

# **Sur l'évaluation des défauts de forme à partir de mesures tridimensionnelles**

Jean-François Debongnie et Luc Masset

Laboratoire de méthodes de fabrication

Université de Liège

21, rue E. Solvay

B-4000 Liège

Belgique

Phone : 04-3669271

04-3669273

Fax : 04-3669272

E-mail : [JF.Debongnie@ulg.ac.be](mailto:JF.Debongnie@ulg.ac.be)

[Luc.Masset@ulg.ac.be](mailto:Luc.Masset@ulg.ac.be)

## **Summary**

Owing to the fact that a correct evaluation of form errors is particularly difficult by the classical ways, it seems more efficient to develop numerical algorithms from 3D measures. Several methods are described, including direct and iterative ones. A new method is proposed, which is based on  $L_p$ -norms and a specialized algorithm. It proved to be the most effective and robust one in every studied application. Another problem which is seldom studied, concerns the sensibility of form errors to measure errors. A theory is presented which leads to a very simple result.

## **Résumé**

Partant de la considération du fait qu'il est très malaisé de déterminer les erreurs de forme par les procédures métrologiques classiques, on s'attache à décrire diverses méthodes de calcul de ces erreurs à partir de mesures tridimensionnelles. Diverses méthodes sont proposées, dont des méthodes directes et des méthodes itératives. On présente en particulier une méthode nouvelle, fondée sur les normes d'ordre  $p$ , qui, dans toutes les applications étudiées, s'est révélée très rapide et très stable. On aborde ensuite le problème rarement étudié de la sensibilité des erreurs de forme aux imprécisions de mesure, pour lequel un résultat particulièrement simple est obtenu.

**Key-words : tolerancing, form errors, metrology,  $L_p$ -norms**

**Mot-clés : tolérance, erreurs de forme, métrologie, normes d'ordre  $p$**

# 1. Introduction

La détermination des défauts de forme revêt une très grande importance dans le domaine industriel, car elle conditionne dans bien des cas la fonctionnalité des assemblages ou des mécanismes. Malheureusement, la mesure directe des défauts de forme est très difficile, voire impossible.

Que l'on songe par exemple aux mesures de planéité. Classiquement, l'opérateur *dégauchit* la pièce, de manière à la rendre *à peu près* parallèle au marbre qui lui sert de référence. Ensuite, il mesure en fait le *parallélisme* de la surface ainsi dégauchie par rapport au marbre. Un autre opérateur aurait dégauchi la pièce *autrement*, et aurait donc obtenu *une autre* erreur de planéité.

En circularité, à partir d'une mesure des rayons pour divers azimuts, il faut trouver deux cercles concentriques qui encadrent *au mieux* le profil obtenu, ce qui est tout aussi délicat. Plus délicate encore est la recherche de l'erreur de cylindricité pour laquelle il faut encore trouver la bonne orientation de l'axe. Des recherches effectuées en Allemagne de l'Est ont mené à la norme TGL 39097 qui ne donne que des procédures *simplifiées* ne conduisant pas toutes au même résultat [1].

Les méthodes directes de mesure ne permettent pas de déterminer un défaut de forme de *manière objective* ce qui ouvre la porte à toute espèce de contestation entre fournisseur et acheteur. Il semble donc indispensable de traiter le problème par *voie numérique*, ce qui permet de s'affranchir de tout dégauchissage.

La méthode consiste alors à enregistrer les mesures en coordonnées puis à calculer l'erreur de forme au moyen d'algorithmes adaptés. Ceux-ci doivent être capables de déterminer la *vraie valeur de l'erreur de forme*, c'est-à-dire la valeur minimum de l'encadrement des points de mesure. On satisfait alors à l'exigence d'*objectivité*, en ce sens que pour des points de mesure donnés, la solution est univoquement déterminée, au moins en ce qui concerne la valeur du défaut.

Le présent papier se propose de passer en revue quelques méthodes de calcul de la valeur du défaut et présente un algorithme nouveau fondé sur les normes *p*. Il aborde en outre la question de la sensibilité des erreurs de forme aux incertitudes des données mesurées. Sur ce point, un résultat très simple est obtenu.

# 2. Formalisation du problème des tolérances de forme

## 2.1. Fonction d'encadrement

Dans un souci de synthèse et de généralité, nous croyons utile de *formaliser* les problèmes de tolérances de forme. Les mesures tridimensionnelles fournissent un ensemble compact *K* fini de points de mesure. Les tolérances de forme s'expriment toujours par un *encadrement* : deux droites extrêmes dans le cas de la rectitude, deux plans extrêmes dans le cas de la planéité, deux cercles concentriques extrêmes en circularité et deux cylindres coaxiaux en cylindricité. Mathématiquement, on peut parler d'une *fonction d'encadrement* continue  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$  dépendant des coordonnées  $\mathbf{x}$  et d'un jeu de paramètres  $\boldsymbol{\lambda}$ . Sa valeur  $f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\lambda}) = f_i(\boldsymbol{\lambda})$  est appelée *hauteur* du

point  $x_i$ .

En rectitude, la fonction d'encadrement vaut

$$f(x, y, \varphi) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \quad (1)$$

où  $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ . La hauteur du point  $i$  se mesure perpendiculairement à la droite de normale  $\mathbf{n}$  passant par l'origine des axes (figure 1).

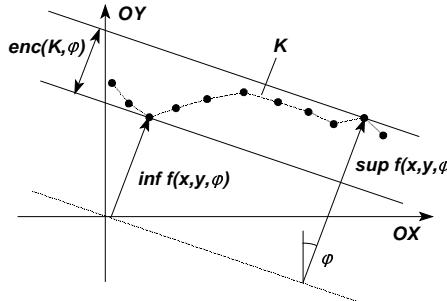


Figure 1 : Fonction d'encadrement et valeur d'encadrement en rectitude

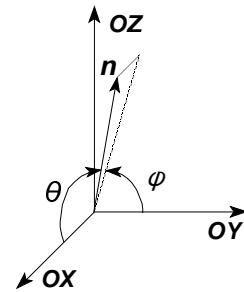


Figure 2 : Choix des angles  $\theta$  et  $\varphi$

En planéité, en supposant la surface mesurée approximativement horizontale, la fonction d'encadrement vaut

$$f(x, y, z, \theta, \varphi) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \quad (2)$$

où  $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi)$ . Les angles  $(\theta, \varphi)$  sont choisis de manière à placer le pôle sur l'axe des  $x$  afin d'éviter d'éventuels problèmes numériques. La hauteur du point  $i$  se mesure perpendiculairement au plan de normale  $\mathbf{n}$  passant par l'origine des axes (figure 2).

En circularité, soient  $a$  et  $b$  les coordonnées d'un centre. La fonction d'encadrement vaut

$$f(x, y, a, b) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \quad (3)$$

et la hauteur du point  $i$  est la distance de ce point au centre (figure 3).

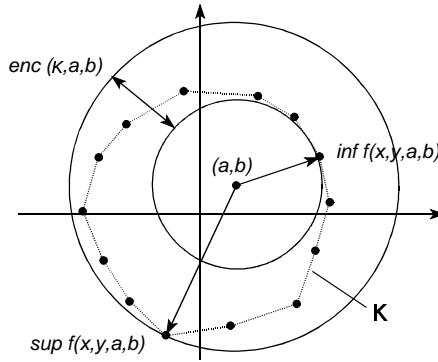


Figure 3 : Fonction d'encadrement et valeur d'encadrement en circularité

Pour la cylindricité, on se ramène au cas de la circularité en commençant par définir un axe de direction

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi) \quad (4)$$

puis en projetant les points mesurés  $(x, y, z)$  sur les deux axes perpendiculaires

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = (\sin \theta, -\cos \theta \cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi) \\ \mathbf{e}_2 = (0, \sin \varphi, -\cos \varphi) \end{cases} \quad (5)$$

La fonction d'encadrement vaut alors

$$f(x, y, z, \theta, \varphi, a, b) = \sqrt{(x_p - a)^2 + (y_p - b)^2} \quad (6)$$

où  $(a, b)$  sont les coordonnées d'un centre et  $(x_p, y_p)$  les coordonnées du point projeté dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . La hauteur du point  $i$  mesure la distance de ce point à l'axe  $\mathbf{n}$ .

## 2.2. Valeur d'encadrement et défaut du compact $K$

Nous appelons *valeur d'encadrement* du compact  $K$ , pour une valeur des paramètres  $\lambda$ , le nombre

$$enc (K, \lambda) = \sup_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}, \lambda) - \inf_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}, \lambda) \quad (7)$$

En planéité, par exemple, elle mesure le parallélisme de la surface mesurée par rapport à un plan perpendiculaire à la normale  $\mathbf{n}$ . Cela étant, le *défaut* du compact  $K$  est donné par la plus petite valeur d'encadrement, lorsque l'on varie les paramètres  $\lambda$  :

$$def(K) = \inf_{\lambda} enc(K, \lambda) \quad (8)$$

Nous ne nous étendons pas ici sur la démonstration du fait que cette borne inférieure est *atteinte*, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un minimum réalisé. Disons simplement que cette propriété se démontre à partir des propriétés des ensembles compacts.

### 2.3. Unicité

Une autre question, un peu plus embarrassante, concerne *l'unicité* du minimum : ne peut-il exister plusieurs jeux de paramètres conduisant au même minimum du défaut ? On peut montrer qu'en *circularité*, la solution est unique. En *rectitude* et en *planéité*, par contre, cette unicité n'est pas assurée, et il est assez aisément de trouver des exemples de non-unicité (figure 4). Mais chacun de ceux-ci suppose certaines symétries rarement rencontrées en pratique, si bien que ce problème, sérieux en théorie, ne semble pas avoir de réelles incidences. L'analyse approfondie du cas de la cylindricité n'a jamais été faite à notre connaissance, mais nous sommes enclins à penser que là non plus, l'unicité n'est pas garantie.

### 2.4. Formulation en termes d'écart

Le problème de la recherche des défauts admet une seconde formulation équivalente. Introduisons un paramètre supplémentaire  $\rho$  et définissons l'*écart* par

$$e(\mathbf{x}, \lambda, \rho) = f(\mathbf{x}, \lambda) - \rho \quad (9)$$

Appelons encore *écart maximum* sur  $K$  la grandeur

$$e_{\max}(K, \lambda, \rho) = \sup_{\mathbf{x} \in K} |e(\mathbf{x}, \lambda, \rho)| \quad (10)$$

Il est assez facile de montrer la relation

$$enc(K, \lambda) = 2 \inf_{\rho} e_{\max}(K, \lambda, \rho) \quad (11)$$

le minimum étant atteint pour

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \sup_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}, \lambda) + \inf_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}, \lambda) \right) \quad (12)$$

Cette propriété permet de donner une nouvelle définition du défaut :

$$def(K) = 2 \inf_{\lambda, \rho} e_{\max}(K, \lambda, \rho) \quad (13)$$

Sous cette forme, la recherche du défaut apparaît comme la recherche de la surface d'équation

$$f(\mathbf{x}, \lambda) = \rho \quad (14)$$

dont l'écart maximum à un point de mesure est minimal. C'est un problème de *meilleure approximation uniforme*, s'apparentant à l'approximation des fonctions au sens de Chébyschev [2,3,4,5].

Ainsi, pour la rectitude, la *surface de meilleure approximation* est une droite d'équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = c \quad (15)$$

En planéité, elle correspond au plan d'équation

$$x \cos \theta + y \sin \theta \cos \varphi + z \sin \theta \sin \varphi = d \quad (16)$$

En circularité, c'est un cercle de rayon  $\rho$  et d'équation

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = \rho \quad (17)$$

et en cylindricité, un cylindre d'axe  $\mathbf{n}$ , de rayon  $\rho$  et d'équation

$$\sqrt{(x_p - a)^2 + (y_p - b)^2} = \rho \quad (18)$$

### 3. Calcul approché des défauts à partir des moindres carrés

L'approximation uniforme étant difficile à traiter, nombreux sont ceux qui se contentent de l'approximation qui consiste à minimiser la racine carrée de la somme des écarts

$$def = 2 \sup_{\mathbf{x} \in K} |e(\mathbf{x}, \lambda_2, \rho_2)| \quad (19)$$

où  $e_i = e(\mathbf{x}_i, \lambda, \rho)$ , ce qui permet de déterminer une valeur  $(\lambda_2, \rho_2)$  du jeu de paramètres, à partir de laquelle on peut obtenir une approximation du défaut, à savoir

$$def = 2 \sup_{\mathbf{x} \in K} |e(\mathbf{x}, \lambda_2, \rho_2)| \quad (20)$$

Cette valeur est évidemment approchée *par excès* car elle ne correspond pas au minimum défini en (13). L'expérience montre que cette méthode peut mener à des excès non négligeables et surtout, que les paramètres  $\lambda_2$  peuvent être grandement en erreur. Ce fait est d'ailleurs confirmé par la littérature [4,5]. De plus, sur un grand nombre de pièces réelles aux formes complexes, les moindres carrés tendent à orienter la surface de référence en fonction des zones contenant le plus de points de mesure. La méthode des moindres carrés *n'est donc pas satisfaisante*.

## 4. Méthodes directes de calcul des défauts de forme

Nous appelons *méthodes directes* des méthodes permettant de calculer le valeur optimum du défaut en un nombre *fini* d'opérations. Elles sont fondées sur une analyse géométrique de l'encadrement ou sur une paraphrase des raisonnements de la théorie classique des approximations à la Chébyschev.

### 4.1. Méthode directe d'évaluation de la rectitude

La rectitude d'un profil  $K$  étant définie à partir de son encadrement par deux droites, il est évident que celles-ci encadrent également *l'enveloppe convexe* de  $K$ . La première étape consiste donc à construire celle-ci par la méthode dite *de l'éventail*. Il est assez facile de montrer que tout encadrement subsistant lors d'une perturbation de la direction des droites est non optimal. Par conséquent, l'encadrement optimal est nécessairement tel qu'une des deux droites contienne un côté de l'enveloppe convexe. Il suffit alors de calculer les valeurs d'encadrement s'appuyant sur les côtés de l'enveloppe convexe puis d'en déterminer la plus petite valeur. Celle-ci est égale au défaut.

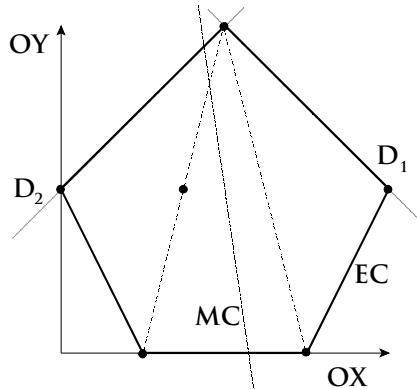


Figure 4 : Existence de deux solutions en rectitude

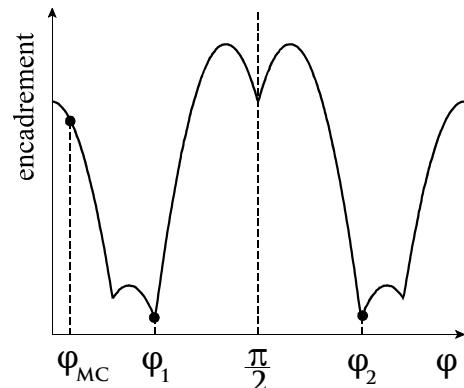


Figure 5 : Encadrement en fonction de l'orientation  $\varphi$  en rectitude

Cet algorithme a le mérite d'être simple à programmer. En outre, il permet d'exhiber des cas de non-unicité de l'encadrement optimal qui sont généralement dûs à des symétries rarement

rencontrées en pratique. La figure 4 montre un profil composé de 6 points de mesure pour lequel il existe deux orientations de l'encadrement donnant le défaut minimum. L'orientation obtenue par les moindres carrés est la droite oblique notée MC. La figure 5 montre l'évolution de l'encadrement du profil en fonction de l'orientation  $\varphi$  de la droite.

Cependant, la non-unicité de l'encadrement optimal pose des problèmes de nature philosophique si le profil en question doit servir de référence pour une mesure de parallélisme.

## 4.2. Méthode directe d'évaluation de la planéité

Les mêmes raisonnements peuvent être transposés au cas de la planéité. Il faut ici construire l'enveloppe convexe de l'ensemble des points de la surface mesurée. Cette construction est beaucoup plus ardue que celle de l'enveloppe convexe d'un profil. En particulier, les points étant en pratique peu distants d'un vrai plan, il faut veiller au bon conditionnement du calcul, ce qui en augmente considérablement le coût. La méthode utilisée, généralisant dans l'espace celle de l'éventail, oscille en complexité entre  $O(n^2)$  et  $O(n^3)$ , où  $n$  est le nombre de points de mesure. Ici, l'encadrement est constitué soit d'un plan contenant une facette de l'enveloppe convexe et du plan parallèle passant par un sommet, soit de deux plans parallèles appuyés sur deux arêtes gauches de l'enveloppe. L'exploration des couples d'arêtes gauches est en principe d'une complexité  $O(n^4)$ , ce qui est prohibitif, mais il est possible d'éliminer *a priori* toute une série de couples sans intérêt. Cet algorithme, conceptuellement simple, est cependant assez délicat à programmer mais il donne des résultats fiables.

On peut également trouver des cas théoriques de non-unicité de l'encadrement optimal mais ce problème ne se rencontre quasiment jamais sur des cas réels.

## 4.3. Méthode directe de calcul de la circularité

En paraphrasant les raisonnements classiques en matière d'approximation de Chébyschev [2,3], on peut obtenir les résultats suivants :

- a. L'encadrement optimal est unique;
- b. Il existe au moins quatre points extrémaux, tels que si on les ordonne en azimut, le premier soit sur le grand cercle, le second sur le petit, le troisième sur le grand, et le quatrième sur le petit: ceci constitue une *caractérisation* du meilleur encadrement;
- c. Si l'on trouve un cercle de centre  $C = (a, b)$  et de rayon  $\rho$  tel qu'il existe quatre points d'azimuts croissants  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  vérifiant

$$e_i = d(P_i, C) - \rho = (-1)^{\alpha+i} |e_i| \quad (21)$$

avec  $\alpha = 0$  ou  $1$ , c'est-à-dire situés alternativement à l'extérieur et à l'intérieur du cercle considéré, alors le défaut de circularité vérifie

$$def \geq 2 \inf_{i=1}^4 |e_i| \quad (22)$$

Cette dernière propriété peut être mise à profit pour calculer le défaut de circularité : prenons quatre points de mesure arbitraires ordonnées en  $\theta$ , soit  $P_i(x_i, y_i)$ . On cherche le point  $(c, d)$  qui soit à la fois à égale distance de  $P_1$  et  $P_3$  et à égale distance de  $P_2$  et  $P_4$ , ce qui mène au système linéaire

$$\begin{cases} 2(x_3 - x_1)c + 2(y_3 - y_1)d = x_3^2 + y_3^2 - x_1^2 - y_1^2 \\ 2(x_4 - x_2)c + 2(y_4 - y_2)d = x_4^2 + y_4^2 - x_2^2 - y_2^2 \end{cases} \quad (23)$$

Ce point définit automatiquement le centre  $C$  d'un cercle pour lequel les conditions (20) sont vérifiées. En notant

$$\Delta(P_1, P_2, P_3, P_4) = ||P_1 - C|| - ||P_2 - C|| \quad (24)$$

on a donc, par les propriétés b et c ci-dessus

$$def = \inf_{P_1, P_2, P_3, P_4 \text{ ordonnés}} \Delta(P_1, P_2, P_3, P_4) \quad (25)$$

ce qui fournit une méthode directe de calcul du défaut. Malheureusement, elle est de complexité  $O(n^4)$  et s'avère prohibitif en temps de calcul pour un nombre de points de mesure supérieur à 100.

#### 4.4. Cylindricité

Il n'existe pas, à notre connaissance, de méthode directe pour le défaut de cylindricité.

### 5. Méthode du simplexe de Nelder et Mead

Il semble plus élémentaire de chercher à minimiser directement l'écart maximal par une procédure numérique. Malheureusement, cette fonction est peu régulière. Le minimum est en forme d'entonnoir, c'est-à-dire que si  $(\lambda_0, \rho_0)$  est le point minimal, on a

$$e_{\max}(\lambda_0 + \Delta\lambda, \rho_0 + \Delta\rho) \geq e_{\max}(\lambda_0, \rho_0) + \alpha \sqrt{||\Delta\lambda||^2 + \Delta\rho^2} \quad (26)$$

et en outre, on trouve de nombreuses *vallées* où le gradient n'est pas uniquement défini (figure 6). Il en résulte que les méthodes classiques, gradient ou Newton-Raphson ne s'appliquent pas. Il faut donc utiliser une méthode qui ne fait intervenir que les valeurs de la fonction elle-même. Ballu *et al* [5] et Pauly [7] ont proposé d'utiliser la méthode du simplexe de Nelder et Mead [6]. Une expérimentation approfondie nous a montré que cette méthode conduit à de bons résultats *pourvu que le simplexe de départ soit bien choisi*. Dans le cas contraire, la méthode converge vers une solution qui n'est pas nécessairement le véritable optimum, sans qu'il soit possible de se prononcer à ce sujet. Or, le bon choix des conditions initiales est parfois loin d'être évident. Ce résultat décevant ôte à nos yeux une bonne part de l'intérêt de la méthode du simplexe.

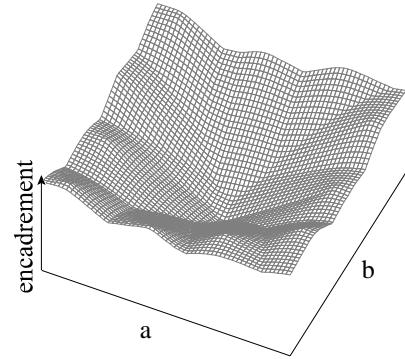


Figure 6 : Encadrement en fonction des coordonnées du centre en circularité

## 6. Méthode d'approximation en norme $p$

### 6.1. Principe

La recherche du défaut consiste à minimiser l'écart maximal. Malheureusement, c'est une fonction peu régulière, et sa minimisation est ardue. On est donc tenté de remplacer l'écart maximal par une fonction approchée plus régulière. La méthode des moindres carrés peut être interprétée comme relevant de cette logique: on remplace  $e_{\max}$  par  $\|e\|_2$ . Le problème est ici que la fonction de remplacement est très différente de la fonction à minimiser. On peut dès lors songer à utiliser les normes  $p$  définies par

$$\|e\|_p = \left( \sum_i |e_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (27)$$

qui ont la propriété fondamentale

$$e_{\max} \leq \|e\|_p \leq e_{\max} n^{\frac{1}{p}} \quad (28)$$

où  $n$  est le nombre de points de mesure. Il en résulte que pour  $p$  tendant vers l'infini, la norme  $p$  des écarts tend uniformément vers l'écart maximal sur tout compact de l'ensemble des paramètres. On peut en outre montrer que pour  $p$  tendant vers l'infini,

- le minimum de la norme  $p$  tend vers le minimum de l'écart maximum, c'est-à-dire le demi-défaut;
- la valeur des paramètres  $(\lambda, \rho)$  au minimum de la norme  $p$  tend vers la valeur qui minimise

l'écart maximal.

L'idée d'exploiter cette propriété avait déjà été émise par Goch [4], mais il se limitait à des valeurs de  $p$  de l'ordre de 50, vraisemblablement pour des raisons de stabilité numérique. Or, il faut monter à des valeurs *bien plus grandes* pour approcher précisément l'écart maximal.

## 6.2. Mise en oeuvre

L'erreur liée au remplacement de l'écart maximal par la norme  $p$  de l'écart est, en valeur relative, de l'ordre de

$$\varepsilon_p = n^{\frac{1}{p}} - 1 \quad (29)$$

ce qui signifie que pour obtenir une précision  $\varepsilon_p$ , il faut que  $p$  vérifie

$$p \geq \frac{\ln(n)}{\ln(1 + \varepsilon_p)} \simeq \frac{1}{\varepsilon_p} \ln(n) \quad (30)$$

Il n'est pas rare d'avoir 1000 points de mesure. Dans ce cas, pour une précision de  $10^{-5}$ , il faut que  $p$  vérifie

$$p \geq 10^5 \ln(10^3) = 6,908 \cdot 10^5 \quad (31)$$

Il s'agit donc de puissances *très élevées*. Le calcul de telles puissances conduit naturellement à de délicats problèmes de dépassement de capacité (*overflow*) que l'on ne peut éviter que par des artifices de mise à échelle dont la description détaillée sort du cadre du présent article, mais qui sont *indispensables* au calcul effectif. A l'heure actuelle, nous travaillons couramment avec des puissances allant de  $10^6$  à  $10^9$ .

## 6.3. Algorithme de minimisation

L'idée de départ consistait à minimiser directement la norme  $p$  avec  $p$  suffisamment grand, par une méthode de Newton-Raphson. Malheureusement, plus  $p$  est grand, moins la norme  $p$  est régulière et plus le processif itératif est long et hasardeux.

En fait, il faut, pour  $p$  donné, partir d'une solution initiale d'autant meilleure que  $p$  est élevé. Pour y arriver, on peut imaginer de procéder comme suit: on se donne une suite croissante  $p_1 < p_2 < p_3 \dots$  et on minimise successivement la norme  $p_i$  en prenant pour point de départ le point optimal pour la norme  $p_{i-1}$ . L'expérience montre que l'on peut abréger fortement cette procédure comme suit :

- a On recherche d'abord le minimum pour  $p = 2$  (moindres carrés);
- b On fait croître  $p$  en progression géométrique de raison  $\sqrt{2}$ . Pour chaque valeur de  $p$ , on se limite à une seule itération de Newton-Raphson, pour autant que l'on ne constate pas d'amorce de divergence.
- c On contrôle la convergence en se fondant sur l'inégalité de Jensen [8] exprimant que pour le même jeu d'écarts, si  $p < q$ ,

$$\|e\|_p \geq \|e\|_q \quad (32)$$

D'une itération à l'autre, si le processus se passe bien, les normes  $p$  doivent donc diminuer, d'une part parce que  $p$  augmente, d'autre part parce que la solution est censée s'améliorer. On conserve donc à chaque instant la plus petite norme obtenue à titre de référence. Si à un moment donné, la nouvelle norme lui est supérieure, on bloque  $p$  jusqu'à ce que la norme obtenue soit redevenue plus petite que la référence.

Cet algorithme a été testé sur un grand nombre de problèmes et comparé à toutes les autres méthodes décrites ci-dessus. Il s'est avéré le plus rapide (de l'ordre de 40 itérations pour  $p = 10^6$ ) et le plus fiable.

## 7. Influence des erreurs de mesure sur la valeur du défaut

### 7.1. Position du problème

Au-delà du calcul des erreurs de forme, il est nécessaire de s'enquérir de leur sensibilité aux erreurs de mesure. Partant toujours de l'idée de mesures tridimensionnelles, nous admettrons que les coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$  mesurées en chaque point sont entachées d'imprécisions  $(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ . La question qui se pose est de déterminer une borne supérieure, aussi réaliste que possible, de l'influence de ces imprécisions sur la valeur de l'erreur de forme.

### 7.2. Les hauteurs et leur imprécision

Pour aborder ce problème, le plus simple est de partir des hauteurs  $f_i(\lambda)$  des points mesurés. Il est clair que la valeur d'encadrement de l'ensemble  $K$  des points de mesure s'écrit alors

$$enc(\lambda) = \sup_i f_i(\lambda) - \inf_i f_i(\lambda) \quad (33)$$

Rappelons que le défaut de forme est la valeur minimale de cette fonction par rapport à  $\lambda$ . Une perturbation des coordonnées conduit aux nouvelles hauteurs

$$f_i^*(\lambda) = f(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i, \lambda) \quad (34)$$

et nous admettrons que la différence

$$\delta f_i(\lambda) = f_i^*(\lambda) - f_i(\lambda) \quad (35)$$

vérifie une inégalité du type

$$|\delta f_i(\lambda)| \leq \epsilon \quad (36)$$

uniformément par rapport à  $\lambda$ . Nous nous réservons de vérifier cette relation pour les 4 erreurs de forme au § 7.6.

### 7.3. Majoration de l'imprécision sur les enveloppes supérieures et inférieures

Supposons un instant qu'il n'y ait que deux points. On a

$$\sup(f_1^*, f_2^*) = \sup(f_1 + \delta f_1, f_2 + \delta f_2) \leq \sup(f_1 + \epsilon, f_2 + \epsilon) \leq \sup(f_1, f_2) + \epsilon \quad (37)$$

En permutant les rôles des  $f_i$  et des  $f_i^*$ , on trouve de même

$$\sup(f_1, f_2) \leq \sup(f_1^*, f_2^*) + \epsilon \quad (38)$$

si bien que

$$|\sup(f_1^*, f_2^*) - \sup(f_1, f_2)| \leq \epsilon \quad (39)$$

Un raisonnement analogue montre que

$$|\inf(f_1^*, f_2^*) - \inf(f_1, f_2)| \leq \epsilon \quad (40)$$

Dans le cas où il y a  $n$  points, le même résultat subsiste par récurrence,

$$\sup(f_1, \dots, f_n) = \sup(\sup(f_1, \dots, f_{n-1}), f_n) \quad (41)$$

et de même pour les enveloppes inférieures. On a donc

$$\begin{cases} \left| \sup_i f_i^* - \sup_i f_i \right| \leq \varepsilon \\ \left| \inf_i f_i^* - \inf_i f_i \right| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (42)$$

## 7.4. Majoration de l'imprécision de la valeur d'encadrement

La valeur d'encadrement perturbée est donnée par

$$enc^*(\lambda) = \sup_i f_i^*(\lambda) - \inf_i f_i^*(\lambda) \quad (43)$$

On en déduit directement

$$\left| enc^*(\lambda) - enc(\lambda) \right| \leq \left| \sup_i f_i^*(\lambda) - \sup_i f_i(\lambda) \right| + \left| \inf_i f_i^*(\lambda) - \inf_i f_i(\lambda) \right| \quad (44)$$

La valeur d'encadrement pour un  $\lambda$  donné ne peut donc être perturbée que de  $2\varepsilon$  au plus.

## 7.5. Majoration de l'imprécision sur le défaut

En appelant  $\mu$  le jeu de paramètres, le défaut est donné par

$$def = \inf_{\mu} enc(\mu) \quad (45)$$

Sa valeur perturbée est

$$def^* = \inf_{\mu} enc^*(\mu) \quad (46)$$

Or, nous savons que pour tout  $\lambda$ ,

$$enc^*(\lambda) \geq enc(\lambda) - 2\varepsilon \geq \inf_{\mu} enc(\mu) - 2\varepsilon \quad (47)$$

Le dernier membre étant indépendant de  $\lambda$ , on a encore

$$\inf_{\lambda} enc^*(\lambda) \geq \inf_{\mu} enc(\mu) - 2\varepsilon \quad (48)$$

A l'inverse,

$$enc(\lambda) \geq enc^*(\lambda) - 2\epsilon \geq \inf_{\mu} enc^*(\mu) - 2\epsilon \quad (49)$$

et, par le même raisonnement, on obtient finalement

$$\inf_{\lambda} enc(\lambda) - 2\epsilon \leq \inf_{\lambda} enc^*(\lambda) \leq \inf_{\lambda} enc(\lambda) + 2\epsilon \quad (50)$$

c'est-à-dire

$$|def^* - def| \leq 2\epsilon \quad (51)$$

C'est le résultat fondamental : *La perturbation du défaut de forme n'excède pas le double de la perturbation des hauteurs.*

## 7.6. Application aux erreurs de forme

Voyons à présent ce que signifie ce résultat pour les quatres erreurs de forme étudiées. En rectitude, les hauteurs valent

$$f_i(\varphi) = x_i \cos \varphi + y_i \sin \varphi \quad (52)$$

On a donc visiblement

$$\delta f_i(\varphi) = \delta x_i \cos \varphi + \delta y_i \sin \varphi \quad (53)$$

et il résulte de l'inégalité du produit scalaire que

$$|\delta f_i(\varphi)| \leq \sqrt{\delta x_i^2 + \delta y_i^2} = \epsilon \quad (54)$$

En planéité, les hauteurs sont données par

$$f_i(\theta, \varphi) = x_i \cos \theta + y_i \sin \theta \cos \varphi + z_i \sin \theta \sin \varphi \quad (55)$$

et

$$\delta f_i(\theta, \varphi) = \delta x_i \cos \theta + \delta y_i \sin \theta \cos \varphi + \delta z_i \sin \theta \sin \varphi \quad (56)$$

A nouveau, l'inégalité du produit scalaire permet d'affirmer que

$$| \delta f_i(\theta, \varphi) | \leq \sqrt{\delta x_i^2 + \delta y_i^2 + \delta z_i^2} = \epsilon \quad (57)$$

En circularité, les hauteurs sont les rayons

$$f_i(a, b) = \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} \quad (58)$$

Cette expression n'est pas linéaire des coordonnées. La *partie principale* de la variation des hauteurs est donnée par

$$\delta f_i(a, b) = \frac{x_i - a}{f_i(a, b)} \delta x_i + \frac{y_i - b}{f_i(a, b)} \delta y_i \quad (59)$$

et on a encore

$$| \delta f_i(a, b) | \leq \sqrt{\delta x_i^2 + \delta y_i^2} = \epsilon \quad (60)$$

Pour la cylindricité, nous ne détaillerons pas les calculs qui sont un peu longs. Le résultat est encore qu'*au premier ordre*,

$$| \delta f_i(a, b, \theta, \varphi) | \leq \sqrt{\delta x_i^2 + \delta y_i^2 + \delta z_i^2} = \epsilon \quad (61)$$

Dans les quatre cas considérés, l'incertitude sur le défaut n'excède pas le double de l'incertitude sur les mesures, mesurée par le rayon de la boule d'incertitude. Cette conclusion est stricte en rectitude et en planéité. Elle est vraie au premier ordre en circularité et en cylindricité.

## 7.7. Incertitude sur la valeur des paramètres $\lambda$ .

Cette question est un peu plus délicate, et nous nous contenterons ici de citer les résultats. Soient  $\lambda_0$  l'ensemble des paramètres donnant le défaut non perturbé et  $\lambda_0^*$  les paramètres du défaut perturbé. *Pour autant que les perturbations de coordonnées soient faibles*, la perturbation des paramètres vérifie la relation

$$||\lambda_0 - \lambda_0^*|| \leq \frac{4\epsilon}{C} \quad (62)$$

où  $C$  est la plus petite valeur du gradient au point de minimum. Ce résultat est cependant assez difficile à exploiter, dans la mesure où le gradient minimal est très délicat à calculer (il s'agit en général du pseudo-gradient d'une vallée).

## 8. Applications

### 8.1. Présentation

Nous disposons de mesures effectuées sur 3 pièces mécaniques :

- un barreau cylindrique,
- un bras de suspension,
- un support de paliers d'arbre à cames.

Ces différentes mesures fournissent des données qui permettent de tester les différents algorithmes (moindres carrés, simplex et normes  $p$ ) pour les quatres types d'erreurs de forme : rectitude, planéité, circularité et cylindricité.

Les algorithmes ont été implantés dans des programmes écrits en Fortran 77. Ces programmes tournent aussi bien sur PC que sur station de travail. Pour les cas les plus complexes, le temps de calcul n'excède jamais une vingtaine de secondes sur un PC 486 33 MHz et la seconde sur une station HP PA8000.

Les méthodes directes ont également été programmées car elles fournissent, sauf pour la cylindricité, la valeur minimum de l'erreur de forme, ce qui permet de vérifier la justesse des valeurs obtenues par les autres algorithmes. Le tableau I donne la liste des programmes développés pour les 4 types d'erreurs de forme.

	Rectitude	Planéité	Circularité	Cylindricité
MC	★	★	★	★
EC	★	★		
4P			★	
SI	★	★	★	★
NP	★	★	★	★

Tableau I : Programmes développés pour les 4 erreurs de forme (MC=moindres carrés, EC=enveloppe convexe, 4P=méthode des 4 points, SI=simplexe, NP=normes d'ordre  $p$ )

Tous ces programmes ont été testés non seulement avec des mesures réelles mais également sur

un grand nombre de mesures générées aléatoirement ou encore sur des formes analytiques (conoïde, ellipse, ...).

## 8.2. Barreau cylindrique

Il s'agit d'un barreau cylindrique tourné en montage mixte. Chacune des 7 pièces a été palpée sur 22 cercles à des coordonnées z différentes, chaque cercle étant palpé sur 72 points.

Avec ces mesures, on peut calculer :

- les rectitudes des génératrices,
- les circularités des cercles,
- la cylindricité du barreau.

### 8.2.1. Rectitude

Les deux droites en traits fins représentent l'encadrement du profil obtenu par la méthode des moindres carrés, celles en traits épais celui obtenu par les autres méthodes. Le profil mesuré est représenté par des cercles reliés par des traits interrompus (figure 7).

En moyenne, le défaut de rectitude calculé par les moindres carrés est de 10 à 15 % supérieur à la vraie valeur. Sur certains cas, la différence atteint plus de 20 % par rapport au résultat obtenu avec les autres méthodes (figure 8).

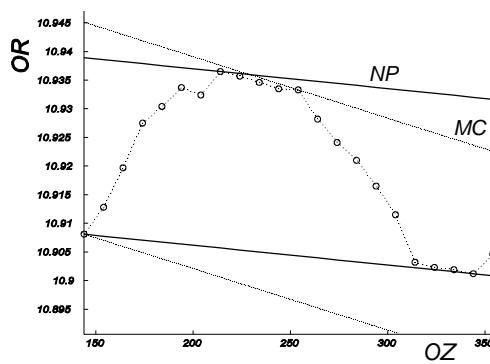


Figure 7 : Rectitude calculée par MC, EC, SI et NP

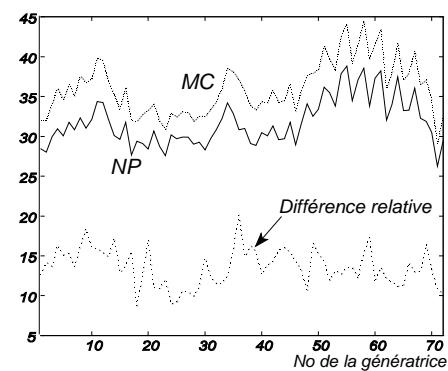


Figure 8 : Rectitudes calculées sur les 72 génératrices d'un barreau

### 8.2.2. Circularité

En circularité, l'encadrement optimum (cercles en traits épais) des points de mesures s'appuie sur deux points intérieurs et deux points extérieurs alternés (figure 9).

Ici aussi la méthode des moindres carrés obtient des valeurs nettement en excès. La figure 10 montre la différence entre les circularités calculées par la méthode des moindres carrés et celles obtenues par les autres méthodes pour les 22 cercles palpés d'un barreau.

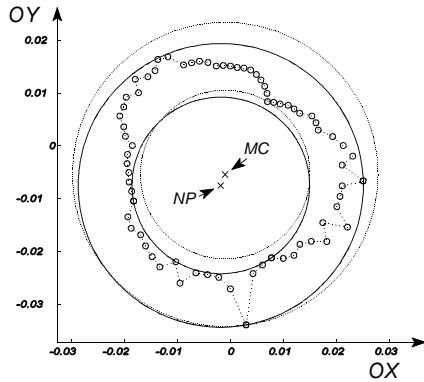


Figure 9 : Circularité calculée par MC, EC, SI et NP

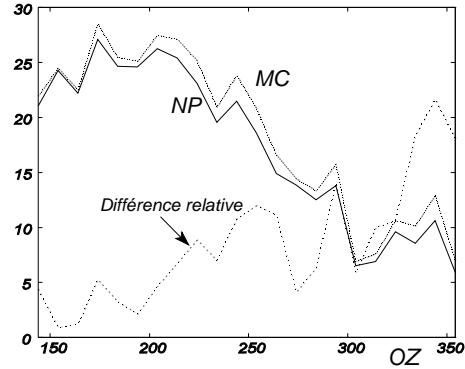


Figure 10 : Evolution des circularités d'un barreau calculées par MC et NP et différences relatives

### 8.2.3. Cylindricité

Les erreurs de cylindricité calculées par les différentes méthodes sont indiqués au tableau II. La méthode du simplex n'atteint jamais la valeur obtenue par la méthode des normes p.

Pièce n°	MC	NP	SI	Dif. MC/NP
1	54,5 $\mu\text{m}$	51,1 $\mu\text{m}$	54,5 $\mu\text{m}$	6,6 %
2	51 $\mu\text{m}$	49,1 $\mu\text{m}$	49,3 $\mu\text{m}$	3,8 %
3	49,3 $\mu\text{m}$	47 $\mu\text{m}$	47,5 $\mu\text{m}$	5 %
4	48,3 $\mu\text{m}$	44,8 $\mu\text{m}$	47 $\mu\text{m}$	7,9 %
5	37,4 $\mu\text{m}$	36,3 $\mu\text{m}$	42,3 $\mu\text{m}$	3,1 %
6	35,8 $\mu\text{m}$	34,6 $\mu\text{m}$	40,1 $\mu\text{m}$	3,4 %
7	61,4 $\mu\text{m}$	58,2 $\mu\text{m}$	66,7 $\mu\text{m}$	5,4 %

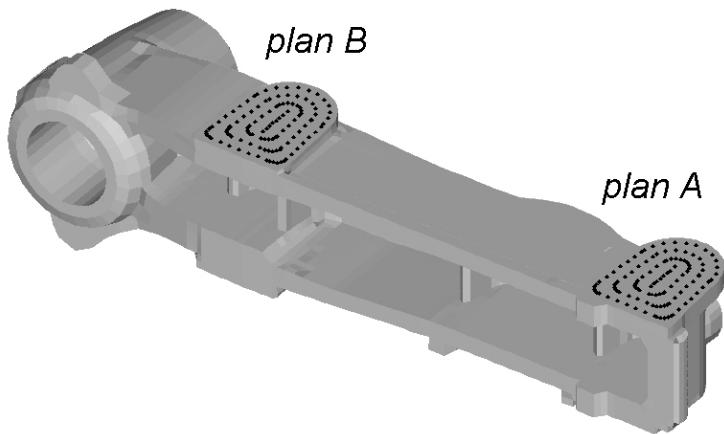
Tableau II : Cylindricités des 7 barreaux

Comme il n'existe pas de méthode directe pour la cylindricité, on ne peut donc pas être certain que la valeur obtenue par la méthode des normes p soit la valeur optimale. Cependant, par analogie avec les solutions trouvées pour les trois autres défauts, on peut dire que *l'encadrement calculé est optimal si les deux cylindres co-axiaux s'appuient sur au moins 6 points de mesure*. En effet, on peut remarquer que le nombre de points de contacts entre l'encadrement et les points de mesure est égal au nombre de variables du problème plus un (tableau III). Dans le cas de la cylindricité, le nombre de variable étant de 5, le nombre de points de contacts doit au moins être égal à 6, ce qui est le cas pour tous les exemples étudiés.

	Variables	Nbe de points de contact à l'optimum
Rectitude	2	3 (un côté et un point de l'EC)
Planéité	3	4 (une face et un point ou 2 arêtes gauches de l'EC)
Circularité	3	4 (4 points alternés sur les cercles intérieur et extérieur)
Cylindricité	5	<b>6</b>

*Tableau III : Relations entre le nombre de variables (en termes d'écart) et le nombre de points de contacts en rectitude, planéité, circularité et cylindricité*

### 8.3. Bras de suspension



*Figure 11 : Points de mesure du bras de suspension*

Le bras de suspension comporte deux plans fraisés A et B dont on a mesuré les coordonnées d'une série de points (figure 11). Les tolérances de la pièce sont la planéité de chacun des deux plans. Le tableau IV donne les valeurs des planéités calculées par les différentes méthodes.

	MC	EC-SI-NP	Dif. MC/NP
Planéité A	33,8 $\mu\text{m}$	32,7 $\mu\text{m}$	3,5 %
Planéité B	38,1 $\mu\text{m}$	32,8 $\mu\text{m}$	16,3 %
Parallélisme A//B	117,6 $\mu\text{m}$	134,5 $\mu\text{m}$	14,4 %
Parallélisme B//A	131,7 $\mu\text{m}$	132,9 $\mu\text{m}$	1 %

*Tableau IV : Planéités et parallélismes des plans A et B*

## 8.4. Support de paliers d'arbre-à-cames

La face supérieure de la pièce (figure 12) est fraisée pour 5 conditions de coupe différentes. Les résultats obtenus dans chacun des cas par les différentes méthodes sont donnés au tableau V.



**Figure 12 :** Points de mesure du support de paliers d'arbre-à-cames

Pièce n°	MC	EC-SI-NP	Dif. MC/NP
1	192 µm	178,4 µm	7,6 %
2	441,5 µm	422,9 µm	4,4 %
3	346,8 µm	312,6 µm	10,9 %
4	331,9 µm	319,7 µm	3,8 %
2	371,4 µm	359,7 µm	3,3 %

**Tableau V :** Planéités des 5 supports de paliers

## 9. Conclusion

L'évaluation des erreurs de formes ne peut être menée que par voie numérique. Ainsi, à partir de mesures tridimensionnelles, les algorithmes de calcul doivent être capables d'atteindre la valeur minimale du défaut de forme afin de respecter le sens de la norme.

Parmi les algorithmes développés, la méthode des moindres carrés ne satisfait pas ce critère car elle ne fournit qu'une valeur approchée par excès.

Les méthodes directes sont intéressantes car elles permettent d'atteindre la valeur minimale à coup sûr en un nombre fini d'opérations. Cependant, pour la circularité, le temps d'obtention du minimum devient prohibitif si le nombre de points de mesure est élevé ce qui rend la méthode moins intéressante. De plus, il n'existe pas de méthode directe permettant de calculer l'erreur de cylindricité.

La méthode de minimisation du simplexe s'est avérée peu stable, surtout pour la cylindricité. La raison de cette instabilité réside dans le choix très délicat du point initial (simplexe de départ), ce qui la rend peu attrayante en pratique.

Enfin, pour tous les tests de mise au point et toutes les applications décrites dans cet article, la méthode d'approximation en normes  $p$  a fourni la bonne valeur du défaut (comparée au résultat des méthodes directes). Elle semble donc être la plus adéquate de toutes les méthodes développées en ce qu'elle est rapide, très stable et applicable aux quatre erreurs de forme étudiées.

L'étude de l'influence de l'incertitude des données mesurées sur la valeur du défaut montre que la variation de ce dernier est bornée par une valeur très simple à calculer : le double de l'incertitude sur les points de mesure.

## Bibliographie

- [1] J.D. Mécanos, Geometric Dimensioning and Tolerancing, Marcel Dekker Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1995
- [2] G. Hacques, Algorithmique numérique, Colin, Paris, 1971
- [3] I.S. Berezin, N.P. Zhdikov, Computing methods, vol. 1, Pergamon Press, Oxford, 1965
- [4] G. Goch, Efficient multi-purpose algorithm for approximation and alignment problems in coordinate measurement techniques, CIRP Annals, vol. 39/1, pp. 553-556, 1990
- [5] A. Ballu, P. Bourdet, L. Mathieu, The processing of measured points in coordinate metrology in agreement with the definition of standardized specifications, CIRP Annals, vol. 40/1, pp. 491-494, 1991

- [6] J.A. Nelder, R. Mead, A simplex method for function minimization, *Computer Journal*, vol 7, pp. 308-313, 1965
- [7] P. Pauly, *Etablissement d'algorithmes de calcul d'erreurs de forme et de position*, Mémoire de fin d'études, Université de Liège, 1996
- [8] L.P. Lebedev, I.I. Vorovich, G.M.L. Gladwell, *Functional analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996