

Fonctionnement et performances des couloirs oscillants à glissement

J.F. DEBONGNIE, L. MASSET

Laboratoire de Méthodes de Fabrication
Institut de Mécanique, Université de Liège
Chemin des Chevreuils, 1,
BELGIUM, B-4000 Liège
Tél. : +3243669271 - Fax : +3243669272
JF.Debongnie@ulg.ac.be, Luc.Masset@ulg.ac.be

Summary

This paper is devoted to the study of the efficiency of an oscillating trough for any value of the frequency. It is found that pure slipping or mixed cycles may occur, the latter comprising sticking periods. The results of the present analysis concern the cyclic displacement, the mean velocity and the dissipated power.

Résumé

Cet article traite du fonctionnement et des performances des couloirs oscillants, pour une pulsation quelconque. Le régime de fonctionnement peut être purement glissant ou mixte, avec des temps d'adhérence. Sont calculés, le déplacement par cycle, la vitesse moyenne et la puissance dissipée.

Keywords : conveying and transporting devices, oscillating trough, non-linear mechanics, performances

Notations

u	déplacement horizontal de la table
v	déplacement vertical de la table
r	rayon de la manivelle
φ	angle à la manivelle
w	vitesse de rotation de la manivelle, pulsation du mouvement
α	angle d'inclinaison de la suspension
m	masse posée sur le couloir
N	force verticale transmise à la masse
g	accélération de la pesanteur
T	force de frottement
μ	coefficient de frottement
Δw	déplacement de la masse lors d'un cycle
φ_0, φ_1	angles de début et de fin du glissement négatif
φ_2, φ_3	angles de début et de fin du glissement positif
$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$	
P_f	puissance de frottement
\mathcal{T}_f	travail de frottement

1. Introduction

Les couloirs oscillants sont utilisés pour résoudre maints problèmes de transport mécanique. En fonction de l'intensité de la vibration imposée au couloir, le transfert peut être dû à un lancement de la matière (throw conveyor) ou simplement à son glissement (sliding conveyor). Excluant a priori les convoyeurs à lancement, dont la modélisation implique des hypothèses délicates relatives aux conditions du choc d'atterrissage de la matière transportée [1], nous limiterons notre investigation aux seuls convoyeurs à glissement. En dehors de travaux anciens [3,4] qui se limitent au cas de la pulsation maximale de non-lancement, on trouve

très peu de renseignements à ce sujet dans la littérature. Les bases d'une étude complète sont données par HARDING et NEDDERMAN [2], mais leur résolution numérique mène à des diagrammes assez peu pratiques.

Une étude analytique du fonctionnement est cependant possible à partir de la condition de fermeture d'un cycle établi où la matière glisse constamment. Sur cette base, il est assez aisé de déterminer le déplacement par cycle et la vitesse moyenne de transport, en fonction de la pulsation. Une analyse un peu plus fouillée montre qu'en-deçà d'une certaine pulsation, le cycle change de nature,

car il apparaît des temps d'adhérence qui, du reste, concourent au transport.

En ce qui concerne la puissance de frottement, un résultat particulièrement intéressant est qu'en régime de glissement pur, cette puissance est directement proportionnelle au débit, leur rapport ne dépendant ni du coefficient de frottement, ni de la pulsation.

2. Mouvement du couloir

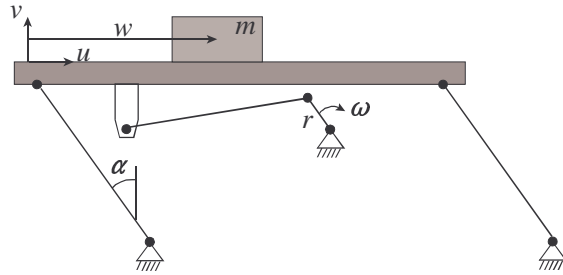


Figure 1 : le couloir vibrant

Le couloir, supposé horizontal, est astreint par sa suspension à se mouvoir à peu de chose près selon une droite d'angle α par rapport à l'horizontale, montant de gauche à droite (fig. 1). Le mouvement horizontal est commandé par un système bielle-manivelle dont la bielle est très longue devant le rayon de la manivelle. On peut donc écrire sans grande erreur

$$u = -r \cos \varphi \quad (1)$$

où r est le rayon de la manivelle, u le déplacement de la table, et φ l'angle à la manivelle, posé nul au point mort gauche.

L'angle α d'obliquité de la suspension a pour effet de conjuguer au mouvement horizontal, petit devant la longueur des bielles de suspension, un mouvement vertical vers le haut

$$v = u \tan \alpha = -r \cos \varphi \tan \alpha \quad (2)$$

Les vitesses sont donc

$$\dot{u} = \omega r \sin \varphi, \quad \dot{v} = \omega r \sin \varphi \tan \alpha \quad (3)$$

et les accélérations,

$$\ddot{u} = \omega^2 r \cos \varphi, \quad \ddot{v} = \omega^2 r \cos \varphi \tan \alpha \quad (4)$$

3. Action du couloir sur une masse m posée dessus

Soit une masse m posée sur le couloir (fig. 2). Dans le cas où la liaison masse-couloir n'est pas rompue,

la vitesse verticale de la masse est v , et l'équation de son mouvement dans cette direction est

$$m\ddot{v} = N - mg,$$

ce qui signifie que la force verticale N que lui transmet le couloir est donnée par

$$N = m(g + \ddot{v}) = m(g + \omega^2 r \cos \varphi \tan \alpha) \quad (5)$$

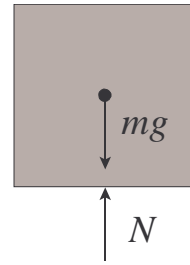


Figure 2 : équilibre de la masse portée

Cette force doit rester constamment positive, sous peine de perdre tout contrôle du couloir sur la masse, qui s'envolerait. Il est donc nécessaire d'assurer la condition

$$g + \omega^2 r \cos \varphi \tan \alpha \geq 0$$

quel que soit l'angle de manivelle φ . Le minimum du premier membre se produisant pour $\cos \varphi = -1$, on obtient la condition

$$\omega \leq \sqrt{\frac{g}{r \tan \alpha}} = \omega_{\max} \quad (6)$$

qui fixe la pulsation maximale.

Examinons à présent le mouvement horizontal. Soit \dot{w} la vitesse horizontale de la masse. Trois cas sont possibles :

- (a) Le couloir va plus vite que la masse, $\dot{u} > \dot{w}$. Il lui transmet alors la force de frottement

$$T = \mu N = \mu m(g + \omega^2 r \cos \varphi \tan \alpha),$$

et l'accélération de la masse est donc donnée par

$$\ddot{w} = \frac{T}{m} = \mu(g + \omega^2 r \cos \varphi \tan \alpha) \quad (7)$$

- (b) Le couloir va moins vite que la masse, $\dot{u} < \dot{w}$. Il lui transmet alors la force de frottement

$$T = -\mu N = -\mu m(g + \omega^2 r \cos \varphi \tan \alpha)$$

si bien que l'accélération de la masse est donnée par

$$\ddot{w} = -\mu(g + \omega^2 r \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha) \quad (8)$$

- (c) La masse adhère au couloir, ce qui implique que leurs accélérations coïncident. Alors,

$$T = m\ddot{u}$$

et cette force doit rester inférieure en valeur absolue à μN , condition qui s'écrit

$$|m\ddot{u}| \leq \mu m(g + \omega^2 r \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha)$$

soit

$$\ddot{u} \leq \mu(g + \omega^2 r \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha) \quad (9)$$

et

$$\ddot{u} \geq -\mu(g + \omega^2 r \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha) \quad (10)$$

Tenant compte de l'expression (4) de l'accélération du couloir, ces conditions s'écrivent respectivement

$$\cos \varphi \leq \frac{\mu g}{\omega^2 r(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)} \quad (11)$$

et

$$\cos \varphi \geq \frac{-\mu g}{\omega^2 r(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)} \quad (12)$$

Il en découle en particulier que tout mouvement relatif est impossible si

$$\frac{\mu g}{\omega^2 r(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)} \geq 1$$

soit si

$$\omega \leq \sqrt{\frac{\mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} \frac{g}{r}} = \omega_{adh} \quad (13)$$

Pour des pulsations inférieures, la masse adhère constamment au couloir.

4. Cas où le couloir va plus vite que la masse (glissement négatif, fig. 3)

Supposons qu'à partir d'un angle φ_0 , correspondant à un instant $t_0 = \frac{\varphi_0}{\omega}$, la vitesse du couloir \dot{u} commence à surpasser celle de la masse, \dot{w} . A partir de ce moment, l'accélération est donc par (7)

$$\ddot{w} = \mu(g + \omega^2 r \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha)$$

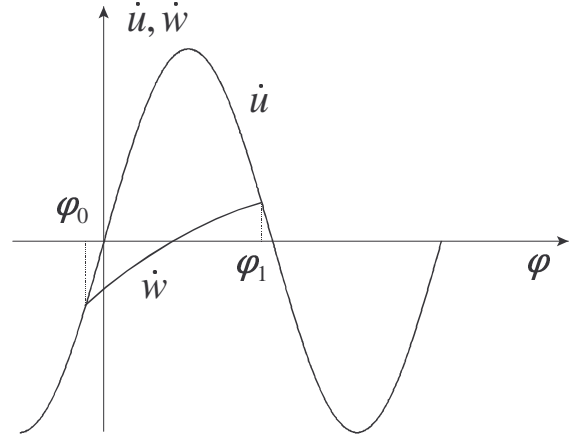


Figure 3 : glissement négatif

Comme en t_0 , les deux vitesses coïncident, on n'aura $\dot{w} < \dot{u}$ juste après que si $\ddot{w}(t_0) \leq \ddot{u}(t_0)$, c'est-à-dire si

$$\mu(g + \omega^2 r \cos \varphi_0 \operatorname{tg} \alpha) \leq \omega^2 r \cos \varphi_0,$$

soit

$$\cos \varphi_0 \geq \frac{\mu g}{\omega^2 r(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)} = (\cos \varphi_0)_{\min} \quad (14)$$

Cette condition étant supposée vérifiée, l'intégration de (7) donne

$$\dot{w} = \dot{u}(t_0) + \mu g(t - t_0) + \mu \omega r \operatorname{tg} \alpha (\sin \varphi - \sin \varphi_0)$$

soit

$$\dot{w} = \omega r \sin \varphi_0 (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) + \frac{\mu g}{\omega} (\varphi - \varphi_0) + \mu \omega r \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi \quad (15)$$

Cette situation se maintient tant que \dot{w} reste inférieur à \dot{u} , c'est-à-dire jusqu'à l'angle φ_1 où $\dot{w}(\varphi_1) = \dot{u}(\varphi_1)$, ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} \omega r \sin \varphi_1 &= \omega r \sin \varphi_0 (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) + \frac{\mu g}{\omega} (\varphi_1 - \varphi_0) \\ &+ \mu \omega r \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

soit

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_0 + \frac{\mu g}{\omega^2 r(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)} (\varphi_1 - \varphi_0) \quad (16)$$

Le déplacement de la masse entre φ_0 et φ_1 s'obtient en intégrant la relation (15) :

$$\begin{aligned} w_1 - w_0 &= r \sin \varphi_0 (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) (\varphi_1 - \varphi_0) \\ &+ \frac{\mu g}{2\omega^2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 + \mu r \operatorname{tg} \alpha (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) \end{aligned}$$

Notant que, par (16),

$$\frac{\mu g}{2\omega^2}(\varphi_1 - \varphi_o)^2 = (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) \frac{r}{2} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_o)(\varphi_1 - \varphi_o),$$

on obtient l'expression équivalente

$$w_1 - w_o = (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)(\varphi_1 - \varphi_o) \frac{r}{2} (\sin \varphi_o + \sin \varphi_1) + \mu r \operatorname{tg} \alpha (\cos \varphi_o - \cos \varphi_1)$$

soit encore

$$w_1 - w_o = r \sin \frac{\varphi_o + \varphi_1}{2} \left[(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)(\varphi_1 - \varphi_o) \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_o}{2} + 2\mu \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_o}{2} \right] \quad (17)$$

5. Cas où le couloir va moins vite que la masse (glissement positif, fig. 4)

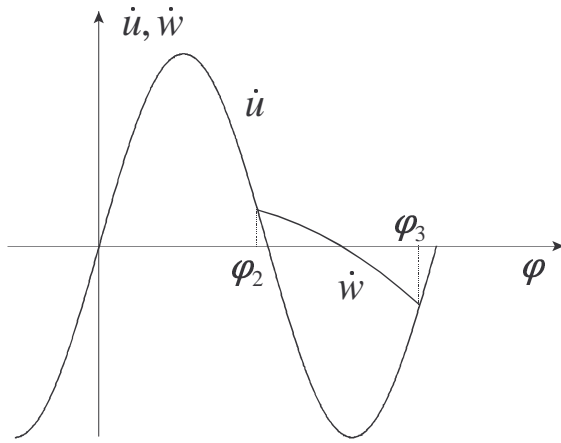


Figure 4 : glissement positif

Supposons à présent qu'à partir d'un angle φ_2 , correspondant à un instant $t_2 = \varphi_2/\omega$, la vitesse du couloir \dot{u} devient inférieure à \dot{w} . A partir de ce moment, l'accélération est donnée par la relation (8). Comme en t_2 , les deux vitesses coïncident, on n'aura $\dot{w} > \dot{u}$ juste après que si $\dot{w}(t_3) \geq \ddot{u}(t_3)$ c'est-à-dire si

$$-\mu(g + \omega^2 r \cos \varphi_2 \operatorname{tg} \alpha) \geq \omega^2 r \cos \varphi_2$$

soit

$$\cos \varphi_2 \leq -\frac{\mu g}{\omega^2 r (1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)} = (\cos \varphi_2)_{\max} \quad (18)$$

En supposant cette condition vérifiée, on peut intégrer (8) pour obtenir la vitesse de la masse :

$$\dot{w} = \dot{u}(t_2) - \mu g(t - t_2) - \mu \omega r \operatorname{tg} \alpha (\sin \varphi - \sin \varphi_2)$$

soit

$$\dot{w} = \omega r \sin \varphi_2 (1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) - \frac{\mu g}{\omega} (\varphi - \varphi_2) - \mu \omega r \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi \quad (19)$$

Le glissement considéré cessera d'avoir lieu lorsqu'en un angle φ_3 , on obtiendra $\dot{w}(\varphi_3) = \dot{u}(\varphi_3)$, ce qui s'écrit

$$\omega r \sin \varphi_3 = \omega r \sin \varphi_2 (1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) - \frac{\mu g}{\omega} (\varphi_3 - \varphi_2) - \mu \omega r \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_3$$

soit

$$\sin \varphi_3 = \sin \varphi_2 - \frac{\mu g}{\omega^2 r (1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)} (\varphi_3 - \varphi_2) \quad (20)$$

Le déplacement de la masse entre φ_2 et φ_3 s'obtient en intégrant la relation (19) :

$$w_3 - w_2 = r \sin \varphi_2 (1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) (\varphi_3 - \varphi_2) - \frac{\mu g}{2\omega} (\varphi_3 - \varphi_2)^2 - \mu r \operatorname{tg} \alpha (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_3)$$

Ici encore, on peut noter que par (20),

$$-\frac{\mu g}{2\omega} (\varphi_3 - \varphi_2)^2 = (1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) \frac{r}{2} (\sin \varphi_3 - \sin \varphi_2),$$

si bien que

$$w_3 - w_2 = (1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) \frac{r}{2} (\sin \varphi_2 + \sin \varphi_3) (\varphi_3 - \varphi_2) - \mu r \operatorname{tg} \alpha (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_3)$$

et, en faisant appel aux mêmes relations trigonométriques que ci-dessus,

$$w_3 - w_2 = r \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} \left[(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) (\varphi_3 - \varphi_2) \cos \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} - 2\mu \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} \right] \quad (21)$$

6. Possibilité d'un cycle glissant

Peut-on imaginer un régime cyclique formé uniquement de phases successives de glissement vers l'arrière et vers l'avant ? Nous parlerons dans ce cas d'un *cycle glissant*. Pour qu'un tel cycle soit possible, il faut (fig. 5) assurer les relations de fermeture

$$\varphi_2 = \varphi_1, \quad \varphi_3 = \varphi_o + 2\pi \quad (22)$$

et qu'en outre, les conditions (14) et (18) soient vérifiées. Dans un premier temps, nous

supposons que ces deux dernières conditions sont bien remplies, et nous nous concentrerons sur les relations (22).

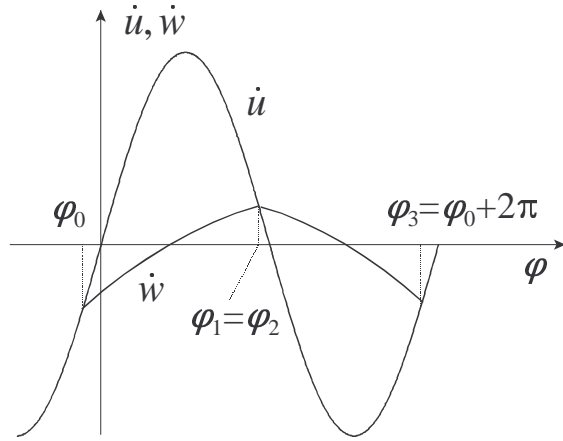


Figure 5 : cycle glissant

L'équation (20) devient alors

$$\sin \varphi_o = \sin \varphi_1 - \frac{\mu g}{\omega^2 r (1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)} (2\pi + \varphi_o - \varphi_1) \quad (23)$$

En additionnant cette relation à l'équation (16), on obtient alors, après division par $\frac{\mu g}{\omega^2 r}$,

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_o}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2\pi}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\varphi_1 - \varphi_o}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}$$

On en déduit

$$(\varphi_1 - \varphi_o)(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha + 1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) = 2\pi(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)$$

soit

$$\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_o = \pi(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) \quad (24)$$

L'introduction de ce résultat dans (16) donne alors

$$\sin \varphi_1 - \sin \varphi_o = \frac{\pi \mu g}{\omega^2 r} \quad (25)$$

qui se transforme aisément en

$$\cos\left(\frac{\varphi_o + \varphi_1}{2}\right) = \cos\left(\varphi_o + \frac{\Delta \varphi}{2}\right) = \frac{\pi \mu g}{2\omega^2 r \sin \frac{\Delta \varphi}{2}} \quad (26)$$

Comme $\Delta \varphi$ est connu, cette relation fixe $\left(\varphi_o + \frac{\Delta \varphi}{2}\right)$ au signe près,

$$\varphi_o + \frac{\Delta \varphi}{2} = \pm \arccos\left(\frac{\pi \mu g}{2\omega^2 r \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}\right), \quad (27)$$

pour autant, bien entendu, que

$$\omega \geq \sqrt{\frac{\pi \mu g}{2r \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}} = \omega_{\min} \quad (28)$$

En deçà de cette valeur, un cycle glissant ne peut exister. Pour lever l'indétermination de signe de la relation (27), notons que si l'on suppose $\left(\varphi_o + \frac{\Delta \varphi}{2}\right) < 0$, le fait que son cosinus soit positif implique

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_o + \frac{\Delta \varphi}{2} < 0$$

Alors, en tenant compte de la valeur (24) de $\Delta \varphi$,

$$\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi_o + \Delta \varphi = \varphi_o + \frac{\Delta \varphi}{2} + \frac{\pi}{2}(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)$$

vérifie

$$-\frac{\pi}{2} \mu \operatorname{tg} \alpha < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha),$$

ce qui implique

$$\cos \varphi_2 \geq 0$$

en contradiction avec (18). C'est donc le signe positif qui s'impose :

$$\varphi_o + \frac{\Delta \varphi}{2} = \arccos\left(\frac{\pi \mu g}{2\omega^2 r \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\omega_{\min}^2}{\omega^2}\right) \quad (29)$$

Le déplacement de la masse au cours d'un cycle est alors

$$\Delta w = (w_1 - w_o) + (w_3 - w_2)$$

Dans la formule (17) donnant $(w_1 - w_o)$, on peut remplacer $(\varphi_1 - \varphi_o)$ par sa valeur

$$\Delta \varphi = \pi(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha),$$

ce qui donne

$$(w_1 - w_o) = r \sin\left(\varphi_o + \frac{\Delta \varphi}{2}\right) \left[(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)^2 \pi \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + 2\mu \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \right]$$

De même, dans la formule (18), on peut écrire

$$\varphi_3 - \varphi_2 = 2\pi - (\varphi_1 - \varphi_o) = \pi(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right) = \cos\left[\pi - \frac{\Delta \varphi}{2}\right] = -\cos \frac{\Delta \varphi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right) = \sin\left[\pi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right] = \sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} = \frac{\varphi_1 + 2\pi + \varphi_o}{2} = \pi + \left(\varphi_o + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

et

$$\sin\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} = -\sin\left(\varphi_o + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

ce qui entraîne

$$w_3 - w_2 = r \sin\left(\varphi_o + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot \left[(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)^2 \pi \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + 2 \mu \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right]$$

et finalement

$$\Delta w = r \sin\left(\varphi_o + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot \left[2 \pi (1 + \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + 4 \mu \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right] \quad (30)$$

Dans cette expression, le facteur entre crochets ne dépend que du coefficient de frottement et de l'angle α . La pulsation n'intervient que dans

$$\sin\left(\varphi_o + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega}\right)^4} \quad (31)$$

On constate en particulier que le déplacement par cycle croît avec la pulsation.

7. Formule approchée

Dans tous les cas pratiques, on peut négliger $\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ devant l'unité. On a alors

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \mu \operatorname{tg} \alpha\right) \approx 1 - \frac{\pi^2}{4} \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \approx 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \mu \operatorname{tg} \alpha\right) \approx \frac{\pi}{2} \mu \operatorname{tg} \alpha$$

et

$$\cos \frac{\Delta\varphi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \mu \operatorname{tg} \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \mu \operatorname{tg} \alpha\right) \approx \frac{\pi}{2} \mu \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin \frac{\Delta\varphi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \mu \operatorname{tg} \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \mu \operatorname{tg} \alpha\right) \approx 1$$

Il vient donc

$$\Delta w \approx \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega}\right)^4} (\pi^2 + 4) \mu r \operatorname{tg} \alpha$$

soit

$$\Delta w \approx 13,87 \mu r \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega}\right)^4} \quad (32)$$

En outre, à la pulsation maximale

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{r \operatorname{tg} \alpha}},$$

on a

$$\frac{\pi \mu g}{2 \omega^2 r \sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \approx \frac{\pi}{2} \mu \operatorname{tg} \alpha$$

et, à l'approximation consentie, le radicant peut être assimilé à l'unité. Il vient alors

$$\Delta w_{\max} \approx 13,87 \mu r \operatorname{tg} \alpha, \quad (33)$$

formule qui a été obtenue par HANFFSTENGEL [3] par une voie mi-analytique, mi-empirique et qu'il a pu vérifier sur des cas pratiques. Mais son approche ne permet pas de calculer la variation de Δw avec la pulsation.

La *vitesse moyenne* de la charge est

$$\bar{w} = \frac{\omega}{2\pi} \Delta w \quad (34)$$

Comme Δw croît avec la pulsation, il est clair qu'il en est de même de la vitesse moyenne. A la vitesse maximale,

$$\bar{w} \approx \frac{1}{2\pi} \cdot 13,87 \cdot \mu \sqrt{gr \operatorname{tg} \alpha} = 2,207 \mu \sqrt{gr \operatorname{tg} \alpha} \quad (35)$$

8. Cycles mixtes

On constatera que le rapport

$$\frac{\omega_{\min}^2}{\omega_{adh}^2} = \frac{\pi (1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)}{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \approx \frac{\pi}{2} (1 + \mu \operatorname{tg} \alpha)$$

est supérieur à l'unité. Cela signifie que si le cycle glissant continue d'exister en ω_{\min} , la vitesse moyenne s'annule pour une vitesse de rotation supérieure à ω_{adh} , ce qui est assez paradoxal. En réalité, il est facile de montrer que pour $\omega = \omega_{\min}$, les deux conditions d'amorce de glissement (14) et (18) sont violées aux angles φ_o et $\varphi_2 = \varphi_1$ obtenus à partir de (31). En effet, pour $\omega = \omega_{\min}$,

$$\cos\left(\varphi_o + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 1$$

donc

$$\varphi_o = -\frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{\Delta\varphi}{2}$$

Alors,

$$(\cos\varphi_o)_{\min} = \frac{\mu g}{\omega_{\min}^2 r(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\pi}{2}(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

La condition

$$\cos\varphi_o \geq (\cos\varphi_o)_{\min}$$

équivalent alors à

$$\cos \frac{\Delta\varphi}{2} \geq \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

soit, vu la positivité de $\cos \frac{\Delta\varphi}{2}$,

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2} \leq \frac{\Delta\varphi}{2},$$

ce qui n'est *jamais* réalisé.

De la même façon, il résulte de (18) que

$$(\cos\varphi_2)_{\max} < 0.$$

Or, pour $\omega = \omega_{\min}$,

$$\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1 = \cos \frac{\Delta\varphi}{2} > 0,$$

si bien que la condition de glissement en φ_2 n'est pas réalisée non plus.

Ainsi par exemple, en se donnant $r = 0,015$ m, $\alpha = 20^\circ$, $\mu = 0,35$, on obtient

$$(\cos\varphi_o)_{\min} = \frac{262,3}{\omega^2}$$

$$(\cos\varphi_2)_{\min} = -\frac{203,1}{\omega^2}$$

$$\cos\left(\varphi_o + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{366,9}{\omega^2}$$

et

$$\Delta\varphi/2 = 1,371 \text{ rad},$$

ce qui permet d'établir le tableau I comparant $\cos\varphi_o$ à son minimum et $\cos\varphi_1$ à son maximum. On constate que le cycle glissant cesse d'être valide aux environs de 21 rad/s, valeur *supérieure* à ω_{\min} . Cela ne signifie pas que tout fonctionnement périodique est impossible, mais que le cycle comportera des temps d'adhérence : c'est ce que nous appellerons *un cycle mixte* (fig. 6).

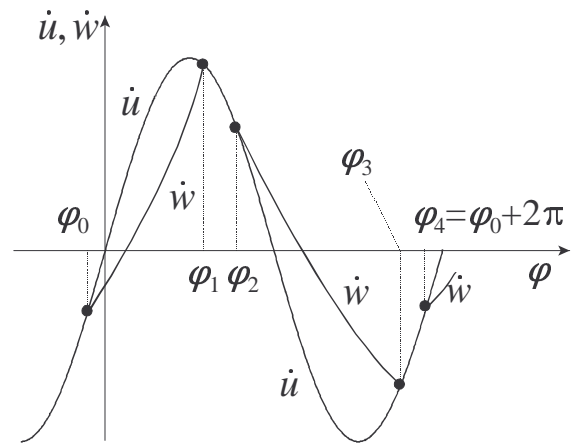


Figure 6 : cycle mixte

Tableau 1. – Validité du cycle glissant, pour les données du §8

$\frac{\omega}{\text{rad / s}}$	$\cos\varphi_o$	$(\cos\varphi_o)_{\min}$	$\cos\varphi_1$	$(\cos\varphi_2)_{\max}$	Valide ?
40	0,9995	0,1639	-0,9083	-0,1269	oui
35	0,9946	0,2141	-0,8759	-0,1658	oui
30	0,9759	0,2914	-0,8141	-0,2257	oui
25	0,9110	0,4197	-0,6769	-0,3250	oui
24	0,8820	0,4554	-0,6291	-0,3526	oui
23	0,8437	0,4598	-0,5681	-0,3839	oui
22	0,7897	0,5419	-0,4888	-0,4196	oui
21	0,7089	0,5948	-0,3786	-0,4605	non
20	0,5784	0,6558	-0,2084	-0,5078	non
19,15 = ω_{\min}	0,1985	0,7149	-0,1985	-0,5536	non

Il est assez facile de déterminer ce cycle, ainsi que nous allons le montrer sur deux exemples.

- a) *Condition en φ_1 violée* : $\omega = 21$ rad/s. Dans ce cas, le glissement positif ne peut se produire qu'à partir de l'angle $\bar{\varphi}_2$ tel que $\cos \bar{\varphi}_2 = (\cos \varphi_2)_{\min} = -0,4605$, ce qui donne

$$\bar{\varphi}_2 = 2,049 \text{ rad}.$$

En résolvant l'équation (20), qui s'écrit encore

$$\frac{\sin \varphi_3 - (\cos \varphi_2)_{\min} \varphi_3}{\sin \bar{\varphi}_2 - (\cos \varphi_2)_{\min} \bar{\varphi}_2} = 1 \quad (36)$$

on obtient

$$\varphi_3 = 5,504 \text{ rad}.$$

L'angle équivalent

$$\tilde{\varphi}_3 = \varphi_3 - 2\pi = -0,7792 \text{ rad}$$

vérifie

$$\cos \tilde{\varphi}_3 = 0,7112 \geq (\cos \varphi_o)_{\min} = 0,5948,$$

et constitue donc une valeur admissible pour φ_o . On a donc

$$\varphi_o = \tilde{\varphi}_3 = -0,7792 \text{ rad}$$

et φ_1 s'obtient en résolvant l'équation (16), soit

$$\frac{\sin \varphi_1 - (\cos \varphi_o)_{\min} \varphi_1}{\sin \varphi_o - (\cos \varphi_o)_{\min} \varphi_o} = 1 \quad (37)$$

On obtient

$$\varphi_1 = 1,959 \text{ rad}.$$

Pour cet angle,

$$\cos \varphi_1 = -0,3782 \geq -0,3786 = (\cos \bar{\varphi}_2)_{\max},$$

ce qui signifie qu'il y aura adhérence entre φ_1 et $\varphi_2 = \bar{\varphi}_2$.

Le déplacement pendant le cycle est à présent

$$\Delta w = (w_1 - w_o) + (w_2 - w_1) + (w_3 - w_2) \quad (38)$$

où $(w_1 - w_o)$ et $(w_3 - w_2)$ sont donnés par les formules (17) et (21) respectivement et

$$w_2 - w_1 = u_2 - u_1 = r(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \quad (39)$$

Le calcul donne

$$\Delta w = 0,01495 \text{ m}.$$

En supposant faussement qu'il s'agit d'un cycle glissant, on aurait obtenu la valeur légèrement inférieure

$$(\Delta w)_{\text{gliss}} = 0,01471 \text{ m}.$$

- b) *Conditions en φ_1 et $\tilde{\varphi}_3$ violées* : $\omega = 20$ rad/s

Ici, le glissement négatif suppose

$$\cos \varphi_o \geq (\cos \varphi_o)_{\min} = 0,6558$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'à partir de

$$\bar{\varphi}_o = -0,8556 \text{ rad}$$

Le glissement positif suppose quant à lui

$$\cos \varphi_2 \leq (\cos \varphi_2)_{\max} = -0,5078$$

soit

$$\varphi_2 \geq \bar{\varphi}_2 = 2,103 \text{ rad}$$

Partant de $\bar{\varphi}_o$, on détermine φ_1 par la relation (37), ce qui donne

$$\varphi_1 = 1,785 \text{ rad}.$$

On note que

$$\cos \varphi_1 = -0,2130 \geq -0,6269,$$

si bien qu'il y aura adhérence entre φ_1 et $\varphi_2 = \bar{\varphi}_2$.

L'angle de fin de glissement positif se détermine par la relation (36), et vaut

$$\varphi_3 = 5,365 \text{ rad}.$$

Il est inférieur à

$$\varphi_4 = \varphi_o + 2\pi = 5,428 \text{ rad},$$

et il y aura donc adhérence entre φ_3 et φ_4

Le déplacement total est donné par

$$\Delta w = (w_1 - w_o) + (w_2 - w_1) + (w_3 - w_2) + (w_4 - w_3)$$

où $(w_1 - w_o)$ et $(w_3 - w_2)$ sont donnés par les formules (17) et (21) respectivement et

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 &= r(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2), \\ w_4 - w_3 &= r(\cos \varphi_3 - \cos \varphi_4) \end{aligned} \quad (40)$$

On obtient ainsi

$$\Delta w = 0,01317 \text{ m}$$

L'application induite de la formule (32) aurait donné la valeur plus faible

$$(\Delta w)_{\text{gliss}} = 0,01056 \text{ m.}$$

9. Evolution du déplacement par cycle et de la vitesse moyenne en fonction de la pulsation

Dans le cadre des données du §8, les valeurs du déplacement par cycle et de la vitesse moyenne sont consignées dans le tableau II et représentées sur les figures 7 et 8. On constate que, partant de la $\Delta w/\text{mm}$

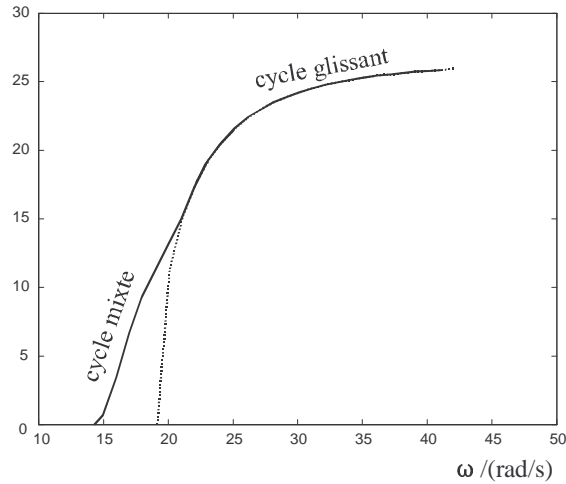


Figure 7 : déplacement par cycle

pulsation maximale, la vitesse moyenne décroît plus vite que la pulsation. En toute première approximation, on peut admettre l'interpolation linéaire par morceaux

$$\bar{w} \approx \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \leq \omega_{adh} \\ \frac{\omega - \omega_{adh}}{\omega_{max} - \omega_{adh}} \cdot \bar{w}_{max} & \text{si } \omega > \omega_{adh} \end{cases} \quad (41)$$

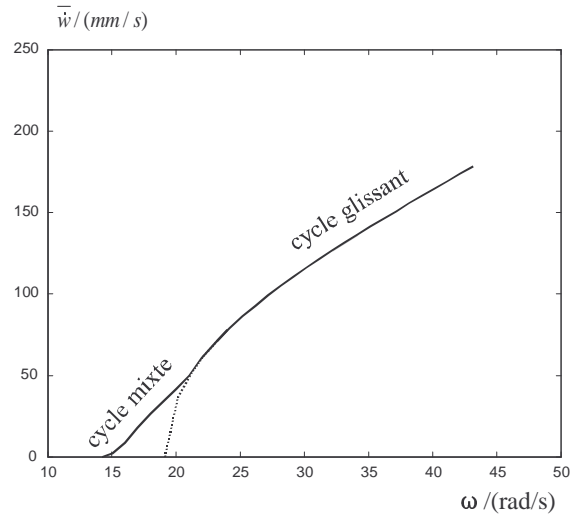


Figure 8 : vitesse moyenne

Tableau 2. – Déplacements par cycle et vitesses moyennes

$\frac{\omega}{\text{rad/s}}$	$\frac{\Delta w}{\text{mm}}$	$\frac{\bar{w}}{\text{mm/s}}$
14,25 = ω_{adh}	0	0
15	0,7348	1,754
16	3,393	8,640
17	6,669	18,04
18	9,287	26,61
20	13,17	41,92
21	14,95	49,97
22	17,29	60,54
23	19,10	69,92
24	20,44	78,08
25	21,46	85,39
30	24,21	115,6
35	25,29	140,9
40	25,80	164,2
42,39 = ω_{max}	25,97	175,2

La deuxième expression d'écrit encore, en notant

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{max}} = \omega \sqrt{\frac{r \tan \alpha}{g}} \quad (42)$$

$$\Omega_{adh} = \frac{\omega_{adh}}{\omega_{max}} = \sqrt{\frac{\mu \tan \alpha}{1 + \nu \tan \alpha}} \quad (43)$$

$$\bar{w} \approx \frac{\Omega - \Omega_{adh}}{1 - \Omega_{adh}} \cdot 2,207 \cdot \mu \sqrt{gr \tan \alpha} \quad (44)$$

10. Travail de frottement de la charge sur le couloir

A un instant donné, la puissance perdue par frottement de la charge sur le couloir vaut

$$P_f = \mu N |\dot{u} - \dot{w}|$$

Il n'y a donc dissipation que lors des phases de glissement.

a) *Phase de glissement négatif* :

entre φ_0 et φ_1 , $\dot{u} > \dot{w}$ et l'accélération de la charge vérifie

$$m\ddot{w} = \mu N.$$

Le travail de frottement entre φ_0 et φ_1 vaut donc

$$T_{f01} = \int_{t_0}^{t_1} m\ddot{w} (\dot{u} - \dot{w}) dt = m \int_{t_0}^{t_1} \ddot{w} \dot{u} dt - m \left(\frac{\dot{w}_1^2}{2} - \frac{\dot{w}_0^2}{2} \right)$$

Notant que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \ddot{w} \dot{u} dt &= \frac{\mu}{\omega} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \omega r \sin \varphi (g + \omega^2 r \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi) d\varphi \\ &= \mu r \left[g (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) + \omega^2 r \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\sin^2 \varphi_1}{2} - \frac{\sin^2 \varphi_0}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

et que

$$\frac{\dot{w}_1^2}{2} - \frac{\dot{w}_0^2}{2} = \frac{\dot{u}_1^2}{2} - \frac{\dot{u}_0^2}{2} = \frac{\omega^2 r^2}{2} (\sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_0),$$

on obtient

$$\begin{aligned} T_{f01} &= \mu m g r (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) \\ &\quad - m \frac{\omega^2 r^2}{2} (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) (\sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_0) \end{aligned} \quad (45)$$

b) *Phase de glissement positif* :

entre φ_2 et φ_3 , $\dot{u} < \dot{w}$ et l'accélération de la charge vérifie

$$m\ddot{w} = -\mu N.$$

On a donc

$$T_{f23} = \int_{t_2}^{t_3} (-m\ddot{w}) (\dot{w} - \dot{u}) dt = m \int_{t_2}^{t_3} \ddot{w} \dot{u} dt - m \left(\frac{\dot{w}_3^2}{2} - \frac{\dot{w}_2^2}{2} \right)$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{t_2}^{t_3} \ddot{w} \dot{u} dt &= -\frac{\mu}{\omega} \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \omega r \sin \varphi (g + \omega^2 r \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi) d\varphi \\ &= \mu r \left[g (\cos \varphi_3 - \cos \varphi_2) + \omega^2 r \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\sin^2 \varphi_2}{2} - \frac{\sin^2 \varphi_3}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

et, par ailleurs

$$\frac{\dot{w}_3^2}{2} - \frac{\dot{w}_2^2}{2} = \frac{1}{2} (\dot{u}_3^2 - \dot{u}_2^2) = \frac{\omega^2 r^2}{2} (\sin^2 \varphi_3 - \sin^2 \varphi_2),$$

on obtient

$$\begin{aligned} T_{f23} &= \mu m g r (\cos \varphi_3 - \cos \varphi_2) \\ &\quad + m \frac{\omega^2 r^2}{2} (1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) (\sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_3) \end{aligned} \quad (46)$$

Le travail de frottement au cours d'un cycle est donc

$$T_f = T_{f01} + T_{f23} \quad (47)$$

Ces expressions valent que le cycle soit glissant ou mixte. Examinons de plus près le régime glissant, qui correspond aux utilisations normales. On a dans ce cas $\varphi_2 = \varphi_1$ et $\varphi_3 = \varphi_0 + 2\pi$ et

$$\begin{aligned} T_f &= 2\mu m g r (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) \\ &\quad + \mu m \omega^2 r \operatorname{tg} \alpha (\sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_0) \end{aligned}$$

Cette expression peut être améliorée en notant que

$$\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1 = 2 \sin \left(\varphi_0 + \frac{\Delta \varphi}{2} \right) \sin \frac{\Delta \varphi}{2}$$

et que

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_0 &= (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0)(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_0) \\ &= \frac{\pi \mu g}{\omega^2 r} \cdot 2 \sin \left(\varphi_0 + \frac{\Delta \varphi}{2} \right) \cos \frac{\Delta \varphi}{2}, \end{aligned}$$

en faisant usage de la relation (25). Tenant encore compte de (31), on obtient

$$\begin{aligned} T_f &= \mu m g r \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega} \right)^4} \cdot \\ &\quad \left[4 \sin \frac{\Delta \varphi}{2} + 2 \pi \mu \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\Delta \varphi}{2} \right] \end{aligned} \quad (48)$$

formule exacte tant que le cycle glissant est d'application.

Si l'on peut négliger $(\mu \operatorname{tg} \alpha)^2$ devant l'unité, on a en outre

$$\sin \frac{\Delta \varphi}{2} \approx 1, \quad \cos \frac{\Delta \varphi}{2} \approx \frac{\pi \mu}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

et le facteur entre crochets de (48) se réduit à

$$4 + \pi^2 \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \approx 4,$$

ce qui donne

$$T_f \approx 4 \mu m g r \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega} \right)^4} \quad (49)$$

La puissance moyenne de frottement vaut alors

$$P_f \approx \frac{\omega}{2\pi} T_f = \frac{\omega}{2\pi} \cdot 4\mu m g r \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega}\right)^4} \quad (50)$$

Il est plus logique de rapporter cette puissance au débit massique q_m . En supposant un chargement continu, ce débit vaut

$$q_m = \frac{m}{l} \bar{w}$$

où l est la longueur du couloir. Notant que

$$\bar{w} = \frac{\omega}{2\pi} \Delta w = \frac{\omega}{2\pi} \cdot 13,87 \mu r \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega}\right)^4},$$

on a

$$q_m = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{m}{l} \cdot 13,87 \mu r \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega}\right)^4}.$$

La *résistance spécifique* k , rapport de la puissance au débit, vaut alors

$$k = \frac{P_f}{q_m} = 0,2884 \frac{gl}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (51)$$

Fait remarquable, elle ne dépend que de la longueur du couloir et de l'angle α . Elle est indépendante du coefficient de frottement, résultat qu'avait obtenu HANFFSTENGEL [3]. En outre, elle ne dépend pas de la pulsation, du moins dans le cadre du régime glissant.¹

Dans le cas du transport de substances pulvérulentes, il se produit en outre des frottements internes dans le corps transporté, dont l'évaluation est difficile.

11. Conclusions

L'analyse qui précède a montré la possibilité d'existence d'un mouvement cyclique dont les conditions de fermeture déterminent les performances du couloir. Des développements complémentaires, malheureusement trop longs pour être reproduits ici, nous ont permis de vérifier que ce cycle s'établit spontanément, très vite dans le cas de cycles mixtes et asymptotiquement dans le cas de cycles glissants. Ces conclusions sont en plein accord avec celles de Harding et Nedderman [2]. Les performances du couloir en termes de débit sont maximales à la pulsation maximale et, pour les pulsations inférieures, le débit décroît plus vite que

la pulsation. Enfin, en régime glissant, la résistance spécifique du couloir est indépendante du coefficient de frottement et de la pulsation.

Bibliographie

- [1] F.J.C. RADEMACHER, L. ter BORG – On the theoretical and experimental conveying speed of granular bulk solids on vibratory conveyors. *Forschung im Ingenieurwesen - Engineering Research*, Bd. 60 (1994), Nr. 10, pp. 261-283.
- [2] G.H.L. HARDING, R.M. NEDDERMAN – The flight-free vibrating conveyor : part 2. Stability analysis and criteria for optimal design. *Trans I Chem E*, vol. 68, part A, march 1994, pp. 131-138.
- [3] G. von HANFFSTENGEL – *Etude théorique et pratique sur le transport et la manutention*. Tome 1, Béranger, Paris, 1910.
- [4] A. SCHLAG – *Appareils de levage et de manutention*. Desoer, Liège, 1944.

¹ On notera du reste que dans la référence [3], une erreur algébrique a conduit à une valeur de k deux fois trop faible. Cette erreur a été reproduite dans [4].

