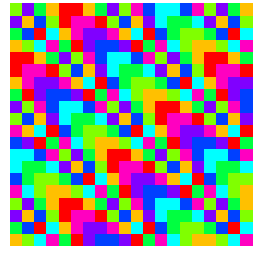
MATHÉMATIQUES ET CRYPTOGRAPHIE

Michel Rigo

Département de Mathématiques, Université de Liège
http://www.discmath.ulg.ac.be/



CRYPTOGRAPHIE. N. F.

Art d'écrire en chiffres ou d'une façon secrète quelconque.

Ensemble des principes, méthodes et techniques dont l'application assure le chiffrement et le déchiffrement des données, afin d'en préserver la confidentialité et l'authenticité.

EXEMPLE

"Mon numéro de carte VISA est le 1234-3552-1209-7633"

↓

"XFHEBBCASKOIUUSBCKKQHDGGDDSJQQIEUEU"

Applications

- Armée, gouvernement
- Banques, transactions bancaires, bancontact, ...
- Internet, paiement en ligne par carte de crédit, ...
- Vote électronique
- GSM (identification, code PIN)
- Télévision payante (à la carte)
- Signatures électroniques, recommandés électroniques, ...
- Mots de passe informatiques, ...

COMPTER MODULO. . .

“ 17 heures = 5 heures de l’après-midi ! ”

17=5. . .

Définition

Deux nombres x et y sont congrus modulo 12 s'ils ont même reste après division par 12. (Ou si leur différence est un multiple de 12.)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
⋮											

On peut alors calculer modulo 12

$$
\begin{aligned}
17 &= 5 \pmod{12} \quad \text{car} \quad 17 = 1.12 + 5 \\
7 + 9 &= 4 \pmod{12} \quad \text{car} \quad 16 = 1.12 + 4 \\
3.11 &= 9 \pmod{12} \quad \text{car} \quad 33 = 2.12 + 9 \\
5^2 &= 1 \pmod{12} \quad \text{car} \quad 25 = 2.12 + 1 \\
-3 &= 9 \pmod{12} \quad \text{car} \quad -3 = (-1).12 + 9
\end{aligned}
$$

UN PREMIER CRYPTOSYSTÈME

On peut compter modulo 2,3,4,. . . , 26, . . . , 723, . . .

$67 = 7 \pmod{20}$, $67 = 4 \pmod{21}$, $12+19 = 7 \pmod{24}$, . . .

A	B	C	· · ·	X	Y	Z
0	1	2	· · ·	23	24	25

CRYPTOSYSTÈME DE JULES CESAR

BONJOUR

$1, 14, 13, 9, 14, 20, 17$

$\downarrow +3$

$4, 17, 16, 12, 17, 23, 20$

ERQMRXU

HAL

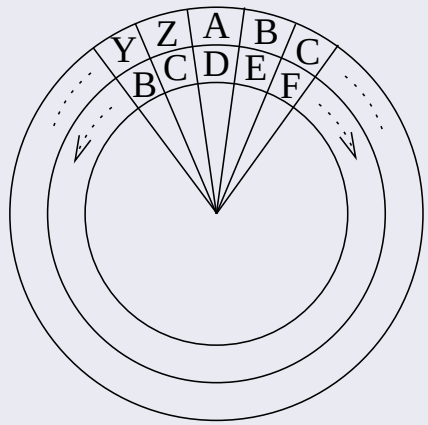
IBM

Remarque

Le cryptosystème de J.C. est un cryptosystème à clé secrète.

Des variantes

$x \mapsto x + k \pmod{26}, k = 1, 2, \ldots, 25$



D'autres variantes ?

$x \mapsto k.x \pmod{26}\ldots$

$x \mapsto 5.x \pmod{26}$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	5	10	15	20	25	4	9	14	19	24	3	8
A	F	K	P	U	Z	E	J	O	T	Y	D	I

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
13	18	23	2	7	12	17	22	1	6	11	16	21
N	S	X	C	H	M	R	W	B	G	L	Q	V

BONJOUR $\longrightarrow$ FSNTSWH

$x \mapsto 2.x \pmod{26}$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	0
A	C	E	G	I	K	M	O	Q	S	U	W	Y	A

O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
C	E	G	I	K	M	O	Q	S	U	W	Y

$$\texttt{OUI} \to 14, 20, 8 \xrightarrow{\times 2} 2, 14, 16 \to \texttt{COQ} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} \texttt{OUI} & \texttt{BUI} \\ \texttt{OUV} & \texttt{BUV} \\ \texttt{OHI} & \texttt{BHI} \\ \texttt{OHV} & \texttt{BHV} \end{array} \right.$$

Notion mathématique d'inverse...

Théorème

x possède un inverse modulo m, i.e, $x.y = 1 \pmod{m}$,
si et seulement si x est premier avec m.

Corollaire

Les "bons" multiplicateurs (modulo 26) sont

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,$$

$$15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25$$

CODAGE PAR BLOCS

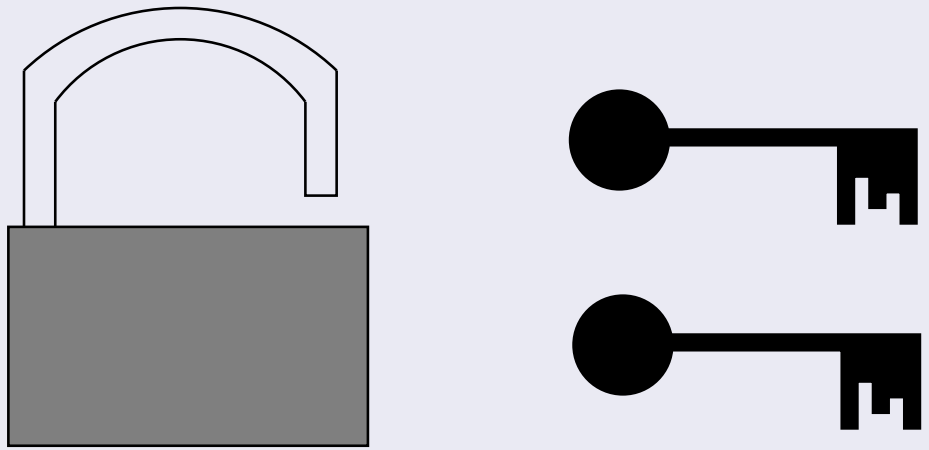
AA	AB	AC	$\cdots$	AX	AY	AZ
0	1	2	$\cdots$	23	24	25
BA	BB	BC	$\cdots$	BX	BY	BZ
26	27	28	$\cdots$	49	50	51
$\vdots$						$\vdots$
ZA	ZB	ZC	$\cdots$	ZX	ZY	ZZ
650	651	652	$\cdots$	673	674	675

modulo $26^2 = 676$

Clé secrète vs. clé publique

Cryptosystème à clé secrète

Alice & Bob : un jeu de 2 clés identiques

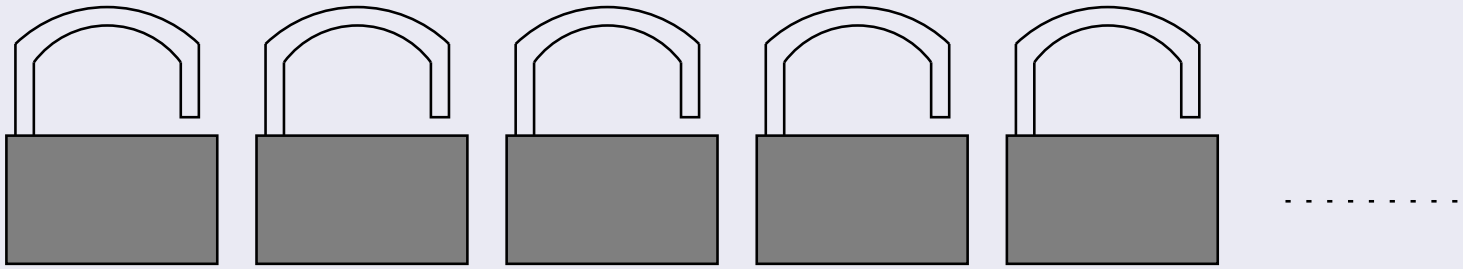


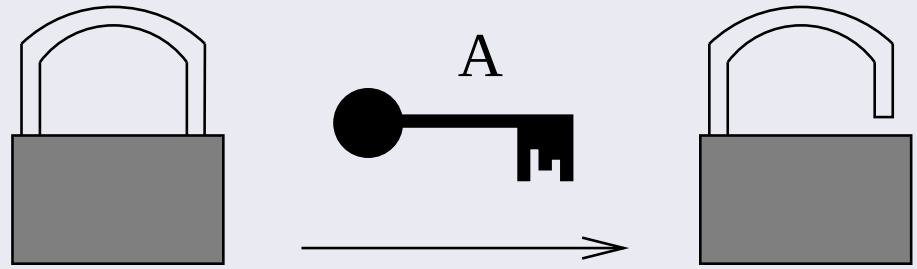
Inconvénient

Alice & Bob doivent échanger la clé...

Cryptosystème à clé publique

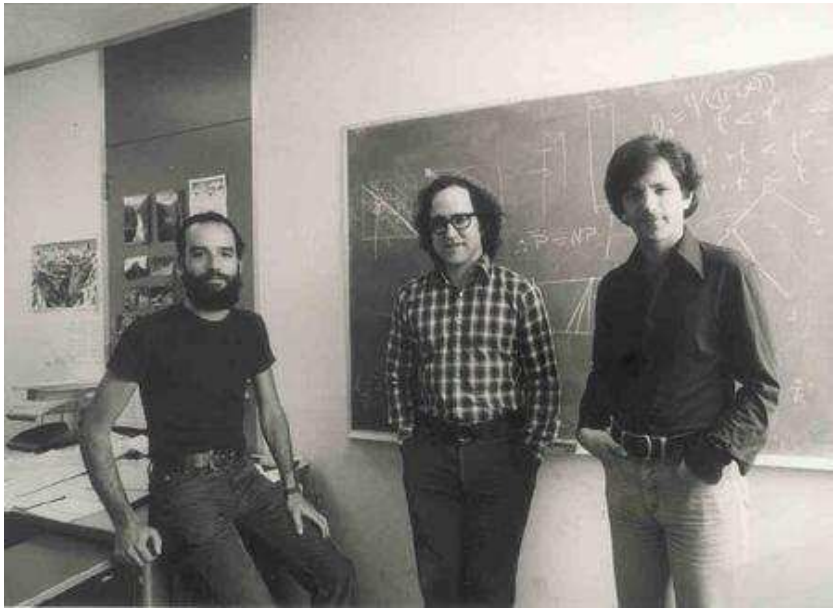
Alice produit des cadenas qu'elle seule pourra ouvrir !





RSA

Le RSA est un exemple de cryptosystème à clé publique



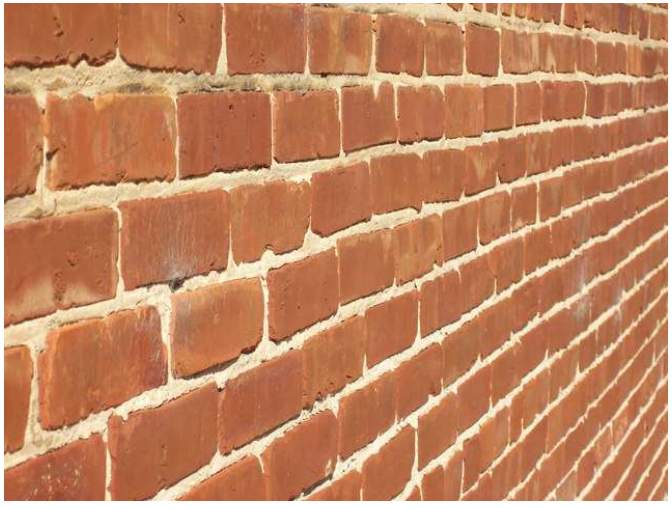
Ron **R**ivest, Adi **S**hamir et Leonard **A**dleman (1977)

Les nombres premiers

2	~~12~~	~~22~~	~~32~~	~~42~~	~~52~~
3	13	23	~~33~~	43	53
~~4~~	~~14~~	~~24~~	~~34~~	~~44~~	~~54~~
5	~~15~~	~~25~~	~~35~~	~~45~~	~~55~~
~~6~~	~~16~~	~~26~~	~~36~~	~~46~~	~~56~~
7	17	~~27~~	37	47	~~57~~
~~8~~	~~18~~	~~28~~	~~38~~	~~48~~	~~58~~
~~9~~	19	29	~~39~~	~~49~~	59
~~10~~	~~20~~	~~30~~	~~40~~	~~50~~	~~60~~
11	~~21~~	31	41	~~51~~	61

Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout nombre entier se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme produit de nombres premiers.



$$84 = 2^2.3.7$$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, . . .

ALICE CONSTRUIT "SON" RSA

- Alice choisit p et q.
- Elle calcule le produit $n = p.q$
- Elle calcule $\varphi(n) = (p-1).(q-1)$
- Alice choisit e et d tels que $d.e = 1 \mod \varphi(n)$. Pour ce faire, elle choisit e tel que

$$1 < e < \varphi(n) \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(e, \varphi(n)) = 1.$$

$$\boxed{y = x^e \mod n}$$

$$\boxed{y^d \mod n = x}$$

$p_{1100} \times p_{1000}$ $\quad 8831 \times 7919 = ?$

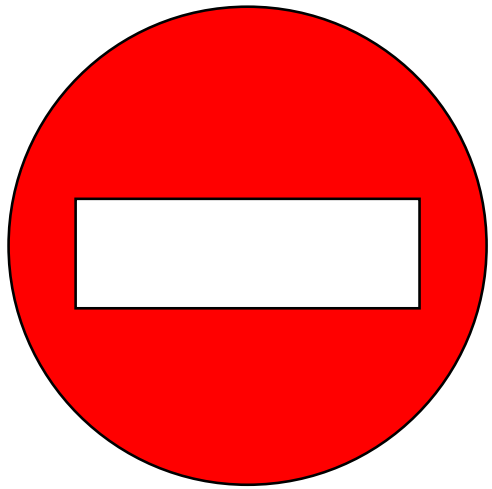
				8	8	3	1
$\times$				7	9	1	9
			7	9	4	7	9
			8	8	3	1	
	7	9	4	7	9		
6	1	8	1	7			
6	9	9	3	2	6	8	9

$$103724581 = ? \times ?$$

divisible par 2 ? NON
divisible par 3 ? NON
divisible par 5 ? NON
divisible par 7 ? NON
$\vdots$
divisible par 9733 ? OUI !

$$103724581 = 9733 \times 10657 \qquad p_{1200} \times p_{1300}$$

Principe d'une fonction à sens unique



Si on dispose de n et e, il est (supposé) très difficile de

- retrouver p et q
- retrouver d.

FONCTION INDICATRICE D'EULER

$\varphi(n)$ compte le nombre de nombres $< n$ et premiers avec n.

$\varphi(2) = 1$	1	$\varphi(5) = 4$	$1, 2, 3, 4$
$\varphi(3) = 2$	$1, 2$	$\varphi(6) = 2$	$1, 5$
$\varphi(4) = 2$	$1, 3$	$\varphi(7) = 6$	$1, 2, 3, 4, 5, 6$

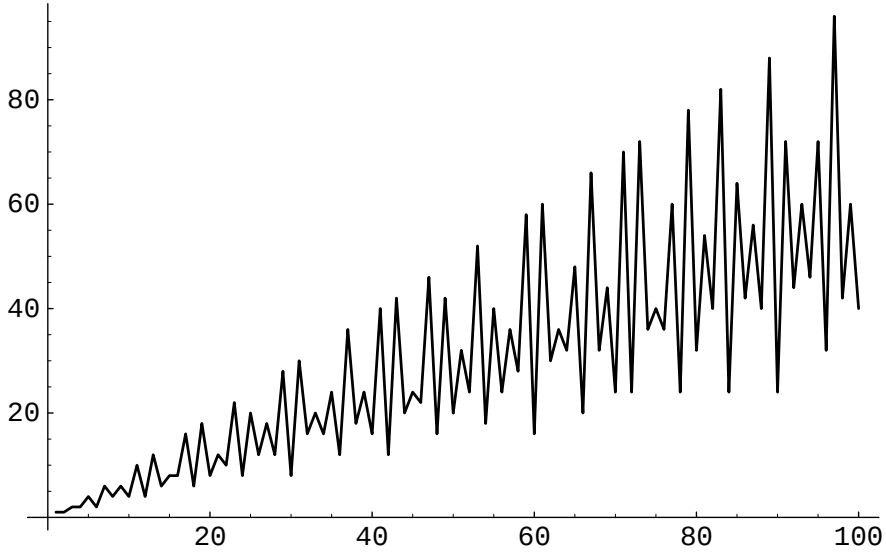
THÉORÈME D'EULER

Soient $n \geq 2$ un entier et a un entier premier avec n, alors

$$\boxed{a^{\varphi(n)} = 1 \pmod{n}.}$$

En effet, si x est premier avec n, alors

$$y^d = x^{ed} = x^{1+k\varphi(n)} = x.x^{k\varphi(n)} = x.(x^{\varphi(n)})^k = x.1 \pmod{n}.$$


80
60
40
20
20
40
60
80
100

Un mini RSA

$$p = 11,\ q = 23,\ n = p.q = 253,\ e = 3.$$

Puisque $220 = 3.73 + 1, \quad 3.(-73) + 220 = 1$ et

$$d = -73 = 147 \mod 220.$$

Alice publie $k = (3, 253)$.
Si Bob veut envoyer le texte clair $x = 165$ à Alice, il calcule

$$y = 165^3 \mod 253 = 110.$$

Si Alice reçoit le message $y = 110$, il lui suffit de calculer

$$110^{147} = 165 \mod 253.$$

Le RSA est-il sûr ?

$p, q \sim 2^{512}$

$$p, q \longrightarrow n = p \times q \qquad \text{facile}$$
$$n \not\longrightarrow p, q \qquad \textbf{supposé} \text{ difficile}$$

RSA Challenge number RSA-640, factorisé le 5/11/2005
plusieurs mois sur des centaines d'ordinateurs en réseau !

3107418240490043721350750035888567930037346022842727545720
1619488232064405180815045563468296717232867824379162728380
3341547107310850191954852900733772482278352574238645401469
17366024776523466 09

Factorisation naïve

$$n \sim 2^{1024} \sim 10^{300}$$

tous les nombres impairs jusqu'à $\sqrt{n} \sim 10^{150}$

Supposons tester 10^{10} diviseurs à la seconde...

Temps nécessaire : $\frac{1}{2}10^{140} \sim 5.10^{139}$ secondes !

Age de l'univers : 15.10^{9} années $\sim 5.10^{17}$ secondes !

Remarque

La sécurité du RSA dépend donc des avancées de la recherche en mathématique.

Remarque

La construction même du RSA repose sur un théorème (Euler) de théorie des nombres.

pictures taken from `http ://www.morguefile.com/` id : 142947, 135868, 101161, 142562, 139702