

Le col circulaire comme articulation flexible

P. Merken¹, J.F. Debongnie¹

¹Université de Liège, Dept. ASMA – Méthodes de fabrication
Chemin des Chevreuils 1 Bât. 52/3, 4000 Liège
email: P.Merken@ulg.ac.be, JF.debongnie@ulg.ac.be

Résumé: Nous présentons un modèle permettant de déterminer les dimensions du col, R et h_0 , en fonction du matériau, de l'angle de rotation désiré et du nombre de cycles envisagé. Dans le cas du col circulaire, les équations de base de la résistance des matériaux appliquées aux poutres à section variable admettent une solution analytique grâce à un changement de variable judicieux inspiré de la théorie de la lubrification. Pour un rapport entre l'épaisseur de col et son rayon tendant vers zéro, nous pouvons également dériver des formes asymptotiques des équations obtenues. Dans le cas de rapports h_0/R moyens, ces résultats doivent être affectés de coefficients correcteurs qui dépendent eux-mêmes du rapport h_0/R et que l'on détermine à partir des résultats numériques obtenus par la théorie complète. Ainsi, toutes les propriétés du col peuvent être déduites grâce aux équations aux limites et à ces coefficients simples.

Mots clefs: col circulaire, articulation élastique, modèle

I. INTRODUCTION

Dans un environnement technologique où les machines remplissent de plus en plus de fonctions dans un espace de plus en plus réduit, où le besoin de miniaturisation se fait sentir sans cesse davantage, où les contraintes imposées sont de plus en plus sévères, il devient essentiel de concentrer les fonctions et de leur donner un plus large champ d'application.

En micromécanique en particulier, la recherche d'une articulation sans frottement, d'un encombrement faible, incluant le moins de pièces possible, pour des rotations limitées et travaillant dans un milieu non-lubrifié, amène à écarter les solutions classiques telles que roulements, paliers lisses et autres pivots qui ne possèdent pas toutes ces qualités.

Un système particulier déjà connu [1] et travaillant par déformation, présente ces différentes caractéristiques : il s'agit du col circulaire. La figure 1 montre la géométrie générale de ce type d'articulation. Le col est défini par son rayon, R , et par l'épaisseur minimale de matière, h_0 .

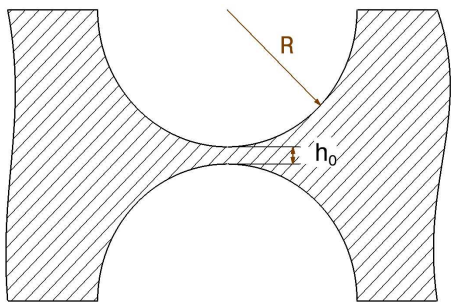


Fig. 1. Géométrie du col circulaire

II. FORMES ASYMPTOTIQUES

A. Variables géométriques

Afin d'étudier le col, nous fixerons des axes de référence : l'axe x correspond à l'axe de symétrie du col et l'axe y relie les centres des arcs de cercle définissant le col.

En plus des deux variables définies précédemment, nous introduisons 2 autres : l'angle de balancement φ et l'épaisseur du col b , perpendiculairement au plan xy .

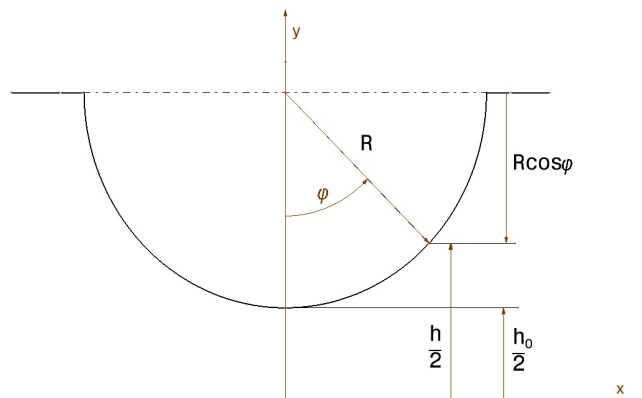


Fig. 2. Variables géométriques

B. Rigidité en flexion

L'angle de flexion total se calcule par la formule classique,

$$\alpha = \int_{-R}^R \frac{12M}{Eb^3} dx = \frac{12M}{Eb} \int_{-R}^R \frac{dx}{h^3} \quad (1)$$

On considère que seule la zone du col (qui s'étend de $-R$ à R) est soumise à l'action du moment de flexion et que le reste de la poutre est infiniment rigide.

Calculons cette dernière intégrale. La géométrie du col nous donne,

$$\begin{aligned} h &= h_0 + 2R(1 - \cos \varphi) = 2R \left[\left(1 + \frac{h_0}{2R} \right) - \cos \varphi \right] \\ &= 2R \left(1 + \frac{h_0}{2R} \right) (1 - \varepsilon \cos \varphi) \\ &= \frac{2R}{\varepsilon} (1 - \varepsilon \cos \varphi) \end{aligned} \quad (2)$$

en posant,

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{h_0}{2R}} \quad (3)$$

Sachant que,

$$x = R \sin \varphi, \quad dx = R \cos \varphi d\varphi \quad (4)$$

on transforme l'intégrale (1) sous la forme,

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{h^3} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon^3 R \cos \varphi d\varphi}{8R^3 (1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} = \frac{\varepsilon^3}{4R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} = \frac{\varepsilon^3}{4R^2} I \quad (5)$$

L'intégrale à évaluer ne diffère des intégrales apparaissant en théorie de la lubrification [2] que par le signe de la variable ε et peut donc être résolue par le célèbre changement de variables de Sommerfeld [3] qui devient ici,

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \quad (6)$$

On en déduit successivement,

- $1 - \varepsilon \cos \varphi = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cos \alpha}$
- $\sin^2 \varphi = \frac{(1 - \varepsilon^2) \sin^2 \alpha}{(1 + \varepsilon \cos \alpha)^2}$
- $\sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha}$
- $d(\cos \varphi) = -\sin \varphi d\varphi = -\frac{(1 - \varepsilon^2) \sin \alpha}{(1 + \varepsilon \cos \alpha)^2} d\alpha$

ce qui donne,

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon \cos \alpha)} d\alpha \quad (8)$$

En ce qui concerne les bornes d'intégration,

$$\begin{cases} \varphi = 0, & \cos \varphi = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = 1 \quad \alpha = 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, & \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = -\varepsilon \quad \alpha^* = \arccos(-\varepsilon) \end{cases} \quad (9)$$

L'intégrale I se ramène ainsi à

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \int_0^{\alpha^*} \left[(1 + \varepsilon^2) \cos \alpha + \frac{\varepsilon}{2} (1 + \cos 2\alpha) + \varepsilon \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left\{ (1 + \varepsilon^2) \sin \alpha^* + \frac{3\varepsilon}{2} \alpha^* + \frac{\varepsilon}{4} \sin 2\alpha^* \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

Tenant compte de la valeur ci-dessus de la limite α^* (9), on a,

$$\sin \alpha^* = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha^*} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad (11)$$

$$\sin 2\alpha^* = 2 \sin \alpha^* \cos \alpha^* = -2\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

ce qui ramène finalement l'équation cherchée à

$$I = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left\{ (1 + \varepsilon^2) \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{3\varepsilon}{2} \arccos(-\varepsilon) - \frac{\varepsilon^2}{2} \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right\} \quad (12)$$

Nous nous limiterons au cas où $\frac{h_0}{R}$ est petit devant 1. Nous obtenons alors,

- $\varepsilon \approx 1$
- $1 - \varepsilon^2 \approx \frac{h_0}{R}$
- $\alpha^* \approx \pi$
- $\sqrt{1 - \varepsilon^2} (1 + \varepsilon^2) \approx 2 \frac{h_0}{R}$
- $\frac{3\varepsilon}{2} \arccos(-\varepsilon) \approx \frac{3}{2} \pi$
- $\frac{\varepsilon^2}{2} \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{h_0}{R}$

En remplaçant les différents termes dans l'intégrale, nous obtenons,

$$I = \left(\frac{R}{h_0} \right)^{5/2} \left[\frac{3}{2} \pi + O\left(\frac{h_0}{R} \right) \right] \approx \frac{3}{2} \pi \left(\frac{R}{h_0} \right)^{5/2} \quad (14)$$

et

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{h^3} = \frac{\varepsilon^3}{4R^2} \frac{3}{2} \pi \left(\frac{R}{h_0} \right)^{5/2} \approx \frac{3}{8} \pi \frac{\sqrt{R}}{h_0^{5/2}} \quad (15)$$

L'angle de flexion s'écrit finalement,

$$\alpha = \int_{-R}^R \frac{12M}{Eb h^3} dx = \frac{9\pi}{2Eb} M \frac{\sqrt{R}}{h_0^{5/2}} \quad (16)$$

Ce qui revient à dire,

$$\frac{M}{\alpha} = \frac{2}{9\pi} Eb \frac{h_0^{5/2}}{\sqrt{R}} \quad (17)$$

Cette expression mesure la raideur en flexion.

En ce qui concerne la contrainte maximum au niveau du col,

$$\sigma = \frac{6M}{bh_0^2} = \frac{6}{bh_0^2} \frac{2Eb h_0^{5/2}}{9\pi \sqrt{R}} \alpha = \frac{4}{3\pi} E \alpha \sqrt{\frac{h_0}{R}} \quad (18)$$

soit,

$$\alpha = \frac{3\pi \sigma}{4 E} \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (19)$$

C. Rigidité en torsion

L'angle de torsion varie avec la coordonnée x car la section n'est pas constante, nous avons alors,

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{M_t}{G c_1 b h^3} = \frac{M_t}{G b h^3} = \frac{3M_t}{G b h^3} \quad (20)$$

Le coefficient c_1 est donné dans des tables, il dépend du rapport b/h . Lorsque ce rapport est supérieur à 4, le coefficient tend vers 1/3. Ce rapport est, dans notre cas, toujours beaucoup plus grand que 4.

Calculons l'angle de torsion total, en considérant que la partie de la poutre non entamée est toujours infiniment rigide,

$$\alpha = \frac{3M_t}{Gb} \int_{-R}^R \frac{dx}{h^3} = \frac{9}{8} \pi \frac{M_t}{Gb} \frac{\sqrt{R}}{h_0^{5/2}} \quad (21)$$

La raideur en torsion vaut, quant à elle,

$$\frac{M_t}{\alpha} = \frac{8}{9\pi} Gb \frac{h_0^{5/2}}{\sqrt{R}} \quad (22)$$

D. Rigidité en extension

Le déplacement d'une section infinitésimale de la poutre soumise à un effort de traction vaut,

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{Ebh} \Leftrightarrow u = \frac{N}{Eb} \int_{-R}^R \frac{dx}{h} \quad (23)$$

Remplaçons h par sa valeur calculée dans la partie flexion,

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{h} = \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{(1-\varepsilon \cos \varphi)} d\varphi = \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{(1-\varepsilon \cos \varphi)} d\varphi = I \quad (24)$$

On a,

$$\frac{\varepsilon \cos \varphi}{1-\varepsilon \cos \varphi} = -1 + \frac{1}{1-\varepsilon \cos \varphi} \quad (25)$$

et

$$I = -\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1-\varepsilon \cos \varphi} = -\frac{\pi}{2} + \Gamma \quad (26)$$

En utilisant encore le même changement de variable,

$$\Gamma = \int_0^{\alpha^*} \frac{1+\varepsilon \cos \alpha}{1-\varepsilon^2} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1+\varepsilon \cos \alpha)} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \alpha^* \quad (27)$$

On a donc,

$$I = -\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha^*}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \approx -\frac{\pi}{2} + \pi \sqrt{\frac{R}{h_0}} \approx \pi \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (28)$$

Il vient ainsi,

$$u = \frac{N}{Eb} \pi \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (29)$$

et la rigidité en extension est représentée par

$$\frac{N}{u} = \frac{1}{\pi} Eb \sqrt{\frac{h_0}{R}} \quad (30)$$

E. Rigidité en flexion transverse

Voyons ce qu'il se passe lorsque le col est soumis à un moment de flexion transverse,

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{12M}{Ehb^3} \quad (31)$$

$$\alpha = \frac{12M}{Eb^3} \int_{-R}^R \frac{dx}{h} = \frac{12M}{Eb^3} \pi \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (32)$$

La raideur angulaire transverse vaut,

$$\frac{M}{\alpha} = \frac{1}{12\pi} Eb^3 \sqrt{\frac{h_0}{R}} \quad (33)$$

F. Rigidité en translation ou cisaillement technologique

Par translation, on entend la translation de l'un des côtés de la poutre par rapport à l'autre côté, le col circulaire délimitant les côtés. Afin de pouvoir effectuer une translation, on doit appliquer une charge au droit du col. Cela sera réalisé grâce à l'artifice montré sur la figure 3.

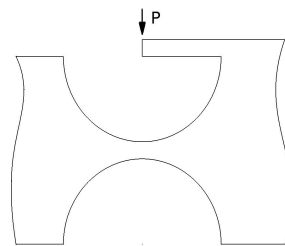


Fig. 3. Application de la charge

1) Contribution de la flexion

Le moment vaut $P.x$, la rotation vérifiant,

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{12M}{Eb^3} = \frac{12Px}{Eb^3} \quad (34)$$

le déplacement vaut,

$$w = \int_{-R}^R \alpha dx \quad (35)$$

Intégrons par parties,

$$\begin{cases} u = \alpha & dv = dx \\ du = \frac{d\alpha}{dx} dx & v = x \end{cases} \quad (36)$$

$$w = [x\alpha]_{-R}^R - \int_{-R}^R x \frac{d\alpha}{dx} dx \quad (37)$$

Il est clair que,

$$-\alpha(R) = \int_{-R}^R \frac{12Px}{Eb^3} dx = 0 \quad (38)$$

car l'intégrand est impair. Donc $\alpha(0) = 0$.

Reste donc à calculer

$$w = \frac{12P}{Eb} \int_{-R}^R \frac{x^2}{h^3} dx = \frac{12P}{Eb} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2 \sin^2 \varphi}{\frac{8R^3}{2} \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon^3} (1-\varepsilon \cos \varphi)^3} R \cos \varphi d\varphi \quad (39)$$

$$= \frac{3P\varepsilon^3}{Eb} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{(1-\varepsilon \cos \varphi)^3} d\varphi = \frac{3P\varepsilon^3}{Eb} I$$

En utilisant toujours le même changement de variable, nous obtenons

$$I = \int_0^{\alpha^*} \frac{(1-\varepsilon^2) \sin^2 \alpha \cos \alpha + \varepsilon (1+\varepsilon \cos \alpha)^3}{(1+\varepsilon \cos \alpha)^2 (1+\varepsilon \cos \alpha)} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1+\varepsilon \cos \alpha)} d\alpha \quad (40)$$

$$= \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \int_0^{\alpha^*} \frac{\sin^2 \alpha (\cos \alpha + \varepsilon)}{1+\varepsilon \cos \alpha} d\alpha = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \Gamma$$

Transformons ce dernier intégrand. On a successivement

- $\frac{\sin^2 \alpha (\cos \alpha + \varepsilon)}{1+\varepsilon \cos \alpha} = \frac{1}{\varepsilon} \sin^2 \alpha + \left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\sin^2 \alpha}{1+\varepsilon \cos \alpha}$
- $\frac{\sin^2 \alpha}{1+\varepsilon \cos \alpha} = \frac{1-\cos^2 \alpha}{1+\varepsilon \cos \alpha} = 1 - \cos \alpha \frac{\varepsilon + \cos \alpha}{1+\varepsilon \cos \alpha}$
- $\frac{\cos \alpha (\varepsilon + \cos \alpha)}{1+\varepsilon \cos \alpha} = \frac{1}{\varepsilon} \cos \alpha + \left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\cos \alpha}{1+\varepsilon \cos \alpha}$

(41)

$$\bullet \frac{\cos \alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} = \frac{\left(\cos \alpha + \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\varepsilon}}{1 + \varepsilon \cos \alpha} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \right)$$

Intégrons chacun des termes ; nous obtenons,

$$\int_0^{\alpha^*} \frac{1}{\varepsilon} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2\varepsilon} \left(\alpha^* - \frac{\sin 2\alpha^*}{2} \right) \quad (42)$$

$$\int_0^{\alpha^*} \frac{1}{\varepsilon} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{1}{\varepsilon} \sin \alpha^*$$

Pour calculer la dernière intégrale, effectuons le changement de variable de Sommerfeld classique,

$$\cos \alpha = \frac{\cos \beta - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \beta}$$

$$d\alpha = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \cos \beta} d\beta \quad (43)$$

$$1 + \varepsilon \cos \alpha = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \beta}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0, \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos \beta = 1 & \beta = 0 \\ \alpha^* = \arccos(-\varepsilon) \Leftrightarrow \cos \beta = 0 & \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (44)$$

$$\int_0^{\alpha^*} \frac{d\alpha}{1 + \varepsilon \cos \alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \varepsilon \cos \beta}{1 - \varepsilon^2} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \cos \beta} d\beta = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (45)$$

Rassemblons chacun des termes, nous obtenons,

$$\Gamma = \frac{1}{2\varepsilon} \left(\pi + \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} (1 - \varepsilon^2) \left\{ \sqrt{1 - \varepsilon^2} \left(1 + \frac{\pi}{2\varepsilon} \right) - \frac{\pi}{\varepsilon} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\pi + \sqrt{\frac{h_0}{R}} \right) + \frac{h_0}{R} \left(\sqrt{\frac{h_0}{R}} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) - \pi \right) \quad (46)$$

$$\approx \frac{\pi}{2}$$

Finalement,

$$I \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{R}{h_0} \right)^{3/2} \quad (47)$$

et

$$w \approx \frac{3\pi}{2} \frac{P}{Eb} \left(\frac{R}{h_0} \right)^{3/2} \quad (48)$$

Cette dernière expression mesure la contribution de la flexion.

2) Contribution de l'effort tranchant

Le déplacement localisé vaut,

$$\frac{dw}{dx} = \frac{P}{5Eb} = \frac{6P}{5Eb} \quad (49)$$

Le déplacement,

$$w = \frac{6P}{5Eb} \int_{-R}^R \frac{dx}{h} = \frac{6\pi}{5} \frac{P}{Eb} \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (50)$$

Ce déplacement est équivalent à la contribution de l'effort tranchant.

La flexion est largement prépondérante. Nous négligerons l'effet de l'effort tranchant. La rigidité en cisaillement technologique se ramène à

$$\frac{P}{w} \approx \frac{2}{3\pi} Eb \left(\frac{h_0}{R} \right)^{3/2} \quad (51)$$

G. Déplacement de l'extrémité du col

On se propose, ici, de calculer le déplacement de l'extrémité du col sous l'influence d'un moment de flexion. Ceci permettra d'obtenir des informations sur la position du centre de rotation du col.

On a le gradient de l'angle de rotation dans la direction x,

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{12M}{Eb h^3} \quad (52)$$

et le déplacement global,

$$w = \int_{-R}^R \alpha \, dx = [\alpha]_{-R}^R - \int_{-R}^R x \frac{d\alpha}{dx} dx = \alpha(R) \cdot R - \int_{-R}^R x \frac{d\alpha}{dx} dx \quad (53)$$

Résolvons cette équation. On connaît (16),

$$\alpha(R) \cdot R = \frac{9\pi}{2Eb} M \frac{R^{3/2}}{h_0^{5/2}} \quad (54)$$

Calculons,

$$\int_{-R}^R x \frac{d\alpha}{dx} dx = \frac{3M\varepsilon^3}{EbR} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} d\varphi = \frac{3M\varepsilon^3}{EbR} \cdot I \quad (55)$$

$$I = \int_0^{\alpha^*} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon (1 + \varepsilon \cos \alpha)^3}{1 + \varepsilon \cos \alpha (1 + \varepsilon \cos \alpha)^3} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon \cos \alpha)} d\alpha$$

$$= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^2} \int_0^{\alpha^*} \sin \alpha (\cos \alpha + \varepsilon) d\alpha$$

$$= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^2} \left[\frac{\sin^2 \alpha^*}{2} + \varepsilon (1 - \cos \alpha^*) \right] \quad (56)$$

$$= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^2} \left[\frac{1}{2} (1 + \varepsilon^2) + \varepsilon \right]$$

$$\approx 2 \frac{R^2}{h_0^2}$$

On a donc,

$$\int_{-R}^R \alpha \frac{d\alpha}{dx} dx = \frac{6M\varepsilon^3}{EbR} \frac{R^2}{h_0^2} \approx \frac{6M}{Eb} \frac{R}{h_0^2} \quad (57)$$

Au total,

$$w = \frac{M}{Eb} \frac{R^{3/2}}{h_0^{5/2}} \left[\frac{9\pi}{2} - 6\sqrt{\frac{h_0}{R}} \right] \quad (58)$$

On constate que le grand terme est $\alpha(R) \cdot R$ dans l'expression (53), c'est-à-dire que la rotation se fait à $O\left(\sqrt{\frac{h_0}{R}}\right)$ près autour du centre du col.

III. COEFFICIENTS CORRECTEURS

Les équations obtenues précédemment sont valables tant que le rapport h_0/R reste proche de zéro. Ce qui signifie que, soit l'épaisseur h_0 doit être très petite, soit le rayon R doit être très grand. En pratique, cependant, l'épaisseur h_0 peut atteindre des valeurs significatives par rapport au rayon. Ceci peut arriver pour des questions de fabrication (h_0 sera alors limité inférieurement) ou d'encombrement (R sera, lui, limité supérieurement), lorsque la fonction du col le permet. Ainsi, le rapport h_0/R pourrait atteindre des valeurs telles que 0,5.

Nous sommes alors devant un cas pour lequel les équations asymptotiques ne sont plus valables rigoureusement. Nous allons montrer que nous pouvons aisément les conserver, par l'application de coefficients correcteurs uniquement fonctions du rapport h_0/R .

Ces coefficients correcteurs seront déduits des équations de la théorie complète, avant leurs simplifications pour obtenir les formes asymptotiques. Il est bien entendu que ces coefficients doivent tendre vers un lorsque le rapport h_0/R tend vers zéro.

A. Rigidité en flexion

Rappelons l'équation complète en flexion,

$$\alpha = \frac{12M}{Eb} \frac{\varepsilon^3}{4R^2} I \quad (59)$$

avec $I = f\left(\frac{h_0}{R}\right)$, donnée par l'équation (10).

La raideur en flexion est alors mesurée par

$$\frac{M}{\alpha} = \frac{Eb}{3} \frac{R^2}{\varepsilon^3 I} \quad (60)$$

Le coefficient correcteur se mesure alors par le rapport entre les raideurs complète et asymptotique,

$$K_1 = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{\varepsilon^3 I} \left(\frac{R}{h_0}\right)^{5/2} \quad (61)$$

Evaluons numériquement chacun des termes intervenant dans l'expression I , pour obtenir la valeur du coefficient correcteur.

TABLEAU I
COEFFICIENT CORRECTEUR K_1

h_0/R	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
K_1	1,0013	1,0025	1,0064	1,0129	1,0264	1,0683

Il reste à trouver une expression simple, faisant apparaître le rapport h_0/R uniquement. La figure 4 nous montre que l'évolution du coefficient est sensiblement linéaire. La recherche d'une droite de coefficient de corrélation le meilleur possible nous amène à l'expression simple suivante,

$$K_1 = 0,137 \frac{h_0}{R} + 1 \quad (62)$$

La figure 4 nous montre également cette droite.

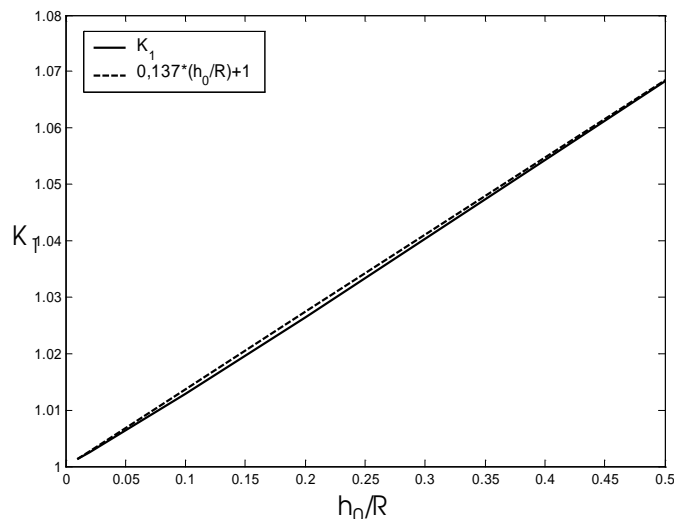


Fig. 4. Coefficient correcteur K_1

L'approximation nous donne une erreur maximale de 0,1%, comme le montre le tableau suivant.

TABLEAU II
ERREUR SUR K_1

h_0/R	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
K_1	1,0014	1,0027	1,0069	1,0137	1,0274	1,0685
Err (%)	0,01	0,02	0,05	0,08	0,1	0,02

Nous obtenons finalement l'équation corrigée suivante,

$$\frac{M}{\alpha} = K_1 \frac{2}{9\pi} \frac{Eb}{\sqrt{R}} \frac{h_0^{5/2}}{\varepsilon^3} \quad (63)$$

$$K_1 = 1 - \frac{1}{8} \frac{h_0}{R}$$

De même, pour calculer un angle limite,

$$\alpha = \frac{1}{K_1} \frac{3\pi \sigma}{4 E} \sqrt{\frac{R}{h_0}} \quad (64)$$

B. Rigidité en torsion

Il est clair que le coefficient correcteur K_1 est également valable dans le cas de la torsion.

C. Rigidité en extension

Nous avons obtenu l'équation complète suivante, en extension,

$$u = \frac{N}{Eb} \left(\frac{\alpha^*}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{\pi}{2} \right) \quad (65)$$

Le coefficient correcteur s'exprime par,

$$K_2^{-1} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{h_0}{R}} \left(\frac{\alpha^*}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{\pi}{2} \right) \quad (66)$$

Le tableau III nous donne la valeur de ce coefficient correcteur. La figure 5 en donne la représentation graphique.

TABLEAU III
COEFFICIENT CORRECTEUR K_2

h_0/R	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
K_2	1,085	1,122	1,198	1,287	1,422	1,714

L'équation trouvée, qui représente ce coefficient correcteur est la suivante,

$$K_2 = 1 + 0,97 \sqrt{\frac{h_0}{R}} \quad (67)$$

Cette équation est également représentée sur la figure 5.

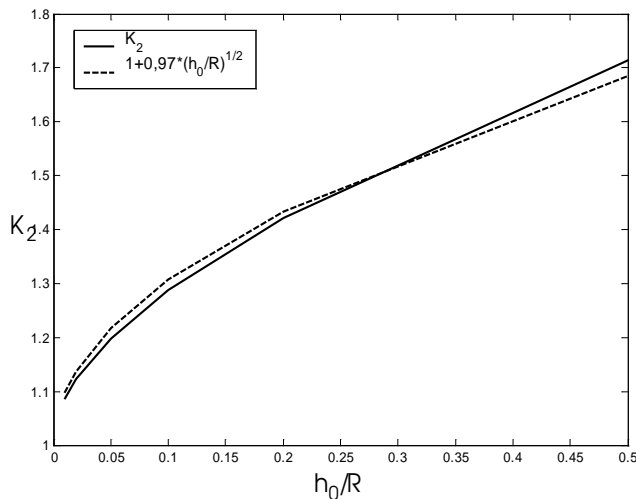


Fig. 5. Coefficient correcteur K_2

L'erreur maximale est de 1,6 %, comme le montre le tableau IV.

TABLEAU IV
ERREUR SUR K_2

h_0/R	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
K_2	1,097	1,137	1,217	1,307	1,434	1,686
Err (%)	1,1	1,4	1,6	1,5	0,8	1,6

L'expression finale de la rigidité en extension est la suivante,

$$\frac{N}{u} = K_2 \frac{1}{\pi} Eb \sqrt{\frac{h_0}{R}} \quad (68)$$

$$K_2 = 1 + 0,97 \sqrt{\frac{h_0}{R}}$$

D. Rigidité en flexion transverse

De nouveau, ici, le coefficient correcteur K_2 reste valable en flexion transverse.

E. Rigidité en cisaillement technologique

Il a été démontré que la flexion est largement prépondérante. Nous négligerons encore la contribution de l'effort tranchant.

L'équation complète en cisaillement technologique s'écrit,

$$w = \frac{3P}{Eb} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \Gamma \quad (69)$$

L'expression complète du coefficient correcteur est la suivante,

$$K_3 = \frac{\pi}{2} \frac{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}{\varepsilon^3 \Gamma} \left(\frac{R}{h_0} \right)^{3/2} \quad (70)$$

Le tableau V nous donne la valeur de ce coefficient correcteur. La figure 6 en donne la représentation graphique.

TABLEAU V
COEFFICIENT CORRECTEUR K_3

h_0/R	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
K_3	0,9829	0,9683	0,9250	0,8696	0,7760	0,5895

La meilleure équation trouvée pour coller à ces points est la suivante,

$$K_3 = \frac{1 + 0,5 \frac{h_0}{R}}{1 + 2,2 \frac{h_0}{R}} \quad (71)$$

également représentée sur la figure 6.

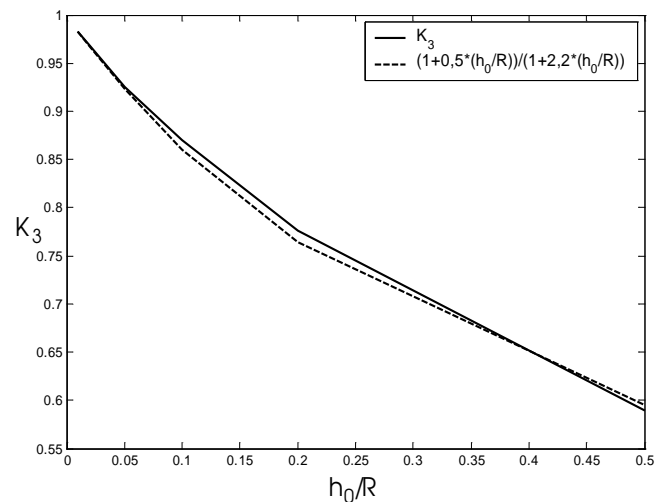


Fig. 6. Coefficient correcteur K_3

L'erreur maximale est de 1,6 %, comme le montre le tableau VI.

TABLEAU VI
ERREUR SUR K_3

h_0/R	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
K_3	0,9834	0,9674	0,9234	0,8607	0,7639	0,5952
Err (%)	0,05	0,09	0,17	1,03	1,56	0,97

L'équation est donc,

$$\frac{P}{w} = K_3 \frac{2}{3\pi} Eb \left(\frac{h_0}{R} \right)^{3/2}$$

$$K_3 = \frac{1 + 0,5 \frac{h_0}{R}}{1 + 2,2 \frac{h_0}{R}} \quad (72)$$

F. Déplacement de l'extrémité du col

Nous avons vu qu'à $O\left(\sqrt{\frac{h_0}{R}}\right)$ près, la rotation du système se fait autour du col. Ici, nous ne pouvons plus négliger le second terme de l'équation (58). Celui-ci représente, lorsque le rapport h_0/R atteint des valeurs telles que 0,5, jusqu'à 25% du premier terme, ce qui n'est plus négligeable.

Nous devons par conséquent, calculer un coefficient correcteur pour chaque termes de la relation (58).

Nous connaissons le premier coefficient grâce aux relations (16) et (63).

Le second terme de l'expression nous a donné,

$$w_2 = \frac{3M\varepsilon^3}{EbR} \cdot I \quad (73)$$

où I est donné par l'expression (56).

Le second coefficient se calcule donc par,

$$K_4 = \frac{\varepsilon^3}{2} \left(\frac{h_0}{R} \right)^2 I \quad (74)$$

Le tableau VII nous donne la valeur de ce coefficient correcteur. La figure 7 en donne la représentation graphique.

TABLEAU VII
COEFFICIENT CORRECTEUR K_4

h_0/R	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
K_4	0,9950	0,9901	0,9756	0,9524	0,9091	0,8000

La meilleure équation trouvée pour coller à ces points est la suivante,

$$K_4 = \frac{1}{1 + 0,5 \frac{h_0}{R}} \quad (75)$$

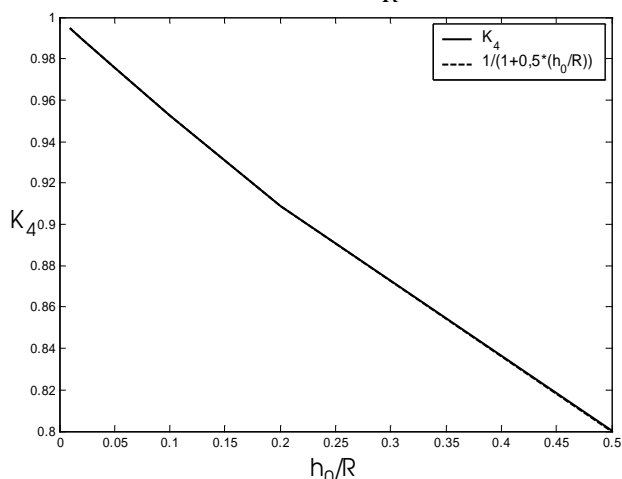


Fig. 7. Coefficient correcteur K_4

L'erreur maximale est de l'ordre de $10^{-11}\%$, comme le montre le tableau VIII.

TABLEAU VIII
ERREUR SUR K_4

h_0/R	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$
K_4	0,9950	0,9901	0,9756	0,9524	0,9091	0,800
Err (%)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

L'équation est donc,

$$w = \frac{M}{Eb} \frac{R^{3/2}}{h_0^{5/2}} \left[\frac{1}{K_1} \frac{9\pi}{2} - K_4 6 \sqrt{\frac{h_0}{R}} \right]$$

$$K_1 = 1 - \frac{1}{8} \frac{h_0}{R}, K_4 = \frac{1}{1 + 0,5 \frac{h_0}{R}} \quad (76)$$

IV. CONCLUSION

Nous avons montré qu'il était possible d'obtenir, dans le cas du col circulaire, des expressions analytiques décrivant leur comportement en tant que système élastique. Ceci grâce au célèbre changement de variable de Sommerfeld.

Ces expressions analytiques ne sont cependant pas commodes pour une étude de mécanisme comportant un certain nombre de ces cols. Nous avons donc dérivé des expressions asymptotiques simples permettant ce genre d'étude.

Les expressions asymptotiques obtenues ne sont pas encore suffisantes dans certains cas. Nous les avons corrigées pour tenir compte de leurs imperfections. Nous avons montré que les expressions déduites pour les coefficients correcteurs approchent de façon précise la correction idéale à apporter.

Ainsi, dans tout le domaine de variation du rapport épaisseur sur rayon, nous disposons maintenant d'un modèle simple du col circulaire, déduit analytiquement.

Nous pensons, par toutes ces considérations, que nous avons apporté une contribution intéressante à l'étude des cols circulaires employés comme articulation flexible.

RÉFÉRENCES

- [1] Simon Henein, *Conception des guidages flexibles*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Collection META, 2001.
- [2] L. Leloup, *Etude de la lubrification et calcul des paliers*, 2^{ème} édition, Sciences et Lettres, Liège, 1961
- [3] A. Sommerfeld, *Zur hydrodynamische Theorie des Schmiermittelreibung*, Zeitschrift für Math. und Physik, vol. 50, 1904