Quantifications équivariantes

Fabian Radoux

Reims, 5 Novembre 2013

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.
  Exemple : Si (M, g) variété pseudo-Riemannienne, $\mathcal{M} = T^*M$ avec les coordonnées (x^i, p_i), énergie cinétique : $\frac{1}{2m} \sum_{ij} \mathrm{g}^{ij} p_i p_j$.

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.
  Exemple : Si (M, g) variété pseudo-Riemannienne, $\mathcal{M} = T^*M$ avec les coordonnées (x^i, p_i), énergie cinétique : $\frac{1}{2m} \sum_{ij} \mathrm{g}^{ij} p_i p_j$.
- Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.
  Exemple : Si (M, g) variété pseudo-Riemannienne, $\mathcal{M} = T^*M$ avec les coordonnées (x^i, p_i), énergie cinétique : $\frac{1}{2m}\sum_{ij} \mathrm{g}^{ij} p_i p_j$.
- Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
  Exemple : $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(T^*M)$.

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.
  Exemple : Si (M, g) variété pseudo-Riemannienne, $\mathcal{M} = T^*M$ avec les coordonnées (x^i, p_i), énergie cinétique : $\frac{1}{2m}\sum_{ij} \mathrm{g}^{ij} p_i p_j$.
- Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
  Exemple : $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(T^*M)$.
- Problème de Dirac : trouver une bijection $Q : \mathcal{C}^\infty(T^*M) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.
  Exemple : Si (M, g) variété pseudo-Riemannienne, $\mathcal{M} = T^*M$ avec les coordonnées (x^i, p_i), énergie cinétique : $\frac{1}{2m}\sum_{ij} \mathrm{g}^{ij} p_i p_j$.
- Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
  Exemple : $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(T^*M)$.
- Problème de Dirac : trouver une bijection $Q : \mathcal{C}^\infty(T^*M) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
- Première réponse au problème de Dirac : préquantification Q.

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.
  Exemple : Si (M, g) variété pseudo-Riemannienne, $\mathcal{M} = T^*M$ avec les coordonnées (x^i, p_i), énergie cinétique : $\frac{1}{2m}\sum_{ij} \mathrm{g}^{ij} p_i p_j$.
- Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
  Exemple : $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(T^*M)$.
- Problème de Dirac : trouver une bijection $Q : \mathcal{C}^\infty(T^*M) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
- Première réponse au problème de Dirac : préquantification Q.
- Réduction de $\mathcal{H}$, $\mathrm{L}^2(T^*M)$ est remplacé par $\mathrm{L}^2(M)$.

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.
  Exemple : Si (M, g) variété pseudo-Riemannienne, $\mathcal{M} = T^*M$ avec les coordonnées (x^i, p_i), énergie cinétique : $\frac{1}{2m} \sum_{ij} \mathrm{g}^{ij} p_i p_j$.
- Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
  Exemple : $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(T^*M)$.
- Problème de Dirac : trouver une bijection $Q : \mathcal{C}^\infty(T^*M) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
- Première réponse au problème de Dirac : préquantification Q.
- Réduction de $\mathcal{H}$, $\mathrm{L}^2(T^*M)$ est remplacé par $\mathrm{L}^2(M)$.
- L'observable f est quantifiable si $Q(f)$ préserve $\mathrm{L}^2(M)$.

Introduction

- Observables classiques : fonctions sur une variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$.
  Exemple : Si (M, g) variété pseudo-Riemannienne, $\mathcal{M} = T^*M$ avec les coordonnées (x^i, p_i), énergie cinétique : $\frac{1}{2m} \sum_{ij} \mathrm{g}^{ij} p_i p_j$.
- Observables quantiques : opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
  Exemple : $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(T^*M)$.
- Problème de Dirac : trouver une bijection $Q : \mathcal{C}^\infty(T^*M) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
- Première réponse au problème de Dirac : préquantification Q.
- Réduction de $\mathcal{H}$, $\mathrm{L}^2(T^*M)$ est remplacé par $\mathrm{L}^2(M)$.
- L'observable f est quantifiable si $Q(f)$ préserve $\mathrm{L}^2(M)$.
- Espace des observables quantifiables : $\mathrm{Pol}_{\leqslant 1}(T^*M)$.

- Quantification géométrique Q_G : $Q_G = Q|_{\mathrm{Pol}_{\leqslant 1}(T^*M)}$,

$$Q_G(X^i(x)p_i + A(x)) = \frac{\hbar}{i} X^i(x)\partial_i + A(x).$$

- Quantification géométrique Q_G : $Q_G = Q|_{\mathrm{Pol}_{\leqslant 1}(T^*M)}$,

$$Q_G(X^i(x)p_i + A(x)) = \frac{\hbar}{i} X^i(x)\partial_i + A(x).$$

- Est-il possible d'étendre la quantification géométrique à $\mathrm{Pol}(T^*M) \cong \mathcal{S}(M)$?

- Quantification géométrique Q_G : $Q_G = Q|_{\mathrm{Pol}_{\leqslant 1}(T^*M)}$,

$$Q_G(X^i(x)p_i + A(x)) = \frac{\hbar}{i}X^i(x)\partial_i + A(x).$$

- Est-il possible d'étendre la quantification géométrique à $\mathrm{Pol}(T^*M) \cong \mathcal{S}(M)$?
- Cette prolongation est-elle unique ?

- Quantification géométrique Q_G : $Q_G = Q|_{\mathrm{Pol}_{\leqslant 1}(T^*M)}$,

$$Q_G(X^i(x)p_i + A(x)) = \frac{\hbar}{i}X^i(x)\partial_i + A(x).$$

- Est-il possible d'étendre la quantification géométrique à $\mathrm{Pol}(T^*M) \cong \mathcal{S}(M)$?
- Cette prolongation est-elle unique ?
- Est-il possible de rétablir l'unicité ?

- Il n'existe pas de quantification naturelle :
  $\nexists Q : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ telle que

  $$\Phi^*(Q(S)) = Q(\Phi^* S)$$

  pour tout difféomorphisme local Φ.

- Il n'existe pas de quantification naturelle :
  $\nexists Q : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ telle que
  $$\Phi^*(Q(S)) = Q(\Phi^* S)$$
  pour tout difféomorphisme local Φ.
- Par exemple : Q_{aff} défini par
  $$Q_{\mathrm{aff}}(S^{i_1\cdots i_k}\partial_{i_1} \vee \cdots \vee \partial_{i_k}) = S^{i_1\cdots i_k}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k}$$
  n'est pas bien défini : si J est le Jacobien du changement de variables $\bar{x}(x)$,

- Il n'existe pas de quantification naturelle :
$\nexists Q : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ telle que

$$\Phi^*(Q(S)) = Q(\Phi^* S)$$

pour tout difféomorphisme local Φ.

- Par exemple : Q_{aff} défini par

$$Q_{\mathrm{aff}}(S^{i_1\cdots i_k}\partial_{i_1} \vee \cdots \vee \partial_{i_k}) = S^{i_1\cdots i_k}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k}$$

n'est pas bien défini : si J est le Jacobien du changement de variables $\bar{x}(x)$,

$$\begin{aligned} S^{i_1\cdots i_k}\partial_{i_1} \vee \cdots \vee \partial_{i_k} &= S^{j_1\cdots j_k} J^{i_1}_{j_1}\cdots J^{i_k}_{j_k}\bar{\partial}_{i_1} \vee \cdots \vee \bar{\partial}_{i_k} \\ S^{i_1\cdots i_k}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k} &= S^{j_1\cdots j_k} J^{i_1}_{j_1}\cdots J^{i_k}_{j_k}\bar{\partial}_{i_1}\cdots\bar{\partial}_{i_k} + \cdots \end{aligned}$$

- Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.

- Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.
- Quantification équivariante Q : bijection linéaire Q : $\mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$.

- Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.
- Quantification équivariante Q : bijection linéaire Q : $\mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$.
- $Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S)\ \forall h \in \mathfrak{g}$, $h_x^* := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \exp(-th)x|_{t=0}$

- Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.
- Quantification équivariante Q : bijection linéaire $Q : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$.
- $Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S)\ \forall h \in \mathfrak{g}$, $h_x^* := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \exp(-th)x|_{t=0}$
- Idée : prendre G suffisamment petit pour avoir une quantification mais suffisamment grand pour avoir l'unicité.

- Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.
- Quantification équivariante Q : bijection linéaire Q : $\mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$.
- $Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S)\ \forall h \in \mathfrak{g}$, $h_x^* := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \exp(-th)x|_{t=0}$
- Idée : prendre G suffisamment petit pour avoir une quantification mais suffisamment grand pour avoir l'unicité.
- Cas projectif (P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$

- Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.
- Quantification équivariante Q : bijection linéaire $Q : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$.
- $Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S)\ \forall h \in \mathfrak{g},\ h_x^* := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \exp(-th)x|_{t=0}$
- Idée : prendre G suffisamment petit pour avoir une quantification mais suffisamment grand pour avoir l'unicité.
- Cas projectif (P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$
- $\mathbb{R}P^m$ est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^m$

- Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.
- Quantification équivariante Q : bijection linéaire Q : $\mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$.
- $Q(L_{h^*} S) = L_{h^*} Q(S)\ \forall h \in \mathfrak{g}$, $h_x^* := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \exp(-th)x|_{t=0}$
- Idée : prendre G suffisamment petit pour avoir une quantification mais suffisamment grand pour avoir l'unicité.
- Cas projectif (P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$
- $\mathbb{R}P^m$ est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^m$
- $X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R}) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$.

- Quantification équivariante : action d'un groupe de Lie G sur M : $\Phi : G \times M \to M$.
- Quantification équivariante Q : bijection linéaire Q : $\mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$ t.q. $\sigma(Q(S)) = S$ et t.q. $Q(\Phi_g^* S) = \Phi_g^* Q(S)\ \forall g \in G$.
- $Q(L_{h^*}S) = L_{h^*}Q(S)\ \forall h \in \mathfrak{g},\ h_x^* := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \exp(-th)x|_{t=0}$
- Idée : prendre G suffisamment petit pour avoir une quantification mais suffisamment grand pour avoir l'unicité.
- Cas projectif (P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $PGL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$
- $\mathbb{R}P^m$ est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^m$
- $X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R}) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$.
- $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S)\ \forall X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R})$.

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.
- $S^p \times S^q$ est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^{p+q}$

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1,q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.
- $S^p \times S^q$ est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^{p+q}$
- $X \in \mathfrak{so}(p+1,q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{p+q}$.

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1,q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.
- $S^p \times S^q$ est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^{p+q}$
- $X \in \mathfrak{so}(p+1,q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{p+q}$.
- $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S) \; \forall X \in \mathfrak{so}(p+1,q+1)$.

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.
- $S^p \times S^q$ est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^{p+q}$
- $X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{p+q}$.
- $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S) \ \forall X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$.
- Méthode des opérateurs de Casimir :
  $\mathfrak{l}$: Algèbre de Lie semi-simple pourvue d'une forme de Killing non-dégénérée K.

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.
- $S^p \times S^q$ est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^{p+q}$
- $X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{p+q}$.
- $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S)\ \forall X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$.
- Méthode des opérateurs de Casimir :
  $\mathfrak{l}$: Algèbre de Lie semi-simple pourvue d'une forme de Killing non-dégénérée K.
- (V, β) : représentation de $\mathfrak{l}$.

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1, q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.
- $S^p \times S^q$ est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^{p+q}$
- $X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{p+q}$.
- $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S) \ \forall X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$.
- Méthode des opérateurs de Casimir :
  $\mathfrak{l}$: Algèbre de Lie semi-simple pourvue d'une forme de Killing non-dégénérée K.
- (V, β) : représentation de $\mathfrak{l}$.
- $(u_i : i \leqslant n)$: base de $\mathfrak{l}$; $(u'_i : i \leqslant n)$ base Killing-duale $(K(u_i, u'_j) = \delta_{i,j})$.

- Cas conforme (C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko) :
- $SO(p+1,q+1)$ agit sur $S^p \times S^q$.
- $S^p \times S^q$ est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^{p+q}$
- $X \in \mathfrak{so}(p+1,q+1) \mapsto X^*$ champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{p+q}$.
- $\exists Q : L_X Q(S) = Q(L_X S)\ \forall X \in \mathfrak{so}(p+1,q+1)$.
- Méthode des opérateurs de Casimir :
  $\mathfrak{l}$: Algèbre de Lie semi-simple pourvue d'une forme de Killing non-dégénérée K.
- (V,β) : représentation de $\mathfrak{l}$.
- $(u_i : i \leqslant n)$: base de $\mathfrak{l}$; $(u_i' : i \leqslant n)$ base Killing-duale $(K(u_i,u_j') = \delta_{i,j})$.
- Opérateur de Casimir correspondant à (V,β) :

$$\sum_{i=1}^{n} \beta(u_i')\beta(u_i).$$

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: Opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: Opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: Opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: Opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!\ Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ parce que :

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: Opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ parce que :
  - $\sigma(\mathcal{L}(Q(S))) = \sigma(Q(L(S)) = L(S)$;

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: Opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ parce que :
  - $\sigma(\mathcal{L}(Q(S))) = \sigma(Q(L(S)) = L(S)$;
  - $\mathcal{C}(Q(L(S))) = \alpha Q(L(S))$, $\mathcal{C}(\mathcal{L}(Q(S))) = \alpha \mathcal{L}(Q(S))$.

- $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$ sont des représentations de $\mathfrak{g}$.
- C et $\mathcal{C}$: Opérateurs de Casimir de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$.
- Si $C(S) = \alpha S$ et $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$, alors $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$.
- Dans les situations non-critiques : si $C(S) = \alpha S$, alors $\exists!$ $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$, $\sigma(Q(S)) = S$.
- Dans ces conditions : $\mathcal{L}(Q(S)) = Q(L(S))$ parce que :
  - $\sigma(\mathcal{L}(Q(S))) = \sigma(Q(L(S)) = L(S)$;
  - $\mathcal{C}(Q(L(S))) = \alpha Q(L(S))$, $\mathcal{C}(\mathcal{L}(Q(S))) = \alpha \mathcal{L}(Q(S))$.
- Généralisation (F. Boniver, P. Mathonet) : algèbres IFFT $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$:

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$:
  1. Naturel : $\Phi^*(Q(\nabla)(S)) = Q(\Phi^*\nabla)(\Phi^*S)$ pour tout difféomorphisme local Φ

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$:
  1. Naturel : $\Phi^*(Q(\nabla)(S)) = Q(\Phi^*\nabla)(\Phi^*S)$ pour tout difféomorphisme local Φ
  2. Projectivement invariant : $Q(\nabla) = Q(\nabla')$ si $\nabla' = \nabla + \alpha \vee id$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$:
  1. Naturel : $\Phi^*(Q(\nabla)(S)) = Q(\Phi^*\nabla)(\Phi^*S)$ pour tout difféomorphisme local Φ
  2. Projectivement invariant : $Q(\nabla) = Q(\nabla')$ si $\nabla' = \nabla + \alpha \vee id$
- $\varphi_t^* Q(\nabla_0)(S) = Q(\varphi_t^*\nabla_0)(\varphi_t^* S)$, ∇_0 connexion plate de $\mathbb{R}^m$, φ_t flot de $X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R})$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$:
  1. Naturel : $\Phi^*(Q(\nabla)(S)) = Q(\Phi^*\nabla)(\Phi^*S)$ pour tout difféomorphisme local Φ
  2. Projectivement invariant : $Q(\nabla) = Q(\nabla')$ si $\nabla' = \nabla + \alpha \vee id$
- $\varphi_t^* Q(\nabla_0)(S) = Q(\varphi_t^*\nabla_0)(\varphi_t^* S)$, ∇_0 connexion plate de $\mathbb{R}^m$, φ_t flot de $X \in \mathfrak{sl}(m+1,\mathbb{R})$
- $\varphi_t^* Q(\nabla_0)(S) = Q(\nabla_0)(\varphi_t^* S)$ parce que $\varphi_t^*\nabla_0 \sim \nabla_0$ et Q projectivement invariant

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(\nabla) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$:
  1. Naturel : $\Phi^*(Q(\nabla)(S)) = Q(\Phi^*\nabla)(\Phi^* S)$ pour tout difféomorphisme local Φ
  2. Projectivement invariant : $Q(\nabla) = Q(\nabla')$ si $\nabla' = \nabla + \alpha \vee id$
- $\varphi_t^* Q(\nabla_0)(S) = Q(\varphi_t^*\nabla_0)(\varphi_t^* S)$, ∇_0 connexion plate de $\mathbb{R}^m$, φ_t flot de $X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R})$
- $\varphi_t^* Q(\nabla_0)(S) = Q(\nabla_0)(\varphi_t^* S)$ parce que $\varphi_t^*\nabla_0 \sim \nabla_0$ et Q projectivement invariant
- $L_X Q(\nabla_0)(S) = Q(\nabla_0)(L_X S)$ pour tout $X \in \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R})$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$:

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$:
  1. Naturel : $\Phi^*(Q(g)(S)) = Q(\Phi^* g)(\Phi^* S)$ pour tout difféomorphisme local Φ

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$:
  1. Naturel : $\Phi^*(Q(g)(S)) = Q(\Phi^* g)(\Phi^* S)$ pour tout difféomorphisme local Φ
  2. Conformément invariant : $Q(g) = Q(g')$ si $g' = fg$, $f > 0$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$:
  1. Naturel : $\Phi^*(Q(g)(S)) = Q(\Phi^* g)(\Phi^* S)$ pour tout difféomorphisme local Φ
  2. Conformément invariant : $Q(g) = Q(g')$ si $g' = fg$, $f > 0$
- $\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S)$, g_0 métrique canonique de $\mathbb{R}^m$, φ_t flot de $X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$:
  1. Naturel : $\Phi^*(Q(g)(S)) = Q(\Phi^* g)(\Phi^* S)$ pour tout difféomorphisme local Φ
  2. Conformément invariant : $Q(g) = Q(g')$ si $g' = fg$, $f > 0$
- $\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S)$, g_0 métrique canonique de $\mathbb{R}^m$, φ_t flot de $X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$
- $\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S)$ parce que $\varphi_t^* g_0 \sim g_0$ et Q conformément invariant

- Conjecture (P. Lecomte) : $Q(g) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$:
  1. Naturel : $\Phi^*(Q(g)(S)) = Q(\Phi^* g)(\Phi^* S)$ pour tout difféomorphisme local Φ
  2. Conformément invariant : $Q(g) = Q(g')$ si $g' = fg$, $f > 0$
- $\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(\varphi_t^* g_0)(\varphi_t^* S)$, g_0 métrique canonique de $\mathbb{R}^m$, φ_t flot de $X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$
- $\varphi_t^* Q(g_0)(S) = Q(g_0)(\varphi_t^* S)$ parce que $\varphi_t^* g_0 \sim g_0$ et Q conformément invariant
- $L_X Q(g_0)(S) = Q(g_0)(L_X S)$ pour tout $X \in \mathfrak{so}(p+1, q+1)$

Cas projectif, opérateurs différentiels agissant entre densités : méthode de M. Bordemann :

Cas projectif, opérateurs différentiels agissant entre densités : méthode de M. Bordemann :

- $M \mapsto \tilde{M}$: fibré de rang un au-dessus de M (fibré de Thomas)

Cas projectif, opérateurs différentiels agissant entre densités : méthode de M. Bordemann :

- $M \mapsto \tilde{M}$: fibré de rang un au-dessus de M (fibré de Thomas)
- Connexion ∇ sur $M \mapsto$ Connexion $\tilde{\nabla}$ sur $\tilde{M}$ associée à ∇ de manière naturelle et projectivement invariante (connexion de Thomas)

Cas projectif, opérateurs différentiels agissant entre densités : méthode de M. Bordemann :

- $M \mapsto \tilde{M}$: fibré de rang un au-dessus de M (fibré de Thomas)
- Connexion ∇ sur $M \mapsto$ Connexion $\tilde{\nabla}$ sur $\tilde{M}$ associée à ∇ de manière naturelle et projectivement invariante (connexion de Thomas)
- Symbole S et densité f sur $M \mapsto$ Symbole $\tilde{S}$ et densité $\tilde{f}$ sur $\tilde{M}$ associés à S et f de manière naturelle et projectivement invariante

Cas projectif, opérateurs différentiels agissant entre densités : méthode de M. Bordemann :

- $M \mapsto \tilde{M}$: fibré de rang un au-dessus de M (fibré de Thomas)
- Connexion ∇ sur $M \mapsto$ Connexion $\tilde{\nabla}$ sur $\tilde{M}$ associée à ∇ de manière naturelle et projectivement invariante (connexion de Thomas)
- Symbole S et densité f sur $M \mapsto$ Symbole $\tilde{S}$ et densité $\tilde{f}$ sur $\tilde{M}$ associés à S et f de manière naturelle et projectivement invariante
- $Q\widetilde{(\nabla)(S)}(f) = \tau(\tilde{\nabla})(\tilde{S})(\tilde{f})$ avec τ une quantification naturelle canonique

Questions

- Valeurs critiques de δ

Questions

- Valeurs critiques de δ
- Formule explicite

Questions

- Valeurs critiques de δ
- Formule explicite
- Unicité

Questions

- Valeurs critiques de δ
- Formule explicite
- Unicité
- Autres opérateurs différentiels

Questions

- Valeurs critiques de δ
- Formule explicite
- Unicité
- Autres opérateurs différentiels
- Cas conforme

Fibrés et connexions de Cartan

- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (P \to M)$

Fibrés et connexions de Cartan

- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (P \to M)$
- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$

Fibrés et connexions de Cartan

- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (P \to M)$
- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$
- $\omega_u : T_u P \to \mathfrak{g}$ bijection $\forall u \in P$

Fibrés et connexions de Cartan

- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (P \to M)$
- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$
- $\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g}$ bijection $\forall u \in P$
- $P \subset P^2M$, $p : P \to P_0 \subset P^1M$

Fibrés et connexions de Cartan

- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (P \to M)$
- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$
- $\omega_u : T_u P \to \mathfrak{g}$ bijection $\forall u \in P$
- $P \subset P^2 M$, $p : P \to P_0 \subset P^1 M$
- $\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^* T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$
  avec $H = G_0 \rtimes G_1$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$

Fibrés et connexions de Cartan

- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (P \to M)$
- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$
- $\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g}$ bijection $\forall u \in P$
- $P \subset P^2M$, $p : P \to P_0 \subset P^1M$
- $\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^*T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$ avec $H = G_0 \rtimes G_1$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$

Fibrés et connexions de Cartan

- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (P \to M)$
- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$
- $\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g}$ bijection $\forall u \in P$
- $P \subset P^2M,\ p : P \to P_0 \subset P^1M$
- $\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^*T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$
  avec $H = G_0 \rtimes G_1,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$
- $\omega \to \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)},\ e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$

Fibrés et connexions de Cartan

- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (P \to M)$
- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$
- $\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g}$ bijection $\forall u \in P$
- $P \subset P^2M,\ p : P \to P_0 \subset P^1M$
- $\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^*T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$
  avec $H = G_0 \rtimes G_1,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$
- $\omega \to \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)},\ e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$
- f G_0-équivariant$\Rightarrow \nabla^\omega f$ G_0-équivariant

Fibrés et connexions de Cartan

- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (P \to M)$
- $[\nabla]$ (ou $[g]$)$\mapsto (\omega : TP \to \mathfrak{g})$
- $\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g}$ bijection $\forall u \in P$
- $P \subset P^2M,\ p : P \to P_0 \subset P^1M$
- $\mathcal{C}^\infty(P_0, V)_{G_0} \ni T \mapsto p^*T \in \mathcal{C}^\infty(P, V)_H$
  avec $H = G_0 \rtimes G_1,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$
- $\omega \to \nabla^\omega(e_i) = L_{\omega^{-1}(e_i)},\ e_i \in \mathfrak{g}_{-1}$
- f G_0-équivariant$\Rightarrow \nabla^\omega f$ G_0-équivariant
- f G_1-équivariant$\not\Rightarrow \nabla^\omega f$ G_1-équivariant

Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

- $S \mapsto p^* S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$

Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

- $S \mapsto p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$
- $f \mapsto p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$

Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

- $S \mapsto p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$
- $f \mapsto p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$
- $\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$

Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

- $S \mapsto p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$
- $f \mapsto p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$
- $\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$
- Condition : $L_{h^*} Q(p^*S)(p^*f) = 0 \; \forall h \in \mathfrak{g}_1$

Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

- $S \mapsto p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$
- $f \mapsto p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$
- $\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i)L_{\omega^{-1}(e_i)}$
- Condition : $L_{h^*}Q(p^*S)(p^*f) = 0 \; \forall h \in \mathfrak{g}_1$
- $\langle p^*S, \nabla^{\omega^k}_s p^*f\rangle$ pas G_1-équivariant !

Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

- $S \mapsto p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$
- $f \mapsto p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$
- $\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$
- Condition : $L_{h^*} Q(p^*S)(p^*f) = 0 \; \forall h \in \mathfrak{g}_1$
- $\langle p^*S, \nabla^{\omega^k}_s p^*f \rangle$ pas G_1-équivariant !
- On ajoute des termes d'ordre inférieur en p^*f…

Le cas des densités (P. Mathonet, R.) :

- $S \mapsto p^*S \in \mathcal{C}^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_H$
- $f \mapsto p^*f \in \mathcal{C}^\infty(P, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_H$
- $\omega \to Div^\omega = \sum_i i(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}$
- Condition : $L_{h^*} Q(p^*S)(p^*f) = 0 \; \forall h \in \mathfrak{g}_1$
- $\langle p^*S, \nabla^{\omega^k}_s p^*f \rangle$ pas G_1-équivariant !
- On ajoute des termes d'ordre inférieur en p^*f...
- On trouve alors :

$$Q_M(\nabla, S)(f) = {p^*}^{-1}\left(\sum_{l=0}^{k} C_{k,l} \langle Div^{\omega^l} p^*S, \nabla^{\omega^{k-l}}_s p^*f \rangle\right),$$

$$C_{k,l} = \frac{(\lambda + \frac{k-1}{m+1}) \cdots (\lambda + \frac{k-l}{m+1})}{\gamma_{2k-1} \cdots \gamma_{2k-l}} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}, \forall l \geq 1, \; C_{k,0} = 1$$

Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.)

- Cas « plat » : si S est un symbole, $S \in C^\infty(\mathbb{R}^m, S^k\mathbb{R}^m \otimes gl(V_1, V_2))$.

Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.)

- Cas « plat » : si S est un symbole, $S \in C^\infty(\mathbb{R}^m, S^k\mathbb{R}^m \otimes gl(V_1, V_2))$.
- Cas « courbe » : si S est un symbole, $S \in C^\infty(P, S^k\mathbb{R}^m \otimes gl(V_1, V_2))_H$.

Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.)

- Cas « plat » : si S est un symbole, $S \in C^\infty(\mathbb{R}^m, S^k\mathbb{R}^m \otimes gl(V_1, V_2))$.
- Cas « courbe » : si S est un symbole, $S \in C^\infty(P, S^k\mathbb{R}^m \otimes gl(V_1, V_2))_H$.
- Cas « plat » : Quantification affine Q_{Aff} : si $S = \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha \otimes e_1^{\alpha_1} \vee \cdots \vee e_m^{\alpha_m}$, $Q_{Aff}(S) := \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha \partial_{x^1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x^m}^{\alpha_m}$.

Autres opérateurs différentiels et cas conforme (P. Mathonet, R.)

- Cas « plat » : si S est un symbole, $S \in C^\infty(\mathbb{R}^m, S^k\mathbb{R}^m \otimes gl(V_1, V_2))$.
- Cas « courbe » : si S est un symbole, $S \in C^\infty(P, S^k\mathbb{R}^m \otimes gl(V_1, V_2))_H$.
- Cas « plat » : Quantification affine Q_{Aff} : si $S = \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha \otimes e_1^{\alpha_1} \vee \cdots \vee e_m^{\alpha_m}$, $Q_{Aff}(S) := \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha \partial_{x^1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x^m}^{\alpha_m}$.
- Cas « courbe » : « Quantification affine » Q_ω : si $S = \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha \otimes e_1^{\otimes\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_m^{\otimes\alpha_m}$, $Q_\omega(S) := \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha \circ (L_{\omega^{-1}(e_1)})^{\alpha_1} \cdots (L_{\omega^{-1}(e_m)})^{\alpha_m}$.

- Cas « plat » : Application γ :
  $\mathcal{L}_{X^h} Q_{Aff}(S) = Q_{Aff}((L_{X^h} + \gamma(h))S)$.

- Cas « plat » : Application γ :
  $\mathcal{L}_{X^h} Q_{Aff}(S) = Q_{Aff}((L_{X^h} + \gamma(h))S)$.
- Cas « courbe » : Application γ' :
  $\mathcal{L}_{h^*} Q_\omega(S) = Q_\omega((L_{h^*} + \gamma'(h))S), \ \forall h \in \mathfrak{g}_1$.

- Cas « plat » : Application γ :
$\mathcal{L}_{X^h} Q_{Aff}(S) = Q_{Aff}((L_{X^h} + \gamma(h))S)$.
- Cas « courbe » : Application γ' :
$\mathcal{L}_{h^*} Q_\omega(S) = Q_\omega((L_{h^*} + \gamma'(h))S), \ \forall h \in \mathfrak{g}_1$.
- Cas « plat » : $\gamma(h)(x_1 \vee \cdots \vee x_k \otimes f) =$
$-\sum_{i=1}^k x_1 \vee \cdots (\hat{i}) \cdots \vee x_k \otimes (f \circ \rho_{1*}([h, x_i])) +$
$\sum_{i=1}^k \sum_{j>i} x_1 \vee \cdots (\hat{i}) \cdots \vee \underbrace{[[h, x_i], x_j]}_{(j)} \vee \cdots \vee x_k \otimes f$
- Cas « courbe » : $\gamma'(h)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \otimes f) =$
$-\sum_{i=1}^k x_1 \otimes \cdots (\hat{i}) \cdots \otimes x_k \otimes (f \circ \rho_{1*}([h, x_i])) +$
$\sum_{i=1}^k \sum_{j>i} x_1 \otimes \cdots (\hat{i}) \cdots \otimes \underbrace{[[h, x_i], x_j]}_{(j)} \otimes \cdots \otimes x_k \otimes f$

- Cas « plat » : opérateurs de Casimir C et $\mathcal{C}$:
  $C = -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
  $\mathcal{C} = C - 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)\partial_{x^i}$.

- Cas « plat » : opérateurs de Casimir C et $\mathcal{C}$:
  $C = -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
  $\mathcal{C} = C - 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)\partial_{x^i}$.
- Cas « courbe » : « opérateurs de Casimir » C^ω et $\mathcal{C}^\omega$:
  $C^\omega := -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
  $\mathcal{C}^\omega := C^\omega - 2\sum_i \gamma'(\epsilon^i)L_{\omega^{-1}(e_i)}$.

- Cas « plat » : opérateurs de Casimir C et $\mathcal{C}$:
  $C = -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
  $\mathcal{C} = C - 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)\partial_{x^i}$.
- Cas « courbe » : « opérateurs de Casimir » C^ω et $\mathcal{C}^\omega$:
  $C^\omega := -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
  $\mathcal{C}^\omega := C^\omega - 2\sum_i \gamma'(\epsilon^i)L_{\omega^{-1}(e_i)}$.
- Cas « plat » : Quantification de S t.q. $C(S) = \alpha S$:
  $Q_{Aff}(Q(S))$, $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et « tête »de $Q(S) = S$.

- Cas « plat » : opérateurs de Casimir C et $\mathcal{C}$:
  $C = -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
  $\mathcal{C} = C - 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)\partial_{x^i}$.
- Cas « courbe » : « opérateurs de Casimir » C^ω et $\mathcal{C}^\omega$:
  $C^\omega := -\frac{1}{2}\rho_*(\mathcal{E}) + \frac{1}{2m}\rho_*(\mathcal{E})^2 + \sum_j \rho_*(A_j)\rho_*(A_j^*)$,
  $\mathcal{C}^\omega := C^\omega - 2\sum_i \gamma'(\epsilon^i)L_{\omega^{-1}(e_i)}$.
- Cas « plat » : Quantification de S t.q. $C(S) = \alpha S$:
  $Q_{Aff}(Q(S))$, $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et « tête »de $Q(S) = S$.
- Cas « courbe » : Quantification de S t.q. $C^\omega(S) = \alpha S$:
  $Q_\omega(Q(S))$, $Q(S)$ t.q. $\mathcal{C}^\omega(Q(S)) = \alpha Q(S)$ et « tête »de $Q(S) = S$.

- Cas « plat » : $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ parce que $[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0$ et $[C, L] = 0$.

- Cas « plat » : $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ parce que $[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0$ et $[C, L] = 0$.
- Cas « courbe » : $(L_{h^*} + \gamma'(h)) \circ Q = Q \circ L_{h^*}$ parce que $[\mathcal{C}^\omega, L_{h^*} + \gamma'(h)] = 0$ et $[C^\omega, L_{h^*}] = 0$.

- Cas « plat » : $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ parce que $[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0$ et $[C, L] = 0$.
- Cas « courbe » : $(L_{h^*} + \gamma'(h)) \circ Q = Q \circ L_{h^*}$ parce que $[\mathcal{C}^\omega, L_{h^*} + \gamma'(h)] = 0$ et $[C^\omega, L_{h^*}] = 0$.
- Dans le cas « courbe », $\mathcal{L}_{h^*} Q_\omega(Q(S)) = Q_\omega((L_{h^*} + \gamma'(h))Q(S)) = 0$ si $L_{h^*} S = 0$.

- Cas « plat » : $\mathcal{L} \circ Q = Q \circ L$ parce que $[\mathcal{C}, \mathcal{L}] = 0$ et $[C, L] = 0$.
- Cas « courbe » : $(L_{h^*} + \gamma'(h)) \circ Q = Q \circ L_{h^*}$ parce que $[\mathcal{C}^\omega, L_{h^*} + \gamma'(h)] = 0$ et $[C^\omega, L_{h^*}] = 0$.
- Dans le cas « courbe », $\mathcal{L}_{h^*} Q_\omega(Q(S)) = Q_\omega((L_{h^*} + \gamma'(h))Q(S)) = 0$ si $L_{h^*} S = 0$.
- Si S est G_0-équivariant, $Q(S)$ est G_0-équivariant et $Q_\omega(Q(S))$ préserve la G_0-équivariance.

- Remarque : cette méthode permet de trouver des applications naturelles

$$Q : \{\text{réductions de } P^2M \text{ à } H\} \to \{\text{quantifications sur } M\},$$

où P^2M est le fibré des repères du second ordre et où H est un groupe de Lie correspondant à une algèbre IFFT $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.

- Remarque : cette méthode permet de trouver des applications naturelles

  $$Q : \{\text{réductions de } P^2M \text{ à } H\} \to \{\text{quantifications sur } M\},$$

  où P^2M est le fibré des repères du second ordre et où H est un groupe de Lie correspondant à une algèbre IFFT $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.
- Quantifications équivariantes pour structures AHS (A. Cap, J. Silhan).

- Remarque : cette méthode permet de trouver des applications naturelles

  $$Q : \{\text{réductions de } P^2M \text{ à } H\} \to \{\text{quantifications sur } M\},$$

  où P^2M est le fibré des repères du second ordre et où H est un groupe de Lie correspondant à une algèbre IFFT $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.
- Quantifications équivariantes pour structures AHS (A. Cap, J. Silhan).
- Quantifications conformément invariantes (J. Silhan)

Formules explicites

- Cas projectif, opérateurs différentiels agissant entre densités :

$$Q(\nabla, S)(f) = \langle S, \nabla_s^{\omega^k} f \rangle$$
$$+ \sum_{l=1}^{k} \frac{(\lambda + \frac{k-1}{m+1}) \cdots (\lambda + \frac{k-l}{m+1})}{\gamma_{2k-1} \cdots \gamma_{2k-l}} \left(\begin{array}{c} k \\ l \end{array} \right) \langle Div^{\omega^l} S, \nabla_s^{\omega^{k-l}} f \rangle.$$

Formules explicites

- Cas projectif, opérateurs différentiels agissant entre densités :

$$Q(\nabla, S)(f) = \langle S, \nabla_s^{\omega^k} f \rangle$$
$$+ \sum_{l=1}^{k} \frac{(\lambda + \frac{k-1}{m+1}) \cdots (\lambda + \frac{k-l}{m+1})}{\gamma_{2k-1} \cdots \gamma_{2k-l}} \left(\begin{array}{c} k \\ l \end{array} \right) \langle Div^{\omega^l} S, \nabla_s^{\omega^{k-l}} f \rangle.$$

- Cas conforme, opérateurs différentiels agissant entre densités, symboles de trace nulle :

$$Q(g, S)(f) = \langle S, \nabla_s^{\omega^k} f \rangle$$
$$+ \sum_{l=1}^{k} \frac{(\lambda + \frac{k-1}{m}) \cdots (\lambda + \frac{k-l}{m})}{\gamma_{2k-2} \cdots \gamma_{2k-l-1}} \left(\begin{array}{c} k \\ l \end{array} \right) \langle Div^{\omega^l} S, \nabla_s^{\omega^{k-l}} f \rangle.$$

Cas projectif, opérateurs différentiels agissant entre densités :

$$
\begin{aligned}
Div^{\omega^l} S &\longrightarrow \pi_l(\sum_{j=0}^{l}(Div + T_2)^j)S,\\
T_2|_{\mathcal{S}^j_\delta(M)} &= F(k,j,m,\delta)i(r),
\end{aligned}
$$

Cas projectif, opérateurs différentiels agissant entre densités :

$$
\begin{aligned}
Div^{\omega^l} S &\longrightarrow \pi_l\Big(\sum_{j=0}^{l}(Div + T_2)^j\Big)S, \\
T_2|_{\mathcal{S}^j_\delta(M)} &= F(k, j, m, \delta)i(r), \\
\nabla_s^{\omega^{k-l}} f &\longrightarrow \pi_{k-l}\Big(\sum_{j=0}^{k-l}(\nabla_s + T_1)^j\Big)f, \\
T_1|_{\Gamma(S^j T^* M)\otimes\mathcal{F}_\lambda(M)} &= (-\lambda(m+1) - j)(j+1)r \vee .
\end{aligned}
$$

- Cas conforme, opérateurs différentiels agissant entre densités , symboles de trace nulle :

$$\begin{aligned} Div^{\omega^l} &\longrightarrow \pi_l(\sum_{j=0}^{l}(Div + T_2)^j), \\ T_2|_{\mathcal{S}^j_\delta(M)} &= F'(k, j, m, \delta)i(r), \end{aligned}$$

- Cas conforme, opérateurs différentiels agissant entre densités , symboles de trace nulle :

$$
\begin{aligned}
Div^{\omega^l} &\longrightarrow \pi_l(\sum_{j=0}^{l}(Div + T_2)^j),\\
T_2|_{\mathcal{S}^j_\delta(M)} &= F'(k,j,m,\delta)i(r),\\
\nabla_s^{\omega^{k-l}} f &\longrightarrow \pi_{k-l}(\sum_{j=0}^{k-l}(\nabla_s + T_1)^j)f,\\
T_1|_{\Gamma(S^j T^*M)\otimes\mathcal{F}_\lambda(M)} &= (-\lambda m - j)(j+1)r \vee .
\end{aligned}
$$

Non-unicité des quantifications

- $\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$,

Non-unicité des quantifications

- $\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$,
- $\kappa(X, Y) = \Omega(\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y))$,

Non-unicité des quantifications

- $\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$,
- $\kappa(X, Y) = \Omega(\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y))$,
- $\kappa_0 \in C^\infty(P, \wedge^2 \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathfrak{g}_1)_H$,

Non-unicité des quantifications

- $\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$,
- $\kappa(X, Y) = \Omega(\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y))$,
- $\kappa_0 \in C^\infty(P, \wedge^2 \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathfrak{g}_1)_H$,
- $W = \sum_\nu {\kappa_0}^k_{i_{\nu(1)} i_{\nu(2)} l} {\kappa_0}^l_{i_{\nu(3)} i_{\nu(4)} k} e_{i_{\nu(1)}} \vee e_{i_{\nu(2)}} \vee e_{i_{\nu(3)}} \vee e_{i_{\nu(4)}}$,

Non-unicité des quantifications

- $\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$,
- $\kappa(X, Y) = \Omega(\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y))$,
- $\kappa_0 \in C^\infty(P, \wedge^2 \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathfrak{g}_1)_H$,
- $W = \sum_\nu {\kappa_0}^k_{i_{\nu(1)} i_{\nu(2)} l} {\kappa_0}^l_{i_{\nu(3)} i_{\nu(4)} k} e_{i_{\nu(1)}} \vee e_{i_{\nu(2)}} \vee e_{i_{\nu(3)}} \vee e_{i_{\nu(4)}}$,
- $W \in C^\infty(P, \vee^4 \mathfrak{g}_{-1}^*)_H$,

Non-unicité des quantifications

- $\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$,
- $\kappa(X, Y) = \Omega(\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y))$,
- $\kappa_0 \in C^\infty(P, \wedge^2 \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathfrak{g}_1)_H$,
- $W = \sum_\nu {\kappa_0}^k_{i_{\nu(1)} i_{\nu(2)} l} {\kappa_0}^l_{i_{\nu(3)} i_{\nu(4)} k} e_{i_{\nu(1)}} \vee e_{i_{\nu(2)}} \vee e_{i_{\nu(3)}} \vee e_{i_{\nu(4)}}$,
- $W \in C^\infty(P, \vee^4 \mathfrak{g}_{-1}^*)_H$,
- $S \mapsto \langle W, S \rangle$ application naturelle et invariante entre $\mathcal{S}^k_\delta$ et $\mathcal{S}^{k-4}_\delta$.