Opérations arithmétiques et symbolisations variées

Partir des démarches informelles des élèves pour donner du sens aux apprentissages

Annick Fagnant

Université de Liège – Département Education et Formation
Bd du Rectorat, 5 – B32 – B-4000 Liège
afagnant@ulg.ac.be

RÉSUMÉ. *Tout en s'appuyant sur certains apports de la psychologie cognitive, le présent article se situe dans la lignée des courants socioculturels qui défendent l'idée d'une co-construction des concepts et des symboles. Il s'intéresse à différents types de symbolisations informelles (comme l'utilisation de matériel manipulable, des doigts ou de représentations dessinées) ou plus formelles (comme le diagramme de Venn, le graphe fléché ou les calculs). Les résultats de deux études empiriques menées en 1ère primaire en Communauté française de Belgique montrent que l'utilisation de matériel manipulable permet aux élèves de résoudre une variété de problèmes mais qu'ils éprouvent d'importantes difficultés à utiliser un symbolisme mathématique conventionnel et à produire un calcul en lien avec les démarches de résolution développées ; l'utilisation de ces symbolisations « mal comprises » pouvant conduire au développement de stratégies superficielles de résolution de problèmes. Par ailleurs, une étude exploratoire indique qu'il est possible de travailler au départ des symbolisations informelles produites par les élèves pour les aider à développer une meilleure compréhension des concepts impliqués et pour tendre progressivement vers des symbolisations mathématiques plus conventionnelles qu'ils devraient ainsi mieux intégrer.*

MOTS-CLÉS : *opérations arithmétiques – symbolisations – calculs – représentations*

Publié avec l'aide financière du Fonds de la Recherche Scientifique - FNRS
et avec l'appui de l'Administration générale de la Recherche scientifique. Service général du pilotage du système éducatif

1. Introduction

Les études présentées dans cet article se déroulent en 1ère année primaire, à un moment de l'apprentissage où les élèves sont en pleine construction des concepts d'addition et de soustraction ainsi que des symbolisations liées. Tout en intégrant certains apports de la psychologie cognitive (Thevenot, Barrouillet & Fayol, 2010 ; Thevenot, Coquin & Verschaffel, 2006), la réflexion se place dans la lignée des courants socioculturels actuels qui défendent l'idée d'une co-construction des concepts et des symboles (Cobb, Yackle & McClain, 2000 ; Gravemeijer, Lehrer, van Oers & Verschaffel, 2002a). L'article s'intéresse à différents types de symbolisations informelles (comme l'utilisation de matériel manipulable, des doigts ou de représentations dessinées) ou plus formelles (comme les diagrammes de Venn, les graphes fléchés ou les calculs). Après un premier éclairage théorique et une précision du contexte, l'article tente d'éclairer la question de l'utilisation et de la production de symbolisations par les jeunes élèves au départ de deux études menés en Communauté française de Belgique dans des classes de 1ère année primaire. Il propose ensuite deux pistes didactiques visant à asseoir les activités d'enseignement / apprentissage sur ces constats de recherche en vue de donner du sens aux opérations et aux symbolisations mathématiques. Enfin, il se propose de repositionner les deux approches développées dans une réflexion relative à la production de symbolisations pour construire le sens des concepts mathématiques d'une part et comme outil de développement de stratégies efficaces de résolution de problèmes d'autre part.

2. Fondements théoriques

La présente étude combine principalement les apports de deux courants de recherche : d'une part, les travaux issus de la psychologie cognitive concernant les classifications des problèmes additifs et soustractifs, l'étude des stratégies informelles des élèves et la construction de représentations schématiques en résolution de problèmes et, d'autre part, les approches socioculturelles (inspirées des travaux de Vygotsky) qui se sont principalement intéressées aux activités de symbolisations mathématiques et à la construction de significations partagées dans des situations de communication.

2.1. Aperçu des apports des recherches en psychologie cognitive

Le postulat fondamental de la psychologie cognitive est que la pensée est un système de traitement de l'information. Les « théories du traitement de l'information » (le pluriel indiquant qu'elles ne constituent pas un courant unifié) se sont essentiellement intéressées à la façon dont les personnes, confrontées à des situations données, sélectionnent les informations, les organisent et les représentent ; aux processus qu'elles développent pour traiter ces informations ainsi qu'à la façon dont elles les stockent, les récupèrent et les communiquent (Bourgeois, 2006 ; Siegler, 2001). Les recherches ont notamment porté sur les stratégies générales et spécifiques de résolution de problèmes, ainsi que sur les comparaisons experts-novices (Tardif, 1992). Globalement, les démarches des experts et des novices sont assez contrastées : d'un côté, les experts consacrent plus de la moitié du temps à comprendre le problème, ils ne s'engagent pas aveuglément dans l'application d'un algorithme de calcul et prennent beaucoup de temps pour analyser et explorer les données du problème ; les novices, quant à eux, prennent très peu de temps pour lire et comprendre le problème, ils s'engagent très rapidement dans une stratégie de résolution qu'ils conservent souvent jusqu'à la fin sans tenter de réguler ou de vérifier leur démarche (Schoenfeld, 1992, 2007). Les élèves peuvent être considérés comme des novices en résolution de problèmes ; les activités menées en classe devront les encourager à tendre vers des démarches expertes, en leur apprenant à consacrer du temps à l'analyse des situations, en les encourageant à mobiliser les connaissances spécifiques liées aux situations proposées et en tentant de les conduire à réguler leurs apprentissages.

Les théories du traitement de l'information se sont beaucoup intéressées aux problèmes arithmétiques : ainsi, dans les années 1980, de nombreuses études ont porté sur les problèmes additifs et soustractifs impliquant une opération, tels qu'ils sont proposés généralement en début d'enseignement primaire (Carpenter, Hiebert & Moser, 1983; Carpenter, & Moser, 1982, 1984 ; De Corte & Verschaffel, 1987, 1991; Riley, Greeno & Heller, 1983).

Ce champ de recherches a permis des études très fines des stratégies de résolution des élèves et a conduit plusieurs chercheurs à développer des modèles informatiques permettant de simuler les processus de résolution de problèmes. Les plus connus d'entre eux sont sans doute les modèles développés par Riley et al. (1983), par Briars et Larkin (1984) et par Kintsch et Greeno (1985) (voir aussi De Corte & Verschaffel, 1988, pour une présentation critique de ces approches).

Dans les années 1980, Riley et al. (1983) ont développé une typologie de problèmes centrée sur les aspects liés à leur structure sémantique. Ils distinguent ainsi trois catégories de problèmes :

- Les problèmes de type « changement » se réfèrent à des situations actives ou dynamiques dans lesquelles certains événements affectent la valeur d'une quantité initiale (ex. *Joe et Tom ont 8 billes ensemble. Joe a 3 billes. Combien de billes Tom a-t-il ?*).
- Les problèmes de type « combinaison » font référence à des situations statiques impliquant deux quantités qui peuvent être considérées soit séparément soit en combinaison (ex. *Joe avait 3 billes. Puis, Tom lui a donné 5 billes. Combien de billes Joe a-t-il maintenant ?*).
- Les problèmes de type « comparaison » impliquent deux quantités qui sont comparées, ainsi qu'une valeur indiquant la différence entre ces deux quantités (ex. *Joe a 3 billes. Tom a 5 billes de plus que Joe. Combien de billes Tom a-t-il?*).

Chaque catégorie de problèmes peut être subdivisée en sous-catégories en fonction de l'identité de la quantité inconnue. Pour les problèmes de type changement et comparaison, on peut encore faire des distinctions supplémentaires en fonction de la direction, respectivement, de l'événement décrit (augmentation ou diminution) ou de la relation (plus ou moins). En combinant ces différentes caractéristiques, Riley et al. (1983) distinguent 14 types de problèmes additifs et soustractifs impliquant une seule opération. Si cette typologie est sans doute la plus usitée dans les recherches anglo-saxonne (Carpenter & Moser, 1982, y ajoutant une 4^{e} catégorie reprenant les problèmes *d'égalisation*), elle n'est pas sans rappeler la typologie du psychologue français Gérard Vergnaud (1983, 1990) plus usitée dans le monde francophone.

De nombreuses études ont mis en évidence la pertinence de ces catégories sémantiques et ceci tant au niveau de la difficulté des problèmes que des stratégies utilisées par les élèves pour les résoudre (voir Fayol, 1990 ; Verschaffel & De Corte, 1997 pour des synthèses).

Les recherches ont montré que des problèmes qui peuvent être résolus par la même opération arithmétique mais qui diffèrent au niveau de la structure sémantique sous-jacente se distinguent significativement du point de vue de leur niveau de difficulté (Rieley et al., 1983 ; De Corte & Verschaffel, 1991). A l'encontre d'une conception naïve de l'arithmétique et de sa genèse, la difficulté des problèmes n'est pas déterminée par les opérations à effectuer (Fayol, 1990) : des problèmes requérant la même opération arithmétique, mais décrits en termes de différents réseaux de concepts et de relations ne sont pas équivalents du point de vue de leur difficulté. D'autres facteurs tels que la formulation des énoncés, le type et la taille des nombres utilisés, les procédures de testing, l'âge et le background éducatif des sujets… peuvent également affecter la difficulté relative des problèmes (Fayol, 1990 ; Verschaffel & De Corte,1997). Autrement dit, résoudre un problème requiert bien plus que de seulement connaître les opérations et de disposer de quelques compétences générales pour les appliquer.

La pertinence des catégories a également été mise en évidence au travers de l'analyse des stratégies informelles de résolution utilisées par les élèves (Carpenter & Moser, 1982, 1984 ; De Corte & Verschaffel, 1987). Les élèves essaient d'analyser et de représenter les différentes structures de problèmes en vue de les résoudre. Avant tout enseignement spécifique en arithmétique et en résolution de problèmes, les enfants développent une grande variété de stratégies informelles qui s'appuient sur le dénombrement ou le comptage verbal et qui permettent de mettre en acte les actions ou les relations décrites dans la situation.

En guise d'exemple, le tableau 1 illustre, pour quelques problèmes contrastés, des exemples de stratégies informelles basées sur le dénombrement d'objets et utilisées préférentiellement par les enfants face à chacun des types de problèmes proposés.

Problèmes correspondant à l'opération standard « 5+3= ? »	**Combinaison** - Joe a 3 billes. Tom a 5 billes. Combien de billes ont-ils ensemble ?	L'enfant construit un tas de 3 blocs, il fait un autre tas de 5 blocs, puis il compte le tout en laissant les deux tas séparés ou en joignant les deux tas avant de recompter le tout.
	Changement - Joe avait 3 billes. Tom lui a donné 5 billes. Combien de billes Joe a-t-il maintenant ?	L'enfant fait un tas de 3 blocs, il construit ensuite le second tas de 5 blocs en l'ajoutant directement sur le premier tas. Ensuite, il recompte le tout.
	Comparaison – Joe a 3 billes. Tom a 5 billes de plus que Joe. Combien de billes Tom a-t-il ?	L'enfant construit une rangée de 3 blocs, il aligne une 2e rangée en correspondance terme-à-terme, puis il ajoute 5 blocs à la deuxième rangée. Il compte alors l'ensemble des blocs de la 2e rangée.
Problèmes correspondant à l'opération standard « 8-3= ? »	**Changement** - Joe avait 8 billes. Il a donné 5 billes à Tom. Combien de billes Joe a-t-il maintenant ?	L'enfant construit un tas de 8 blocs, 5 éléments sont ensuite retirés. La réponse est le nombre d'éléments restants.
	Changement - Joe avait 3 billes. Tom lui a donné quelques billes. Maintenant, Joe a 8 billes. Combien de billes Tom lui a-t-il données ?	L'enfant construit un tas de 3 blocs. Des éléments sont ensuite ajoutés à cet ensemble de manière à obtenir un total de 8 éléments. La réponse correspond au nombre d'éléments ajoutés.
	Changement - Joe avait 8 billes. Il a donné quelques billes à Tom. Maintenant, il a 3 billes. Combien de billes a-t-il données à Tom ?	L'enfant construit un tas de 8 blocs, des éléments sont ensuite retirés jusqu'à ce qu'il reste 3 blocs. La réponse est le nombre d'éléments qui ont été retirés.

Tableau 1. E*xemples de stratégies informelles développées face à quelques problèmes contrastés*

Par ailleurs, d'autres recherches ont montré que l'impact des catégories sémantiques de problèmes se reflétait non seulement sur les stratégies informelles, mais aussi sur les calculs produits par les élèves (Bebout, 1990 ; Carey, 1991 ; Fagnant, 2005a,b). Carpenter, Moser et Bebout (1988) distinguent les calculs qui modélisent directement les actions ou les relations impliquées dans les problèmes (en lien avec les stratégies informelles de résolution : a+b= ? ; a+ ?=b ; ?+b=c ; a-b= ? ; a- ?=c ou ?-b=c) et les calculs de forme standard ou canoniques (a+b= ? ou a-b= ?). Les calculs standards ou canoniques correspondent aux calculs numériques identifiés par Vergnaud (1982). Ils ne sont pas liés à la structure sémantique des problèmes et correspondent à l'idée que tous les problèmes additifs et soustractifs peuvent être conceptualisés en termes de relations partie-tout (a+b= ? lorsque l'on recherche le tout et a-b= ? lorsque l'on recherche une partie). On peut aussi voir un lien étroit entre les calculs qui correspondent aux structures sémantiques des problèmes et les calculs relationnels identifiés par Vergnaud (1982). Ces calculs peuvent être de forme canonique (a+b= ? ou a-b= ?), lorsque les problèmes portent sur la recherche du terme final, ou ils peuvent prendre la forme de calculs à trou (a+ ?=c ; ?+b=c ; a- ?=c et ?-b=c), lorsque l'inconnue porte sur le terme initial ou intermédiaire. Lorsque l'on impose aux élèves d'utiliser des calculs standards ou canoniques, on leur demande une très grande abstraction face à certains problèmes par comparaison aux calculs relationnels qui sont en lien avec les stratégies informelles de résolution (par exemple, le calcul 8-3= ? entre en conflit avec un problème « racontant » une histoire additive et étant résolu par une stratégie de surcomptage, comme par exemple le problème « *Joe avait 3 billes. Tom lui a donné quelques billes. Maintenant, Joe a 8 billes. Combien de billes Tom lui a-t-il données* ? » proposé dans le tableau 1).

Toujours dans le domaine des problèmes arithmétiques, un autre pan important des recherches menées en psychologie cognitive concerne l'étape de construction d'une représentation du problème (Julo, 1995, 2002 ; Thevenot et al., 2006, 2010) ; les représentations efficaces consistant en « représentations schématiques » (mentales ou externalisées sur papier) qui mettent en évidence les données importantes du problème et les relations qui les unissent (Hegarty & Kozhenikov, 1999). Selon Julo (2002), deux séries de travaux complémentaires ont fait émerger un axe de recherche focalisé sur le rôle de ces « représentations schématiques » dans la résolution de problèmes : d'une part, les travaux portant sur les catégories de problèmes additifs et multiplicatifs (Riley et al., 1983 ; Greer, 1992, dans le monde anglo-saxon ; Vergnaud, 1983, 1990, dans le monde francophone) et, d'autre part, les travaux en psychologie cognitive ayant montré qu'une caractéristique essentielle de l'expertise était la capacité à catégoriser les problèmes proposés (Schoenfeld, 1992 ; Tardif, 1992). Ainsi, en s'appuyant sur cette logique, de nombreuses recherches se sont attelées à développer des programmes d'enseignement/apprentissage visant à apprendre aux élèves à construire des représentations schématiques correspondant aux différentes catégories de problèmes (voir par ex. Willis & Fuson, 1988 sur la base de la classification de Rilet ey al., 1983 et Levain, Leborgne & Simar, 2006 sur la base de la classification de Vergnaud, 1983). A l'heure actuelle, ce type d'approche est interrogé, non seulement quant à la transposition directe de la notion de « schéma-problème mental » en une méthode d'apprentissage explicite de ces schémas (Julo, 2002) mais aussi quant à la notion même de « schéma-problème » dans la mesure où ceux-ci ne permettrait pas de rendre compte de certaines démarches d'élèves (Coquin-Viennot & Morreau, 2003). D'aucuns (Thevenot et al., 2006, 2010) préfèrent aujourd'hui parler de « modèles épisodiques de situations » pour faire référence à des constructions mentales qui tiendraient davantage compte du contexte dans lequel les représentations sont construites.

2.2. Aperçu des apports des recherches menées dans la perspective socioculturelle

Les recherches s'inscrivant dans les approches socioculturelles sont basées sur les travaux de Vygotsky dont une des thèses fondamentales est de considérer l'activité humaine comme socialement médiatisée par des instruments (Crahay, 1999). Face à la problématique de la symbolisation, les mathématiques occupent une position qui les distingue des autres sciences : les objets mathématiques n'ont pas d'existence tangible et ne sont pas directement accessibles à la perception ; ils appartiennent à une « réalité virtuelle » pour laquelle la seule voie d'accès passerait alors par des représentations symboliques (Sfard, 2000).

Dans les approches socioculturelles, plusieurs auteurs (voir notamment les ouvrages de Cobb et al., 2000 ; Gravemeijer et al., 2002a) considèrent que les activités de symbolisation font partie intégrante du raisonnement mathématique plutôt que de constituer un soutien externe à celui-ci. Dans cette perspective, les activités de symbolisations sont considérées comme centrales et les symbolisations informelles des élèves constituent le point de départ d'activités de symbolisation plus formelles (Gravemeijer, Cobb, Bowers & Whitenack, 2000).

La place accordée aux symboles et à leur construction dans les approches socioculturelles diffère donc fortement de la vision traditionnelle de l'enseignement où les symboles conventionnels sont proposés d'emblée aux élèves à qui on explique ce qu'ils représentent et comment ils doivent les utiliser. D'aucuns (Gravemeijer, 1997, 2002 ; Gravemeijer, Lehrer, van Oers & Verschaffel, 2000b) qualifient dès lors les approches traditionnelles de descendantes (*ou top-down)* par opposition aux approches socioculturelles qui sont considérées comme étant ascendantes (*ou bottom-up*). Autrement dit, alors que l'approche traditionnelle présente d'emblée aux élèves des modèles concrets qui doivent les aider à acquérir les mathématiques abstraites, les approches socioculturelles considèrent que la façon dont les symboles sont utilisés et la signification qu'ils acquièrent émergent en parallèle et sont « mutuellement constitutives » (Cobb, 2000).

Dans l'approche traditionnelle, le matériel manipulable est utilisé pour rendre les mathématiques abstraites plus concrètes et plus accessibles aux élèves. Les symboles sont considérés comme représentant, de façon fixe et non ambigüe, des référents spécifiques et le rôle de l'enseignant est alors d'expliquer aux élèves ce que ces symboles signifient et comment il doivent être utilisés (Gravemeijer, 1997; Gravemeijer et al., 2000, 2002b). Dans le domaine qui nous occupe, cela peut se traduire par l'utilisation de matériel à compter (blocs ou bouchons) pour illustrer les opérations. L'addition est alors présentée comme traduisant la mise en commun des deux ensembles d'objets (ou l'ajout d'un ensemble sur l'autre) et comme étant symbolisée par l'opération a+b=c, ou a et b représentent les deux ensembles de départ et c leur réunion. Pour la soustraction, le symbolisme conventionnel est introduit de façon similaire, après illustration de l'action de retrait au départ de matériel concret.

Les approches socioculturelles préconisent d'accorder une place plus active aux élèves dans la co-construction des concepts et des symboles (voir notamment Bednarz, Dufour-Janvier, Poirier & Bacon, 1993 ; Gravemeijer, 1997 ; Gravemeijer et al. 2000 ; McClain, 2000 ; van Oers, 2002 ; Yackel, Cobb & Wood, 1999). Plutôt que de présenter d'emblée les symboles comme des représentations externes de relations mathématiques préexistantes, Bednarz et al. (1993) défendent l'idée de faire construire les symbolisations par les élèves eux-mêmes dans des situations de communication les invitant à représenter leur compréhension des phénomènes mathématiques investigués. Les auteurs développent ainsi une séquence d'enseignement basée sur des passagers qui montent et descendent d'un bus, conduisant progressivement les enfants à représenter les opérations additives et soustractives dans le but de garder des « traces » des actions effectuées dans l'histoire, pour à la fois être capables de résoudre le problème proposé et pouvoir communiquer à son propos. Dans la perspective de la *Realistic Mathematics Education* (Gravemeijer, 1997), les connaissances et les stratégies informelles des apprenants devraient constituer le point de départ de l'apprentissage ; le défi pour l'enseignant est alors d'aider les élèves à réaliser la transition vers des activités mathématiques plus formelles dans lesquelles les symboles conventionnels prennent réellement du sens (Gravemeijer et al., 2000). Dans les travaux de Gravemeijer et de ses collaborateurs, un des concepts clés relatif à la problématique de la symbolisation est l'émergence de significations partagées par la communauté d'apprenants (*taken-as-shared meanings*) qui se développent lorsque les apprenants et l'enseignant négocient les différentes interprétations et solutions possibles face à un problème. Ces approches « *bottom-up* » donnent un tout autre statut à la symbolisation : la métaphore de « transmission de connaissances » (où la signification prédéfinie des symboles a été fournie d'emblée aux élèves) est remplacée par une image où les élèves construisent eux-mêmes leurs propres façon de symboliser en prenant part à une activité mathématique porteuse de sens (Gravemeijer et al., 2002b).

3. Contexte et questions de recherche

Les études présentées dans le cadre de cet article se sont déroulées dans des classes de 1ère année primaire en Communauté française de Belgique.

Sur la base d'une analyse des manuels couramment utilisés et de quelques interviews d'enseignants, une enquête par questionnaire a été construite et administrée auprès de 118 enseignants du premier degré de l'école primaire (Fagnant & Hindryckx, 2006). Elle permet de dégager quelques caractéristiques importantes des pratiques enseignantes, relativement à la thématique qui nous occupe.

Tout d'abord, il est à noter qu'en 1ère primaire, la résolution de problèmes constitue la situation la moins fréquente de rencontre des notions d'addition et de soustraction : ce sont les décompositions additives, les calculs et autres situations classiques qui priment. Un tiers des enseignants seulement déclare appuyer dès le début de l'année l'apprentissage des opérations sur la résolution de problèmes verbaux. La plupart postposent la résolution de problèmes au 2e semestre, en fin de 1ère année, voire en 2e année ou au cycle suivant, estimant généralement que certains prérequis (comme des compétences en lecture et une certaine maîtrise des techniques opératoires) sont nécessaires.

Ensuite, une proportion non négligeable d'enseignants déclarent introduire la soustraction en décalage par rapport à l'addition, décalage de quelques semaines pour la moitié d'entre eux (58%), mais parfois beaucoup plus long, introduisant seulement la soustraction lorsque l'addition est bien installée (16%). Or, une approche des opérations par la résolution de problèmes suppose d'aborder l'addition et la soustraction de façon simultanée. En effet, c'est ainsi que l'on peut amener les élèves à analyser en profondeur les situations proposées pour voir s'il convient d'ajouter, de retirer, de comparer, … Autrement dit, si l'on ne propose, dans un premier temps, que des problèmes d'addition, l'enfant apprendra vite qu'il doit additionner les données pour trouver la solution, ce qui ne constitue dès lors nullement une situation problématique mais de l'application de procédures en contexte.

Enfin, les problèmes sont globalement utilisés pour illustrer l'application des opérations formelles vues en classe plutôt que comme moteur d'un apprentissage qui s'appuierait sur les compétences informelles des élèves et qui viserait à développer la compréhension des opérations dans une logique de co-construction des concepts et des symbolisations. Dans une perspective « descendante » (*top-down*), les problèmes servent davantage à appliquer les concepts et les symbolisations appris antérieurement qu'à les faire émerger (perspective « ascendante », *bottom-up*) dans des situations de communication invitant les élèves à représenter leur compréhension des phénomènes mathématiques investigués (Bednarz et al., 1993) et leur permettant de construire des significations partagées (Gravemeijer et al., 2002b).

C'est dans ce contexte d'enseignement relativement « traditionnel » qu'il faut interpréter les résultats présentés dans la suite de cet article. Ils sont scindés en deux questions de recherche qui se situent à la croisée des perspectives théoriques cognitives et socioculturelles : la première s'intéresse à l'utilisation des symbolisations face aux opérations arithmétiques et la seconde envisage le rôle des problèmes pour donner du sens aux symbolisations mathématiques formelles.

La première question (*Quelle utilisation les élèves font-ils des symbolisations face aux opérations arithmétiques ?*) présente les constats principaux de deux études portant sur l'utilisation, par des élèves de 1ère année primaire, de différents symbolisations informelles (comme l'utilisation de matériel manipulable, des doigts ou de représentations dessinées) et plus formelles (comme des diagrammes de Venn, des graphes fléchés ou des calculs). On peut considérer qu'il s'agit d'un prolongement des recherches menées en psychologie cognitive (cf. point 2.1.), mais aussi d'une perspective socioculturelle s'intéressant aux activités de symbolisations des élèves (cf. point 2.2.). En effet, en accord avec Cobb (2000), on considèrera que le terme « symbole » est utilisé pour qualifier toutes situations dans lesquelles des « entités concrètes », comme des traces inscrites sur papier - *dessins, schémas, calculs,…* - des images sur un écran d'ordinateur ou un arrangement d'objets physiques, sont interprétés comme représentant ou signifiant autre chose.

On pense généralement que les élèves doivent disposer d'une certaine maîtrise des techniques opératoires avant de résoudre les problèmes. Les recherches portant sur les stratégies informelles des enfants montrent qu'il n'en est rien et que les jeunes élèves développent spontanément des compétences importantes dans ce domaine avant tout enseignement spécifique en arithmétique ou en résolution de problèmes (Fagnant, 2005a,b). En lien avec la perspective socioculturelle, on retiendra que les problèmes pourraient être un contexte approprié pour introduire les opérations additives et soustractives et pour donner du sens aux symbolisations mathématiques liées. C'est l'objet de la deuxième question (*Des problèmes pour donner du sens aux symbolisations mathématiques formelles ?*) qui présente les résultats d'une étude exploratoire dans laquelle deux pistes didactiques ont été développées dans des classes de 1ère primaire.

4. Quelle utilisation des symbolisations face aux opérations arithmétiques ?

Deux études menées en Communauté française de Belgique permettent d'apporter des éclairages complémentaires à la question de l'utilisation de symbolisations variées par des élèves de 1ère année primaire.

4.1. Résultats principaux de la première étude

La première étude (Fagnant, 2002a,b, 2005a,b), réalisée auprès de 25 élèves issus de différentes classes de 1ère année primaire, consiste en des interviews individuelles réalisées aux mois de janvier et juin et portant sur les 14 problèmes de la classification de Riley et al. (1983) : 2 problèmes de type « combinaison », 6 problèmes de type « changement » et 6 problèmes de type « comparaison ». Tous les problèmes sont formulés de façon très proche et impliquent une opération avec passage à la dizaine. L'approche est assez similaire à celle développée par De Corte et Verschaffel (1987) : l'interviewer lit les problèmes à voix haute, l'enfant répète le problème et tente de le résoudre avec l'aide de matériel concret (des poupées et des blocs) ; il est alors invité à écrire un calcul qui correspond à l'histoire et/ou à la stratégie développée pour résoudre le problème.

En ce qui concerne ***l'utilisation de symbolisations***, il est à noter qu'une large majorité des élèves s'appuie sur du matériel manipulable pour résoudre les problèmes (88% de stratégies de type « matériel » en janvier et 66% en juin). Il semblerait que c'est l'utilisation de matériel manipulable autorisant à symboliser les nombres impliqués dans le problème et à représenter les opérations sur ces nombres qui permet aux élèves de résoudre une variété importante de problèmes, comme l'avaient déjà montré des recherches antérieures (voir Verschaffel & De Corte, 1997 pour une synthèse).

A l'opposé, les résultats montrent également que les élèves éprouvent d'importantes difficultés à utiliser un symbolisme mathématique conventionnel et à produire un calcul en lien avec les démarches de résolution développées. Pour tous les problèmes proposés, on observe des différences de performance importantes entre l'utilisation de stratégies informelles de résolution (où les élèves démontrent des compétences non négligeables avant tout enseignement formel en résolution de problèmes) et la production de calculs (où les élèves sont moins performants, témoignant ainsi de difficultés d'utilisation du symbolisme mathématique pourtant utilisé en classe pour travailler les techniques de calcul).

A titre illustratif, le tableau 2 présente les résultats observés en fin de 1ère année primaire pour les six problèmes de la catégorie « changement ». La résolution est considérée comme correcte dès qu'elle permet d'aboutir à la réponse attendue. Si l'enfant commettait une erreur de comptage, l'interviewer l'invitait à recompter de façon à éviter les erreurs « techniques ». Pour être considérés comme corrects, les calculs doivent avoir une structure correcte (« 4-7=3 » ou « 4-7=11 » sont des contre-exemples) et être construits au départ des trois nombres attendus (les deux données de l'énoncé et la réponse attendue). De plus, la réponse doit être identifiée correctement au sein du calcul (la question était reposée à l'élève et ce dernier devait identifier la solution). En procédant de la sorte, le calcul 7+(5)=12 (la parenthèse indiquant la réponse identifiée par l'enfant) est considéré comme correcte face au problème de type changement 2 même si ce problème correspond davantage à la soustraction 12-7=(5) tant au niveau de calcul relationnel (qui correspond ici au calcul numérique) que des stratégies informelles de résolution (consistant généralement à retirer 7 blocs d'un tas de 12 blocs).

Dans le tableau 2, on note que, face à chaque problème, le nombre de calculs corrects est toujours inférieur au nombre de réponses correctes. La colonne « différence » témoigne de difficultés spécifiques d'utilisation du symbolisme mathématique puisqu'elle pointe le nombre d'élèves qui ont été incapables de produire un calcul correct face à un problème qu'ils avaient pourtant résolu correctement (en développant une démarche informelle s'appuyant sur le dénombrement). Par ailleurs, aucun élève n'est parvenu à produire un calcul correct s'il n'avait au préalable résolu le problème correctement. Enfin, notons encore que les constats illustrés ici pour le problème de la catégorie « changement » se vérifient pour les 14 problèmes testés.

	Nombre de réponses correctes (sur 25)	Nombre de calculs corrects (sur 25)	Différence
Changement 1 – Pierre avait 4 pommes. Anne a donné 9 pommes à Pierre. Combien de pommes Pierre a-t-il maintenant ?	23	17	6
Changement 2 – Pierre avait 12 cerises. Pierre a donné 7 cerises à Anne. Combien de cerises Pierre a-t-il maintenant ?	22	13	9
Changement 3 – Pierre avait 5 bonbons. Anne a donné quelques bonbons à Pierre. Maintenant, Pierre a 11 bonbons. Combien de bonbons Anne a-t-elle donnés à Pierre ?	19	13	6
Changement 4 – Pierre avait 11 sucettes. Pierre a donné quelques sucettes à Anne. Maintenant, Pierre a 7 sucettes. Combien de sucettes Pierre a-t-il données à Anne ?	23	17	6
Changement 5 – Pierre avait quelques livres. Anne a donné 6 livres à Pierre. Maintenant, Pierre a 11 livres. Combien de livres Pierre avait-il au départ ?	18	11	7
Changement 6 – Pierre avait quelques crayons. Pierre a donné 5 crayons à Anne. Maintenant, Pierre a 9 crayons. Combien de crayons Pierre avait-il au départ ?	12	8	4

Tableau 2. *Résultats observés en fin de 1ère année primaire pour les problèmes de la catégorie « changement »*

Pour mieux cerner les principales ***difficultés rencontrées avec l'utilisation des symbolisations formelles***, une analyse par profils d'élèves et une analyse des erreurs les plus courantes ont été réalisées. L'analyse par profils d'élèves révèle qu'au mois de juin, seuls 4 élèves sur 25 ont pu symboliser tous les problèmes qu'ils avaient résolus correctement en utilisant un calcul adéquat (calcul relationnel correspondant à l'histoire ou calcul standart) faisant appel aux signes « plus » et « moins » ; 5 élèves ont produit au minimum une fois un calcul correct utilisant chacun des deux signes opératoires, mais pas face à tous les problèmes résolus par comptage et/ou pas toujours de façon appropriée (ex. 7+ ?=12 face à un problème soustractif) ; 13 ont été capables d'utiliser uniquement le signe « plus » et n'ont produit aucun calcul correct utilisant le signe « moins » ; enfin, 3 élèves n'ont pas pu proposer un seul calcul correct alors qu'ils avaient pourtant résolu plusieurs problèmes correctement. Ces résultats sont pour le moins « surprenants » au terme d'une année d'enseignement durant laquelle les élèves ont eu maintes fois l'occasion de rencontrer ces symbolisations pour entraîner les techniques opératoires (voir Fagnant, 2005b, pour une présentation plus détaillée).

Par ailleurs, l'analyse des erreurs commises par les élèves permet d'apporter des arguments en faveur de l'hypothèse selon laquelle l'utilisation d'un symbolisme mathématique qu'ils n'ont pas suffisamment intégré pourrait être un facteur déclencheur de stratégies superficielles. En effet, si les erreurs commises au moment de la résolution informelle (symbolisations informelles) semblent essentiellement de nature conceptuelle (mauvaise compréhension d'un terme relationnel – de plus, de moins, ensemble,…), celles commises au moment de la production du calcul (symbolisations formelles) semblent plutôt faire appel à des démarches superficielles « classiques » (Verschaffel & De Corte, 1997, 2005). Ainsi, plusieurs élèves semblent avoir recours aux « mot-clés » (*ex. les termes « de plus » induisent l'opération 5+11=16 face au problème « Pierre a 5 billes. Anne a 11 billes. Combien de billes Anne a-t-elle de plus que Pierre ? » alors que la réponse « 16 » n'était pas proposée au moment de la résolution informelle*) ou produisent un calcul respectant le présupposé selon lequel « tout problème a une solution que l'on obtient en effectuant une opération arithmétique au départ de toutes les données de l'énoncé » mais qu'ils ne parviennent pas à interpréter (*ex. proposer le calcul 4+9=13, en considérant que la réponse est « 9 » et en étant incapable d'interpréter la nature de la réponse « 13 » dans le problème « Pierre a 4 billes. Anne a 9 billes de plus que Pierre. Combien de billes Anne a-t-elle* ?) (voir Fagnant, 2002b, pour une présentation plus détaillée).

4.2. Résultats principaux de la deuxième étude

La deuxième étude (Fagnant & Hindryckx, 2008), réalisée auprès de 20 élèves issus de différentes classes de 1ère année primaire, consiste également en des interviews individuelles, réalisées aux mois de janvier/février, mais portant cette fois uniquement sur deux problèmes de type « changement » avec état final inconnu, l'un impliquant une addition (*Pierre avait 5 pièces de monnaie. Anne a donné 3 pièces à Pierre. Combien de pièces Pierre a-t-il maintenant ?*) et l'autre une soustraction (*Pierre avait 8 pièces de monnaie. Pierre a donné 3 pièces à Anne. Combien de pièces Pierre a-t-il maintenant ?).*

Dans le cadre de cet article, nous allons nous intéresser aux tâches de production de symbolisations d'une part et de reconnaissance et d'utilisation de symbolisations prédéfinies d'autre part. Pour la tâche de « production de symbolisations », le problème additif est lu à voix haute aux enfants et ceux-ci disposent de matériel manipulable pour le résoudre. Lorsqu'ils ont résolu le problème, l'interviewer leur propose la consigne suivante : « Tu dois expliquer à un copain comment tu as fait pour trouver la réponse. Fais-le sur la feuille ». Il essaye ensuite de les amener à faire preuve d'inventivité en leur demandant de procéder « autrement » ; puis s'ils ne l'ont pas proposé spontanément, il leur demande de produire un calcul. Pour la tâche de « reconnaissance et d'utilisation de symbolisations prédéfinies », une série de cartes représentant des opérations additives et soustractives (diagrammes de Venn, graphes fléchés, calculs conventionnels,…) est proposée aux enfants. Les représentations figurant sur les cartes ont été choisies au départ d'une analyse des manuels fréquemment utilisés par les enseignants. Les élèves doivent identifier les cartes correspondant au problème proposé et permettant de le résoudre. On leur demande également de justifier leurs choix (pourquoi telle carte a été choisie et pourquoi telle autre non).

Concernant la ***production de symbolisations***, les résultats sont plus encourageants pour le problème additif que pour le problème soustractif. Au départ de démarches informelles, tous les élèves ont résolu correctement le problème additif et 16 d'entre eux proposent au moins une symbolisation correcte : 8 élèves proposent deux symbolisations différentes et correctes (le calcul 5+3=(8) et un dessin d'un tas de 5 et d'un tas de 3 « blocs » - *7 élèves* – ou un dessin de 5 et 3 doigts - *1 élève*) et les 8 autres en proposent une seule (le calcul pour 7 d'entre eux et un dessin de deux tas de « blocs » pour le dernier). Le problème soustractif n'a été résolu correctement que par 14 élèves sur 20 et il est symbolisé correctement par 12 d'entre eux : seuls 3 élèves proposent deux symbolisations différentes (le calcul et un dessin de 8 ronds dont 3 barrés ou entourés), les 9 autres n'en proposent qu'une seule (le calcul pour 8 d'entre eux et un dessin représentant un tas de 5 et un tas de 3 « blocs » pour le dernier, *ce qui correspond davantage à la configuration des éléments une fois le retrait effectué qu'à l'opération mathématique réalisée pour résoudre le problème*). Globalement, les résultats témoignent du manque d'inventivité des élèves pour représenter par un dessin leur stratégie de résolution ; ce constat est particulièrement crucial pour le problème soustractif où ils ne sont que trois à proposer un dessin représentant clairement un retrait.

L’analyse des manuels et l’enquête réalisée auprès des enseignants (Fagant & Hindryckx, 2006) a montré que les élèves étaient confrontés à des symbolisations variées pour représenter les opérations additives et soustractives (diagrammes de Venn, graphes fléchés,…).

Les résultats de la tâche de *production* montrent qu’aucun élève ne produit spontanément de telles symbolisations. Les résultats de la tâche de ***reconnaissance de symbolisations variées*** nuancent en partie ces résultats : si les élèves reconnaissent certaines symbolisations comme représentant adéquatement une opération (par exemple, le diagramme de Venn pour l’addition), nombre d’entre eux témoignent néanmoins de difficultés à lier symbolisations et problèmes puisqu’ils sont majoritaires à choisir à la fois des cartes représentant l’opération correcte et des cartes erronées. Ces cartes erronées correspondant au résultat attendu mais avec d’autres données (ex. un graphe fléché représentant l’opération 6+2 alors que le problème correspond à 5+3), à une opération erronée (8+5=3) ou encore, à une opération inappropriée (ex. 5-3=… pour un problème qui correspond à 5+3).

A titre illustratif, en ce qui concerne les symbolisations conventionnelles du problème additif, le choix de la bonne carte par 12 élèves sur 14 donne une vision assez trompeuse des compétences des élèves dans ce domaine. En effet, ils ne sont que 7 à ne choisir que cette carte parmi les différentes symbolisations conventionnelles proposées : 3 choisissent simultanément « 5+3 » et « 5-3 » et 2 choisissent toutes les cartes exprimant des symboles conventionnels à l’exception de « 5-3= ? ». Ces choix multiples témoignent des difficultés éprouvées par les élèves pour donner du sens aux opérations additives et soustractives en situation de résolution de problèmes : s’ils semblent reconnaître des symbolisations étudiées en classe, ils les utilisent parfois à contre-sens.

5. Des problèmes pour donner du sens aux opérations arithmétiques et aux symbolisations liées ?

Les résultats exposés au point précédent montrent que l’utilisation de matériel manipulable permet aux élèves de résoudre une variété de problèmes mais qu’ils éprouvent d’importantes difficultés à utiliser un symbolisme mathématique conventionnel et à produire un calcul en lien avec les démarches de résolution développées ; l’utilisation de ces symbolisations « mal comprises » pouvant conduire au développement de stratégies superficielles de résolution de problèmes. L’étude exploratoire présentée ici vise à montrer qu’il est possible de travailler au départ des symbolisations informelles produites par les élèves pour les aider à développer une meilleure compréhension des concepts impliqués et pour tendre progressivement vers des symbolisations mathématiques plus conventionnelles qu’ils devraient ainsi mieux intégrer (Fagnant, 2002a).

Deux pistes didactiques ont été développées et expérimentées dans deux classes de 1ère année primaire durant le second semestre scolaire : la première (méthode A) envisage une progression dans l’utilisation des symbolisations (de la manipulation de matériel au calcul formel, en passant par la représentation dessinée de la manipulation) et la deuxième (méthode B) consiste à inviter les élèves à représenter le problème proposé par un dessin symbolisant pas-à-pas, pour chaque phrase de l’énoncé, les personnages et les nombres impliqués ainsi que les actions et/ou relations mentionnées, puis à lier le calcul à cette représentation décomposant les étapes clés du problèmes. La figure 1 illustre les symbolisations correspondant aux deux approches proposées pour un problème du type « *Pierre a 5 billes. Anne donne quelques billes à Pierre. Maintenant, Pierre a 11 billes. Combien de billes Anne a-t-elle données à Pierre ?* ».

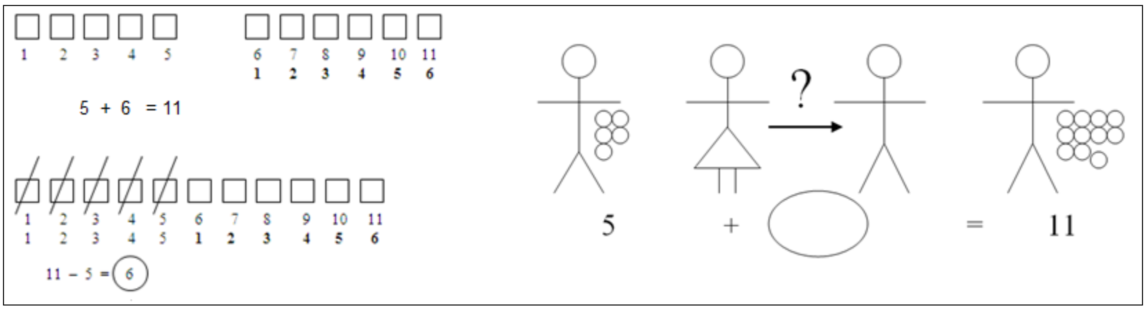

Figure 1. *Représentation des symbolisations produites par les élèves dans les deux approches didactiques*

Les élèves des deux classes expérimentales ont reçu 10 séances d'enseignement s'appuyant sur les méthodes brièvement décrite ci-dessus (classe A, méthode A et classe B, méthode B). Durant chaque séance, quelques problèmes variés, issus de la classification de Riley et al. (1983), étaient proposés aux élèves. Tout d'abord, le problème était lu à voix haute à l'ensemble de la classe. Ensuite, les élèves étaient invités à les résoudre individuellement en s'appuyant sur les symbolisations informelles (*matériel manipulable et dessin de la stratégie de comptage pour la méthode A, représentation schématique de l'histoire pour la méthode B*) et en y associant une symbolisation formelle (*le calcul « collant » à la stratégie de résolution dans la méthode A, le calcul « collant » à l'histoire dans la méthode B*). Enfin, une étape de mise en commun était proposée en vue de confronter les différentes démarches de résolution et les symbolisations associées. Durant cette étape, les symbolisations proposées servaient de support pour aider les élèves à communiquer leur raisonnement mathématique ; les confrontations aidaient à faire évoluer tant les symbolisations elles-mêmes que les démarches de résolution de problèmes et la compréhension des concepts impliqués.

Ces séances ont été accompagnées de divers tests (prétest, test intermédiaire et post-test) permettant de donner un éclairage sur les progrès réalisés par les élèves. De plus, des tests comparatifs ont été proposés en fin d'année (au moment du post-test) dans différentes classes témoins de 1ère année et dans une classe témoin de 2e année. Dans tous les cas, puisque l'on s'intéresse au développement des symbolisations formelles, les réponses ne sont considérées comme correctes que lorsqu'elles présentent un calcul et une réponse corrects.

Le tableau 3 présente les progrès réalisés dans les deux classes expérimentales pour chacune des trois catégories de problèmes. Les résultats permettent de tirer des constats positifs : la ligne reprenant le score pour l'ensemble des problèmes du test indique des progrès continus entre les trois tests, et ceci pour les deux méthodes d'enseignement. De plus, ces progrès continus se marquent pour chaque catégorie sémantique de problèmes.

	Méthode A (N = 15) % moyenne de réussite (*et écart-type*)			Méthode B (N = 18) % moyenne de réussite (*et écart-type*)		
	Prétest	Test interm	Post-test	Prétest	Test interm	Post-test
Test complet	24% *(20%)*	58% *(26%)*	70% *(19%)*	14% *(10%)*	37% *(23%)*	63% *(23%)*
Combinaison	43% *(37%)*	71% *(28%)*	84% *(21%)*	39% *(32%)*	50% *(42%)*	78% *(32%)*
Changement	28% *(31%)*	63% *(28%)*	71% *(23%)*	10% *(13%)*	42% *(29%)*	66% *(25%)*
Comparaison	4% *(12%)*	38% *(33%)*	56% *(30%)*	2% *(8%)*	15% *(17%)*	43% *(39%)*

Tableau 3. *Progrès réalisés dans les classes expérimentales*

Le tableau 4 compare les résultats obtenus au post-test dans les deux classes expérimentales avec les résultats de cinq classes témoins de 1ère année (il s'agit de classes d'écoles voisines, organisées par le même pouvoir organisateur) et d'une classe témoin de 2^{e} année (il s'agit de la classe de la même école que les deux classes témoins). Dans les classes témoins de 1ère année, l'accent a été essentiellement mis sur l'entraînement des techniques de calcul, les problèmes verbaux étant essentiellement proposés en fin d'année, et de façon peu intensive, avec pour objectif principal d'illustrer l'applicabilité des calculs formels utilisés en classe. En deuxième année, les séances de résolution de problèmes arithmétiques sont plus fréquentes mais l'objectif prioritaire reste le même.

	Méthode A (N=15)	Méthode B (N=18)	Moyenne témoin 1P (N=91)	Témoin 1-P (N=22)	Témoin 2-1P (N=12)	Témoin 3-1P (N=25)	Témoin 4-1P (N=25)	Témoin 5-1P (N=7)	Témoin 2P (N=23)
	% moyenne de réussite *(et écart-type)*								
Test complet	70% *(19%)*	63% *(23%)*	35 % *(27%)*	36% *(29%)*	45% *(26%)*	33% *(29%)*	31% *(25%)*	34% *(21%)*	56% *(23%)*
Combinaison	84% *(21%)*	78% *(32%)*	52% *(36%)*	55% *(39%)*	61% *(31%)*	45% *(36%)*	52% *(39%)*	52% *(33%)*	64% *(21%)*
Changement	71% *(23%)*	66% *(25%)*	35% *(31%)*	33% *(31%)*	52% *(30%)*	31% *(29%)*	31% *(31%)*	37% *(29%)*	59% *(24%)*
Comparaison	56% *(30%)*	43% *(39%)*	17% *(28%)*	21% *(32%)*	19% *(26%)*	23% *(36%)*	9% *(18%)*	10% *(16%)*	43% *(29%)*

Tableau 4. *Comparaison des résultats entre les deux classes expérimentales et les classes témoin*

Malgré une certaine diversité des scores dans les classes témoins et une légère différence entre les deux méthodes d'enseignement/apprentissage, les résultats des deux classes expérimentales sont supérieurs à ceux de toutes les classes témoins de 1ère année et à ceux de la classe témoin de 2e année, et ceci pour les trois catégories de problèmes (à l'exception des problèmes de comparaison en 2e année qui obtiennent un score comparable à celui observé pour la méthode B). Il est intéressant de constater que nos résultats s'accordent avec ceux obtenus par Bebout (1990) qui avait développé une méthode proche de notre méthode A dans une classe de 1ère année (cette auteure américaine avait proposé 14 séances d'enseignement portant uniquement sur deux catégories sémantiques – changement et combinaison).

Nous avons calculé un « *effet size* » afin de quantifier l'ampleur de la différence entre les deux classes expérimentales et les résultats moyens de l'ensemble des classes témoins de 1ère année d'une part et ceux de 2e année d'autre part. L'ampleur de l'effet renseigne sur la taille de la différence entre deux moyennes observées, mais n'a pas de visée inférentielle. Généralement, en référence à Cohen (1992), on considère une ampleur de l'effet de 0,2 comme faible, de 0,5 comme modérée et de 0,8 comme élevée. L'ampleur de l'effet peut aussi être considérée comme le percentile moyen auquel se situe le groupe expérimental par rapport au groupe contrôle. Ainsi, à titre indicatif, une valeur de 0,0 indique que la moyenne du groupe expérimental se situe au percentile 50 du groupe contrôle ; une valeur de 0,8 correspond au percentile 79 ; une valeur de 1,0 correspond au percentile 84 et une valeur de 1,7 au percentile 95,5 (Carson, n.d.). Dans notre étude exploratoire, l'ampleur de l'effet est faible entre les deux classes expérimentales (0,36) mais les différences entre la moyenne des classes témoins de 1ère année d'une part et les résultats de chacune des classes expérimentales d'autre part sont d'ampleur très importante (respectivement 1,54 et 1,12 pour les classes A et B). Les différences entre les résultats de chacune des classes expérimentales et ceux de la classe témoin de 2e année sont moins marquées (respectivement 0,68 et 0,28 pour les classes A et B).

La comparaison avec la classe témoin de 2e année est interpellant puisque les élèves de 1ère année surpassent leurs condisciples de la même école, et ceci même si les différences sont d'ampleur moins importante que celles observées face aux classes témoins de 1ère année. Pour tenter d'interpréter ces résultats, rappelons que l'objectif premier de l'enseignement de la résolution de problèmes dispensé dans la classe témoin de 2e année est d'illustrer l'applicabilité des opérations. Dans cette logique, l'enseignant propose des problèmes peu diversifiés (peu de variation de la position de l'inconnue et mots-clés souvent congruents à l'opération attendue) pouvant (et devant) être résolus par des calculs standards de type a+b= ? ou a-b= ? L'inconvénient majeur est que le manque de diversité des situations proposées donne aux élèves une vision très limitée de ces opérations et qu'elle engendre le développement de démarches superficielles lorsque les élèves se trouvent confrontés à des problèmes « conflictuels » (ex. devoir écrire « b-a= ? » pour un problème correspondant à a+ ?=b) ou « inhabituels » (ex. avec des données inutiles). Carpenter et al. (1983) défendent en effet l'idée selon laquelle, après une certaine période d'enseignement, les démarches informelles des jeunes élèves, basées sur le comptage, sont souvent remplacées par des stratégies superficielles dans lesquelles les élèves cherchent à « appliquer le bon calcul ». Une analyse des erreurs commises par les élèves (non détaillée ici) montre que les élèves des classes expérimentales développent peu de démarches superficielles alors que celles-ci ont une occurrence relativement importante dans les classes témoins, et ceci singulièrement dans la classe témoin de 2e année. A titre illustratif, on notera que les erreurs de type « *produire le calcul inverse au calcul attendu* » (a+b= ? plutôt que b-a= ?) ou « *faire la somme de toutes les données, utiles et inutiles* » sont nettement plus élevées dans les classes témoins (21% en 1ère et 32% en 2e) que dans les classes expérimentales (8% et 3%). Par contre, la proportion d'autres types de calculs incorrects varie peu d'une classe à l'autre (entre 9 et 16%) et le taux d'omissions, très important dans les classes témoins de première année (25%), est quasi nul en 2e année puisque les élèves semblent avoir intégré l'idée selon laquelle « face à un problème proposé en classe, il faut faire un calcul ».

6. Discussion et conclusion

Les résultats des deux études empiriques menées en Communauté française de Belgique (point 4) montrent que les élèves éprouvent d'importantes difficultés pour créer des connexions entre leurs démarches informelles et spontanées de résolution de problèmes (principalement basées sur le comptage) et le symbolisme mathématique utilisé en classe pour entraîner les techniques de calcul (symbolisme conventionnel – calculs - mais aussi représentations variées des opérations – diagrammes de Venn, graphes fléchés,…).

Par le passé, plusieurs recherches (voir De Corte & Verschaffel, 1997 pour une synthèse) avaient déjà montré que, contrairement aux présupposés sous-tendant certaines approches d'enseignement (dont celle à laquelle ont été soumis les élèves que nous avons interviewés), la maîtrise des techniques de calculs n'est pas un prérequis à la résolution de problèmes. Les résultats que nous avons obtenus permettent de faire une autre constatation : l'apprentissage des techniques de calculs ne semble pas non plus constituer une aide à la résolution de problèmes. En effet, aucun élève n'est parvenu à produire un calcul correct s'il n'avait pas été capable, au préalable, de résoudre le problème correctement en développant une stratégie informelle. Par ailleurs, l'analyse des erreurs commises par les élèves (et ceci tant dans les deux études empiriques que dans l'étude exploratoire) permet d'apporter des arguments en faveur de l'hypothèse selon laquelle l'utilisation d'un symbolisme mathématique insuffisamment intégré pourrait être un facteur déclencheur de stratégies superficielles en résolution de problèmes. Au contraire, l'étude exploratoire que nous avons menée (point 5) montre qu'il est possible d'enseigner la résolution de problèmes en première année pour donner du sens aux opérations arithmétiques et aux symbolisations liées en s'appuyant sur les démarches informelles et spontanées des élèves.

Dans cet article, nous avons tenté de montrer l'intérêt de combiner les apports de recherches issues de la psychologie cognitive et de la perspective socioculturelle. Dans cette optique, il nous est apparu intéressant de repositionner ici les deux approches didactiques développées dans l'étude exploratoire au sein d'une réflexion plus large relative à la production de symbolisation pour construire le sens des concepts mathématiques d'une part et comme outil de développement de stratégies efficaces de résolution de problèmes d'autre part.

La première piste didactique développée (méthode A) pourrait s'inscrire dans la perspective du modèle de « chaîne de significations » développé par Gravemeijer (1997, 2002 ; Gravemeijer et al., 2002b). Dans cette approche, les premières symbolisations informelles (les blocs manipulés et le schéma de cette manipulation) jouent tout d'abord le rôle d'un modèle ***de*** la situation qu'elles représentent (*a model **of** the situation),* puis elles deviennent un modèle ***pour*** soutenir le raisonnement mathématique (*a model **for** mathematical reasonning*) permettant conjointement l'évolution vers des symbolisations conventionnelles (les calculs) et le développement de la compréhension de certains concepts (comme par exemple la commutativité de l'addition ou le lien entre l'addition à trou et la soustraction) lors des phases de confrontation collective des démarches et des symbolisations liées (voir Fagnant, Crahay & Vlassis, 2005, pour un développement de cette perspective). Ce travail de co-construction des concepts et des symboles, au travers d'une évolution des symbolisations informelles vers des symbolisations plus formelles, s'étend à d'autres processus mathématiques comme notamment l'addition avec passage par la dizaine (Gravemeijer et al., 2000, 2002b), la division écrite (Gravemeijer, 1997 ; van den Heuvel-Panhuizen, 2000) ou encore la décomposition additive d'un nombre (Fagnant, 2009) pour ne reprendre ici que quelques exemples développés en début d'enseignement primaire.

La deuxième piste peut être recadrée dans la problématique relative à la construction de représentations schématiques en résolution de problèmes. Cette approche se situe sur un terrain où les perspectives liées aux approches inspirées de la psychologie cognitive et les apports des recherches menées sous le couvert des approches socio-culturelles font débat : faut-il apprendre aux élèves à utiliser des représentations schématiques prédéfinies correspondant à différentes catégories de problèmes ou est-il plus efficace de partir de leurs productions spontanées (Brousseau, 2004 ; Fagnant & Vlassis, à paraître ; Julo, 2002 ; van Dijk, van Oers & Terwel, 2003 ; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007) ?

Cet article visait à confronter les éclairages de deux champs de recherches (*perspectives cognitiviste et socioculturelle*) relatifs à la construction des premières opérations arithmétiques et des symbolisations liées. S'appuyant sur les apports de ces deux courants, nos résultats plaident en faveur d'approches didactiques qui partent des démarches informelles des élèves pour co-construire le sens des concepts et des symboles (Cobb, 2000). Ce type d'approche semblerait en effet porteur pour contribuer à éviter de donner l'impression aux élèves que les mathématiques consistent à appliquer des règles en manipulant des symboles dont le sens est généralement obscur ou, pour reprendre l'expression de Lampert (1990), à considérer que « faire des maths, c'est suivre les règles données par le prof » et « être bon en math, c'est appliquer correctement ces règles ».

7. Références

Bebout, H.C. (1990). Children's symbolic representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 2*(2), 123-131.

Bednarz, N., Dufour-Janvier, B., Poirier, L. & Bacon, L. (1993). Socioconstructivist viewpoint on the use of symbolism in mathematics education. *Alberta Journal of Educational Research, 39,* 41-58.

Briars, D.J. & Larkin, J.H. (1984). An integrated model of skills in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1,* 245-296.

Bourgeois, E. (2006). Les théories de l'apprentissage : un peu d'histoire. In E. Bourgeois & G. Chapelle (Eds.), *Apprendre et faire apprendre* (pp. 21-36). Paris : PUF.

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation, 30(*2), 241-277.

Carey, D.A. (1991). Number sentences: Linking addition and subtraction word problems and symbols. *Journal for Research in Mathematics Education, 22(*4), 266-280.

Carpenter, T.P., Hiebert, J. & Moser, M. (1983). The effect of instruction on children's solution of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 55-72.

Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. In T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Eds), *Addition and Subtraction. A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grade one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(3), 179-202.

Carpenter, T.P., Moser, J.M. & Bebout, H.C. (1988). Representation of addition and substraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 4,* 345-357.

Carson, C. (n.d.) The effective use of effect size indices in institutional research. Retrieved March 11, 2013, [Page Web]. Accès: http://www.keene.edu/ir/effect_size.pdf

Cobb, P. (2000). From representation to symbolizing: Introductory comments on semiotics and mathematical learning. In P. Cobbs, E. Yackel, & K. Mc Clain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools and instructional design* (pp. 17-36). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Cobb, P., Yackel, E. & Mc Clain, K. (2000, Eds.). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools and instructional design.* Mahwah, New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin, 112(1),* 155-159.

Coquin-Viennot, D. & Moreau, S. (2003). Highlighting the role of the episodic situation model in the solving of arithmetical problems. *European Journal of Psychology of Education, XVIII(3),* 267-279.

Crahay, M. (1999). *Psychologie de l'Education.* Paris: PUF.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' solution strategies of elementary addition and substraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 18,* 363-381.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1988). Computer simulation as a tool in research on problem solving in subject-matter domains. *International Journal of Educational Research, 12,* 46-69.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1991). Some factors influencing the solution of addition and substraction word problems. In K. Durkin & B. Shire (Eds), *Language and Mathematical Education* (pp. 117-130). Milton Keynes : Open University Press.

Fagnant, A. (2002a). *Quelle compréhension du symbolisme mathématique au travers de la résolution de problèmes arithmétiques?* Thèse de doctorat non publiée. Université de Liège. Belgique.

Fagnant, A. (2002b). Mathematical symbolism : A feature responsible for superficial approaches ? A.D. Cockburn and E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 345-352). Norwich, UK : University of East Anglia.

Fagnant, A. (2005a). Résoudre et symboliser des problèmes additifs et soustractifs en début d'enseignement primaire. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ? (*pp. 131-150). Bruxelles : De Boeck.

Fagnant, A. (2005b). The use of mathematical symbolism in problem solving. An empirical study carried out in grade one in the French Community of Belgium. *European Journal of Psychology of Education, XX (4),* 355-367.

Fagnant, A. (2009). Teacher's role, mathematical discourse between children and evolution of the first symbolizations: An analysis of a mathematical learning activity. In A. Gomes (Ed.). *Elementary Mathematics Education – Proceedings of the 3rd Meeting/ Matemática Elementar* - Actas do 3 (pp. 151-160). º Encontro. Braga (novembre 2008): AEME/IEC-UM.

Fagnant, A. & Hindryckx, G. (2006). La résolution de problèmes : enquête auprès des enseignants du cycle 5-8. *Actes du quatrième congrès des chercheurs en éducation,* 111-113. Namur, du 21 au 22 mars 2006..

Fagnant, A. & Hindryckx, G. (2008) Les opérations additives et soustractives : quand les symbolisations informelles et plus conventionnelles s'en mêlent (ou s'emmêlent ?). *Les cahiers des Sciences de l'Education, 27&28(2008),* 7-23.

Fagnant, A. & Vlassis, J. (à paraître). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics.*

Fagnant, A., Vlassis, J. & Crahay, M. (2005). Using mathematical symbols at the beginning of arithmetical and algebraic learning. In Verschaffel, L. De Corte, E. Kanselaar, G. & Valcke, M. (Eds.). *Powerful environments for promoting deep conceptual and strategic learning* (pp. 81-95). (Studia Paedagogica, n°41). Leuven: Leuven University Press.

Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre*. Paris : Delachaux & Niestlé.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective* (pp. 315-345). Hove, East Sussex : Psychology Press Ltd.

Gravemeijer, K. (2002). Preamble : From models to modelling. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 7-22), Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000). *Symbolizing, modelling, and instructional design.* In P. Cobbs, E. Yackel & K. Mc Clain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools and instructional design* (pp. 225-273). Mahwah, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Gravemeijer, K., Lehrer, R., van Oers, B. & Verschaffel, L. (2002a). (Eds.). *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education.* Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K., Lehrer, R., van Oers, B. & Verschaffel, L. (2002b). Introduction and overview. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 1-5). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Greer, B. (1992). Multiplication and divisions as models of situations. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Hegarty, M. & Kozhenikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91(4),* 684-689.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement.* Rennes :. P.U. de Rennes.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N , 69,* 31- 52.

Kintsch, W. & Greeno, J.G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review, 92(1),* 109-129.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27(1),* 29-63.

Levain, JP., Le Borgne, P. & Simar, A. (2006). Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA. *Revue Française de Pédagogie, 159,* 95-109.

McClain, K. (2000). An analysis of teacher's role in supporting the emergence of symbolizations in one first-grade classroom. *Journal of Mathematical Behavior, 19,* 189-207.

Riley, M.S., Greeno, J.G. & Heller, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-200). New York: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 334-370). New York : Macmillan.

Schoenfeld, A.H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM Mathematics education, 39,* 537-551.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being. Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobbs, E. Yackel, & K. Mc Clain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Siegler, R.S. (2001). *Enfant et raisonnement. Le développement cognitif de l'enfant.* Bruxelles : De Boeck.

Tardif, J. (1992). *Pour un enseignement stratégique*. Québec : Logiques.

Thevenot, C., Coquin, D. & Verschaffel, L. (2006). La résolution de problèmes. In P. Barrouillet & V. Camos (Eds.). *La cognition mathématique chez l'enfant* (pp. 155-180). Marseille : Solal.

Thevenot, C., Barrouillet, P. & Fayol, M. (2010) De l'émergence du savoir calculer à la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. In M. Crahay & M. Dutrevis (Eds.), *Psychologie des apprentissages scolaires* (pp. 197-166) Bruxelles: De Boeck.

Van den Heuvel Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Freudenthal Institute.* Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.

Van Dijk, I., van Oers, B. & Terwel, J. (2003). Providing or designing? Constructing models in primary maths education. *Learning and Instruction, 13,* 53-72.

van Oers, B. (2002). The mathematization of young children's language. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 29-58), Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operation of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser and T.A. Romberg (Eds). *Addition and Subtraction. A cognitive perspective,* (pp. 39-59). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Vergnaud, G. (1983). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Bern : Peter Lang.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des Mathématiques, 10* (2.3), 133-170.

Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Word problems : A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school ? In T. Nunes & P. Bryant (Eds), *Learning and Teaching Mathematics : An International Perspective* (pp. 69-97). UK : Psychology Press Ltd.

Verschaffel, L. & De Corte, E. (2005). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (153-176). Bruxelles : De Boeck.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.

Yackel, E., Cobb, P. & Wood, T. (1999). The interactive constitution of mathematical meaning in one second grade classroom: An illustrative example. *Journal of Mathematical Behavior, 17,* 469-488.

Willis, G.B. & Fuson, K.C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and substraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 80(2),* 192-201.