# Régularité de la fonction de Cantor

Laurent Simons
L.Simons@ulg.ac.be

Travail en collaboration avec S. Nicolay
S.Nicolay@ulg.ac.be

Université de Liège – Département de Mathématique

**Séminaire compréhensible**
Lundi 28 janvier 2013

# Introduction

En 1878, Cantor a construit une bijection entre $[0,1]$ et $[0,1]^2$, bijection définie via les fractions continues.

G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal), **Vol. 84**, 242-258, 1878.

## Sommaire



## Notations

$$E = [0,1], \qquad D = E \cap \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad I = E \setminus D,$$

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des naturels non nuls.

# Fractions continues

A. Ya. Khintchine, *Continued fractions*, P. Noordhoff, 1963.

Soit $\boldsymbol{a} = (a_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ une suite finie de nombres réels positifs ($n \in \mathbb{N}$); l'expression $[a_1, \ldots, a_n]$ est définie par récurrence comme suit :

$$[a_1] = \frac{1}{a_1} \quad \text{and} \quad [a_1, \ldots, a_m] = \frac{1}{a_1 + [a_2, \ldots, a_m]},$$

pour tout $m \in \{2, \ldots, n\}$. Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^n$, on dit que

$$[a_1, \ldots, a_n] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

est une **fraction continue finie** (simple). Les nombres $a_j$ ($j \in \{1, \ldots, n\}$) sont appelés **quotients partiels** de la fraction continue.

# Fractions continues finies

## Proposition

Pour tout $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $[a_1, \ldots, a_n]$ appartient à $D$. Réciproquement, pour tout $x \in D$, il existe un naturel $n$ et une suite $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^n$ telle que $x = [a_1, \ldots, a_n]$.

On dit que $[a_1, \ldots, a_n]$ est un développement en fraction continue de $x$.

Tout nombre de $D$ peut s'exprimer comme une fraction continue $[a_1, \ldots, a_n]$ dans laquelle le dernier quotient partiel peut être modifié. En effet, d'une part, si $a_n > 1$, on peut écrire

$$[a_1, \ldots, a_n] = [a_1, \ldots, a_n - 1, 1]$$

et d'autre part, si $a_n = 1$, on peut écrire

$$[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [a_1, \ldots, a_{n-1} + 1].$$

A cette modification près, le développement en fraction continue d'un élément de $D$ est unique.

# Fractions continues finies

Exemple

On a

$$\frac{37}{44} = [1, 5, 3, 2] = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}$$

En effet, en appliquant l'algorithme d'Euclide aux naturels $44$ et $37$, on obtient successivement

$$\begin{array}{rcl} 44 & = & 1 \times 37 + 7 \\ 37 & = & 5 \times 7 + 2 \\ 7 & = & 3 \times 2 + 1 \\ 2 & = & 2 \times 1 + 0. \end{array}$$

# Fractions continues et convergents

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on définit les quantités $p_j(\boldsymbol{a})$ et $q_j(\boldsymbol{a})$ par récurrence comme suit :

$$p_{-1}(\boldsymbol{a}) = 1,\ q_{-1}(\boldsymbol{a}) = 0,\ p_0(\boldsymbol{a}) = 0,\ q_0(\boldsymbol{a}) = 1$$

et, pour $k \in \{1, \ldots, j\}$,

$$\begin{cases} p_k(\boldsymbol{a}) = a_k p_{k-1}(\boldsymbol{a}) + p_{k-2}(\boldsymbol{a}) \\ q_k(\boldsymbol{a}) = a_k q_{k-1}(\boldsymbol{a}) + q_{k-2}(\boldsymbol{a}) \end{cases}.$$

On appelle **convergent d'ordre** $j$ de $\boldsymbol{a}$ le quotient $\frac{p_j(\boldsymbol{a})}{q_j(\boldsymbol{a})}$.

## Proposition

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$[a_1, \ldots, a_j] = \frac{p_j(\boldsymbol{a})}{q_j(\boldsymbol{a})}.$$

En étudiant les propriétés des convergents, on peut montrer que la suite $x_j = [a_1, \ldots, a_j]$ converge. On appelle **fraction continue infinie** la limite de cette suite et on la note $[a_1, \ldots]$.

# Fractions continues infinies

## Proposition

Pour tout $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $[a_1, \ldots]$ appartient à $I$. Réciproquement, pour tout $x \in I$, il existe une suite $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que $x = [a_1, \ldots]$; de plus, cette suite est unique.

Exemple 1

On a

$$\frac{\pi}{6} = [1, 1, 10, 10, 1, 1, 1, 48, 3, 1, 2, 27, 1, 2, \ldots] \approx 0,5235987755983\ldots$$

| Convergents | | Approximation décimale | Erreur d'approximation |
|---|---|---|---|
| 1er | $1$ | $1$ | $0,4764012244017$ |
| 2e | $1/2$ | $0,5$ | $0,0235987755983$ |
| 3e | $11/21$ | $0,5238095238095$ | $0,0002107482112$ |
| 4e | $111/212$ | $0,5235849056604$ | $0,0000138699379$ |
| 5e | $122/233$ | $0,5236051502146$ | $0,0000063746163$ |

# Fractions continues infinies

## Exemple 2

On a

$$\sqrt{2}-1=[2,2,2,2,2,\ldots]=[\overline{2}]\approx 0,4142135623731\ldots$$

| Convergents | | Approximation décimale | Erreur d'approximation |
|---|---|---|---|
| $1^{\text{er}}$ | $1/2$ | $0,5$ | $0,0857864376269$ |
| $2^{\text{e}}$ | $2/5$ | $0,4$ | $0,0142135623731$ |
| $3^{\text{e}}$ | $5/12$ | $0,4166666666666$ | $0,0024531042935$ |
| $4^{\text{e}}$ | $12/29$ | $0,4137931034483$ | $0,0004204589248$ |
| $5^{\text{e}}$ | $29/70$ | $0,4142857142857$ | $0,0000721519126$ |

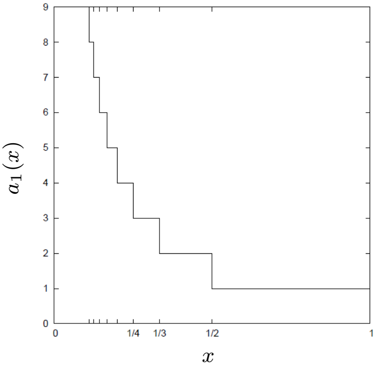
## Proposition

Un élément $x\in I$ est un (irrationnel) quadratique si et seulement si son développement en fraction continue $[\boldsymbol{a}]$ est ultimement périodique (i.e. il existe $k,J\in\mathbb{N}$ tels que $a_{j+k}=a_j$ pour tout $j\geq J$).

# Théorie métrique des fractions continues

Pour tout $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $[\boldsymbol{a}]$ désigne un nombre $x \in I$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on peut considérer le quotient partiel $a_j$ comme une fonction de $x$ : $a_j = a_j(x)$.

- Fonction $a_1$




On peut écrire

$$\frac{1}{x} = a_1 + [a_2, \ldots].$$

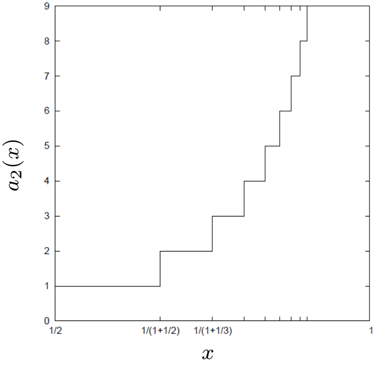
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$a_1 = k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}.$$

Donc, $a_1$ est une fonction constante par morceaux décroissante.

# Théorie métrique des fractions continues

- Fonction $a_2$ (Représentation avec $a_1 = 1$)




On peut écrire

$$x = [a_1, r_2] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{r_2}}$$

avec $r_2 \in [1, \infty)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$a_2 = k \quad \Leftrightarrow \quad k \leq r_2 < k + 1.$$

Donc, $a_2$ est une fonction constante par morceaux croissante.

- Fonction $a_j$ ($j \in \mathbb{N}$)

Si $j$ est impair, $a_j$ est une fonction constante par morceaux décroissante.

Si $j$ est pair, $a_j$ est une fonction constante par morceaux croissante.

# Théorie métrique des fractions continues

Soit $x = [\boldsymbol{a}]$ un élément de $I$; pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n(x) = \big\{ y = [\boldsymbol{b}] \in I : b_j = a_j \text{ if } j \in \{1, \ldots, n\} \big\}.$$

On dira que $I_n(x)$ est un « intervalle de rang $n$ ». Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n(x)$ est un sous-intervalle irrationnel de $I$, $I_{n+1}(x) \subset I_n(x)$ et $\lim_{n \to +\infty} I_n(x) = \{x\}$. En fait, on a

$$I_n(x) = \left] \frac{p_n(\boldsymbol{a})}{q_n(\boldsymbol{a})}, \frac{p_n(\boldsymbol{a}) + p_{n-1}(\boldsymbol{a})}{q_n(\boldsymbol{a}) + q_{n-1}(\boldsymbol{a})} \right[ \cap I,$$

si $n$ est pair (si $n$ est impair, les extrémités de l'intervalle sont inversés). Chaque intervalle de rang $n$ est partitionné en un nombre infini dénombrable d'intervalles de rang $n+1$. Si on note $|I_n(x)|$ la mesure de Lebesgue de $I_n(x)$, on a

$$|I_n(x)| = \frac{1}{q_n(\boldsymbol{a})(q_n(\boldsymbol{a}) + q_{n-1}(\boldsymbol{a}))}.$$

# Fonction de Cantor

G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal), **Vol. 84**, 242-258, 1878.

Soit $x \in I$ et $[a_1, \ldots]$ son développement en fraction continue. On définit les applications $f_1$ et $f_2$ comme suit :

$$f_1(x) = [a_1, a_3, \ldots, a_{2j+1}, \ldots] \quad \text{et} \quad f_2(x) = [a_2, a_4, \ldots, a_{2j}, \ldots].$$

L'application

$$f : I \to I^2 \; ; x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$$

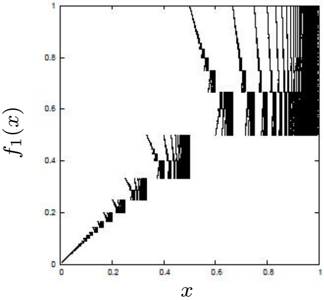
est la **fonction de Cantor** sur $I$.

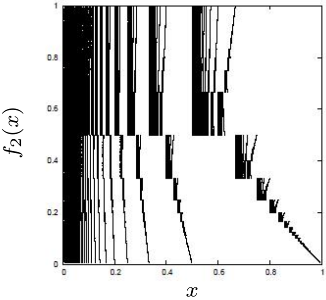
## Remarque

- Si $Q$ représente les nombres quadratiques de $I$, $f$ est une bijection de $Q$ dans $Q^2$.
- Puisque que les cardinaux de $E$ et $I$ sont égaux, on peut étendre $f$ en une bijection de $E$ dans $E^2$.

# Fonction de Cantor

Représentations des fonctions $f_1$ (à gauche) et $f_2$ (à droite)



# Continuité de la fonction de Cantor

Pour $x \in I$, on écrit $\varphi(x) = \boldsymbol{a}$ si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ satisfait $x = [\boldsymbol{a}]$.

Une distance usuelle sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est donnée par

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|a_j - b_j|}{|a_j - b_j| + 1}$$

si $\boldsymbol{a} = (a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $\boldsymbol{b} = (b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sont deux éléments de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. On considère implicitement que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est muni de cette distance. L'ensemble $I$ (comme $D$ et $E$) sont munis de la distance euclidienne.

## Proposition

L'application $\varphi$ est un homéomorphisme entre $I$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. En particulier, la fonction de Cantor $f$ est un homéomorphisme entre $I$ et $I^2$.

# Continuité de la fonction de Cantor

## Théorème de Netto

Toute bijection $g : [0,1] \to [0,1]^2$ is nécessairement discontinue.

H. Sagan, *Space-filling curves*, Universitext, New-York : Springer-Verlag, 1994.

Donc, la fonction de Cantor $f$ ne peut pas être étendu en une bijection continue de $E$ dans $E^2$.

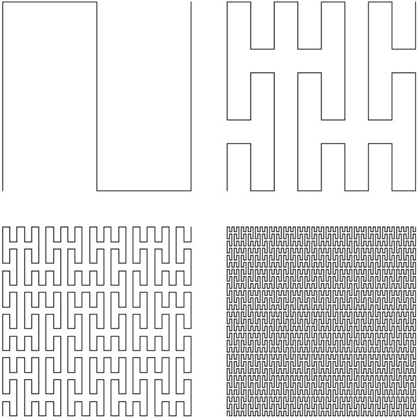
## Proposition

Toute extension de la fonction de Cantor sur $E$ est discontinue sur les rationnels de $E$.

# Courbe de Peano

H. Sagan, *Space-filling curves*, Universitext, New-York : Springer-Verlag, 1994.

La courbe de Peano (représentée ci-dessous) est une surjection continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^2$.



# Régularité höldérienne

S. Jaffard, *Wavelet Techniques in Multifractal Analysis*, In Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **Vol. 72**, 91-152, 2004.

Soit $\alpha \in [0,1]$. Une fonction réelle continue et bornée $g$ définie sur $A \subset \mathbb{R}$ appartient à l'espace de Hölder $\Lambda^\alpha(x)$ avec $x \in A$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|g(x) - g(y)| \leq C|x-y|^\alpha,$$

pour tout $y \in A$. L'exposant de Hölder $h_g(x)$ de $g$ au point $x$ est définie comme suit :

$$h_g(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] : g \in \Lambda^\alpha(x)\}.$$

Si $h_g(x) < 1$, $g$ n'est pas dérivable au point $x$.

Exemple

La courbe de Peano a un exposant de Hölder égal à $1/2$ partout sur $[0,1]$.

S. Jaffard and S. Nicolay, *Space-filling functions and Davenport series*, Recent Developments in Fractals and Related Fields, 19-34, 2010.

# Régularité höldérienne de la fonction de Cantor

## Théorème

Soient $x = [\boldsymbol{a}]$ un élément de $I$ et $y$ un élément de $I_n(x) \setminus I_{n+1}(x)$ (avec $n \in \mathbb{N}$). On a

$$\frac{\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{\lceil n/2 \rceil} \log(a_{2j-1})}{\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n+3} \log(a_j+1) + \frac{C_1(n)}{n}} \leq \frac{\log|f_1(x)-f_1(y)|}{\log|x-y|} \leq \frac{\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{\lceil n/2 \rceil +3} \log(a_{2j-1}+1) + \frac{C_2(n)}{2n}}{\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \log(a_j)}$$

où

$$C_1(n) = \frac{\log(2)}{2} + \log\left(\max\left\{\frac{a_{n+2}+2}{a_{n+2}+1}, \frac{a_{n+3}+2}{a_{n+3}+1}\right\}\right)$$

et

$$C_2(n) = \frac{\log(2)}{2} + \log\left(\max\left\{\frac{a_{2\lceil n/2 \rceil+3}+2}{a_{2\lceil n/2 \rceil+3}+1}, \frac{a_{2\lceil n/2 \rceil+5}+2}{a_{2\lceil n/2 \rceil+5}+1}\right\}\right).$$

Il y a un résultat similaire pour $f_2$.

# Régularité höldérienne de la fonction de Cantor

En combinant le théorème précédent et un résultat d'ergodicité sur les fractions continues, on obtient un encadrement pour l'exposant de Hölder des fonctions $f_1$ et $f_2$.

## Théorème

Pour presque tout $x \in I$, $h_{f_1}(x)$ et $h_{f_2}(x)$ sont compris entre $0,35$ et $0,72$.

## Remarque

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$a_j = \begin{cases} 2^j & \text{si } j \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases},$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$ et soit $x = [\boldsymbol{a}]$. Pour ce point particulier, on a $h_{f_1}(x) = 0$ et donc $f_1$ est une fonction multifractale.

La fonction $f_2$ est aussi multifractale.