

LABORATOIRE D'AERONAUTIQUE
DE L'UNIVERSITE DE LIEGE
RUE ERNEST SOLVAY, 21
B - 4000 LIEGE
BELGIQUE

RAPPORT SF - 138

**“ETUDE CRITIQUE DE QUELQUES
FORMULATIONS DE LA THEORIE
DES COQUES EN VUE DE L'APPLICATION
AUX ELEMENTS FINIS”**

JANVIER 1986

J. F. DEBONGNIE

TABLE DES MATIERES

	<u>Page</u>
0. <u>INTRODUCTION</u>	1
1. <u>GEOMETRIE DES SURFACES</u>	5
1.1 - Tenseur métrique de surface.....	5
1.2 - Normale et élément de surface.....	6
1.3 - Tenseur de courbure.....	7
1.4 - Dérivées des vecteurs de base.....	9
1.5 - Dérivées covariantes de surface.....	10
1.6 - Conditions de commutativité des dérivées covariantes de surface.....	12
1.7 - Interprétation géométrique de la nullité du tenseur de courbure de Riemann.....	13
1.8 - Intégrabilité des vecteurs de base.....	16
1.9 - Dérivées d'un vecteur tridimensionnel sur la surface.....	18
2. <u>GEOMETRIE DES COQUES</u>	19
2.1 - Généralités et tenseur métrique.....	19
2.2 - Expression du produit vectoriel.....	20
2.3 - Dérivées covariantes de volume.....	22
2.4 - Calcul explicite des symboles de Christoffel de volume.....	23
3. <u>FONDEMENTS DE LA THEORIE DES COQUES MINCES</u>	25
3.1 - Des hypothèses de la théorie classique des coques et de leur validité.....	25
3.2 - Expressions générales des déformations.....	30
3.3 - Equations constitutives.....	31
4. <u>EXPRESSION DES DEFORMATIONS A PARTIR DES COMPOSANTES CURVILIGNES DES DEPLACEMENTS</u>	36
4.1 - Déformations de la surface moyenne.....	36
4.2 - Variation de la surface.....	37
4.3 - Normale à la surface déformée.....	37
4.4 - Nouvelle courbure.....	39
4.5 - Une expression équivalente du tenseur de changement de courbure.....	42
5. <u>APPLICABILITE DE LA THEORIE PRECEDENTE AUX ELEMENTS FINIS</u>	43

	<u>Page</u>
6. <u>EXPRESSION DES DEFORMATIONS A PARTIR DES COMPOSANTES</u> <u>CARTESIENNES DES DEPLACEMENTS</u>	45
6.1 - Géométrie de la coque.....	45
6.2 - Déformation du feuillet moyen.....	45
6.3 - Normale à la surface déformée.....	46
6.4 - Courbure de la surface déformée.....	46
6.5 - Condition de représentation des déplacements rigides dans un élément fini fondé sur les expressions précédentes.....	46
6.6 - Formulation de DUPUIS et GOEL.....	47
7. <u>THEORIE DES ROTATIONS MODEREES (COMPOSANTES CURVILIGNES)</u> ..	49
7.1 - Définitions et calcul des déformations du feuillet moyen.....	49
7.2 - Simplification des changements de courbure.....	49
7.3 - Connexion des éléments finis en rotations modérées.....	50
7.4 - Remarque.....	51
8. <u>THEORIE DES ROTATIONS MODEREES (COMPOSANTES CARTESIENNES)</u> .	52
8.1 - Expressions simplifiées des déformations.....	52
8.2 - Pentes à connecter aux interfaces d'éléments.....	52
9. <u>COQUES QUASI-PLANES ET COQUES PRESQUE PLANES</u>	53
9.1 - Coques quasi-planes: théorie de MARGUERRE.....	53
9.2 - Equations constitutives des coques de Marguerre.....	55
9.3 - Application aux méthodes d'éléments finis.....	55
9.4 - Coques presque planes.....	56
9.5 - Coques presque planes avec plans de référence....	58
9.6 - "Quasi-shallow shells" de KOITER.....	59
10. <u>COQUES AVEC DEFORMATIONS DUES AUX EFFORTS TRANCHANTS</u> <u>(COMPOSANTES CARTESIENNES)</u>	60
10.1 - Introduction.....	60
10.2 - Description de la géométrie et déformations.....	60
10.3 - L'hypothèse $\gamma_{33} = 0$ et ses conséquences.....	61
10.4 - Equations constitutives.....	61
10.5 - Prise en compte de la condition $\gamma_{33} = 0$	66
10.6 - Représentation des déplacements rigides.....	67
10.7 - Pseudo-coques.....	68
10.8 - Cas des rotations modérées.....	70

	<u>Page</u>
10.9 - Evaluation de l'erreur introduite par la modification de la normale.....	70
10.10 - Connexion des éléments de pseudo-coques.....	70
11. <u>COQUES AVEC DEFORMATIONS DUES AUX EFFORTS TRANCHANTS (COMPOSANTES CURVILIGNES)</u>.....	72
11.1 - Introduction.....	72
11.2 - Géométrie de la coque, avant et après défor- mation.....	72
11.3 - Expression générale des déformations.....	73
11.4 - Energie de déformation.....	73
12. <u>ROTATIONS MODEREES D'UNE COQUE AVEC DEFORMATIONS DUES A L'EFFORT TRANCHANT (COMPOSANTES CURVILIGNES)</u>.....	74
12.1 - Ordres de grandeur résultant de l'hypothèse des rotations modérées.....	74
12.2 - Simplification des déformations du feuillet moyen.....	76
12.3 - Simplification des changements de courbure.....	77
12.4 - Simplification des déformations de cisaille- ment transversal.....	78
12.5 - Remarque.....	78
12.6 - Passage à la théorie de Kirchhoff-Love.....	78
13. <u>REINTERPRETATION ET GENERALISATION DE LA THEORIE DES COQUES QUASI-PLANES DE MARGUERRE</u>.....	80
13.1 - Introduction.....	80
13.2 - Coques de Marguerre comme cas particuliers des pseudo-coques.....	80
13.3 - Généralisation de la théorie de Marguerre à partir de la théorie des pseudo-coques.....	81
13.4 - Passage à la théorie de Kirchhoff-Love.....	85
13.5 - Comparaison avec la théorie des coques de Kirchhoff-Love en composantes cartésiennes.....	86
13.6 - Evaluation générale de l'erreur de la théorie...	90
13.7 - Connexion des éléments établis suivant la théorie de Marguerre généralisée.....	91
13.8 - Notion de déplacement fictif initial.....	91

	<u>Page</u>
14. <u>COQUES TRONCONIQUES</u>	94
14.1 - Déplacements rigides des corps de révolution....	94
14.2 - Géométrie des coques tronconiques.....	95
14.3 - Dérivation covariante dans les coques tronconiques.....	96
14.4 - Théorie des coques tronconiques avec déforma- tions dues aux efforts tranchants.....	97
14.5 - Rotations modérées des coques tronconiques.....	100
15. <u>COQUES QUASI-CONIQUES</u>	103
15.1 - Introduction.....	103
15.2 - Expression des déformations.....	103
15.3 - Grandeurs intervenant dans l'étude des rotations modérées.....	106
15.4 - Déformations du feuillet moyen en rotations modérées.....	107
15.5 - Changements de courbure en rotations modérées.....	108
15.6 - Déformations de cisaillement transversal en rotations modérées.....	109
15.7 - Comparaison avec les expressions obtenues dans /17/.....	110
16. <u>COQUES DE REVOLUTION EN COORDONNEES CYLINDRIQUES</u>	111
16.1 - Introduction.....	111
16.2 - Description géométrique et déplacements.....	111
16.3 - Calcul des déformations.....	112
16.4 - Expressions simplifiées pour le cas des rotations modérées.....	115
16.5 - Conditions de Kirchhoff-Love.....	116
16.6 - Connexion des éléments.....	117
 <u>ANNEXE - INTRODUCTION A L'ELASTICITE EN COORDONNEES CUR</u>	
<u>CURVILIGNES</u>	119
A.1 - Coordonnées matérielles et coordonnées convectées.....	119
A.2 - Déplacements virtuels.....	120
A.3 - Tensions de Kirchhoff-Trefftz.....	122
A.4 - Interprétation du tenseur de Green.....	123
A.5 - Equations de compatibilité.....	124

	<u>Page</u>
A.6 - Variation de l'élément de volume.....	129
A.7 - Equations constitutives des corps hyperélastiques isotropes.....	130
A.8 - Théorie des rotations modérées.....	132
A.9 - Relations de compatibilité de Beltrami.....	133
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	134

AVERTISSEMENT

Dans ce rapport, nous utiliserons les notations intrinsèques suivantes pour les vecteurs:

\underline{a} désigne un vecteur;

$\underline{a} \cdot \underline{b}$ est le produit scalaire de a par b ;

$\underline{a} \times \underline{b}$ est leur produit vectoriel;

$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ est le produit mixte $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$.

Du reste, la notation tensorielle avec indices supérieurs et inférieurs est utilisée constamment dans le texte.

La dérivation courante sera notée par une virgule:

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad ; \quad f_{,ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \quad ; \quad \text{etc....}$$

Il sera également fait usage des dérivées covariantes, définies dans le texte.

Les discussions d'ordres de grandeur sont fréquentes dans ce rapport. On ne s'étonnera donc pas de rencontrer des entrelacs de formules et d'évaluations d'ordres de grandeur, ces dernières étant toujours précédées du symbole "O.G." signifiant Ordre de Grandeur. On pourrait écrire, par exemple,

$$\begin{array}{rcccc} A & = & B & + & C & + & D \\ \text{O.G.} & & 1 & & \epsilon & & \epsilon^2 \\ & & + & E & + & F & + & G \\ \text{O.G.} & & \epsilon^{\frac{1}{2}} & & \epsilon^{2/3} & & \epsilon^{-1} \end{array}$$

ce qui signifierait

$$\left\{ \begin{array}{l} A = B + C + D + E + F \\ B = O(1) \\ C = O(\epsilon) \\ D = O(\epsilon^2) \\ E = O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \\ F = O(\epsilon^{2/3}) \\ G = O(\epsilon^{-1}) \end{array} \right.$$

Les références bibliographiques sont indiquées par leur numéro entre deux signes "/", par exemple: /18/.

INTRODUCTION

Le présent rapport se propose d'analyser un certain nombre de formulations de la théorie des coques en vue de l'application aux éléments finis. A ce titre, l'attention a été portée essentiellement sur les points suivants:

- { a) Expression de l'énergie de déformation.
- b) Variables à connecter d'un élément à l'autre.
- c) Représentation des modes rigides.

Par contre, l'établissement des équations locales d'équilibre et de compatibilité n'a pas été abordé, non que nous n'y attachions pas d'importance, mais parce qu'elles ne jouent guère de rôle dans les éléments finis et que, même en focalisant l'étude de la sorte, on est rapidement conduit à un volume considérable de matière.

Le point de vue adopté est général et fait appel à la description tensorielle des surfaces et des coques. Pour faciliter la lecture et fixer clairement les notations, nous avons consacré deux sections de ce rapport à rappeler les notions fondamentales de la théorie géométrique des surfaces et des coques.

Les équations sont systématiquement dérivées dans le cadre non linéaire des petites déformations, mais grands déplacements. Nous portons néanmoins une attention particulière aux simplifications résultant de l'hypothèse des rotations modérées, consistant à admettre que tous les gradients de déplacements sont au plus d'ordre $\gamma^{\frac{1}{2}}$, γ étant l'ordre de grandeur des déformations. Comme il nous arrive, dans maintes discussions d'ordre de grandeur, de faire appel à certaines relations générales de l'élasticité non linéaire, nous avons adjoint in fine une annexe permettant aux lecteurs peu familiers de cette discipline d'acquérir les notions nécessaires.

La section 3, consacrée aux fondements de la théorie des coques, s'inspire en bonne partie d'un remarquable rapport de KOITER/1/. Nous nous en écartons cependant en faisant usage du principe de HELLINGER-REISSNER qui permet, à notre sens, d'un peu clarifier les choses.

La section 4 est consacrée au développement des expressions des déformations des coques de KIRCHHOFF-LOVE en coordonnées curvilignes. Elle suit d'assez près l'exposé de KOITER /3/ et est destinée

essentiellement à servir de base de discussion.

L'applicabilité des équations précédentes aux éléments finis est discutée dans la section 5. Il apparaît d'abord que la connexion des éléments s'exprime par des conditions non linéaires, ce qui complique le problème d'une manière inacceptable, à moins que l'on choisisse volontairement des excès de conformité, ce qui risque de ralentir la convergence et ne rend d'ailleurs pas le problème beaucoup plus simple. On ne peut se débarrasser de cette difficulté que dans le cadre des rotations modérées ou alors, en abandonnant l'hypothèse de KIRCHHOFF-LOVE. La seconde conclusion, classique d'ailleurs, est qu'il n'est généralement pas possible de représenter exactement les déplacements rigides dans le cadre d'éléments finis utilisant les composantes curvilignes des déplacements.

En réponse à cette deuxième difficulté, la section 6 expose la théorie générale des coques de Kirchhoff-Love à partir des déplacements en composantes cartésiennes. Cette formulation est susceptible d'une application sous forme d'éléments de type paramétrique.

Les sections 7 et 8 sont consacrées aux simplifications résultant de l'hypothèse des rotations modérées, qui suffit à l'étude de la bifurcation et du raidissement dû à une pression interne. Bien entendu, les expressions de la théorie linéaire des coques peuvent en être déduites par simple omission des termes non linéaires. La discussion est menée systématiquement par comparaison des ordres de grandeur.

La section 9 est consacrée aux simplifications du type "shallow shell". La distinction est nettement faite entre coques quasi-planes (théorie de Marguerre) et coques presque planes (théorie de Donnell). Mention est faite des "quasi-shallow shells" de Koiter. L'ordre de grandeur des erreurs consenties dans ces théories est étudié. On obtient, pour la théorie de Marguerre, une erreur $O(P^2)$, où P est la pente de la coque par rapport au plan de référence. Pour la théorie de Donnell, l'erreur est $O(L^2/R^2)$, L étant la longueur d'onde de la déformation et R , celui du plus petit rayon de courbure. Comme l'a souligné IDELSOHN /15/, la théorie de Marguerre converge pour $P \rightarrow 0$, ce qui a lieu lorsque l'on raffine le maillage par éléments finis. Dans les coques à double courbure, il subsiste néanmoins une difficulté liée à la connexion géométrique des éléments voisins.

La section 10 expose une théorie générale des coques avec déformations dues à l'effort tranchant, en coordonnées cartésiennes. Après détermination d'une approximation cohérente de l'énergie de déformation, on constate que les déplacements rigides ne sont pas nécessairement représentés. On peut porter remède à cette difficulté en approchant la normale par une interpolation, ce qui définit ce que nous appelons des pseudo-coques.

La section 11 donne la théorie des coques avec déformations dues à l'effort tranchant, en coordonnées curvilignes. Une telle théorie reste en effet utile pour certaines géométries particulières, comme les coques de révolution. La formulation obtenue est assez nettement plus simple que celle de FRAEIJIS de VEUBEKE /16/, bien qu'adoptant le même point de départ.

Les simplifications qu'apporte à la théorie précédente l'hypothèse des rotations modérées sont examinées en section 12. Le raccord avec la théorie de Kirchhoff-Love est examiné.

Dans la section 13, on reprend la théorie de Marguerre à partir des équations des pseudo-coques définies dans la section 10. Les déformations dues aux efforts tranchants sont prises en compte. Une généralisation de cette théorie, permettant la connexion géométrique correcte des éléments dans le cas d'une coque à double courbure est alors présentée. Ses résultats sont comparés, dans le cas restreint des coques de Kirchhoff-Love, aux équations de la section 6, ce qui permet d'évaluer l'erreur, qui se trouve être $O(P^2)$. On y présente également l'interprétation des approximations à la Marguerre à l'aide des déplacements fictifs initiaux au sens de /17/.

Les coques de révolution, d'une grande importance pratique, font l'objet des trois dernières sections. La section 14 étudie les coques tronconiques en coordonnées curvilignes. L'importance accordée aux coques tronconiques provient du fait que ce sont les seules à permettre une représentation exacte des déplacements rigides par éléments finis. L'approximation consistant à modéliser une coque à double courbure par des troncs de cônes, inaugurée par GRAFTON et STROME /21/, est devenue classique. Par analogie avec la théorie des coques quasi-planes, on peut songer à améliorer la solution à l'aide du concept de déplacement fictif initial, ce qui conduit à la théorie des coques quasi-coniques, exposée en section 15. La version

linéaire de cette théorie avait déjà été présentée dans /17/; la forme présentée ici est, dans ce cas, un peu plus simple, quoique équivalente au sens de Koiter. Une autre possibilité, exacte cette fois, consiste à développer une théorie des coques où les déplacements sont exprimés en composantes cylindriques. Cette approche a été explorée par DELPAK /22/ pour les déformations axisymétriques linéaires des coques de Kirchhoff-Love. Nous présentons en section 16 une approche générale des coques à géométrie de révolution avec déplacements exprimés en composantes cylindriques, incluant les déformations dues aux efforts tranchants.

Lors des manipulations algébriques parfois lourdes qu'implique la théorie des coques, les risques d'erreurs ne sont jamais absents. dans le but de les minimiser, nous nous sommes efforcé de chercher de nombreux recoupements. Tout d'abord, lorsque plusieurs théories ont des points de convergence, les expressions qui en résultent ont été comparées. D'autres recoupements ont été obtenus par comparaison directe avec des résultats de la littérature. A défaut de telles possibilités, des tests simples ont été réalisés, comme la vérification de la nullité des déformations lors de déplacements rigides.

1. GEOMETRIE DES SURFACES

Nous commencerons par exposer les quelques notions de la théorie tensorielle des surfaces dont la connaissance est nécessaire pour pouvoir procéder à une étude générale des coques.

1.1 - Tenseur métrique de surface

Une surface est une variété à deux dimensions dans R^3 . Le vecteur-position \underline{r} d'un point quelconque de la surface (fig.1.1) dépend donc de deux coordonnées x^1 et x^2 . En utilisant des lettres grecques pour les indices pouvant prendre les valeurs 1 et 2, on a donc

$$\underline{r} = \underline{r}(x^1, x^2) = \underline{r}(x^\alpha) \quad (1.1)$$

On définit, à partir de ce système de coordonnées, les vecteurs de base \underline{a}_α de la surface au point \underline{r} par

$$\underline{a}_\alpha = \partial \underline{r} / \partial x^\alpha = \underline{r}_{,\alpha} \quad (1.2)$$

Une petite modification (dx^1, dx^2) des coordonnées fait passer de \underline{r} à $\underline{r} + d\underline{r}$, avec

$$d\underline{r} = \underline{r}_{,\alpha} dx^\alpha = \underline{a}_\alpha dx^\alpha.$$

La distance parcourue lors de cette modification est donnée par

$$dr^2 = d\underline{r} \cdot d\underline{r} = \underline{a}_\alpha dx^\alpha \cdot \underline{a}_\beta dx^\beta = \underline{a}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.3),$$

en définissant le tenseur métrique $\underline{a}_{\alpha\beta}$ de la surface par

$$\underline{a}_{\alpha\beta} = \underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}_\beta. \quad (1.4)$$

Son inverse $\underline{a}^{\beta\gamma}$, solution du système

$$\underline{a}_{\alpha\beta} \underline{a}^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma, \quad (1.5)$$

δ_α^γ étant le symbole de Kronecker, permet de définir les vecteurs de base duaux

$$\underline{a}^\alpha = \underline{a}^{\alpha\beta} \underline{a}_\beta \quad (1.6)$$

qui vérifient

$$\underline{a}^\alpha \cdot \underline{a}_\beta = \underline{a}^{\alpha\gamma} \underline{a}_{\gamma\beta} = \underline{a}^{\alpha\gamma} \underline{a}_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha \quad (1.7)$$

et

$$\tilde{a}^\alpha \cdot \tilde{a}^\beta = a^{\alpha\gamma} a_{\gamma\delta} a^{\delta\beta} = a^{\alpha\gamma} \delta_\gamma^\beta = a^{\alpha\beta} . \quad (1.8)$$

Nous utiliserons par ailleurs les notations

$$a = \text{dtm} (a_{\alpha\beta}) \quad , \quad 1/a = \text{dtm} (a^{\alpha\beta}) . \quad (1.9)$$

1.2 - Normale et élément de surface

Définissant la normale unitaire \tilde{n} à la surface par (*)

$$\tilde{n} = \frac{\tilde{a}_1 \times \tilde{a}_2}{\|\tilde{a}_1 \times \tilde{a}_2\|} \quad , \quad (1.10)$$

considérons la grandeur indicée

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} = (\tilde{a}_\alpha \times \tilde{a}_\beta) \cdot \tilde{n} . \quad (1.11)$$

Visiblement antisymétrique par rapport aux indices α et β , elle a une seule composante indépendante $\mathcal{E}_{12} = -\mathcal{E}_{21}$. En vertu de la définition (1.10), \mathcal{E}_{12} est positif.

Les produits mixtes de trois vecteurs possèdent la propriété fondamentale suivante:

$$((\tilde{a} \times \tilde{b}) \cdot \tilde{c}) ((\tilde{d} \times \tilde{e}) \cdot \tilde{f}) = \begin{vmatrix} \tilde{a} \cdot \tilde{d} & \tilde{a} \cdot \tilde{e} & \tilde{a} \cdot \tilde{f} \\ \tilde{b} \cdot \tilde{d} & \tilde{b} \cdot \tilde{e} & \tilde{b} \cdot \tilde{f} \\ \tilde{c} \cdot \tilde{d} & \tilde{c} \cdot \tilde{e} & \tilde{c} \cdot \tilde{f} \end{vmatrix} , \quad (1.12)$$

qu'il est facile de vérifier dans un système cartésien. Il en découle visiblement

$$\mathcal{E}_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a ,$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{E}_{12} = -\mathcal{E}_{21} = \sqrt{a} . \quad (1.13)$$

(*) Le sens du produit vectoriel peut ici être défini arbitrairement, puisque l'on n'a pas encore défini d'orientation de référence (voir § 2.2). Nous suggérons de suivre la règle du tire-bouchon de Maxwell, selon laquelle le trièdre $\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{n}\}$ est droitier.

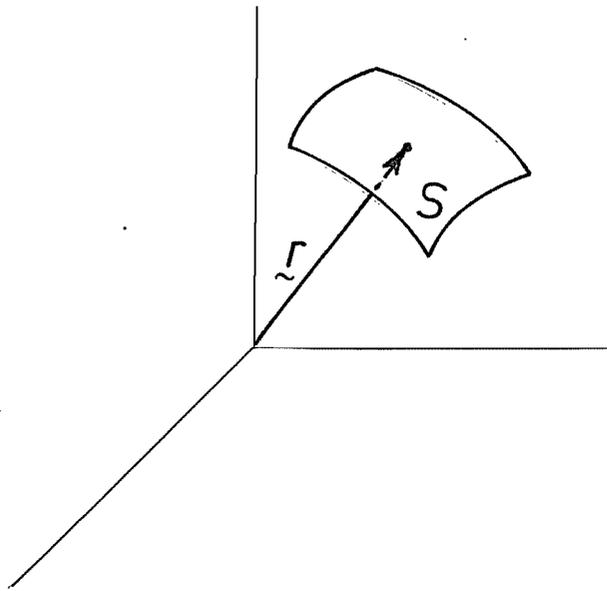


Fig. 1.1

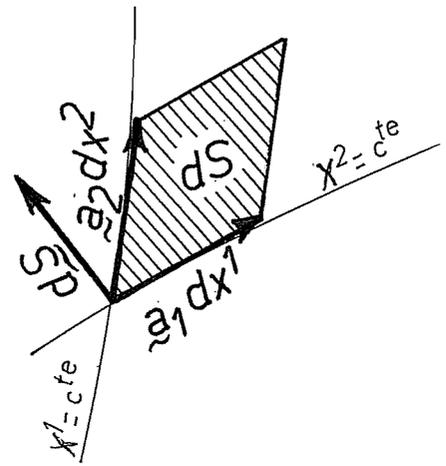


Fig. 1.2

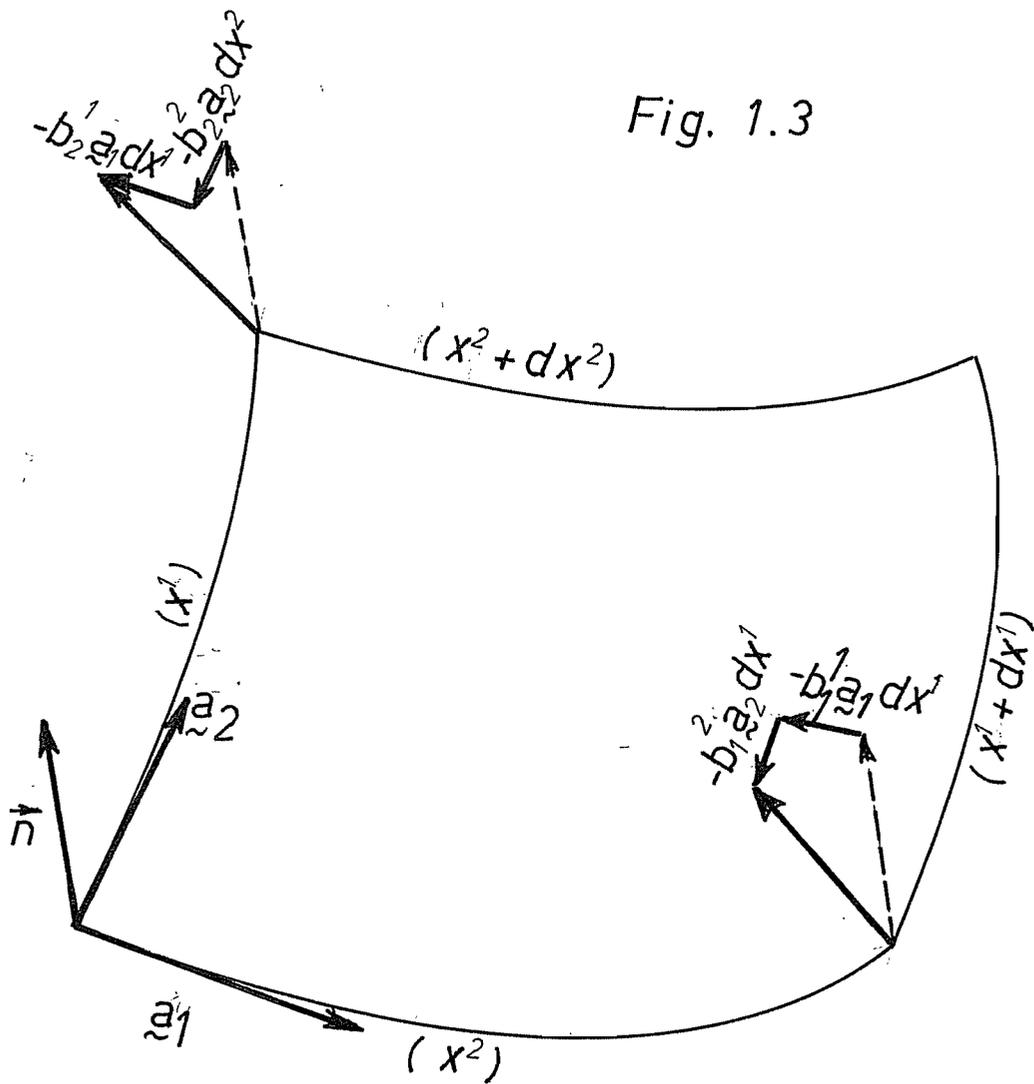


Fig. 1.3

Définissant

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = (\underline{a}^\alpha \times \underline{a}^\beta) \cdot \underline{n} \quad , \quad (1.14)$$

on obtient par le même raisonnement

$$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0 \quad , \quad \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad . \quad (1.15)$$

Il est du reste évident que

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} (\underline{a}_\lambda \times \underline{a}_\mu) \cdot \underline{n} = a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} \varepsilon_{\lambda\mu} \quad .$$

Par ailleurs, la formule (1.12) implique

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\mu} &= ((\underline{a}^\alpha \times \underline{a}^\beta) \cdot \underline{n}) ((\underline{a}_\lambda \times \underline{a}_\mu) \cdot \underline{n}) \\ &= \begin{vmatrix} \delta_\lambda^\alpha & \delta_\mu^\alpha & 0 \\ \delta_\lambda^\beta & \delta_\mu^\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

soit

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\mu} = \delta_\lambda^\alpha \delta_\mu^\beta - \delta_\mu^\alpha \delta_\lambda^\beta \quad . \quad (1.16)$$

En particulier,

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\gamma} = \delta_\alpha^\alpha \delta_\gamma^\beta - \delta_\gamma^\alpha \delta_\alpha^\beta = \delta_\gamma^\beta \quad (1.16')$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\alpha \delta_\beta^\beta - \delta_\beta^\alpha \delta_\alpha^\beta = 2 \quad . \quad (1.16'')$$

Notant que

$$\underline{a}_\alpha \times \underline{a}_\beta = ((\underline{a}_\alpha \times \underline{a}_\beta) \cdot \underline{n}) \underline{n} = \varepsilon_{\alpha\beta} \underline{n} \quad ,$$

on a encore

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \underline{a}_\alpha \times \underline{a}_\beta = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \underline{n} = 2 \underline{n} \quad ,$$

soit

$$\underline{n} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \underline{a}_\alpha \times \underline{a}_\beta \quad . \quad (1.17)$$

L'élément de surface orienté est donné par (fig. 1.2)

$$dS = \underline{a}_1 dx^1 \times \underline{a}_2 dx^2 = \varepsilon_{12} \underline{n} dx^1 dx^2 = \sqrt{a} \underline{n} dx^1 dx^2 \quad ,$$

ce qui implique

$$dS = \sqrt{a} dx^1 dx^2 \quad .$$

1.3 - Tenseur de courbure

La courbure d'une surface se marque par le fait que la direction de la normale varie d'un point à l'autre. Il est donc naturel de mesurer la courbure par le taux de variation de la normale. Comme $\underline{n} \cdot \underline{n} = 1$, on a évidemment

$$\underline{n}_{,\alpha} \cdot \underline{n} = 0,$$

c'est-à-dire que les dérivées de la normale n'ont de composantes que suivant les vecteurs de base de la surface. On peut donc écrire (fig. 1.3)

$$\underline{n}_{,\alpha} = - b_{\alpha}^{\beta} \underline{a}_{\beta} . \quad (1.19)$$

Cette expression est connue sous le nom de relation de WEINTGARTEN. Le tenseur b_{α}^{β} porte le nom de tenseur de courbure. Sa forme covariante

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} b_{\beta}^{\gamma} = \underline{a}_{\beta} \cdot \underline{n}_{,\alpha}$$

est symétrique. En effet, l'orthogonalité des vecteurs de base avec la normale s'exprime par

$$\underline{a}_{\beta} \cdot \underline{n} = 0 ,$$

relation qui donne, après dérivation,

$$\underline{n} \cdot \underline{a}_{\beta, \alpha} = - \underline{a}_{\beta} \cdot \underline{n}_{,\alpha}$$

soit

$$b_{\alpha\beta} = \underline{a}_{\beta} \cdot \underline{n}_{,\alpha} = - \underline{n} \cdot \underline{a}_{\beta, \alpha} = - \underline{n} \cdot r_{,\alpha\beta} , \quad (1.19')$$

qui est visiblement symétrique.

On appelle directions principales de courbure les directions définies par les vecteurs unitaires de la forme

$$\underline{c} = c_{\beta} \underline{a}^{\beta} = c^{\beta} \underline{a}_{\beta}$$

vérifiant

$$b_{\alpha}^{\beta} c_{\beta} = \lambda c_{\alpha} .$$

Ce système homogène n'admet de solution que si

$$\text{dtm}(b_{\alpha}^{\beta} - \lambda \delta_{\alpha}^{\beta}) = K - 2\lambda H + \lambda^2 = 0,$$

avec

$$2H = b_1^1 + b_2^2 , \quad K = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 . \quad (1.20)$$

La résolution de cette équation mène aux deux valeurs

$$\lambda_1 = \frac{1}{R_1} = H - \sqrt{H^2 - K} , \quad \lambda_2 = \frac{1}{R_2} = H + \sqrt{H^2 - K} ,$$

appelées courbures principales, dont la somme est $2H$ et le produit K . On donne à H le nom de courbure moyenne et K s'appelle courbure gaussienne. R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux.

Les directions principales de courbure $\underline{c}^{(1)}$ et $\underline{c}^{(2)}$, sont orthogonales. En effet, si

$$b_{\alpha}^{\beta} c_{\beta}^{(1)} = \lambda_1 c_{\alpha}^{(1)} \quad \text{et} \quad b_{\alpha}^{\beta} c_{\beta}^{(2)} = \lambda_2 c_{\alpha}^{(2)},$$

la symétrie de $b_{\alpha\beta}$ entraîne

$$c_{(2)}^{\alpha} b_{\alpha\beta} c_{(1)}^{\beta} = \lambda_1 c_{\alpha}^{(1)} c_{(2)}^{\alpha} = \lambda_2 c_{\alpha}^{(2)} c_{(1)}^{\alpha},$$

soit

$$(\lambda_1 - \lambda_2) c_{\alpha}^{(1)} c_{(2)}^{\alpha} = 0,$$

ce qui entraîne l'orthogonalité si $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, toutes les directions tangentes à la surface sont principales de courbure et, parmi elles, on peut en choisir arbitrairement deux qui soient orthogonales (cas de la sphère).

1.4 - Dérivées des vecteurs de base

Nous savons déjà que

$$\underline{n} \cdot \underline{a}_{\beta,\alpha} = b_{\alpha\beta}.$$

On complète l'expression de la dérivée des vecteurs de base en écrivant

$$\underline{a}_{\beta,\alpha} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} \underline{a}_{\gamma} + b_{\alpha\beta} \underline{n}. \quad (1.21)$$

C'est la relation de GAUSS. Les $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ sont appelés symboles de CHRISTOFFEL de surface. Il est clair que

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \underline{a}_{\gamma} \cdot \underline{a}_{\beta,\alpha} = \underline{a}_{\gamma} \cdot \underline{a}_{\alpha,\beta} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\gamma} \quad (1.22)$$

Définissant les symboles de Christoffel de deuxième espèce

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = a_{\gamma\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda} = \underline{a}_{\gamma} \cdot \underline{a}_{\alpha,\beta} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma\alpha},$$

on remarquera que

$$a_{\alpha\beta,\gamma} = (\underline{a}_{\alpha} \cdot \underline{a}_{\beta})_{,\gamma} = \underline{a}_{\alpha,\gamma} \cdot \underline{a}_{\beta} + \underline{a}_{\alpha} \cdot \underline{a}_{\beta,\gamma} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\beta\alpha} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\alpha\beta}. \quad (1.23)$$

Par permutation des indices, on obtient les trois relations

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\alpha\beta,\gamma} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\alpha\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\beta\alpha} \\ a_{\beta\gamma,\alpha} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma\beta} \\ a_{\gamma\alpha,\beta} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma\alpha} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\alpha\gamma} \end{array} \right.$$

qui, compte tenu de la symétrie des $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}$ par rapport à leurs indices extrêmes, entraîne

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta,\gamma} + a_{\beta\gamma,\alpha} - a_{\gamma\alpha,\beta}), \quad (1.24)$$

relation permettant le calcul des symboles de Christoffel à partir du tenseur métrique.

Les dérivées de la base duale se déduisent aisément de (1.21) si l'on remarque que l'identité

$$\tilde{a}^\alpha \cdot a_\beta = \delta_\beta^\alpha$$

implique

$$\tilde{a}^\alpha_{,\gamma} \cdot a_\beta = -\tilde{a}^\alpha \cdot a_{\beta,\gamma} = -\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\beta}^\alpha,$$

tandis que l'identité

$$\tilde{a}^\alpha \cdot \tilde{n} = 0$$

entraîne

$$\tilde{a}^\alpha_{,\gamma} \cdot \tilde{n} = -\tilde{a}^\alpha \cdot \tilde{n}_{,\gamma} = b_\gamma^\alpha.$$

On a donc

$$a^\alpha_{,\gamma} = -\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\beta}^\alpha a^\beta + b_\gamma^\alpha \tilde{n}. \quad (1.25)$$

1.5 - Dérivées covariantes de surface

Etant donné deux vecteurs de surface

$$\tilde{u} = u^\alpha \tilde{a}_\alpha, \quad \tilde{v} = v_\beta \tilde{a}^\beta,$$

leur produit scalaire s'écrit

$$\tilde{u} \cdot \tilde{v} = u^\alpha v_\alpha.$$

Les dérivées de ce produit scalaire peuvent être calculées de deux manières. La première consiste à écrire

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{v})_{,\beta} = u^\alpha_{,\beta} v_\alpha + u^\alpha v_{\alpha,\beta} \quad (1.26)$$

et fait apparaître les dérivées des composantes. Dans la seconde, on écrit

$$\begin{aligned} (\tilde{u} \cdot \tilde{v})_{,\beta} &= \tilde{u}_{,\beta} \cdot \tilde{v} + \tilde{u} \cdot \tilde{v}_{,\beta} \\ &= \tilde{u}_{,\beta} \cdot v_\alpha \tilde{a}^\alpha + u^\alpha \tilde{a}_\alpha \cdot \tilde{v}_{,\beta} \\ &= u^\alpha |_{\beta} v_\alpha + v_\alpha |_{\beta} u^\alpha, \end{aligned}$$

en définissant les dérivées covariantes de surface

$$u^\alpha |_{\beta} = \tilde{a}^\alpha \cdot \tilde{u}_{,\beta}, \quad v_\alpha |_{\beta} = \tilde{a}_\alpha \cdot \tilde{v}_{,\beta} \quad (1.27)$$

Calculons ces grandeurs. On a

$$u^\alpha|_\beta = \tilde{a}^\alpha \cdot (u^\lambda \tilde{a}_\lambda)_{,\beta} = \tilde{a}^\alpha \cdot (u^\lambda_{,\beta} \tilde{a}_\lambda + u^\lambda \tilde{a}_{\lambda,\beta}) = u^\alpha_{,\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}^\alpha_\beta{}^\lambda u^\lambda \quad (1.28)$$

et

$$v_\alpha|_\beta = \tilde{a}_\alpha \cdot (v_\lambda \tilde{a}^\lambda)_{,\beta} = \tilde{a}_\alpha \cdot (v_{\lambda,\beta} \tilde{a}^\lambda + v_\lambda \tilde{a}^{\lambda}_{,\beta}) = v_{\alpha,\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_\beta{}^\alpha v_\lambda \quad (1.29)$$

De la même façon, les dérivées d'une expression du type

$s^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$, faisant intervenir un tenseur contravariant d'ordre deux peuvent être calculées par

$$(s^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta)_{,\gamma} = s^{\alpha\beta}_{,\gamma} u_\alpha v_\beta + s^{\alpha\beta} u_{\alpha,\gamma} v_\beta + s^{\alpha\beta} u_\alpha v_{\beta,\gamma}$$

ou par

$$(s^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta)_{,\gamma} = s^{\alpha\beta}|_\gamma u_\alpha v_\beta + s^{\alpha\beta} u_{\alpha|\gamma} v_\beta + s^{\alpha\beta} u_\alpha v_{\beta|\gamma},$$

à condition de définir $s^{\alpha\beta}|_\gamma$ de manière que ces deux expressions

coïncident. Il faut pour cela que

$$\begin{aligned} s^{\alpha\beta}|_\gamma u_\alpha v_\beta &= s^{\alpha\beta}_{,\gamma} u_\alpha v_\beta + s^{\alpha\beta} u_{\alpha,\gamma} v_\beta + s^{\alpha\beta} u_\alpha v_{\beta,\gamma} \\ &\quad - s^{\alpha\beta} u_{\alpha,\gamma} v_\beta + s^{\alpha\beta} \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\gamma\alpha} u_\lambda v_\beta - s^{\alpha\beta} u_\alpha v_{\beta,\gamma} + s^{\alpha\beta} u_\alpha \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\gamma\beta} v_\lambda, \end{aligned}$$

soit

$$s^{\alpha\beta}|_\gamma u_\alpha v_\beta = (s^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \overset{\circ}{\Gamma}^\alpha_{\gamma\lambda} s^{\lambda\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}^\beta_{\gamma\lambda} s^{\alpha\lambda}) u_\alpha v_\beta,$$

quels que soient, bien sûr, les vecteurs u_α et v_β . On aura donc

$$s^{\alpha\beta}|_\gamma = s^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \overset{\circ}{\Gamma}^\alpha_{\gamma\lambda} s^{\lambda\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}^\beta_{\gamma\lambda} s^{\alpha\lambda} \quad (1.30)$$

Pour un tenseur mixte, on trouverait, par un raisonnement analogue,

$$s^\alpha_\beta|_\gamma = s^\alpha_{\beta,\gamma} + \overset{\circ}{\Gamma}^\alpha_{\gamma\lambda} s^\lambda_\beta - \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\gamma\beta} s^\alpha_\lambda \quad (1.31)$$

et, pour un tenseur covariant,

$$s_{\alpha\beta}|_\gamma = s_{\alpha\beta;\gamma} - \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\gamma\alpha} s_{\lambda\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\gamma\beta} s_{\alpha\lambda} \quad (1.32)$$

Plus généralement, la dérivée covariante d'un tenseur quelconque s'obtient en ajoutant à la dérivée classique autant de termes contenant un symbole de Christoffel affecté du signe + qu'il y a d'indices supérieurs à ce tenseur et autant de termes contenant un symbole de Christoffel affecté du signe - que le tenseur possède d'indices inférieurs. On peut vérifier que les règles ci-dessus assurent la distributivité de la dérivation covariante, c'est-à-dire, par exemple,

$$(s^{\alpha\beta} u_{\beta})|_{\gamma} = s^{\alpha\beta}|_{\gamma} u_{\beta} + s^{\alpha\beta} u_{\beta}|_{\gamma} .$$

Considérant la relation

$$u_{\alpha|\beta} = \underset{\sim}{a}_{\alpha} \cdot \underset{\sim}{u}_{\beta} = a_{\alpha\gamma} \underset{\sim}{a}^{\gamma} \cdot \underset{\sim}{u}_{\beta} = a_{\alpha\gamma} u^{\gamma}{}_{|\beta} ,$$

on a donc également

$$u_{\alpha|\beta} = (a_{\alpha\gamma} u^{\gamma})|_{\beta} = a_{\alpha\gamma|\beta} u^{\gamma} + a_{\alpha\gamma} u^{\gamma}{}_{|\beta} ,$$

ce qui n'est possible que si

$$a_{\alpha\gamma|\beta} = 0 , \quad (1.33)$$

relation connue sous le nom de Lemme de RICCI et que l'on peut d'ailleurs déduire directement de (1.23). On a de la même façon

$$a^{\alpha\gamma}{}_{|\beta} = 0 , \quad \delta^{\alpha}_{\gamma}{}_{|\beta} = 0 . \quad (1.33')$$

La même propriété est encore vraie pour $\varepsilon_{\alpha\beta}$ et $\varepsilon^{\alpha\beta}$. Démontrons-la pour $\varepsilon_{\alpha\beta}$: on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta;\gamma} &= ((\underset{\sim}{a}_{\alpha} \times \underset{\sim}{a}_{\beta}) \cdot \underset{\sim}{n})_{,\gamma} = (\underset{\sim}{a}_{\alpha,\gamma} \times \underset{\sim}{a}_{\beta}) \cdot \underset{\sim}{n} + (\underset{\sim}{a}_{\alpha} \times \underset{\sim}{a}_{\beta,\gamma}) \cdot \underset{\sim}{n} \\ &\quad + (\underset{\sim}{a}_{\alpha} \times \underset{\sim}{a}_{\beta}) \cdot \underset{\sim}{n}_{,\gamma} \\ &= ((\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\alpha}^{\lambda} \underset{\sim}{a}_{\lambda} + b_{\alpha\gamma} \underset{\sim}{n}) \times \underset{\sim}{a}_{\beta}) \cdot \underset{\sim}{n} + (\underset{\sim}{a}_{\alpha} \times (\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\lambda} \underset{\sim}{a}_{\lambda} + b_{\beta\gamma} \underset{\sim}{n})) \cdot \underset{\sim}{n} \\ &\quad - (\underset{\sim}{a}_{\alpha} \times \underset{\sim}{a}_{\beta}) \cdot b_{\gamma}^{\lambda} \underset{\sim}{a}_{\lambda} \\ &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\alpha}^{\lambda} \varepsilon_{\lambda\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\lambda} \varepsilon_{\alpha\lambda} , \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\varepsilon_{\alpha\beta|\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta;\gamma} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\alpha}^{\lambda} \varepsilon_{\lambda\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\lambda} \varepsilon_{\alpha\lambda} = 0 \quad (1.34)$$

1.6 - Condition de commutativité des dérivées covariantes de surface

Peut-on intervertir l'ordre des dérivations covariantes? Il suffit en fait de se demander si, pour un vecteur quelconque u_{α} , on a bien

$$u_{\alpha|\beta\gamma} = u_{\alpha|\gamma\beta} ,$$

car cette relation entraîne la commutativité pour tous les autres tenseurs. Ainsi, pour un vecteur contravariant,

$$\begin{aligned} u^{\alpha}{}_{|\beta\gamma} &= (a^{\alpha\lambda} u_{\lambda})|_{\beta\gamma} = a^{\alpha\lambda}{}_{|\beta\gamma} u_{\lambda} + a^{\alpha\lambda}{}_{|\beta} u_{\lambda|\gamma} + a^{\alpha\lambda}{}_{|\gamma} u_{\lambda|\beta} \\ &\quad + a^{\alpha\lambda} u_{\lambda|\beta\gamma} \\ &= a^{\alpha\lambda} u_{\lambda|\beta\gamma} , \end{aligned}$$

par le lemme de Ricci. Pour un tenseur contravariant, on a, en posant

$$u^\alpha = s^{\alpha\lambda} v_\lambda,$$

la relation

$$\begin{aligned} u^\alpha|_{\beta\gamma} &= (s^{\alpha\lambda} v_\lambda)|_{\beta\gamma} = (s^{\alpha\lambda}|_\beta v_\lambda + s^{\alpha\lambda} v_\lambda|_\beta)|_\gamma \\ &= s^{\alpha\lambda}|_{\beta\gamma} v_\lambda + s^{\alpha\lambda}|_\beta v_\lambda|_\gamma + s^{\alpha\lambda}|_\gamma v_\lambda|_\beta + s^{\alpha\lambda} v_\lambda|_{\beta\gamma}, \end{aligned}$$

soit

$$s^{\alpha\lambda}|_{\beta\gamma} v_\lambda = u^\alpha|_{\beta\gamma} - s^{\alpha\lambda}|_\beta v_\lambda|_\gamma - s^{\alpha\lambda}|_\gamma v_\lambda|_\beta - s^{\alpha\lambda} v_\lambda|_{\beta\gamma},$$

le second membre étant symétrique par rapport aux indices β et γ chaque fois que les dérivées secondes des vecteurs le sont. Notons au passage que pour un scalaire, on a

$$\varphi|_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha|\beta} = \varphi_{,\alpha\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\alpha}^\lambda \varphi_{,\lambda},$$

expression qui est toujours symétrique par rapport à α et β .

Pour un vecteur u_λ , on a

$$\begin{aligned} u_\lambda|_{\beta\gamma} &= (u_\lambda|_\beta)_{,\gamma} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\lambda}^\mu u_\mu|_\beta - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\lambda}^\mu u_\lambda|_\mu \\ &= \underbrace{u_{\lambda,\beta\gamma}}_I - \underbrace{\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\lambda,\gamma}^\mu u_\mu}_{II} - \underbrace{\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\lambda}^\mu u_{\mu,\gamma}}_{III} - \underbrace{\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\lambda}^\mu u_{\mu,\beta}}_{IV} + \underbrace{\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\lambda}^\mu \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\mu}^\epsilon u_\epsilon}_{V} - \underbrace{\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}^\mu u_\lambda|_\mu}_{VI} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Dans cette expression, les termes I et VI sont symétriques par rapport à γ et β ; de plus, les termes III et IV ont une somme symétrique par rapport à ces indices. Il vient donc

$$u_\lambda|_{\beta\gamma} - u_\lambda|_{\gamma\beta} = \left(\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\lambda,\beta}^\mu - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\lambda,\gamma}^\mu + \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\lambda}^\epsilon \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\epsilon}^\mu - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\lambda}^\epsilon \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\epsilon}^\mu \right) u_\mu = R^\mu_{\cdot\lambda\beta\gamma} u_\mu, \quad (1.36)$$

où apparaît le tenseur $R^\mu_{\cdot\lambda\beta\gamma}$ appelé tenseur de courbure de RIEMANN

(à ne pas confondre avec le tenseur de courbure b_α^β de la surface).

Par conséquent, on ne pourra permuter l'ordre des dérivations covariantes que si le tenseur de courbure de Riemann est nul. Les conditions semblent a priori être au nombre de $2^4 = 16$. En fait, elles ne sont pas toutes indépendantes. Pour mettre ceci en évidence, considérons le tenseur quatre fois covariant

$$R_{\mu\lambda\beta\gamma} = a_{\mu\epsilon} R^\epsilon_{\cdot\lambda\beta\gamma}.$$

On peut le calculer à partir de (1.36). Mais on en obtient une forme plus simple en notant que

$$u_{\lambda|\beta\gamma} - u_{\lambda|\gamma\beta} = R_{\mu\lambda\beta\gamma} u^{\mu}.$$

et en remplaçant (1.35) par l'expression équivalente

$$u_{\lambda|\beta\gamma} = (u_{\lambda|\beta})_{,\gamma} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\lambda\mu} u^{\mu}|_{\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\mu} u_{\lambda|\mu},$$

ce qui, comme

$$u_{\lambda|\beta} = u_{\lambda,\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\mu\lambda} u^{\mu},$$

donne

$$u_{\lambda|\beta\gamma} = u_{\lambda,\beta\gamma} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\mu\lambda,\gamma} u^{\mu} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\mu\lambda} u^{\mu}_{,\gamma} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\mu\lambda} u^{\mu}_{,\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\mu\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta}^{\mu} u^{\epsilon}.$$

On en déduit directement

$$R_{\mu\lambda\beta\gamma} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\mu\lambda,\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\mu\lambda,\gamma} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\epsilon\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma}^{\epsilon\mu} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\epsilon\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta}^{\epsilon\mu}. \quad (1.37)$$

Tenant compte de la relation (1.24) entre les symboles de Christoffel et le tenseur métrique, on obtient aisément

$$R_{\mu\lambda\beta\gamma} = \frac{1}{2} (a_{\mu\gamma,\lambda\beta} + a_{\lambda\beta,\mu\gamma} - a_{\lambda\gamma,\mu\beta} - a_{\mu\beta,\lambda\gamma}) + \overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\epsilon\beta} \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\gamma}^{\epsilon} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\epsilon\gamma} \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\beta}^{\epsilon} \quad (1.38)$$

Il est aisé de déduire de cette expression les relations de symétrie suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\mu\lambda\beta\gamma} = -R_{\lambda\mu\beta\gamma} \quad (\text{antisymétrie par rapport aux deux premiers indices}) \\ R_{\mu\lambda\beta\gamma} = -R_{\mu\lambda\gamma\beta} \quad (\text{antisymétrie par rapport aux deux derniers indices}) \\ R_{\mu\lambda\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\mu\lambda} \quad (\text{symétrie par rapport aux deux couples d'indices}) \end{array} \right. \quad (1.39)$$

On n'aura donc $R_{\mu\lambda\beta\gamma} \neq 0$ que si $(\mu, \lambda) = (1, 2)$ ou $(2, 1)$ et si, de plus, $(\beta, \gamma) = (1, 2)$ ou $(2, 1)$. Ce qui ramène les composantes non nulles au tableau

$$\begin{bmatrix} R_{1212} & R_{1221} \\ R_{2112} & R_{2121} \end{bmatrix}$$

dont toutes les composantes sont égales au signe près. La seule composante indépendante est donc R_{1212} .

1.7 - Interprétation géométrique de la nullité du tenseur de courbure de Riemann

Rappelons qu'une surface est développable si l'on peut l'appliquer sur un plan sans déchirure ni recouvrement, c'est-à-dire en modi-

fiant son tenseur de courbure mais non son tenseur métrique. Cette propriété joue un rôle important dans maintes applications technologiques (coupe des vêtements, chaudronnerie, ...).

Lorsque la surface est développée, on peut y trouver un réseau cartésien orthogonal, pour lequel tous les $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ sont nuls. Revenant à la surface de départ, ce réseau garde les mêmes $a_{\alpha\beta}$ et, par conséquent, les mêmes $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$. Dès lors, une surface est développable si et seulement si l'on peut y construire un système de coordonnées $x^{\alpha'}$ tel que $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = 0$

Pour exprimer analytiquement ce critère, il nous faut d'abord déterminer la loi de transformation des symboles de Christoffel.

On a

$$\underset{\sim}{a}_{\alpha} = r_{\sim,\alpha} = r_{\sim,\alpha'} x^{\alpha'}_{,\alpha} = x^{\alpha'}_{,\alpha} \underset{\sim}{a}_{\alpha'}$$

d'où

$$a_{\alpha\beta} = x^{\alpha'}_{,\alpha} x^{\beta'}_{,\beta} a_{\alpha'\beta'}$$

et, par simple inversion,

$$a^{\alpha\beta} = x^{\alpha}_{,\alpha'} x^{\beta}_{,\beta'} a^{\alpha'\beta'}$$

La base duale vérifie donc

$$\underset{\sim}{a}^{\gamma} = a^{\delta\beta} \underset{\sim}{a}_{\beta} = x^{\delta}_{,\gamma'} x^{\beta}_{,\beta'} a^{\delta\beta'} x^{\varepsilon'}_{,\beta} \underset{\sim}{a}_{\varepsilon'} = x^{\delta}_{,\gamma'} \delta_{\beta'}^{\varepsilon'} a^{\delta\beta'} \underset{\sim}{a}_{\varepsilon'} = x^{\delta}_{,\gamma'} \underset{\sim}{a}^{\delta'}$$

Il en découle

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \underset{\sim}{a}^{\gamma} \cdot \underset{\sim}{a}_{\beta,\alpha} = x^{\delta}_{,\gamma'} \underset{\sim}{a}^{\delta'} \cdot (x^{\beta'}_{,\beta} a_{\beta'})_{,\alpha} = x^{\delta}_{,\gamma'} (x^{\beta'}_{,\alpha\beta} a_{\beta'} + x^{\beta'}_{,\beta} x^{\alpha'}_{,\alpha} a_{\beta',\alpha'})$$

soit

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = x^{\delta}_{,\gamma'} (x^{\delta'}_{,\alpha\beta} + x^{\beta'}_{,\beta} x^{\alpha'}_{,\alpha} \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha'\beta'}^{\delta'}) \quad (1.40)$$

La surface sera développable chaque fois que l'on peut trouver un système de coordonnées $x^{\delta'}$ pour lequel $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = 0$. On déduit de (1.40) que ce système sera lié aux coordonnées de départ x^{α} par les relations

$$x^{\delta'}_{,\alpha\beta} = x^{\delta'}_{,\gamma} \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad (1.41)$$

Ces équations fixant les dérivées de $x^{\delta'}_{,\alpha}$ ne seront compatibles que

si

$$(x^{\delta'}_{,\alpha\beta})_{,\lambda} = (x^{\delta'}_{,\alpha\lambda})_{,\beta} \quad (1.42)$$

Or, on a

$$(x^{\delta'}_{,\alpha\beta})_{,\lambda} = x^{\delta'}_{,\gamma\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} + x^{\delta'}_{,\gamma} \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta,\lambda}^{\gamma}$$

et, en remplaçant $x^{\delta'}_{,\gamma\lambda}$ par sa valeur tirée de (1.41), soit

$$x^{\delta'}_{,\gamma\lambda} = x^{\delta'}_{,\varepsilon} \overset{\circ}{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\lambda},$$

on obtient

$$(x^{\delta'}_{,\alpha\beta})_{,\lambda} = x^{\delta'}_{,\varepsilon} \left(\overset{\circ}{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}^{\varepsilon}_{\alpha\beta,\lambda} \right).$$

La condition de développabilité (1.42) s'écrit donc

$$0 = x^{\delta'}_{,\varepsilon} \left(\overset{\circ}{\Gamma}^{\varepsilon}_{\alpha\beta,\lambda} - \overset{\circ}{\Gamma}^{\varepsilon}_{\alpha\lambda,\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\beta} \overset{\circ}{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\lambda} \right) = x^{\delta'}_{,\varepsilon} R^{\varepsilon}_{\alpha\lambda\beta}.$$

Comme la matrice jacobienne $x^{\delta'}_{,\varepsilon}$ ne peut être singulière, la surface sera développable si et seulement si le tenseur de courbure de Riemann est nul.

1.8 - Intégrabilité des vecteurs de base

Imaginons que l'on se donne arbitrairement les lois de variation

$$x^{\alpha} \mapsto a_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(x^{\alpha}), \quad x^{\alpha} \mapsto b_{\beta\gamma} = B_{\beta\gamma}(x^{\alpha}).$$

Peut-on trouver une surface qui réponde à ces conditions? Il s'agit, en l'occurrence, de trouver la loi

$$x^{\alpha} \mapsto \tilde{r}(x^{\alpha}),$$

pour autant que ce soit possible. Observons d'abord que

$$\tilde{r}_{,\alpha} = \tilde{a}_{\alpha}$$

et que si l'on a pu déterminer les vecteurs de base \tilde{a}_{α} et les normales \tilde{n} , on a automatiquement

$$\tilde{r}_{,\alpha\beta} = \tilde{a}_{\alpha,\beta} = \overset{\circ}{\Gamma}^{\lambda}_{\beta\alpha} \tilde{a}_{\lambda} + b_{\alpha\beta} \tilde{n},$$

si bien que la symétrie des dérivées secondes sera acquise. Le problème se ramène donc à intégrer \tilde{a}_{α} et \tilde{n} à partir des relations de Gauss et de Weintgarten.

a) Intégration de la normale

Les équations de Weintgarten

$$\tilde{n}_{,\alpha} = -b_{\alpha\lambda} \tilde{a}^{\lambda},$$

ne seront compatibles que si

$$(\tilde{n}_{,\alpha})_{,\beta} = (\tilde{n}_{,\beta})_{,\alpha}.$$

Comme

$$(\tilde{n}_{,\alpha})_{,\beta} = -b_{\alpha\lambda,\beta} \tilde{a}^{\lambda} - b_{\alpha\lambda} \tilde{a}^{\lambda}_{,\beta} = -b_{\alpha\lambda,\beta} \tilde{a}^{\lambda} + b_{\alpha\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}^{\lambda}_{\beta\mu} \tilde{a}^{\mu} - b_{\alpha\lambda} b^{\lambda}_{\beta} \tilde{n},$$

et vu la symétrie par rapport à α et β du terme en \underline{n} , la condition s'écrit

$$b_{\alpha\lambda,\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\mu} b_{\alpha\mu} = b_{\beta\lambda,\alpha} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\mu} b_{\beta\mu}$$

ou encore,

$$b_{\alpha\lambda,\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\mu} b_{\alpha\mu} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\mu} b_{\lambda\mu} = b_{\beta\lambda,\alpha} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\mu} b_{\beta\mu} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} b_{\lambda\mu},$$

c'est-à-dire

$$b_{\alpha\lambda|\beta} = b_{\beta\lambda|\alpha} \quad . \quad (1.43)$$

C'est la condition de MAINARDI - CODAZZI.

b) Intégration des vecteurs de base \underline{a}_α

Les équations de Gauss

$$\underline{a}_{\lambda,\alpha} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\mu} \underline{a}_\mu + b_{\alpha\lambda} \underline{n}$$

ne seront compatibles que si

$$(\underline{a}_{\lambda,\alpha})_{,\beta} = (\underline{a}_{\lambda,\beta})_{,\alpha} \quad .$$

On calcule

$$\begin{aligned} (\underline{a}_{\lambda,\alpha})_{,\beta} &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda,\beta}^{\mu} \underline{a}_\mu + \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\mu} \underline{a}_{\mu,\beta} + b_{\alpha\lambda,\beta} \underline{n} + b_{\alpha\lambda} \underline{n}_{,\beta} \\ &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda,\beta}^{\mu} \underline{a}_\mu + \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\mu} \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\mu}^{\varepsilon} \underline{a}_\varepsilon + \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\mu} b_{\beta\mu} \underline{n} + b_{\alpha\lambda,\beta} \underline{n} - b_{\alpha}^{\lambda} b_{\beta}^{\mu} \underline{a}_\mu \\ &= \left(\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\varepsilon}{}_{,\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\mu} \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\mu}^{\varepsilon} - b_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\varepsilon} \right) \underline{a}_\varepsilon \\ &\quad + \left(b_{\alpha\lambda|\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\mu} b_{\mu\lambda} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\mu} b_{\alpha\mu} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\mu} b_{\beta\mu} \right) \underline{n} \quad . \end{aligned}$$

Le coefficient de \underline{n} est visiblement symétrique par rapport à α et β , vu la relation de Mainardi-Codazzi. Il reste donc à vérifier que

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda,\beta}^{\varepsilon} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\lambda,\alpha}^{\varepsilon} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\mu} \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\mu}^{\varepsilon} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\mu} \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\varepsilon} = b_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\varepsilon} - b_{\beta\lambda} b_{\alpha}^{\varepsilon}$$

soit, en tenant compte de la définition (1.36) du tenseur de courbure de Riemann,

$$R^{\varepsilon}{}_{\lambda\beta\alpha} = b_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\varepsilon} - b_{\beta\lambda} b_{\alpha}^{\varepsilon} \quad .$$

Elevant l'indice λ , on obtient

$$R^{\varepsilon\lambda}{}_{\beta\alpha} = b_{\alpha}^{\lambda} b_{\beta}^{\varepsilon} - b_{\beta}^{\lambda} b_{\alpha}^{\varepsilon} \quad .$$

En vertu des symétries du tenseur de Riemann, ces conditions sont toutes équivalentes à la suivante:

$$R^1{}_{\cdot\cdot 12} = b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1 = K \quad (1.44)$$

C'est la condition de GAUSS. Elle entraîne en particulier qu'une surface est développable si et seulement si sa courbure gaussienne est nulle. Plus généralement, elle exprime que la courbure gaussienne dépend de la métrique. Du reste, on vérifie aisément que

$$R^{\alpha\beta}_{\dots\gamma\lambda} = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\lambda} K \quad , \quad R_{\alpha\beta\gamma\lambda} = \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\lambda} K \quad (1.45)$$

1.9 - Dérivée d'un vecteur tridimensionnel sur la surface

Considérons un vecteur général de la forme

$$\tilde{u} = u^\beta \tilde{a}_\beta + w \tilde{n} \quad .$$

Sa dérivation donne

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{,\alpha} &= \tilde{u}^\beta_{,\alpha} \tilde{a}_\beta + u^\beta \tilde{a}_{\beta,\alpha} + w_{,\alpha} \tilde{n} + w \tilde{n}_{,\alpha} \\ &= u^\beta_{,\alpha} \tilde{a}_\beta + u^\beta \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta} \tilde{a}_\lambda + u^\beta b_{\alpha\beta} \tilde{n} + w_{,\alpha} \tilde{n} - w b^\lambda_{\alpha} \tilde{a}_\lambda \quad , \end{aligned}$$

soit

$$\tilde{u}_{,\alpha} = (u^\beta_{,\alpha} - b^\beta_{\alpha} w) \tilde{a}_\beta + (w_{,\alpha} + b_{\alpha\beta} u^\beta) \tilde{n} \quad . \quad (1.46)$$

Si l'on adopte le développement dual

$$\tilde{u} = u_\beta \tilde{a}^\beta + w \tilde{n} \quad ,$$

on obtient de même

$$\tilde{u}_{;\alpha} = (u_{\beta;\alpha} - b_{\alpha\beta} w) \tilde{a}^\beta + (w_{,\alpha} + b^\beta_{\alpha} u_\beta) \tilde{n} \quad . \quad (1.47)$$

2. GEOMETRIE DES COQUES

2.1 - Généralités et tenseur métrique

On appelle coque le volume engendré par une surface et sa normale, celle-ci s'étendant d'une longueur $t/2$ de chaque côté de la surface. La longueur t est l'épaisseur de la coque. Elle peut varier d'un point à l'autre de la surface; cependant, nous supposons toujours la coque mince. Plus précisément, si R est l'ordre de grandeur des rayons de courbure de la coque et L , une dimension caractéristique de la coque choisie pour représenter approximativement la longueur d'onde des phénomènes étudiés, il faudra que

$$\frac{t}{R} \ll 1 \quad , \quad \frac{t^2}{L^2} \ll 1 \quad . \quad (2.1)$$

La définition même de la coque implique que tout point y admet un vecteur-position de la forme

$$\underline{s}(x^\alpha, x^3) = \underline{r}(x^\alpha) + x^3 \underline{n}(x^\alpha) \quad . \quad (2.2)$$

La base de la coque est formée des vecteurs

$$\underline{g}_\alpha = \underline{s}_{,\alpha} = \underline{r}_{,\alpha} + x^3 \underline{n}_{,\alpha} = \underline{a}_\alpha - x^3 b_\alpha^\beta \underline{a}_\beta = \underline{\mu}_\alpha^\beta \underline{a}_\beta \quad , \quad (2.3)$$

avec

$$\underline{\mu}_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - x^3 b_\alpha^\beta \quad (2.4)$$

et

$$\underline{g}_3 = \underline{s}_{,3} = \underline{n} \quad (2.5)$$

Une petite perturbation dx^i des coordonnées fait passer de \underline{s} en $\underline{s} + d\underline{s}$, avec

$$d\underline{s} = \underline{g}_i dx^i \quad .$$

La distance ainsi parcourue est donnée par

$$ds^2 = \underline{g}_i dx^i \cdot \underline{g}_j dx^j = \underline{g}_{ij} dx^i dx^j \quad , \quad (2.6)$$

où \underline{g}_{ij} est le tenseur métrique de la coque. Plus précisément, on a

$$ds^2 = \underline{g}_\alpha dx^\alpha \cdot \underline{g}_\beta dx^\beta + \underline{n} dx^3 \cdot \underline{n} dx^3 = \underline{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + (dx^3)^2, \quad (2.6')$$

c'est-à-dire que

$$g_{33} = 1 \quad ; \quad g_{\alpha 3} = 0$$

et

$$g_{\alpha\beta} = \underline{g}_\alpha \cdot \underline{g}_\beta = \underline{\mu}_\alpha^\lambda \underline{a}_\lambda \cdot \underline{\mu}_\beta^\varepsilon \underline{a}_\varepsilon = (\delta_\alpha^\lambda - x^3 b_\alpha^\lambda) (\delta_\beta^\varepsilon - x^3 b_\beta^\varepsilon) a_{\lambda\varepsilon}$$

soit

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2 x^3 b_{\alpha\beta} + (x^3)^2 c_{\alpha\beta}, \quad (2.8)$$

où l'on a introduit la troisième forme fondamentale de la surface,

$$c_{\alpha\beta} = b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta}, \quad (2.9)$$

entièrement dépendante des courbures.

Nous noterons g le déterminant du tenseur métrique. Sa valeur est

$$g = \text{dtm}(g_{\alpha\beta}) = \text{dtm}(\mu_{\alpha}^{\lambda} \mu_{\beta}^{\varepsilon} a_{\lambda\varepsilon}) = \mu^2 a, \quad (2.10)$$

avec

$$\mu = \text{dtm}(\delta_{\alpha}^{\beta} - x^3 b_{\alpha}^{\beta}) = (x^3)^2 \text{dtm}(b_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{x^3} \delta_{\alpha}^{\beta}).$$

Le dernier déterminant obtenu se calcule aisément à partir de l'équation caractéristique des courbures (§ 1.3) :

$$\mu = (x^3)^2 (K - 2 \frac{H}{x^3} + \frac{1}{(x^3)^2}) = 1 - 2 H x^3 + K (x^3)^2. \quad (2.11)$$

Le tenseur métrique inverse $g^{\alpha\beta}$ est donné par

$$g^{\alpha\beta} = (\mu^{-1})_{\lambda}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\varepsilon}^{\beta} a^{\lambda\varepsilon},$$

avec

$$\begin{aligned} (\mu^{-1})_{\lambda}^{\alpha} &= \frac{1}{\mu} \varepsilon^{\alpha\pi} \varepsilon_{\lambda\theta} \mu_{\pi}^{\theta} = \frac{1}{\mu} (\delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\theta}^{\pi} - \delta_{\theta}^{\alpha} \delta_{\lambda}^{\pi}) (\delta_{\pi}^{\theta} - x^3 b_{\pi}^{\theta}) \\ &= \frac{1}{\mu} (2 \delta_{\lambda}^{\alpha} - \delta_{\lambda}^{\alpha} - x^3 b_{\pi}^{\pi} \delta_{\lambda}^{\alpha} + x^3 b_{\lambda}^{\alpha}) = \\ &= \frac{1}{\mu} ((1-2 H x^3) \delta_{\lambda}^{\alpha} + x^3 b_{\lambda}^{\alpha}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

On a donc

$$g_{\beta}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} g_{\beta} = (\mu^{-1})_{\lambda}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\varepsilon}^{\beta} a^{\lambda\varepsilon} \mu_{\beta}^{\alpha} a_{\alpha} = (\mu^{-1})_{\lambda}^{\alpha} a^{\lambda} \quad (2.15)$$

2.2 - Expression du produit vectoriel

Le produit mixte $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ de trois vecteurs \underline{a} , \underline{b} et \underline{c} est un nombre défini comme suit:

- sa grandeur est égale au volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs en question.
- son signe est positif si le trièdre $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ a la même orientation (dextrorsum ou sinistrorsum) que le trièdre $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$, négatif dans le cas contraire

Il va de soi que cette définition n'est pas totalement indépendante du système d'axes, puisque le produit change de signe si l'on change l'orientation de l'un des vecteurs de base. C'est pourquoi on dit que le produit mixte est un pseudo-scalaire.

Le produit mixte jouit de la propriété suivante:

$$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) (\underline{d}, \underline{e}, \underline{f}) = \begin{vmatrix} \underline{a} \cdot \underline{d} & \underline{a} \cdot \underline{e} & \underline{a} \cdot \underline{f} \\ \underline{b} \cdot \underline{d} & \underline{b} \cdot \underline{e} & \underline{b} \cdot \underline{f} \\ \underline{c} \cdot \underline{d} & \underline{c} \cdot \underline{e} & \underline{c} \cdot \underline{f} \end{vmatrix} \quad (2.16)$$

qu'il est facile de vérifier dans un système d'axes cartésiens, où

$$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Introduisant alors le pseudo-tenseur de LEVY-CIVITTA

$$\varepsilon_{ijk} = (\underline{g}_i, \underline{g}_j, \underline{g}_k) \quad , \quad (2.17)$$

on remarquera qu'il est totalement antisymétrique et ne possède de ce fait qu'une seule composante indépendante,

$$\varepsilon_{123} = (\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3) > 0 \quad .$$

La propriété (2.16) entraîne alors

$$\varepsilon_{123}^2 = \begin{vmatrix} \underline{g}_1 \cdot \underline{g}_1 & \underline{g}_1 \cdot \underline{g}_2 & \underline{g}_1 \cdot \underline{g}_3 \\ \underline{g}_2 \cdot \underline{g}_1 & \underline{g}_2 \cdot \underline{g}_2 & \underline{g}_2 \cdot \underline{g}_3 \\ \underline{g}_3 \cdot \underline{g}_1 & \underline{g}_3 \cdot \underline{g}_2 & \underline{g}_3 \cdot \underline{g}_3 \end{vmatrix} = g \quad ,$$

soit

$$\varepsilon_{123} = \sqrt{g} \quad (2.18)$$

On définit alors le produit vectoriel $\underline{a} \times \underline{b}$ de deux vecteurs \underline{a} et \underline{b} par

$$\underline{a} \times \underline{b} = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{g}_k) \underline{g}^k \quad (2.19)$$

Développant \underline{a} et \underline{b} dans la base des \underline{g}_i , on obtient alors

$$\underline{a} \times \underline{b} = a^i b^j (\underline{g}_i, \underline{g}_j, \underline{g}_k) \underline{g}^k = (\varepsilon_{kij} a^i b^j) \underline{g}^k$$

soit, pour $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$,

$$c_k = \varepsilon_{kij} a^i b^j \quad . \quad (2.20)$$

De la même façon, en posant

$$\varepsilon^{ijk} = (\underline{g}^i, \underline{g}^j, \underline{g}^k) = \varepsilon^{il} \varepsilon^{jm} \varepsilon^{kn} \varepsilon_{lmn} \quad , \quad (2.21)$$

on trouve

$$\varepsilon^{123} = \frac{1}{\sqrt{g}} \quad (2.22)$$

et, pour $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$, on a

$$c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \quad . \quad (2.20')$$

La propriété (2.16) implique

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{lmn} &= (\underline{g}^i, \underline{g}^j, \underline{g}^k)(\underline{g}_l, \underline{g}_m, \underline{g}_n) = \begin{vmatrix} \delta_l^i & \delta_m^i & \delta_n^i \\ \delta_l^j & \delta_m^j & \delta_n^j \\ \delta_l^k & \delta_m^k & \delta_n^k \end{vmatrix} \\ &= \delta_l^i \delta_m^j \delta_n^k + \delta_l^j \delta_m^k \delta_n^i + \delta_m^i \delta_n^j \delta_l^k - \delta_n^i \delta_m^j \delta_l^k - \delta_l^i \delta_n^j \delta_m^k \\ &\quad - \delta_m^i \delta_l^j \delta_n^k \end{aligned} \quad (2.23)$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{imn} &= 3 \delta_m^j \delta_n^k + \delta_k^j \delta_m^k + \delta_m^k \delta_n^j - \delta_n^k \delta_m^j - 3 \delta_n^j \delta_m^k - \delta_m^j \delta_n^k \\ &= \delta_m^j \delta_n^k - \delta_m^k \delta_n^j \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijn} = 3 \delta_n^k - \delta_n^k = 2 \delta_n^k \quad (2.25)$$

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6 \quad (2.26)$$

2.3 - Dérivées covariantes de volume

On définit les dérivées covariantes de volume par

$$u^i \parallel_j = \underline{g}^i \cdot \underline{u}_{,j} \quad . \quad (2.27)$$

Comme

$$\underline{u}_{,j} = (u^k \underline{g}_k)_{,j} = u^k_{,j} \underline{g}_k + u^k \underline{g}_{k,j} \quad ,$$

on a

$$u^i \parallel_j = u^i_{,j} + \Gamma_{j k}^i u^k \quad , \quad (2.28)$$

avec

$$\Gamma_{j k}^i = \Gamma_{k j}^i = \underline{g}^i \cdot \underline{g}_{k,j} \quad . \quad (2.29)$$

Pour les vecteurs covariants, on trouve de même

$$u_i \parallel_j = u_{i,j} - \Gamma_{i j}^k u_k \quad . \quad (2.30)$$

Pour les tenseurs, les règles sont identiques à celles de la dérivation covariante de surface. On obtient par la même voie que pour les surfaces

$$\Gamma_{ijk} = g_{jl} \Gamma_{i k}^l = \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{kj,i} + g_{ik,j}) \quad (2.31)$$

ainsi que le lemme de Ricci

$$\varepsilon_{ij||k} = 0 \quad . \quad (2.32)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk,1} &= (\varepsilon_{i,1} \varepsilon_j \varepsilon_k) + (\varepsilon_i \varepsilon_{j,1} \varepsilon_k) + (\varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_{k,1}) \\ &= \Gamma_{1i}^m (\varepsilon_m \varepsilon_j \varepsilon_k) + \Gamma_{1j}^m (\varepsilon_i \varepsilon_m \varepsilon_k) + \Gamma_{1k}^m (\varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_m) \\ &= \Gamma_{1i}^m \varepsilon_{mjk} + \Gamma_{1j}^m \varepsilon_{imk} + \Gamma_{1k}^m \varepsilon_{ijm} \quad , \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$\varepsilon_{ijk||1} = 0 \quad . \quad (2.33)$$

Enfin, la question de la commutativité des dérivées covariantes de volume se ramène à l'étude du tenseur de courbure de Riemann de volume:

$$u_{i||jk} - u_{i||kj} = R^p_{.ijk} u_p \quad ,$$

avec

$$R^p_{.ijk} = \Gamma_{ki,j}^p - \Gamma_{ji,k}^p + \Gamma_{ki}^q \Gamma_{jq}^p - \Gamma_{ji}^q \Gamma_{kq}^p \quad .$$

Comme on a

$$\varepsilon_{k,i} = \Gamma_{ki}^p \varepsilon_p$$

et

$$\varepsilon_{k,ij} = \Gamma_{ki,j}^p \varepsilon_p + \Gamma_{ki}^p \varepsilon_{p,j} = (\Gamma_{ki,j}^p + \Gamma_{ki}^q \Gamma_{jq}^p) \varepsilon_p \quad ,$$

on obtient directement

$$\varepsilon_{k,ij} - \varepsilon_{j,ik} = R^p_{.ijk} \varepsilon_p \quad .$$

Or, il est clair que

$$\varepsilon_{k,ij} = \varepsilon_{,kij} = \varepsilon_{,jik} = \varepsilon_{j,ik} \quad ,$$

ce qui entraîne la nullité du tenseur de Riemann. Il en découle que les dérivées covariantes de volume commutent toujours.

2.4 - Calcul explicite des symboles de Christoffel de volume

On a d'abord

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} &= \varepsilon^{\gamma} \cdot \varepsilon_{\beta,\alpha} = (\mu^{-1})_{\varepsilon}^{\gamma} a^{\varepsilon} \cdot (\mu^{\lambda}_{\beta} a_{\lambda,\alpha}) \\ &= (\mu^{-1})_{\varepsilon}^{\gamma} a^{\varepsilon} \cdot (\mu^{\lambda}_{\beta,\alpha} a_{\lambda} + \mu^{\lambda}_{\beta} a_{\lambda,\alpha}) \\ &= (\mu^{-1})_{\varepsilon}^{\gamma} \mu^{\varepsilon}_{\beta,\alpha} + (\mu^{-1})_{\varepsilon}^{\gamma} \mu^{\lambda}_{\beta} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\varepsilon} \quad . \end{aligned}$$

Comme

$$\mu_{\beta,\alpha}^{\varepsilon} = (\delta_{\beta}^{\varepsilon} - x^3 b_{\beta}^{\varepsilon}),_{\alpha} = -x^3 b_{\beta,\alpha}^{\varepsilon},$$

on obtient

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = (\mu^{-1})_{\varepsilon}^{\gamma} (\Gamma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} - x^3 b_{\beta}^{\lambda} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\varepsilon} - x^3 b_{\beta,\alpha}^{\varepsilon}) \quad (2.34)$$

On a par ailleurs

$$\Gamma_{\alpha 3}^{\gamma} = \tilde{g}^{\gamma} \cdot \tilde{g}_{\alpha,3} = (\mu^{-1})_{\varepsilon}^{\gamma} \tilde{a}_{\alpha}^{\varepsilon} \cdot (-b_{\alpha}^{\beta} \tilde{a}_{\beta}) = -(\mu^{-1})_{\beta}^{\gamma} b_{\alpha}^{\beta} \quad (2.35)$$

Pour $\Gamma_{\alpha\beta}^3$, il vient

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 = \tilde{g}^3 \cdot \tilde{g}_{\beta,\alpha} = \tilde{n} \cdot (\mu_{\beta,\alpha}^{\lambda} \tilde{a}_{\lambda} + \mu_{\beta}^{\lambda} \tilde{a}_{\lambda,\alpha}) = \mu_{\beta}^{\lambda} b_{\lambda\alpha} \quad (2.36)$$

On a enfin

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\alpha 3}^3 &= \tilde{g}^3 \cdot \tilde{g}_{3,\alpha} = 0 & ; & & \Gamma_{3 3}^3 &= \tilde{g}^3 \cdot \tilde{g}_{3,3} = 0 \\ \Gamma_{3 3}^{\alpha} &= \tilde{g}^{\alpha} \cdot \tilde{g}_{3,3} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

3. FONDEMENTS DE LA THEORIE DES COQUES MINCES

3.1 - Des hypothèses de la théorie des coques et de leur validité

Nous noterons respectivement u_i les déplacements, γ_{ij} les déformations de Green, s^{ij} les tensions de Kirchhoff-Trefftz, f^i les forces de volume, t^i les tractions de surface imposées sur une partie S_2 de la frontière, toutes ces charges étant supposées mortes, A_{ijkl} le tenseur des modules apparaissant dans l'expression de l'énergie complémentaire

$$\Psi = \int_V \mathcal{I} \, dV = \frac{1}{2} \int_V A_{ijkl} s^{ij} s^{kl} \, dV.$$

Le principe de Hellinger-Reissner stipule le caractère stationnaire de la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \int_V (s^{ij} \frac{1}{2} (u_{i||j} + u_{j||i} + u_{k||i} u_{k||j}) - \frac{1}{2} A_{ijkl} s^{ij} s^{kl} - f^i u_i) \, dV \\ - \int_{S_2} t^i u_i \, dS \end{aligned} \quad (3.1)$$

La théorie des coques ne s'applique que dans les cas restreints où le tenseur A_{ijkl} vérifie les conditions d'orthotropie

$$A_{\alpha\beta\lambda\gamma} = 0 \quad .$$

Notant alors

$$B_{\alpha\beta} = 2 A_{\alpha\beta\gamma\gamma} \quad , \quad (3.2)$$

on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(s) = \frac{1}{2} A_{ijkl} s^{ij} s^{kl} = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta\lambda\mu} s^{\alpha\beta} s^{\lambda\mu} + A_{\alpha\beta\gamma\gamma} s^{\alpha\beta} s^{\gamma\gamma} + \frac{1}{2} A_{\gamma\gamma\gamma\gamma} (s^{\gamma\gamma})^2 \\ + \frac{1}{2} B_{\alpha\beta} s^{\alpha\gamma} s^{\beta\gamma} \quad . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nous allons montrer qu'en fait, les tensions dans le feuillet moyen $s^{\alpha\beta}$, les tensions de cisaillement transversal $s^{\alpha\gamma}$ et les tensions transversales $s^{\gamma\gamma}$ ont des ordres de grandeur très dissemblables. En se restreignant au cadre des petites déformations, on peut identifier les tensions de Kirchhoff-Trefftz et les tensions vraies dans les coordonnées convectées (voir annexe). Limitant la discussion au cas de forces de volume négligeables, les tensions vraies vérifient les équations d'équilibre

$$\sigma^{,ij||,}{}_{,j} = 0 \quad .$$

L'expression détaillée de ces équations nécessite le calcul des symboles de Christoffel de la coque déformée. Partant de l'expression générale

$$\Gamma'_{ijk} = \frac{1}{2}(g'_{ij,k} + g'_{jk,i} - g'_{ik,j}) = \Gamma_{ijk} + (\gamma_{ij,k} + \gamma_{jk,i} - \gamma_{ik,j}) ,$$

nous supposons les coordonnées ainsi choisies que $g_{ij} = 0(1)$, c'est-à-dire que les vecteurs de base soient sensiblement de norme unitaire. On obtient directement

$$\Gamma'_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \gamma_{\alpha\beta,\gamma} + \gamma_{\beta\gamma,\alpha} - \gamma_{\alpha\gamma,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + 0(\gamma/L) = 0(1/L) .$$

Pour $\Gamma'_{\alpha\beta 3}$, on note que, sur le feuillet moyen,

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta 3} = a_{\beta\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha 3}^{\lambda} = a_{\beta\lambda} (\overset{\circ}{a}^{\lambda} \cdot \overset{\circ}{a}_{3,\alpha}) = -a_{\beta\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} = 0(1/R) .$$

Après déformation, on aura donc, en appelant R' l'ordre de grandeur des rayons déformés,

$$\overset{\circ}{\Gamma}'_{\alpha\beta 3} = -a'_{\beta\lambda} b'^{\lambda}_{\alpha} = 0(1/R') \approx \Gamma'_{\alpha\beta 3} .$$

De la même façon,

$$\Gamma'_{\alpha 3\beta} = 0(1/R') .$$

On a d'autre part

$$\Gamma'_{\alpha 33} = \Gamma_{\alpha 33} + \gamma_{\alpha 3,3} + \gamma_{33,\alpha} - \gamma_{\alpha 3,3} = 0 + 0(\gamma/L) = 0(\gamma/L) .$$

$$\Gamma'_{3\alpha 3} = \Gamma_{3\alpha 3} + 2\gamma_{\alpha 3,3} - \gamma_{33,\alpha} = 0 + 0(\gamma/t)$$

$$\Gamma'_{333} = \Gamma_{333} + \gamma_{33,3} = 0 + 0(\gamma/t) .$$

On peut alors calculer les symboles de Christoffel de première espèce par

$$\Gamma'_{i k}{}^j = g'^{jl} \Gamma'_{ilk} \approx g^{jl} \Gamma_{ilk} ,$$

puisque les déformations sont petites. Il vient, comme $g^{\beta 3} = 0$,

$$\Gamma'_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} \approx g^{\beta\lambda} \Gamma_{\alpha\lambda\gamma} = 0(1/L)$$

$$\Gamma'_{\alpha}{}^{\beta}{}_{3} \approx g^{\beta\lambda} \Gamma_{\alpha\lambda 3} = 0(1/R')$$

$$\Gamma'_{\alpha}{}^{3}{}_{\beta} \approx g^{33} \Gamma_{\alpha 3\beta} = 0(1/R')$$

$$\Gamma'_{\alpha}{}^{3}{}_{3} \approx g^{33} \Gamma_{\alpha 33} = 0(\gamma/L)$$

$$\Gamma'_{3}{}^{\alpha}{}_{3} \approx g^{\alpha\lambda} \Gamma_{3\lambda 3} = 0(\gamma/t)$$

$$\Gamma'_{3}{}^{3}{}_{3} \approx g^{33} \Gamma_{333} = 0(\gamma/t) .$$

Examinons d'abord l'équation d'équilibre en translation tangente au feuillet moyen,

$$\sigma'^{\alpha\beta} \parallel'_{\beta} + \sigma'^{\alpha 3} \parallel'_{3} = 0 \quad (a)$$

On a, d'une part,

$$\sigma^{\alpha\beta} \parallel \beta = \sigma^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} \sigma^{\lambda\beta} - \Gamma_{\beta 3}^{\alpha} \sigma^{3\beta} - \Gamma_{\beta\lambda}^{\beta} \sigma^{\alpha\lambda} - \Gamma_{\beta 3}^{\beta} \sigma^{\alpha 3}$$

O.G. $\sigma^{\alpha\beta}/L$ $\sigma^{\alpha\beta}/L$ $\sigma^{3\beta}/R$ $\sigma^{\alpha\beta}/L$ $\sigma^{3\beta}/R$

et, d'autre part,

$$\sigma^{\alpha 3} \parallel 3 = \sigma^{\alpha 3}{}_{,3} - \Gamma_{3\lambda}^{\alpha} \sigma^{\lambda 3} - \Gamma_{3 3}^{\alpha} \sigma^{33} - \Gamma_{3\lambda}^{\beta} \sigma^{\alpha\lambda} - \Gamma_{3 3}^{\beta} \sigma^{\alpha 3}$$

O.G. $\sigma^{\alpha 3}/t$ $\sigma^{\alpha 3}/R$ $\sigma^{33} \gamma/t$ $\sigma^{\alpha\beta} \gamma/L$ $\sigma^{\alpha 3} \gamma/t$

En ne retenant que les termes les plus grands, l'équation (a) implique la relation d'ordres de grandeur

$$\frac{O(\sigma^{\alpha\beta})}{L} + \frac{O(\sigma^{\alpha 3})}{t} + \frac{\gamma}{t} O(\sigma^{33}) = 0. \quad (b)$$

L'équation d'équilibre en translation perpendiculaire au feuillet moyen s'écrit

$$\sigma^{3\alpha} \parallel \alpha + \sigma^{33} \parallel 3 = 0. \quad (c)$$

On calcule d'abord

$$\sigma^{3\alpha} \parallel \alpha = \sigma^{3\alpha}{}_{,\alpha} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\beta} \sigma^{\lambda\alpha} - \Gamma_{\alpha 3}^{\beta} \sigma^{3\alpha} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha} \sigma^{3\lambda} - \Gamma_{\alpha 3}^{\alpha} \sigma^{33}$$

O.G. $\sigma^{\alpha 3}/L$ $\sigma^{\alpha\beta}/R$ $\sigma^{\alpha 3} \gamma/L$ $\sigma^{\alpha 3}/L$ σ^{33}/R

puis

$$\sigma^{33} \parallel 3 = \sigma^{33}{}_{,3} - 2 \Gamma_{3\lambda}^{\beta} \sigma^{\lambda 3} - 2 \Gamma_{3 3}^{\beta} \sigma^{33}$$

O.G. σ^{33}/L $\sigma^{\alpha 3} \gamma/L$ $\sigma^{33} \gamma/t$,

ce qui mène à la relation d'ordres de grandeur

$$\frac{O(\sigma^{\alpha\beta})}{R} + \frac{O(\sigma^{\alpha 3})}{L} + \frac{O(\sigma^{33})}{t} = 0. \quad (d)$$

On déduit de (d)

$$O(\sigma^{33}) = \frac{t}{L} O(\sigma^{\alpha 3}) + \frac{t}{R} O(\sigma^{\alpha\beta}) \quad (e)$$

et, en introduisant ce résultat dans (b), il vient

$$\frac{O(\sigma^{\alpha\beta})}{L} + \frac{O(\sigma^{\alpha 3})}{t} + \frac{\gamma}{L} O(\sigma^{\alpha 3}) + \frac{\gamma}{R} O(\sigma^{\alpha\beta}) = 0$$

soit, en ne conservant que les plus grands termes (*),

$$O(\sigma^{\alpha 3}) = \frac{t}{L} O(\sigma^{\alpha \beta}) \quad (3.4)$$

ce qui, réintroduit dans (e), donne

$$O(\sigma^{33}) = (t^2/L^2) O(\sigma^{\alpha \beta}) + (t/R) O(\sigma^{\alpha \beta}) . \quad (3.5)$$

En vertu de l'équivalence susmentionnée des tensions eulériennes en coordonnées convectées et des tensions de Kirchhoff-Trefftz, on aura donc

$$\begin{aligned} O(s^{\alpha 3}) &= (t/L) O(s^{\alpha \beta}) \\ O(s^{33}) &= \max(t/R, t^2/L^2) O(s^{\alpha \beta}). \end{aligned}$$

Dès lors, les différents termes de l'énergie complémentaire auront les ordres de grandeur suivants, en notant A l'ordre de grandeur des $A_{\alpha\beta\gamma\lambda}$, $A_{\alpha\beta 33}$ et B l'ordre de grandeur des $B_{\alpha\beta}$:

$$\left\{ \begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma\lambda} s^{\alpha\beta} s^{\gamma\lambda} &= A (O(s^{\alpha\beta}))^2 \\ A_{\alpha\beta 33} s^{\alpha\beta} s^{33} &= A \max(t/R, t^2/L^2) (O(s^{\alpha\beta}))^2 \\ A_{3333} (s^{33})^2 &= A \max(t^2/R^2, t^4/L^4) (O(s^{\alpha\beta}))^2 \\ B_{\alpha\beta} s^{\alpha 3} s^{\beta 3} &= B t^2/L^2 (O(s^{\alpha\beta}))^2 \end{aligned} \right.$$

De plus, en notant pour la concision $\gamma_{ij}(u)$ les déformations exprimées en termes des déplacements, les termes du type tensions x déformations de la fonctionnelle \mathcal{R} ont les ordres de grandeur suivants:

$$\left\{ \begin{aligned} s^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(u) &= O(s^{\alpha\beta}) \cdot O(\gamma) \\ s^{\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}(u) &= (t/L) O(s^{\alpha\beta}) O(\gamma) \\ s^{33} \gamma_{33}(u) &= \max(t/R, t^2/L^2) O(s^{\alpha\beta}) O(\gamma) . \end{aligned} \right.$$

De ces relations, il découle que, pour autant que $B \approx A$, ce qui a lieu dans la plupart des cas, excepté pour certains matériaux multicouches ("sandwiches"), on ne commet pas d'erreur relative supérieure à $\max(t/R, t^2/L^2)$ en se limitant à la fonctionnelle

$$\mathcal{R}^* = \int_V (s^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(u) + 2 s^{\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}(u) - \frac{1}{2} A_{\alpha\beta\gamma\lambda} s^{\alpha\beta} s^{\gamma\lambda} - f^\alpha u_\alpha - f^3 u_3) dV$$

(suite p. 29)

(*) Ceci suppose $\gamma \leq (R/L)$, c'est-à-dire que le rayon déformé n'est pas négligeable devant la longueur d'onde L, condition normalement vérifiée en pratique.

$$- \int_{S_2} (t^\alpha u_\alpha + t^3 u_3) dS \quad (3.6)$$

La variation des tensions dans ce principe fournit, comme on sait, les équations de compatibilité sous la forme de relations tensions-déformations. Ce sont:

$$\delta s^{\alpha\beta} \mapsto \gamma_{\alpha\beta}^{(u)} = A_{\alpha\beta\gamma\lambda} s^{\gamma\lambda}, \quad (3.7)$$

expressions identiques à celles de l'état plan de tension.

$$\delta s^{\alpha 3} \mapsto \gamma_{\alpha 3}^{(u)} = 0, \quad (3.8)$$

conditions dites de KIRCHHOFF-LOVE, qui expriment que les normales à la surface non-déformée restent normales au feuillet moyen au cours de la déformation.

La tension s^{33} ayant disparu du principe, l'équation de compatibilité relative à γ_{33} est perdue. On n'est nullement obligé de calculer γ_{33} de manière à satisfaire exactement à la condition d'état plan de tension, c'est-à-dire,

$$\gamma_3^3 = -\nu (\gamma_1^1 + \gamma_2^2).$$

Cette réintroduction, visant à restituer son caractère exact à la théorie, peut d'ailleurs mener à de graves restrictions (*). Il est préférable de poser simplement

$$\gamma_{33} = 0, \quad (3.9)$$

ce qui simplifie la description géométrique, tout en n'entraînant que des erreurs d'ordre γ sur la description de la géométrie déformée.

La théorie des coques construite sur les hypothèses (3.7) à (3.9) implique donc, dans ses fondements même, des erreurs relatives d'ordre

$$\eta = \max(t/R, t^2/L^2). \quad (3.10)$$

Comme l'a fait remarquer KOITER /1/, cette propriété implique que toute simplification supplémentaire, portant sur des termes dont l'ordre de grandeur n'excède pas η , est justifiée et mène à une

(*) De la même façon, pour des corps plan en état plan de tension, la solution n'est exacte au sens de la théorie tridimensionnelle que si la fonction d'Airy vérifie

$$\nabla^2 \varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \text{ctes},$$

au lieu de la condition classique $\nabla^4 \varphi = 0$, qui n'exprime qu'une compatibilité restreinte.

théorie équivalente en ce sens que les résultats qui en procéderont ne seront pas sensiblement altérés. Au contraire, il est vain de retenir des termes qui n'apportent qu'une correction d'ordre de grandeur relatif inférieur à η car, excepté peut-être dans quelques cas particuliers heureux, l'influence de ces termes est masquée par les erreurs fondamentales de la théorie. En d'autres termes, une approximation d'ordre plus élevé nécessite la remise en cause des hypothèses (3.7) à (3.9).

Ce point de vue fructueux a permis à KOITER /1/ de remettre un peu d'ordre dans les nombreuses théories de coques présentées auparavant et de les classer, en schématisant un peu, en:

- Théories déficientes, auxquelles manquent des termes importants.
- Théories constituant une première approximation cohérente, ne différant entre elles que par des termes négligeables et, par conséquent, équivalentes entre elles.
- Théories inutilement raffinées, qui conservent des termes ne pouvant pas apporter d'amélioration dans le cas général.

3.2 - Structure générale des déformations

Les relations (3.8) et (3.9) reviennent à dire que, lors de la déformation, la coque, qui avait initialement les tenseurs fondamentaux $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$, se transforme en une autre coque de même épaisseur et de tenseurs fondamentaux $a'_{\alpha\beta}$ et $b'_{\alpha\beta}$. La métrique déformée est donc de la forme

$$g'_{\alpha\beta} = a'_{\alpha\beta} - 2x^3 b'_{\alpha\beta} + (x^3)^2 b'_{\alpha\lambda} b'^{\lambda}_{\beta} \quad , \quad (3.11)$$

si bien que les déformations de Green, définies par

$$\delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g'_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) \quad ,$$

admettent l'expression

$$\delta_{\alpha\beta} = \delta^0_{\alpha\beta} - x^3 \rho_{\alpha\beta} + (x^3)^2 \psi_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.12)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) \\ \rho_{\alpha\beta} = b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \\ \psi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(b'_{\alpha\lambda} b'^{\lambda}_{\beta} - b_{\alpha\lambda} b^{\lambda}_{\beta}) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Dans le cadre des petites déformations, et en supposant comme ci-dessus $a_{\alpha\beta} = O(1)$, on a en général

$\delta_{\alpha\beta} = O(\gamma) \ll 1$,
ce qui implique en particulier

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = O(\gamma)$$

$${}^t p_{\alpha\beta} = O(\gamma) \quad , \quad \text{d'où} \quad p_{\alpha\beta} = O(\gamma/t) \quad .$$

Il en découle

$$\begin{aligned} 2 \Psi_{\alpha\beta} &= b_{\alpha\lambda}^{\circ} b_{\beta}^{\lambda} - b_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\lambda} = (b_{\alpha\lambda}^{\circ} - b_{\alpha\lambda}) b_{\beta}^{\lambda} + b_{\alpha\lambda} (b_{\beta}^{\lambda} - b_{\beta}^{\lambda}) \\ &= (b_{\alpha\lambda}^{\circ} - b_{\alpha\lambda}) (b_{\beta}^{\lambda} - b_{\beta}^{\lambda}) + (b_{\alpha\lambda}^{\circ} - b_{\alpha\lambda}) b_{\beta}^{\lambda} + b_{\alpha\lambda} (b_{\beta}^{\lambda} - b_{\beta}^{\lambda}) \\ &= p_{\alpha\lambda} p_{\beta}^{\lambda} + b_{\beta}^{\lambda} p_{\alpha\lambda} + b_{\alpha\lambda} p_{\beta}^{\lambda} \end{aligned}$$

$$\text{O.G.} \quad \gamma^2/t^2 \quad \gamma/(Rt) \quad \gamma/(Rt)$$

soit, en définitive,

$${}^t \Psi_{\alpha\beta} = O(\max(\gamma^2, \gamma t/R)) \quad , \quad (3.14)$$

ce qui signifie que le terme en $\Psi_{\alpha\beta}$ est toujours négligeable devant les deux autres. C'est pourquoi nous écrirons dorénavant

$$\gamma_{\alpha\beta} \approx \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} - x^3 p_{\alpha\beta} \quad . \quad (3.15)$$

3.3 - Equations constitutives /1/

Les relations constitutives d'un matériau homogène et isotrope s'écrivent (voir annexe) :

$$\begin{aligned} s_{\beta}^{\alpha} &= \frac{E}{1-\nu^2} ((1-\nu) \gamma_{\beta}^{\alpha} + \nu \gamma_{\lambda}^{\lambda} \delta_{\beta}^{\alpha}) \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} ((1-\nu) \delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\beta}^{\lambda} + \nu \delta_{\lambda}^{\lambda} \delta_{\beta}^{\alpha}) \gamma_{\epsilon}^{\lambda} \quad , \end{aligned}$$

ce qui entraîne successivement

$$s^{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} ((1-\nu) \delta_{\lambda}^{\alpha} g^{\epsilon\beta} + \nu \delta_{\lambda}^{\epsilon} g^{\alpha\beta}) \gamma_{\epsilon}^{\lambda}$$

et

$$s^{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} ((1-\nu) g^{\alpha\lambda} g^{\epsilon\beta} + \nu g^{\epsilon\lambda} g^{\alpha\beta}) \gamma_{\epsilon\lambda} = C^{\alpha\beta\lambda\epsilon} \gamma_{\lambda\epsilon} \quad (3.16)$$

En vertu du lemme de Ricci, on a

$$C^{\alpha\beta\lambda\epsilon} \parallel_3 = 0 \quad , \quad (3.17)$$

ce qui ne fait d'ailleurs qu'exprimer l'indépendance du matériau par rapport à la coordonnée x^3 . La relation (3.17), sur laquelle nous nous appuyerons, reste donc valable chaque fois que le matériau est

indépendant de la coordonnée x^3 .

La densité d'énergie de déformation admet le développement de Taylor

$$W(x^\alpha, x^3) = W(x^\alpha, 0) + x^3 W_{,3}(x^\alpha, 0) + (x^3)^2 W_{,33}(x^\alpha, 0) + \dots, \quad (3.18)$$

que nous limiterons au second ordre. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} W(x^\alpha, 0) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} \\ W_{,3}(x^\alpha, 0) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} (\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta||3} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} + \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon||3}) \\ W_{,33}(x^\alpha, 0) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} (2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta||3} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon||3} + \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta||33} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} + \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon||33}) \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Ces expressions ont été obtenues en tenant compte de la relation (3.17). Les indices (\circ) signifient que la grandeur indicée a été calculée en $x^3 = 0$.

Commençons par évaluer les différentes dérivées qui apparaissent dans (3.19). On a d'abord

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta||3} = \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta,3} - \Gamma_{3\alpha}^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\beta} - \Gamma_{3\beta}^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda}, \quad (3.20)$$

d'où

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta||3} = -\rho_{\alpha\beta} + b_\alpha^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda}.$$

O.G. $\gamma/t \quad \gamma/R \quad \gamma/R$

Les deux derniers termes sont donc d'un ordre de grandeur t/R fois plus petit que $\rho_{\alpha\beta}$ et, de plus, s'annulent lors d'un déplacement de corps rigide. Il est donc parfaitement licite d'écrire

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta||3} \approx -\rho_{\alpha\beta}. \quad (3.21)$$

Passons aux dérivées secondes: on a

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta||33} = (\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta||3})_{,3} - \Gamma_{3\alpha}^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\beta||3} - \Gamma_{3\beta}^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda||3}$$

et, en tenant compte de (3.20),

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta||33} = & \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta,33} - \Gamma_{3\alpha}^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\beta,3} - \Gamma_{3\alpha}^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\beta,3} - \Gamma_{3\beta}^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda,3} - \Gamma_{3\beta}^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda,3} \\ & - \Gamma_{3\alpha}^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\beta,3} + \Gamma_{3\alpha}^\lambda \Gamma_{3\lambda}^\beta \overset{\circ}{\gamma}_{\varepsilon\beta} + \Gamma_{3\alpha}^\lambda \Gamma_{3\beta}^\varepsilon \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} \\ & - \Gamma_{3\beta}^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda,3} + \Gamma_{3\beta}^\lambda \Gamma_{3\alpha}^\varepsilon \overset{\circ}{\gamma}_{\varepsilon\lambda} + \Gamma_{3\beta}^\lambda \Gamma_{3\lambda}^\varepsilon \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\varepsilon}. \end{aligned}$$

En ce qui concerne les dérivées des symboles de Christoffel, on a

$$\Gamma_{3\alpha,3}^\lambda = -(\mu^{-1})_{\beta,3}^\lambda b_\alpha^\beta$$

et, comme

$$0 = \delta_{\varepsilon,3}^\gamma = (\mu^{-1})_{\beta,3}^\gamma \mu_\varepsilon^\beta + (\mu^{-1})_\beta^\gamma \mu_{\varepsilon,3}^\beta,$$

on a

$$(\mu^{-1})_{\pi,3}^\gamma = -(\mu^{-1})_\pi^\varepsilon (\mu^{-1})_\beta^\gamma \mu_{\varepsilon,3}^\beta = (\mu^{-1})_\pi^\varepsilon (\mu^{-1})_\beta^\gamma b_\varepsilon^\beta,$$

d'où

$$(\mu^{-1})_{\pi,3}^\gamma = \delta_\pi^\varepsilon \delta_\beta^\gamma b_\varepsilon^\beta = b_\pi^\gamma$$

et

$$\Gamma_{3\alpha,3}^\lambda = -b_\beta^\lambda b_\alpha^\beta = -c_\alpha^\lambda,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \parallel_{33} &= \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta,33} + c_\alpha^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} + b_\alpha^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\beta,3} + c_\beta^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda} + b_\beta^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda,3} \\ &+ b_\alpha^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\beta,3} + c_\alpha^\varepsilon \overset{\circ}{\gamma}_{\varepsilon\beta} + b_\alpha^\lambda b_\beta^\varepsilon \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} + b_\beta^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda,3} + b_\beta^\lambda b_\alpha^\varepsilon \overset{\circ}{\gamma}_{\varepsilon\lambda} + c_\beta^\varepsilon \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\varepsilon}. \end{aligned}$$

Dans cette expression, on a

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta,33} &= \Psi_{\alpha\beta} = O(\max(\gamma^2/t^2, \gamma/(Rt))) \\ b_\varepsilon^\lambda b_\alpha^\varepsilon \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\beta} &= O(\gamma/R^2) \\ b_\alpha^\lambda \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\beta} &= O(\gamma/(Rt)). \end{aligned}$$

Le plus grand terme est donc $\Psi_{\alpha\beta} = O(\max(\gamma^2/t^2, \gamma/(Rt)))$. Les différents termes intervenant dans $w_{,33}(x, 0)$ sont par conséquent

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \parallel_3 \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} \parallel_3 &= O(\gamma^2/t^2) \\ \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \parallel_{33} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} + \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} \parallel_{33} &= O(\gamma^3/t^2, \gamma^2/(Rt)), \end{aligned}$$

et le second est visiblement négligeable devant le premier. En définitive, on peut écrire sans grande erreur

$$\left\{ \begin{aligned} w(x^\alpha, 0) &= \frac{1}{2} \overset{\circ}{c}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} \\ w_{,3}(x^\alpha, 0) &= -\frac{1}{2} \overset{\circ}{c}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} (\rho_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} + \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \rho_{\lambda\varepsilon}) \\ w_{,33}(x^\alpha, 0) &= \frac{1}{2} \overset{\circ}{c}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\lambda\varepsilon} \end{aligned} \right. \quad (3.22)$$

Nous sommes à présent en mesure de calculer l'énergie de déformation par unité de surface, donnée par

$$\begin{aligned}
V(x^\alpha) &= \int_{-t/2}^{t/2} W(x^\alpha, x^3) (1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2) dx^3 \\
&= W(x^\alpha, 0) \left(t + K \frac{t^3}{12}\right) - 2H \frac{t^3}{12} W_{,3}(x^\alpha, 0) + W_{,33}(x^\alpha, 0) \left(\frac{t^3}{12} + K \frac{t^5}{80}\right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Dans cette expression, il est clair que l'on peut négliger $K \frac{t^3}{12}$ devant t et $K \frac{t^5}{80}$ devant $\frac{t^3}{12}$, moyennant une erreur d'ordre t^2/R^2 , bien inférieure à celle de la théorie même. Nous allons montrer qu'en plus de cela, le terme en $W_{,3}(x^\alpha, 0)$ est négligeable devant les deux autres. En effet, la positive définition des modules permet d'utiliser l'inégalité de Schwarz-Cauchy

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} \rho_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} \right| &\leq \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\lambda\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{12}}{t^2} \left(\frac{t^3}{12} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\lambda\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \left(t \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ce qui, par l'inégalité

$$2AB \leq A^2 + B^2,$$

entraîne encore

$$\begin{aligned}
\left| W_{,3}(x^\alpha, 0) \right| &\leq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{12}}{t^2} \left(\frac{t^3}{12} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\lambda\varepsilon} + t \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} \right) \\
&\leq \frac{\sqrt{12}}{t^2} \left(t W(x^\alpha, 0) + \frac{t^3}{12} W_{,33}(x^\alpha, 0) \right).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\left| 2H \frac{t^3}{12} W_{,3}(x^\alpha, 0) \right| \leq 2H \frac{t}{\sqrt{12}} \left(t W(x^\alpha, 0) + \frac{t^3}{12} W_{,33}(x^\alpha, 0) \right),$$

et le coefficient du second membre est d'ordre t/R .

Finalement, on obtient l'expression suivante pour l'énergie de déformation par unité de surface du feuillet moyen:

$$V(x^\alpha) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} t \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} \frac{t^3}{12} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\lambda\varepsilon}, \tag{3.24}$$

moyennant des erreurs relatives d'ordre γ et t/R . Définissant alors les résultantes $n^{\alpha\beta}$ et les moments $m^{\alpha\beta}$ par

$$n^{\alpha\beta} = \partial V / \partial \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta}, \quad m^{\alpha\beta} = \partial V / \partial \rho_{\alpha\beta} \tag{3.25}$$

on obtient directement

$$n^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} t \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\varepsilon}, \quad m^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} (t^3/12) \rho_{\lambda\varepsilon} \tag{3.26}$$

L'expression (3.24) de l'énergie de déformation a été introduite par LOVE /2/. Sa justification à l'aide des dérivées covariantes des déformations et de l'inégalité de Schwarz-Cauchy est due à KOITER /1/. Nous nous sommes cependant écarté de sa démarche pour l'évaluation des termes fondamentaux dans la déformation, où nous faisons usage des évaluations de $\rho_{\alpha\beta}$ et $\psi_{\alpha\beta}$, au lieu de recourir, comme KOITER et, avant lui, CHIEN /4/, aux équations générales de compatibilité.

4. EXPRESSION DES DEFORMATIONS A PARTIR DES COMPOSANTES CURVILIGNES DES DEPLACEMENTS

L'expression des déplacements en composantes curvilignes est la plus courante, parce que la plus parlante physiquement. Cependant, cette formulation présente des désavantages certains dans les calculs par éléments finis, ainsi que nous le verrons en section 5. Nous suivrons ici, dans ses grandes lignes, l'approche de KOITER /3/, qui a l'avantage de ne faire apparaître que les déplacements du feuillet moyen.

4.1 - Déformations de la surface moyenne

La déformation transportant le point de vecteur-position \underline{r} en un point

$$\underline{r}' = \underline{r} + \underline{u} = \underline{r} + u^\alpha \underline{a}_\alpha + w \underline{n} \quad , \quad (4.1)$$

la base déformée est donnée par

$$\underline{a}'_\alpha = \underline{r}'_{,\alpha} = \underline{a}_\alpha + u^\beta |_\alpha \underline{a}_\alpha + u_\beta b_\alpha^\beta \underline{n} + w_{,\alpha} \underline{n} - w b_\alpha^\beta \underline{a}_\beta \quad ,$$

ce qui s'écrit encore

$$\underline{a}'_\alpha = l_{\alpha\beta}^\alpha \underline{a}_\beta + \phi_\alpha \underline{n} \quad , \quad (4.2)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{\alpha\beta}^\alpha = \delta_{\alpha\beta}^\alpha + \lambda_{\alpha\beta}^\alpha = \delta_{\alpha\beta}^\alpha + u^\alpha |_\alpha - w b_\alpha^\beta \\ \phi_\alpha = w_{,\alpha} + b_\alpha^\beta u_{\alpha\beta} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Le vecteur ϕ_α est généralement appelé rotation de la normale. Il convient de prendre garde au fait que les tenseurs $l_{\alpha\beta}^\alpha$ et $\lambda_{\alpha\beta}^\alpha$ ne sont pas symétriques.

La nouvelle métrique est donnée par

$$\begin{aligned} a'_{\alpha\beta} &= \underline{a}'_\alpha \cdot \underline{a}'_\beta = (l_{\alpha\gamma}^\alpha \underline{a}_\gamma + \phi_\alpha \underline{n}) (l_{\beta\epsilon}^\beta \underline{a}_\epsilon + \phi_\beta \underline{n}) \\ &= l_{\alpha\gamma}^\alpha l_{\beta\epsilon}^\beta a_{\gamma\epsilon} + \phi_\alpha \phi_\beta = (\delta_{\alpha\gamma}^\alpha + \lambda_{\alpha\gamma}^\alpha) (a_{\gamma\epsilon} + \lambda_{\gamma\epsilon}^\beta) + \phi_\alpha \phi_\beta \\ &= a_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\alpha} + \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\gamma}^\alpha \lambda_{\gamma\beta} + \phi_\alpha \phi_\beta \quad . \end{aligned}$$

On en déduit directement

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\lambda_{\beta\alpha} + \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\gamma}^\alpha \lambda_{\gamma\beta} + \phi_\alpha \phi_\beta) \quad . \quad (4.4)$$

La version linéarisée de ce tenseur est

$$\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\lambda_{\beta\alpha} + \lambda_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} (u_\beta |_\alpha + u_\alpha |_\beta) - b_{\alpha\beta} w \quad . \quad (4.5)$$

Il n'est pas sans intérêt d'introduire le tenseur

$$\overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} - \lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_\beta |_\alpha - u_\alpha |_\beta) \quad (4.6)$$

qui, antisymétrique, possède une seule composante indépendante Ω telle que

$$\overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} \Omega \quad (4.7)$$

On a

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \Omega = 2 \Omega \quad (4.8)$$

et, par conséquent,

$$\Omega = \frac{1}{4} \varepsilon^{\alpha\beta} (u_{\beta|\alpha} - u_{\alpha|\beta}) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} u_{\beta|\alpha} \quad (4.9)$$

ce qui signifie que, pour de petites rotations, Ω représente la rotation autour de la normale. On peut alors écrire

$$\lambda_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta} \quad (4.10)$$

et

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} a^{\alpha\varepsilon} (\overset{\circ}{\theta}_{\varepsilon\alpha} - \overset{\circ}{\omega}_{\varepsilon\alpha}) (\overset{\circ}{\theta}_{\varepsilon\beta} - \overset{\circ}{\omega}_{\varepsilon\beta}) + \frac{1}{2} \phi_{\alpha} \phi_{\beta} \quad (4.11)$$

4.2 - Variation de la surface

Dans la surface déformée, on a

$$a' = \sqrt{a} \varepsilon^{\alpha\beta} a'_{\alpha} a'_{\beta} = \frac{1}{2} a \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} a'_{\alpha\lambda} a'_{\beta\mu} ,$$

d'où

$$\begin{aligned} (a'/a) &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} (a_{\alpha\lambda} + 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda}) (a_{\beta\mu} + 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\beta\mu}) = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} + \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} + \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} a_{\alpha\lambda} \overset{\circ}{\gamma}_{\beta\mu} + 2 \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda} \overset{\circ}{\gamma}_{\beta\mu} \end{aligned}$$

On calcule successivement

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} &= \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} - a^{\beta\lambda} a_{\lambda\beta} = 4 - \delta_{\lambda}^{\lambda} = 2 \\ \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} &= \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} = (a^{\alpha\lambda} \delta_{\mu}^{\lambda} - a^{\alpha\mu} \delta_{\mu}^{\lambda}) \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\lambda} = 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha}^{\alpha} - a^{\alpha\mu} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\mu} = \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha}^{\alpha} , \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{a'}{a} = 1 + 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha}^{\alpha} + 2 \varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\mu} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\mu} = 1 + 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha}^{\alpha} + 0(\gamma^2) . \quad (4.12)$$

4.3 - Normale à la surface déformée

La normale à la surface déformée est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{n}' &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \tilde{a}'_{\alpha} \times \tilde{a}'_{\beta} = \frac{1}{2} (a/a')^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\alpha\beta} \tilde{a}'_{\alpha} \times \tilde{a}'_{\beta} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} (a/a')^{\frac{1}{2}} (1^{\alpha}_{\alpha} \tilde{a}_{\alpha} + \phi_{\alpha} \tilde{n}) \times (1^{\beta}_{\beta} \tilde{a}_{\beta} + \phi_{\beta} \tilde{n}) . \quad (4.13) \end{aligned}$$

Pour pouvoir la calculer, il nous faut disposer de l'expression de

$\tilde{n} \times \tilde{a}_{\lambda}$. On a

$$\begin{aligned} \tilde{n} \times \tilde{a}_{\lambda} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} (\tilde{a}_{\alpha} \times \tilde{a}_{\beta}) \times \tilde{a}_{\lambda} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} (a_{\beta} (\tilde{a}_{\alpha} \cdot \tilde{a}_{\lambda}) - \tilde{a}_{\alpha} (\tilde{a}_{\beta} \cdot \tilde{a}_{\lambda})) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} (a_{\alpha\lambda} \tilde{a}_{\beta} - a_{\beta\lambda} \tilde{a}_{\alpha}) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} a_{\varepsilon\lambda} \tilde{a}_{\eta} (\delta_{\alpha}^{\varepsilon} \delta_{\beta}^{\eta} - \delta_{\alpha}^{\eta} \delta_{\beta}^{\varepsilon}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\varepsilon\eta} \varepsilon_{\alpha\beta} a_{\varepsilon\lambda} \tilde{a}_{\eta} = \varepsilon^{\varepsilon\eta} a_{\varepsilon\lambda} \tilde{a}_{\eta} \quad (4.14)$$

Rappelons par ailleurs que

$$\tilde{a}_{\alpha} \times a_{\lambda} = \varepsilon_{\alpha\lambda} \tilde{n} \quad .$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \tilde{n}' &= \frac{1}{2} (a/a')^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\alpha\beta} (l_{\cdot\alpha}^{\alpha} l_{\cdot\beta}^{\lambda} \varepsilon_{\alpha\lambda} \tilde{n} - l_{\cdot\alpha}^{\alpha} \phi_{\beta}^{\varepsilon\eta} \varepsilon^{\varepsilon\eta} a_{\varepsilon\lambda} \tilde{a}_{\eta} + l_{\cdot\beta}^{\lambda} \phi_{\alpha}^{\varepsilon\eta} \varepsilon^{\varepsilon\eta} a_{\varepsilon\lambda} \tilde{a}_{\eta}) \\ &= \frac{1}{2} (a/a')^{\frac{1}{2}} (\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\varepsilon\eta} (l_{\varepsilon\beta} \phi_{\alpha} - l_{\varepsilon\alpha} \phi_{\beta}) a_{\eta} + \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\lambda} l_{\cdot\alpha}^{\alpha} l_{\cdot\beta}^{\lambda} \tilde{n}) \\ &= \frac{1}{2} (a/a')^{\frac{1}{2}} ((a^{\alpha\varepsilon} a^{\beta\eta} - a^{\alpha\eta} a^{\beta\varepsilon}) (l_{\varepsilon\beta} \phi_{\alpha} - l_{\varepsilon\alpha} \phi_{\beta}) a_{\eta} \\ &\quad + (\delta_{\alpha}^{\alpha} \delta_{\lambda}^{\beta} - \delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\alpha}^{\beta}) (l_{\cdot\alpha}^{\alpha} l_{\cdot\beta}^{\lambda}) \tilde{n}) \\ &= \frac{1}{2} (a/a')^{\frac{1}{2}} ((l^{\alpha\eta} \phi_{\alpha} - l_{\cdot\beta}^{\beta} \phi^{\eta} - l_{\cdot\alpha}^{\alpha} \phi^{\eta} + l^{\beta\eta} \phi_{\beta}) a_{\eta} \\ &\quad + (l_{\cdot\alpha}^{\alpha} l_{\cdot\beta}^{\beta} - l_{\cdot\alpha}^{\beta} l_{\cdot\beta}^{\alpha}) \tilde{n}) \\ &= \frac{1}{2} (a/a')^{\frac{1}{2}} ((l^{\alpha\eta} \phi_{\alpha} - l_{\cdot\alpha}^{\alpha} \phi^{\eta}) a_{\eta} + \frac{1}{2} (l_{\cdot\alpha}^{\alpha} l_{\cdot\beta}^{\beta} - l_{\cdot\alpha}^{\beta} l_{\cdot\beta}^{\alpha}) \tilde{n}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

On peut encore exprimer ce résultat en termes des tenseurs $\overset{\circ}{\theta}$ et $\overset{\circ}{\omega}$: il suffit de remplacer, dans (4.15), $l_{\cdot\alpha}^{\alpha}$ par sa valeur

$$l_{\cdot\alpha}^{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\alpha} + \lambda_{\cdot\alpha}^{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\alpha} + \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha} - \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\alpha}^{\alpha} \quad .$$

Commençons par effectuer cette transformation sur le coefficient de \tilde{a}_{η} dans (4.15). Tenant compte du fait que

$$\overset{\circ}{\omega}_{\cdot\alpha}^{\alpha} = a^{\lambda\alpha} \overset{\circ}{\omega}_{\lambda\alpha} = a^{\lambda\alpha} \varepsilon_{\lambda\alpha} \Omega = a^{\frac{1}{2}} (a^{12} - a^{21}) \Omega = 0 \quad ,$$

on obtient

$$\begin{aligned} (a^{\alpha\eta} + \overset{\circ}{\theta}^{\alpha\eta} - \overset{\circ}{\omega}^{\alpha\eta}) \phi_{\alpha} - (\delta_{\alpha}^{\alpha} + \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha}) \phi^{\eta} &= \phi^{\eta} + (\overset{\circ}{\theta}^{\alpha\eta} - \overset{\circ}{\omega}^{\alpha\eta}) \phi_{\alpha} - (2 + \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha}) \phi^{\eta} \\ &= - (1 + \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha}) \phi^{\eta} + (\overset{\circ}{\theta}^{\alpha\eta} - \overset{\circ}{\omega}^{\alpha\eta}) \phi_{\alpha} \quad . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Quant au coefficient de \tilde{n} dans (4.15), il se transforme en

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ((\delta_{\alpha}^{\alpha} + \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha}) (\delta_{\beta}^{\beta} + \overset{\circ}{\theta}_{\beta}^{\beta}) - (\delta_{\alpha}^{\alpha} + \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha} - \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\alpha}^{\alpha}) (\delta_{\beta}^{\beta} + \overset{\circ}{\theta}_{\beta}^{\beta} - \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\beta}^{\beta})) &= \\ \frac{1}{2} (4 + 4 \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha} + (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha})^2 - (\delta_{\beta}^{\beta} + \overset{\circ}{\theta}_{\beta}^{\beta} - \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\beta}^{\beta} + \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha} + \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\beta} \overset{\circ}{\theta}_{\beta}^{\alpha} - \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\beta}^{\alpha} \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\beta} - \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\alpha}^{\alpha} & \\ - \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\alpha}^{\beta} \overset{\circ}{\theta}_{\beta}^{\alpha} + \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\alpha}^{\beta} \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\beta}^{\alpha})) & \end{aligned}$$

Dans cette expression, on notera que

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\beta}^{\beta} &= 0 \\ \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\beta}^{\alpha} \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\beta} &= \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\theta}^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} \Omega \overset{\circ}{\theta}^{\alpha\beta} = \Omega (\theta^{12} - \theta^{21}) = 0 \\ \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\alpha}^{\beta} \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\beta}^{\alpha} &= \overset{\circ}{\omega}_{\beta\alpha} \overset{\circ}{\omega}^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha} \varepsilon^{\alpha\beta} \Omega^2 = (\delta_{\beta}^{\alpha} \delta_{\alpha}^{\beta} - \delta_{\beta}^{\beta} \delta_{\alpha}^{\alpha}) \Omega^2 = -2\Omega^2 \quad , \end{aligned}$$

ce qui la transforme en

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(4 + 4 \bar{\theta}_\alpha^\alpha + (\bar{\theta}_\alpha^\alpha)^2 - (2 + 2 \bar{\theta}_\alpha^\alpha + \bar{\theta}_\alpha^\beta \bar{\theta}_\beta^\alpha - 2 \Omega^2)) = \\ & \frac{1}{2}(2 + 2 \bar{\theta}_\alpha^\alpha + (\bar{\theta}_\alpha^\alpha)^2 - \bar{\theta}_\alpha^\beta \bar{\theta}_\beta^\alpha + 2 \Omega^2) = 1 + \bar{\theta}_\alpha^\alpha + \frac{1}{2}((\bar{\theta}_\alpha^\alpha)^2 - \bar{\theta}_\alpha^\beta \bar{\theta}_\beta^\alpha) + \Omega^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

En introduisant les résultats (4.16) et (4.17) dans (4.15), on obtient

$$\begin{aligned} n' = (a/a')^{\frac{1}{2}} & \left(-((1 + \bar{\theta}_\alpha^\alpha) \phi^\eta - (\bar{\theta}_\alpha^\eta - \bar{\omega}_\alpha^\eta) \phi^\alpha) \underline{a}_\eta \right. \\ & \left. + (1 + \bar{\theta}_\alpha^\alpha + \frac{1}{2}((\bar{\theta}_\alpha^\alpha)^2 - \bar{\theta}_\alpha^\beta \bar{\theta}_\beta^\alpha) + \Omega^2) \underline{n} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.4 - Nouvelle courbure

La courbure de la surface non déformée est donnée par

$$b_{\alpha\beta} = \underline{n} \cdot \underline{a}_{\alpha,\beta}$$

Pour la surface déformée, on aura de même

$$b'_{\alpha\beta} = \underline{n}' \cdot \underline{a}'_{\alpha,\beta}$$

Partant de l'expression (4.2) de \underline{a}'_α , on calcule

$$\begin{aligned} \underline{a}'_{\alpha,\beta} &= l^\alpha_{\cdot\alpha,\beta} \underline{a}_{\alpha\alpha} + l^\alpha_{\cdot\alpha} \underline{a}_{\alpha\beta} + \phi_{\alpha,\beta} \underline{n} + \phi_\alpha \underline{n}_{,\beta} \\ &= l^\alpha_{\cdot\alpha,\beta} \underline{a}_{\alpha\alpha} + l^\alpha_{\cdot\alpha} \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\beta\alpha} \underline{a}_\lambda + l^\alpha_{\cdot\alpha} b_{\beta\alpha} \underline{n} + \phi_{\alpha,\beta} \underline{n} - \phi_\alpha b^\lambda_{\beta} \underline{a}_\lambda \\ &= (l^\lambda_{\cdot\alpha,\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\beta\alpha} l^\alpha_{\cdot\alpha} - b^\lambda_{\beta} \phi_\alpha) \underline{a}_\lambda + (\phi_{\alpha,\beta} + l^\alpha_{\cdot\alpha} b_{\beta\alpha}) \underline{n} \end{aligned}$$

A ce stade, il est préférable de faire apparaître les dérivées covariantes. On a

$$\begin{aligned} l^\lambda_{\cdot\alpha,\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\beta\alpha} l^\alpha_{\cdot\alpha} &= l^\lambda_{\cdot\alpha} |_\beta + \overset{\circ}{\Gamma}^\alpha_{\beta\alpha} l^\lambda_{\cdot\alpha} \\ \phi_{\alpha,\beta} &= \phi_\alpha |_\beta + \overset{\circ}{\Gamma}^\alpha_{\beta\alpha} \phi_\alpha \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \underline{a}'_{\alpha,\beta} &= (l^\lambda_{\cdot\alpha} |_\beta - b^\lambda_{\beta} \phi_\alpha) \underline{a}_\lambda + (\phi_\alpha |_\beta + l^\alpha_{\cdot\alpha} b_{\alpha\beta}) \underline{n} + \overset{\circ}{\Gamma}^\alpha_{\beta\alpha} (l^\lambda_{\cdot\alpha} \underline{a}_\lambda + \phi_\alpha \underline{n}) \\ &= (l^\lambda_{\cdot\alpha} |_\beta - b^\lambda_{\beta} \phi_\alpha) \underline{a}_\lambda + (\phi_\alpha |_\beta + l^\alpha_{\cdot\alpha} b_{\alpha\beta}) \underline{n} + \overset{\circ}{\Gamma}^\alpha_{\beta\alpha} \underline{a}'_{\alpha\alpha} \end{aligned}$$

Comme les vecteurs \underline{a}'_α sont orthogonaux à \underline{n}' , on obtient pour la nouvelle courbure

$$b'_{\alpha\beta} = \underline{n}' \cdot ((l^\lambda_{\cdot\alpha} |_\beta - b^\lambda_{\beta} \phi_\alpha) \underline{a}_\lambda + (\phi_\alpha |_\beta + l^\alpha_{\cdot\alpha} b_{\alpha\beta}) \underline{n}) \quad (4.19)$$

Tenant alors compte de l'expression (4.18) de n' , on trouve

$$\begin{aligned} b'_{\alpha\beta} &= (a/a')^{\frac{1}{2}} \left(-((1 + \bar{\theta}_\mu^\mu) \phi^\lambda - (\bar{\theta}_\mu^\lambda - \bar{\omega}_\mu^\lambda) \phi^\mu) (l_{\lambda\alpha} |_\beta - b_{\lambda\beta} \phi_\alpha) \right. \\ & \left. + (1 + \bar{\theta}_\mu^\mu + \frac{1}{2}((\bar{\theta}_\mu^\mu)^2 - \bar{\theta}_\mu^\eta \bar{\theta}_\eta^\mu) + \Omega^2) (\phi_\alpha |_\beta + b_{\beta\alpha}^\alpha) \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Il est utile de faire apparaître, dans cette expression, les tenseurs $\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta}$ et $\overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta}$. On a

$$l_{\lambda\alpha} | \beta = (a_{\lambda\alpha} + \overset{\circ}{\theta}_{\lambda\alpha} - \overset{\circ}{\omega}_{\lambda\alpha}) | \beta = \overset{\circ}{\theta}_{\lambda\alpha} | \beta - \overset{\circ}{\omega}_{\lambda\alpha} | \beta \quad (4.21)$$

Pour le calcul du tenseur $\overset{\circ}{\omega}_{\lambda\alpha} | \beta$, on peut procéder de la manière suivante: en additionnant les trois relations

$$\begin{aligned} u_{\alpha} | \lambda\beta - u_{\alpha} | \beta\lambda &= R^{\alpha}_{\cdot\alpha\lambda\beta} u_{\alpha} \\ u_{\lambda} | \beta\alpha - u_{\lambda} | \alpha\beta &= R^{\alpha}_{\cdot\lambda\beta\alpha} u_{\alpha} \\ u_{\beta} | \lambda\alpha - u_{\beta} | \alpha\lambda &= R^{\alpha}_{\cdot\beta\lambda\alpha} u_{\alpha} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} (u_{\alpha} | \lambda\beta - u_{\lambda} | \alpha\beta) + (u_{\lambda} | \beta\alpha + u_{\beta} | \lambda\alpha) - (u_{\alpha} | \beta\lambda + u_{\beta} | \alpha\lambda) \\ = (R^{\alpha}_{\cdot\alpha\lambda\beta} + R^{\alpha}_{\cdot\lambda\beta\alpha} + R^{\alpha}_{\cdot\beta\lambda\alpha}) u_{\alpha} \end{aligned}$$

soit, en se reportant aux définitions (4.5) et (4.6),

$$\begin{aligned} 2 \overset{\circ}{\omega}_{\lambda\alpha} | \beta + 2 (\overset{\circ}{\theta}_{\beta\lambda} + b_{\beta\lambda} w) | \alpha - 2 (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} w) | \lambda = \\ (R^{\alpha}_{\cdot\alpha\lambda\beta} + R^{\alpha}_{\cdot\lambda\beta\alpha} + R^{\alpha}_{\cdot\beta\lambda\alpha}) u_{\alpha} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Faisant alors usage des trois formes suivantes de la relation de Gauss:

$$\begin{aligned} R^{\alpha}_{\cdot\alpha\lambda\beta} &= b_{\lambda}^{\alpha} b_{\alpha\beta} - b_{\beta}^{\alpha} b_{\alpha\lambda} \\ R^{\alpha}_{\cdot\lambda\beta\alpha} &= b_{\beta}^{\alpha} b_{\alpha\lambda} - b_{\alpha}^{\alpha} b_{\lambda\beta} \\ R^{\alpha}_{\cdot\beta\lambda\alpha} &= b_{\lambda}^{\alpha} b_{\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\alpha} b_{\beta\lambda} \end{aligned}$$

on obtient

$$R^{\alpha}_{\cdot\alpha\lambda\beta} + R^{\alpha}_{\cdot\lambda\beta\alpha} + R^{\alpha}_{\cdot\beta\lambda\alpha} = 2(b_{\lambda}^{\alpha} b_{\alpha\beta} - 2 b_{\alpha}^{\alpha} b_{\lambda\beta})$$

ce qui ramène la relation (4.22) à

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\omega}_{\lambda\alpha} | \beta = \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} | \lambda - \overset{\circ}{\theta}_{\beta\lambda} | \alpha + b_{\alpha\beta} | \lambda w - b_{\beta\lambda} | \alpha w + b_{\alpha\beta} w_{,\lambda} - b_{\beta\lambda} w_{,\alpha} \\ + (b_{\lambda}^{\alpha} b_{\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\alpha} b_{\lambda\beta}) u_{\alpha} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Tenant compte de la relation de Mainardi-Codazzi

$$b_{\alpha\beta} | \lambda = b_{\beta\alpha} | \lambda = b_{\beta\lambda} | \alpha$$

et notant par ailleurs l'apparition, dans (4.23), des termes

$$b_{\alpha\beta} (w_{,\lambda} + b_{\lambda}^{\alpha} u_{\alpha}) = b_{\alpha\beta} \phi_{\lambda}$$

et

$$b_{\beta\lambda} (w_{,\alpha} + b_{\alpha}^{\beta} u_{\alpha}) = b_{\beta\lambda} \phi_{\alpha}$$

on trouve finalement

$$\overset{\circ}{\omega}_{\lambda\alpha} | \beta = \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} | \lambda - \overset{\circ}{\theta}_{\beta\lambda} | \alpha + b_{\alpha\beta} \phi_{\lambda} - b_{\beta\lambda} \phi_{\alpha} \quad (4.24)$$

Il vient donc, à partir de (4.21),

$${}^1 \lambda_\alpha |_\beta = \overset{\circ}{\theta}_{\lambda\alpha} |_\beta - \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} |_\lambda + \overset{\circ}{\theta}_{\beta\lambda} |_\alpha - b_{\alpha\beta} \phi_\lambda + b_{\beta\lambda} \phi_\alpha .$$

Comme

$$b_\beta^\alpha l_{\alpha\alpha} = b_\beta^\alpha (a_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\alpha} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\alpha}) = b_{\alpha\beta} + b_\beta^\alpha \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\alpha} - b_\beta^\alpha \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\alpha} ,$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta}^\circ &= (a/a')^{\frac{1}{2}} (- ((1 + \overset{\circ}{\theta}_\mu^\mu) \phi^\lambda - (\overset{\circ}{\theta}_\mu^\lambda - \overset{\circ}{\omega}_\mu^\lambda) \phi^\mu) (\overset{\circ}{\theta}_{\lambda\alpha} |_\beta + \overset{\circ}{\theta}_{\lambda\beta} |_\alpha - \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} |_\lambda - b_{\alpha\beta} \phi_\lambda) \\ &+ (1 + \overset{\circ}{\theta}_\mu^\mu + \frac{1}{2} ((\overset{\circ}{\theta}_\mu^\mu)^2 - \overset{\circ}{\theta}_\mu^\eta \overset{\circ}{\theta}_\eta^\mu) + \Omega^2) (b_{\alpha\beta} + b_\beta^\alpha \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\alpha} - b_\beta^\alpha \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\alpha} + \phi_\alpha |_\beta)) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Cette expression, bien que parfaitement correcte, laisse à désirer, en ce qu'elle ne fait pas apparaître la symétrie attendue de la nouvelle courbure par rapport aux indices α et β , du moins dans son second terme. Montrons donc que cette symétrie est bien réelle. On a successivement

$$\begin{aligned} \phi_\alpha |_\beta &= (w_{,\alpha} + b_\alpha^\alpha u_\alpha) |_\beta = (w |_\alpha + b_\alpha^\alpha u_\alpha) |_\beta = w |_{\alpha\beta} + b_\alpha^\alpha |_\beta u_\alpha + b_\alpha^\alpha u_\alpha |_\beta \\ b_\alpha^\alpha \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2} b_\beta^\alpha (u_\alpha |_\alpha + u_\alpha |_\alpha) - b_\beta^\alpha b_{\alpha\alpha} w \\ - b_\beta^\alpha \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2} b_\beta^\alpha (u_\alpha |_\alpha - u_\alpha |_\alpha) , \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} + \phi_\alpha |_\beta + b_\beta^\alpha \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\alpha} - b_\beta^\alpha \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\alpha} &= b_{\alpha\beta} + w |_{\alpha\beta} + b_\alpha^\alpha |_\beta u_\alpha + b_\beta^\alpha u_\alpha |_\alpha \\ &+ b_\alpha^\alpha u_\alpha |_\beta - c_{\alpha\beta} w \quad . \quad (4.26) \end{aligned}$$

Dans cette expression, $w |_{\alpha\beta}$ est symétrique, comme dérivée covariante seconde d'un scalaire, $b_\alpha^\alpha |_\beta u_\alpha$ est symétrique en α et β par l'identité de Mainardi-Codazzi; les deux termes suivants forment un groupement symétrique; enfin, $c_{\alpha\beta}$ est symétrique. Cette symétrie étant reconnue, il nous est permis de symétriser directement le dernier terme du second membre de (4.25):

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} + \phi_\alpha |_\beta + b_\alpha^\alpha (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\alpha} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\alpha}) &= b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\phi_\alpha |_\beta + \phi_\beta |_\alpha) \\ &+ \frac{1}{2} (b_\beta^\alpha (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\alpha} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\alpha}) + b_\alpha^\alpha (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta})) , \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'expression suivante de la courbure de la surface déformée:

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta}^\circ &= (a/a')^{\frac{1}{2}} (- ((1 + \overset{\circ}{\theta}_\mu^\mu) \phi^\lambda - (\overset{\circ}{\theta}_\mu^\lambda - \overset{\circ}{\omega}_\mu^\lambda) \phi^\mu) (\overset{\circ}{\theta}_{\lambda\alpha} |_\beta + \overset{\circ}{\theta}_{\lambda\beta} |_\alpha - \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} |_\lambda - b_{\alpha\beta} \phi_\lambda) \\ &+ (1 + \overset{\circ}{\theta}_\mu^\mu + \frac{1}{2} ((\overset{\circ}{\theta}_\mu^\mu)^2 - \overset{\circ}{\theta}_\mu^\eta \overset{\circ}{\theta}_\eta^\mu) + \Omega^2) (b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\phi_\alpha |_\beta + \phi_\beta |_\alpha) \\ &+ \frac{1}{2} b_\beta^\alpha (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\alpha} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\alpha}) + \frac{1}{2} b_\alpha^\alpha (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta}))) \end{aligned} \quad (4.27)$$

En théorie linéaire, on a $\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \approx \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta}$ et

$$(a'/a)^{\frac{1}{2}} \approx (1 + 2 \overset{\circ}{\theta}_{\mu}^{\mu})^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \overset{\circ}{\theta}_{\mu}^{\mu} ;$$

en négligeant, après division, tous les termes du second ordre, on obtient

$$b'_{\alpha\beta} \approx b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\phi_{\alpha}|\beta + \phi_{\beta}|\alpha) + \frac{1}{2} b_{\beta}^{\alpha} (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\alpha} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\alpha}) + \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha} (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta}) \quad (4.28)$$

soit en core, par (4.26),

$$b'_{\alpha\beta} \approx b_{\alpha\beta} + w|\alpha\beta - c_{\alpha\beta} w + b_{\alpha}^{\alpha} u_{\alpha}|\beta + b_{\beta}^{\alpha} u_{\alpha}|\alpha + b_{\alpha}^{\alpha}|\beta u_{\alpha} \quad . \quad (4.28 \text{ bis})$$

4.5 - Une expression équivalente du tenseur de changement de courbure /3/

L'expression (4.27) de la nouvelle courbure est encombrée par la présence du rapport $(a/a')^{\frac{1}{2}}$. Or, on a

$$(a/a')^{\frac{1}{2}} = (1 + 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha}^{\alpha} + 2 \varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\mu} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\mu})^{\frac{1}{2}} = 1 + \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha}^{\alpha} + O(\gamma^2) .$$

Considérons alors le tenseur

$$\rho_{\alpha\beta}^* = (a'/a)^{\frac{1}{2}} b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \quad . \quad (4.29)$$

Son expression est beaucoup plus simple que celle de $\rho_{\alpha\beta}$, puisque cubique. La différence entre $\rho_{\alpha\beta}^*$ et $\rho_{\alpha\beta}$ est donnée par

$$\rho_{\alpha\beta}^* - \rho_{\alpha\beta} = (1 - (a'/a)^{\frac{1}{2}}) b'_{\alpha\beta} = (1 - (a'/a)^{\frac{1}{2}})(b_{\alpha\beta} + \rho_{\alpha\beta}) = O(\gamma/R) + O(\gamma^2/t) ,$$

ce qui implique une erreur relative d'ordre

$$\max(t/R, \gamma) ,$$

puisque $\rho_{\alpha\beta}$ est d'ordre γ/t . On peut donc, avec profit, remplacer

$\rho_{\alpha\beta}$ par $\rho_{\alpha\beta}^*$, sans détériorer la qualité de la solution. L'expression générale de $\rho_{\alpha\beta}^*$ est

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}^* &= (\overset{\circ}{\theta}_{\mu}^{\mu} + \frac{1}{2}((\overset{\circ}{\theta}_{\mu}^{\mu})^2 - \overset{\circ}{\theta}_{\eta}^{\mu} \overset{\circ}{\theta}_{\mu}^{\eta}) + \Omega^2) b_{\alpha\beta} \\ &+ \frac{1}{2}(1 + \overset{\circ}{\theta}_{\mu}^{\mu} + \frac{1}{2}((\overset{\circ}{\theta}_{\mu}^{\mu})^2 - \overset{\circ}{\theta}_{\eta}^{\mu} \overset{\circ}{\theta}_{\mu}^{\eta}) + \Omega^2)(\phi_{\alpha}|\beta + \phi_{\beta}|\alpha + b_{\beta}^{\alpha}(\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\alpha} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\alpha}) \\ &\quad + b_{\alpha}^{\alpha}(\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta})) \\ &- ((1 + \overset{\circ}{\theta}_{\mu}^{\mu})\phi^{\lambda} - (\overset{\circ}{\theta}_{\mu}^{\lambda} - \overset{\circ}{\omega}_{\mu}^{\lambda})\phi^{\mu})(\overset{\circ}{\theta}_{\lambda\alpha}|\beta + \overset{\circ}{\theta}_{\lambda\beta}|\alpha - \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta}|\lambda \\ &\quad + b_{\alpha\lambda}\phi_{\beta} + b_{\beta\lambda}\phi_{\alpha} - b_{\alpha\beta}\phi_{\lambda}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

5. APPLICABILITE DE LA THEORIE PRECEDENTE AUX ELEMENTS FINIS

L'application de la théorie qui vient d'être exposée à une méthode d'éléments finis se heurte à un certain nombre de difficultés:

a) La condition de connexion de deux éléments doit garantir le maintien de la continuité géométrique lors de la déformation. Ceci nécessite l'identité des déplacements du feuillet moyen ainsi que du changement de normale. Ce dernier s'écrit, à partir de (4.18),

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{n}}' - \underline{\tilde{n}} = & (a/a')^{\frac{1}{2}} (- ((1 + \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha}) \phi^{\eta} - (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\eta} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha}^{\eta}) \phi^{\alpha}) \underline{\tilde{a}}_{\eta} \\ & + (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha} + \frac{1}{2} ((\overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha})^2 - \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\beta} \overset{\circ}{\theta}_{\beta}^{\alpha}) + \Omega^2) \underline{\tilde{n}}) + ((a/a')^{\frac{1}{2}} - 1) \underline{\tilde{n}} . \end{aligned}$$

Telle quelle, cette condition est non linéaire, ce qui rend la connexion des éléments très délicate et, en tout cas, en opposition avec la philosophie traditionnelle des modèles "déplacements" où les degrés de liberté servent simultanément de connecteurs. On peut cependant se demander si une continuité C^1 de tous les déplacements ne garantirait pas cette condition. Ce n'est malheureusement le cas que dans l'hypothèse assez restrictive où le tenseur de courbure $b_{\alpha\beta}$ est continu. En effet,

$$\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha} |_{\beta} + u_{\beta} |_{\alpha}) - b_{\alpha\beta} w \quad , \quad \phi_{\alpha} = w_{,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda} .$$

A cela, il faut ajouter que les connexions C^1 ne sont pas particulièrement aisées à réaliser et que, de plus, elles peuvent ralentir la convergence par excès de conformité lorsque la mise en charge n'est pas très régulière.

On notera que cette difficulté est liée aux conditions de Kirchhoff-Love. Elle disparaît si l'on se limite aux rotations modérées, comme nous le verrons plus loin. Pratiquement, ceci signifie que pour l'étude de grands déplacements, sans restriction (si ce n'est la petitesse des déformations), il est préférable d'abandonner les conditions de Kirchhoff-Love.

b) Les éléments finis de coque utilisent généralement une description polynomiale du champ de déplacements. Or, le plus souvent, les composantes curvilignes des déplacements de corps rigide ne sont pas des polynômes des coordonnées curvilignes décrivant naturellement la géométrie. Ainsi, pour un fond sphérique, le déplacement vertical s'écrit (fig. 5.1)

$$U_Z \underline{e}_Z = u_{\theta} \underline{a}_{\theta} + w \underline{\tilde{n}}$$

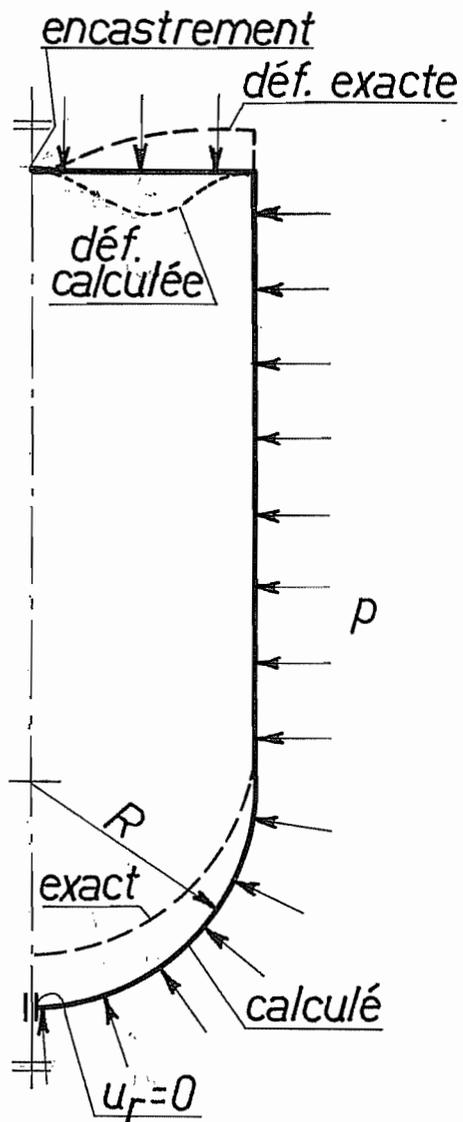


Fig. 5.2
Quand les déplacements rigides ne sont pas représentés...

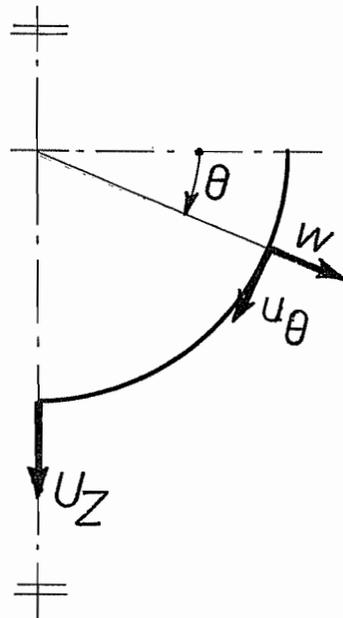


Fig. 5.1

et, comme

$$\tilde{n} \cdot \tilde{e}_Z = \sin \theta \quad , \quad \tilde{a}_\theta \cdot \tilde{e}_Z = R \cos \theta \quad ,$$

on a

$$u_\theta = U_Z \tilde{e}_Z \cdot \tilde{a}_\theta = U_Z R \cos \theta$$

$$w = U_Z \tilde{e}_Z \cdot \tilde{n} = U_Z \sin \theta \quad .$$

Bien entendu, pour des éléments de plus en plus petits, les déplacements de corps rigide seront de mieux en mieux représentés et la solution numérique finira par converger. Mais pour des maillages "raisonnables", on risque de se trouver très loin de la solution. L'exemple représenté à la fig. 5.2 est très parlant à ce sujet. Il s'agit /7,8/ d'un cylindre à fond sphérique soumis à une pression extérieure. Le fond supérieur, plat, est encastré sur l'axe; le fond inférieur, sphérique, est libre de se mouvoir le long de l'axe, mais non de quitter celui-ci. La solution exacte, obtenue à partir d'éléments finis appropriés (*), consiste en une déformation du fond plat, qui se creuse en fond de bouteille à vin, accompagnée d'un déplacement d'ensemble du reste du réservoir qui, pratiquement, ne se déforme pas. Un calcul a été effectué à l'aide d'éléments finis ne représentant pas exactement les modes rigides. Le fond n'a pas bougé comme il l'aurait dû et la plaque supérieure s'est déformée d'une manière toute différente de la réalité. Le maillage, non représenté sur la figure, était cependant tout-à-fait raisonnable, ni trop grossier, ni trop fin.

Peut-on se libérer de cette lourde hypothèque? La réponse est affirmative, mais pour cela, il faut exprimer les déplacements en composantes cartésiennes et non plus en composantes curvilignes. Le calcul des déformations et changements de courbure à partir des composantes cartésiennes des déplacements fait l'objet de la section 6.

(*) Il s'agit en fait d'éléments ~~trigoniques~~ **trigoniques**, dont la convergence est actuellement garantie par une foule de calculs. Les éléments courbes ne représentant pas les modes rigides dont il est question avaient, au départ, été conçus comme une amélioration des précédents!...Le mieux fut l'ennemi du bien.

6. EXPRESSION DES DEFORMATIONS A PARTIR DES COMPOSANTES CARTESIENNES
DES DEPLACEMENTS

Assez paradoxalement, l'usage des composantes cartésiennes des déplacements a plutôt pour effet de simplifier les calculs.

6.1 - Géométrie de la coque

Soit $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ une base cartésienne orthogonale. Le vecteur-position d'un point du feuillet moyen s'écrit

$$\underline{r} = r^i \underline{e}_i = r_i \underline{e}^i . \quad (6.1)$$

Les indices latins, qui se rapportent à la base cartésienne, peuvent indifféremment être placés en position inférieure ou supérieure, car $\underline{e}^i = \underline{e}_i$. On a alors

$$\underline{a}_\alpha = \underline{r}_{,\alpha} = r_{i,\alpha} \underline{e}_i , \quad (6.2)$$

ce qui permet d'écrire

$$a_{\alpha\beta} = r_{i,\alpha} r_{i,\beta} . \quad (6.3)$$

L'élément de surface est $a^{\frac{1}{2}}$, donné par la relation

$$a = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} . \quad (6.4)$$

La normale se calcule par

$$\underline{n} = a^{-\frac{1}{2}} \underline{a}_1 \times \underline{a}_2 = a^{-\frac{1}{2}} e_{ijk} r_{j,1} r_{k,2} \underline{e}_i \quad (6.5)$$

et le tenseur de courbure a pour expression

$$b_{\alpha\beta} = \underline{n} \cdot \underline{r}_{,\alpha\beta} = a^{-\frac{1}{2}} e_{ijk} r_{j,1} r_{k,2} r_{i,\alpha\beta} . \quad (6.6)$$

Dans tout ceci, il faut entendre par e_{ijk} le produit mixte

$$e_{ijk} = (\underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_k) .$$

6.2 - Déformation du feuillet moyen

Après déformation, on a

$$\underline{a}'_\alpha = (\underline{r} + \underline{u})_{,\alpha} = (r_{i,\alpha} + u_{i,\alpha}) \underline{e}_i ,$$

d'où

$$\begin{aligned} a'_{\alpha\beta} &= \underline{a}'_\alpha \cdot \underline{a}'_\beta = (r_{i,\alpha} + u_{i,\alpha})(r_{i,\beta} + u_{i,\beta}) \\ &= r_{i,\alpha} r_{i,\beta} + u_{i,\alpha} r_{i,\beta} + r_{i,\alpha} u_{i,\beta} + u_{i,\alpha} u_{i,\beta} , \end{aligned}$$

et

$$\gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} (a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} (r_{i,\alpha} u_{i,\beta} + r_{i,\beta} u_{i,\alpha} + u_{i,\alpha} u_{i,\beta}) \quad (6.7)$$

Définissant alors $\varepsilon^{\alpha\beta}$ de manière classique, on a, comme en section 4,

$$a' = a^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\alpha\beta} a'_{\alpha 1} a'_{\beta 2} = \frac{1}{2} a \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} a'_{\alpha\lambda} a'_{\beta\mu} ,$$

ce qui donne

$$(a'/a) = 1 + 2 \delta_{\alpha}^{\circ\alpha} + 2 \varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\mu} \delta_{\alpha\beta}^{\circ} \delta_{\lambda\mu}^{\circ} \quad (6.8)$$

6.3 - Normale à la surface déformée

La normale à la surface déformée s'obtient en remplaçant dans

(6.5) \underline{r} par $(\underline{r} + \underline{u})$ et a par a' :

$$\underline{n}' = (a')^{-\frac{1}{2}} e_{ijk} (r_{j,1} + u_{j,1}) (r_{k,2} + u_{k,2}) \underline{e}_i \quad (6.9)$$

6.4 - Courbure de la surface déformée

La courbure de la surface déformée est donnée par

$$\begin{aligned} b'_{\alpha\beta} &= \underline{n}' \cdot (\underline{r} + \underline{u})_{,\alpha\beta} \\ &= (a')^{-\frac{1}{2}} e_{ijk} (r_{j,1} + u_{j,1}) (r_{k,2} + u_{k,2}) (r_{i,\alpha\beta} + u_{i,\alpha\beta}) \end{aligned}$$

Il est particulièrement attrayant, dans ce contexte, d'utiliser le tenseur modifié

$$\rho_{\alpha\beta}^* = (a'/a)^{\frac{1}{2}} b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} ,$$

qui vaut ici

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}^* &= a^{-\frac{1}{2}} e_{ijk} (u_{i,\alpha\beta} (r_{j,1} r_{k,2} + r_{j,1} u_{k,2} + u_{j,1} r_{k,2} + u_{j,1} u_{k,2}) \\ &\quad + r_{i,\alpha\beta} (r_{j,1} u_{k,2} + u_{j,1} r_{k,2} + u_{j,1} u_{k,2})) \quad (6.10) \end{aligned}$$

6.5 - Condition de représentation des déplacements rigides dans un élément fini fondé sur les expressions précédentes

Dans l'application de la présente formulation, on se limite à une représentation approchée de la géométrie par des polynômes:

$$r_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} x^1 + \alpha_{i2} x^2 + \alpha_{i3} (x^1)^2 + \alpha_{i4} x^1 x^2 + \alpha_{i5} (x^2)^2 + \dots ,$$

à l'instar des éléments paramétriques au sens de Zienkiewicz (/9/; voir aussi /7/ pour une présentation plus efficace, fondée sur les monômes). Les déplacements rigides seront représentés si leurs variations le sont (il suffit alors d'intégrer sur les variations d'angles et de positions). Or, ces variations ont la forme générale

$$\delta u_i = \frac{\delta v_i}{\text{translation}} + \frac{e_{ijk} \delta \omega_j (r_k + u_k)}{\text{rotation}} .$$

Le terme de translation sera présent si les déplacements constants sont représentés, ce qui est toujours le cas. Pour représenter les rotations, il faut que l'on puisse avoir des déplacements multiples des coordonnées. En d'autres termes, les déplacements rigides seront représentés si la base de fonctions représentant les déplacements contient la base de fonctions représentant les coordonnées. (Eléments hypo- et isoparamétriques).

6.6 - Formulation de DUPUIS et GOEL /31/

Dans le cas d'une géométrie définie par les relations

$$r_1 = x^1, \quad r_2 = x^2, \quad r_3 = h(x^1, x^2),$$

Dupuis et Goël obtiennent, en théorie linéaire, les expressions

$$\delta_{\alpha\beta}^0 = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + h_{,\alpha} u_{3,\beta} + h_{,\beta} u_{3,\alpha} \quad (6.11)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = a^{-\frac{1}{2}} (h_{,\alpha\beta} (h_{,\gamma} h_{,\lambda} u_{\delta,\lambda} - h_{,\gamma} u_{3,\delta}) / a - h_{,\gamma} u_{\delta,\alpha\beta} + u_{3,\alpha\beta}) \quad (6.12)$$

Les expressions obtenues en linéarisant (6.7) sont strictement identiques à (6.11). En ce qui concerne les changements de courbure, il vient à partir de (6.10)

$$\rho_{\alpha\beta}^* = a^{-\frac{1}{2}} (h_{,\alpha\beta} u_{\lambda,\lambda} - h_{,\gamma} u_{\delta,\alpha\beta} + u_{3,\alpha\beta}) \quad (6.13)$$

Montrons que cette expression, du reste plus simple que celle de Dupuis et Goël, lui est équivalente au sens de Koiter. On a

$$\rho_{\alpha\beta}^* - \rho_{\alpha\beta} = a^{-\frac{1}{2}} h_{,\alpha\beta} \left(u_{\lambda,\lambda} - \frac{h_{,\gamma} h_{,\lambda} u_{\delta,\lambda} - h_{,\gamma} u_{3,\delta}}{a} \right) \quad .$$

Notant que

$$a = (1 + h_{,1}^2)(1 + h_{,2}^2) - h_{,1}^2 h_{,2}^2 = 1 + h_{,\lambda} h_{,\lambda} \quad ,$$

on obtient

$$\rho_{\alpha\beta}^* - \rho_{\alpha\beta} = a^{-\frac{1}{2}} h_{,\alpha\beta} \left(\frac{(1 + h_{,\mu} h_{,\mu}) \delta_{\gamma\lambda} - h_{,\gamma} h_{,\lambda}}{a} u_{\gamma,\lambda} + \frac{h_{,\gamma} u_{3,\delta}}{a} \right) \quad)$$

Le coefficient de $u_{\gamma,\lambda}$ peut aisément être identifié comme égal à $a^{\gamma\lambda}$.

Notant par ailleurs que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a^{\gamma\lambda} (h_{,\lambda} u_{3,\gamma} + h_{,\gamma} u_{3,\lambda}) &= \frac{1}{2a} ((1 + h_{,\mu} h_{,\mu})^2 h_{,\gamma} u_{3,\delta} \\ &\quad - h_{,\delta} h_{,\lambda} h_{,\lambda} u_{3,\delta} - h_{,\delta} h_{,\lambda} h_{,\gamma} u_{3,\lambda}) \\ &= \frac{1}{a} h_{,\gamma} u_{3,\delta} \quad , \end{aligned}$$

on obtient

$$p_{\alpha\beta}^* - p_{\alpha\beta} = a^{-\frac{1}{2}} h_{,\alpha\beta} (a^{\gamma\lambda} \delta_{\gamma\lambda}) ,$$

expression négligeable, car en γ/R .

7. THEORIE DES ROTATIONS MODEREES (COMPOSANTES CURVILIGNES)

7.1 - Définitions et calcul des déformations du feuillet moyen

Nous appellerons dans la suite théorie des rotations modérées la théorie simplifiée que l'on obtient en supposant que tous les gradients de déplacements sont au plus d'ordre $\gamma^{\frac{1}{2}}$ (Voir annexe). Comme

$$\underline{u}_{,\beta} = (u^\alpha |_\beta - b_\beta^\alpha w) \underline{a}_\alpha + (w_{,\beta} + b_\beta^\alpha u_\alpha) \underline{n} ,$$

cette hypothèse implique (en choisissant toujours, pour simplifier la discussion, un système de coordonnées "gaussien" où les vecteurs de base sont sensiblement de norme unitaire)

$$\lambda_{.\alpha}^\alpha = O(\gamma^{\frac{1}{2}}) \quad , \quad \phi_\alpha = O(\gamma^{\frac{1}{2}}) \quad (7.1)$$

et, comme

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} + \lambda_{.\alpha}^\alpha \lambda_{\alpha\beta} + \phi_\alpha \phi_\beta ,$$

on obtient

$$\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} - \lambda_{.\alpha}^\alpha \lambda_{\alpha\beta} - \phi_\alpha \phi_\beta = O(\gamma) . \quad (7.2)$$

Il en découle

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} &= \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} a^{\alpha\varepsilon} (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\varepsilon} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\varepsilon}) (\overset{\circ}{\theta}_{\varepsilon\beta} - \overset{\circ}{\omega}_{\varepsilon\beta}) + \frac{1}{2} \phi_\alpha \phi_\beta \\ \text{O.G.} \quad \gamma & \quad \gamma \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \quad \gamma \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \quad \gamma \\ &= \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} a^{\alpha\varepsilon} \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\varepsilon} \overset{\circ}{\omega}_{\varepsilon\beta} + \frac{1}{2} \phi_\alpha \phi_\beta + O(\gamma^{3/2}) \\ &= \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} a^{\alpha\varepsilon} \varepsilon_{\alpha\varepsilon} \varepsilon_{\varepsilon\beta} \Omega^2 + \frac{1}{2} \phi_\alpha \phi_\beta + O(\gamma^{3/2}) \\ &= \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varepsilon_{.\alpha}^\alpha \varepsilon_{\varepsilon\beta} \Omega^2 + \frac{1}{2} \phi_\alpha \phi_\beta + O(\gamma^{3/2}) \end{aligned}$$

soit

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Omega^2 a_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \phi_\alpha \phi_\beta + O(\gamma^{3/2}) \quad (7.3)$$

7.2 - Simplification des changements de courbure

La courbure de la surface déformée vaut, par (4.27),

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta}^\lambda &= (a/a')^{\frac{1}{2}} \left(- \left((1 + \overset{\circ}{\theta}_\mu^\mu) \phi^\lambda - (\overset{\circ}{\theta}_\mu^\lambda - \overset{\circ}{\omega}_\mu^\lambda) \phi^\mu \right) (\overset{\circ}{\theta}_{\lambda\alpha} |_\beta + \overset{\circ}{\theta}_{\lambda\beta} |_\alpha - \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} |_\lambda - b_{\alpha\beta}^\lambda \phi_\lambda) \right) \\ \text{O.G.} \quad & \quad 1 \quad \gamma \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \quad \gamma \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \quad \gamma/L \quad \gamma/L \quad \gamma/L \quad \gamma^{\frac{1}{2}}/R \\ &+ (1 + \overset{\circ}{\theta}_\mu^\mu + \frac{1}{2} ((\overset{\circ}{\theta}_\mu^\mu)^2 - \overset{\circ}{\theta}_\mu^\gamma \overset{\circ}{\theta}_\gamma^\mu) + \Omega^2) (b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\phi_\alpha |_\beta + \phi_\beta |_\alpha)) \\ \text{O.G.} \quad & \quad 1 \quad \gamma \quad \gamma^2 \quad \gamma \quad 1/R \quad \gamma^{\frac{1}{2}}/L \\ &+ \frac{1}{2} b_\beta^\alpha (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\alpha} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\alpha}) + \frac{1}{2} b_\alpha^\alpha (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta}) \\ \text{O.G.} \quad & \quad \gamma/R \quad \gamma^{\frac{1}{2}}/R \quad \gamma/R \quad \gamma^{\frac{1}{2}}/R \end{aligned}$$

$$= (a/a')^{\frac{1}{2}} (b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\phi_{\alpha} |_{\beta} + \phi_{\beta} |_{\alpha}) - \frac{1}{2} b_{\beta}^{\alpha} \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\alpha} - \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\beta} \overset{\circ}{\omega}_{\beta\beta} + O(\gamma/R, \gamma/L))$$

O.G. 1/R $\gamma^{\frac{1}{2}}/L$ $\gamma^{\frac{1}{2}}/R$

ce qui permet de calculer le changement de courbure par

$$\rho_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha} |_{\beta} + \phi_{\beta} |_{\alpha} - b_{\alpha}^{\beta} \overset{\circ}{\omega}_{\beta\alpha} - b_{\beta}^{\alpha} \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta}) \quad (7.4)$$

avec une erreur relative $O(\gamma^{\frac{1}{2}})$.

7.3 - Connexion des éléments finis en rotations modérées

Pour l'application de ce qui précède aux éléments finis, on a besoin de la condition de connexion aux frontières d'éléments. Cette condition s'exprime par

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{L'égalité des déplacements aux interfaces} \\ - \text{L'égalité de la variation de la normale aux interfaces} \end{array} \right.$$

La première condition ne pose guère de problèmes. Pour exprimer la seconde, choisissons localement \underline{a}_1 normal à l'interface et de longueur unitaire et \underline{a}_2 tangent à l'interface, de longueur unitaire également. On a alors

$$\underline{n}' = (a/a')^{\frac{1}{2}} (-(1 + \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha}) \phi^{\eta} - (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\eta} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha}^{\eta}) \phi^{\alpha}) \underline{a}_{\eta}$$

O.G. 1 γ $\gamma^{\frac{1}{2}}$ γ $\gamma^{\frac{1}{2}}$ $\gamma^{\frac{1}{2}}$

$$+ (1 + \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha} + \frac{1}{2}((\overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\alpha})^2 - \overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\beta} \overset{\circ}{\theta}_{\beta}^{\alpha}) + \Omega^2) \underline{n}$$

O.G. 1 γ γ^2

$$= \underline{n} + \frac{\phi^{\eta} \underline{a}_{\eta}}{O(\gamma^{\frac{1}{2}})} + O(\gamma) \quad (7.5)$$

Il suffit donc, si l'on se contente d'une expression approchée à $\gamma^{\frac{1}{2}}$ près, ce qui est cohérent par rapport aux simplifications ci-dessus, de connecter les ϕ_{η} . Or,

$$\begin{aligned} \phi_2 &= w_{,2} - b_2^1 u_1 - b_2^2 u_2 \\ &= w_{,2} + (\underline{n}_{,2} \cdot \underline{a}^1) u_1 + (\underline{n}_{,2} \cdot \underline{a}^2) u_2 \\ &= w_{,2} + \underline{n}_{,2} \cdot \underline{u} \end{aligned}$$

est connecté dès lors que \underline{n} , w et \underline{u} le sont. Il ne reste donc plus qu'à connecter

$$\phi_1 = w_{,1} - b_1^1 u_1 - b_1^2 u_2 = w_{,1} + \underline{n}_{,1} \cdot \underline{u}$$

et non pas simplement $w_{,1}$, car il se peut très bien que b_1^1 et b_1^2 varient brusquement d'un élément à l'autre (fig. 7.1). Dans un système d'axes quelconque, soit $\underline{\nu}$ le vecteur unitaire normal à l'interface. Il faut connecter

$$\phi_{\underline{\nu}} = (\phi_1 \underline{a}^1 + \phi_2 \underline{a}^2) \cdot \underline{\nu} = \phi_1 \nu^1 + \phi_2 \nu^2 = \phi_{\alpha} \nu^{\alpha}$$

soit

$$\phi_{\underline{\nu}} = \nu^{\alpha} (w_{,\alpha} + b_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}) \quad (7.6)$$

7.4 - Remarque

On constate que

$$\rho_{\alpha\beta}^* = O(\gamma^{1/2}/L, \gamma^{1/2}/R) \quad .$$

Or, on doit avoir

$$\rho_{\alpha\beta}^* = O(\gamma/t) \quad .$$

Ceci suppose

$$\gamma^{1/2} = O(t/L, t/R) \quad .$$

En particulier, les gradients de déplacements sont $O(U/L, U/R)$, U étant l'ordre de grandeur des déplacements. On en déduit que la théorie des rotations modérées correspond à des déplacements sensiblement de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la coque.

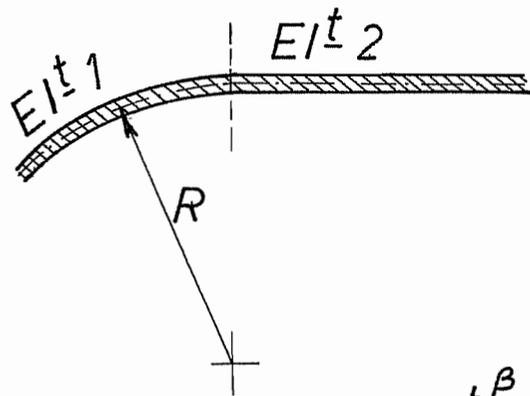


Fig. 7.1

b_α^β peut être discontinu!

8. THEORIE DES ROTATIONS MODEREES (COMPOSANTES CARTESIENNES)

8.1 - Expressions simplifiées des déformations

En coordonnées cartésiennes, la condition de rotations modérées s'écrit

$$u_{i,\alpha} \leq O(\gamma^{\frac{1}{2}}) \quad (8.1)$$

Dans un système de coordonnées tel que $r_{i,\alpha} = O(1)$, on a alors

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(r_{i,\alpha} u_{i,\beta} + r_{i,\beta} u_{i,\alpha} + u_{i,\alpha} u_{i,\beta}) \quad , \quad (8.2)$$

sans amélioration possible. On a par contre

$$\rho_{\alpha\beta}^* = a^{-\frac{1}{2}} e_{ijk} (u_{i,\alpha\beta} (r_{j,1} r_{k,2} + r_{j,1} u_{k,2} + u_{j,1} r_{k,2} + u_{j,1} u_{k,2}))$$

O.G. $\gamma^{\frac{1}{2}}/L$ 1 $\gamma^{\frac{1}{2}}/L$ $\gamma^{\frac{1}{2}}$ γ

$$+ r_{i,\alpha\beta} (r_{j,1} u_{k,2} + u_{j,1} r_{k,2} + u_{j,1} u_{k,2}))$$

O.G. 1/R $\gamma^{\frac{1}{2}}$ $\gamma^{\frac{1}{2}}$ γ

soit

$$\rho_{\alpha\beta}^* = a^{-\frac{1}{2}} e_{ijk} (u_{i,\alpha\beta} r_{j,1} r_{k,2} + r_{i,\alpha\beta} (r_{j,1} u_{k,2} + u_{j,1} r_{k,2})) \quad , \quad (8.3)$$

avec une erreur relative $O(\gamma^{\frac{1}{2}})$.

8.2 - Pentas à connecter aux interfaces d'éléments

Examinons à présent comment s'exprime en composantes cartésiennes la rotation ϕ_{ν} à connecter pour obtenir la conformité à $O(\gamma^{\frac{1}{2}})$ près. Prenant l'axe 1 normal à l'interface et l'axe 2 selon l'interface, normés tous les deux, on a

$$w_{,1} = (\underline{u} \cdot \underline{n})_{,1} = u_{i,1} n_i + u_i n_{i,1} = u_{i,1} n_i - u_i b_1^{\alpha} r_{i,\alpha}$$

$$= u_{i,1} n_i - b_1^{\alpha} u_{\alpha} \quad ,$$

c'est-à-dire que

$$\phi_1 = w_{,1} + b_1^{\alpha} u_{\alpha} = u_{i,1} n_i \quad .$$

Il en découle que la rotation à connecter s'écrit simplement

$$\phi_{\nu} = (\partial \underline{u} / \partial \nu) \cdot \underline{n} = n_i \partial u_i / \partial \nu \quad , \quad (8.4)$$

$\underline{\nu}$ étant le vecteur normal à l'interface.

9. COQUES QUASI-PLANES ET COQUES PRESQUE PLANES

Dans cette section, nous étudierons les approximations connues dans la littérature anglo-saxonne sous le nom de shallow shells. Il en existe deux types, que nous distinguerons nettement, car elles reposent sur des hypothèses très différentes.

9.1 - Coques quasi-planes: théorie de MARGUERRE /5,6/

En utilisant un plan de référence, on peut écrire (voir fig. 9.1)

$$r_\alpha = x^\alpha, \quad r_3 = h(x^\alpha).$$

La théorie des coques en composantes cartésiennes donne alors, dans le cadre des rotations modérées,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(r_{\lambda,\alpha} u_{\lambda,\beta} + r_{3,\alpha} u_{3,\beta} + u_{\lambda,\alpha} r_{\lambda,\beta} + u_{3,\alpha} r_{3,\beta} \\ &\quad + u_{\lambda,\alpha} u_{\lambda,\beta} + u_{3,\alpha} u_{3,\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + h_{,\beta} w_{,\alpha} + h_{,\alpha} w_{,\beta} + u_{\lambda,\alpha} u_{\lambda,\beta} + w_{,\alpha} w_{,\beta}), \end{aligned} \quad (9.1)$$

en notant u_α les déplacements dans le plan de référence et w le déplacement perpendiculaire à ce plan. On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}^* &= a^{-\frac{1}{2}}(u_{1,\alpha\beta} (r_{2,1} r_{3,2} - r_{3,1} r_{2,2}) \\ &\quad + u_{2,\alpha\beta} (r_{3,1} r_{1,2} - r_{1,1} r_{3,2}) \\ &\quad + u_{3,\alpha\beta} (r_{1,1} r_{2,2} - r_{2,1} r_{1,2}) \\ &\quad + r_{1,\alpha\beta} (r_{2,1} u_{3,2} - r_{3,1} u_{2,2} + u_{2,1} r_{3,2} - u_{3,1} r_{2,2}) \\ &\quad + r_{2,\alpha\beta} (r_{3,1} u_{1,2} - r_{1,1} u_{3,2} + u_{3,1} r_{1,2} - u_{1,1} r_{3,2}) \\ &\quad + r_{3,\alpha\beta} (r_{1,1} u_{2,2} - r_{2,1} u_{1,2} + u_{1,1} r_{2,2} - u_{2,1} r_{1,2})). \end{aligned}$$

Comme $r_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ et $r_{\lambda,\alpha\beta} = 0$, on obtient

$$\rho_{\alpha\beta}^* = a^{-\frac{1}{2}}(u_{1,\alpha\beta} (-h_{,1}) + u_{2,\alpha\beta} (-h_{,2}) + w_{,\alpha\beta} + h_{,\alpha\beta} (u_{2,2} + u_{1,1})) \quad (9.2)$$

Notant que

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\gamma}_{11} &= u_{1,1} + h_{,1} w_{,1} + (u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (w_{,1})^2 \\ &\quad \delta \qquad \qquad \delta \qquad \qquad \delta \\ \text{O.G.} & \\ \overset{\circ}{\gamma}_{22} &= u_{2,2} + h_{,2} w_{,2} + (u_{1,2})^2 + (u_{2,2})^2 + (w_{,2})^2 \\ &\quad \delta \qquad \qquad \delta \qquad \qquad \delta \\ \text{O.G.} & \end{aligned}$$

on a

$$u_{1,1} + u_{2,2} = -h_{,1}w_{,1} - h_{,2}w_{,2} + O(\gamma) ,$$

ce qui permet, moyennant une erreur relative $O(\gamma^{\frac{1}{2}})$, d'utiliser l'expression transformée

$$\rho_{\alpha\beta}^{**} = a^{-\frac{1}{2}}(w_{,\alpha\beta} - h_{,1}u_{1,\alpha\beta} - h_{,2}u_{2,\alpha\beta} - h_{,\alpha\beta}(h_{,1}w_{,1} + h_{,2}w_{,2})) \quad (9.3)$$

Cela étant, la théorie des coques quasi-planes de Marguerre s'applique chaque fois que les pentes $h_{,\alpha}$ vérifient

$$h_{,\alpha} = O(P) \quad \text{avec} \quad P^2 \ll 1 . \quad (9.4)$$

Cette hypothèse permet un certain nombre de simplifications. Dans l'expression de $a^{\frac{1}{2}}\rho_{\alpha\beta}^{**}$, le terme $w_{,\alpha\beta}$ est d'ordre $\gamma^{\frac{1}{2}}/L$. Les autres termes peuvent s'écrire

$$-h_{,\lambda}(u_{\lambda,\alpha\beta} + h_{,\alpha\beta}w_{,\lambda}) .$$

Apparemment d'ordre $P\gamma^{\frac{1}{2}}/L$ et $P\gamma^{\frac{1}{2}}/R$, ces termes se compensent pour donner une grandeur bien plus petite. En effet, on a

$$2\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + h_{,\alpha}w_{,\beta} + h_{,\beta}w_{,\alpha} = O(\gamma) ;$$

en dérivant cette expression, on obtient

$$2\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta,\gamma} = u_{\alpha,\beta\gamma} + u_{\beta,\alpha\gamma} + h_{,\alpha\gamma}w_{,\beta} + h_{,\alpha}w_{,\beta\gamma} + h_{,\beta\gamma}w_{,\alpha} + h_{,\beta}w_{,\alpha\gamma} .$$

Permutant les indices α, β, γ , il vient

$$2\overset{\circ}{\theta}_{\beta\gamma,\alpha} = u_{\beta,\gamma\alpha} + u_{\gamma,\beta\alpha} + h_{,\beta\alpha}w_{,\gamma} + h_{,\beta}w_{,\gamma\alpha} + h_{,\gamma\alpha}w_{,\beta} + h_{,\gamma}w_{,\beta\alpha}$$

et

$$2\overset{\circ}{\theta}_{\gamma\alpha,\beta} = u_{\gamma,\alpha\beta} + u_{\alpha,\gamma\beta} + h_{,\gamma\beta}w_{,\alpha} + h_{,\gamma}w_{,\alpha\beta} + h_{,\alpha\beta}w_{,\gamma} + h_{,\alpha}w_{,\gamma\beta} .$$

Il en découle

$$\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta,\gamma} + \overset{\circ}{\theta}_{\gamma\alpha,\beta} - \overset{\circ}{\theta}_{\beta\gamma,\alpha} = u_{\alpha,\beta\gamma} + h_{,\beta\gamma}w_{,\alpha} + h_{,\alpha}w_{,\gamma\beta} ,$$

soit

$$u_{\alpha,\beta\gamma} + h_{,\beta\gamma}w_{,\alpha} = \frac{\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta,\gamma} + \overset{\circ}{\theta}_{\gamma\alpha,\beta} - \overset{\circ}{\theta}_{\beta\gamma,\alpha}}{\gamma/L} - h_{,\alpha}w_{,\gamma\beta} ,$$

O.G.

γ/L

$P\gamma^{\frac{1}{2}}/L$

ce qui implique

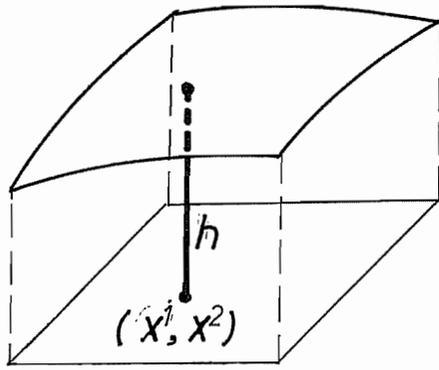


Fig. 9.1

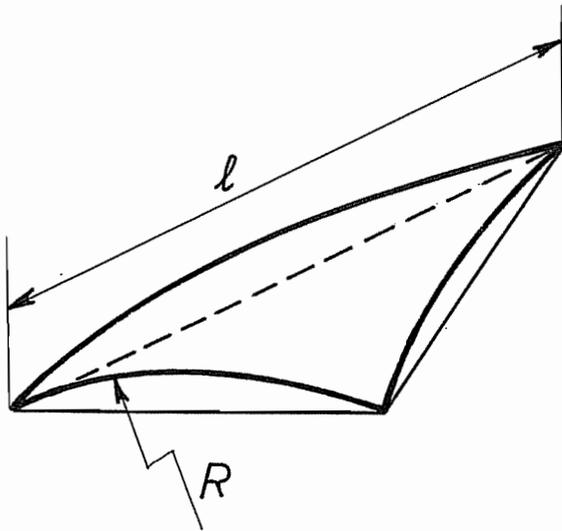


Fig. 9.2

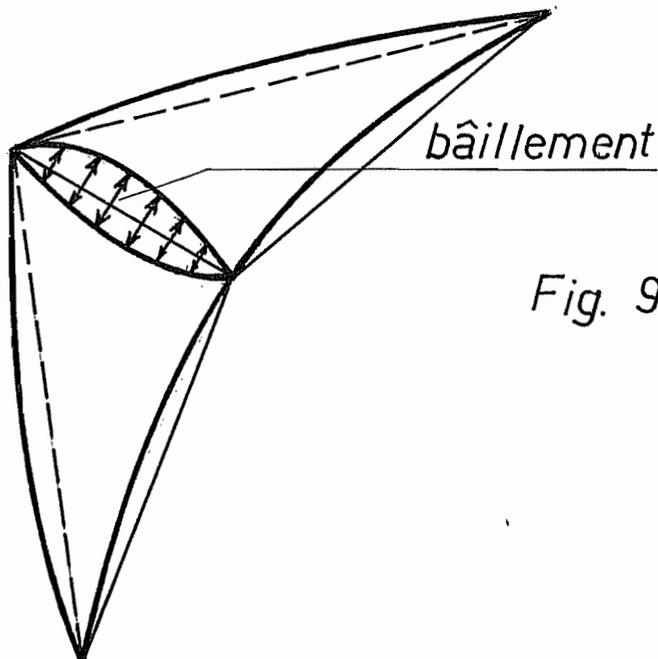


Fig. 9.3

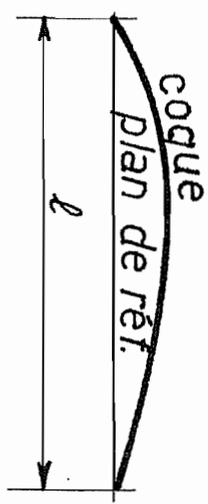
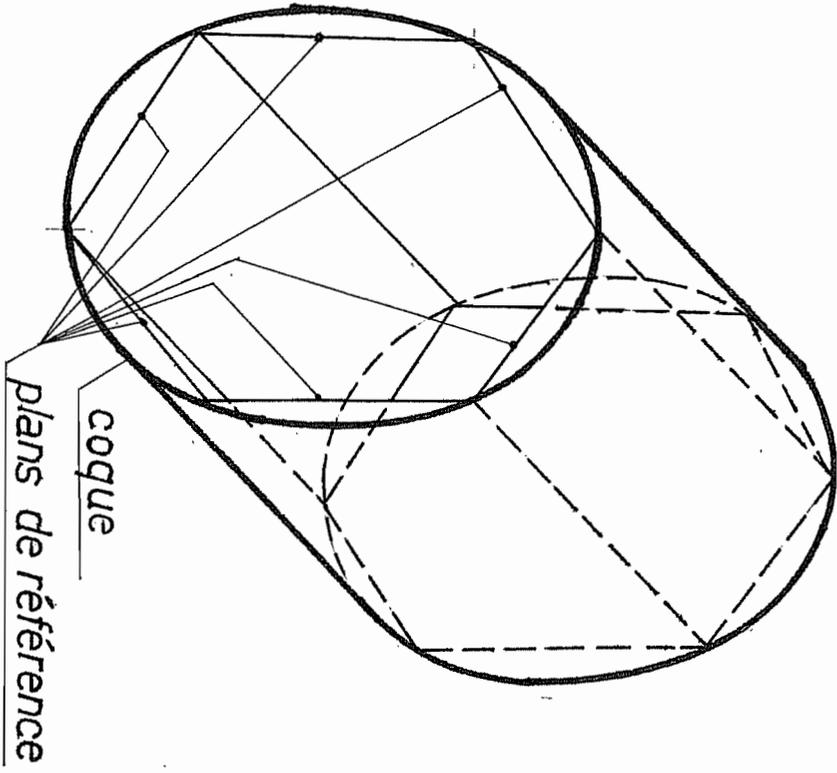


Fig. 9.4

$$-h_{,\lambda} (u_{\lambda,\alpha\beta} + h_{,\alpha\beta} w_{,\lambda}) = O(P \gamma/L, P^2 \gamma^{1/2}/L),$$

c'est-à-dire que

$$\rho_{\alpha\beta}^{**} = a^{-1/2} w_{,\alpha\beta} + O(P \gamma/L, P^2 \gamma^{1/2}/L)$$

et, comme

$$a^{1/2} = (1 + h_{,1}^2 + h_{,2}^2)^{1/2} = 1 + O(P^2),$$

on a

$$\rho_{\alpha\beta}^{**} = w_{,\alpha\beta} \quad (9.5)$$

avec une erreur relative ne dépassant pas, d'une part $P \gamma^{1/2}$, valeur négligeable en théorie des rotations modérées, d'autre part, P^2 . Ainsi, l'expression de la variation de courbure n'est en erreur que de $O(P^2)$.

9.2 - Equations constitutives des coques de Marguerre

Les équations constitutives peuvent être écrites sans grande erreur dans le plan de référence. Nous limiterons ici la discussion au cas isotrope, pour bien faire ressortir les erreurs. On a, par (3.16),

$$\overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{E}{1-\nu^2} ((1-\nu) a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + \nu a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta}) .$$

Comme

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + h_{,\alpha} h_{,\beta},$$

on vérifie aisément que

$$a^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} - h_{,\alpha} h_{,\beta} + O(P^4),$$

ce qui entraîne

$$\overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{E}{1-\nu^2} ((1-\nu) \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} + \nu \delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta}) + O(E P^2), \quad (9.6)$$

où l'on reconnaît précisément les lois constitutives de la plaque.

9.3 - Application aux méthodes d'éléments finis

Le fait que la théorie de Marguerre n'est en erreur que de $O(P^2)$ permet une application intéressante dans le cas des coques à simple courbure /15/. En prenant plusieurs plans de référence (fig. 9.4), on peut obtenir P aussi petit que l'on veut. En effet, on a

$$b_{\alpha\beta} = \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{a}_{\alpha\beta} = \frac{\underset{\sim}{e}_3 - h_{,1} \underset{\sim}{e}_1 - h_{,2} \underset{\sim}{e}_2}{\sqrt{a}} \cdot (-h_{,\alpha\beta} \underset{\sim}{e}_3) = -h_{,\alpha\beta} / \sqrt{a}$$

$$(9.7)$$

soit, si l est la dimension du plan de référence,

$$b = O\left(\frac{P/l}{\sqrt{1+P^2}}\right) = O(P/l) .$$

Par conséquent,

$$P = O(1/R) \tag{9.8}$$

et on aura $P \rightarrow 0$ pour $l \rightarrow 0$. Attachant un plan de référence à chaque élément, il y aura donc convergence de la théorie en $O(P^2) = O(l^2/R^2)$.

Cependant, dans le cas des coques à double courbure, il subsiste une difficulté. En utilisant par exemple des références triangulaires planes, définies de façon à coïncider avec la coque en trois points (fig. 9.2), la jonction de deux éléments laisse subsister un bâillement (fig. 9.3). Nous verrons cependant dans la section 13 qu'il est possible de généraliser la théorie de Marguerre de manière à éliminer ce problème.

Une remarque encore /15/. En négligeant les termes en $h_{,\alpha}$ dans l'expression de $\overset{\circ}{\delta}_{\alpha\beta}$, on commet une erreur $O(P)$, qui tend également vers zéro lorsque le maillage se raffine. Or, la théorie ainsi obtenue revient à identifier purement et simplement la coque avec son plan directeur (éléments plans). Ainsi, les idéalizations par éléments plans convergent vers la solution exacte, mais comme P et non plus comme P^2 .

9.4 - Coque presque planes

La théorie des coque quasi-planes de Marguerre s'obtient en négligeant des termes $O(P^2)$ dans les déformations des coques écrites à partir des composantes cartésiennes. Une autre approximation, beaucoup plus connue, se construit à partir des déformations exprimées dans les composantes curvilignes, en y supposant

$$L^2/R^2 \ll 1 \quad , \tag{9.9}$$

c'est-à-dire que la longueur d'onde de la déformation est petite devant le rayon de courbure. C'est ce que nous appellerons, pour bien marquer la distinction, la théorie des coques presque planes. On l'attribue généralement à DONNELL /19/, bien qu'elle remonte en fait aux travaux d'ARON /20/, de soixante ans antérieurs. On notera que la littérature anglo-saxonne nomme indistinctement "shallow shells" les coques quasi-planes et presque planes, ce qui crée une

confusion regrettable, car les hypothèses de ces deux théories sont très différentes.

L'expression du changement de courbure s'écrit, pour les rotations modérées,

$$\rho_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha|\beta} + \phi_{\beta|\alpha}) - \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\kappa} \dot{\omega}_{\kappa\beta} - \frac{1}{2} b_{\beta}^{\kappa} \dot{\omega}_{\kappa\alpha} . \quad (9.10)$$

Pour évaluer la contribution de la rotation autour de la normale $\dot{\omega}_{\alpha\beta}$, on supposera celle-ci nulle en un point au moins de la zone de dimension L considérée. On a alors, par (4.24),

$$\dot{\omega}_{\lambda\alpha|\beta} = \dot{\theta}_{\alpha\beta|\lambda} - \dot{\theta}_{\beta\lambda|\alpha} + b_{\alpha\beta} \phi_{\lambda} - b_{\beta\lambda} \phi_{\alpha} ,$$

ce qui entraîne, comme $\phi_{\alpha} = O(\gamma^{\frac{1}{2}})$,

$$\dot{\omega}_{\alpha\beta} = O(\gamma, \gamma^{\frac{1}{2}}L/R) . \quad (9.11)$$

Comme les dérivées des ϕ_{α} sont $O(\gamma^{\frac{1}{2}}/L)$, on en déduit

$$\rho_{\alpha\beta}^* \approx \frac{1}{2} (\phi_{\alpha|\beta} + \phi_{\beta|\alpha}) , \quad (9.12)$$

avec une erreur relative ne dépassant ni $O(\gamma^{\frac{1}{2}}L/R)$ (négligeable), ni $O(L^2/R^2)$.

Par ailleurs, en notant W et U les ordres de grandeur respectifs de w et u_{α} , on a

$$u_{\alpha|\beta} = \dot{\theta}_{\alpha\beta} - \dot{\omega}_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} w$$

$$\text{O.G. } U/L \quad \gamma \quad (\gamma, \frac{L}{R} \gamma^{\frac{1}{2}}) \quad W/R ,$$

ce qui implique

$$U = O(L\gamma, \frac{L^2}{R} \gamma^{\frac{1}{2}}, \frac{L}{R} W = \frac{L^2}{R} \frac{W}{L} = \frac{L^2}{R} \gamma^{\frac{1}{2}}) \quad (9.13)$$

Introduisant ce résultat dans l'expression (4.3) de ϕ_{α} , on obtient

$$\phi_{\alpha} = w_{,\alpha} + b_{\alpha}^{\kappa} u_{\kappa} .$$

$$\text{O.G. } \gamma^{\frac{1}{2}} \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \quad U/R$$

Le dernier terme étant d'un des ordres de grandeur

$$\frac{L}{R} \gamma, \quad \frac{L^2}{R^2} \gamma^{\frac{1}{2}},$$

on a, à $O(L^2/R^2)$ près,

$$\phi_{\alpha} \approx w_{,\alpha} , \quad (9.14)$$

ce qui permet de transformer (9.12) en

$$\rho_{\alpha\beta}^* \approx w|_{\alpha\beta} \quad , \quad (9.15)$$

moyennant une erreur $O(L^2/R^2)$.

Enfin, l'expression des déformations du feuillet moyen,

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} w + \frac{1}{2} \Omega^2 a_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \phi_{\alpha} \phi_{\beta}$$

O.G. $\quad \quad \quad \gamma \quad \quad \quad (L^2/R^2)\gamma \quad \quad \quad \gamma$

peut être simplifiée en

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \approx \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} w + \frac{1}{2} \phi_{\alpha} \phi_{\beta} \quad , \quad (9.16)$$

avec une erreur relative $O(L^2/R^2)$.

9.5 - Coques presque planes avec plans de référence

En utilisant, comme pour les coque quasi-planes, des plans de référence distincts pour les différents éléments, on obtiendra des pentes vérifiant

$$h_{,\alpha} = O(P) \quad , \quad P = l/R \quad ,$$

l étant la taille de l'élément, avec, naturellement, $l \leq L$ si l'on veut pouvoir représenter correctement la déformation. On a, dans ce cas, par (9.7) (en utilisant les coordonnées du plan x^1 et x^2)

$$b_{\alpha\beta} = - \frac{h_{,\alpha\beta}}{\sqrt{a}} = - h_{,\alpha\beta} (1 + O(P^2)).$$

Par ailleurs, les symboles de Christoffel valent

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda\gamma} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\lambda,\gamma} + a_{\lambda\gamma,\alpha} - a_{\alpha\gamma,\lambda})$$

et, comme

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + h_{,\alpha} h_{,\beta} \quad ,$$

on a

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda\gamma} &= \frac{1}{2} (h_{,\alpha\gamma} h_{,\lambda} + h_{,\alpha} h_{,\lambda\gamma} + h_{,\lambda\alpha} h_{,\gamma} + h_{,\lambda} h_{,\gamma\alpha} - h_{,\alpha\lambda} h_{,\gamma} - h_{,\alpha} h_{,\gamma\lambda}) \\ &= h_{,\lambda} h_{,\gamma\alpha} \end{aligned}$$

et

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha}^{\beta} = a^{\beta\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda\gamma} = (\delta^{\beta\lambda} + O(P^2))h_{,\lambda} \quad h_{,\gamma\alpha} = O(P/R) .$$

Il en découle que

$$u_{\alpha|\beta} = u_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} u_{\gamma} \quad ,$$

O.G. U/L UP/R

ce qui permet d'écrire

$$u_{\alpha|\beta} \approx u_{\alpha,\beta}$$

avec une erreur de l'ordre de $PL/R \leq L^2/R^2$. Au total, on peut donc, sans modifier l'ordre de l'approximation, remplacer les expressions (9.15) et (9.16) par

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \approx \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + h_{,\alpha\beta} w + \frac{1}{2} \phi_{\alpha} \phi_{\beta} \quad (9.15 \text{ bis})$$

et

$$\rho_{\alpha\beta}^* \approx w_{,\alpha\beta} . \quad (9.16 \text{ bis})$$

Insistons cependant sur le fait que, contrairement à ce qui se produit avec la théorie de Marguerre, il n'y a pas, ici, de convergence vers la solution exacte lorsque $l \rightarrow 0$, car il subsiste toujours des erreurs d'énergie $O(L^2/R^2)$. Cette propriété a été clairement mise en évidence par IDELSOHN /15,32/

9.6 - "Quasi-shallow shells" de KOITER

Il convient encore de signaler une théorie simplifiée due à KOITER /3/, et appelée par cet auteur "quasi-shallow shell theory". Elle suppose seulement

$$K L^2 \ll 1 ,$$

K étant la courbure gaussienne. Fondée sur les équations de compatibilité des coques et le fait que, pour les faibles courbures gaussiennes, les dérivées covariantes de surface commutent approximativement, elle fait apparaître une fonction de courbure W, dont dérivent les variations de courbure, par les relations

$$\rho_{\alpha\beta} = W_{|\alpha\beta} ,$$

mais qu'il faut se garder de confondre avec le déplacement normal. Nous renvoyons au rapport /3/ pour les détails.

10. COQUES AVEC DEFORMATIONS DUES AUX EFFORTS TRANCHANTS (COMPOSANTES CARTESIENNES)

10.1 - Introduction

Nous avons vu que pour les grands déplacements, la théorie de Kirchhoff-Love est pratiquement inapplicable aux éléments finis, du fait de la non-linéarité de la connexion des pentes. Ce problème, lié à la condition de nullité des déformations dues à l'effort tranchant, disparaît dès que l'on abandonne cette hypothèse. Le nombre de degrés de liberté à traiter est cependant plus élevé.

10.2 - Description de la géométrie et déformations

La description géométrique est classique: un point quelconque de la coque a la forme

$$\underline{s} = \underline{r} + x^3 \underline{n},$$

ce qui donne

$$\underline{g}_\alpha = \underline{a}_\alpha - x^3 b_\alpha^\lambda \underline{a}_\lambda$$

et

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2 x^3 b_{\alpha\beta} + (x^3)^2 b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} \quad .$$

Après déformation, les positions sont

$$\underline{s}^i = \underline{r} + \underline{u} + x^3 (\underline{n} + \underline{p}) \quad , \quad (10.1)$$

ce qui donne

$$\underline{g}_\alpha^i = (\underline{a}_\alpha + \underline{u}_{,\alpha}) + x^3 (- b_\alpha^\lambda \underline{a}_\lambda + \underline{p}_{,\alpha}) \quad .$$

On a donc

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}^i &= a_{\alpha\beta} + \underline{a}_\alpha \cdot \underline{u}_{,\beta} + \underline{a}_\beta \cdot \underline{u}_{,\alpha} + \underline{u}_{,\alpha} \cdot \underline{u}_{,\beta} \\ &+ x^3 (-2b_{\alpha\beta} + \underline{p}_{,\alpha} \cdot \underline{a}_\beta + \underline{p}_{,\beta} \cdot \underline{a}_\alpha - b_\alpha^\lambda \underline{a}_\lambda \cdot \underline{u}_{,\beta} - b_\beta^\lambda \underline{a}_\lambda \cdot \underline{u}_{,\alpha} + \underline{p}_{,\alpha} \cdot \underline{u}_{,\beta} + \underline{p}_{,\beta} \cdot \underline{u}_{,\alpha}) \\ &+ (x^3)^2 (b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} - b_\alpha^\lambda \underline{a}_\lambda \cdot \underline{p}_{,\beta} - b_\beta^\mu \underline{a}_\mu \cdot \underline{p}_{,\alpha} + \underline{p}_{,\alpha} \cdot \underline{p}_{,\beta}) \quad , \end{aligned}$$

ou encore,

$$g_{\alpha\beta}^i = g_{\alpha\beta} + 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} - 2 x^3 \rho_{\alpha\beta} + 2 (x^3)^2 \psi_{\alpha\beta} \quad , \quad (10.2)$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} &= r_{i,\alpha} u_{i,\beta} + r_{i,\beta} u_{i,\alpha} + u_{i,\alpha} u_{i,\beta} \\ - 2 \rho_{\alpha\beta} &= -r_{i,\alpha} p_{i,\beta} - r_{i,\beta} p_{i,\alpha} + b_\alpha^\lambda r_{i,\lambda} u_{i,\beta} + b_\beta^\lambda r_{i,\lambda} u_{i,\alpha} - p_{i,\alpha} u_{i,\beta} - p_{i,\beta} u_{i,\alpha} \\ 2 \psi_{\alpha\beta} &= -b_\alpha^\lambda r_{i,\lambda} p_{i,\beta} - b_\beta^\lambda r_{i,\lambda} p_{i,\alpha} + p_{i,\alpha} p_{i,\beta} \end{aligned} \right. \quad (10.3)$$

On a par ailleurs

$$\underline{g}_3 = \underline{n} \quad ; \quad \underline{g}'_3 = \underline{n} + \underline{p} \quad ,$$

d'où

$$\begin{aligned} g'_{\alpha 3} &= \underline{g}'_{\alpha} \cdot \underline{g}'_3 = ((a_{\alpha} + u_{\alpha}) + x^3 (-b_{\alpha}^{\lambda} g_{\lambda} + p_{\alpha})) (\underline{n} + \underline{p}) \\ &= \underline{a}_{\alpha} \cdot \underline{n} + \underline{a}_{\alpha} \cdot \underline{p} + u_{\alpha} \cdot \underline{n} + u_{\alpha} \cdot \underline{p} + x^3 (-b_{\alpha}^{\lambda} a_{\lambda} \cdot \underline{n} - b_{\alpha}^{\lambda} a_{\lambda} \cdot \underline{p} + p_{\alpha} \cdot \underline{n} + p_{\alpha} \cdot \underline{p}) \quad , \end{aligned}$$

soit

$$2\gamma_{\alpha 3} = r_{i,\alpha} p_i + n_i u_{i,\alpha} + p_i u_{i,\alpha} + x^3 (-b_{\alpha}^{\lambda} r_{i,\lambda} p_i + n_i p_{i,\alpha} + p_i p_{i,\alpha}) \quad .$$

Enfin, on a

$$g'_{33} = (\underline{n} + \underline{p})(\underline{n} + \underline{p}) = 1 + 2 \underline{n} \cdot \underline{p} + \underline{p} \cdot \underline{p} \quad ,$$

c'est-à-dire

$$2\gamma_{33} = 2 n_i p_i + p_i p_i \quad (10.4)$$

10.3 - L'hypothèse $\gamma_{33} = 0$ et ses conséquences

Nous ferons, comme en théorie classique des coques, l'hypothèse $\gamma_{33} = 0$, soit explicitement

$$2 n_i p_i + p_i p_i = 0 \quad (10.5)$$

Dérivant cette condition par rapport à x^{α} , on obtient

$$- 2 b_{\alpha}^{\lambda} r_{i,\lambda} p_i + 2 n_i p_{i,\alpha} + 2 p_i p_{i,\alpha} = 0 \quad , \quad (10.6)$$

ce qui signifie que le terme de $\gamma_{\alpha 3}$ dépendant de x^3 est nul. Il vient donc

$$2\gamma_{\alpha 3} = r_{i,\alpha} p_i + n_i u_{i,\alpha} + p_i u_{i,\alpha} \quad (10.7)$$

10.4 - Equations constitutives

Supposant toujours l'orthotropie, on peut écrire la densité d'énergie de déformation sous la forme

$$W = \frac{1}{2} c^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu} + c^{\alpha 3 \beta 3} \gamma_{\alpha 3} \gamma_{\beta 3} \quad ,$$

$c^{\alpha\beta\lambda\mu}$ étant la loi relative à l'état plan de tension, et $c^{\alpha 3 \beta 3}$ représentant les modules de cisaillement. Nous admettons que

$$c^{\alpha\beta\lambda\mu} \parallel_3 = 0 \quad ; \quad c^{\alpha 3 \beta 3} \parallel_3 = 0 \quad , \quad (10.8)$$

ce qui exprime l'homogénéité par rapport à x^3 . Nous utiliserons la

notation

$$G^{\alpha\beta} = 2 C^{\alpha 3 \beta 3} ,$$

ce qui donne

$$W = \frac{1}{2} C^{\alpha\beta\lambda\mu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} G^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3} \delta_{\beta 3} \quad . \quad (10.9)$$

Développant W en série de Taylor jusqu'au second ordre en x^3 , on obtient

$$W(x^3) = W(0) + x^3 W_{,3}(0) + \frac{1}{2} (x^3)^2 W_{,33}(0) + \dots$$

avec

$$\begin{aligned} W(0) &= \frac{1}{2} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\mu} \overset{\circ}{\delta}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\delta}_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3} \delta_{\beta 3} \\ W_{,3}(0) &= \frac{1}{2} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\mu} (\overset{\circ}{\delta}_{\alpha\beta||3} \overset{\circ}{\delta}_{\lambda\mu} + \overset{\circ}{\delta}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\delta}_{\lambda\mu||3}) + \frac{1}{2} \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} (\overset{\circ}{\delta}_{\alpha 3||3} \overset{\circ}{\delta}_{\beta 3} + \overset{\circ}{\delta}_{\alpha 3} \overset{\circ}{\delta}_{\beta 3||3}) \\ W_{,33}(0) &= \frac{1}{2} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\mu} (\overset{\circ}{\delta}_{\alpha\beta||33} \overset{\circ}{\delta}_{\lambda\mu} + 2 \overset{\circ}{\delta}_{\alpha\beta||3} \overset{\circ}{\delta}_{\lambda\mu||3} + \overset{\circ}{\delta}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\delta}_{\lambda\mu||33}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} (\overset{\circ}{\delta}_{\alpha 3||33} \overset{\circ}{\delta}_{\beta 3} + 2 \overset{\circ}{\delta}_{\alpha 3||3} \overset{\circ}{\delta}_{\beta 3||3} + \overset{\circ}{\delta}_{\alpha 3} \overset{\circ}{\delta}_{\beta 3||33}) \end{aligned} \quad (10.11)$$

Des simplifications importantes peuvent être obtenues en tenant compte des ordres de grandeur respectifs des différents termes. La discussion ne peut cependant être faite sur une base aussi simple qu'en théorie de Kirchhoff-Love. Suivant une démarche due à CHIEN /4/, nous partirons des équations de compatibilité (voir annexe). L'une de celles-ci s'écrit (pour les petites déformations)

$$\begin{aligned} &\delta_{\alpha\beta||33} + \delta_{33||\alpha\beta} - \delta_{\alpha 3||\beta 3} - \delta_{\beta 3||\alpha 3} \\ &+ \varepsilon^{1m} ((\delta_{\alpha 1||\beta} + \delta_{1\beta||\alpha} - \delta_{\alpha\beta||1}) (\delta_{3m||3} + \delta_{m3||3} - \delta_{33||m}) \\ &- (\delta_{\alpha 1||3} + \delta_{31||\alpha} - \delta_{\alpha 3||1}) (\delta_{\beta m||3} + \delta_{3m||\beta} - \delta_{\beta 3||m})) = 0 \end{aligned} \quad (10.12)$$

Il nous faut donc déterminer les ordres de grandeur des différentes dérivées covariantes sur le feuillet moyen (en supposant $g_{\alpha\beta} = O(1)$):

$$\delta_{\alpha\beta||\gamma} = \delta_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma_{\delta\alpha}^{\lambda} \delta_{\lambda\beta} - \Gamma_{\delta\alpha}^3 \delta_{3\beta} - \Gamma_{\delta\beta}^{\lambda} \delta_{\alpha\lambda} - \Gamma_{\delta\beta}^3 \delta_{3\lambda} = O(\delta/L, \delta/R)$$

O.G. δ/L δ/L δ/R δ/L δ/R

$$\delta_{\alpha\beta||3} = \delta_{\alpha\beta,3} - \Gamma_{3\alpha}^{\lambda} \delta_{\lambda\beta} - \Gamma_{3\alpha}^3 \delta_{3\beta} - \Gamma_{3\beta}^{\lambda} \delta_{\alpha\lambda} - \Gamma_{3\beta}^3 \delta_{\alpha 3} = O(\delta/t)$$

O.G. δ/t δ/R 0 δ/R 0

$$\delta_{\alpha 3||\beta} = \delta_{\alpha 3,\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda} \delta_{\lambda 3} - \Gamma_{\beta\alpha}^3 \delta_{33} - \Gamma_{\beta 3}^{\lambda} \delta_{\alpha\lambda} - \Gamma_{\beta 3}^3 \delta_{\alpha 3} = O(\delta/L, \delta/R)$$

O.G. δ/L δ/L 0 δ/R 0

$$\delta_{\alpha 3||3} = \delta_{\alpha 3,3} - \Gamma_{3\alpha}^{\lambda} \delta_{\lambda 3} - \Gamma_{3\alpha}^3 \delta_{33} - \Gamma_{33}^{\lambda} \delta_{\alpha\lambda} - \Gamma_{33}^3 \delta_{\alpha 3} = O(\delta/R)$$

O.G. 0 δ/R 0 0 0

Les termes produits de (10.12) s'écrivent alors, comme $\varepsilon^{\lambda 3} = 0$,

$$\varepsilon^{\lambda\mu} \left(\frac{\delta_{\alpha\lambda||\beta} + \delta_{\lambda\beta||\alpha} - \delta_{\alpha\beta||\lambda}}{\delta/L, \delta/R} \right) (\delta_{3\mu||3} + \delta_{\mu 3||3} - \delta_{33||\mu})$$

O.G. $\delta/L, \delta/R$ δ/t δ/t 0

$$+ \varepsilon^{33} (\delta_{\alpha 3||\beta} + \delta_{3\beta||\alpha} - \delta_{\alpha\beta||3}) (\delta_{33||3} + \delta_{33||3} - \delta_{33||3})$$

O.G. 0 0 0

$$- \varepsilon^{\lambda\mu} \left(\delta_{\alpha\lambda||3} + \frac{\delta_{3\lambda||\alpha} - \delta_{\alpha 3||\lambda}}{\delta/L, \delta/R} \right) (\delta_{\beta\mu||3} + \frac{\delta_{3\mu||\beta} - \delta_{\beta 3||\mu}}{\delta/L, \delta/R})$$

O.G. δ/t $\delta/L, \delta/R$ δ/t $\delta/L, \delta/R$

$$- \varepsilon^{33} \left(\frac{\delta_{\alpha 3||3} + \delta_{33||\alpha} - \delta_{\alpha 3||3}}{\delta/L, \delta/R} \right) (\delta_{\beta 3||3} + \delta_{33||\beta} - \delta_{\beta 3||3})$$

0

et ont un ordre de grandeur total δ^2/t^2 . Les dérivées apparaissant dans (10.12) vérifient

$$\delta_{33||\alpha\beta} = 0$$

$$\delta_{\alpha 3||\beta 3} = \delta_{\alpha 3||3\beta} = (\delta_{\alpha 3||3})_{,\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda} \delta_{\lambda 3||3} - \Gamma_{\beta\alpha}^3 \delta_{33||3} - \Gamma_{\beta 3}^{\lambda} \delta_{\alpha\lambda||3}$$

O.G. $\delta/(RL)$ $\delta/(RL)$ 0 δ/R^2

$$- \Gamma_{\beta 3}^3 \delta_{\alpha 3||3} - \Gamma_{\beta 3}^{\lambda} \delta_{\alpha 3||\lambda} - \Gamma_{\beta 3}^3 \delta_{\alpha 3||3}$$

O.G. 0 $\frac{\delta}{RL}, \frac{\delta}{R^2}$ 0

et ont donc pour ordre de grandeur $(\delta/(Lt), \delta/(Rt))$. Au total, on a donc, dans $W_{,33}(0)$,

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \parallel_{33} = o(\gamma / RL), \gamma/R^2, \gamma^2/t^2$$

et

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \parallel_{33} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\mu} = o(\gamma^2/(RL), \gamma^2/R^2, \gamma^3/t^2)$$

tandis que

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \parallel_3 \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\mu} \parallel_3 = o(\gamma^2/t^2).$$

Dès lors, en négligeant les termes contenant $\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \parallel_{33}$, on commet une erreur d'ordre de grandeur relatif

$$\frac{t^2}{RL}, \frac{t^2}{R^2}, \gamma, \quad (10.13)$$

jamais supérieure à l'ordre des termes négligés a priori dans la théorie. On notera que le résultat (10.13) est fondé sur la compatibilité, les hypothèses $\gamma_{33} = 0$, $\gamma_{\alpha 3,3} = 0$ et la petitesse générale des déformations, sans qu'aucune hypothèse ne soit formulée sur leurs ordres de grandeur relatifs. Comme, en pratique,

$$\gamma_{\alpha 3} = \frac{o(C^{\alpha\beta\gamma\delta})}{o(G^{\alpha\beta})} \cdot \frac{t}{L} o(\gamma_{\alpha\beta}), \quad \gamma_{\alpha\beta} = o(\gamma),$$

la conclusion (10.13) reste d'application tant que

$$o(G^{\alpha\beta}) \geq \frac{t}{L} o(C^{\alpha\beta\gamma\delta}) \quad (10.14)$$

Pour les déformations d'extension et de flexion, on a donc une énergie par unité de surface

$$V_C = \int_{-t/2}^{t/2} W_C (1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2) dx^3$$

et, en suivant la même voie qu'en théorie de Kirchhoff-Love, on peut se ramener, moyennant une erreur supplémentaire $o(t/R)$, à l'expression découlée

$$V_C = \frac{1}{2} (C^{\alpha\beta\lambda\mu} t \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\mu} + C^{\alpha\beta\lambda\mu} \frac{t^3}{12} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \parallel_3 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \parallel_3)$$

Notant enfin que, pour $x^3 = 0$,

$$\gamma_{\alpha\beta} \parallel_3 = \gamma_{\alpha\beta,3} - \Gamma_3^\lambda \alpha \gamma_{\lambda\beta} - \Gamma_3^\lambda \beta \gamma_{\alpha\lambda} = \gamma_{\alpha\beta,3} - b_\alpha^\lambda \gamma_{\lambda\beta} - b_\beta^\lambda \gamma_{\alpha\lambda},$$

O.G. γ/t γ/R γ/R

il nous est loisible de remplacer $\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \parallel_3$ par $\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta,3} = -\rho_{\alpha\beta}$, cette substitution n'entraînant qu'une erreur relative $o(t/R)$. Nous écri-

rons donc

$$v_G = \frac{1}{2} \overset{\circ}{c}^{\alpha\beta\lambda\mu} t \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{c}^{\alpha\beta\lambda\mu} \frac{t^3}{12} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\lambda\mu} \quad (10.15)$$

Examinons à présent les termes de cisaillement transversal. On a, en $x^3 = 0$,

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha 3} \parallel_3 &= \delta_{\alpha 3,3} - \Gamma_3^\lambda \alpha \delta_{\lambda 3} - \Gamma_3^3 \alpha \delta_{33} - \Gamma_3^\lambda \beta \delta_{\alpha\lambda} - \Gamma_3^3 \beta \delta_{\alpha 3} = b_\alpha^\lambda \delta_{\lambda 3} \\ &= o(\delta_{\lambda 3}/R) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha 3} \parallel_{33} &= (\delta_{\alpha 3} \parallel_3)_{,3} - \Gamma_3^\lambda \alpha \delta_{\lambda 3} \parallel_3 - \Gamma_3^3 \alpha \delta_{33} \parallel_3 - \Gamma_3^\lambda \beta \delta_{\alpha\lambda} \parallel_3 - \Gamma_3^3 \beta \delta_{\alpha 3} \parallel_3 \\ &= \delta_{\alpha 3,33} - \Gamma_3^\lambda \alpha_{,3} \delta_{\lambda 3} - \Gamma_3^\lambda \alpha \delta_{\lambda 3,3} - \Gamma_3^\lambda \alpha \delta_{\lambda 3} \parallel_3 \\ &= c_\alpha^\lambda \delta_{\lambda 3} + b_\alpha^\lambda \delta_{\lambda 3} \parallel_3 = o(\delta_{\alpha 3}/R^2). \end{aligned}$$

On a donc

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3} \overset{\circ}{\gamma}_{\beta 3} \parallel_3 = o(\gamma_{\alpha 3}^2 / R^2)$$

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3} \overset{\circ}{\gamma}_{\beta 3} \parallel_{33} = o(\gamma_{\alpha 3}^2 / R^2),$$

d'où

$$W_G(0) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3} \overset{\circ}{\gamma}_{\beta 3} = o(G \gamma_{\alpha 3}^2)$$

$$W_{G,3}(0) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} (\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3} \overset{\circ}{\gamma}_{\beta 3} \parallel_3 + \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3} \parallel_3 \overset{\circ}{\gamma}_{\beta 3}) = o(G \gamma_{\alpha 3}^2 / R)$$

$$\begin{aligned} W_{G,33}(0) &= \frac{1}{2} \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} (\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3} \parallel_{33} \overset{\circ}{\gamma}_{\beta 3} + 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3} \parallel_3 \overset{\circ}{\gamma}_{\beta 3} \parallel_3 + \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3} \overset{\circ}{\gamma}_{\beta 3} \parallel_{33}) \\ &= o(G \gamma_{\alpha 3}^2 / R^2). \end{aligned}$$

Intégrons sur l'épaisseur:

$$\int_{-t/2}^{t/2} W_G(0) (1 - 2 H x^3 + K (x^3)^2) dx^3 = W_G(0) \left(t + \frac{t^3}{12} \right) = o(G \gamma_{\alpha 3}^2 t)$$

$$\begin{aligned} \int_{-t/2}^{t/2} W_{G,3}(0) (1 - 2 H x^3 + K (x^3)^2) x^3 dx^3 &= -2 H W_{G,3}(0) \frac{t^3}{12} \\ &= o(G \gamma_{\alpha 3}^2 \frac{t^3}{12 R^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-t/2}^{t/2} W_{G,33}(0) (1 - 2 H x^3 + K (x^3)^2) (x^3)^2 dx^3 \\ = \frac{1}{2} W_{G,33}(0) \left(\frac{t^3}{12} + K \frac{t^5}{80} \right) = o(G \gamma_{\alpha 3}^2 \frac{t^3}{12 R^2}) \end{aligned}$$

A t^2/R^2 près, on peut donc écrire

$$V_G = W_G(0) t = \frac{1}{2} \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3} \overset{\circ}{\gamma}_{\beta 3} \quad (10.16)$$

En définitive, l'énergie de déformation par unité de surface du feuillet moyen s'écrit

$$V = \frac{1}{2} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\mu} t \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\mu} \frac{t^3}{12} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} t \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3} \overset{\circ}{\gamma}_{\beta 3} \quad (10.17)$$

avec une erreur relative ne dépassant pas

$$\max\left(\frac{t^2}{RL}, \frac{t^2}{R^2}, \gamma\right) \quad (10.18)$$

10.5 - Prise en compte de la condition $\gamma_{33} = 0$

Il est assez malaisé de prendre en compte la condition

$$\gamma_{33} = n_i p_i + \frac{1}{2} p_i p_i$$

de manière directe. Mais est-il nécessaire de l'assurer? Malheureusement, oui, car une dilatation normale uniforme ($\gamma_{33}|_{\alpha} = \gamma_{33}|_{\beta} = 0$) sans autre déformation est nécessairement compatible et sans raideur. Le plus simple semble être de pénaliser cette condition en ajoutant à l'énergie V un terme de la forme

$$\frac{1}{2} M t \gamma_{33}^2, \quad (10.19)$$

M étant "relativement grand". Pour une variation δp_i , on a alors

$$\begin{aligned} \delta \rho_{\alpha\beta} &= - (r_{i,\alpha} + u_{i,\alpha}) \delta p_{i,\beta} - (r_{i,\beta} + u_{i,\beta}) \delta p_{i,\alpha} = o\left(\frac{\delta p}{L}, \frac{U}{L}, \frac{\delta p}{L}\right) \\ 2\delta \gamma_{\alpha 3} &= (r_{i,\alpha} + u_{i,\alpha}) \delta p_i = o\left(\delta p, \frac{U}{L} p\right) \\ \delta \gamma_{33} &= (n_i + p_i) \delta p_i = o\left(\delta p, p \delta p\right) \end{aligned}$$

et, pour autant que les gradients de déplacements n'excèdent pas $O(1)$,

$$\delta \rho_{\alpha\beta} = o(\delta p/L), \quad \delta \gamma_{\alpha 3} = o(\delta p), \quad \delta \gamma_{33} = o(\delta p).$$

La variation d'énergie de surface est alors

$$\delta V = \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\mu} (t^3/12) \rho_{\alpha\beta} \delta \rho_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} t \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha 3} \delta \gamma_{\beta 3} + M t \gamma_{33} \delta \gamma_{33}$$

$$O.G. \quad \frac{1}{L} \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\lambda\mu} \frac{t^3}{12} o(\rho_{\alpha\beta}) \cdot o(\delta p) + \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} t o(\gamma_{\alpha 3}) \cdot o(\delta p) + M t o(\gamma_{33}) \cdot o(\delta p)$$

En l'absence de charge directement appliquée sur les p_i , on obtiendra donc la relation

$$\gamma_{33} = O\left(\frac{C^{\alpha\beta\lambda\mu}}{12 M} \frac{t^2}{L} \rho_{\alpha\beta}, \frac{G^{\alpha\beta}}{M} \gamma_{\alpha 3}\right),$$

et le terme ajouté à l'énergie aura finalement pour ordre de grandeur

$$\begin{aligned} M t \gamma_{33}^2 &= \frac{O(C^{\alpha\beta\lambda\mu})^2}{144 M^2} \frac{t^4}{L^2} M t O(\rho_{\alpha\beta})^2, \quad \frac{O(G^{\alpha\beta})^2}{M^2} M t O(\gamma_{\alpha 3}^2) \\ &= O\left(\frac{C^{\alpha\beta\lambda\mu} t^3}{12} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\lambda\mu}\right) \cdot \frac{O(C^{\alpha\beta\lambda\mu})}{12 M} \frac{t^2}{L^2}, \quad O(G^{\alpha\beta} t \gamma_{\alpha 3} \gamma_{\beta 3}) \cdot O\left(\frac{G^{\alpha\beta}}{M}\right). \end{aligned}$$

L'erreur commise est donc du plus grand des deux ordres de grandeur suivants:

$$\frac{O(C^{\alpha\beta\lambda\mu})}{12 M} \frac{t^2}{L^2} \times \text{Energie de flexion}$$

$$\frac{O(G^{\alpha\beta})}{M} \times \text{Energie de cisaillement.}$$

Elle est petite devant l'énergie de flexion dès que $M = O(C^{\alpha\beta\lambda\mu})$. Elle est petite devant l'énergie de cisaillement dès que M est grand devant $G^{\alpha\beta}$. Lorsque $G^{\alpha\beta} \geq \frac{t^2}{2} O(C^{\alpha\beta\lambda\mu})$, l'énergie de cisaillement est au plus de l'ordre de grandeur de l'énergie de flexion et on ne commet en fait pas d'erreur sensible en énergie en imposant simplement la condition

$$M \geq O(C^{\alpha\beta\lambda\mu}).$$

Lorsque $G^{\alpha\beta} \leq (t^2/L^2) O(C^{\alpha\beta\lambda\mu})$, la condition $M \geq O(C^{\alpha\beta\lambda\mu})$ garantit également la petitesse relative de l'erreur par rapport à l'énergie de cisaillement. Finalement, si les calculs arithmétiques sont menés avec une précision d'ordre $(1/N)$, il nous semble raisonnable de poser

$$M = \frac{3}{\sqrt{N}} \cdot O(C^{\alpha\beta\lambda\mu}), \quad (10.19.b)$$

limitant ainsi la grandeur de M d'une façon systématique pour éviter à la fois des erreurs trop grandes et des effets trop néfastes sur le conditionnement du système à résoudre.

10.6 - Représentation des déplacements rigides

Une variation de déplacement rigide est de la forme

$$\delta v_i = \delta c_i + e_{ijk} \delta \omega_j ((r_k + x^3 n_k) + (u_k + x^3 p_k)),$$

soit

$$\delta u_i + x^3 \delta p_i = \delta c_i + e_{ijk} \delta \omega_j ((r_k + x^3 n_k) + (u_k + x^3 p_k)),$$

ce qui donne

Après déformation, on obtient les positions

$$\underline{s}' = \underline{r} + \underline{u} + x^3(\underline{n}^* + \underline{p}) \quad (10.23)$$

ce qui entraîne

$$\underline{g}'_{\alpha} = (\underline{r}_{,\alpha} + \underline{u}_{,\alpha}) + x^3(\underline{n}^*_{,\alpha} + \underline{p}_{,\alpha}) \quad ; \quad \underline{g}'_3 = \underline{n}^* + \underline{p} \quad (10.24)$$

et

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} + (\underline{r}_{,\alpha} \cdot \underline{u}_{,\beta} + \underline{r}_{,\beta} \cdot \underline{u}_{,\alpha} + \underline{u}_{,\alpha} \cdot \underline{u}_{,\beta}) \\ &+ x^3(\underline{r}_{,\alpha} \cdot \underline{p}_{,\beta} + \underline{r}_{,\beta} \cdot \underline{p}_{,\alpha} + \underline{u}_{,\alpha} \cdot \underline{n}^*_{,\beta} + \underline{u}_{,\beta} \cdot \underline{n}^*_{,\alpha} + \underline{u}_{,\alpha} \cdot \underline{p}_{,\beta} + \underline{u}_{,\beta} \cdot \underline{p}_{,\alpha}) \\ &+ (x^3)^2(\underline{n}^*_{,\alpha} \cdot \underline{p}_{,\beta} + \underline{n}^*_{,\beta} \cdot \underline{p}_{,\alpha} + \underline{p}_{,\alpha} \cdot \underline{p}_{,\beta}) \quad , \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} 2\overset{\circ}{\chi}_{\alpha\beta} &= r_{i,\alpha} u_{i,\beta} + r_{i,\beta} u_{i,\alpha} + u_{i,\alpha} u_{i,\beta} \\ 2\rho_{\alpha\beta} &= -r_{i,\alpha} p_{i,\beta} - r_{i,\beta} p_{i,\alpha} - n^*_{i,\alpha} u_{i,\beta} - n^*_{i,\beta} u_{i,\alpha} - u_{i,\alpha} p_{i,\beta} - u_{i,\beta} p_{i,\alpha} \\ 2\psi_{\alpha\beta} &= n^*_{i,\alpha} p_{i,\beta} + n^*_{i,\beta} p_{i,\alpha} + p_{i,\alpha} p_{i,\beta} \end{aligned} \quad (10.25)$$

On a ensuite

$$g'_{\alpha 3} = g_{\alpha 3} + r_{i,\alpha} p_i + u_{i,\alpha} n^*_i + u_{i,\alpha} p_i + x^3(n^*_{i,\alpha} p_i + p_{i,\alpha} n^*_i + p_{i,\alpha} p_i)$$

c'est-à-dire

$$2\chi_{\alpha 3} = r_{i,\alpha} p_i + u_{i,\alpha} n^*_i + u_{i,\alpha} p_i + x^3(n^*_{i,\alpha} p_i + p_{i,\alpha} n^*_i + p_{i,\alpha} p_i) \quad (10.26)$$

et enfin,

$$g'_{33} = g_{33} + 2 n^*_i p_i + p_i p_i \quad ,$$

soit

$$2\chi_{33} = 2 n^*_i p_i + p_i p_i \quad (10.27)$$

Posant encore $\chi_{33} = 0$, on réduit (10.26) à

$$2\chi_{\alpha 3} = r_{i,\alpha} p_i + u_{i,\alpha} n^*_i + u_{i,\alpha} p_i \quad (10.28)$$

Pour le reste, on conserve l'essentiel de la théorie ci-dessus. Cette légère modification permet de représenter exactement les déplacements rigides au prix, il est vrai, d'une approximation géométrique.

10.8 - Cas des rotations modérées

L'hypothèse des rotations modérées s'écrit ici, en supposant toujours pour simplifier la discussion, le système de coordonnées gaussien,

$$u_{i,} = o(\gamma^{\frac{1}{2}}) \quad ; \quad p_i = o(\gamma^{\frac{1}{2}}) \quad (10.29)$$

Les déformations admettent alors les expressions simplifiées suivantes:

$$\begin{aligned} 2\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} &= r_{i,\alpha} u_{i,\beta} + r_{i,\beta} u_{i,\alpha} + u_{i,\alpha} u_{i,\beta} \\ 2\rho_{\alpha\beta} &= -r_{i,\alpha} p_{i,\beta} - r_{i,\beta} p_{i,\alpha} - n_{i,\alpha}^* u_{i,\beta} - n_{i,\beta}^* u_{i,\alpha} \\ 2\gamma_{\alpha 3} &= r_{i,\alpha} p_i + u_{i,\alpha} n_i^* + u_{i,\alpha} p_i \\ 2\gamma_{33} &= 2 n_i^* p_i = 0 \end{aligned} \quad (10.30)$$

10.9 - Evaluation de l'erreur introduite par la modification de la normale

La normale étant supposée interpolée par un polynôme de degré k , on aura, si l représente la taille d'un élément,

$$\Delta n_i = n_i - n_i^* = o(l^{k+1}) \quad ; \quad \Delta n_{i,\alpha} = (n_{i,} - n_{i,}^*) = o(l^k) \quad ,$$

ce qui entraîne

$$\Delta \rho_{\alpha\beta} = \Delta n_{i,\alpha} u_{i,\beta} + \Delta n_{i,\beta} u_{i,\alpha} \quad ; \quad \Delta \gamma_{\alpha 3} = \Delta n_i u_{i,\alpha} \quad ; \quad \Delta \gamma_{33} = \Delta n_i p_i$$

On déduit alors de l'inégalité de Schwarz-Cauchy

$$\begin{aligned} |\Delta \rho_{\alpha\beta}| &\leq (\Delta n_{i,\alpha} \Delta n_{i,\alpha})^{\frac{1}{2}} (u_{i,\alpha} u_{i,\alpha})^{\frac{1}{2}} \leq o(l^k) (u_{i,\alpha} u_{i,\alpha})^{\frac{1}{2}} \\ |\Delta \gamma_{\alpha 3}| &\leq (\Delta n_i \Delta n_i)^{\frac{1}{2}} (\sum_i u_{i,\alpha}^2)^{\frac{1}{2}} \leq o(l^{k+1}) (u_{i,\alpha} u_{i,\alpha})^{\frac{1}{2}} \\ |\Delta \gamma_{33}| &\leq (\Delta n_i \Delta n_i)^{\frac{1}{2}} (p_i p_i)^{\frac{1}{2}} \leq o(l^{k+1}) (p_i p_i)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (10.31)$$

L'erreur est donc en général $o(l^k)$. Nous verrons que dans certaines géométries particulières, on peut même obtenir une meilleure convergence de la théorie.

10.10 - Connexion des éléments de pseudo-coques

La connexion géométrique exige que, sur les interfaces entre éléments, les positions du feuillet moyen et les normales soient identiques. La condition de conformité des déplacements s'exprime par l'égalité des déplacements du feuillet moyen et

des rotations p_i . Cependant, ces dernières sont liées entre elles par la condition (10.27). Dès lors, en notant \underline{u} et \underline{z} les vecteurs unitaires normal et tangent à l'interface, et posant

$$\left\{ \begin{array}{l} q = n_i p_i \\ p_u = u_i p_i \\ p_z = z_i p_i \end{array} \right. ,$$

on peut développer le vecteur \underline{p} en

$$\underline{p} = p_u \underline{u} + p_z \underline{z} + q \underline{n} ,$$

ce qui entraîne

$$n_i^* p_i = p_u u_i n_i^* + p_z z_i n_i^* + q n_i n_i^* , \quad p_i p_i = p_u^2 + p_z^2 + q^2$$

Utilisant (10.27), on peut alors calculer q par

$$q^2 + 2 q n_i n_i^* = - p_u^2 - p_z^2 - p_u u_i n_i^* - p_z z_i n_i^* ,$$

soit

$$q = - n_i n_i^* + ((n_i n_i^*)^2 - p_u^2 - p_z^2 - p_u u_i n_i^* - p_z z_i n_i^*)^{\frac{1}{2}} ,$$

c'est-à-dire que le vecteur \underline{p} est entièrement déterminé par ses deux composantes p_u et p_z , comme dans les éléments de coque plans du type Hencky-Reissner /13,14/.

11. COQUES AVEC DEFORMATIONS DUES AUX EFFORTS TRANCHANTS (COMPOSANTES CURVILIGNES)

11.1 - Introduction

Bien qu'impropre à la représentation par éléments finis des déplacements rigides, la théorie des coques en composantes curvilignes reste très utile pour l'étude de certaines géométries particulières, comme les coques de révolution où, du moins pour les coques cylindriques et coniques, ces déplacements particuliers ne posent pas de problèmes.

La présentation qui suit s'inspire dans son principe de celle de FRAEIJIS de VEUBEKE /16/. Nous nous en écarterons cependant en imposant la condition $\gamma_{33} = 0$, ainsi que par l'usage des relations constitutives découplées (10.17), ce qui allège substantiellement la formulation.

11.2 - Géométrie de la coque, avant et après déformation

Les vecteurs-position étant au départ de la forme

$$\underline{s} = \underline{r} + x^3 \underline{n} ,$$

le déplacement sera écrit comme suit:

$$\underline{v} = u^\alpha \underline{a}_\alpha + w \underline{n} + x^3 (p^\alpha \underline{a}_\alpha + q \underline{n}) . \quad (11.1)$$

Il en résultera les positions déformées suivantes:

$$\underline{s}' = (\underline{r} + u^\alpha \underline{a}_\alpha + w \underline{n}) + x^3 ((1 + q) \underline{n} + p^\alpha \underline{a}_\alpha) \quad (11.2)$$

ce qui entraîne

$$\underline{g}'_\alpha = ((\delta_\alpha^\lambda + \lambda^\lambda_{,\alpha}) \underline{a}_\lambda + \phi_\alpha \underline{n}) + x^3 (- (b_\alpha^\lambda + \varkappa^\lambda_{,\alpha}) \underline{a}_\lambda + \pi_\alpha \underline{n}) \quad (11.3)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^\lambda_{,\alpha} = u^\lambda |_\alpha - w b_\alpha^\lambda \\ \phi_\alpha = w_{,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda \\ \varkappa^\lambda_{,\alpha} = -p^\lambda |_\alpha + q b_\alpha^\lambda \\ \pi_\alpha = q_{,\alpha} + b_\alpha^\lambda p_\lambda \end{array} \right. \quad (11.4)$$

Les quantités $\lambda^\lambda_{,\alpha}$ et ϕ_α définies ci-dessus coïncident avec les grandeurs de même nom introduites en (4.3) pour les coques de Kirchhoff-Love, ce qui permet une comparaison directe.

On a par ailleurs

$$\underline{g}'_{3,3} = \underline{s}'_{,3} = p^\alpha \underline{a}_\alpha + (1 + q) \underline{n} \quad (11.5)$$

11.3 - Expression générale des déformations

On a naturellement à partir de (11.3)

$$\xi'_{\alpha\beta} = \xi'_{\alpha} \cdot \xi'_{\beta} = \xi_{\alpha\beta} + 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} - 2 x^3 \rho_{\alpha\beta} + 2 (x^3)^2 \psi_{\alpha\beta} \quad (11.6)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\alpha} + \lambda^{\mu}_{\cdot\alpha} \lambda_{\mu\beta} + \phi_{\alpha} \phi_{\beta} \\ 2 \rho_{\alpha\beta} = \mathfrak{a}_{\alpha\beta} + \mathfrak{a}_{\beta\alpha} + b^{\mu}_{\beta} \lambda_{\mu\alpha} + b^{\mu}_{\alpha} \lambda_{\mu\beta} + \lambda^{\mu}_{\cdot\alpha} \mathfrak{a}_{\mu\beta} + \lambda^{\mu}_{\cdot\beta} \mathfrak{a}_{\mu\alpha} - \phi_{\alpha} \pi_{\beta} - \phi_{\beta} \pi_{\alpha} \\ 2 \psi_{\alpha\beta} = b^{\mu}_{\beta} \mathfrak{a}_{\mu\alpha} + b^{\mu}_{\alpha} \mathfrak{a}_{\mu\beta} + \mathfrak{a}_{\mu\alpha} \mathfrak{a}^{\mu}_{\cdot\beta} \end{array} \right. \quad (11.7)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \xi'_{\alpha 3} = \xi'_{\alpha} \cdot \xi'_{3} = 2 \gamma_{\alpha 3} &= p_{\alpha} + \lambda_{\mu\alpha} p^{\mu} + (1+q) \phi_{\alpha} \\ &+ x^3 ((-b^{\lambda}_{\alpha} - \mathfrak{a}^{\lambda}_{\cdot\alpha}) p_{\lambda} + (1+q) \pi_{\alpha}) \end{aligned} \quad (11.8)$$

et

$$\xi'_{33} = \xi'_{3} \cdot \xi'_{3} = 1 + 2 \gamma_{33} = 1 + 2q + q^2 + p^{\alpha} p_{\alpha} \quad (11.9)$$

Nous poserons encore $\gamma_{33} = 0$, soit

$$\gamma_{33} = q + \frac{q^2}{2} + \frac{1}{2} p^{\alpha} p_{\alpha} = 0 \quad (11.10)$$

La dérivation covariante de cette relation donne

$$\gamma_{33|\alpha} = q_{,\alpha} + q q_{,\alpha} + \frac{1}{2} p^{\lambda} |_{\alpha} p_{\lambda} + \frac{1}{2} p^{\lambda} p_{\lambda} |_{\alpha} = q_{,\alpha} + q q_{,\alpha} + p^{\lambda} p_{\lambda} |_{\alpha} = 0$$

Or, le terme linéaire en x^3 de l'expression (11.8) s'écrit, à partir de (11.4),

$$- b^{\lambda}_{\alpha} p_{\lambda} + p_{\lambda} p^{\lambda} |_{\alpha} - b^{\lambda}_{\alpha} q p_{\lambda} + q_{,\alpha} + q q_{,\alpha} + b^{\lambda}_{\alpha} p_{\lambda} + b^{\lambda}_{\alpha} q p_{\lambda} = \gamma_{33|\alpha}$$

et s'annule donc dès lors que $\gamma_{33} = 0$ dans la coque. Il en résulte

$$2 \gamma_{\alpha 3} = p_{\alpha} + \lambda_{\mu\alpha} p^{\mu} + (1+q) \phi_{\alpha} \quad (11.11)$$

11.4 - Energie de déformation

Par le même raisonnement qu'en section 10, on obtient l'expression suivante de l'énergie de déformation par unité de surface:

$$V = \frac{1}{2} \overset{\circ}{c}^{\alpha\beta\lambda\mu} t \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\mu} + \frac{1}{24} \overset{\circ}{c}^{\alpha\beta\lambda\mu} t^3 \rho_{\alpha\beta} \rho_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha 3} \gamma_{\beta 3} \quad (11.12)$$

Rappelons que la condition $\gamma_{33} = 0$ doit être prise en considération séparément, par exemple par pénalisation.

12. ROTATIONS MODERÉES D'UNE COQUE AVEC DEFORMATIONS DUES A L'EFFORT TRANCHANT (COMPOSANTES CURVILIGNES)

12.1 - Ordres de grandeur résultant de l'hypothèse des rotations modérées

L'hypothèse des rotations modérées s'exprime, dans un système de coordonnées gaussien, par les conditions

$$v_{i||j} \leq 0(\gamma^{\frac{1}{2}}) \quad (12.1)$$

Etant donné que, par (11.3),

$$\tilde{v}_{,\alpha} = \lambda_{,\alpha}^{\mu} \tilde{a}_{\mu} + \phi_{\alpha} \tilde{n} + x^3 (-\alpha_{,\alpha}^{\lambda} \tilde{a}_{\lambda} + \pi_{\alpha} \tilde{n}) ,$$

on a

$$v_{\beta||\alpha} = \tilde{g}_{\beta} \cdot \tilde{v}_{,\alpha} = \tilde{v}_{,\alpha} \cdot (\tilde{a}_{\beta} - x^3 b_{\beta}^{\varepsilon} \tilde{a}_{\varepsilon}) = \lambda_{\beta\alpha} - x^3 (\alpha_{\beta\alpha} + b_{\beta}^{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon\alpha}) + (x^3)^2 \alpha_{\varepsilon\alpha} b_{\beta}^{\varepsilon} , \quad (12.2)$$

ce qui mène aux conditions

$$\lambda_{\beta\alpha} \leq 0(\gamma^{\frac{1}{2}}) ; \quad \alpha_{\beta\alpha} + b_{\beta}^{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon\alpha} \leq 0(\gamma^{\frac{1}{2}}/t) ; \quad \alpha_{\varepsilon\alpha} b_{\beta}^{\varepsilon} \leq 0(\gamma^{\frac{1}{2}}/t^2) \quad (12.3)$$

Comme, d'autre part,

$$v_{3||\alpha} = \tilde{g}_3 \cdot \tilde{v}_{,\alpha} = \phi_{\alpha} + x^3 \pi_{\alpha} ,$$

on obtient les deux conditions supplémentaires

$$\phi_{\alpha} \leq 0(\gamma^{\frac{1}{2}}) ; \quad \pi_{\alpha} \leq 0(\gamma^{\frac{1}{2}}/t) \quad (12.4)$$

On a par ailleurs

$$\tilde{v}_{,\beta} = p^{\alpha} \tilde{a}_{\alpha} + q \tilde{n} ,$$

ce qui entraîne

$$v_{\alpha||\beta} = \tilde{g}_{\alpha} \cdot \tilde{v}_{,\beta} = (\delta_{\alpha}^{\varepsilon} - x^3 b_{\alpha}^{\varepsilon}) p_{\varepsilon}$$

d'où, comme $t/R \ll 1$,

$$p_{\alpha} \leq 0(\gamma^{\frac{1}{2}}) \quad (12.5)$$

Enfin,

$$v_{3||3} = \tilde{g}_3 \cdot \tilde{v}_{,\beta} = q \leq 0(\gamma^{\frac{1}{2}}) . \quad (12.6)$$

Telles sont les évaluations a priori. En raffinant l'analyse, on peut montrer que certaines de ces variables sont plus petites encore. Tout d'abord, on déduit de (11.10), (12.5) et (12.6) que

$$q = \gamma_{33} - \frac{1}{2} q^2 - \frac{1}{2} p^{\alpha} p_{\alpha} = 0(\gamma) . \quad (12.7)$$

De plus, il découle de (11.4) que

$$\mathcal{K}_{\alpha}^{\lambda} = -p^{\lambda} t_{\alpha} + q b_{\alpha}^{\lambda} = O(\gamma^{\frac{1}{2}}/L, \gamma/R) = O(\gamma^{\frac{1}{2}}/L) \quad (12.8)$$

De même,

$$\pi_{\alpha} = q_{,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} p_{\lambda} = O(\gamma/L, \gamma^{\frac{1}{2}}/R) = O(\gamma^{\frac{1}{2}}/R). \quad (12.9)$$

Le processus de simplification des déformations sera grandement facilité par l'introduction du tenseur des déformations linéarisées $\theta_{\alpha\beta}$ et du tenseur des rotations linéarisées $\omega_{\alpha\beta}$, définis par

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_{\alpha||\beta} + v_{\beta||\alpha}) &= \frac{1}{2} (\lambda_{\beta\alpha} + \lambda_{\alpha\beta}) - x^3 (\mathcal{K}_{\alpha\beta} + \mathcal{K}_{\beta\alpha} + b_{\alpha}^{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon\beta} + b_{\beta}^{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon\alpha}) \\ &+ (x^3)^2 (b_{\alpha}^{\varepsilon} \mathcal{K}_{\varepsilon\beta} + b_{\beta}^{\varepsilon} \mathcal{K}_{\varepsilon\alpha}) \end{aligned} \quad (12.10)$$

et

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_{\beta||\alpha} - v_{\alpha||\beta}) &= \frac{1}{2} (\lambda_{\beta\alpha} - \lambda_{\alpha\beta}) - x^3 (\mathcal{K}_{\beta\alpha} - \mathcal{K}_{\alpha\beta} + b_{\beta}^{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon\alpha} - b_{\alpha}^{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon\beta}) \\ &+ (x^3)^2 (b_{\beta}^{\varepsilon} \mathcal{K}_{\varepsilon\alpha} - b_{\alpha}^{\varepsilon} \mathcal{K}_{\varepsilon\beta}) \end{aligned} \quad (12.11)$$

En particulier, sur le feuillet moyen,

$$\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\lambda_{\beta\alpha} + \lambda_{\alpha\beta}) \quad ; \quad \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\lambda_{\beta\alpha} - \lambda_{\alpha\beta}), \quad (12.12)$$

conformément aux définitions de la section 4. On a évidemment

$$\lambda_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta}. \quad (12.13)$$

La dérivée covariante de $\theta_{\alpha\beta}$ par rapport à x^3 vaut

$$\theta_{\alpha\beta||3} = \theta_{\alpha\beta,3} - \Gamma_{3\alpha}^{\varepsilon} \theta_{\varepsilon\beta} - \Gamma_{3\beta}^{\varepsilon} \theta_{\alpha\varepsilon},$$

soit, sur le feuillet moyen,

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta} = -\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta||3} &= \frac{1}{2} (\mathcal{K}_{\alpha\beta} + \mathcal{K}_{\beta\alpha} + b_{\beta}^{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon\alpha} + b_{\alpha}^{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon\beta} - b_{\alpha}^{\varepsilon} (\lambda_{\varepsilon\beta} + \lambda_{\beta\varepsilon}) \\ &\quad - b_{\beta}^{\varepsilon} (\lambda_{\varepsilon\alpha} + \lambda_{\alpha\varepsilon})) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{K}_{\alpha\beta} + \mathcal{K}_{\beta\alpha} - b_{\alpha}^{\varepsilon} \lambda_{\beta\varepsilon} - b_{\beta}^{\varepsilon} \lambda_{\alpha\varepsilon}) \end{aligned} \quad (12.14)$$

De la même façon, on a

$$\overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta||3} = \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta,3} - \Gamma_{3\alpha}^{\varepsilon} \overset{\circ}{\omega}_{\varepsilon\beta} - \Gamma_{3\beta}^{\varepsilon} \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\varepsilon}$$

et, sur le feuillet moyen,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta} = -\overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta||3} &= \frac{1}{2} (\mathcal{K}_{\beta\alpha} - \mathcal{K}_{\alpha\beta} + b_{\beta}^{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon\alpha} - b_{\alpha}^{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon\beta} - b_{\alpha}^{\varepsilon} (\lambda_{\beta\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon\beta}) \\ &\quad - b_{\beta}^{\varepsilon} (\lambda_{\varepsilon\alpha} - \lambda_{\alpha\varepsilon})) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{K}_{\beta\alpha} - \mathcal{K}_{\alpha\beta} + b_{\beta}^{\varepsilon} \lambda_{\alpha\varepsilon} - b_{\alpha}^{\varepsilon} \lambda_{\beta\varepsilon}) \end{aligned} \quad (12.15)$$

Soustrayant (12.15) de (12.14), on obtient

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta} - \mathcal{S}_{\alpha\beta} + b_{\alpha}^{\varepsilon} \lambda_{\beta\varepsilon} = \chi_{\alpha\beta} - \mathcal{S}_{\alpha\beta} + b_{\alpha}^{\varepsilon} (\overset{\circ}{\theta}_{\beta\varepsilon} - \overset{\circ}{\omega}_{\beta\varepsilon}) \quad (12.16)$$

L'ordre de grandeur des $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$ peut être obtenu à partir des équations de compatibilité de Beltrami (voir annexe). On a en effet

$$\omega_{\alpha\beta||3} = (\varepsilon_{\alpha\beta3} \omega^3)_{||3} = \varepsilon_{\alpha\beta3} \omega^3_{||3} = \varepsilon_{\alpha\beta3} \varepsilon^{3\lambda\mu} \theta_{3\lambda||\mu}$$

Comme

$$\theta_{3\lambda||\mu} = \theta_{3\lambda,\mu} - \Gamma_{\mu 3}^{\varepsilon} \theta_{\varepsilon\lambda} - \Gamma_{\mu \lambda}^{\varepsilon} \theta_{3\varepsilon} - \Gamma_{\mu \lambda}^3 \theta_{33},$$

on obtient, sur le feuillet moyen, en tenant compte de la symétrie des symboles de Christoffel par rapport à leurs indices extrêmes,

$$\overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta||3} = \varepsilon_{\alpha\beta3} \varepsilon^{3\lambda\mu} (\overset{\circ}{\theta}_{3\lambda,\mu} + b_{\mu}^{\varepsilon} \overset{\circ}{\theta}_{\varepsilon\lambda}) \quad (12.17)$$

$$\text{O.G.} \quad \quad \quad \delta/L \quad \quad \delta/R$$

soit

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta} = O(\delta/L, \delta/R). \quad (12.18)$$

Notons en passant que la relation (12.17) implique qu'en raison de la courbure de la coque, la torsion transversale $\overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta||3}$ n'est pas nulle en théorie linéaire de Kirchhoff-Love, contrairement à ce qui se produit en théorie des plaques /16/.

12.2 - Simplification des déformations du feuillet moyen

L'ordre de grandeur des $\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta}$ se déduit directement de l'équation (11.7) écrite sous la forme suivante:

$$2 \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} = 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} - \lambda^{\mu}_{\cdot\alpha} \lambda_{\mu\beta} - \phi_{\alpha} \phi_{\beta} = O(\delta)$$

$$\text{O.G.} \quad \quad \quad \delta \quad \quad \delta \quad \quad \delta$$

Réécrivant alors $\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta}$ en termes de $\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta}$ et $\overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta}$, on obtient

$$2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = 2 \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} + (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\mu} - \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\alpha}^{\mu}) (\overset{\circ}{\theta}_{\mu\beta} - \overset{\circ}{\omega}_{\mu\beta}) + \phi_{\alpha} \phi_{\beta},$$

$$\text{O.G.} \quad \delta \quad \delta \quad \delta^{\frac{1}{2}} \quad \delta \quad \delta^{\frac{1}{2}} \quad \delta$$

ce qui permet de se limiter à l'expression

$$2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = 2 \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\alpha}^{\mu} \overset{\circ}{\omega}_{\mu\beta} + \phi_{\alpha} \phi_{\beta} + O(\delta^{3/2}) \quad (12.19)$$

qui coïncide avec celle de la théorie de Kirchhoff-Love.

12.3 - Simplification des changements de courbure(*)

Tenant compte de (12.16), on peut mettre les changements de courbure obtenus en (11.17) sous la forme

$$2 \rho_{\alpha\beta} = 2 \chi_{\alpha\beta} + 2 b_{\alpha}^{\varepsilon} \overset{\circ}{\theta}_{\beta\varepsilon} + 2 b_{\beta}^{\varepsilon} \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\varepsilon} + (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\mu} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha}^{\mu}) (\chi_{\mu\beta} - \Sigma_{\mu\beta} + b_{\mu}^{\varepsilon} (\overset{\circ}{\theta}_{\beta\varepsilon} - \overset{\circ}{\omega}_{\beta\varepsilon})) + (\overset{\circ}{\theta}_{\beta}^{\mu} - \overset{\circ}{\omega}_{\beta}^{\mu}) (\chi_{\mu\alpha} - \Sigma_{\mu\alpha} + b_{\mu}^{\varepsilon} (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\varepsilon} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\varepsilon})) - \phi_{\alpha} \pi_{\beta} - \phi_{\beta} \pi_{\alpha} \quad (12.20)$$

En notant χ l'ordre de grandeur de $\chi_{\alpha\beta}$, il en découle

$$\begin{aligned} \chi_{\mu\lambda} & (2 \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\lambda} + (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\mu} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha}^{\mu}) \delta_{\beta}^{\lambda} + (\overset{\circ}{\theta}_{\beta}^{\mu} - \overset{\circ}{\omega}_{\beta}^{\mu}) \delta_{\alpha}^{\lambda}) = \\ \text{O.G.} & \quad 1 \quad \delta \quad \delta^{\frac{1}{2}} \quad \delta \quad \delta^{\frac{1}{2}} \\ & = 2 \rho_{\alpha\beta} - 2 b_{\alpha}^{\varepsilon} \overset{\circ}{\theta}_{\beta\varepsilon} - 2 b_{\beta}^{\varepsilon} \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\varepsilon} + (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\mu} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha}^{\mu}) (-\Sigma_{\mu\beta} + b_{\mu}^{\varepsilon} (\overset{\circ}{\theta}_{\beta\varepsilon} - \overset{\circ}{\omega}_{\beta\varepsilon})) + (\overset{\circ}{\theta}_{\beta}^{\mu} - \overset{\circ}{\omega}_{\beta}^{\mu}) (-\Sigma_{\mu\alpha} + b_{\mu}^{\varepsilon} (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\varepsilon} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\varepsilon})) - \phi_{\alpha} \pi_{\beta} - \phi_{\beta} \pi_{\alpha} , \\ \text{O.G.} & \quad \delta \quad \delta^{\frac{1}{2}} \quad (\frac{\delta}{L}, \frac{\delta}{R}) \quad \delta/R \quad \delta^{\frac{1}{2}}/R \quad \delta/R \quad \delta/R \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire l'ordre de grandeur des $\chi_{\alpha\beta}$:

$$\chi (1 + \delta^{\frac{1}{2}}) = O(\frac{\delta}{t}, \frac{\delta}{R}, \frac{\delta^{3/2}}{L}, \frac{\delta^{3/2}}{R}, \frac{\delta^2}{L}, \frac{\delta^2}{R}) = O(\delta/t).$$

On constate également que, moyennant une erreur relative $O(\delta^{\frac{1}{2}}, t/R)$, on peut écrire tout simplement

$$\rho_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta} \quad (12.21)$$

Bien plus, comme par (12.14),

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (-p_{\alpha} |_{\beta} - p_{\beta} |_{\alpha} + 2 q b_{\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\varepsilon} (\overset{\circ}{\theta}_{\beta\varepsilon} - \overset{\circ}{\omega}_{\beta\varepsilon}) - b_{\beta}^{\varepsilon} (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\varepsilon} - \overset{\circ}{\omega}_{\alpha\varepsilon}))$$

O.G. $\delta^{\frac{1}{2}}/L \quad \delta^{\frac{1}{2}}/L \quad \delta/R \quad \delta/R \quad \delta^{\frac{1}{2}}/R \quad \delta/R \quad \delta^{\frac{1}{2}}/R$

on ne commet qu'une erreur supplémentaire $O(\delta^{\frac{1}{2}} \frac{L}{R})$ en valeur relative en écrivant

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (-p_{\alpha} |_{\beta} - p_{\beta} |_{\alpha} - b_{\alpha}^{\varepsilon} \overset{\circ}{\omega}_{\varepsilon\beta} - b_{\beta}^{\varepsilon} \overset{\circ}{\omega}_{\varepsilon\alpha}) \quad (12.22)$$

(*) C'est par commodité que nous continuons de donner le nom de changements de courbure aux $\rho_{\alpha\beta}$, bien qu'il s'agisse évidemment d'un abus de langage, du fait des déformations dues aux efforts tranchants (les normales deviennent obliques dans la déformation)

12.4 - Simplification des déformations de cisaillement transversal

L'expression (11.11) des déformations de cisaillement transversal peut être transformée en

$$2 \gamma_{\alpha 3} = p_{\alpha} + (\overset{\circ}{\theta}_{\alpha}^{\mu} - \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\alpha}^{\mu}) p_{\mu} + \phi_{\alpha} + q \phi_{\alpha}$$

O.G. $\gamma^{\frac{1}{2}} \quad \gamma \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \quad \gamma^{3/2}$

En ne retenant que les termes d'un ordre de grandeur au moins égal à γ , on obtient

$$2 \gamma_{\alpha 3} = (\delta_{\alpha}^{\mu} - \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\alpha}^{\mu}) p_{\mu} + \phi_{\alpha} \quad (12.23)$$

12.5 - Remarque

Aucune des déformations précédentes ne contient plus la variable q . Comme la condition $\gamma_{33} = 0$ permet en principe d'éliminer q en termes des p^{α} , elle peut être omise dans la formulation, ce qui équivaut en quelque sorte à la remplacer par la condition $q = 0$.

12.6 - Passage à la théorie de Kirchhoff-Love

Montrons que les déformations ci-dessus se ramènent aux expressions de la section 7 lorsque les conditions de Kirchhoff-Love sont imposées. Ces conditions s'écrivent, par (12.17),

$$(\delta_{\alpha}^{\mu} - \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\alpha}^{\mu}) p_{\mu} = - \phi_{\alpha} \quad (12.24)$$

On obtient par dérivation

$$-\overset{\circ}{\omega}_{\mu\alpha|\lambda} p^{\mu} + (\delta_{\alpha}^{\mu} - \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\alpha}^{\mu}) p_{\mu|\lambda} = - \phi_{\alpha|\lambda} \quad (12.25)$$

Or, par l'équation (4.24), qui reste valable ici car elle ne fait appel qu'aux déformations du feuillet moyen, on a

$$\overset{\circ}{\omega}_{\mu\alpha|\lambda} = \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\lambda|\mu} - \overset{\circ}{\theta}_{\lambda\mu|\alpha} + b_{\alpha\lambda} \phi_{\mu} - b_{\lambda\mu} \phi_{\alpha} = O(\gamma^{\frac{1}{2}}/R, \gamma/L), \quad (12.26)$$

si bien que le premier terme du premier membre de (12.25) est d'ordre $(\gamma/R, \gamma^{3/2}/L)$, négligeable devant le second membre $O(\gamma^{\frac{1}{2}}/L)$.

Notant que

$$((\delta - \overset{\circ}{\omega})^{-1})_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\beta}^{\alpha} + O(\omega^2) = \delta_{\beta}^{\alpha} + \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\beta}^{\alpha} + O(\gamma),$$

on obtient alors

$$p_{\beta|\lambda} = - (\delta_{\beta}^{\alpha} + \overset{\circ}{\omega}_{\cdot\beta}^{\alpha}) \phi_{\alpha|\lambda} + O(\gamma^{3/2}/L) \quad (12.27)$$

soit

$$p_{\beta|\lambda} = - \phi_{\beta|\lambda} + O(\gamma/L). \quad (12.28)$$

Bien plus, si la rotation $\overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta}$ s'annule en un point au moins de la coque, il suit de (12.26) que

$$\overset{\circ}{\omega}_{\alpha\beta} = O\left(\gamma^{\frac{1}{2}} \frac{L}{R}, \gamma\right),$$

d'où

$$p_{\beta|\lambda} = -\phi_{\beta|\lambda} + O(\gamma/R). \quad (12.28')$$

Au total, on obtient alors

$$p_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha|\beta} + \phi_{\beta|\alpha} - b_{\alpha}^{\varepsilon} \overset{\circ}{\omega}_{\varepsilon\beta} - b_{\beta}^{\varepsilon} \overset{\circ}{\omega}_{\varepsilon\alpha}) + O(\gamma/R), \quad (12.29)$$

c'est-à-dire que l'on retrouve l'expression (7.14).

13. REINTERPRETATION ET GENERALISATION DE LA THEORIE DES COQUES
QUASI-PLANES DE MARGUERRE

13.1 - Introduction

Nous avons déjà développé la théorie de Marguerre dans le cas des coques de Kirchhoff-Love en section 9. Le point de vue adopté consistait à partir des équations exactes en composantes cartésiennes et à simplifier les expressions obtenues à partir de la notion de plan de référence. On peut donner deux autres interprétations de cette théorie, que nous développerons ici en prenant en compte les déformations dues aux efforts tranchants.

13.2 - Coques de Marguerre comme cas particuliers des pseudo-coques

Si dans les expressions (10.25) à (10.27) relatives aux pseudo-coques, on pose d'une part

$$\underline{r} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + h \underline{e}_3 \quad (13.1)$$

et, d'autre part,

$$\underline{n}^* = \underline{e}_3, \quad (13.2)$$

approchant ainsi la normale à la coque par la normale au plan de référence, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + h_{,\alpha} w_{,\beta} + h_{,\beta} w_{,\alpha} + u_{i,\alpha} u_{i,\beta} \\ 2 \rho_{\alpha\beta} = - p_{\alpha,\beta} - p_{\beta,\alpha} - h_{,\alpha} p_{3,\beta} - h_{,\beta} p_{3,\alpha} - u_{i,\alpha} p_{i,\beta} - u_{i,\beta} p_{i,\alpha} \\ 2 \gamma_{\alpha 3} = p_{\alpha} + h_{,\alpha} p_3 + w_{,\alpha} + u_{i,\alpha} p_i \\ 2 \gamma_{33} = p_3 + p_i p_i \end{array} \right. \quad (13.3)$$

Dans le cadre des rotations modérées, tous les gradients de déplacements sont d'ordre $\gamma^{\frac{1}{2}}$ au plus, c'est-à-dire que

$$u_{i,\alpha} \leq O(\gamma^{\frac{1}{2}}) \quad ; \quad p_i \leq O(\gamma^{\frac{1}{2}}) \quad ; \quad w_{,\alpha} \leq O(\gamma^{\frac{1}{2}}) .$$

Il n'en découle aucune simplification dans $\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta}$. Par contre, en examinant l'expression de γ_{33} , on obtient

$$p_3 = O(\gamma) .$$

A partir de l'expression de $\gamma_{\alpha 3}$, on obtient, si $h_{,\alpha} = O(P) \ll 1$,

$$p_{\alpha} = - w_{,\alpha} + O(\gamma, P\gamma)$$

d'où

$$p_{\alpha,\beta} = -w_{,\alpha\beta} + O(\gamma/L, P\gamma/L) \quad (13.5)$$

et

$$p_{\alpha,\beta} + p_{\beta,\alpha} = -2w_{,\alpha\beta} + O(\gamma/L, P\gamma/L) = O(\gamma^{1/2}/L) \quad (13.6)$$

Introduisant ce résultat dans l'expression de $p_{\alpha\beta}$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\rho_{\alpha\beta} = & -p_{\alpha,\beta} - p_{\beta,\alpha} - u_{i,\alpha} p_{i,\beta} - u_{i,\beta} p_{i,\alpha} - h_{,\alpha} p_{3,\beta} - h_{,\beta} p_{3,\alpha} \\ 0.G & \quad \gamma^{1/2}/L \quad \gamma^{1/2}/L \quad \gamma/L \quad \gamma/L \quad \gamma^P/L \quad \gamma^P/L \end{aligned}$$

Il est donc licite de négliger les termes non linéaires et les termes contenant les dérivées de h , ce qui donne

$$2\rho_{\alpha\beta} = -p_{\alpha,\beta} - p_{\beta,\alpha} \quad (13.7)$$

L'expression de $\gamma_{\alpha 3}$ devient, quant à elle,

$$2\gamma_{\alpha 3} = p_{\alpha} + w_{,\alpha} + u_{\beta,\alpha} p_{\beta} + O(\gamma^{3/2}, \gamma^P) \quad (13.8)$$

On remarquera que p_3 n'apparaît plus dans ces expressions, ce qui dispense de prendre en compte la condition $\gamma_{33} = 0$.

Le passage à la théorie de Kirchhoff est aisé: partant de (13.5), on obtient, avec la même approximation que ci-dessus, soit $O(\gamma^{1/2}, P\gamma^{1/2})$ en valeur relative,

$$p_{\alpha\beta} = w_{,\alpha\beta} \quad (13.7')$$

13.3 - Généralisation de la théorie de Marguerre à partir de la théorie des pseudo-coques

L'idée émise en section 9 consistait à appliquer séparément la théorie de Marguerre à des éléments ayant chacun leur plan de référence. On se heurtait alors à l'impossibilité de raccorder correctement les feuilletés moyens de deux éléments adjacents. Examinons ce problème en détail. Si ψ est l'angle dièdre que forment deux éléments, le bâillement a pour ordre de grandeur ψh (fig. 13.1). Par ailleurs, il est aisé de constater (fig. 13.2) que l'angle et les pentes de la coque par rapport au plan de référence ont le même ordre de grandeur:

$$\psi = O(1/R) \quad , \quad P = O(1/R) \quad , \quad (13.9)$$

l mesurant la taille des éléments. La grandeur du bâillement est donc

$$\psi h = O(P^h)$$

et, comme

$$h = O(1/P),$$

on a

$$\psi h = O(P^2).$$

Pour combler ce vide, on peut ajouter aux variations de position $h_3 \underline{e}_3$ des termes selon \underline{e}_1 et \underline{e}_2 dans chaque élément, c'est-à-dire poser

$$\underline{r} = (x_1 + h_1) \underline{e}_1 + (x_2 + h_2) \underline{e}_2 + h_3 \underline{e}_3. \quad (13.10)$$

La variation relative de longueur dans le plan de référence devra être d'ordre

$$\frac{\psi h}{1} = O(P^2), \quad (13.11)$$

ce qui permet d'affirmer que la pseudo-déformation correspondante, définie par

$$\overline{\delta}_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} (h_{\alpha,\beta} + h_{\beta,\alpha} + h_{i,\alpha} h_{i,\beta}) \quad (13.12)$$

vérifiera

$$\overline{\delta}_{\alpha\beta}^0 = O(P^2). \quad (13.13)$$

Nous supposons du reste que le vecteur h a son gradient d'ordre P :

$$h_{i,\alpha} \leq O(P). \quad (13.14)$$

La définition précise de la géométrie se fera à partir d'un certain nombre de noeuds, de la même façon que pour les éléments paramétriques (fig. 13.3). Posant, comme plus haut, $\underline{n}^* = \underline{e}_3$, on obtient, à partir des équations des pseudo-coques,

$$\begin{aligned} 2 \overline{\delta}_{\alpha\beta}^0 &= u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + h_{i,\alpha} u_{i,\beta} + h_{i,\beta} u_{i,\alpha} + u_{i,\alpha} u_{i,\beta} \\ 2 \rho_{\alpha\beta} &= -p_{\alpha,\beta} - p_{\beta,\alpha} - h_{i,\alpha} p_{i,\beta} - h_{i,\beta} p_{i,\alpha} - u_{i,\alpha} p_{i,\beta} - u_{i,\beta} p_{i,\alpha} \\ 2 \gamma_{\alpha 3} &= p_{\alpha} + h_{i,\alpha} p_i + w_{,\alpha} + u_{i,\alpha} p_i \\ 2 \gamma_{33} &= 2 p_3 + p_i p_i = 0 \end{aligned} \quad (13.15)$$

Dans le cadre des rotations modérées, une simple inspection de γ_{33} donne

$$p_3 = O(\gamma). \quad (13.16)$$

Examinons alors les ordres de grandeur des différents termes qui composent $\gamma_{\alpha 3}$:

$$2 \gamma_{\alpha 3} = p_{\alpha} + h_{i,\alpha} p_i + w_{,\alpha} + u_{i,\alpha} p_i$$

$$\text{O.G.} \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \quad P \gamma^{\frac{1}{2}} \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \quad \gamma$$

Ceci entraîne

$$p_{\alpha} + h_{i,\alpha} p_i = -w_{,\alpha} + O(\gamma) \quad (13.17)$$

Par dérivation, on obtient

$$p_{\alpha,\beta} + h_{i,\alpha\beta} p_i + h_{i,\alpha} p_{i,\beta} = -w_{,\alpha\beta} + O(\gamma/L) \quad (13.18)$$

On peut évaluer l'ordre de grandeur des dérivées secondes du vecteur \underline{h} de la manière suivante: de (13.12) et (13.13), on déduit

$$\bar{\theta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h_{\alpha,\beta} + h_{\beta,\alpha}) = O(P^2) \quad ;$$

or, il est aisé de vérifier l'identité

$$h_{\lambda,\alpha\beta} = \bar{\theta}_{\lambda\alpha,\beta} + \bar{\theta}_{\beta\lambda,\alpha} - \bar{\theta}_{\alpha\beta,\lambda}$$

qui entraîne visiblement

$$h_{\lambda,\alpha\beta} = O(P^2/L) = O(1/R^2) = O(P/R) \quad (13.19)$$

Par ailleurs, les vecteurs de base de la coque ont pour expressions

$$\begin{cases} \underline{\tilde{a}}_1 = (1 + h_{1,1}) \underline{\tilde{e}}_1 + h_{2,1} \underline{\tilde{e}}_2 + h_{3,1} \underline{\tilde{e}}_3 \\ \underline{\tilde{a}}_2 = h_{1,2} \underline{\tilde{e}}_1 + (1 + h_{2,2}) \underline{\tilde{e}}_2 + h_{3,2} \underline{\tilde{e}}_3 \end{cases} \quad (13.20)$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{a}}_1 \times \underline{\tilde{a}}_2 &= (h_{2,1} h_{3,2} - h_{3,1}(1 + h_{2,2})) \underline{\tilde{e}}_1 + (h_{3,1} h_{1,2} - h_{3,2}(1 + h_{1,1})) \underline{\tilde{e}}_2 \\ &\quad + ((1 + h_{1,1})(1 + h_{2,2}) - h_{1,2} h_{2,1}) \underline{\tilde{e}}_3 \end{aligned}$$

ou encore,

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{a}}_1 \times \underline{\tilde{a}}_2 &= -(h_{3,1} + O(P^2)) \underline{\tilde{e}}_1 - (h_{3,2} + O(P^2)) \underline{\tilde{e}}_2 \\ &\quad + (1 + h_{1,1} + h_{2,2} + O(P^2)) \underline{\tilde{e}}_3 \end{aligned}$$

Il vient donc

$$a^{\frac{1}{2}} = \|\underline{\tilde{a}}_1 \times \underline{\tilde{a}}_2\| = 1 + h_{1,1} + h_{2,2} + O(P^2)$$

et

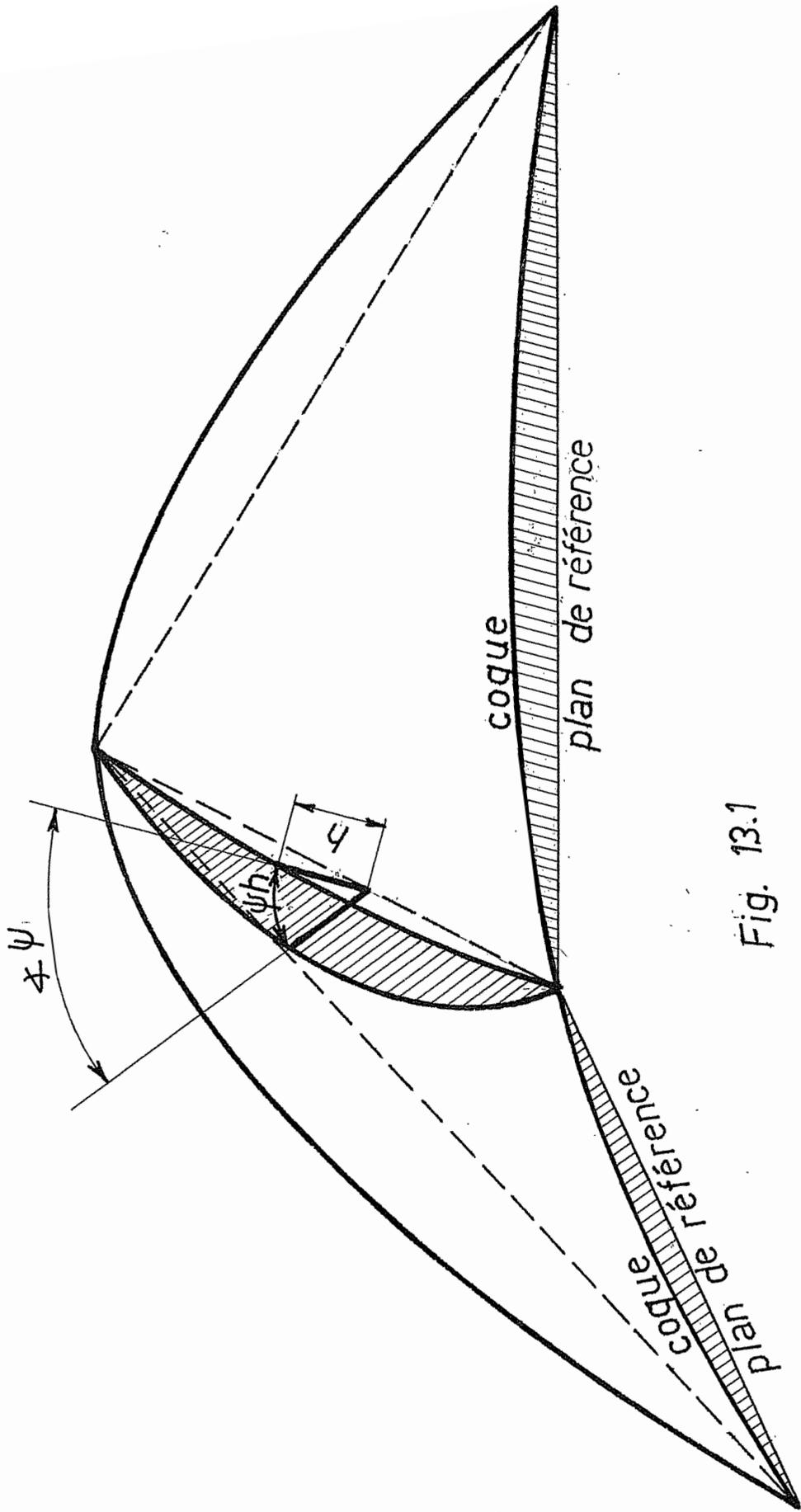


Fig. 13.1

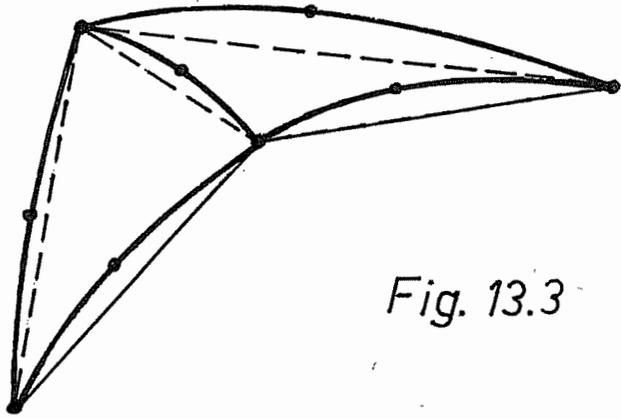


Fig. 13.3

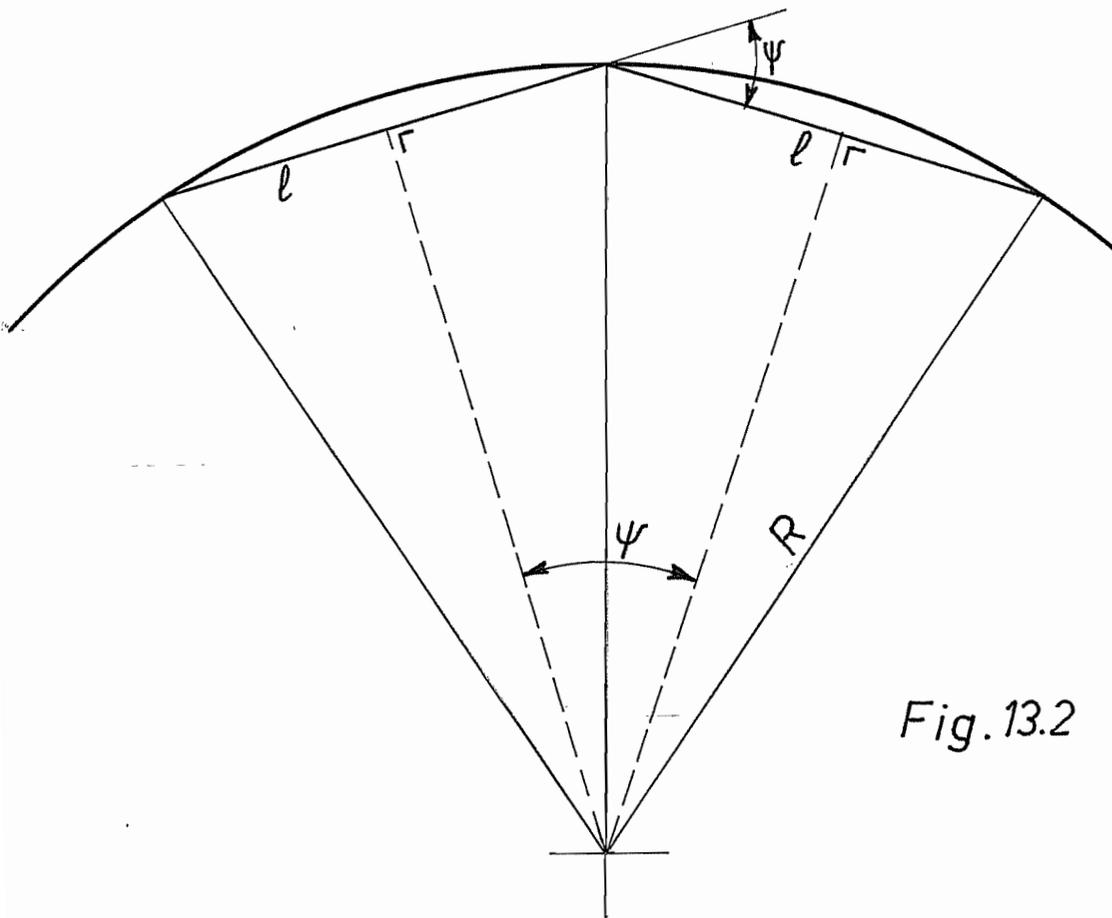


Fig. 13.2

$$\tilde{n} = \frac{\tilde{a}_1 \times \tilde{a}_2}{\sqrt{a}} = - (h_{3,1} + O(P^2)) \tilde{e}_1 - (h_{3,2} + O(P^2)) \tilde{e}_2 + (1 + O(P^2)) \tilde{e}_3$$

(13.20 bis)

Comme, d'autre part, (13.20) implique

$$\tilde{r}_{,\alpha\beta} = h_{1,\alpha\beta} \tilde{e}_1 + h_{2,\alpha\beta} \tilde{e}_2 + h_{3,\alpha\beta} \tilde{e}_3 \quad ,$$

on a

$$b_{\alpha\beta} = \tilde{n} \cdot \tilde{r}_{,\alpha\beta} = - (h_{3,1} + O(P^2)) h_{1,\alpha\beta} - (h_{3,2} + O(P^2)) h_{2,\alpha\beta} + (1 + O(P^2)) h_{3,\alpha\beta} \quad ,$$

et, par conséquent,

$$(1 + O(P^2)) h_{3,\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + (h_{3,1} + O(P^2)) h_{1,\alpha\beta} + (h_{3,2} + O(P^2)) h_{2,\alpha\beta} \quad .$$

Comme (voir 13.19) les deux derniers termes du second membre sont d'ordre P^2/R ; que $b_{\alpha\beta} = O(1/R)$, il vient

$$h_{3,\alpha\beta} = O(1/R) \quad (13.21)$$

Introduisant les résultats (13.19) et (13.21) dans (13.18), on obtient

$$p_{\alpha,\beta} + h_{i,\alpha} p_{i,\beta} = - \frac{w_{,\alpha\beta}}{\gamma^{1/2}/L} - \frac{h_{\lambda,\alpha\beta} p_\lambda}{P \gamma^{1/2}/L} - \frac{h_{3,\alpha\beta} p_3}{\gamma/R} + O(\gamma/L) \quad (13.22)$$

O.G.

ce qui signifie que le premier membre est d'ordre $\gamma^{1/2}/L$. La symétrie du second membre de (13.22) par rapport aux indices α et β implique que, à $(\gamma/R, \gamma/L)$ près, le premier membre est symétrique par rapport à ces mêmes indices. Dans l'expression de $p_{\alpha\beta}$, on a donc les ordres de grandeur suivants:

$$2\rho_{\alpha\beta} = - \frac{p_{\alpha,\beta} - p_{\beta,\alpha} - h_{i,\alpha} p_{i,\beta} - h_{i,\beta} p_{i,\alpha} - u_{i,\alpha} p_{i,\beta} - u_{i,\beta} p_{i,\alpha}}{\gamma^{1/2}/L} + \frac{\gamma/L}{\gamma/L} + \frac{\gamma/L}{\gamma/L}$$

O.G.

ce qui permet d'écrire, à $O(\gamma^{1/2})$ près,

$$2\rho_{\alpha\beta} = - p_{\alpha,\beta} - p_{\beta,\alpha} - h_{i,\alpha} p_{i,\beta} - h_{i,\beta} p_{i,\alpha} \quad (13.23)$$

ou, plus simplement encore, comme $p_3 = O(\gamma)$,

$$2\rho_{\alpha\beta} = - p_{\alpha,\beta} - p_{\beta,\alpha} - h_{\lambda,\alpha} p_{\lambda,\beta} - h_{\lambda,\beta} p_{\lambda,\alpha} \quad (13.24)$$

avec, cette fois, une erreur relative $O(\gamma^{1/2}, P \gamma^{1/2})$. L'expression simplifiée de $\gamma_{\alpha\beta}$ est, quant à elle,

$$2 \gamma_{\alpha\beta} = p_\alpha + h_{\lambda,\alpha} p_\lambda + w_{,\alpha} + u_{\lambda,\alpha} p_\lambda + O(P \gamma, \gamma^{3/2}) \quad (13.25)$$

13.4 - Passage à la théorie de Kirchhoff-Love

Le passage à la théorie de Kirchhoff-Love demande un peu plus d'attention si l'on veut que les déplacements rigides linéarisés soient représentés exactement et non pas à $O(P^2)$ près, ce qui serait gênant dans les applications. Posant $\chi_{\alpha 3} = 0$, on a

$$p_{\alpha} + h_{\lambda, \alpha} p_{\lambda} = -w_{, \alpha} + O(\gamma) \quad (13.26)$$

En négligeant le petit terme $O(\gamma)$, cette relation peut être mise sous la forme

$$J_{\lambda \alpha} p_{\lambda} = -w_{, \alpha}$$

où

$$J_{\lambda \alpha} = \delta_{\lambda \alpha} + h_{\lambda, \alpha} \quad (13.28)$$

représente la matrice jacobienne dans le plan. On a donc

$$p_{\lambda} = -J_{\mu \lambda}^{-1} w_{, \mu} \quad (13.29)$$

Dérivant (13.26), on obtient

$$p_{\alpha, \beta} + h_{\lambda, \alpha} p_{\lambda, \beta} = -w_{, \alpha \beta} + h_{\lambda, \alpha \beta} J_{\mu \lambda}^{-1} w_{, \mu} .$$

L'expression (13.24) du changement de courbure devient alors

$$\rho_{\alpha \beta} = w_{, \alpha \beta} - h_{\lambda, \alpha \beta} J_{\mu \lambda}^{-1} w_{, \mu} \quad (13.30)$$

Vérifions que les déplacements rigides donnent bien $\rho_{\alpha \beta} = 0$. Pour les translations d'ensemble, c'est évident. Une rotation linéarisée est de la forme

$$w = e_{3 \varepsilon \pi} \omega_{\varepsilon} (x_{\pi} + h_{\pi}) ,$$

ce qui entraîne

$$w_{, \mu} = e_{3 \varepsilon \pi} \omega_{\varepsilon} (\delta_{\pi \mu} + h_{\pi, \mu}) = e_{3 \varepsilon \pi} \omega_{\varepsilon} J_{\pi \mu}$$

et

$$w_{, \alpha \beta} = e_{3 \varepsilon \pi} \omega_{\varepsilon} h_{\pi, \alpha \beta} ,$$

d'où

$$\rho_{\alpha \beta} = e_{3 \varepsilon \pi} \omega_{\varepsilon} (h_{\pi, \alpha \beta} - h_{\lambda, \alpha \beta} J_{\mu \lambda}^{-1} J_{\pi \mu}) = e_{3 \varepsilon \pi} (h_{\pi, \alpha \beta} - \delta_{\pi \lambda} h_{\lambda, \alpha \beta}) = 0 .$$

On objectera que l'expression (13.30) semble inutilement lourde; que, comme

$$h_{\lambda, \alpha \beta} = O(P/R) , \quad J_{\mu \lambda}^{-1} = \delta_{\mu \lambda} + O(P) ,$$

on pourrait très bien écrire

$$\rho_{\alpha\beta} \approx w_{,\alpha\beta} - h_{\lambda,\alpha\beta} w_{,\lambda} \quad (13.31)$$

Il est bien évident que les déplacements rigides de translation restent représentés. Mais qu'en est-il des rotations d'ensemble? La question se ramène à trouver une solution aux équations $\rho_{\alpha\beta} = 0$, pour laquelle $w_{,\lambda} \neq 0$. Il s'agit donc de résoudre

$$w_{,\alpha\beta} = h_{\lambda,\alpha\beta} w_{,\lambda} \quad , \quad (13.32)$$

ce qui n'est possible que si

$$(w_{,\alpha\beta})_{,\gamma} = (w_{,\alpha\gamma})_{,\beta} \quad ,$$

lorsque l'on calcule ces grandeurs à partir du second membre de (13.32).

Or,

$$(w_{,\alpha\beta})_{,\gamma} = h_{\lambda,\alpha\beta\gamma} w_{,\lambda} + h_{\lambda,\alpha\beta} w_{,\lambda\gamma} \quad ,$$

et, en réintroduisant (13.30),

$$(w_{,\alpha\beta})_{,\gamma} = h_{\lambda,\alpha\beta\gamma} w_{,\lambda} + h_{\lambda,\alpha\beta} h_{\mu,\lambda\gamma} w_{,\mu} \quad .$$

Le premier terme du second membre est visiblement symétrique par rapport aux indices β et γ , ce qui donne

$$(w_{,\alpha\beta})_{,\gamma} - (w_{,\alpha\gamma})_{,\beta} = (h_{\lambda,\alpha\beta} h_{\mu,\lambda\gamma} - h_{\lambda,\alpha\gamma} h_{\mu,\lambda\beta}) w_{,\mu} \quad (13.33)$$

Il n'y a aucune raison pour que la quantité entre parenthèse du second membre s'annule en général. Observons cependant que cette grandeur est $O(P^2/R^2)$ et tend donc vers zéro avec P . Les déplacements rigides sont donc asymptotiquement représentés. Mais il n'en reste pas moins que pour des maillages raisonnables, ils ne sont pas dépourvus d'énergie, ce qui est gênant pour les applications pratiques. Il faut donc préférer l'expression (13.30) à l'expression (13.31).

13.5 - Comparaison avec la théorie des coques de Kirchhoff-Love en composantes cartésiennes

Il est intéressant de comparer les expressions ci-dessus avec celles qui résultent de la théorie des coques profondes en composantes cartésiennes. Moyennant la définition (13.10) de la géométrie, on obtient, à partir de (6.7) la même expression de $\overset{\circ}{\rho}_{\alpha\beta}$ que (13.15). Les déformations du feuillet moyen sont donc exactes. L'expression (8.3) des changements de courbure pour les rotations modérées prend dans notre cas la forme explicite que voici:

$$\begin{aligned}
a^{\frac{1}{2}} \rho_{\alpha\beta}^* &= u_{1,\alpha\beta} (h_{2,1}h_{3,2} - h_{3,1}(1 + h_{2,2})) \\
&+ u_{2,\alpha\beta} (h_{3,1}h_{1,2} - (1 + h_{1,1})h_{3,2}) \\
&+ w_{,\alpha\beta} ((1 + h_{1,1})(1 + h_{2,2}) - h_{2,1}h_{1,2}) \\
&+ h_{1,\alpha\beta} (h_{2,1}w_{,2} - h_{3,1}u_{2,2} + h_{3,2}u_{2,1} - (1 + h_{2,2})w_{,1}) \\
&+ h_{2,\alpha\beta} (h_{3,1}u_{1,2} - (1 + h_{1,1})w_{,2} + h_{1,2}w_{,1} - h_{3,2}u_{1,1}) \\
&+ h_{3,\alpha\beta} ((1 + h_{1,1})u_{2,2} - h_{2,1}u_{1,2} + (1 + h_{2,2})u_{1,1} - h_{1,2}u_{2,1})
\end{aligned} \tag{13.34}$$

Pour simplifier cette expression, nous ferons appel aux faits suivants. Nous avons vu en section 4 que, lors de la déformation, les vecteurs de base se transforment suivant la loi

$$\tilde{a}_{\alpha}^i = a_{\alpha}^i + \lambda_{\alpha}^{\beta} a_{\beta}^i + \phi_{\alpha}^i \tilde{n}^i,$$

ce qui revient à dire que

$$\lambda_{\beta\alpha}^i = a_{\beta}^i \cdot (\tilde{a}_{\alpha}^i - a_{\alpha}^i)$$

et, en coordonnées cartésiennes,

$$\lambda_{\beta\alpha}^i = r_{i,\beta} u_{i,\alpha}.$$

On a alors

$$\tilde{\theta}_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} (\lambda_{\alpha\beta}^0 + \lambda_{\beta\alpha}^0) = \frac{1}{2} (r_{i,\alpha} u_{i,\beta} + r_{i,\beta} u_{i,\alpha})$$

et

$$\tilde{\omega}_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} (\lambda_{\beta\alpha}^0 - \lambda_{\alpha\beta}^0) = \frac{1}{2} (r_{i,\beta} u_{i,\alpha} - r_{i,\alpha} u_{i,\beta}),$$

ce qui permet d'écrire

$$r_{i,\alpha} u_{i,\beta} = \tilde{\theta}_{\alpha\beta}^0 - \tilde{\omega}_{\alpha\beta}^0. \tag{13.35}$$

Dans le cas présent, cette relation s'explique en

$$r_{\lambda,\alpha} u_{\lambda,\beta} + h_{3,\alpha} w_{,\beta} = \tilde{\theta}_{\alpha\beta}^0 - \tilde{\omega}_{\alpha\beta}^0$$

ou encore, en utilisant la matrice jacobienne (13.29),

$$J_{\lambda\alpha}^J u_{\lambda,\beta} + h_{3,\alpha} w_{,\beta} = \tilde{\theta}_{\alpha\beta}^0 - \tilde{\omega}_{\alpha\beta}^0.$$

Multipliant cette relation par $J_{\alpha\mu}^{-1}$, il vient

$$u_{\mu,\beta} = J_{\alpha\mu}^{-1} (\tilde{\theta}_{\alpha\beta}^0 - \tilde{\omega}_{\alpha\beta}^0 - h_{3,\alpha} w_{,\beta}). \tag{13.36}$$

Dans cette expression, le terme $\hat{\theta}_{\alpha\beta}$ peut être négligé. Par ailleurs, la matrice J^{-1} s'écrit explicitement

$$J^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 + h_{2,2} & -h_{1,2} \\ -h_{2,1} & 1 + h_{1,1} \end{bmatrix} \quad (13.37)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 + h_{1,1})(1 + h_{2,2}) - h_{2,1}h_{1,2} \\ &= 1 + h_{1,1} + h_{2,2} + h_{1,1}h_{2,2} - h_{2,1}h_{1,2} = 1 + O(P^2) \end{aligned} \quad (13.38)$$

Les différents termes de (13.34) admettent alors les transformations suivantes:

$$a) u_{1,\alpha\beta} (h_{2,1}h_{3,2} - h_{3,1}(1 + h_{2,2})) = - (h_{3,1} + O(P^2)) u_{1,\alpha\beta}$$

$$b) u_{2,\alpha\beta} (h_{3,1}h_{1,2} - (1 + h_{1,1})h_{3,2}) = - (h_{3,2} + O(P^2)) u_{2,\alpha\beta}$$

$$c) w_{,\alpha\beta} ((1 + h_{1,1})(1 + h_{2,2}) - h_{2,1}h_{1,2}) = \Delta w_{,\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned} d) h_{1,\alpha\beta} (h_{2,1}w_{,2} - h_{3,1}u_{2,2} + h_{3,2}u_{,1} - (1 + h_{2,2})w_{,1}) &= \\ &= h_{1,\alpha\beta} (-\Delta J_{21}^{-1}w_{,} - \Delta J_{11}^{-1}w_{,1} + h_{3,1}J_{\lambda 2}^{-1}(\hat{\omega}_{\lambda 2} + h_{3,\lambda} w_{,2}) \\ &\quad - h_{3,2}J_{\lambda 2}^{-1}(\hat{\omega}_{\lambda 1} + h_{3,\lambda} w_{,1})) \end{aligned}$$

$$= h_{1,\alpha\beta} (-\Delta J_{\lambda 1}^{-1}w_{,\lambda} + \frac{(h_{3,1}J_{12}^{-1} + h_{3,2}J_{22}^{-1})\hat{\omega}_{12}}{P^2})$$

$$\begin{aligned} \text{O.G. } P/R \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \quad \quad \quad P \gamma^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{J_{\lambda 2}^{-1} h_{3,\lambda} (h_{3,1}w_{,2} - h_{3,2}w_{,1})}{P^2 \gamma^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\text{O.G.} \quad \quad \quad P^2 \gamma^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} e) h_{2,\alpha\beta} (h_{3,1}u_{1,2} - (1 + h_{1,1})w_{,2} + h_{1,2}w_{,1} - h_{3,2}u_{1,1}) &= \\ &= h_{2,\alpha\beta} (-\Delta J_{\lambda 2}^{-1}w_{,\lambda} - (h_{3,1}J_{11}^{-1} + h_{3,2}J_{21}^{-1})\hat{\omega}_{12} + \\ &\quad + J_{\lambda 1}^{-1} h_{3,\lambda} (h_{3,1}w_{,2} - h_{3,2}w_{,1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) h_{3,\alpha\beta} ((1 + h_{1,1})u_{2,2} - h_{2,1}u_{1,2} + (1 + h_{2,2})u_{1,1} - h_{1,2}u_{2,1}) &= \\ &= h_{3,\alpha\beta} \Delta J_{\lambda\mu}^{-1} u_{\mu,\lambda} = - h_{3,\alpha\beta} J_{\lambda\mu}^{-1} J_{\varepsilon\mu}^{-1} (\hat{\omega}_{\varepsilon\lambda} + h_{3,\varepsilon} w_{,\lambda}) \\ &= - h_{3,\alpha\beta} \Delta J_{\lambda\mu}^{-1} J_{\varepsilon\mu}^{-1} h_{3,\varepsilon} w_{,\lambda} , \end{aligned}$$

du fait que $J_{\lambda\mu}^{-1} J_{\varepsilon\mu}^{-1}$ est symétrique par rapport à λ et ε . Notant que

$$J_{\lambda\mu}^{-1} J_{\varepsilon\mu}^{-1} = \delta_{\lambda\varepsilon} + O(P),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}^* = \Delta (w_{,\alpha\beta} - h_{\mu,\alpha\beta} J_{\lambda\mu}^{-1} w_{,\lambda}) - h_{3,\lambda} (u_{\lambda,\alpha\beta} + h_{3,\alpha\beta} w_{,\lambda}) \\ + O(P^2 \gamma^{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (13.38)$$

Par rapport à l'expression (13.30), on constate d'abord l'apparition d'un facteur Δ , égal à 1 à $O(P^2)$ près et, par conséquent, négligeable. En outre, les termes

$$- h_{3,\lambda} (u_{\lambda,\alpha\beta} + h_{3,\alpha\beta} w_{,\lambda})$$

n'ont pas leur équivalent dans (13.30), mais nous allons montrer qu'ils sont très petits. En effet,

$$2 \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + h_{\lambda,\alpha} u_{\lambda,\beta} + h_{\lambda,\beta} u_{\lambda,\alpha} + h_{3,\alpha} u_{3,\beta} + h_{3,\beta} u_{3,\alpha} = O(\gamma)$$

Dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} 2 \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta,\gamma} = u_{\alpha,\beta\gamma} + u_{\beta,\alpha\gamma} + h_{\lambda,\alpha\gamma} u_{\lambda,\beta} + h_{\lambda,\alpha} u_{\lambda,\beta\gamma} + h_{\lambda,\beta\gamma} u_{\lambda,\alpha} + h_{\lambda,\beta} u_{\lambda,\alpha\gamma} \\ + h_{3,\alpha\gamma} u_{3,\beta} + h_{3,\alpha} u_{3,\beta\gamma} + h_{3,\beta\gamma} u_{3,\alpha} + h_{3,\beta} u_{3,\alpha\gamma}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta,\gamma} + \overset{\circ}{\theta}_{\gamma\alpha,\beta} - \overset{\circ}{\theta}_{\beta\gamma,\alpha} = u_{\alpha,\beta\gamma} + h_{\lambda,\alpha} u_{\lambda,\beta\gamma} + h_{\lambda,\beta\gamma} u_{\lambda,\alpha} + h_{3,\alpha} w_{,\beta\gamma} + h_{3,\gamma\beta} w_{,\alpha},$$

relation qui implique

$$\begin{aligned} u_{\alpha,\beta\gamma} + h_{3,\beta\gamma} w_{,\alpha} = O(\gamma/L) - h_{\lambda,\alpha} u_{\lambda,\beta\gamma} - h_{\lambda,\beta\gamma} u_{\lambda,\alpha} - h_{3,\alpha} w_{,\beta\gamma} \\ \text{O.G.} \qquad \qquad \qquad P \gamma^{\frac{1}{2}}/L \qquad \qquad P \gamma^{\frac{1}{2}}/R \qquad \qquad P \gamma^{\frac{1}{2}}/L \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$- h_{3,\lambda} (u_{\lambda,\alpha\beta} + h_{3,\alpha\beta} w_{,\lambda}) = O(P \gamma/L, P^2 \gamma^{\frac{1}{2}}/L, P^2 \gamma^{\frac{1}{2}}/R).$$

et, finalement,

$$\rho_{\alpha\beta}^* = w_{,\alpha\beta} - h_{\mu,\alpha\beta} J_{\lambda\mu}^{-1} w_{,\lambda} + O(P^2 \gamma^{\frac{1}{2}}/L, P^2 \gamma^{\frac{1}{2}}/R, \gamma/R, P \gamma/L) \quad (13.39)$$

Ce résultat signifie que la théorie de Marguerre généralisée ne commet, outre l'erreur due à l'hypothèse des rotations modérées, qu'une erreur $O(P^2)$ sur les déformations.

13.6 - Evaluation générale de l'erreur de la théorie

Restant dans le cadre de la théorie de Kirchhoff-Love et des rotations modérées, nous savons déjà que les déformations du feuillet moyen sont exactes, tandis que les changements de courbure sont en erreur de $O(P^2)$. Il reste à examiner les équations constitutives. En se limitant au cas isotrope et homogène sur l'épaisseur, on a, par (3.16),

$$c^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left((1 - \nu) a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + \nu a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right).$$

Comme

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha,\beta} + h_{\beta,\alpha} + h_{i,\alpha} h_{i,\beta} = \delta_{\alpha\beta} + O(P^2),$$

on a

$$c^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left((1 - \nu) \delta^{\alpha\lambda} \delta^{\beta\mu} + \nu \delta^{\alpha\beta} \delta^{\lambda\mu} \right) + O(P^2 E),$$

ce qui signifie que les lois constitutives de la plaque ne sont en erreur que de $O(P^2)$. De plus, le facteur $a^{\frac{1}{2}}$ qui intervient dans le calcul de la surface vaut $1 + O(P^2)$. L'erreur d'énergie est donc au total $O(P^2)$. Ceci signifie que dans les applications par éléments finis, on commet, outre la classique erreur de discrétisation qui décroît selon une certaine puissance l^k de la dimension de l'élément, une erreur de formulation d'ordre P^2 qui, comme $P = O(1/R)$, décroît comme l^2 .

Si l'on tient compte de la déformation due à l'effort tranchant, il apparaît dans $\gamma_{\alpha 3}$ une erreur $O(P\gamma)$ et les lois constitutives de la plaque sont entachées d'une erreur $O(P)$, puisque $g_{\alpha 3} = O(P)$. Il est cependant vraisemblable que cette erreur soit finalement infime, du fait de la petitesse de la contribution des termes de cisaillement. On peut en tout cas faire la remarque suivante: tant que l'on reste dans le cadre des rotations modérées, les seuls termes de $\gamma_{\alpha 3}$ qui soient nécessaires à la prise en compte approchée de la condition de Kirchhoff-Love sont

$$\tilde{\gamma}_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (p_{\alpha} + h_{\lambda,\alpha} p_{\lambda} + w_{,\alpha}) \quad , \quad (13.40)$$

c'est-à-dire que l'on peut négliger le terme non linéaire de (13.25).

Si l'on considère - et c'est le cas chaque fois que la coque est mince - que les termes de cisaillement constituent en fait une forme de pénalisation de la condition de Kirchhoff-Love, il devient évident que l'on peut se limiter à l'expression

$$G^{\alpha\beta} + \tilde{\gamma}_{\alpha 3} \tilde{\gamma}_{\beta 3}$$

sans affecter sensiblement la solution.

13.7 - Connexion des éléments établis suivant la théorie de Marguerre généralisée

Si l'on tient compte de la déformation due aux efforts tranchants, les variables à connecter sont les déplacements et les deux composantes non normales de la rotation. Pour étudier le cas de la théorie de Kirchhoff-Love, on pourra supposer que la coordonnée x^2 est tangente à l'interface, x^1 variant suivant la normale à celle-ci. Dès lors, la donnée de w sur l'interface fixe $w_{,2}$. En vertu de la relation (13.26), on a

$$\begin{cases} w_{,1} = J_{11} p_1 + J_{21} p_2 \\ w_{,2} = J_{12} p_1 + J_{22} p_2 \end{cases} .$$

On a donc, comme $J_{22} = 1 + h_{2,2} \neq 0$,

$$p_2 = (1/J_{22}) w_{,2} - (J_{12}/J_{22}) p_1$$

et, par conséquent,

$$w_{,1} = (J_{11} - \frac{J_{21}J_{12}}{J_{22}}) p_1 + \frac{J_{21}}{J_{22}} w_{,2} .$$

On constate donc que la donnée de la seule rotation p_1 entraîne la connaissance complète du gradient de w ainsi que celle de p_2 . La connexion devra donc se limiter à la rotation

$$p_1 = - J_{\mu 1}^{-1} w_{,\mu} .$$

Dans un système de coordonnées quelconques, c'est

$$p_\nu = - \nu_\varepsilon J_{\mu\varepsilon}^{-1} w_{,\mu} \quad (13.41)$$

que l'on connectera.

13.8 - Notion de déplacement fictif initial

La formule (13.10) suggère que l'on peut considérer le vecteur \underline{h} comme un déplacement fictif qui, de la plaque de départ,

fait passer à la coque. Ce point de vue a l'avantage d'être très proche de l'intuition physique puisque, par exemple, c'est bien ainsi que les choses se passent dans le processus d'emboutissage. Partant de la métrique de la plaque, on arrive ainsi à la métrique de la coque

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 2 \bar{\gamma}_{ij} \quad (13.42)$$

où $\bar{\gamma}_{ij}$ représente la déformation due aux déplacements fictifs initiaux. La somme du déplacement fictif initial (que nous noterons pour la généralité \bar{u}_i) et du déplacement élastique u_i donne le déplacement total u_i^{tot} auquel correspond la déformation totale

$$\gamma_{ij}^{\text{tot}} = \frac{1}{2} ((\bar{u}_i + u_i)_{,j} + (\bar{u}_j + u_j)_{,i} + (\bar{u}_m + u_m)_{,i} (\bar{u}_m + u_m)_{,j}) \quad (13.43)$$

et la métrique finale

$$\varepsilon'_{ij} = \delta_{ij} + 2 \gamma_{ij}^{\text{tot}} \quad (13.44)$$

Les déformations élastiques sont donc données par

$$2 \gamma_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij} = 2 \gamma_{ij}^{\text{tot}} - 2 \bar{\gamma}_{ij} \quad (13.45)$$

Ce point de vue, exposé dans /7/ et /17/, dépasse d'ailleurs largement le cadre de la théorie des coques et constitue en fait une véritable théorie des perturbations géométriques en élasticité. Il peut, par exemple, être appliqué pour construire une théorie des coques quasi-coniques, coques à double courbure obtenues à partir des coques coniques /7, 17, voir également § 15/, une théorie des poutres faiblement vrillées /18/, etc.... En ce qui concerne les coques quasi-planes, ce point de vue nous semble plus proche des vues de Marguerre, telles qu'exposées en /6/, que la dérivation faite plus haut. Voyons comment cette idée s'applique au problème qui nous préoccupe. Pour un champ de déplacements de la forme

$$v_i = u_i + x^3 p_i \quad ,$$

les déformations d'une plaque s'écrivent

$$\gamma_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} - x^3 \rho_{\alpha\beta} + (x^3)^2 \psi_{\alpha\beta} \quad (13.46)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{i,\alpha} u_{i,\beta} \\ - 2 \rho_{\alpha\beta} = - p_{\alpha,\beta} - p_{\beta,\alpha} - u_{i,\alpha} p_{i,\beta} - u_{i,\beta} p_{i,\alpha} \\ 2 \psi_{\alpha\beta} = p_{i,\alpha} p_{i,\beta} \end{array} \right. \quad (13.47)$$

et

$${}^2 \gamma_{\alpha 3} = p_{,\alpha} + w_{,\alpha} + u_{i,\alpha} p_i \quad , \quad (13.48)$$

en tenant compte de la condition

$${}^2 \gamma_{33} = 2 p_3 + p_i p_i = 0 \quad (13.49)$$

Considérant des déplacements fictifs initiaux h_i constants sur l'épaisseur, c'est-à-dire sans rotations, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^2 \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = h_{\alpha,\beta} + h_{\beta,\alpha} + h_{i,\alpha} h_{i,\beta} \\ {}^2 \bar{p}_{\alpha\beta} = 0 \\ {}^2 \bar{\gamma}_{\alpha 3} = h_{,\alpha} \\ {}^2 \bar{\gamma}_{33} = 0 \end{array} \right. \quad (13.50)$$

La déformation totale, correspondant aux déplacements

$$v_i^{\text{tot}} = h_i + u_i + x^3 p_i \quad ,$$

est alors donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^2 \gamma_{\alpha\beta}^{\text{tot}} = (h_{\alpha} + u_{\alpha})_{,\beta} + (h_{\beta} + u_{\beta})_{,\alpha} + (h_{i,\alpha} + u_{i,\alpha})(h_{i,\beta} + u_{i,\beta}) \\ {}^2 p_{\alpha\beta}^{\text{tot}} = - p_{\alpha,\beta} - p_{\beta,\alpha} - (h_{i,\alpha} + u_{i,\alpha}) p_{i,\beta} - (h_{i,\beta} + u_{i,\beta}) p_{i,\alpha} \\ {}^2 \gamma_{\alpha 3}^{\text{tot}} = p_{\alpha} + h_{3,\alpha} + w_{,\alpha} + (h_{i,\alpha} + u_{i,\alpha}) p_i \\ {}^2 \gamma_{33}^{\text{tot}} = 2 p_3 + p_i p_i \end{array} \right. \quad (13.51)$$

Il est aisé de vérifier que la soustraction de (13.50) à (13.51) donne effectivement les expressions (13.15).

14. COQUES TRONCONIQUES

14.1 - Déplacements rigides des corps de révolution

Les déplacements rigides linéarisés d'une structure quelconque sont de la forme

$$\tilde{u} = \tilde{c} + \tilde{\omega} \times \tilde{s} ,$$

où \tilde{c} et $\tilde{\omega}$ sont deux vecteurs constants et \tilde{s} , le vecteur-position. \tilde{c} représente la translation et $\tilde{\omega}$ est la rotation. En coordonnées cylindriques, la base physique (i.e. normée) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{e}_r = \cos \theta \tilde{e}_x + \sin \theta \tilde{e}_y \\ \tilde{e}_\theta = -\sin \theta \tilde{e}_x + \cos \theta \tilde{e}_y \\ \tilde{e}_z = \tilde{e}_z \end{array} \right.$$

et le vecteur-position s'écrit

$$\tilde{s} = r \tilde{e}_r + z \tilde{e}_z = r \cos \theta \tilde{e}_x + r \sin \theta \tilde{e}_y + z \tilde{e}_z .$$

Les composantes polaires (physiques) du déplacement rigide sont donc

$$U_r = \tilde{u} \cdot \tilde{e}_r = c_x \cos \theta + c_y \sin \theta + \begin{vmatrix} \omega_x & r \cos \theta & \cos \theta \\ \omega_y & r \sin \theta & \sin \theta \\ \omega_z & z & 0 \end{vmatrix} \\ = c_x \cos \theta + c_y \sin \theta - \omega_x z \sin \theta + \omega_y z \cos \theta \quad (14.1)$$

$$U_\theta = \tilde{u} \cdot \tilde{e}_\theta = -c_x \sin \theta + c_y \cos \theta + \begin{vmatrix} \omega_x & r \cos \theta & -\sin \theta \\ \omega_y & r \sin \theta & \cos \theta \\ \omega_z & z & 0 \end{vmatrix} \\ = -c_x \sin \theta + c_y \cos \theta - \omega_x z \cos \theta + \omega_y z \sin \theta \quad (14.2)$$

$$U_z = \tilde{u} \cdot \tilde{e}_z = c_z + \begin{vmatrix} \omega_x & r \cos \theta & 0 \\ \omega_y & r \sin \theta & 0 \\ \omega_z & z & 1 \end{vmatrix} = c_z + \omega_x r \sin \theta - \omega_y r \cos \theta \quad (14.3)$$

Par conséquent, on a le tableau suivant:

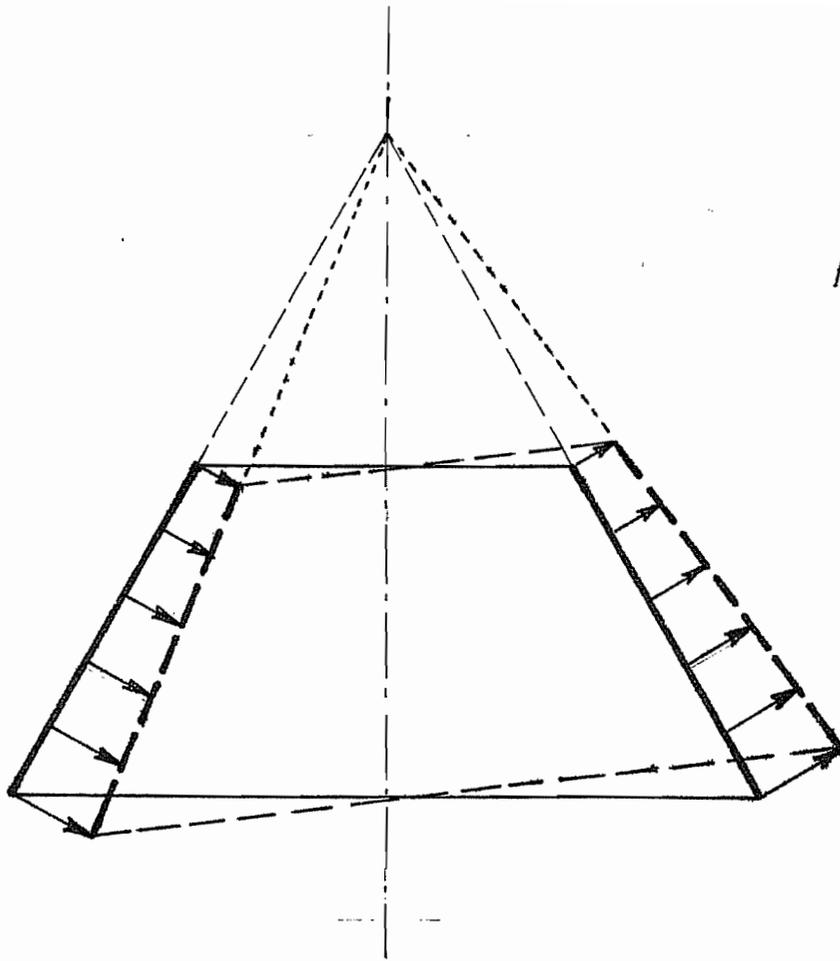


Fig. 14.1

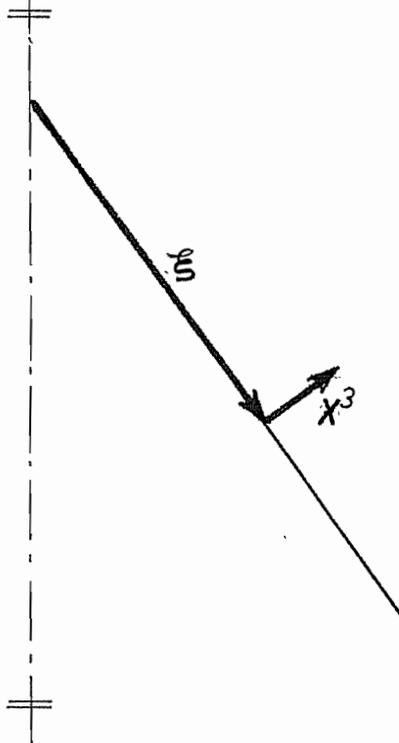


Fig. 14.2

Déplacement rigide	U_r	U_θ	U_z
c_x	$c_x \cos \theta$	$-c_x \sin \theta$	0
c_y	$c_y \sin \theta$	$c_y \cos \theta$	0
c_z	0	0	c_z
ω_x	$-\omega_x z \sin \theta$	$-\omega_x z \cos \theta$	$\omega_x r \sin \theta$
ω_y	$\omega_y z \cos \theta$	$-\omega_y z \sin \theta$	$-\omega_y r \cos \theta$
ω_z	0	$\omega_z r$	0

On constate qu'en développant les déplacements en séries de Fourier sous la forme,

$$\left\{ \begin{array}{l} U_r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^1 U_{r;nm}(r,z) \cos(n\theta + m\frac{\pi}{2}) \\ U_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^1 U_{\theta;nm}(r,z) \sin(n\theta + m\frac{\pi}{2}) \\ U_z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^1 U_{z;nm}(r,z) \cos(n\theta + m\frac{\pi}{2}) \end{array} \right. \quad (14.3)$$

les déplacements rigides sont des harmoniques $n = 0$, $n = 1$, fonctions affines de r et z .

Considérant à présent une coque tronconique (fig. 14.2), les coordonnées de la section méridienne de la coque sont également des fonctions affines de la coordonnée ξ du feuillet moyen et de la coordonnée normale x^3 . Par conséquent, les fonctions

$$A_{nm}(\xi, x^3) = U_{r;nm}(r(\xi, x^3), z(\xi, x^3))$$

$$B_{nm}(\xi, x^3) = U_{\theta;nm}(r(\xi, x^3), z(\xi, x^3))$$

$$C_{nm}(\xi, x^3) = U_{z;nm}(r(\xi, x^3), z(\xi, x^3))$$

sont également affines de ξ et x^3 pour un déplacement rigide. Il en résulte que les coques tronconiques constituent une des rares géométries où il est possible de représenter les déplacements rigides par éléments finis, malgré l'usage des composantes curvilignes. La forme de l'un de ces déplacements est représentée en fig. (14.1).

14.2 - Géométrie des coques tronconiques

L'élément de longueur du feuillet moyen est donné par (fig. 14.3)

$$dr^2 = d\xi^2 + R^2 d\theta^2 \quad (14.4)$$

Fig. 14.3

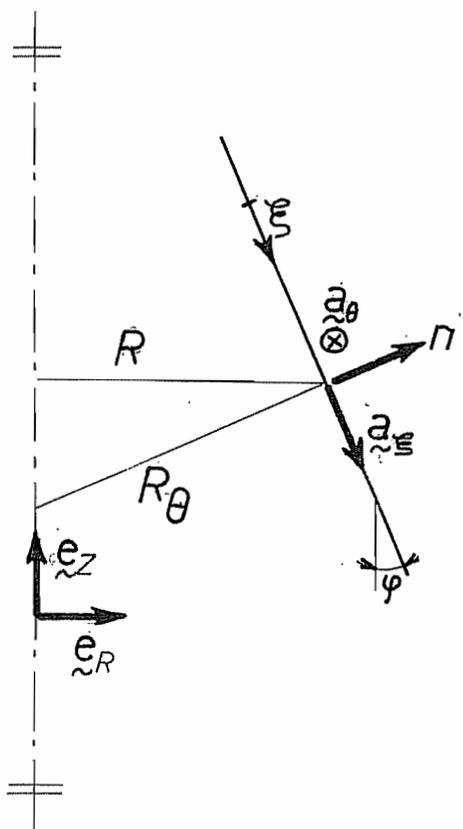
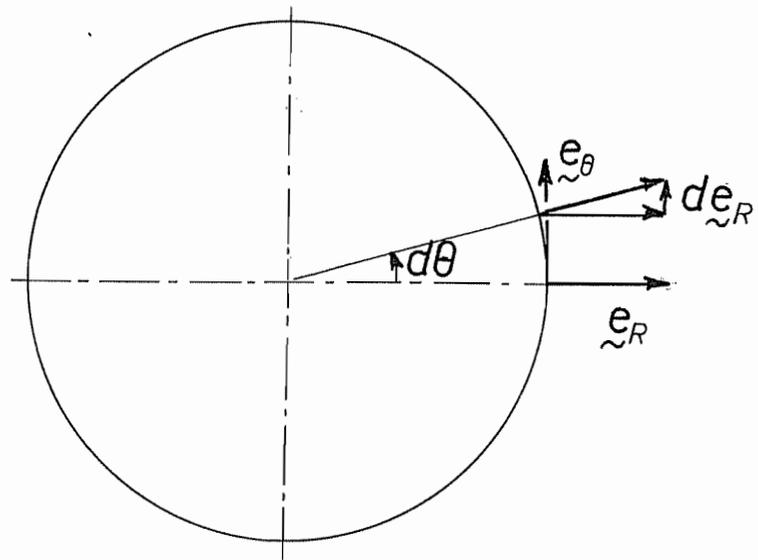


Fig. 14.4



On a donc

$$a_{\xi\xi} = 1 \quad , \quad a_{\theta\theta} = R^2 \quad , \quad a_{\xi\theta} = 0 \quad . \quad (14.5)$$

La normale a pour expression

$$\underline{\tilde{n}} = \cos \phi \underline{\tilde{e}}_R + \sin \phi \underline{\tilde{e}}_Z \quad ,$$

où ϕ est l'angle du cône. Lors d'une variation de θ , la composante selon $\underline{\tilde{e}}_Z$ ne varie pas. D'après la fig. (14.4), on a donc

$$d\underline{\tilde{n}} = \cos \phi d\underline{\tilde{e}}_R = \cos \phi \underline{\tilde{e}}_\theta d\theta \quad .$$

Comme le vecteur de base a_θ a pour longueur $a_{\theta\theta}^{\frac{1}{2}} = R$, il vient

$$d\underline{\tilde{n}} = \frac{\cos \phi}{R} a_\theta d\theta = -b_\theta^\theta a_\theta d\theta \quad ,$$

c'est-à-dire que la seule composante non nulle du tenseur de courbure est

$$b_\theta^\theta = -\frac{\cos \phi}{R} = -\frac{1}{R_\theta} \quad (14.6)$$

On en déduit

$$b_{\theta\theta} = a_{\theta\theta} b_\theta^\theta = -R \cos \phi \quad , \quad b^{\theta\theta} = a^{\theta\theta} b_\theta^\theta = -\frac{\cos \phi}{R^2} \quad (14.7)$$

14.3 - Dérivation covariante dans les coques tronconiques

Les symboles de Christoffel se calculent aisément à partir du tenseur métrique. Comme $R_{,\xi} = \sin \phi$, on a

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Gamma}_{\xi\xi\xi} &= \frac{1}{2} (a_{\xi\xi,\xi} + a_{\xi\xi,\xi} - a_{\xi\xi,\xi}) = 0 \quad ; \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{\xi\xi}^\xi = 0 \\ \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\xi\xi} &= \frac{1}{2} (a_{\theta\xi,\xi} + a_{\xi\xi,\theta} - a_{\theta\xi,\xi}) = 0 \quad ; \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{\xi\xi}^\theta = \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\xi}^\xi = 0 \\ \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\xi\theta} &= \frac{1}{2} (a_{\theta\xi,\theta} + a_{\theta\xi,\theta} - a_{\theta\theta,\xi}) = -R \sin \phi \quad ; \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\theta}^\xi = -R \sin \phi \\ \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\theta\theta} &= \frac{1}{2} (a_{\theta\theta,\theta} + a_{\theta\theta,\theta} - a_{\theta\theta,\theta}) = 0 \quad ; \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\theta}^\theta = 0 \\ \overset{\circ}{\Gamma}_{\xi\theta\theta} &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\theta\xi} = \frac{1}{2} (a_{\xi\theta,\theta} + a_{\theta\theta,\xi} - a_{\theta\xi,\theta}) = R \sin \phi \quad ; \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{\xi\theta}^\theta = \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\xi}^\theta = \frac{\sin \phi}{R} \\ \overset{\circ}{\Gamma}_{\xi\theta\xi} &= \frac{1}{2} (a_{\xi\xi,\theta} + a_{\xi\theta,\xi} - a_{\xi\theta,\xi}) = 0 \quad ; \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{\xi\xi}^\theta = 0 \end{aligned} \quad (14.8)$$

Il en découle, pour un vecteur de la forme

$$\underline{\tilde{u}} = u_\xi \underline{\tilde{a}}^\xi + u_\theta \underline{\tilde{a}}^\theta \quad ,$$

$$\begin{aligned}
u_{\xi|\xi} &= u_{\xi,\xi} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\xi\xi}^{\xi} u_{\xi} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\xi\xi}^{\theta} u_{\theta} = u_{\xi,\xi} \\
u_{\xi|\theta} &= u_{\xi,\theta} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\xi\theta}^{\xi} u_{\xi} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\xi\theta}^{\theta} u_{\theta} = u_{\xi,\theta} - \frac{u_{\theta} \sin \phi}{R} \\
u_{\theta|\xi} &= u_{\theta,\xi} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\xi}^{\xi} u_{\xi} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\xi}^{\theta} u_{\theta} = u_{\theta,\xi} - \frac{u_{\theta} \sin \phi}{R} \\
u_{\theta|\theta} &= u_{\theta,\theta} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\theta}^{\xi} u_{\xi} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\theta}^{\theta} u_{\theta} = u_{\theta,\theta} + R u_{\xi} \sin \phi
\end{aligned} \tag{14.9}$$

14.4 - Théorie des coques tronconiques avec déformations dues aux efforts tranchants

Pour appliquer à la présente géométrie les résultats de la section 11, il faut calculer les grandeurs $\lambda_{\mu\alpha}$, $\mathcal{K}_{\mu\alpha}$, ϕ_{α} , Π_{α} . Pour les premières, il vient

$$\left\{ \begin{aligned}
\lambda_{\xi\xi} &= u_{\xi|\xi} - b_{\xi\xi} w = u_{\xi,\xi} \\
\lambda_{\xi\theta} &= u_{\xi|\theta} - b_{\xi\theta} w = u_{\xi,\theta} - (u_{\theta} \sin \phi)/R \\
\lambda_{\theta\xi} &= u_{\theta|\xi} - b_{\theta\xi} w = u_{\theta,\xi} - (u_{\theta} \sin \phi)/R \\
\lambda_{\theta\theta} &= u_{\theta|\theta} - b_{\theta\theta} w = u_{\theta,\theta} + R u_{\xi} \sin \phi + R w \cos \phi
\end{aligned} \right. \tag{14.10}$$

Sur le même modèle,

$$\left\{ \begin{aligned}
\mathcal{K}_{\xi\xi} &= -p_{\xi,\xi} \\
\mathcal{K}_{\xi\theta} &= -p_{\xi,\theta} + (p_{\theta} \sin \phi)/R \\
\mathcal{K}_{\theta\xi} &= -p_{\theta,\xi} + (p_{\theta} \sin \phi)/R \\
\mathcal{K}_{\theta\theta} &= -p_{\theta,\theta} - R p_{\xi} \sin \phi - R q \cos \phi
\end{aligned} \right. \tag{14.11}$$

On a par ailleurs

$$\left\{ \begin{aligned}
\phi_{\xi} &= w_{,\xi} + b_{\xi\xi}^{\xi} u_{\xi} + b_{\xi\xi}^{\theta} u_{\theta} = w_{,\xi} \\
\phi_{\theta} &= w_{,\theta} + b_{\theta\xi}^{\xi} u_{\xi} + b_{\theta\xi}^{\theta} u_{\theta} = w_{,\theta} - (\cos \phi / R) u_{\theta}
\end{aligned} \right. \tag{14.12}$$

et, d'une façon similaire,

$$\left\{ \begin{aligned}
\Pi_{\xi} &= q_{,\xi} \\
\Pi_{\theta} &= q_{,\theta} - (\cos \phi / R) p_{\theta}
\end{aligned} \right. \tag{14.13}$$

Pour les applications pratiques, il est plus commode d'exprimer ces différentes grandeurs en termes des composantes physiques du déplacement, définies par

$$\underline{v} = (u + x^3 \alpha) a_{\xi\xi}^{\frac{1}{2}} \underline{a}^{\xi} + (v + x^3 \beta) a_{\theta\theta}^{\frac{1}{2}} \underline{a}^{\theta} + (w + x^3 q) \underline{n}$$

et liées aux précédentes par

$$u = u_{,\xi} \quad , \quad \alpha = p_{,\xi} \quad , \quad v = u_{,\theta}/R \quad , \quad \beta = p_{,\theta}/R \quad (14.14)$$

Il vient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{\xi\xi} = u_{,\xi} \\ \lambda_{\xi\theta} = u_{,\theta} - v \sin \phi \\ \lambda_{\theta\xi} = (Rv)_{,\xi} - v \sin \phi = R v_{,\xi} \\ \lambda_{\theta\theta} = (Rv)_{,\theta} + Ru \sin \phi + Rw \cos \phi = R (v_{,\theta} + u \sin \phi + w \cos \phi) \end{array} \right. \quad (14.15)$$

et, de même,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\xi\xi} = -\alpha_{,\xi} \\ \alpha_{\xi\theta} = -\alpha_{,\theta} + \beta \sin \phi \\ \alpha_{\theta\xi} = -R \beta_{,\xi} \\ \alpha_{\theta\theta} = -R (\beta_{,\theta} + \alpha \sin \phi + q \cos \phi) \end{array} \right. \quad (14.16)$$

Ensuite,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{,\xi} = w_{,\xi} \\ \phi_{,\theta} = w_{,\theta} - v \cos \phi \end{array} \right. \quad (14.17)$$

et enfin,

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_{,\xi} = q_{,\xi} \\ \pi_{,\theta} = q_{,\theta} - \beta \cos \phi \end{array} \right. \quad (14.18)$$

Les déformations du feuillet moyen $\overset{\circ}{\gamma}_{\xi\xi}$, $\overset{\circ}{\gamma}_{\xi\theta}$ et $\overset{\circ}{\gamma}_{\theta\theta}$ sont liées aux composantes physiques ε_{ξ} , ε_{θ} , $\varepsilon_{\xi\theta}$ par les relations

$$\varepsilon_{\xi} = \overset{\circ}{\gamma}_{\xi\xi} \quad , \quad \varepsilon_{\theta\xi} = \overset{\circ}{\gamma}_{\xi\theta}/R \quad , \quad \varepsilon_{\theta} = \overset{\circ}{\gamma}_{\theta\theta}/R^2 .$$

On obtient donc, à partir de (11.7),

$$\varepsilon_{\xi} = \lambda_{\xi\xi} + \frac{1}{2} \lambda_{,\xi}^{\xi} \lambda_{\xi\xi} + \frac{1}{2} \lambda_{,\xi}^{\theta} \lambda_{\theta\xi} + \frac{1}{2} \phi_{,\xi}^2$$

soit

$$\varepsilon_{\xi} = \lambda_{\xi\xi} + \frac{1}{2} \lambda_{\xi\xi}^2 + \frac{1}{2R^2} \lambda_{\theta\xi}^2 + \frac{1}{2} \phi_{,\xi}^2 \quad (14.19)$$

puis

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{R^2} (\lambda_{\theta\theta} + \frac{1}{2} \lambda_{,\theta}^{\xi} \lambda_{\xi\theta} + \frac{1}{2} \lambda_{,\theta}^{\theta} \lambda_{\theta\theta} + \frac{1}{2} \phi_{,\theta}^2)$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_{\theta} = (1/R^2) \left(\lambda_{\theta\theta} + \frac{1}{2} \lambda_{\xi\theta}^2 + \frac{1}{2} (1/R^2) \lambda_{\theta\theta}^2 + \frac{1}{2} \phi_{\theta}^2 \right) \quad (14.20)$$

et enfin,

$$2 \varepsilon_{\xi\theta} = (1/R) \left(\lambda_{\xi\theta} + \lambda_{\theta\xi} + \lambda_{\cdot\xi}^{\xi} \lambda_{\xi\theta} + \lambda_{\cdot\xi}^{\theta} \lambda_{\theta\theta} + \phi_{\xi} \phi_{\theta} \right)$$

soit encore

$$2 \varepsilon_{\xi\theta} = (1/R) \left(\lambda_{\xi\theta} + \lambda_{\theta\xi} + \lambda_{\xi\xi}^{\cdot} \lambda_{\xi\theta} + (1/R^2) \lambda_{\theta\xi} \lambda_{\theta\theta} + \phi_{\xi} \phi_{\theta} \right) \quad (14.21)$$

En ce qui concerne les changements de courbure, leurs composantes physiques sont K_{ξ} , K_{θ} , $K_{\xi\theta}$, avec

$$K_{\xi} = \rho_{\xi\xi} \quad ; \quad K_{\theta} = R^{-2} \rho_{\theta\theta} \quad ; \quad K_{\xi\theta} = R^{-1} \rho_{\xi\theta} \quad ,$$

ce qui conduit aux expressions suivantes:

$$K_{\xi} = \alpha_{\xi\xi} + b_{\xi}^{\xi} \lambda_{\xi\xi} + b_{\xi}^{\theta} \lambda_{\theta\xi} + \lambda_{\cdot\xi}^{\xi} \alpha_{\xi\xi} + \lambda_{\cdot\xi}^{\theta} \alpha_{\theta\xi} - \phi_{\xi} \pi_{\xi}$$

soit

$$K_{\xi} = \alpha_{\xi\xi} + \lambda_{\xi\xi}^{\cdot} \alpha_{\xi\xi} + (1/R^2) \lambda_{\theta\xi} \alpha_{\theta\xi} - \phi_{\xi} \pi_{\xi} \quad (14.22)$$

On a ensuite

$$K_{\theta} = (1/R^2) (\alpha_{\theta\theta} + b_{\theta}^{\xi} \lambda_{\xi\theta} + b_{\theta}^{\theta} \lambda_{\theta\theta} + \lambda_{\cdot\theta}^{\xi} \alpha_{\xi\theta} + \lambda_{\cdot\theta}^{\theta} \alpha_{\theta\theta} - \phi_{\theta} \pi_{\theta})$$

c'est-à-dire

$$K_{\theta} = (1/R^2) (\alpha_{\theta\theta} - \frac{\cos \phi}{R} \lambda_{\theta\theta} + \lambda_{\xi\theta} \alpha_{\xi\theta} + \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\theta} \alpha_{\theta\theta} - \phi_{\theta} \pi_{\theta})$$

et enfin,

$$2 K_{\xi\theta} = \frac{1}{R} (\alpha_{\xi\theta} + \alpha_{\theta\xi} + b_{\xi}^{\xi} \lambda_{\xi\theta} + b_{\xi}^{\theta} \lambda_{\theta\theta} + b_{\theta}^{\xi} \lambda_{\xi\xi} + b_{\theta}^{\theta} \lambda_{\theta\xi} + \lambda_{\cdot\xi}^{\xi} \alpha_{\xi\theta} + \lambda_{\cdot\xi}^{\theta} \alpha_{\theta\theta} + \lambda_{\cdot\theta}^{\xi} \alpha_{\xi\xi} + \lambda_{\cdot\theta}^{\theta} \alpha_{\theta\xi} - \phi_{\xi} \pi_{\theta} - \phi_{\theta} \pi_{\xi}) \quad (14.23)$$

soit encore

$$2 K_{\xi\theta} = \frac{1}{R} (\alpha_{\xi\theta} + \alpha_{\theta\xi} - \frac{\cos \phi}{R} \lambda_{\theta\xi} + \lambda_{\xi\xi} \alpha_{\xi\theta} + \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\xi} \alpha_{\theta\theta} + \lambda_{\xi\theta} \alpha_{\xi\xi} + \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\theta} \alpha_{\theta\xi} - \phi_{\xi} \pi_{\theta} - \phi_{\theta} \pi_{\xi}) \quad (14.24)$$

Les déformations de cisaillement transversal ont leurs composantes physiques $\varepsilon_{\xi 3}$ et $\varepsilon_{\theta 3}$ liées à $\gamma_{\xi 3}$ et $\gamma_{\theta 3}$ par les relations

$$\varepsilon_{\xi 3} = \gamma_{\xi 3} \quad ; \quad \varepsilon_{\theta 3} = \frac{1}{R} \gamma_{\theta 3} \quad .$$

Il vient donc, par (11.11),

$$\begin{aligned}
 2 \varepsilon_{\xi\xi} &= p_{\xi} + \lambda_{\xi\xi} p_{\xi} + \lambda_{\xi\theta} p_{\theta} + (1+q) \phi_{\xi} \\
 &= \alpha + \lambda_{\xi\xi} \alpha + (1/R^2) \lambda_{\xi\theta} (R\beta) + (1+q) \phi_{\xi} \\
 &= \alpha + \lambda_{\xi\xi} \alpha + (1/R) \lambda_{\xi\theta} \beta + (1+q) \phi_{\xi}
 \end{aligned} \tag{14.25}$$

et

$$\begin{aligned}
 2 \varepsilon_{\theta\theta} &= (1/R)(p_{\theta} + \lambda_{\theta\xi} p_{\xi} + \lambda_{\theta\theta} p_{\theta} + (1+q) \phi_{\theta}) \\
 &= (1/R)(R\beta + \lambda_{\xi\theta} \alpha + (1/R^2) \lambda_{\theta\theta} R\beta + (1+q) \phi_{\theta}) \\
 &= \beta + (1/R) \lambda_{\xi\theta} \alpha + (1/R^2) \lambda_{\theta\theta} \beta + (1+q) \phi_{\theta}/R
 \end{aligned} \tag{14.26}$$

Enfin, on a

$$\gamma_{33} = q + \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{2} p_{\xi} p_{\xi} + \frac{1}{2} p_{\theta} p_{\theta} = q + \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \tag{14.27}$$

14.5 - Rotations modérées des coques tronconiques

Le cas particulier des rotations modérées s'obtient à partir de la section 12. On a

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\theta}_{\xi\xi} &= \lambda_{\xi\xi} & ; & & \overset{\circ}{\theta}_{\theta\theta} &= \lambda_{\theta\theta} & ; & & \overset{\circ}{\theta}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2} (\lambda_{\xi\theta} + \lambda_{\theta\xi}) \\
 \overset{\circ}{\omega}_{\xi\xi} &= 0 & ; & & \overset{\circ}{\omega}_{\theta\theta} &= 0 & ; & & \overset{\circ}{\omega}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2} (\lambda_{\theta\xi} - \lambda_{\xi\theta}) .
 \end{aligned}$$

Posant

$$\Omega = \overset{\circ}{\omega}_{\xi\theta} / R ,$$

on a

$$\Omega = \frac{1}{2} (v_{,\xi} - (u_{,\theta}/R) + (v/R) \sin \phi) \tag{14.28}$$

De plus, on peut poser $q \approx 0$ dans l'expression de $\mathcal{K}_{\theta\theta}$:

$$\mathcal{K}_{\theta\theta} = -R (\beta_{,\theta} + \alpha \sin \phi) . \tag{14.29}$$

Les déformations du feuillet moyen s'écrivent alors par (12.13)

$$\left\{ \begin{aligned}
 \varepsilon_{\xi} &= \lambda_{\xi\xi} + \frac{1}{2} \Omega^2 + \frac{1}{2} \phi_{\xi}^2 \\
 \varepsilon_{\theta} &= (1/R^2) \lambda_{\theta\theta} + \frac{1}{2} \Omega^2 + \frac{1}{2} (1/R^2) \phi_{\theta}^2 \\
 2 \varepsilon_{\xi\theta} &= (1/R) (\lambda_{\xi\theta} + \lambda_{\theta\xi} + \phi_{\xi} \phi_{\theta}) .
 \end{aligned} \right. \tag{14.30}$$

En ce qui concerne les courbures, on tire de (12.16)

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{\xi} = \mathcal{K}_{\xi\xi} \\ K_{\theta} = (1/R^2)(\mathcal{K}_{\theta\theta} + b_{\theta}^{\theta} \dot{\omega}_{\theta\theta}) = (1/R^2) \mathcal{K}_{\theta\theta} \\ 2 K_{\xi\theta} = (1/R)(\mathcal{K}_{\xi\theta} + \mathcal{K}_{\theta\xi} + b_{\theta}^{\theta} \dot{\omega}_{\xi\theta}) = (1/R)(\mathcal{K}_{\xi\theta} + \mathcal{K}_{\theta\xi} - \frac{\cos \phi}{R} \dot{\omega}_{\xi\theta}) \\ \quad = (1/R)(\mathcal{K}_{\xi\theta} + \mathcal{K}_{\theta\xi} - \Omega \cos \phi) \end{array} \right. \quad (14.31)$$

Il vient enfin, par (12.17)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \varepsilon_{\xi 3} = \alpha + \Omega \beta + \phi_{,\xi} \\ 2 \varepsilon_{\theta 3} = \beta - \Omega \alpha + (1/R) \phi_{,\theta} \end{array} \right. \quad (14.32)$$

La théorie de Kirchhoff-Love s'obtient en remplaçant formellement α par $(-\phi_{,\xi})$ et β par $(-\frac{1}{R}\phi_{,\theta})$ dans les expressions des courbures.

Il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K}_{\xi\xi} = \phi_{,\xi\xi} = w_{,\xi\xi} \\ \mathcal{K}_{\xi\theta} = \phi_{,\xi,\theta} - (1/R) \phi_{,\theta} \sin \phi = w_{,\xi\theta} - \frac{1}{R} (w_{,\theta} - v \cos \phi) \sin \phi \\ \mathcal{K}_{\theta\xi} = R \left(\frac{1}{R} \phi_{,\theta} \right)_{,\xi} = \phi_{,\theta,\xi} - \frac{\sin \phi}{R} \phi_{,\theta} = w_{,\theta\xi} - v_{,\xi} \cos \phi \\ \quad \quad \quad - \frac{1}{R} (w_{,\theta} - v \cos \phi) \sin \phi \\ \mathcal{K}_{\theta\theta} = -R (\beta_{,\theta} + \alpha \sin \phi) = \phi_{,\theta,\theta} + R \phi_{,\xi} \sin \phi = \\ \quad \quad \quad = w_{,\theta\theta} - v_{,\theta} \cos \phi + R w_{,\xi} \sin \phi \end{array} \right. \quad (14.33)$$

et, en composantes physiques,

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{\xi} = w_{,\xi\xi} \\ K_{\theta} = (1/R^2)(w_{,\theta\theta} - v_{,\theta} \cos \phi) + \frac{\sin \phi}{R} w_{,\xi} \\ 2 K_{\xi\theta} = \frac{2}{R} w_{,\xi\theta} - \frac{2}{R^2} w_{,\theta} \sin \phi + \frac{3}{R^2} v \sin \phi \cos \phi - \frac{3}{2R} v_{,\xi} \cos \phi \\ \quad \quad \quad + \frac{1}{2R^2} u_{,\theta} \cos \phi \end{array} \right. \quad (14.34)$$

On obtiendrait les mêmes expressions en partant directement de la formule (12.29). Un très grand nombre d'auteurs /9, 21, 23 à 26/ utilisent les changements de courbure de NOVOZHILOV /27/, qui ne diffèrent de (14.34) que par l'expression de la torsion, que Novozhilov donne égale à

$$2 \hat{K}_{\xi\theta} = (2/R) w_{,\xi\theta} - (2/R^2) w_{,\theta} \sin \phi + (2/R^2) v \sin \phi \cos \phi - (2/R) v_{,\xi} \cos \phi \quad (14.35)$$

On calcule aisément

$$\begin{aligned} 2 \hat{K}_{\xi\theta} - 2 K_{\xi\theta} &= - \frac{\cos \phi}{2 R^2} (u_{,\theta} - v \sin \phi + R v_{,\xi}) = - \frac{1}{R R_\theta} (\lambda_{\xi\theta} + \lambda_{\theta\xi}) \\ &= - (1/R_\theta) \left(\frac{1}{R} \overset{\circ}{\theta}_{\xi\theta} \right) , \end{aligned}$$

valeur négligeable, car $O(\gamma/R_\theta)$, qui s'annule en outre pour un déplacement rigide. Les changements de courbure de Novozhilov sont donc équivalents à nos expressions (14.34). De même, nous avons obtenu précédemment /7/ la valeur suivante de la torsion:

$$\begin{aligned} 2 \tilde{K}_{\xi\theta} &= \frac{2}{R} w_{,\xi\theta} - \frac{2}{R^2} w_{,\theta} \sin \phi + \frac{\cos \phi}{R^2} (u_{,\theta} + v \sin \phi - R v_{,\xi}) \\ &= 2 K_{\xi\theta} + \frac{1}{2R_\theta} \left(\frac{1}{R} \overset{\circ}{\theta}_{\xi\theta} \right) , \end{aligned} \quad (14.36)$$

également équivalente à (14.34), pour les mêmes raisons.

15. COQUES QUASI-CONIQUES /17/15.1 - Introduction

Si l'on abandonne la géométrie conique pour considérer des coques à double courbure, il devient impossible de représenter exactement les déplacements rigides dans un modèle d'éléments finis polynomiaux. Une telle approche est donc à rejeter, ce qui justifie le fait que nous nous soyons limité, dans la section précédente, aux seules coques tronconiques (qui englobent, bien entendu, le cas du cylindre ($\phi = 0$) et le cas de la plaque circulaire ($\phi = \pi/2$)).

On peut naturellement songer à modéliser la coque à double courbure en approchant sa géométrie par une série de troncs de cônes. Cette approche a été développée pour la première fois par GRAFTON et STROME /21/ et donne des résultats assez satisfaisants.

Il est cependant possible d'améliorer l'approximation à l'aide du concept de déplacement fictif initial défini en section 13. Etant donné un élément de coque de révolution, on définit un cône de référence, coupant la coque aux extrémités de l'élément. Un déplacement fictif h , normal au cône de référence, exempt de rotation, permet alors de se ramener sur la coque (fig. 15.1). Si l est la longueur de l'élément, les pentes de la coque par rapport au cône sont alors d'ordre

$$P = l/R_{\xi} \quad (15.1)$$

où R_{ξ} est le rayon de courbure dans le plan méridien. Par conséquent, lorsque le maillage se raffine, $P \rightarrow 0$ en même temps que l . Une coque de révolution quelconque peut donc être traitée à l'aide de plusieurs cônes de référence (fig. 15.2). Par analogie avec les coques quasi-planes, nous parlerons ici de coques quasi-coniques.

15.2 - Expression des déformations

Posant $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$, $\bar{w} = h(\xi)$, $\bar{\alpha} = 0$, $\bar{\beta} = 0$, $\bar{q} = 0$, on obtient, par les relations (14.14) à (14.18), les valeurs suivantes pour les paramètres de déformation initiale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda}_{\xi\xi} = 0 \quad ; \quad \bar{\lambda}_{\xi\theta} = 0 \quad ; \quad \bar{\lambda}_{\theta\xi} = 0 \quad ; \quad \bar{\lambda}_{\theta\theta} = R h \cos \phi \\ \bar{\kappa}_{\xi\xi} = 0 \quad ; \quad \bar{\kappa}_{\xi\theta} = 0 \quad ; \quad \bar{\kappa}_{\theta\xi} = 0 \quad ; \quad \bar{\kappa}_{\theta\theta} = 0 \\ \bar{\phi}_{\xi} = h_{,\xi} \quad ; \quad \bar{\phi}_{\theta} = 0 \quad ; \quad \bar{\pi}_{\xi} = 0 \quad ; \quad \bar{\pi}_{\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (15.2)$$

En conséquence, les déformations initiales du feuillet moyen

sont données par (voir 14.19 à 14.22) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_{\xi\xi} = \frac{1}{2} h_{,\xi}^2 \\ \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} = (1/R^2)(R h \cos \phi + \frac{1}{2R^2} (R h \cos \phi)^2) \\ 2\bar{\varepsilon}_{\xi\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (15.3)$$

Les changements de courbure initiaux valent (d'après 14.22 à 14.24)

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{K}_{\xi\xi} = 0 \\ \bar{K}_{\theta\theta} = (1/R^2)(-\frac{\cos \phi}{R} \bar{\lambda}_{\theta\theta}) = (1/R^2)(-\frac{\cos \phi}{R} R h \cos \phi) \\ 2\bar{K}_{\xi\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (15.4)$$

On tire d'ailleurs de (14.25) et (14.26)

$$2\bar{\varepsilon}_{\xi\xi} = h, \quad ; \quad 2\bar{\varepsilon}_{\theta\theta} = 0 \quad (15.5)$$

et enfin,

$$\bar{\delta}_{33} = 0 \quad (15.6)$$

Quant à la déformation totale, elle est caractérisée par les paramètres

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{\xi\xi}^{\text{tot}} = \lambda_{\xi\xi} ; \quad \lambda_{\xi\theta}^{\text{tot}} = \lambda_{\xi\theta} ; \quad \lambda_{\theta\xi}^{\text{tot}} = \lambda_{\theta\xi} ; \quad \lambda_{\theta\theta}^{\text{tot}} = R h \cos \phi + \lambda_{\theta\theta} \\ \kappa_{\xi\xi}^{\text{tot}} = \kappa_{\xi\xi} ; \quad \kappa_{\xi\theta}^{\text{tot}} = \kappa_{\xi\theta} ; \quad \kappa_{\theta\xi}^{\text{tot}} = \kappa_{\theta\xi} ; \quad \kappa_{\theta\theta}^{\text{tot}} = \kappa_{\theta\theta} \\ \phi_{\xi}^{\text{tot}} = h_{,\xi} + \phi_{\xi} ; \quad \phi_{\theta}^{\text{tot}} = \phi_{\theta} ; \quad \pi_{\xi}^{\text{tot}} = \pi_{\xi} ; \quad \pi_{\theta}^{\text{tot}} = \pi_{\theta} \end{array} \right. \quad (15.7)$$

On en déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\xi\xi}^{\text{tot}} = \lambda_{\xi\xi} + \frac{1}{2} \lambda_{\xi\xi}^2 + \frac{1}{2R^2} \lambda_{\theta\xi}^2 + \frac{1}{2} (h_{,\xi} + \phi_{\xi})^2 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{\text{tot}} = \frac{1}{R^2} (R h \cos \phi + \lambda_{\theta\theta} + \frac{1}{2} \lambda_{\xi\theta}^2 + \frac{1}{2R^2} (R h \cos \phi + \lambda_{\theta\theta})^2 + \frac{1}{2} \phi_{\theta}^2) \\ 2\varepsilon_{\xi\theta}^{\text{tot}} = \frac{1}{R} (\lambda_{\xi\theta} + \lambda_{\theta\xi} + \lambda_{\xi\xi} \lambda_{\xi\theta} + \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\xi} (R h \cos \phi + \lambda_{\theta\theta}) \\ \quad + (h_{,\xi} + \phi_{\xi}) \phi_{\theta}) \\ K_{\xi\xi}^{\text{tot}} = \kappa_{\xi\xi} + \lambda_{\xi\xi} \kappa_{\xi\xi} + \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\xi} \kappa_{\theta\xi} - (h_{,\xi} + \phi_{\xi}) \pi_{\xi} \\ K_{\theta\theta}^{\text{tot}} = \frac{1}{R^2} (\kappa_{\theta\theta} - \frac{\cos \phi}{R} (R h \cos \phi + \lambda_{\theta\theta}) + \lambda_{\xi\theta} \kappa_{\xi\theta} \\ \quad + \frac{1}{R^2} (R h \cos \phi + \lambda_{\theta\theta}) \kappa_{\theta\theta} - \phi_{\theta} \pi_{\theta}) \end{array} \right. \quad (15.8)$$

$$2 K_{\xi\theta}^{\text{tot}} = \frac{1}{R} (\alpha_{\xi\theta} + \alpha_{\theta\xi} - \frac{\cos \phi}{R} \lambda_{\theta\xi} + \lambda_{\xi\xi} \alpha_{\xi\theta} + \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\xi} \alpha_{\theta\theta} + \lambda_{\xi\theta} \alpha_{\xi\xi} + \frac{1}{R^2} (R h \cos \phi + \lambda_{\theta\theta}) \alpha_{\theta\xi} + (h_{,\xi} + \phi_{,\xi}) \pi_{\theta} - \phi_{\theta} \pi_{\xi})$$

$$2 \varepsilon_{\xi\xi}^{\text{tot}} = \alpha + \lambda_{\xi\xi} \alpha + \frac{1}{R} \lambda_{\theta\xi} \beta + (1 + q)(h_{,\xi} + \phi_{,\xi})$$

$$2 \varepsilon_{\theta\theta}^{\text{tot}} = \beta + \frac{1}{R} \lambda_{\xi\theta} \alpha + \frac{1}{R^2} (R h \cos \phi + \lambda_{\theta\theta}) \beta + (1 + q) \frac{\phi_{,\theta}}{R}$$

$$\gamma_{33}^{\text{tot}} = q + \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2)$$

Par différence, on obtient l'expression générale des déformations des coques quasi-coniques: les déformations du feuillet moyen valent

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= \lambda_{\xi\xi} + h_{,\xi} \phi_{,\xi} + \frac{1}{2} \lambda_{\xi\xi}^2 + \frac{1}{2R^2} \lambda_{\theta\xi}^2 + \frac{1}{2} \phi_{,\xi}^2 \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{R^2} \left((1 + \frac{h \cos \phi}{R}) \lambda_{\theta\theta} + \frac{1}{2} \lambda_{\xi\theta}^2 + \frac{1}{2R^2} \lambda_{\theta\theta}^2 + \frac{1}{2} \phi_{,\theta}^2 \right) \quad (15.9) \\ 2 \varepsilon_{\xi\theta} &= \frac{1}{R} \left(\lambda_{\xi\theta} + (1 + \frac{h \cos \phi}{R}) \lambda_{\theta\xi} + h_{,\xi} \phi_{,\theta} + \lambda_{\xi\xi} \lambda_{\xi\theta} + \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\xi} \lambda_{\theta\theta} + \phi_{,\xi} \phi_{,\theta} \right) \end{aligned} \right.$$

Les changements de courbure sont donnés par

$$\left\{ \begin{aligned} K_{\xi} &= \alpha_{\xi\xi} - h_{,\xi} \pi_{\xi} + \lambda_{\xi\xi} \alpha_{\xi\xi} + \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\xi} \alpha_{\theta\xi} - \phi_{,\xi} \pi_{\xi} \\ K_{\theta} &= \frac{1}{R^2} \left((1 + \frac{h \cos \phi}{R}) \alpha_{\theta\theta} - \frac{\cos \phi}{R} \lambda_{\theta\theta} + \lambda_{\xi\theta} \alpha_{\xi\theta} + \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\theta} \alpha_{\theta\theta} - \phi_{,\theta} \pi_{\theta} \right) \quad (15.10) \\ 2 K_{\xi\theta} &= \frac{1}{R} (\alpha_{\xi\theta} + (1 + \frac{h \cos \phi}{R}) \alpha_{\theta\xi} - \frac{\cos \phi}{R} \lambda_{\theta\xi} - h_{,\xi} \pi_{\theta} + \lambda_{\xi\xi} \alpha_{\xi\theta} + \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\xi} \alpha_{\theta\theta} + \lambda_{\xi\theta} \alpha_{\xi\xi} + \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\theta} \alpha_{\theta\xi} - \phi_{,\xi} \pi_{\theta} - \phi_{,\theta} \pi_{\xi}) \end{aligned} \right.$$

Voici les déformations de cisaillement transversal:

$$\left\{ \begin{aligned} 2 \varepsilon_{\xi\xi} &= \alpha + \phi_{,\xi} + h_{,\xi} q + \lambda_{\xi\xi} \alpha + \frac{1}{R} \lambda_{\theta\xi} \beta + q \phi_{,\xi} \\ 2 \varepsilon_{\theta\theta} &= (1 + \frac{h \cos \phi}{R}) \beta + \frac{1}{R} \phi_{,\theta} + \frac{1}{R} \lambda_{\xi\theta} \alpha + \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\theta} \beta + q \frac{\phi_{,\theta}}{R} \end{aligned} \right. \quad (15.11)$$

Enfin, la condition de nullité de la déformation transversale s'écrit

$$\gamma_{33} = q + \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \quad (15.12)$$

15.3 - Grandeurs intervenant dans l'étude des rotations modérées

L'hypothèse des rotations modérées se caractérise par le fait que tous les gradients de déplacements sont au plus d'ordre $\gamma^{\frac{1}{2}}$. Dans le système d'axes du cône, ceci se traduit par

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{\xi\xi} = o(\gamma^{\frac{1}{2}}) ; \frac{1}{R} \lambda_{\xi\theta} = o(\gamma^{\frac{1}{2}}) ; \frac{1}{R} \lambda_{\theta\xi} = o(\gamma^{\frac{1}{2}}) ; \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\theta} = o(\gamma^{\frac{1}{2}}) \\ \phi_{\xi} = o(\gamma^{\frac{1}{2}}) ; \frac{1}{R} \phi_{\theta} = o(\gamma^{\frac{1}{2}}) ; \alpha = o(\gamma^{\frac{1}{2}}) ; \beta = o(\gamma^{\frac{1}{2}}) ; q = o(\gamma^{\frac{1}{2}}) \end{array} \right. \quad (15.13)$$

Il découle directement de (15.12) que $q = o(\gamma)$. On a par ailleurs

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\xi\xi} = -\alpha_{,\xi} = o(\gamma^{\frac{1}{2}}/L) \\ \frac{1}{R} \alpha_{\theta\xi} = -\beta_{,\xi} = o(\gamma^{\frac{1}{2}}/L) \\ \frac{1}{R} \alpha_{\xi\theta} = -\frac{1}{R} \alpha_{,\theta} + \frac{\beta}{R} \sin \phi = o(\gamma^{\frac{1}{2}}/L, \gamma^{\frac{1}{2}}/R) \\ \frac{1}{R} \alpha_{\theta\theta} = -\frac{1}{R} \beta_{,\theta} - \frac{\alpha}{R} \sin \phi - \frac{q}{R} \cos \phi = o(\gamma^{\frac{1}{2}}/L, \gamma^{\frac{1}{2}}/R) \end{array} \right. \quad (15.14)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_{\xi} = q_{,\xi} = o(\gamma/L) \\ \frac{1}{R} \pi_{\theta} = \frac{1}{R} q_{,\theta} - \frac{\beta}{R} \cos \phi = o(\gamma^{\frac{1}{2}}/R_{\theta}), \text{ avec } R_{\theta} = \frac{R}{\cos \phi} \end{array} \right. \quad (15.15)$$

On notera d'autre part que $h = o(P1)$, ce qui entraîne

$$\frac{h \cos \phi}{R} = \frac{h}{R_{\theta}} = o\left(\frac{P1}{R_{\theta}}\right) = o\left(P \frac{1}{R} \frac{R_{\xi}}{R_{\theta}}\right) = o\left(P^2 \frac{R_{\xi}}{R_{\theta}}\right). \quad (15.16)$$

Pour autant que R_{ξ} et R_{θ} soient d'un ordre de grandeur comparable, on a donc

$$\frac{h \cos \phi}{R} = o(P^2) \quad . \quad (15.16')$$

Il convient cependant de ne pas négliger sans discernement tout terme en $\frac{h \cos \phi}{R}$ si l'on ne veut pas détruire la représentation des déplacements rigides linéarisés.

Il ressort des expressions (15.9) des déformations du feuillet moyen que leurs formes linéarisées vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{H}_{\xi} = \lambda_{\xi\xi} + h_{,\xi} \phi_{\xi} = o(\gamma) \\ \textcircled{H}_{\theta} = \frac{1}{R^2} \left(1 + \frac{h \cos \phi}{R}\right) \lambda_{\theta\theta} = o(\gamma) \end{array} \right. \quad (15.17)$$

Fig. 15.1

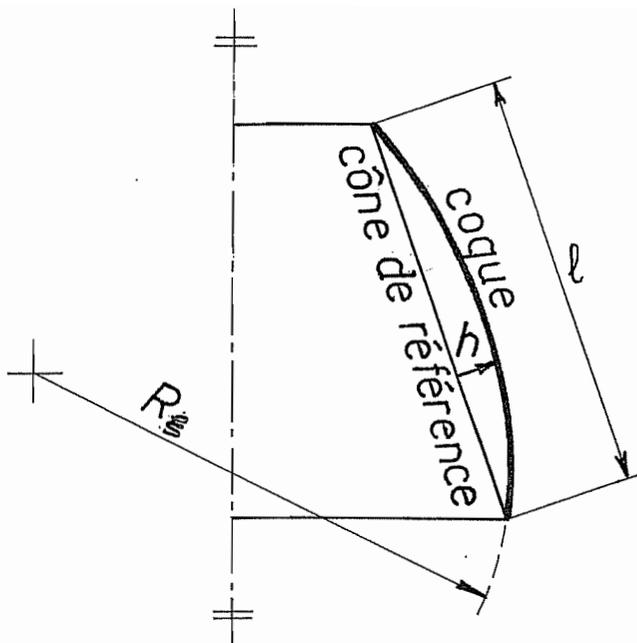
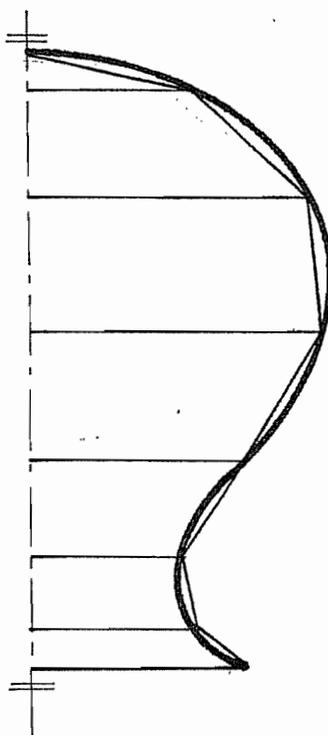


Fig. 15.2



$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \textcircled{H}_{\xi\theta} = (1/R) \left(\lambda_{\xi\theta} + \left(1 + \frac{h \cos \phi}{R} \right) \lambda_{\theta\xi} + h_{,\xi} \phi_{\theta} \right) = o(\gamma) \end{array} \right.$$

La discussion sera facilitée par l'introduction de la rotation linéarisée définie comme suit: si \bar{a}_{ξ} et \bar{a}_{θ} représentent les vecteurs de base après la déformation initiale, et que \tilde{a}_{ξ}^i et \tilde{a}_{θ}^i soient les vecteurs de base après la déformation totale, on a

$$\dot{\omega}_{\xi\theta} = \frac{1}{2} (\bar{a}_{\theta} \cdot (\tilde{a}_{\xi}^i - \bar{a}_{\xi}) - \bar{a}_{\xi} \cdot (\tilde{a}_{\theta}^i - \bar{a}_{\theta})) \quad (15.18)$$

Comme, par (11.3),

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\xi} &= (1 + \bar{\lambda}_{,\xi}^{\xi}) \tilde{a}_{\xi} + \bar{\lambda}_{,\xi}^{\theta} \tilde{a}_{\theta} + \bar{\phi} n = \tilde{a}_{\xi} + h_{,\xi} n \\ \bar{a}_{\theta} &= \bar{\lambda}_{,\theta}^{\xi} \tilde{a}_{\xi} + (1 + \bar{\lambda}_{,\theta}^{\theta}) \tilde{a}_{\theta} + \bar{\phi}_{\theta} n = \left(1 + \frac{h \cos \phi}{R} \right) \tilde{a}_{\theta} \end{aligned}$$

et que, par la même formule,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\xi}^i &= (1 + \lambda_{\xi\xi}^{\xi}) \tilde{a}_{\xi}^{\xi} + \lambda_{\theta\xi}^{\theta} \tilde{a}_{\theta}^{\theta} + (h_{,\xi} + \phi_{\xi}) n \\ \tilde{a}_{\theta}^i &= \lambda_{\xi\theta}^{\xi} \tilde{a}_{\xi}^{\xi} + (R^2 + R h \cos \phi + \lambda_{\theta\theta}^{\theta}) \tilde{a}_{\theta}^{\theta} + \phi_{\theta} n \end{aligned}$$

on obtient

$$2 \dot{\omega}_{\xi\theta} = \left(1 + \frac{h \cos \phi}{R} \right) \lambda_{\theta\xi} - \lambda_{\xi\theta} - h_{,\xi} \phi_{\theta} \quad (15.19)$$

La composante physique correspondante est

$$\Omega = \frac{\dot{\omega}_{\xi\theta}}{R} = \frac{1}{2R} \left(\left(1 + \frac{h \cos \phi}{R} \right) \lambda_{\theta\xi} - \lambda_{\xi\theta} - h_{,\xi} \phi_{\theta} \right) \quad (15.20)$$

Utilisant ces définitions, on peut écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{\xi\xi} = \textcircled{H}_{\xi} - h_{,\xi} \phi_{\theta} \\ \frac{1}{R} \lambda_{\xi\theta} = \textcircled{H}_{\xi\theta} - \Omega - h_{,\xi} \phi_{\theta} \\ \frac{1}{R} \lambda_{\theta\xi} = \left(1 + \frac{h \cos \phi}{R} \right)^{-1} \left(\textcircled{H}_{\xi\theta} + \Omega \right) \\ \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\theta} = \left(1 + \frac{h \cos \phi}{R} \right)^{-1} \textcircled{H}_{\theta} \end{array} \right. \quad (15.21)$$

15.4 - Déformations du feuillet moyen en rotations modérées

La déformation ε_{ξ} peut être écrite

$$\varepsilon_{\xi} = \textcircled{H}_{\xi} + \frac{1}{2} \left(\textcircled{H}_{\xi} - h_{,\xi} \phi_{\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h \cos \phi}{R} \right)^{-2} \left(\textcircled{H}_{\xi\theta} + \Omega \right)^2 + \frac{1}{2} \phi_{\xi}^2$$

et, en négligeant les termes $o(\gamma^{3/2})$ et $o(\gamma^2)$,

$$\varepsilon_{\xi} = \textcircled{H}_{\xi} + \frac{1}{2} (1 + h_{,\xi}^2) \phi_{\xi}^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h \cos \phi}{R} \right)^{-2} \Omega^2.$$

Moyennant une erreur relative $O(P^2)$, il vient encore

$$\varepsilon_{\xi} = \lambda_{\xi\xi} + h_{,\xi} \phi_{\xi} + \frac{1}{2} \Omega^2 + \frac{1}{2} \phi_{\xi}^2 \quad (15.22)$$

La déformation ε_{θ} se transforme en

$$\varepsilon_{\theta} = \mathbb{H}_{\theta} + \frac{1}{2} (\mathbb{H}_{\xi\theta} - \Omega - h_{,\xi} \phi_{\theta})^2 + \left(1 + \frac{h \cos \phi}{R}\right)^{-2} \mathbb{H}_{\theta}^2 + \frac{1}{2} \phi_{\theta}^2$$

et, en négligeant les termes $O(\gamma^{3/2})$ et $O(\gamma^2)$,

$$\varepsilon_{\theta} = \mathbb{H}_{\theta} + \frac{1}{2} \Omega^2 - \Omega h_{,\xi} \phi_{\theta} + \frac{1}{2} (1 + h_{,\xi})^2 \phi_{\theta}^2 \quad .$$

Moyennant une erreur relative $O(P^2)$, on peut négliger $h_{,\xi}^2$ devant l'unité, et négliger le coefficient $(1 + \frac{h \cos \phi}{R})$ qui apparaît dans l'expression de \mathbb{H}_{θ} . Il vient ainsi

$$\varepsilon_{\theta} = \lambda_{\theta\theta} + \frac{1}{2} \Omega^2 - \Omega h_{,\xi} \phi_{\theta} + \frac{1}{2} \phi_{\theta}^2 \quad (15.23)$$

En ce qui concerne le cisaillement du feuillet moyen, on a

$$2 \varepsilon_{\xi\theta} = 2 \mathbb{H}_{\xi\theta} + (\mathbb{H}_{\xi} - h_{,\xi} \phi_{\xi}) (\mathbb{H}_{\xi\theta} - \Omega - h_{,\xi} \phi_{\theta}) \\ + \left(1 + \frac{h \cos \phi}{R}\right)^{-2} (\mathbb{H}_{\xi\theta} + \Omega) \mathbb{H}_{\theta} + \phi_{\xi} \phi_{\theta}$$

soit, en négligeant les termes $O(\gamma^{3/2})$ et $O(\gamma^2)$,

$$2 \varepsilon_{\xi\theta} = 2 \mathbb{H}_{\xi\theta} + \Omega h_{,\xi} \phi_{\xi} + (1 + h_{,\xi}^2) \phi_{\xi} \phi_{\theta} \quad .$$

On ne commet qu'une erreur $O(P^2)$ en remplaçant cette expression par

$$2 \varepsilon_{\xi\theta} = 2 \mathbb{H}_{\xi\theta} + \Omega h_{,\xi} \phi_{\xi} + \phi_{\xi} \phi_{\theta} \quad (15.24)$$

15.5 - Changements de courbure en rotations modérées

Pour K_{ξ} , comme $\pi_{\xi} = O(\gamma/L)$, on a simplement

$$K_{\xi} = \alpha_{\xi\xi} \quad (15.25)$$

avec une erreur relative $O(\gamma^{1/2})$. En ce qui concerne K_{θ} , on a

$$K_{\theta} = \frac{1}{R^2} \left(\left(1 + \frac{h \cos \phi}{R}\right) \alpha_{\theta\theta} - \frac{\cos \phi}{R} \lambda_{\theta\theta} + \lambda_{\xi\theta} \alpha_{\xi\theta} + \frac{1}{R^2} \lambda_{\theta\theta} \alpha_{\theta\theta} - \phi_{\theta} \pi_{\theta} \right)$$

$$O.G. \quad \gamma^{1/2}/L \quad \gamma/R_{\theta} \quad \gamma/L \quad \gamma/L \quad \gamma/R_{\theta}$$

ce qui entraîne, avec une erreur relative $O(\gamma^{1/2}, \gamma^{1/2} \frac{L}{R_{\theta}}, P^2)$,

$$K_{\theta} = \frac{1}{R^2} \alpha_{\theta\theta} \quad (15.26)$$

Venons-en au changement de torsion. On peut visiblement négliger les termes non linéaires, d'ordre $\gamma/L, \gamma/R_{\theta}$. Les termes linéaires s'écrivent, comme $\pi_{\theta} = -\beta \cos \phi + O(\gamma)$,

$$2 K_{\xi\theta} = (1/R) (\alpha_{\xi\theta} + (1 + \frac{h \cos \phi}{R}) \alpha_{\theta\xi} + h_{,\xi} \beta \frac{\cos \phi}{R} - \frac{\cos \phi}{R} \lambda_{\theta\xi}) \quad (15.27)$$

On peut lui laisser cette forme ou encore écrire, par (15.21),

$$2 K_{\xi\theta} = \frac{1}{R} (\alpha_{\xi\theta} + (1 + \frac{h \cos \phi}{R}) \alpha_{\theta\xi}) - \frac{\cos \phi}{R} (1 + \frac{h \cos \phi}{R})^{-1} (\mathbb{H}_{\xi\theta} + \Omega) + \frac{1}{R} h_{,\xi} \beta \cos \phi ,$$

expression dans laquelle le terme contenant $\mathbb{H}_{\xi\theta}$ est d'ordre γ/R_θ et peut donc être négligé. Il vient alors

$$2 K_{\xi\theta} = \frac{1}{R} (\alpha_{\xi\theta} + (1 + \frac{h \cos \phi}{R}) \alpha_{\theta\xi}) - \frac{\cos \phi}{R} (1 + \frac{h \cos \phi}{R})^{-1} \Omega + \frac{1}{R} h_{,\xi} \beta \cos \phi , \quad (15.27')$$

expression plus parlante que (15.27) d'un point de vue géométrique, mais plus lourde à manipuler. Il n'est pas possible de pousser la simplification plus loin sans détruire la représentation exacte des déplacements rigides.

15.6 - Déformations de cisaillement transversal en rotations modérées

On peut écrire

$$\begin{aligned} 2 \varepsilon_{\xi 3} &= \alpha + \phi_{\xi} + h_{,\xi} q + (\mathbb{H}_{\xi} - h_{,\xi} \phi_{\xi}) \\ &\quad + (1 + \frac{h \cos \phi}{R})^{-1} (\mathbb{H}_{\xi\theta} + \Omega) \beta + q \phi_{\xi} \\ &= \alpha + \phi_{\xi} + \Omega \beta + O(P\gamma, \gamma^{3/2}) . \end{aligned} \quad (15.28)$$

et

$$\begin{aligned} 2 \varepsilon_{\theta 3} &= (1 + \frac{h \cos \phi}{R}) \beta + \frac{1}{R} \phi_{\theta} + (\mathbb{H}_{\xi\theta} - \Omega - h_{,\xi} \phi_{\theta}) \\ &\quad + (1 + \frac{h \cos \phi}{R})^{-1} \mathbb{H}_{\theta} \beta + q \phi_{\theta}/R \\ &= (1 + \frac{h \cos \phi}{R}) \beta + \frac{1}{R} \phi_{\theta} - \Omega \alpha + O(P\gamma, \gamma^{3/2}) . \end{aligned} \quad (15.29)$$

Ces dernières approximations sont plus crues. Cependant, suivant les mêmes raisonnements que plus haut, on peut probablement se limiter aux expressions linéarisées

$$2 \tilde{\varepsilon}_{\xi 3} = \alpha + \phi_{\xi} \quad ; \quad 2 \tilde{\varepsilon}_{\theta 3} = (1 + \frac{h \cos \phi}{R}) \beta + \frac{1}{R} \phi_{\theta} , \quad (15.30)$$

qui suffisent à assurer correctement les conditions de Kirchhoff-Love.

15.7 - Comparaison avec les expressions obtenues dans /17/

La théorie linéaire des coques quasi-coniques avait déjà été présentée dans /17/, mais par une voie différente. Par rapport aux expressions ci-dessus des déformations, seul $K_{\xi\theta}$ diffère. L'expression obtenue dans /17/ est

$$2 \hat{K}_{\xi\theta} = \frac{1}{R} (-\alpha_{,\theta} + \beta \sin \phi + h_{,\xi} \beta \cos \phi - R \beta_{,\xi} (1 + \frac{h \cos \phi}{R})) \\ + \frac{\cos \phi}{R^2} (u_{,\theta} + h_{,\xi} w_{,\theta} - v \sin \phi - v \cos \phi h_{,\xi} + h \cos \phi v_{,\xi}) ,$$

ce qui s'écrit encore, en tenant compte des définitions (14.15) à (14.17),

$$2 \hat{K}_{\xi\theta} = \frac{1}{R} (\alpha_{\xi\theta} + (1 + \frac{h \cos \phi}{R}) \alpha_{\theta\xi} + h_{,\xi} \beta \cos \phi) \\ + \frac{\cos \phi}{R^2} (\lambda_{\xi\theta} + h_{,\xi} \phi_{\theta} + \frac{h \cos \phi}{R} \lambda_{\theta\xi}) .$$

On calcule aisément

$$2(\hat{K}_{\xi\theta} - K_{\xi\theta}) = \frac{\cos \phi}{R^2} (\lambda_{\xi\theta} + h_{,\xi} \phi_{\theta} + (1 + \frac{h \cos \phi}{R}) \lambda_{\theta\xi}) = \\ = \frac{2}{R_{\theta}} \textcircled{H}_{\xi\theta} ,$$

valeur $O(\gamma/R_{\theta})$ qui s'annule pour un déplacement rigide. Les deux expressions sont donc équivalentes au sens de Koiter. A noter que l'expression (15.27) est plus simple que l'autre.

16. COQUES DE REVOLUTION EN COORDONNEES CYLINDRIQUES

16.1 - Introduction

Nous avons jusqu'à présent envisagé deux manières approchées de traiter les coques de révolution à double courbure, tout en gardant la possibilité de représenter correctement les déplacements rigides. Toutes deux reposent en fait sur la propriété des déplacements rigides d'être des fonctions affines des coordonnées du cône. Elles ont en commun d'utiliser les composantes coniques des déplacements — dans les coques coniques, parce qu'il s'agit des composantes naturelles du problème et, dans les coques quasi-coniques, parce que l'on se ramène à un cône de référence voisin de la coque. Mais tant qu'à faire, pourquoi ne pas dissocier complètement le système d'axes des déplacements de celui de la géométrie et, à l'instar de la théorie des coques en composantes cartésiennes, construire une théorie des coques de révolution en composantes cylindriques? Un élément fini de ce genre a été développé par DELPAK /22,9/ pour l'analyse linéaire des coques de Kirchhoff-Love en déformations axisymétriques. Nous exposons ici une théorie générale des coques de révolution avec déformations dues aux efforts tranchants, pour des déplacements dépendant de l'azimut. La démarche suivie s'inspire du traitement des coques en composantes cartésiennes (section 10); il va de soi que les résultats intrinsèques de cette section, relatifs aux relations constitutives, restent valables.

16.2 - Description géométrique et déplacements

Le feuillet moyen est décrit comme aux sections précédentes par une coordonnée ξ . Sa forme est définie par les lois

$$\xi \longrightarrow R(\xi) \quad \text{et} \quad \xi \longrightarrow Z(\xi) .$$

Nous supposerons que ξ est l'abscisse curviligne au sens classique, c'est-à-dire que

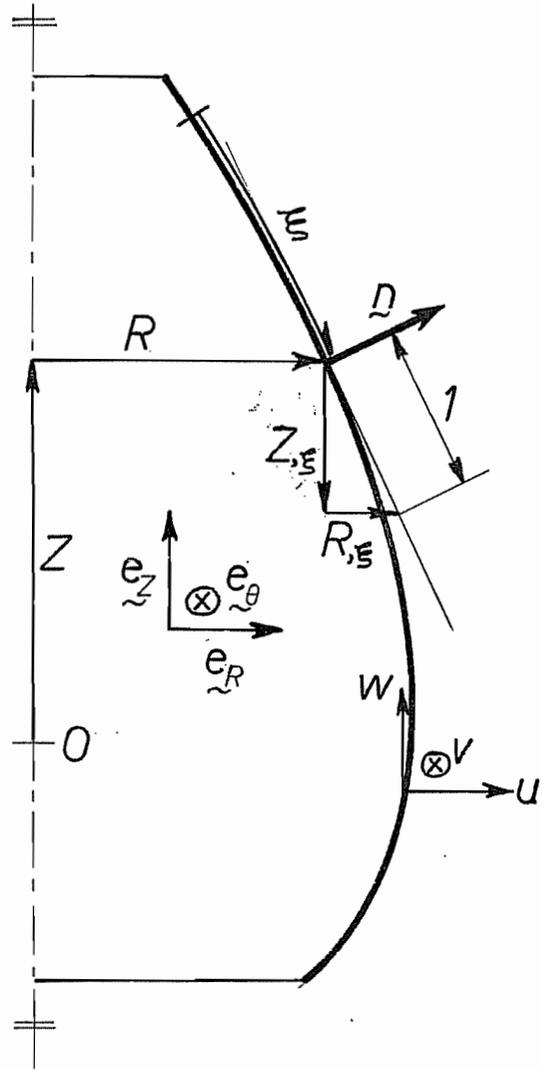
$$R_{,\xi}^2 + Z_{,\xi}^2 = 1 \quad (16.1)$$

Dans les applications, $R(\xi)$ et $Z(\xi)$ seront des polynômes de degré k , ce qui permet de définir la géométrie à l'aide de noeuds, comme dans les éléments paramétriques. Un point quelconque de la coque a alors pour coordonnées (fig. 16.1)

$$\underline{s} = R \underline{e}_R + Z \underline{e}_Z + x^3 (-Z_{,\xi} \underline{e}_R + R_{,\xi} \underline{e}_Z) \quad (16.2)$$

Les déplacements seront de la forme

Fig. 16.1



$$\tilde{v} = u \tilde{e}_R + v \tilde{e}_\theta + w \tilde{e}_Z + x^3 (\alpha \tilde{e}_R + \beta \tilde{e}_\theta + \gamma \tilde{e}_Z) \quad , \quad (16.3)$$

$u, v, w, \alpha, \beta, \gamma$ étant des fonctions de ξ et θ , polynomiales par rapport à ξ , tandis que, selon la coordonnée θ , on fera un développement en série de Fourier. Les déplacements rigides seront représentés si u, v, w sont au moins des polynômes de degré k en ξ et α, β, γ au moins des polynômes de degré $(k - 1)_+$ en ξ . Dans la structure déformée, les positions sont alors

$$\begin{aligned} \tilde{s}' = & (R + u) \tilde{e}_R + v \tilde{e}_\theta + (Z + w) \tilde{e}_Z \\ & + x^3 ((-Z_{,\xi} + \alpha) \tilde{e}_R + \beta \tilde{e}_\theta + (R_{,\xi} + \gamma) \tilde{e}_Z) \end{aligned} \quad (16.4)$$

16.3 - Calcul des déformations

Avant déformation, les vecteurs de base de la coque s'obtiennent aisément à partir des relations

$$\tilde{e}_{R,\theta} = \tilde{e}_\theta \quad ; \quad \tilde{e}_{\theta,\theta} = -\tilde{e}_R$$

établies plus haut. Il vient

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{g}_\xi &= R_{,\xi} \tilde{e}_R + Z_{,\xi} \tilde{e}_Z + x^3 (-Z_{,\xi\xi} \tilde{e}_R + R_{,\xi\xi} \tilde{e}_Z) \\ \tilde{g}_\theta &= R \tilde{e}_\theta + x^3 (-Z_{,\xi} \tilde{e}_\theta) \\ \tilde{g}_Z &= -Z_{,\xi} \tilde{e}_R + R_{,\xi} \tilde{e}_Z \end{aligned} \right. \quad (16.5)$$

ce qui entraîne

$$\left\{ \begin{aligned} g_{\xi\xi} &= 1 + 2 x^3 (-R_{,\xi} Z_{,\xi\xi} + Z_{,\xi} R_{,\xi\xi}) + (x^3)^2 (R_{,\xi\xi}^2 + Z_{,\xi\xi}^2) \\ g_{\theta\theta} &= R^2 - 2 x^3 R Z_{,\xi} + (x^3)^2 Z_{,\xi}^2 \\ g_{33} &= 1 \\ g_{\xi\theta} &= g_{\xi Z} = g_{\theta Z} = 0 \end{aligned} \right. \quad (16.6)$$

La déformation mène aux nouveaux vecteurs de base

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{g}'_\xi &= (R_{,\xi} + u_{,\xi}) \tilde{e}_R + v_{,\xi} \tilde{e}_\theta + (Z_{,\xi} + w_{,\xi}) \tilde{e}_Z \\ &+ x^3 ((-Z_{,\xi\xi} + \alpha_{,\xi}) \tilde{e}_R + \beta_{,\xi} \tilde{e}_\theta + (R_{,\xi\xi} + \gamma_{,\xi}) \tilde{e}_Z) \\ \tilde{g}'_\theta &= (u_{,\theta} - v) \tilde{e}_R + (R + v_{,\theta} + u) \tilde{e}_\theta + w_{,\theta} \tilde{e}_Z \\ &+ x^3 ((\alpha_{,\theta} - \beta) \tilde{e}_R + (-Z_{,\xi} + \beta_{,\theta} + \alpha) \tilde{e}_\theta + \gamma_{,\theta} \tilde{e}_Z) \end{aligned} \right. \quad (16.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi'_3 = (-Z_{,\xi} + \alpha) \tilde{e}_R + \beta \tilde{e}_\theta + (R_{,\xi} + \gamma) \tilde{e}_Z \end{array} \right.$$

On peut en déduire les composantes de la métrique déformée

$$\xi'_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha\beta} + 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} - 2 x^3 \rho_{\alpha\beta} + 2 (x^3)^2 \psi_{\alpha\beta}$$

dont il nous suffira d'extraire $\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta}$ et $\rho_{\alpha\beta}$, seules grandeurs de quelque intérêt. On obtient aisément

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{\gamma}_{\xi\xi} = R_{,\xi} u_{,\xi} + Z_{,\xi} w_{,\xi} + \frac{1}{2} (u_{,\xi}^2 + v_{,\xi}^2 + w_{,\xi}^2) \\ - \rho_{\xi\xi} = R_{,\xi} \alpha_{,\xi} + Z_{,\xi} \gamma_{,\xi} - Z_{,\xi\xi} u_{,\xi} + R_{,\xi\xi} w_{,\xi} \\ \quad + u_{,\xi} \alpha_{,\xi} + v_{,\xi} \beta_{,\xi} + w_{,\xi} \gamma_{,\xi} \end{array} \right. \quad (16.8)$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{\gamma}_{\theta\theta} = R(v_{,\theta} + u) + \frac{1}{2} (u_{,\theta} - v)^2 + \frac{1}{2} (v_{,\theta} + u)^2 + \frac{1}{2} w_{,\theta}^2 \\ - \rho_{\theta\theta} = R(\beta_{,\theta} + \alpha) - Z_{,\xi} (v_{,\theta} + u) + (u_{,\theta} - v)(\alpha_{,\theta} - \beta) \\ \quad + (v_{,\theta} + u)(\beta_{,\theta} + \alpha) + w_{,\theta} \gamma_{,\theta} \end{array} \right. \quad (16.9)$$

et enfin,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \overset{\circ}{\gamma}_{\xi\theta} = R_{,\xi} (u_{,\theta} - v) + R v_{,\xi} + u_{,\xi} (u_{,\theta} - v) + v_{,\xi} (v_{,\theta} + u) \\ \quad + w_{,\xi} w_{,\theta} \\ - 2 \rho_{\xi\theta} = R_{,\xi} (\alpha_{,\theta} - \beta) + Z_{,\xi} \gamma_{,\theta} + R \beta_{,\xi} - Z_{,\xi} v_{,\xi} \\ \quad - Z_{,\xi\xi} (u_{,\theta} - v) + R_{,\xi\xi} w_{,\theta} + u_{,\xi} (\alpha_{,\theta} - \beta) \\ \quad + v_{,\xi} (\beta_{,\theta} + \alpha) + w_{,\xi} \gamma_{,\theta} + \alpha_{,\xi} (u_{,\theta} - v) \\ \quad + \beta_{,\xi} (v_{,\theta} + u) + \gamma_{,\xi} w_{,\theta} \end{array} \right. \quad (16.10)$$

La normale conservant sa longueur, on aura

$$\xi'_{33} = (-Z_{,\xi} + \alpha)^2 + \beta^2 + (R_{,\xi} + \gamma)^2 = 1 \quad (16.11)$$

soit encore

$$\gamma_{33} = -Z_{,\xi} \alpha + R_{,\xi} \gamma + \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 = 0 \quad (16.12)$$

Il nous reste à calculer les déformations de cisaillement transversal.

On a d'une part

$$2 \gamma_{\xi 3} = g'_{\xi 3} = (R_{,\xi} + u_{,\xi})(-Z_{,\xi} + \alpha) + v_{,\xi} \beta + (Z_{,\xi} + w_{,\xi})(R_{,\xi} + \gamma) \\ + x^3 ((-Z_{,\xi} + \alpha)(-Z_{,\xi\xi} + \alpha_{,\xi}) + \beta \beta_{,\xi} \\ + (R_{,\xi} + \gamma)(R_{,\xi\xi} + \gamma_{,\xi})) .$$

Le coefficient de x^3 n'étant autre que $g'_{33,\xi} = 0$, il vient simplement

$$2 \gamma_{\xi 3} = R_{,\xi} \alpha + Z_{,\xi} \gamma + R_{,\xi} w_{,\xi} - Z_{,\xi} u_{,\xi} + \alpha u_{,\xi} + \beta v_{,\xi} + \gamma w_{,\xi} \quad (16.13)$$

D'autre part,

$$2 \gamma_{\theta 3} = g'_{\theta 3} = (u_{,\theta} - v)(-Z_{,\xi} + \alpha) + (R + v_{,\theta} + u) \beta + w_{,\theta} (R_{,\xi} + \gamma) \\ + x^3 ((-Z_{,\xi} + \alpha)(\alpha_{,\theta} - \beta) + \beta(-Z_{,\xi} + \beta_{,\theta} + \alpha) \\ + (R_{,\xi} + \gamma) \gamma_{,\theta})$$

Le coefficient de x^3 de cette expression s'écrit encore

$$(-Z_{,\xi} + \alpha) \alpha_{,\theta} + \beta \beta_{,\theta} + (R_{,\xi} + \gamma) \gamma_{,\theta} = g'_{33,\theta} = 0 ,$$

ce qui donne finalement

$$2 \gamma_{\theta 3} = R \beta + R_{,\xi} w_{,\theta} - Z_{,\xi} (u_{,\theta} - v) + \alpha (u_{,\theta} - v) + \beta (v_{,\theta} + u) \\ + \gamma w_{,\theta} \quad (16.14)$$

Les composantes physiques des déformations s'obtiennent aisément en notant que

$$a_{\xi\xi} = 1 \quad ; \quad a_{\theta\theta} = R^2 \quad ,$$

ce qui entraîne

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\xi} = \overset{\circ}{\gamma}_{\xi\xi} \quad ; \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{R^2} \overset{\circ}{\gamma}_{\theta\theta} \quad ; \quad \varepsilon_{\xi\theta} = \frac{1}{R} \overset{\circ}{\gamma}_{\xi\theta} \\ K_{\xi} = \rho_{\xi\xi} \quad ; \quad K_{\theta} = \frac{1}{R^2} \rho_{\theta\theta} \quad ; \quad K_{\xi\theta} = \frac{1}{R} \rho_{\xi\theta} \\ \varepsilon_{\xi 3} = \gamma_{\xi 3} \quad ; \quad \varepsilon_{\theta 3} = \frac{1}{R} \gamma_{\theta 3} \end{array} \right. \quad (16.15)$$

16.4 - Expressions simplifiées pour le cas des rotations modérées

Le cas des rotations modérées se caractérise par les conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{,\xi} ; v_{,\xi} ; w_{,\xi} ; \frac{1}{R}(u_{,\theta} - v) ; \frac{1}{R}(v_{,\theta} + u) ; \frac{1}{R} w_{,\theta} = O(\gamma^{\frac{1}{2}}) \\ \alpha ; \beta ; \gamma = O(\gamma^{\frac{1}{2}}) \end{array} \right.$$

qui permettent de se ramener aux expressions simplifiées suivantes des déformations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\xi} = R_{,\xi} u_{,\xi} + Z_{,\xi} w_{,\xi} + \frac{1}{2} u_{,\xi}^2 + \frac{1}{2} v_{,\xi}^2 + \frac{1}{2} w_{,\xi}^2 \\ \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{R}(v_{,\theta} + u) + \frac{1}{2R^2} ((u_{,\theta} - v)^2 + (v_{,\theta} + u)^2 + w_{,\theta}^2) \\ 2 \varepsilon_{\xi\theta} = \frac{R_{,\xi}}{R} (u_{,\theta} - v) + v_{,\xi} + \frac{Z_{,\xi}}{R} w_{,\theta} + u_{,\xi} \frac{1}{R} (u_{,\theta} - v) \\ \quad + v_{,\xi} \frac{1}{R} (v_{,\theta} + u) + w_{,\xi} \frac{1}{R} w_{,\theta} \\ - K_{\xi} = R_{,\xi} \alpha_{,\xi} + Z_{,\xi} \gamma_{,\xi} - Z_{,\xi\xi} u_{,\xi} + R_{,\xi\xi} w_{,\xi} \\ - K_{\theta} = \frac{1}{R} (\beta_{,\theta} + \alpha) - \frac{Z_{,\xi}}{R} (v_{,\theta} + u) \\ - 2 K_{\xi\theta} = \frac{R_{,\xi}}{R} (\alpha_{,\theta} - \beta) + \beta_{,\xi} + \frac{Z_{,\xi}}{R} \gamma_{,\theta} - \frac{Z_{,\xi}}{R} v_{,\xi} \\ \quad - \frac{Z_{,\xi\xi}}{R} (u_{,\theta} - v) + \frac{R_{,\xi\xi}}{R} w_{,\theta} \end{array} \right. \quad (16.17)$$

Les déformations de cisaillement transversal (16.13) et (16.14) n'admettent en principe pas de simplification. Leur forme linéarisée, probablement suffisante, est

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} = R_{,\xi} \alpha + Z_{,\xi} \gamma + R_{,\xi} w_{,\xi} - Z_{,\xi} u_{,\xi} \\ 2 \tilde{\varepsilon}_{\theta\xi} = \beta + \frac{R_{,\xi}}{R} w_{,\theta} - \frac{Z_{,\xi}}{R} (u_{,\theta} - v) \end{array} \right. \quad (16.18)$$

Enfin, la condition $\gamma_{33} = 0$ se ramène à

$$\varepsilon_{33} = -Z_{,\xi} \alpha + R_{,\xi} \gamma = 0 \quad (16.19)$$

16.5 - Conditions de Kirchhoff-Love

Lorsque l'on pose $\delta_{\xi 3} = \delta_{\theta 3} = \delta_{33} = 0$, on trouve d'abord

par (16.14)

$$\beta = -\frac{R_{,\xi}}{R} w_{,\theta} + \frac{Z_{,\xi}}{R} (u_{,\theta} - v) + O(\gamma) \quad (16.20)$$

et il est permis de négliger le terme $O(\gamma)$. Par (16.13) et (16.12), on obtient

$$\begin{cases} R_{,\xi} \alpha + Z_{,\xi} \gamma = -R_{,\xi} w_{,\xi} + Z_{,\xi} u_{,\xi} + O(\gamma) \\ -Z_{,\xi} \alpha + R_{,\xi} \gamma = O(\gamma) \end{cases} \quad (16.21)$$

Négligeant les $O(\gamma)$ et tenant compte de la condition (16.1), on obtient la solution suivante pour ce système:

$$\begin{cases} \alpha = -R_{,\xi}^2 w_{,\xi} + R_{,\xi} Z_{,\xi} u_{,\xi} \\ \gamma = -R_{,\xi} Z_{,\xi} w_{,\xi} + Z_{,\xi}^2 u_{,\xi} \end{cases} \quad (16.22)$$

Le calcul des changements de courbure pourrait se faire en remplaçant directement α , β et γ par leurs valeurs ci-dessus dans les expressions (16.7). Mais un peu d'observation permet d'arriver plus directement au résultat. Tout d'abord, (16.21) implique

$$\begin{aligned} -K_{\xi} &= R_{,\xi} \alpha_{,\xi} + Z_{,\xi} \gamma_{,\xi} + R_{,\xi\xi} w_{,\xi} - Z_{,\xi\xi} u_{,\xi} \\ &= -R_{,\xi\xi} \alpha - Z_{,\xi\xi} \gamma - R_{,\xi} w_{,\xi\xi} + Z_{,\xi} u_{,\xi\xi} . \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} R_{,\xi\xi} \alpha + Z_{,\xi\xi} \gamma &= -R_{,\xi} (R_{,\xi} R_{,\xi\xi} + Z_{,\xi} Z_{,\xi\xi}) w_{,\xi} + \\ &\quad + Z_{,\xi} (R_{,\xi} R_{,\xi\xi} + Z_{,\xi} Z_{,\xi\xi}) u_{,\xi} \end{aligned}$$

et

$$R_{,\xi} R_{,\xi\xi} + Z_{,\xi} Z_{,\xi\xi} = \frac{1}{2} (R_{,\xi}^2 + Z_{,\xi}^2)_{,\xi} = 0 ,$$

ce qui donne

$$K_{\xi} = R_{,\xi} w_{,\xi\xi} - Z_{,\xi} u_{,\xi\xi} \quad (16.23)$$

En ce qui concerne K_{θ} , on calcule aisément

$$\frac{1}{R} \beta_{,\theta} = - \frac{R_{,\xi}}{R^2} w_{,\theta\theta} - \frac{Z_{,\xi}}{R^2} (u_{,\theta\theta} - v_{,\theta})$$

et

$$\frac{\alpha}{R} = - \frac{R_{,\xi}}{R} w_{,\xi} + \frac{R_{,\xi} Z_{,\xi}}{R} u_{,\xi} \quad ,$$

d'où

$$K_{\theta} = \frac{R_{,\xi}}{R^2} w_{,\theta\theta} + \frac{Z_{,\xi}}{R^2} u_{,\theta\theta} + \frac{R_{,\xi}}{R} (R_{,\xi} w_{,\xi} - Z_{,\xi} u_{,\xi}) + \frac{Z_{,\xi}}{R^2} u_{,\theta} \quad (16.24)$$

Pour le calcul de $K_{\xi\theta}$, on déduit d'abord de (16.21)

$$R_{,\xi} \alpha_{,\theta} + Z_{,\xi} \gamma_{,\theta} = - R_{,\xi} w_{,\xi\theta} + Z_{,\xi} u_{,\xi\theta}$$

puis, à partir de (16.20), mis sous la forme

$$R\beta + R_{,\xi} w_{,\theta} - Z_{,\xi} (u_{,\theta} - v) = 0 \quad ,$$

on déduit

$$R \beta_{,\xi} + R_{,\xi\xi} w_{,\theta} - Z_{,\xi\xi} (u_{,\theta} - v) = - R_{,\xi\xi} \beta - R_{,\xi\xi} w_{,\xi\theta} + Z_{,\xi\xi} (u_{,\xi\theta} - v_{,\xi}) \quad ,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} -2 K_{\xi\theta} &= \frac{1}{R} \left(-2 R_{,\xi\xi} w_{,\xi\theta} + 2 Z_{,\xi\xi} u_{,\xi\theta} - 2 R_{,\xi\xi} \beta - 2 Z_{,\xi\xi} v_{,\xi} \right) \\ &= \frac{1}{R} \left(-2 R_{,\xi\xi} w_{,\xi\theta} + 2 Z_{,\xi\xi} u_{,\xi\theta} + 2 \frac{R_{,\xi}^2}{R} w_{,\theta} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{R_{,\xi} Z_{,\xi}}{R} (u_{,\theta} - v) - 2 Z_{,\xi\xi} v_{,\xi} \right) \end{aligned}$$

soit, en définitive,

$$K_{\xi\theta} = \frac{R_{,\xi\xi}}{R} w_{,\xi\theta} - \frac{Z_{,\xi\xi}}{R} u_{,\xi\theta} - \frac{R_{,\xi\xi}}{R^2} (R_{,\xi\xi} w_{,\theta} - Z_{,\xi\xi} (u_{,\theta} - v)) + \frac{Z_{,\xi\xi}}{R} v_{,\xi} \quad (16.25)$$

16.6 - Connexion des éléments

Nous nous limiterons au cas des rotations modérées. Si l'on tient compte de la déformation due aux efforts tranchants, les variables à connecter sont en principe $u, v, w, \alpha, \beta, \gamma$. Cependant, les rotations ne sont pas indépendantes, du fait de la liaison

$$\varepsilon_{33} = - Z_{,\xi} \alpha + R_{,\xi} \gamma = 0$$

qui peut s'interpréter comme la nullité de la composante du vecteur

$$\alpha \underline{e}_R + \beta \underline{e}_\theta + \gamma \underline{e}_Z$$

dans la direction de la normale. Il suffit donc de connecter β et la composante tangentielle dudit vecteur, soit

$$R_{,\xi} \alpha + Z_{,\xi} \gamma \quad . \quad (16.26)$$

Dans le cadre des conditions de Kirchhoff-Love, la condition (16.20) implique que β est connecté dès que les déplacements le sont sur un cercle nodal. La seule pente à connecter est alors, par (16.21),

$$- R_{,\xi} w_{,\xi} + Z_{,\xi} u_{,\xi} \quad . \quad (16.27)$$

Signalons enfin que, dans le cas où l'on prend en compte les déformations dues aux efforts tranchants, la condition (16.19) peut être imposée par pénalisation.

*

*

*

ANNEXE - INTRODUCTION A L'ELASTICITE EN COORDONNEES CURVILIGNES

A.1 - Coordonnées matérielles et coordonnées convectées

Etant donné une position de référence du corps étudié, un point quelconque de celui-ci est repéré par son vecteur-position de référence \underline{s} . Ce vecteur dépend de trois coordonnées curvilignes x^1, x^2, x^3 . Les lignes $x^i = \text{constante}$ forment un réseau de coordonnées permettant de repérer chaque point (fig. A.1). Ce sont les coordonnées matérielles. En un point, on définit la base de référence

$$\underline{g}_i = \underline{s}_{,i} \quad (A.1)$$

La déformation a pour effet de déplacer les points de la structure: le point situé en \underline{s} dans la position de référence prend la nouvelle position \underline{s}' que l'on peut mettre sous la forme

$$\underline{s}' = \underline{s} + \underline{u} \quad (A.2)$$

Le vecteur \underline{u} est appelé vecteur-déplacement. Lors de la déformation, le réseau $x^i = \text{cte}$, supposé tracé préalablement sur le corps, se déforme pour donner ce que l'on appelle les coordonnées convectées, qui ont toujours la même valeur que les coordonnées matérielles, mais représentent cette fois-ci les points déplacés. La base convectée est donnée par

$$\underline{g}'_i = \underline{s}'_{,i} = \underline{s}_{,i} + \underline{u}_{,i} = \underline{g}_i + \underline{u}_{,i} \quad (A.3)$$

On a évidemment

$$\begin{aligned} \underline{g}'_i &= (\underline{g}'_i \cdot \underline{g}^j) \underline{g}_j = (\underline{g}_i \cdot \underline{g}^j + \underline{u}_{,i} \cdot \underline{g}^j) \underline{g}_j = \\ &= (\delta_i^j + u^j{}_{|i}) \underline{g}_j \end{aligned} \quad (A.4)$$

Un vecteur quelconque \underline{a} défini en un point de la structure déformée peut être développé aussi bien en termes des \underline{g}_i qu'en termes des \underline{g}'_i :

$$\underline{a} = a'_i \underline{g}'^i = a_i \underline{g}^i \quad ,$$

avec

$$a'_i = \underline{a} \cdot \underline{g}'_i \quad \text{et} \quad a_i = \underline{a} \cdot \underline{g}_i \quad .$$

On a directement

$$a'_i = \underline{a} \cdot (\delta_i^j + u^j{}_{|i}) \underline{g}_j = (\delta_i^j + u^j{}_{|i}) a_j \quad (A.5)$$

Les dérivées de ce vecteur s'écrivent également de deux manières:

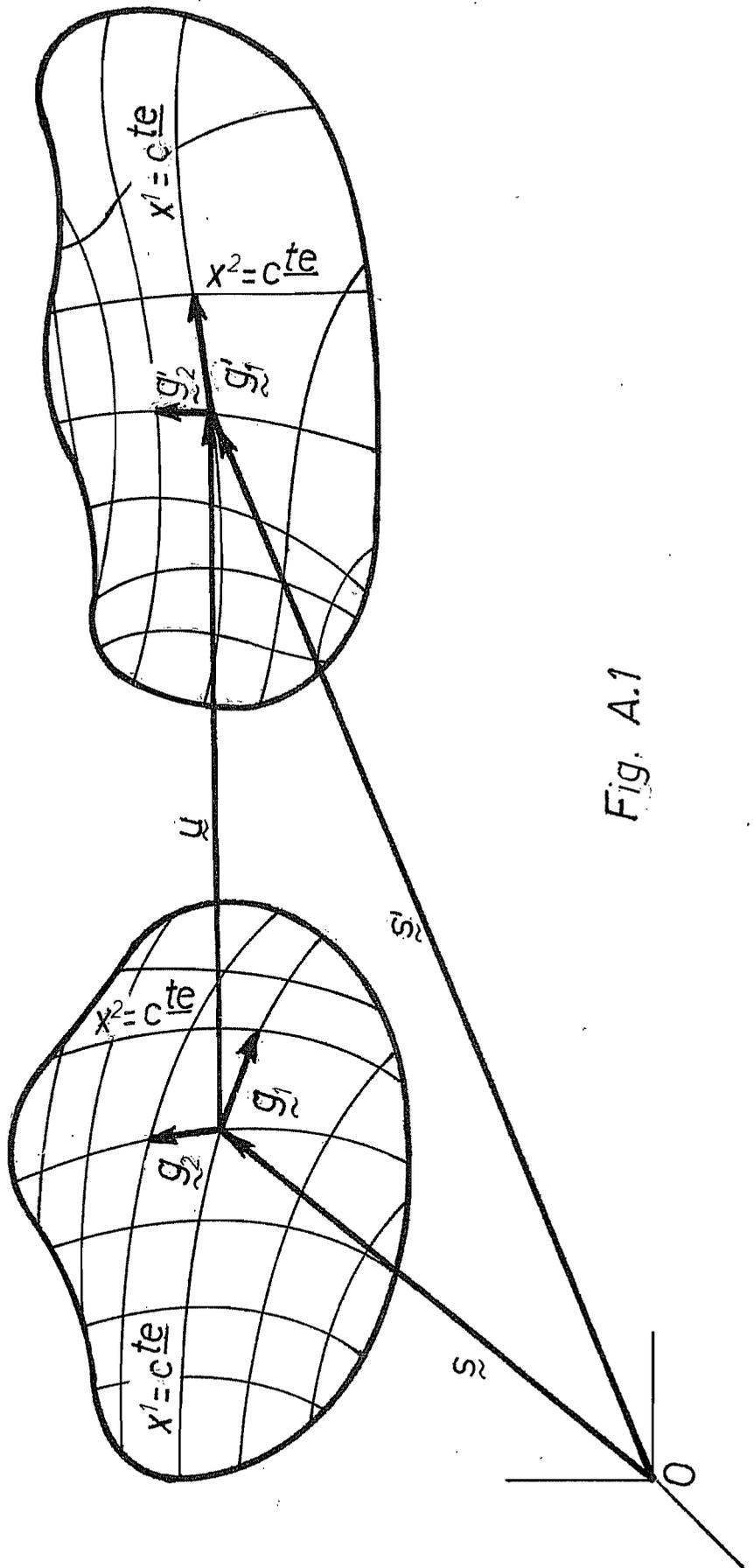


Fig. A.1

$$\tilde{a}_{,i} = (\tilde{a}_{,i} \cdot \tilde{g}_j) \tilde{g}^j = (\tilde{a}_{,i} \cdot \tilde{g}_j^v) \tilde{g}^{v,j} .$$

On pose naturellement

$$a_{j||i} = \tilde{a}_{,i} \cdot \tilde{g}_j \quad ; \quad a_{j||i}^v = \tilde{a}_{,i} \cdot \tilde{g}_j^v . \quad (A.6)$$

La relation entre ces deux types de dérivées covariantes est donnée par

$$a_{j||i}^v = \tilde{a}_{,i} \cdot (\delta_i^k + u^k||_i) \tilde{g}_k = (\delta_i^k + u^k||_i) a_{k||i} \quad (A.7)$$

A.2 - Déplacements virtuels

Soient, dans la configuration déformée, $f^{v,i}$ les forces de volume et $t^{v,i}$ les forces de surface, pour un corps quelconque de volume déformé V^v et de surface déformée S^v . Le corps est décrit par les coordonnées convectées. Le principe des travaux virtuels s'écrit

$$\int_{V^v} \delta W^v dV^v = \int_{V^v} f^{v,i} \delta u_i^v dV^v + \int_{S^v} t^{v,i} \delta u_i^v dS^v \quad (A.8)$$

Admettant que, sur toute surface, on peut représenter les tractions de surface sous la forme

$$t^{v,i} = n_j^v \sigma^{v,ji} \quad , \quad (A.9)$$

où n_j^v est la normale extérieure au corps déformé et $\sigma^{v,ji}$, les tensions vraies en coordonnées convectées, on a donc

$$\int_{S^v} t^{v,i} \delta u_i^v dS^v = \int_{S^v} n_j^v \sigma^{v,ji} \delta u_i^v dS^v = \int_{V^v} (\sigma^{v,ji} \delta u_i^v)||_j^v dV^v ,$$

ce qui ramène le principe des travaux virtuels à

$$\int_{V^v} (\delta W^v - \sigma^{v,ji}||_j^v \delta u_i^v - \sigma^{v,ji} \delta u_i^v||_j^v - f^{v,i} \delta u_i^v) dV^v = 0 \quad (A.10)$$

Ce principe est valable non seulement pour le corps entier, mais aussi pour toute partie de celui-ci. La physique du problème mène à imposer les conditions suivantes /28,30/

- { (i) $\delta W^v = 0$ lors d'une translation virtuelle d'ensemble
(ii) $\delta W^v = 0$ lors d'une rotation virtuelle d'ensemble

Pour exprimer la condition (i), notons qu'une translation d'ensemble se caractérise par

$$\delta u_{,j} = 0 \quad , \quad \text{soit} \quad \delta u_i^v||_j^v = 0 .$$

Il vient donc, pour tout δu_i^v vérifiant cette condition et tout V^v ,

$$0 = \int_{V'} (\sigma'^{ji} \parallel_j^i + f'^i) \delta u'_i \, dV' = \int_{V'} (\sigma'^{ji} \parallel_j^i + f'^i) \delta \underline{u} \cdot \underline{g}'_i \, dV'$$

$$= \delta \underline{u} \cdot \int_{V'} (\sigma'^{ji} \parallel_j^i + f'^i) \underline{g}'_i \, dV'$$

soit, comme $\delta \underline{u}$ est arbitraire,

$$\int_{V'} (\sigma'^{ji} \parallel_j^i + f'^i) \underline{g}'_i \, dV' = 0$$

quel que soit V' , ce qui implique

$$(\sigma'^{ji} \parallel_j^i + f'^i) \underline{g}'_i = 0$$

soit encore

$$\sigma'^{ji} \parallel_j^i + f'^i = 0 \quad . \quad (A.11)$$

Ce sont les équations d'équilibre de translation en coordonnées convectées.

Passons à la condition (ii). Une rotation virtuelle d'ensemble est de la forme

$$\delta \underline{u} = \delta \underline{\omega} \times \underline{g}' \quad ,$$

ce qui implique

$$\delta \underline{u}_{,j} = \delta \underline{\omega} \times \underline{g}'_j$$

et

$$\begin{aligned} \delta \underline{u}_{,j} \cdot \underline{g}'_i &= (\delta \underline{\omega} \times \underline{g}'_j) \cdot \underline{g}'_i = (\underline{g}'_j \times \underline{g}'_i) \cdot \delta \underline{\omega} = \\ &= \varepsilon'_{jik} \underline{g}'^k \cdot \delta \underline{\omega} = \varepsilon'_{jik} \delta \omega'^k \quad . \end{aligned}$$

Tenant compte de la relation (A.11), l'équation des travaux virtuels se ramène à

$$0 = \int_{V'} \varepsilon'_{jik} \sigma'^{ji} \delta \omega'^k \, dV' = \int_{V'} \varepsilon'_{jik} \sigma'^{ji} \delta \underline{\omega} \cdot \underline{g}'^k \, dV'$$

soit

$$\delta \underline{\omega} \cdot \int_{V'} \varepsilon'_{jik} \sigma'^{ji} \underline{g}'^k \, dV' = 0$$

ce qui, vu l'arbitraire de $\delta \underline{\omega}$ et de V' , donne

$$\varepsilon'_{jik} \sigma'^{ji} \underline{g}'^k = 0$$

ou encore,

$$\varepsilon'_{jik} \sigma'^{ji} = 0 \quad , \quad (A.12)$$

relation exprimant l'équilibre de rotation sous la forme de la symétrie du tenseur σ^{ji} .

Tenant compte de (A.11) et (A.12), on obtient encore

$$\int_{V'} (\delta W' - \sigma^{ji} \delta u_i^j) dV' = 0$$

pour tout V' , ce qui implique

$$\delta W' = \sigma^{ji} \delta u_i^j \quad . \quad (A.13)$$

Le travail intérieur de déformation est donc

$$\delta \mathcal{U} = \int_{V'} \delta W' dV' = \int_{V'} \sigma^{ji} \delta u_i^j dV' \quad .$$

A.3 - Tensions de Kirchhoff-Trefftz

On peut transformer l'expression précédente en une intégrale sur le volume de référence, de la manière suivante: tout d'abord, on a par (A.7)

$$\delta u_i^j = (\delta_i^k + u^k|_i) \delta u_k|_j \quad ,$$

ce qui donne, vu la symétrie des σ^{ji} ,

$$\delta W' = \frac{1}{2} \sigma^{ji} (\delta_i^k + u^k|_i) \delta u_k|_j + \frac{1}{2} \sigma^{ij} (\delta_i^k + u^k|_i) \delta u_k|_j$$

et, en interchangeant les noms des indices muets i et j dans le premier terme,

$$\begin{aligned} \delta W' &= \frac{1}{2} \sigma^{ij} (\delta_j^k + u^k|_j) \delta u_k|_i + \frac{1}{2} \sigma^{ij} (\delta_i^k + u^k|_i) \delta u_k|_j \\ &= \sigma^{ij} \frac{1}{2} (\delta u_j|_i + \delta u_i|_j + u^k|_j \delta u_k|_i + u_k|_i \delta u^k|_j) \\ &= \sigma^{ij} \delta \chi_{ij} \quad , \end{aligned} \quad (A.14)$$

en introduisant le tenseur

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (u_i|_j + u_j|_i + u^k|_i u_k|_j) \quad (A.15)$$

appelé tenseur des déformations de GREEN et visiblement symétrique. Par ailleurs, la conservation de la masse s'écrit localement

$$\rho dV = \rho' dV' \quad , \quad (A.16)$$

ce qui implique

$$\delta u = \int_V \frac{P}{\rho'} \sigma^{,ji} \delta \chi_{ij} dV = \int_V s^{ij} \delta \chi_{ij} dV ,$$

à condition de poser

$$s^{ij} = \frac{P}{\rho'} \sigma^{,ij} . \quad (\text{A.17})$$

Les nouvelles tensions s^{ij} ainsi définies sont appelées tensions de Kirchhoff-Trefftz

A.4 - Interprétation du tenseur de Green

La métrique non déformée est donnée par

$$\xi_{ij} = \xi_i \cdot \xi_j \quad ;$$

La métrique déformée, par

$$\begin{aligned} \xi'_{ij} &= \xi'_i \cdot \xi'_j = (\delta_i^k + u^k \parallel_i) (\delta_j^l + u^l \parallel_j) \xi_k \cdot \xi_l \\ &= (\delta_i^k + u^k \parallel_i) (\xi_{kj} + u_k \parallel_j) \\ &= \xi_{ij} + u_j \parallel_i + u_i \parallel_j + u^k \parallel_i u_k \parallel_j = \xi_{ij} + 2\chi_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Considérant l'évolution de la distance entre deux points, on a donc

$$ds'^2 - ds^2 = \xi'_{ij} dx^i dx^j - \xi_{ij} dx^i dx^j = 2\chi_{ij} dx^i dx^j$$

En particulier, on a

$$2\chi_{11} = \|\xi'_1\|^2 - \|\xi_1\|^2$$

soit

$$\frac{\chi_{11}}{\|\xi_1\|^2} = \frac{1}{2} \frac{\|\xi'_1\|^2 - \|\xi_1\|^2}{\|\xi_1\|^2} = \frac{1}{2} \frac{(\|\xi_1\| + \|\xi'_1\|)(\|\xi'_1\| - \|\xi_1\|)}{\|\xi_1\|^2} \quad (\text{A.19})$$

et, si la déformation est faible,

$$\frac{\chi_{11}}{\|\xi_1\|^2} \approx \frac{\|\xi'_1\| - \|\xi_1\|}{\|\xi_1\|} \quad (\text{A.19}')$$

c'est-à-dire que l'on retrouve à peu de chose près la variation relative de longueur. On a d'autre part

$$2\chi_{12} = \xi'_1 \cdot \xi'_2 - \xi_1 \cdot \xi_2$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma_{12}}{\|\underline{\xi}_1\| \|\underline{\xi}_2\|} &= \frac{\underline{\xi}_1' \cdot \underline{\xi}_2'}{\|\underline{\xi}_1'\| \|\underline{\xi}_2'\|} - \frac{\underline{\xi}_1 \cdot \underline{\xi}_2}{\|\underline{\xi}_1\| \|\underline{\xi}_2\|} \\ &= \frac{\|\underline{\xi}_1'\| \|\underline{\xi}_2'\|}{\|\underline{\xi}_1\| \|\underline{\xi}_2\|} \frac{\underline{\xi}_1' \cdot \underline{\xi}_2'}{\|\underline{\xi}_1'\| \|\underline{\xi}_2'\|} - \frac{\underline{\xi}_1 \cdot \underline{\xi}_2}{\|\underline{\xi}_1\| \|\underline{\xi}_2\|} \end{aligned}$$

Notant θ_{12} l'angle entre les directions $\underline{\xi}_1$ et $\underline{\xi}_2$, on a donc

$$\frac{2\gamma_{12}}{\|\underline{\xi}_1\| \|\underline{\xi}_2\|} = \sqrt{1 + 2\gamma_{11}} \sqrt{1 + 2\gamma_{22}} \cos \theta_{12}' - \cos \theta_{12} \quad (\text{A.20})$$

et, pour de petites déformations,

$$\frac{2\gamma_{12}}{\|\underline{\xi}_1\| \|\underline{\xi}_2\|} \approx \cos \theta_{12}' - \cos \theta_{12} \approx -\sin \theta_{12} (\theta_{12}' - \theta_{12}) \quad (\text{A.20}')$$

On voit donc que γ_{12} mesure la variation de l'angle entre les vecteurs de base $\underline{\xi}_1$ et $\underline{\xi}_2$.

A.5 - Equations de compatibilité

Peut-on se donner arbitrairement un champ de déformation γ_{ij} et trouver un champ de déplacements qui lui correspond par la relation (A.15) ? La réponse est négative en général et ce n'est que moyennant certaines conditions restrictives qu'il sera possible d'intégrer les déplacements à partir de (A.15).

Tout se ramène évidemment à trouver les positions \underline{s}' après déformation. Celles-ci peuvent être obtenues par intégration des relations

$$\underline{s}'_{,i} = \underline{\xi}_i \quad (\text{A.21})$$

si les vecteurs de base $\underline{\xi}_i$ sont connus. Les vecteurs de base eux-mêmes peuvent être intégrés à partir des équations

$$\underline{\xi}'_{i,j} = \Gamma'_{ipj} \underline{\xi}'^p \quad (\text{A.22})$$

qui, si elles admettent une solution, garantissent automatiquement l'intégrabilité des positions, car

$$\underline{s}'_{,ij} = \Gamma'_{ipj} \underline{\xi}'^p = \Gamma'_{jpi} \underline{\xi}'^p = \underline{s}'_{,ji}$$

Pour que les équations (A.22) admettent une solution, il faudra que

$$\xi_{i,jk}^p = \xi_{i,kj}^p \quad (\text{A.23})$$

quand on calcule les deux membres à partir du second membre de (A.22).
Comme

$$\begin{aligned} \xi_{i,jk}^p &= \Gamma_{ipj,k}^p \xi^{p,p} + \Gamma_{ipj}^p \xi_{,k}^{p,p} = \Gamma_{ipj,k}^p \xi^{p,p} - \Gamma_{ipj}^p \Gamma_{k-1}^{p,p} \xi^{p,1} \\ &= (\Gamma_{ipj,k}^p - \Gamma_{ilj}^p \Gamma_{k-p}^{p,1}) \xi^{p,p} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \xi_{i,jk}^p - \xi_{i,kj}^p &= (\Gamma_{ipj,k}^p - \Gamma_{ipk,j}^p - \Gamma_{ilj}^p \Gamma_{k-p}^{p,1} + \Gamma_{ilk}^p \Gamma_{j-p}^{p,1}) \xi^{p,p} \\ &= R_{pikj}^p \xi^{p,p} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

R_{pikj}^p étant le tenseur de courbure de Riemann de la métrique déformée.

Les équations garantissant l'intégrabilité du déplacement, appelées équations de compatibilité, sont donc

$$R_{pikj}^p = 0 \quad (\text{A.25})$$

Développons ces conditions en termes des déformations. On a d'abord

$$\begin{aligned} \Gamma_{ipj}^p &= \frac{1}{2}(\xi_{ip,j}^p + \xi_{pj,i}^p - \xi_{ij,p}^p) \\ &= \frac{1}{2}(\xi_{ip}^p \parallel_j + \xi_{pj}^p \parallel_i - \xi_{ij}^p \parallel_p + \Gamma_{j-i}^1 \xi_{ip}^p + \Gamma_{j-p}^1 \xi_{il}^p + \Gamma_{i-p}^1 \xi_{lj}^p \\ &\quad + \Gamma_{i-j}^1 \xi_{pl}^p - \Gamma_{p-i}^1 \xi_{lj}^p - \Gamma_{p-j}^1 \xi_{il}^p) \end{aligned}$$

Tenant compte du fait que

$$\xi_{ip}^p = \xi_{ip} + 2\delta_{ip}$$

ainsi que du lemme de Ricci, on obtient

$$\Gamma_{ipj}^p = \xi_{ip}^p \Gamma_{i-j}^1 + \xi_{ipj} \quad (\text{A.26})$$

avec

$$\xi_{ipj} = \delta_{ipj} + \delta_{pji} - \delta_{ijp} = \xi_{jpi} \quad (\text{A.27})$$

On peut donc calculer (en notant g^{lm} l'inverse de g_{ij} et non

$$\begin{aligned}
& g^{lp} g^{mq} g_{pq}^v \dots) \\
& g^{lm} (\Gamma_{ilk}^v \Gamma_{jmp}^v - \Gamma_{ilj}^v \Gamma_{kmp}^v) = g^{lm} g_{lq}^v g^{mr} (\Gamma_{ik}^q \Gamma_{jp}^r - \Gamma_{ij}^q \Gamma_{kp}^r) \\
& \quad + g^{lm} (g_{lq}^v \Gamma_{ik}^q \Gamma_{jmp}^v + g_{mr}^v \xi_{ilk} \Gamma_{jp}^r - g_{lq}^v \Gamma_{ij}^q \xi_{kmp} - g_{mr}^v \xi_{ilj} \Gamma_{kp}^r) \\
& \quad + g^{lm} (\xi_{ilk} \xi_{jmp} - \xi_{ilj} \xi_{kmp}) \\
& = g_{lq}^v \frac{(\Gamma_{ik}^q \Gamma_{jp}^1 - \Gamma_{ij}^q \Gamma_{kp}^1)}{\text{III}} - \frac{(\Gamma_{ij}^q \Gamma_{kp}^1)}{\text{II}} \\
& \quad + (\Gamma_{ik}^m \xi_{jmp} + \frac{\xi_{ilk} \Gamma_{jp}^1}{\text{IV}} - \Gamma_{ij}^m \xi_{kmp} - \frac{\xi_{ilj} \Gamma_{kp}^1}{\text{I}}) \\
& \quad + g^{lm} (\xi_{ilk} \xi_{jmp} - \xi_{ilj} \xi_{kmp}) \quad . \quad (\text{A.28})
\end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ipj,k}^v &= g_{lp,k}^v \Gamma_{ij}^1 + g_{lp}^v \Gamma_{ij,k}^1 + \xi_{ipj,k} = \\
&= 2 \delta_{lp} \parallel_k \Gamma_{ij}^1 + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{kl}^m g_{mp}^v + \frac{\Gamma_{ij}^1 \Gamma_{kp}^m g_{lm}^v}{\text{II}} + g_{lp}^v \Gamma_{ij,k}^1 \\
& \quad + \xi_{ipj} \parallel_k + \Gamma_{ki}^m \xi_{mpj} + \frac{\Gamma_{kp}^m \xi_{imj}}{\text{I}} + \frac{\Gamma_{kj}^m \xi_{ipm}}{\text{V}} \quad (\text{A.29})
\end{aligned}$$

et, en permutant les indices,

$$\begin{aligned}
-\Gamma_{ipk,j}^v &= -2 \delta_{lp} \parallel_j \Gamma_{ik}^1 - \Gamma_{ik}^1 \Gamma_{jl}^m g_{mp}^v - \frac{\Gamma_{ik}^1 \Gamma_{jp}^m g_{lm}^v}{\text{III}} - g_{lp}^v \Gamma_{ik,j}^1 \\
& \quad - \xi_{ipk} \parallel_j - \Gamma_{ji}^m \xi_{mpk} - \frac{\Gamma_{jp}^m \xi_{imk}}{\text{IV}} - \frac{\Gamma_{jk}^m \xi_{ipm}}{\text{V}} \quad . \quad (\text{A.30})
\end{aligned}$$

Rassemblant ces différents termes et tenant compte des compensations marquées par des chiffres romains, on obtient

$$\begin{aligned}
R_{pikj}^v &= g_{lp}^v (\Gamma_{ij,k}^1 - \Gamma_{ik,j}^1 + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^1 - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^1) \\
& \quad + \xi_{ipj} \parallel_k - \xi_{ipk} \parallel_j + g^{lm} (\xi_{ilk} \xi_{jmp} - \xi_{ilj} \xi_{kmp}) + \\
& \quad \dots / \dots
\end{aligned}$$

$$+ \Gamma_{i k}^m (\xi_{jmp} + \xi_{jpm} - 2 \gamma_{mp} \parallel_j) - \Gamma_{i j}^m (\xi_{kmp} + \xi_{kpm} - 2 \gamma_{mp} \parallel_k) \quad (A.31)$$

Or, il découle de (A.27) que

$$\begin{aligned} \xi_{jmp} + \xi_{jpm} - 2 \gamma_{mp} \parallel_j &= \gamma_{jm} \parallel_p + \gamma_{mp} \parallel_j - \gamma_{jp} \parallel_m + \gamma_{jp} \parallel_m \\ &+ \gamma_{pm} \parallel_j - \gamma_{mj} \parallel_p - 2 \gamma_{mp} \parallel_j = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, la géométrie de référence vérifie de toute évidence

$$\xi_{i,jk} = \xi_{i,kj} ,$$

et on a

$$\begin{aligned} \xi_{i,jk} &= (\Gamma_{i j}^p \xi_p)_{,k} = \Gamma_{i j,k}^p \xi_p + \Gamma_{i j}^p \Gamma_{k p}^1 \xi_1 \\ &= (\Gamma_{i j,k}^1 + \Gamma_{i j}^m \Gamma_{k m}^1) \xi_1 , \end{aligned}$$

ce qui signifie que la première parenthèse de (A.31) est nulle. Les conditions de compatibilité sont donc

$$R_{pikj}^0 = \xi_{ipj} \parallel_k - \xi_{ipk} \parallel_j + g^{1m} (\xi_{ilk} \xi_{jmp} - \xi_{ilj} \xi_{kmp}) = 0 \quad (A.32)$$

soit, explicitement,

$$\begin{aligned} R_{pikj}^0 &= \gamma_{ik} \parallel_{pj} + \gamma_{pj} \parallel_{ik} - \gamma_{ij} \parallel_{kp} - \gamma_{kp} \parallel_{ij} \\ &+ g^{1m} ((\gamma_{il} \parallel_k + \gamma_{lk} \parallel_i - \gamma_{ik} \parallel_l) (\gamma_{jm} \parallel_p + \gamma_{mp} \parallel_j - \gamma_{jp} \parallel_m) \\ &- (\gamma_{il} \parallel_j + \gamma_{jl} \parallel_i - \gamma_{ij} \parallel_l) (\gamma_{km} \parallel_p + \gamma_{pm} \parallel_k - \gamma_{kp} \parallel_m)) = 0 \end{aligned} \quad (A.33)$$

Cette forme des équations de compatibilité est due à KOITER /1/. Par rapport aux équations de compatibilité de GREEN et ZERNA /29/, elles présentent l'avantage d'être entièrement formées de dérivées covariantes, c'est-à-dire que tous les termes de (A.33) sont des tenseurs. Dans le cadre des petites déformations, on peut remplacer g^{1m} par g^{1m} , ce qui simplifie fortement les choses.

Quel est le nombre exact d'équations de compatibilité indépendantes? Le tenseur de courbure de Riemann vérifie les relations de symétrie

$$R_{pikj} = -R_{ipkj}$$

$$R_{pikj} = -R_{pijk}$$

$$R_{pikj} = R_{kjip}$$

Il existe donc trois valeurs fondamentalement distinctes pour chacun des couples pi et kj ; formant une matrice symétrique 3×3 , en termes de ces deux couples, on trouve que le tenseur de courbure a six composantes indépendantes, à savoir :

$$\begin{aligned} R_{1212} &, R_{2312} &, R_{3112} \\ &R_{2323} &, R_{3123} \\ &&R_{3131} . \end{aligned}$$

Les équations de compatibilité sont donc au nombre de six.

Supposons à présent que le tenseur χ_{ij} soit donné et qu'il vérifie les équations de compatibilité. On pourra donc intégrer les équations (A.22) le long d'une courbe quelconque $\widehat{P_0 P}$:

$$\underline{g}_i^v(P) = \underline{g}_i^v(P_0) + \int_{\widehat{P_0 P}} \Gamma_{ipj}^v \underline{g}_j^v dx^j ,$$

à condition de se donner a priori des vecteurs $\underline{g}_i^v(P_0)$, vérifiant

$$\underline{g}_i^v(P_0) \cdot \underline{g}_j^v(P_0) = g_{ij}^v(P_0) .$$

Ces dernières conditions fixent les orientations relatives et les longueurs des vecteurs de base, mais non l'orientation du trièdre : il subsiste donc une indétermination correspondant à une rotation d'ensemble du corps, sans déformation.

La base $\{\underline{g}_i^v\}$ étant obtenue en tout point, on calcule les positions par

$$\underline{s}^v(P) = \underline{s}^v(P_0) + \int_{\widehat{P_0 P}} \underline{g}_i^v dx^i ;$$

l'indétermination matérialisée par $\underline{s}^v(P_0)$ correspond à une translation d'ensemble du corps.

En conclusion, à un champ de déformations compatibles correspond un champ de déplacements unique à un mouvement de corps rigide près.

A.6 - Variation de l'élément de volume

L'équation de conservation de la masse peut être écrite sous la forme

$$\rho \sqrt{g} = \rho' \sqrt{g'} \quad , \quad (\text{A.16}')$$

ce qui permet de transformer la relation (A.17) en

$$s^{ij} = \sqrt{\frac{g'}{g}} \sigma'^{ij} \quad . \quad (\text{A.17}')$$

Calculons donc l'élément de volume déformé. On a

$$g' = e^{ijk} g'_{1i} g'_{2j} g'_{3k} = \sqrt{g} \epsilon^{ijk} g'_{1i} g'_{2j} g'_{3k}$$

et, en permutant les colonnes,

$$\epsilon_{prs} g' = g \epsilon^{ijk} g'_{pi} g'_{rj} g'_{sk} \quad .$$

Il vient donc

$$\epsilon^{prs} \epsilon_{prs} g' = 6 g' = g \epsilon^{prs} \epsilon^{ijk} g'_{pi} g'_{rj} g'_{sk} \quad ,$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{g'}{g} &= \frac{1}{6} \epsilon^{prs} \epsilon^{ijk} (g_{pi} + 2 \delta_{pi}) (g_{rj} + 2 \delta_{rj}) (g_{sk} + 2 \delta_{sk}) \quad , \\ &= \frac{1}{6} \epsilon^{prs} \epsilon^{ijk} (g_{pi} g_{rj} g_{sk} \\ &\quad + 2(\delta_{pi} g_{rj} g_{sk} + \delta_{rj} g_{pi} g_{sk} + \delta_{sk} g_{pi} g_{rj}) \\ &\quad + 4(\delta_{pi} \delta_{rj} g_{sk} + \delta_{rj} \delta_{sk} g_{pi} + \delta_{pi} \delta_{sk} g_{rj}) \\ &\quad + 8 \delta_{pi} \delta_{rj} \delta_{sk}) \\ &= \frac{1}{6} (\epsilon_{ijk} \epsilon^{ijk} \\ &\quad + 2(\epsilon_{.jk}^p \epsilon^{ijk} \delta_{pi} + \epsilon_{i.k}^r \epsilon^{ijk} \delta_{rj} + \epsilon_{ij.}^s \epsilon^{ijk} \delta_{sk}) \\ &\quad + 4(\epsilon_i^{.rs} \epsilon^{ijk} \delta_{rj} \delta_{sk} + \epsilon_j^{p.s} \epsilon^{ijk} \delta_{pi} \delta_{sk} + \epsilon_{..k}^{pr} \epsilon^{ijk} \delta_{pi} \delta_{rj}) \\ &\quad + 8 \epsilon^{prs} \epsilon^{ijk} \delta_{pi} \delta_{rj} \delta_{sk}) \\ &= \frac{1}{6} (6 + 12 \delta_i^i + 12(\delta_r^k \delta_k^j - \delta_j^k \delta_k^j) + 8 \epsilon^{prs} \epsilon^{ijk} \delta_{pi} \delta_{rj} \delta_{sk}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{g'}{g} = 1 + 2 \delta_i^i + 2(\delta_i^i \delta_j^j - \delta_j^i \delta_i^j) + \frac{4}{3} \epsilon^{prs} \epsilon^{ijk} \delta_{pi} \delta_{rj} \delta_{sk} \quad (\text{A.34})$$

En particulier, dans le cadre des petites déformations, on a

$$\sqrt{\frac{g^i}{g}} = 1 + \gamma_i^i + o(\gamma^2) \quad (\text{A.35})$$

La variation relative de volume est donc égale à la trace du tenseur des déformations, tant que l'on peut négliger le carré des déformations.

On en déduit que

$$s^{ij} = \sigma^{ij}(1 + o(\gamma)), \quad (\text{A.36})$$

ce qui permet de confondre les tensions de Kirchhoff-Trefftz et les tensions vraies en coordonnées convectées, tant que les déformations restent petites. Dans le cas des déformations incompressibles ($g^0 = g$), on a toujours $\sigma^{ij} = s^{ij}$.

A.7 - Equations constitutives des corps hyperélastiques isotropes

Un corps est dit hyperélastique s'il existe une densité d'énergie de déformation W telle que

$$dW = s^{ij} d\gamma_{ij} \quad . \quad (\text{A.37})$$

Pour un comportement linéaire, on aura

$$s^{ij} = c^{ijkl} \gamma_{kl} \quad , \quad (\text{A.38})$$

soit

$$W = \frac{1}{2} c^{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \quad . \quad (\text{A.38})$$

Si le corps est isotrope, cette expression ne peut dépendre que des invariants du tenseur des déformations. Ceux-ci sont donnés par l'équation caractéristique

$$\begin{aligned} |\gamma - \lambda g| &= \frac{1}{6} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{lmn} (\gamma_{il} - \lambda g_{il}) (\gamma_{jm} - \lambda g_{jm}) (\gamma_{kn} - \lambda g_{kn}) \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 I_1 - \lambda I_2 + I_3 \quad , \end{aligned}$$

avec

$$I_1 = \frac{1}{6} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{lmn} (\gamma_{il} g_{jm} g_{kn} + g_{il} \gamma_{jm} g_{kn} + g_{il} g_{jm} \gamma_{kn}) = \gamma_i^i$$

$$I_2 = \frac{1}{6} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{lmn} (g_{il} \gamma_{jm} \gamma_{kn} + \gamma_{il} g_{jm} \gamma_{kn} + \gamma_{il} \gamma_{jm} g_{kn})$$

$$= \frac{1}{2} (\gamma_i^i \gamma_j^j - \gamma_j^i \gamma_i^j)$$

$$I_3 = \frac{1}{6} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{lmn} \gamma_{il} \gamma_{jm} \gamma_{kn} \quad .$$

Seuls, I_1^2 et I_2 peuvent être utilisés pour construire une forme quadratique. A la place de I_2 , il est préférable d'utiliser l'invariant \hat{I}_2 correspondant au déviateur des déformations

$$\hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_1^1 \varepsilon_{ij} ,$$

qui est donné par

$$\begin{aligned} \hat{I}_2 &= -\frac{1}{2} \left((\gamma_j^i - \frac{1}{3} \gamma_1^1 \delta_j^i) (\gamma_i^j - \frac{1}{3} \gamma_1^1 \delta_i^j) \right) = -\frac{1}{2} \hat{\gamma}_i^j \hat{\gamma}_j^i \\ &= -\frac{1}{2} (\gamma_j^i \gamma_i^j - \frac{2}{3} \gamma_1^1 \gamma_i^i + \frac{1}{3} \gamma_1^1 \gamma_i^i) = -\frac{1}{2} (\gamma_j^i \gamma_i^j - \frac{1}{3} \gamma_1^1 \gamma_i^i). \end{aligned}$$

Il s'agit visiblement d'une combinaison de I_1^2 et I_2 , toujours négative.

On vérifie aisément que les conditions $I_1 = 0$, $\hat{I}_2 = 0$ impliquent $\gamma_{ij} = 0$.

Posant donc

$$W = -2G \hat{I}_2 + \frac{K}{2} I_1^2 ,$$

on devra donc avoir $G > 0$ et $K > 0$ pour que W soit définie positive, c'est-à-dire pour assurer la stabilité locale. Explicitement,

$$W = (G(g^{ik} g^{jl} - \frac{1}{3} g^{ij} g^{kl}) + \frac{1}{2} K g^{ij} g^{kl}) \gamma_{ij} \gamma_{kl} \quad (\text{A.40})$$

et

$$s^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} = (2G(g^{ik} g^{jl} - \frac{1}{3} g^{ij} g^{kl}) + K g^{ij} g^{kl}) \gamma_{kl}$$

soit

$$s^{ij} = 2G \gamma^{ij} + (K - \frac{2}{3} G) \gamma_k^k g^{ij} . \quad (\text{A.41})$$

Cette relation s'inverse aisément: on a en effet

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{2G} s^{ij} - \frac{3K - 2G}{6G} \gamma_k^k g^{ij}, \quad (\text{A.42})$$

ce qui entraîne en particulier

$$\gamma_i^i = \frac{1}{2G} s_i^i - \frac{3K - 2G}{2G} \gamma_k^k ,$$

soit

$$\gamma_k^k \left(1 + \frac{3K - 2G}{2G} \right) = \frac{1}{2G} s_i^i$$

ou encore,

$$\gamma_k^k = \frac{s_i^i}{3K} \quad (\text{A.43})$$

Réintroduisant ce résultat dans (A.42), on obtient

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{2G} (s^{ij} - \frac{3K - 2G}{9K} s_k^k g^{ij}) \quad . \quad (A.44)$$

Les ingénieurs écrivent traditionnellement

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{E} ((1 + \nu) s^{ij} - \nu s_k^k g^{ij}), \quad (A.45)$$

ce qui revient à poser

$$E = \frac{9KG}{3K + 2G} \quad (E > 0) \quad (A.46)$$

$$\nu = \frac{3 - 2(G/K)}{6 + 2(G/K)} \quad (-1 < \nu < \frac{1}{2}) \quad .$$

Les coefficients définis ci-dessus sont connus sous les noms suivants:

E : module de Young

ν : coefficient de Poisson

K : module de compression uniforme (Bulk modulus)

G : module de Coulomb.

G et K sont donnés en fonction de E et ν par les relations suivantes:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad , \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (A.47)$$

A.8 - Théorie des rotations modérées

On parle de rotations modérées lorsque tous les gradients de déplacements vérifient

$$u_i ||_j \leq O(\gamma^{\frac{1}{2}}), \quad (A.48)$$

γ étant l'ordre de grandeur des déformations, par ailleurs supposées très petites. Posant alors

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2}(u_i ||_j + u_j ||_i) \quad , \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_j ||_i - u_i ||_j), \quad (A.49)$$

l'antisymétrie du tenseur des rotations linéarisées ω_{ij} s'exprime par

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega^k \quad , \quad (A.50)$$

d'où il suit d'ailleurs

$$\varepsilon^{pij} \omega_{ij} = \varepsilon^{pij} \varepsilon_{ijk} \omega^k = 2 \omega^p. \quad (A.51)$$

Nous supposons les coordonnées choisies de telle façon que $g_{ij} = O(1)$.

Alors, de l'expression

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_i \parallel_j + u_j \parallel_i + u^k \parallel_i u_k \parallel_j) ,$$

on déduit que

$$\theta_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{1}{2} u^k \parallel_i u_k \parallel_j = o(\gamma) . \quad (\text{A.52})$$

On peut donc écrire les déformations sous la forme

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \theta_{ij} + \frac{1}{2}(\theta_i^k - \omega_{.i}^k)(\theta_{kj} - \omega_{kj}) \\ &= \theta_{ij} + \frac{1}{2} \theta_i^k \theta_{kj} - \frac{1}{2} \omega_{.i}^k \theta_{kj} - \frac{1}{2} \theta_i^k \omega_{kj} + \frac{1}{2} \omega_{.i}^k \omega_{kj} \end{aligned}$$

O.G. γ γ^2 $\gamma^{3/2}$ $\gamma^{3/2}$ γ

soit

$$\gamma_{ij} = \theta_{ij} + \frac{1}{2} \omega_{.i}^k \omega_{kj} + o(\gamma^{3/2}) . \quad (\text{A.53})$$

A.9 - Relations de compatibilité de Beltrami

Etant donné que

$$u_i \parallel_j = \theta_{ij} - \omega_{ij} = \theta_{ij} - \varepsilon_{ijl} \omega^l , \quad (\text{A.54})$$

on a

$$u_i \parallel_{jk} = \theta_{ij} \parallel_k - \varepsilon_{ijl} \omega^l \parallel_k ,$$

et les déplacements ne seront intégrables à partir de (A.54) que si

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{pjk} u_i \parallel_{jk} = \varepsilon^{pjk} \theta_{ij} \parallel_k - \varepsilon^{pjk} \varepsilon_{ijl} \omega^l \parallel_k \\ &= \varepsilon^{pjk} \theta_{ij} \parallel_k - (\delta_i^p \delta_l^k - \delta_l^p \delta_i^k) \omega^l \parallel_k \\ &= \varepsilon^{pjk} \theta_{ij} \parallel_k - \omega^k \parallel_k \delta_i^p - \omega^p \parallel_i . \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

En particulier, en contractant les indices p et i, on obtient

$$\varepsilon^{ijk} \theta_{ij} \parallel_k = \omega^k \parallel_k ,$$

et le premier membre de cette relation s'annule du fait de la symétrie des θ_{ij} . On a donc

$$\omega^i \parallel_i = 0 ,$$

ce qui ramène la relation (A.55) à

$$\omega^p \parallel_i = \varepsilon^{pjk} \theta_{ij} \parallel_k . \quad (\text{A.56})$$

Ce sont les relations de compatibilité de Beltrami.

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ W.T. KOITER - "A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells"
Part 1, Foundations and linear theory
Laboratorium voor Toegepaste Mechanica der Technische Hogeschool,
Delft, August 5th, 1959
- /2/ A.E.H. LOVE - "Mathematical Theory of Elasticity"
4^e éd., Cambridge University Press, Cambridge, 1927
- /3/ W.T. KOITER - "On the nonlinear theory of thin elastic shells"
Report Nr. 310 of the Laboratory of Engineering Mechanics,
Department of Mechanical Engineering, Technological University,
Delft.
- /4/ W.Z. CHIEN - "The intrinsic theory of thin shells and plates"
Univ. of Cal. , Publ. in Math., new series, 2, 103, 1944
- /5/ K. MARGUERRE - "Zur Theorie der gekrümmte Platte grosser Formänderung"
Proc. 5th. Int. Congr. Appl. Mech., 93 - 101, Wiley & Sons, 1938
- /6/ K. MARGUERRE - "Knick- und Beulvorgänge - Einführung in die Theorie der elastischen Stabilität"
Chap. VII de "Neuere Festigkeits probleme des Ingenieurs"
éd. par K. Marguerre, Springer Verlag, 1950
- /7/ J.F. DEBONGNIE - "Modélisation de problèmes hydroélastiques par éléments finis. Application aux lanceurs aérospatiaux"
Thèse de doctorat, Université de Liège, 1978.
- /8/ J.F. DEBONGNIE, E. CARNOY - "Comparaison de différents modèles d'éléments finis plans pour l'analyse linéaire des coques"
Proc. du congrès international sur les "Méthodes numériques de l'ingénieur", GAMNI, 27-11 au 1-12-78, éd. Dunod, 1979
- /9/ O.C. ZIENKIEWICZ - "The finite element method"
3^e édition, Mc. Graw Hill, 1977
- /10/ S. AHMAD, B.M. IRONS, O.C. ZIENKIEWICZ- "Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axisymmetric problems"
Proc. 2d. conf. matrix methods in structural mechanics,

Wright Patterson A.F. base, Ohio, 1968

- /11/ S. AHMAD - "Curved finite elements in the analysis of solid, shell and plate structures"
Ph. D. thesis, Univ of Wales, Swansea, 1969
- /12/ S. AHMAD, B.M. IRONS, O.C. ZIENKIEWICZ - "Analysis of thick and thin shell structures by curved elements"
Int. Jl. Num. Meth. Eng., 2, 419-451, 1970
- /13/ G. SANDER - "Application des éléments finis à la flexion des plaques"
Coll. Publ. Fac. Sci. Appli. Univ. Liège, n° 15, 1969
- /14/ M. HOGGE - "Famille d'éléments finis de coque plans cinématiquement admissibles pour l'analyse statique des structures"
Rapport LTAS SF-18, Université de Liège.
- /15/ S. IDELSOHN - "Analyse statique et dynamique des coques par la méthode des éléments finis"
Thèse de doctorat, rapport LTAS SF-25, Université de Liège.
- /16/ B.M. FRAEIJIS de VEUBEKE - "Nonlinear theory of shells"
Rapport LTAS SF-21, Université de Liège
- /17/ J.F. DEBONGNIE - "Physical interpretation and generalization of Marguerre's shallow shell theory"
Int. J. Eng. Sci., vol. 17, pp. 387-399, 1979
- /18/ J.F. DEBONGNIE - "Théorie des poutres faiblement vrillées"
Rapport LTAS SF-76, Université de Liège
- /19/ L.H. DONNELL - "A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending"
T.A.S.M.E., 56, p. 795, 1934
- /20/ H. ARON - "Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen, beliebig gekrümmten, elastischen Schale"
Journ. für reine und angewandte Mathematik, 78, p. 136, 1874
- /21/ P.E. GRAFTON, D.R. STROME - "Analysis of axi-symmetric shells by the direct stiffness method"
J.A.I.A.A., 1, pp. 2342-2347, 1963

- /22/ R. DELPAK - "Role of the curved parametric element in linear analysis of thin rotational shells"
Ph. D. thesis, Dept. of civil engineering and building,
The Polytechnic of Wales, 1975
- /23/ R.N. ARNOLD, G.B. WARBURTON - "The flexural vibrations of thin cylinders"
Proc. Institution of Mechanical Engineers 167 (A), pp. 62-80, 1953
- /24/ F. BROGAN, K. FORSBERG, S. SMITH - "Experimental and analytical investigation of the dynamic behavior of a cylinder with a cutout"
- /25/ H.M. ADELMAN, D.S. CATHERINES, W.C. WALTON Jr. - "A method for computation of vibration modes and frequencies of orthotropic thin shells of revolution"
NASA - TN - D - 4972, 1969
- /26/ L.D. PINSON, C.G. BROWN - "A finite element method for nonaxisymmetric vibrations of pressurized shells of revolution partially filled with liquid"
A.I.A.A./A.S.M.E./S.A.E 14th structures, structural dynamics, and material conference, Williamsburg, Virginia, March 20-22, 1973
- /27/ V.V. NOVOZHILOV - "The theory of thin shells"
P. Noordhoff Ltd, Groningen, 1959
- /28/ B. FRAEIJIS de VEUBEKE - "A new variational principle for finite elastic displacements"
Int. J. Eng. Sci., vol. 13, pp. 745-763, 1972
- /29/ A.E. GREEN, W. ZERNA - "Theoretical Elasticity"
Oxford, Clarendon Press, 1954
- /30/ B. FRAEIJIS de VEUBEKE - "A course in elasticity"
Applied Math. Sci. 29, Springer Verlag, 1979
- /31/ G. DUPUIS, J.J. GOËL - "A curved finite element for thin elastic shells"
Int. J. Solids Structures, vol 6, 1970
- /32/ S. IDELSOHN - "On the use of deep, shallow and flat shell finite elements for the analysis of thin shell structures"
Rapport LTAS SA-80, Université de Liège, 1980