Les tartes de Tante Ursule

Pascal Dupont

1er novembre 2004

Tante Ursule cuisine de délicieuses tartes aux pommes... mais a la curieuse habitude de leur donner des formes triangulaires (quelconques), n'ayant jamais jugé utile de se procurer des platines circulaires.
La forme de ses tartes embarrasse ses deux neveux Mathieu et Mathilde, qui veulent évidemment des parts égales, non seulement en aire de tarte mais aussi en longueur de croute, celle-ci étant aussi bonne que le milieu couvert de pommes. La forme de la tarte variant d'une fois à l'autre, leur perplexité se renouvelle à chaque gouter.
Aiderez-vous les neveux gourmands à se partager la tarte de tante Ursule, d'un seul trait rectiligne de couteau, comme il se doit ?

Le problème est donc de construire une droite qui partage un triangle en deux parties de même aire, le périmètre étant partagé en deux morceaux de même longueur.

Soit, classiquement, ABC le triangle, a, b et c les longueurs de ses côtés et p son demi-périmètre. Nous supposerons que $a \geqslant b \geqslant c$. Notons W un quelconque des sommets du triangle, les deux autres étant U et V, et u, v les longueurs des côtés issus de W.
Supposons qu'une droite solution coupe les côtés $[WV]$ et $[WU]$ en X et en Y, à des distances x et y du sommet W. L'aire du triangle ABC étant $\frac{1}{2}uv\sin W$ et celle de WXY, $\frac{1}{2}xy\sin W$, nous avons $xy = \frac{1}{2}uv$. D'autre part, la somme $x+y$ doit être égale au demi-périmètre.
La détermination de x et y se ramène donc au problème classique de les calculer à partir de leur somme et de leur produit. Ce problème admet une solution si $4P \leqslant S^2$, soit ici $2uv \leqslant p^2$; lorsque cette condition est satisfaite, x et y valent :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 2uv}\right), \\ y = \frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 2uv}\right) \end{array} \right.$$

ou inversement ; ceci fournit une première solution si $x \leqslant u$ et $y \leqslant v$ et une autre si $x \leqslant v$ et $y \leqslant u$.

– Soit d'abord $W = A$. La condition d'existence de x et y est que $4p^2 - 8bc \geqslant 0$; or,

$$\begin{aligned}
4p^2 - 8bc &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac - 6bc \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac - 4bc - 2bc \\
&\geqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac - 4ab - 2ac \\
&= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \\
&= (a-b)^2 + c^2 \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Notons alors

$$\begin{cases} x_a = \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 2bc}\right), \\ y_a = \frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 2bc}\right). \end{cases}$$

Nous appellerons « solution [**A**] » la solution obtenue en reportant la plus grande de ces deux longueurs, x_a, sur le plus long des côtés issus de A, b, et la plus petite, y_a sur le plus court, c ; et « solution [**A**′] » la solution obtenue en reportant x_a sur c et y_a sur b.

– La solution [**A**] existe si

$$\begin{cases} x_a \leqslant b \\ y_a \leqslant c. \end{cases}$$

Comme $2b - p = \frac{1}{2}(3b - a - c) = (b - c) + \frac{1}{2}(b + c - a) \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
x_a \leqslant b &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 2bc}\right) \leqslant b \\
&\Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 2bc} \leqslant 2b - p \\
&\Leftrightarrow p^2 - 2bc \leqslant 4b^2 - 4pb + p^2 \\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant 2b - 2p + c \\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant b - a \\
&\Leftrightarrow a = b.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
y_a \leqslant c &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 2bc}\right) \leqslant c \\
&\Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 2bc} \geqslant p - 2c \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p^2 - 2bc \geqslant p^2 - 4pc + 4c^2 \\ \text{ou} \\ p - 2c \leqslant 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2p - b - 2c \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ a + b - 3c \leqslant 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - c \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ a + b - 3c \leqslant 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \texttt{vrai}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution [**A**] existe si et seulement si $a = b$.

– La solution [$\mathbf{A}'$] existe si

$$x_a \leqslant c,$$

puisque $y_a \leqslant b$ s'en déduit. Or,

$$\begin{aligned} x_a \leqslant c &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 2bc}\right) \leqslant c \\ &\Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 2bc} \leqslant 2c - p \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 2bc \leqslant 4c^2 - 4pc + p^2 \\ 2c - p \geqslant 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b + 2c - 2p \geqslant 0 \\ 3c - a - b \geqslant 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c - a \geqslant 0 \\ 3c - a - b \geqslant 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = b = c. \end{aligned}$$

Donc, la solution [$\mathbf{A}'$] existe si et seulement si $a = b = c$.

– Soit ensuite $W = B$. La condition d'existence de x et y est que $4p^2 - 8ac \geqslant 0$; or,

$$\begin{aligned} 4p^2 - 8ac &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 6ac + 2bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 4ac - 2ac + 2bc \\ &\geqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 4ab - 2ac + 2bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc \\ &= (a - b - c)^2 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Notons alors

$$\begin{cases} x_b = \tfrac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 2ac}\right), \\ y_b = \tfrac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 2ac}\right). \end{cases}$$

Nous appellerons « solution [**B**] » la solution obtenue en reportant la plus grande de ces deux longueurs, x_b, sur le plus long des côtés issus de B, a, et la plus petite, y_b sur le plus court, c ; et « solution [$\mathbf{B}'$] » la solution obtenue en reportant x_b sur c et y_b sur a.

– La solution [**B**] existe si

$$\begin{cases} x_b \leqslant a \\ y_b \leqslant c. \end{cases}$$

Comme $2a-p=\frac{1}{2}(3a-b-c)=\frac{1}{2}(a+(a-b)+(a-c))\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
x_b \leqslant a &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(p+\sqrt{p^2-2ac}\right)\leqslant a\\
&\Leftrightarrow \sqrt{p^2-2ac}\leqslant 2a-p\\
&\Leftrightarrow p^2-2ac\leqslant 4a^2-4pa+p^2\\
&\Leftrightarrow 0\leqslant 2a-2p+c\\
&\Leftrightarrow 0\leqslant a-b\\
&\Leftrightarrow \texttt{vrai}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
y_b \leqslant c &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(p-\sqrt{p^2-2ac}\right)\leqslant c\\
&\Leftrightarrow \sqrt{p^2-2ac}\geqslant p-2c\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p^2-2ac\geqslant p^2-4pc+4c^2\\ \text{ou}\\ p-2c\leqslant 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2p-a-2c\geqslant 0\\ \text{ou}\\ a+b-3c\leqslant 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b-c\geqslant 0\\ \text{ou}\\ a+b-3c\leqslant 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \texttt{vrai}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution [**B**] existe toujours.

– La solution [$\mathbf{B}'$] existe si

$$x_b\leqslant c,$$

puisque $y_b\leqslant a$ s'en déduit. Or,

$$\begin{aligned}
x_b \leqslant c &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(p+\sqrt{p^2-2ac}\right)\leqslant c\\
&\Leftrightarrow \sqrt{p^2-2ac}\leqslant 2c-p\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} p^2-2ac\leqslant 4c^2-4pc+p^2\\ 2c-p\geqslant 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+2c-2p\geqslant 0\\ 3c-a-b\geqslant 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} c-b\geqslant 0\\ 3c-a-b\geqslant 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow b=c.
\end{aligned}$$

Donc, la solution [$\mathbf{B}'$] existe si et seulement si $b=c$.

– Soit enfin $W = C$. La condition d'existence de x et y est que $4p^2 - 8ab \geqslant 0$, soit $c \geqslant \sqrt{8ab} - a - b$; lorsqu'elle est satisfaite, notons

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 2ab}\right), \\ y_c = \frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 2ab}\right). \end{cases}$$

Nous appellerons « solution **[C]** » la solution obtenue en reportant la plus grande de ces deux longueurs, x_c, sur le plus long des côtés issus de C, a, et la plus petite, y_c sur le plus court, b ; et « solution **[C′]** » la solution obtenue en reportant x_c sur b et y_c sur a.

– La solution **[C]** existe si

$$\begin{cases} x_c \leqslant a \\ y_c \leqslant b. \end{cases}$$

Comme $2a - p = \frac{1}{2}(3a - b - c) = \frac{1}{2}(a + (a - b) + (a - c)) \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} x_c \leqslant a &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 2ab}\right) \leqslant a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 2ab} \leqslant 2a - p \\ &\Leftrightarrow p^2 - 2ab \leqslant 4a^2 - 4pa + p^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant 2a - 2p + b \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant a - c \\ &\Leftrightarrow \texttt{vrai}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} y_c \leqslant b &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 2ab}\right) \leqslant b \\ &\Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 2ab} \geqslant p - 2b \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p^2 - 2ab \geqslant p^2 - 4pb + 4b^2 \\ \text{ou} \\ p - 2b \leqslant 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2p - a - 2b \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ a - 3b + c \leqslant 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c - b \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ a - 3b + c \leqslant 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \texttt{vrai}, \end{aligned}$$

car $3b - a - c = 2(b - c) + (b + c - a) \geqslant 0$.
Donc, la solution **[C]** existe si et seulement si $c \geqslant \sqrt{8ab} - a - b$.

– La solution **[C′]** existe si

$$x_c \leqslant b,$$

puisque $y_c \leqslant a$ s'en déduit. Or,

$$\begin{aligned} x_c \leqslant b &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 2ab}\right) \leqslant b \\ &\Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 2ab} \leqslant 2b - p \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 2ab \leqslant 4b^2 - 4pb + p^2 \\ 2b - p \geqslant 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - 2p \geqslant 0 \\ 3b - a - c \geqslant 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b - c \geqslant 0 \\ 3b - a - c \geqslant 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \texttt{vrai}. \end{aligned}$$

Donc, la solution $[\mathbf{C}']$ existe si et seulement si $c \geqslant \sqrt{8ab} - a - b$.

Résumons-nous :

– Si le triangle est équilatéral ($a = b = c$), les six solutions $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{A}']$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{B}']$, $[\mathbf{C}]$

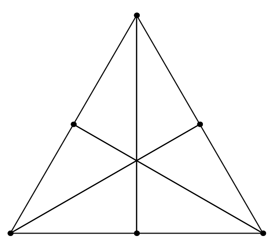

FIGURE 1 : Triangle $(6, 6, 6)$

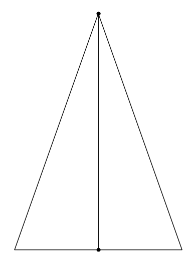

FIGURE 2 : Triangle $(4, 6, 6)$

et $[\mathbf{C}']$ existent. Cependant, dans la solution $[\mathbf{A}]$,

$$x_a = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2}a + \sqrt{\left(\tfrac{3}{2}a\right)^2 - 2a^2}\right) = a$$

et

$$y_a = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2}a - \sqrt{\left(\tfrac{3}{2}a\right)^2 - 2a^2}\right) = \tfrac{1}{2}a,$$

tandis que, dans la solution $[\mathbf{B}]$, de manière strictement analogue, $x_b = a$ et $y_b = \frac{1}{2}a$: ces deux solutions se confondent donc ; de semblable manière, $[\mathbf{A}']$ et $[\mathbf{C}]$ se confondent, de même que $[\mathbf{B}']$ et $[\mathbf{C}']$. Au total, on trouve trois solutions distinctes, qui sans surprise sont les trois axes de symétrie du triangle. Voir la figure 1.

– Si le triangle est isoscèle, avec deux grands côtés ($a = b > c$), il y a les deux solutions $[\mathbf{A}]$ et $[\mathbf{B}]$, qui se confondent : on obtient l'axe de symétrie du triangle. En outre, si $c \geqslant 2\left(\sqrt{2} - 1\right)a$, les deux solutions $[\mathbf{C}]$ et $[\mathbf{C}']$ existent, distinctes si $c > 2\left(\sqrt{2} - 1\right)a$ et confondues si $c = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)a$. Cela donne donc une, deux ou trois solutions distinctes. Voir les figures 2, 3 et 4.

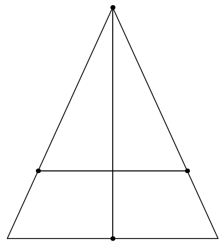

FIGURE 3 : Triangle $\left(12\left(\sqrt{2}-1\right), 6, 6\right)$

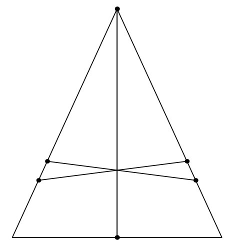

FIGURE 4 : Triangle $(5, 6, 6)$

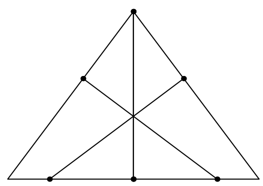

FIGURE 5 : Triangle $(6, 5, 5)$

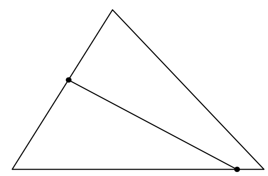

FIGURE 6 : Triangle $(8, 7, 6)$

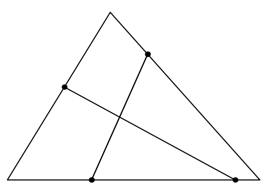

FIGURE 7 : Triangle $(9, 8, 7)$

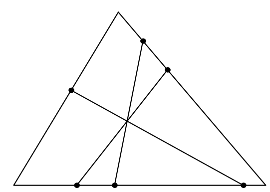

FIGURE 8 : Triangle $(10, 9, 8)$

– Si le triangle est isoscèle, avec deux petits côtés ($a > b = c$), existent les quatre solutions [**B**], [**B′**], [**C**] et [**C′**] ; les deux solutions [**B′**] et [**C′**] se confondent et correspondent à l'axe de symétrie du triangle. Il y a trois solutions distinctes dans tous les cas. Voir la figure 5.
– Pour un triangle scalène ($a > b > c$), la solution [**B**] existe toujours ; en outre, si $c \geqslant \sqrt{8ab} - a - b$, existent les deux solutions [**C**] et [**C′**], distinctes si $c > \sqrt{8ab} - a - b$ et confondues si $c = \sqrt{8ab} - a - b$. Ici encore, il y a une, deux ou trois solutions distinctes. Voir les figures 6, 7 et 8.

REMARQUE : Dans tous les cas où il y a trois solutions, nous observons que les trois droites sont concourantes. La preuve reste à faire.