12. (fig. 6). Les trois degrés de liberté restants sont condensés à l'intérieur de l'élément. Le quadrangle a 16 ddl d'interface, ce qui nécessite la définition d'un champ du 5ème degré.

La membrane est, dans le cas triangulaire, identique à celle d'Idelsohn et elle est donc conforme. Dans le cas du quadrangle, au lieu d'effectuer un assemblage, on a préféré construire un seul élément non conforme : le choix même des moyennes sur l'interface assure a priori la vérification du patch test, si bien qu'il suffit de choisir un champ de déplacement suffisamment riche. On le prend cubique, ce qui conduit à 4 degrés de liberté à condenser.

Lors de l'assemblage de deux éléments faisant entre eux un angle droit, on obtient une situation semblable à celle de la fig. 7 pour ce qui concerne la connexion des déplacements: les déplacements sont identiques aux sommets, ils diffèrent entre ceux-ci, mais leur moyenne a la même valeur.

Ces deux éléments actuellement en service, existent pour le calcul statique, le calcul dynamique, l'analyse de la bifurcation, et la prévision des vitesses critiques de rotation. Ils contiennent une grande variété d'options de charge: pression, thermique, etc...

Il est également possible d'effectuer une réduction de degré, qui mène, dans le cas du triangle, à la plaque de Morley assemblée à une membrane linéaire et à des éléments correspondants, mais nouveaux, dans le cas du quadrangle. Ces éléments se caractérisent par une très grande souplesse de la plaque, si bien que leur utilisation doit être conçue comme une étude membranaire améliorée par le fait que l'énergie est toujours définie positive.

Nous allons à présent comparer le comportement de ces éléments finis à travers quelques exemples de l'analyse linéaire des structures. L'exemple classique de la coque cylindrique supportée par deux diaphragmes et soumise à son poids propre est représenté fig. 8. Etant donné la symétrie du problème, un quart de la coque doit être modélisé et nous choisirons un maillage de 4 x 4 rectangles éventuellement subdivisés en deux triangles. Ce problème a une solution analytique attribuée à Scordelis pour les coques quasi-planes; mais les éléments de coque plans convergent vers la solution de coque générale, qui est différente [11] . Un résultat caractéristique utilisé par de nombreux auteurs est la flèche w du point B situé au milieu du bord libre. Le tableau ci-dessous fournit la valeur de cette flèche pour les différentes modélisations ainsi que l'énergie de déformation et le nombre de d.d.l. après fixation.

Modélisation 4x4 rectangles	D.D.L.	$W_{\text{Scordelis}}=0.3086\text{ft}$	Energie de bifurcation 10^3lb.ft.
triangle 1 ^e degré	104	0.2199	1.661
délinquant 2 ^e degré	304	0.3043	2.443
Quadrangle 1 ^e degré	88	0.2879	2.264
délinquant 2 ^e degré	224	0.3044	2.446
triangle moment mixte [11] linéaire	304	0.3045	2.442
triangle conforme [13]	680	0.3045	2.442
Quadrangle 1 ^e degré	136	0.2553	2.003
Hogge-Sander [9] 2 ^e degré	216	0.3046	2.465

Ces résultats montrent que les différents éléments plans analysés fournissent les résultats équivalents très proches de la solution exacte pour autant que le champ d'extension soit suffisamment riche.

La coque cylindrique à section circulaire représentée figure 9 est un autre exemple classique dans la littérature. Les conditions limites sont du type libre-libre et la mise en charge est réalisée par une paire de force concentrées diamétralement opposées. On peut par symétrie étudier un huitième de la coque pour lequel deux maillages en quadrangles ont été utilisés.

Ce problème est connu comme étant sensible à la qualité de la représentation des modes rigides et a été étudié par CANTIN et FONDER [18] au moyen d'un élément dans lequel on peut introduire des modes rigides trigonométriques exacts. Dans ce problème où la difficulté consiste à représenter les modes rigides, il suffit de comparer les flèches au droit de la charge. Si celles-ci sont bonnes, on constate que les autres grandeurs le sont aussi. Le tableau ci-dessus regroupe les flèches [in.] calculées pour différents maillages avec le nombre total de D.D.L.

Maillage	CANTIN-FONDER			Quadrangle délinquant 2 ^e degré		Triangle mixte Idelsohn [11] moment linéaire	
	D.D.L.	sans modes rigides	avec modes rigides	DDL	flèche	DDL	flèche
4 x 1	60	0.0152	0.1099	95	0.1091	115	0.1099
4 x 4	150	0.0237	0.1126	275	0.1089		

L'analyse dynamique du caisson rectangulaire encastré représenté figure 10 a été réalisée avec l'élément de Hogge-Sander par GERADIN [10] et nous comparons dans le tableau ci-dessus les pulsations propres [rd/sec] des premiers modes calculés, en fonction de leur nature :

Elément	Quadrangle Hogge-Sander [10] 2 ^e degré	Triangle délinquant		Quadrangle délinquant 2 ^e degré
		1 ^e degré	2 ^e degré	
Maillage	4 x 8	16 x 8	8 x 8	4 x 8
D.D.L.	488	400	608	448
FLEXION OZ	986.5	1361.	988.1	987.6
FLEXION OY	1971.	2610.	1976.	1975.
FLEXION OZ	5671.	7825.	5707.	5685.
TORSION OX	7453.	4642.	7826.	7828.
FLEXION OY	-	-	11094.	11057.
TORSION OX	11049.	10679.	12417.	-

Les modes de flexion font essentiellement intervenir des déformations de la membrane et on constate que le triangle au premier degré, avec un maillage qui conduit à un champ d'extension bilinéaire sur chaque coté de la section, est beaucoup plus raide en extension que les éléments du second degré. Les modes de torsion par contre excitent la plaque en priorité et l'on voit que la plaque de Morley est trop souple. La nature des connexions dans l'élément de Hogge-Sander conduit à un assouplissement excessif de la structure qui se marque dans les modes de torsion. La poutre en double T décrite figure 11 est encastrée à une extrémité et repose sur un appui à rouleau. Elle est chargée en bout par une force répartie sur la section terminale. La modélisation en éléments finis comporte 25 rectangles régulièrement répartis sur la longueur de la poutre. Pour l'analyse statique linéaire, la structure est idéalisée avec les éléments quadrangulaires de Hogge-Sander et ceux-ci sont pris de second degré de façon à représenter valablement la flexion de l'âme. L'état de tension initial est essentiellement membranaire et l'étude de stabilité par une approche linéaire est donc justifiée. Le tableau ci-dessus fournit la charge critique [10^3 kg] et la nature du mode pour les différentes modélisations :

	Quadrangle Hogge-Sander	Triangle Hogge-Sander	Quadrangle délinquant [20]	Triangle délinquant [20]	Triangle mixte Carney [15]
P	2.452 (local)	2.454 (local)	21.94 (global)	21.44 (global)	21.00 (Glo.)
D.D.L.	349	428	360	490	490

Les éléments délinquents et le triangle mixte qui ont des connecteurs équilibrés fournissent un mode global qui est le mode de déversement attendu représenté figure 12. Les éléments de Hogge-Sander par contre fournissent un mode local correspondant au flambement de la semelle inférieure. Ce mode parasite apparaît du fait que la semelle inférieure n'est attachée à l'âme qu'en un nombre réduit de points tandis que les rotations restent libres. Cette non conformité a pour effet d'assouplir considérablement la structure et permet l'apparition d'un mode critique purement local où les rotations ont un rôle prépondérant. En raffinant le maillage, le nombre de points supports de la semelle à la jonction avec l'âme augmentent ce qui raidit la structure et relève la charge critique associée au mode local de sorte que l'on doit retrouver le mode de déversement comme mode fondamental de bifurcation. Par ailleurs en imposant, par contraintes linéaires, l'égalité des déplacements moyens à la jonction âme-semelle on retrouve aussi le mode global attendu avec une charge critique donnée par $P=24.76 \cdot 10^3$ kg.

Le deuxième problème de bifurcation est : l'analyse d'une coque sandwich cylindrique anisotrope soumise à une compression axiale uniforme (fig. 13). Les deux extrémités sont encastées tandis que les bords longitudinaux sont simplement appuyés. Une approche analytique [15] permet de conclure que la valeur critique du flux de tension axial doit être comprise entre les deux bornes suivantes :

$$10.72 \leq N_x \text{ kg/mm}^2 \leq 14.02$$

La moitié de la coque d'ouverture $\beta = 40,6^\circ$ est modélisée à l'aide de 13x4 éléments quadrangulaires et l'on applique successivement les conditions de symétrie et d'anti-symétrie sur le bord longitudinal. Le tableau ci-dessous fournit les flux de tension de bifurcation avec entre parenthèses le nombre d'alternances circonférentielles.

Triangle mixte CARNOY [15]		Quadrangle délinquant [20]	
Symétrie	Anti-symétrie	Symétrie	Anti-symétrie
14.21 (3)	<u>13.39 (4)</u>	10.78 (5)	<u>10.75 (4)</u>
14.33 (5)	13.44 (4)	11.71 (5)	11.55 (4)
14.68 (5)	13.98 (4)	12.01 (3)	12.13 (6)

Pour les deux éléments le mode critique est antisymétrique (figure 14) et la charge critique est comprise entre les bornes analytiques.

L'élément de Hogge-Sander conduit ici aussi à une sous-estimation importante de la charge critique pour laquelle il donne la valeur $N_x = 3.952$ (3) qui est près de trois fois inférieure à la charge réelle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.E.H. LOVE - "A Treatise of the Mathematical Theory of Elasticity"
4 th Edition, Dover, New York, 1944
- [2] W.J. KOITER - "A consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells" , Report of the Lab. voor Toegepaste Mechanica der Technische Hogeschool, August 5, 1959.
- [3] P.M. NAGHDI - "Foundations of Elastic Shell Theory" in "Progress in Solid Mechanics" , vol. IV, edt by I.N. Snedders and R. Hill, North Holland Pub. Cy, Amsterdam, 1963
- [4] G. DUPUIS et J.J. GOEL - "A curved finite element for thin elastic shells" Int. Jl. Solids and Structures, vol. 6, 1970, p.1413.
- [5] K. MARGUERRE - "Knick -und Beulvorgänge- Einführung in die Theorie der elastischen Stabilität". Chapitre VI de "Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs", herausgegeben von K. Marguerre Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950.
- [6] V.V. NOVOZHILOV - "The theory of thin shells"
P. Noordhof, Ltd, Groningen, 1959
- [8] J.F. DEBONGNIE - "Physical Interpretation and Generalization of Marguerre's shallow shell theory"
Rapport LTAS SA-57, to appear in the International Journal of Engng Science.
- [9] M. HOGGE - "Famille d'éléments finis de coque plans cinématiquement admissibles pour l'analyse statique des structures"
Rapport LTAS SF-18, Mars 1973
- [10] M. GERADIN - "Analyse dynamique duale des structures par la méthode des éléments finis" , Coll. Pub. Fac. Sci. appl., n°36, 1973
- [11] S. IDELSOHN - "Analyses statiques et dynamiques des coques par la méthode des éléments finis" Thèse de doctorat en Sciences Appliquées, Univ. Liège, 1974
- [12] E. CARNOY - "Etude d'un élément de coque plan conforme" ,
Université de Liège, 1975
- [13] B. FRAEIJIS de VEUBEKE - "Les connexions cinématiques co-déformables des éléments de coque plans" Rapport LTAS SF-28, novembre 1974
- [14] B. FRAEIJIS de VEUBEKE - "Variational principles and the patch test"
Int. Jl. Num. Meth. in Engng. Vol. 8, n°4, pp.783-801, 1974

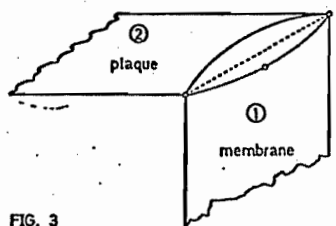
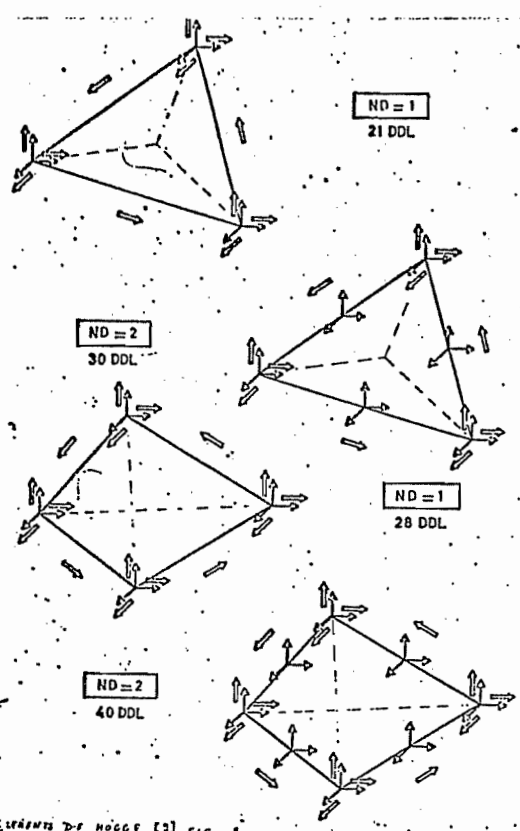
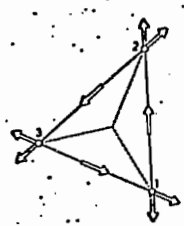


FIG. 3

Éléments de coque [3] FIG. 2

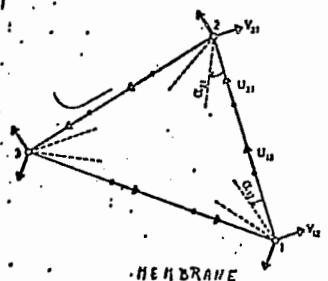
LES COQUELLES CINÉMATIQUES QUADRANGULAIRES DES ÉLÉMENTS DE

COQUE PLANS



○ déplacements de flexion
→ rotations de flexion

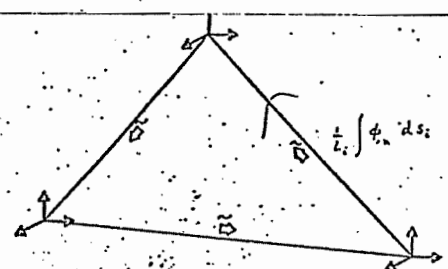
PLAQUE



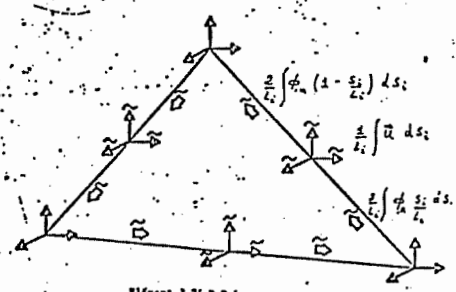
MEMBRANE

Champ de déplacement des lignes de fibres

FIG. 4



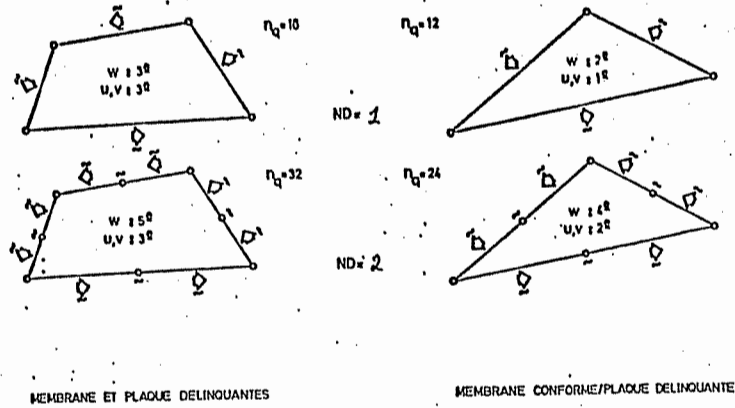
Élément à 12 D.D.L.
Champ d'extension linéaire
et champ de flexion constant



Élément à 24 D.D.L.
Champ d'extension du second degré
et champ de flexion linéaire

FAMILLE D'ÉLÉMENTS DE COQUE PLANS
DE IDELSONN

FIG. 5



MEMBRANE ET PLAQUE DELINQUANTES

MEMBRANE CONFORME/PLAQUE DELINQUANTE

FIG. 6 FAMILLE D'ELEMENTS DE COQUE PLANS DELINQUANTS

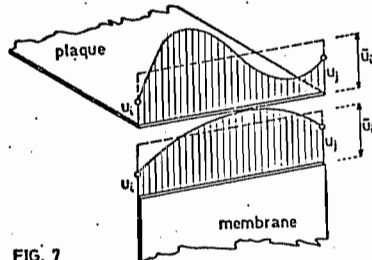


FIG. 7

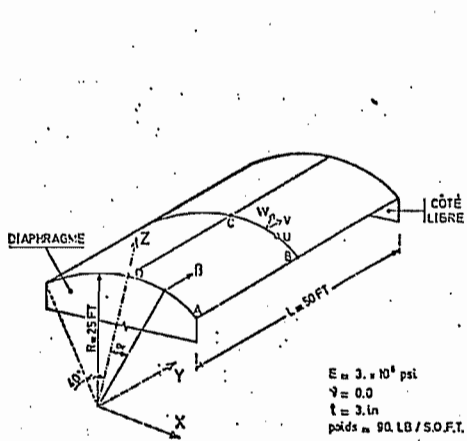


FIGURE 8

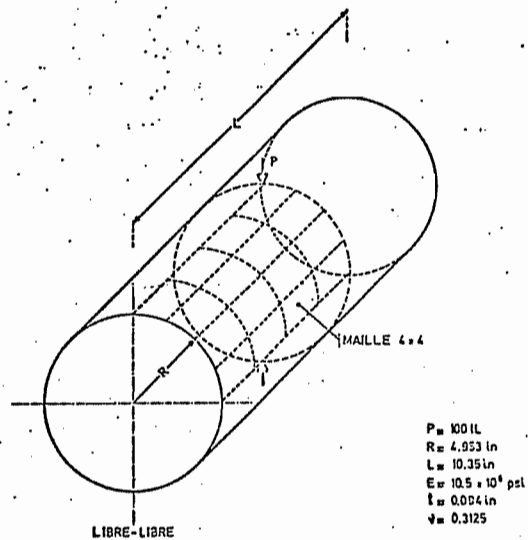
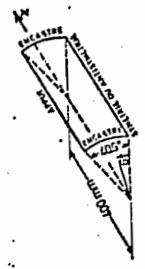
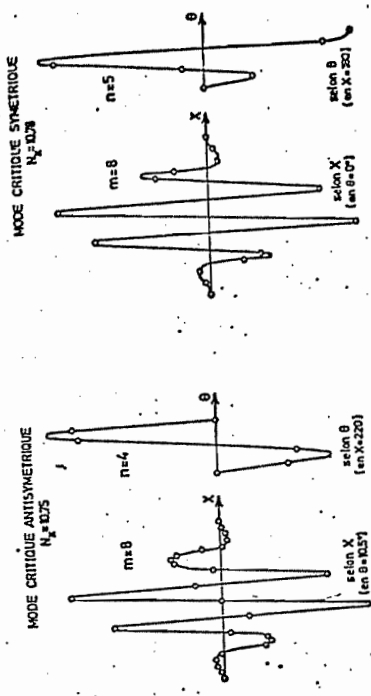
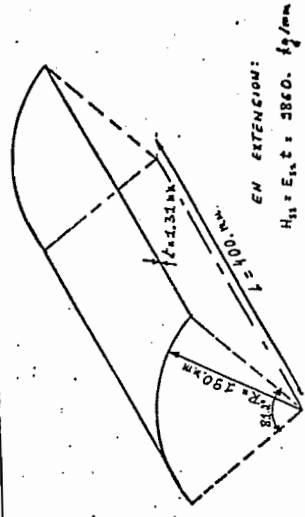


FIGURE 9



COQUE CYLINDRIQUE COMPRIÉE AXIALEMENT
ELEMENT QUADRANGULAIRE DE COQUE PLAN DELINQUANT

FIG.14



EN EXTENSION:
 $H_{11} = E_{11} t = 3860. \text{ kg/mm}$
 $H_{12} = 3679.$
 $H_{22} = 163.2$
 $H_{33} = 392.2$

EN FLEXION:
 $H_{11} = E_{11} \frac{L^3}{12} = 392.2 \text{ kg/mm.}$
 $H_{12} = 544.7$
 $H_{22} = 18.5$
 $H_{33} = 56.4$
 $H_{13} = H_{31} = 0.$

FIGURE 13 : COQUE CYLINDRIQUE ANISOTROPE

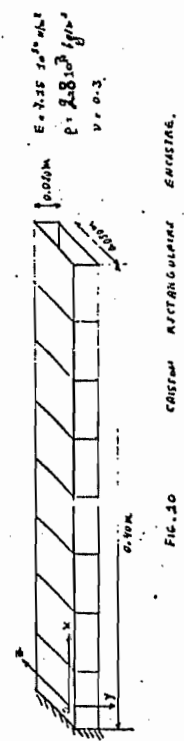


FIG.10 CASEME RECTANGULAIRE ENROBEE

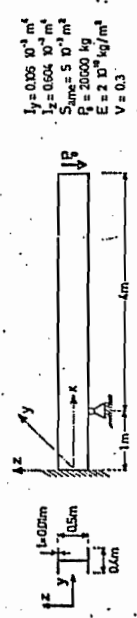


FIG. 11 POUTRE EN DOUBLE T SOUMISE A FLEXION

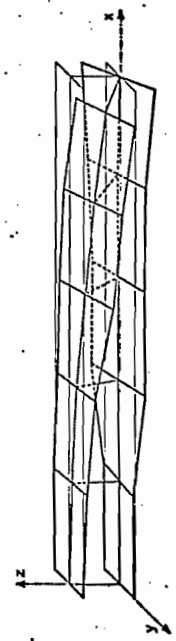


FIG.12 BIFURCATION DE LA POUTRE EN DOUBLE T SOUMISE A FLEXION - MODE GLOBAL DE TORSION