
Eléments finis tétraédriques pour l'analyse duale

Martin Kempeneers — Pierre Beckers — Jean-François Debonnie

ASMA - Université de Liège
Institut de Mécanique et Génie Civil (B52)
1, Chemin des Chevreuils
4000 Liège, Belgique
{m.kempeneers, pierre.beckers, jf.debonnie}@ulg.ac.be

RÉSUMÉ. L'estimation d'erreur par analyse duale pure nécessite un double calcul par éléments finis basé sur des approches de types déplacement et équilibre d'un même problème. Elle permet d'obtenir la valeur de l'erreur de discrétisation globale cumulée des deux modèles par simple comparaison des énergies totales calculées pour chacun d'eux. Cet article présente le développement d'une famille d'éléments finis équilibre tétraédriques permettant de calculer une solution statiquement admissible d'un problème tridimensionnel. Deux exemples d'analyse duale réalisés à l'aide de ces éléments sont également présentés.

ABSTRACT. The error estimation by pure dual analysis requires two finite element computations. It is based on the results of displacement and equilibrium approaches of a given problem. It allows to compute the cumulated global discretization error of the two models by a simple comparison of the total energies computed using both methods. This paper presents the development of a new family of equilibrium type tetrahedral finite elements leading to statically admissible solutions of 3D finite element problems. Two examples of dual analysis using these elements are also presented.

MOTS-CLÉS : Estimation d'erreur, Analyse duale 3D, modèle équilibre, élément fini tétraédrique.

KEYWORDS: Error estimation, 3D Dual analysis, equilibrium model, tetrahedral finite element.

1. Introduction

L'analyse duale a été l'une des premières méthodes utilisées pour estimer l'erreur de discrétisation globale commise lors d'un calcul par éléments finis. Les premiers travaux sur le sujet ont été réalisés à l'Université de Liège par Fraeijls de Veubeke au début des années '60 [VEU 65].

La méthode repose sur la comparaison de deux solutions, la première obtenue à partir d'un modèle cinématiquement admissible (ou modèle déplacement) et la seconde issue d'un modèle statiquement admissible (ou modèle équilibre). Bien que cette méthode fournisse une estimation sûre de l'erreur, la nécessité d'une double analyse a longtemps été un obstacle à son développement et les modèles équilibre ont été très vite quelque peu délaissés au profit de ceux de type déplacement bien plus simples à manipuler. Les quelques modèles de type équilibre purs développés jusqu'ici se sont d'ailleurs toujours limités à des problèmes bidimensionnels.

Cependant, l'augmentation des puissances de calcul et le développement des ordinateurs multiprocesseurs, permettant de mener les deux analyses en parallèle, conduisent à un regain d'intérêt pour l'analyse duale et, par conséquent, pour les modèles équilibre également.

L'intérêt du développement d'un élément fini tétraédrique de type équilibre est que son implantation dans un code éléments finis permettra de créer un outil automatisant le calcul de solutions statiquement admissibles duales de problèmes tridimensionnels et par là, d'obtenir une estimation sûre de l'erreur. De plus, les mailleurs 3D automatiques génèrent habituellement des éléments tétraédriques, ce qui permet de penser qu'un tel outil pourrait trouver sa place dans un processus industriel de conception avec contrôle de l'erreur.

Nous présenterons dans ce travail quelques résultats d'analyse duale obtenus avec des éléments équilibre du premier et du second degré.

2. Notations

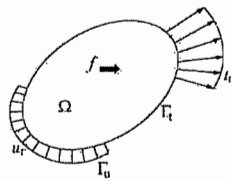


Figure 1. *Modèle d'une structure mécanique.*

Considérons (figure 1) un corps élastique de volume fixé Ω soumis aux charges de volume f . Son contour Γ peut être divisé en deux parties : Γ_u sur laquelle les déplacements $\bar{u}$ sont imposés et Γ_t , sur laquelle s'exercent les tractions de surface $\bar{t}$.

Les champs de contraintes σ et de déformations ϵ vérifient les équations de l'élastostaticité qui peuvent être divisées en 3 catégories :

– Les équations de compatibilité qui décrivent la cinématique

$$\epsilon = \partial u \quad \text{dans } \Omega \quad [1]$$

$$u = u_\Gamma \quad \text{sur } \Gamma_u \quad [2]$$

– Les équations d'équilibre qui décrivent la statique

$$\partial^T \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad [3]$$

$$N^T \sigma = t_\Gamma \quad \text{sur } \Gamma_t \quad [4]$$

– Les équations constitutives du matériau

$$\sigma = H \epsilon \quad [5]$$

Avec,

$$\begin{aligned} \sigma^T &= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{pmatrix}, \\ \epsilon^T &= \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zz} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

H la matrice de Hooke du matériau considéré, ∂ et N respectivement l'opérateur de gradient et la matrice des cosinus directeurs de la surface.

3. Éléments équilibre tétraédriques

3.1. Enoncé du problème

Un champ de contraintes est dit statiquement admissible (SA) lorsqu'il vérifie les équations d'équilibre [3] et [4].

L'approche équilibre consiste à trouver, parmi tous les champs de contraintes statiquement admissibles, celui qui minimise l'énergie complémentaire totale :

$$EC(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T H^{-1} \sigma \, d\Omega - \int_{\Gamma_u} t^T u_\Gamma \, d\Gamma \quad [6]$$

Cela revient à rechercher un couple (σ, ϵ) lié par les relations constitutives et vérifiant la forme forte des équations d'équilibre ainsi qu'une forme faible des équations de compatibilité.

3.2. Recherche d'une solution approchée

La solution exacte d'un tel problème est généralement inaccessible, il faudra dès lors se contenter d'une solution approchée. Une telle solution peut-être obtenue en

choisissant une forme paramétrique simple du champ de contraintes vérifiant les équations d'équilibre [3] (phase de discrétisation du champ inconnu) et en annulant la variation première de la fonctionnelle [6] par rapport à ces paramètres (phase de minimisation). En outre, il faudra également imposer au champ de contraintes de respecter les équations d'équilibre de surface [4] au cours de la phase de minimisation.

De manière analogue à ce qui est fait pour la méthode des éléments finis de type déplacement, on améliorera considérablement la simplicité et la précision de la méthode en découpant le volume Ω en un nombre fini d'éléments $\Omega^{(e)}$ (discrétisation spatiale) et en résolvant le problème précédent pour chaque élément. Les connexions entre les éléments, c'est-à-dire l'assemblage des sous-problèmes, sont définies en imposant la réciprocité des tractions de surface aux frontières entre deux éléments. Cela a pour effet de garantir la continuité du flux de contraintes au travers de ces frontières car on impose également localement aux champs de contraintes et de tractions de surface de vérifier les équations d'équilibre [4] sur toute la frontière $\Gamma^{(e)}$.

REMARQUE. — Afin de tirer un maximum d'informations du principe de l'énergie complémentaire [6], on considérera, lors de la phase de minimisation, que $\Gamma^{(e)} = \Gamma_u^{(e)}$.

Nous allons maintenant présenter l'écriture matricielle de cette approche pour un élément fini tétraédrique.

3.3. Discrétisation du champ de contraintes

En l'absence de forces de volume¹, la discrétisation du champ de contraintes à l'intérieur de l'élément peut se mettre sous la forme :

$$\sigma = Ss \quad [7]$$

avec S la matrice des fonctions d'approximation polynomiales des contraintes et s le vecteur des paramètres inconnus du problème, également appelés contraintes généralisées.

Une condition nécessaire pour que ce champ soit statiquement admissible est que chaque colonne de la matrice S vérifie la forme homogène des équations d'équilibre en volume [3]. Cette condition est automatiquement remplie si ces colonnes sont créées à l'aide de fonctions de tension telles que celle d'Airy en 2D ou celles de Morera ou de Maxwell en 3D [BEC 72, ALM 96]. On parle alors d'un champ de contraintes *auto-équilibré* dont le degré est l'ordre maximum des polynômes utilisés.

Pour créer un ensemble complet de fonctions d'approximation de degré n , nous avons utilisé les fonctions de tension de Morera. La méthode utilisée [ALM 96] est la suivante :

1. La présence de forces de volume se traite de manière analogue en ajoutant σ_0 , une solution particulière des équations [3], à la forme discrétisée du champ de contraintes [7]

- Générer les $(n+1)(n+4)(n+5)/6$ monômes $x^i y^j z^k$ tels que $i+j+k \leq n+2$.
- Pour chacun de ces monômes $\Phi(x, y, z)$, construire les 3 champs de tension de Morera :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \Phi(x, y, z) ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \Phi(x, y, z) ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \end{pmatrix} \Phi(x, y, z)$$

- Construire la matrice S en plaçant côte à côte les $(n+1)(n+4)(n+5)/2$ vecteurs-colonnes obtenus.
- Eliminer les colonnes identiquement nulles de la matrice S .
- Sélectionner les $(n+1)(n+2)(n+6)/2$ colonnes linéairement indépendantes de la matrice S et supprimer les autres.

3.4. Forme discrétisée du champ des tractions de surface

Etant donné que le champ de contraintes σ recherché est un champ polynomial de degré n , le respect de la forme forte des équations d'équilibre de surface [4] impose que le champ des tractions de surface t ait également une forme polynomiale de degré n . Pour chaque face de l'élément, il est donc possible d'écrire les tractions de surface sous la forme discrétisée :

$$t = Wg \quad [8]$$

où g est le vecteur des tractions de surface généralisées et W la matrice des fonctions de forme polynomiales de degré n en coordonnées locales de la face.

Les connexions entre éléments, qui s'identifient à la réciprocity des tractions de surface à la frontière entre deux éléments, seront assurées automatiquement par l'annulation des tractions généralisées sur cette frontière. C'est la raison pour laquelle nous désignerons généralement par *connecteurs* ces tractions généralisées.

Contrairement à ce qui a été fait lors de la discrétisation du champ de contraintes où nous avons imposé l'allure de la matrice des fonctions d'approximation, ici nous allons choisir la signification physique des grandeurs généralisées. Cela permettra de choisir des paramètres du champ discrétisé ayant un sens physique fort, ce qui n'est pas le cas des contraintes généralisées. Une possibilité naturelle est de prendre, pour

chacune des trois composantes, des valeurs locales du champ des tractions et de leur donner la dimension de forces en les multipliant par l'aire pondérée de la face considérée. Ce choix simplifie la prise en compte des conditions aux limites sur Γ_t .

Un second choix à réaliser est celui de la position des points d'ancrage de ces forces sur la face, c'est-à-dire la position des valeurs locales utilisées pour définir le champ des tractions de surface. Ce choix est arbitraire mais conditionne l'expression des fonctions de forme. Comme nous allons le montrer (cf. section 3.5), il permet de simplifier la prise en compte des conditions aux limites sur Γ_u .

Pour les éléments tétraédriques du premier et du second degré développés, ces positions particulières des connecteurs sont les positions des points d'intégration sur un triangle dans les règles de quadrature symétriques définies par Lyness et Jespersen dans [LYN 75]. Trois et six connecteurs par face et par composante sont nécessaires respectivement pour les éléments du premier et du second degré. Les règles d'intégration utilisées sont donc celles permettant d'intégrer exactement des polynômes respectivement du second et du quatrième degré sur un domaine triangulaire. Les positions de ces points d'intégration sont données en coordonnées barycentriques (s_1, s_2) dans le tableau 1.

Ces positions particulières des connecteurs ne seront réellement avantageuses que si l'on pondère chaque force par la valeur du poids d'intégration du point correspondant (cf. tableau 1). Ainsi, pour chaque composante i des tractions de surface, on définit sur une face donnée de l'élément, les connecteurs :

$$g_{i,j} = Aw_j t_i(\xi_j) \quad [9]$$

où A est l'aire de la face considérée, $\xi_j = (s_1, s_2)_j$ et w_j respectivement la position et le poids du point d'intégration j .

La fonction de forme $\varphi_{i,j}(\xi)$ correspondant au connecteur $g_{i,j}$ est un polynôme de degré n tel que

$$\varphi_{i,j}(s_1, s_2)|_{\xi_k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \frac{1}{Aw_j} & \text{si } k = j \end{cases} \quad [10]$$

En considérant les 4 faces du tétraèdre, les relations [7] et [9] permettent également d'écrire les relations d'équilibre de surface [4] en termes de grandeurs généralisées :

$$g = Cs \quad [11]$$

C est appelée matrice de connexion statique de l'élément.

3.5. Définition des déplacements généralisés

Vu la définition de la discrétisation [8], le travail des tractions de surface sur une face Γ de l'élément s'écrit :

j	s_1	s_2	w
$n = 1$			
1	2/3	1/6	1/3
2	1/6	2/3	1/3
3	1/6	1/6	1/3
$n = 2$			
1	$1 - 2a$	a	w_1
2	$1 - 2b$	b	w_2
3	a	$1 - 2a$	w_1
4	b	$1 - 2b$	w_2
5	a	a	w_1
6	b	b	w_2
$a = 0.09157621350977$		$w_1 = 0.10995174365532$	
$b = 0.44594849091597$		$w_2 = 0.22338158967801$	

Tableau 1. Positions et poids des points d'intégration.

$$\int_{\Gamma} t^T u \, d\Gamma = g^T \int_{\Gamma} W^T u \, d\Gamma = g^T q \quad [12]$$

avec,

$$q = \int_{\Gamma} W^T u \, d\Gamma \quad [13]$$

le vecteur des déplacements généralisés conjugués aux connecteurs g . Les fonctions de forme des tractions de surface apparaissent comme les fonctions de pondération des déplacements.

Si le champ des déplacements u est un polynôme de degré inférieur ou égal à celui du champ des contraintes, l'intégrale [13] se calcule exactement à l'aide des règles de quadratures de Lyness et Jespersen à 3 ou 6 points utilisées dans la section 3.4 pour définir les connecteurs. Vu la définition des fonctions de forme [10], il apparaît que les déplacements généralisés q sont égaux aux valeurs locales du champ de déplacements u aux points d'ancrage des connecteurs. En conséquence, la prise en compte des conditions limites sur Γ_u est simplifiée car il n'y a aucune intégrale à évaluer lors du calcul des déplacements généralisés.

3.6. Minimisation de l'énergie complémentaire totale

Les relations [7] et [13] ainsi que l'équilibre de surface [11] permettent de réécrire l'expression de la fonctionnelle [6] en termes de grandeurs généralisées :

$$EC = \frac{1}{2} s^T F s - s^T C^T q$$

avec $F = \int_{\Omega(e)} S^T H^{-1} S d\Omega$ la matrice de flexibilité définie positive de l'élément.

L'annulation de la variation de cette fonctionnelle par rapport aux paramètres du champ de contraintes s conduit à la condition de stationnarité :

$$s = F^{-1} C^T q$$

De là, les relations d'équilibre [11] deviennent :

$$Kq = g \quad [14]$$

avec $K = CF^{-1}C^T$ la matrice de raideur définie positive de l'élément.

Grâce à ce changement de variables, les conditions d'équilibre des forces au niveau structural sont satisfaites en procédant comme pour les modèles cinématiquement admissibles, par identification des déplacements élémentaires aux déplacements structuraux.

Cependant, une difficulté inhérente aux modèles équilibre est l'apparition de modes cinématiques internes. Ces modes correspondent à des singularités parasites de la matrice de raideur qui apparaissent en plus des modes rigides. Les éléments tétraédriques développés n'échappent pas à cette règle. En effet, la matrice F étant régulière, le rang de K est aussi celui de C . Or C est une matrice rectangulaire ayant n_g lignes (nombre de connecteurs par élément) et n_s colonnes (nombre de contraintes généralisées par élément). Donc, tant qu'on se limite à des éléments de degré inférieur à 4, $\text{rang}(C) = \inf(n_g, n_s) = n_s^2$. La matrice $K(n_g \times n_g)$, est de rang n_s , c'est-à-dire qu'elle possède $(n_g - n_s)$ singularités indépendantes. Parmi celles-ci, les n_r modes rigides sont des singularités naturelles. Les autres, au nombre de $(n_g - n_s - n_r)$, sont des modes cinématiques parasites. On montre aisément que l'élément du premier degré possède 9 modes internes parasites et celui du second degré 18.

3.7. Elimination des modes cinématiques parasites

La méthode utilisée ici pour éliminer ces modes parasites consiste à considérer l'élément comme l'assemblage de 4 sous-éléments tétraédriques simples formés en reliant un point intérieur quelconque de ce tétraèdre à chacun de ses sommets (figure 2). On obtient ainsi un super-élément ne présentant plus aucun mode cinématique parasite [VEU 73].

La matrice de raideur du super-élément s'obtient en éliminant les degrés de liberté internes q_i de l'assemblage :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ie} \\ K_{ei} & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

2. Dans le cas d'éléments de degré supérieur ou égal à 4, il faut soustraire à n_s le nombre de champs d'autotension, c'est-à-dire le nombre de solutions linéairement indépendantes de l'équation $Cs = 0$.

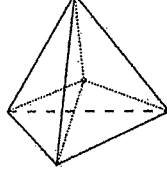


Figure 2. Le super-élément tétraédrique.

qui se ramène après condensation à :

$$Kq = g$$

avec $K = K_{ee} - K_{ie}^T K_{ii}^{-1} K_{ie}$ la matrice de raideur ($n_g \times n_g$) du super-élément.

4. Analyse duale et mesure de l'erreur globale

L'analyse duale telle que présentée par Debongnie et Beckers dans la référence [DEB 95] permet de déterminer une borne supérieure sur la norme énergétique³ de l'erreur globale commise lors d'une analyse par éléments finis.

En effet, si on appelle $\|\Delta u\|$ la norme énergétique de l'erreur sur une solution cinématiquement admissible (CA) u_h et $\|\Delta \sigma\|$ celle sur une solution statiquement admissible (SA) σ_h , on a toujours :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\Delta u\| \\ \|\Delta \sigma\| \end{array} \right\} \leq [\|\Delta u\|^2 + \|\Delta \sigma\|^2]^{1/2} = \{2[ET(u_h) + EC(\sigma_h)]\}^{1/2} \quad [15]$$

où $ET(u_h)$ est l'énergie potentielle totale de la solution de type déplacement.

$$ET(u_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon(u_h)^T H \epsilon(u_h) d\Omega - \int_{\Omega} f^T u_h d\Omega - \int_{\Gamma_t} t_{\Gamma}^T u_h d\Gamma$$

On obtient une mesure de l'erreur relative $E.R.$ en comparant [15] à la norme énergétique de la solution exacte (σ_{ex}, u_{ex}) :

$$[2U(u_{ex})]^{1/2} = [2U(\sigma_{ex})]^{1/2} \simeq [U(u_h) + U(\sigma_h)]^{1/2}$$

Ce qui donne :

$$E.R. = \left\{ \frac{2[ET(u_h) + EC(\sigma_h)]}{U(u_h) + U(\sigma_h)} \right\} \quad [16]$$

Il est également possible d'établir des courbes de convergence des grandeurs $-ET(u_h)$ et $EC(\sigma_h)$, la première croissant et la seconde décroissant vers leur valeur exacte commune.

3. On définit la norme énergétique par $\|\bullet\| = \sqrt{2U(\bullet)}$ avec $U = \int_{\Omega} \sigma^T \epsilon d\Omega$

5. Applications numériques

5.1. Pièce trouée en traction uni-axiale

On étudie l'exemple simple mais singulier d'une plaque d'épaisseur unitaire percée d'un trou carré et soumise à une traction uni-axiale $P = 1$ (figure 3). Le module de Young vaut $E = 1$ et le coefficient de Poisson vaut $\nu = 0.3$. Vu la double symétrie de la structure, seul un quart de la pièce est modélisé.

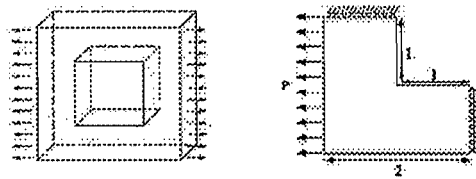


Figure 3. Pièce trouée soumise à traction uni-axiale.

Nous allons comparer, d'un point de vue énergétique, les solutions obtenues pour 4 maillages non-optimisés créés à l'aide du mailleur tétraédrique automatique GHS3D® du logiciel SAMCEF (figure 4).

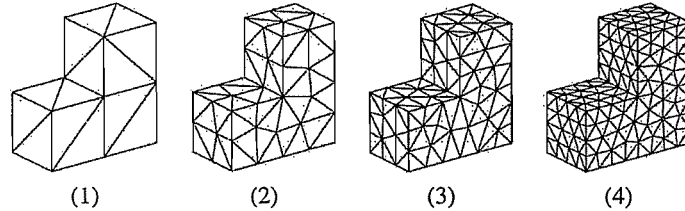


Figure 4. Maillages de la pièce trouée.

Pour chacun de ces maillages, on calcule les énergies de déformation obtenues avec des éléments de type équilibre et déplacement du premier et du second degré (cf. tableau 2).

La distance entre les solutions CA et SA étant une image de la somme des erreurs commises par chacune des deux approches [DEB 95], l'estimation de l'erreur sur la solution CA est d'autant meilleure que la solution SA employée pour la mesurer est précise. Les éléments équilibre du second degré permettent donc d'obtenir une mesure de l'erreur globale de meilleure qualité que celle obtenue avec les éléments du premier degré.

	Maillages			
	1	2	3	4
CA degré 1	4,1305	4,8356	5,3618	5,6254
CA degré 2	5,8525	6,0838	6,1460	6,1622
SA degré 1	7,0421	6,3267	6,2545	6,2430
SA degré 2	6,3153	6,2364	6,2204	6,2172

Tableau 2. *Energies de déformation.*

5.2. Carter de différentiel

Le second exemple étudié est de type industriel. Il s'agit d'un carter de différentiel (figure 5a). Le maillage considéré compte 99387 éléments tétraédriques (figure 5b). Nous avons réalisé une estimation de l'erreur commise sur les solutions de type déplacement du premier et du second degré à l'aide des éléments équilibre du premier degré. Vu la taille du problème, le calcul de la solution équilibre n'a été possible que grâce à l'implantation de l'élément de degré 1 dans le code de calcul par éléments finis SAMCEF développé par la société Samtech sa.

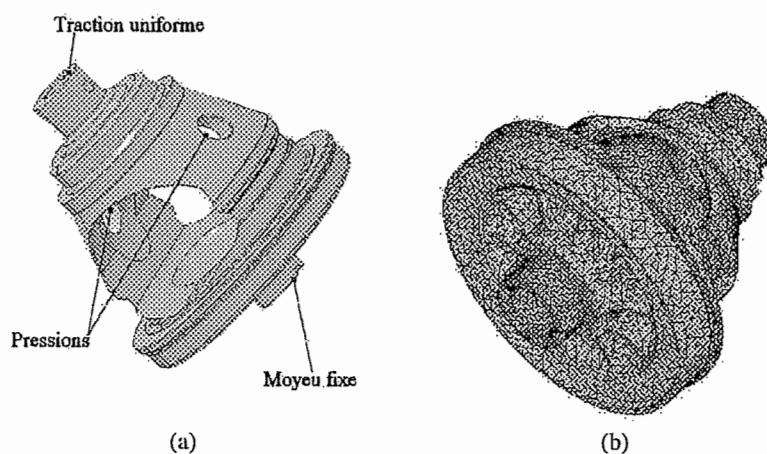


Figure 5. *Modèle simplifié de l'étude d'un carter de différentiel (Renault).*

Les énergies calculées pour chacun des modèles éléments finis sont reprises au tableau 3a. La formule [16] permet d'obtenir directement une borne supérieure de l'erreur de discrétisation globale des modèles déplacement (cf. tableau 3b).

Energie		<i>E.R.</i> (%)	
CA degré 1	20.8776	CA degré 1	34.97
CA degré 2	23.4378	CA degré 2	8.23
SA degré 1	23.5973		
(a)		(b)	

Tableau 3. *Energies de déformation et erreurs des solutions du carter de différentiel.*

6. Conclusions

L'intérêt principal de cette méthode est de fournir, pour un niveau de discrétisation donné de la solution statiquement admissible, la meilleure valeur possible, c'est-à-dire la plus petite valeur jouissant de la propriété de borne supérieure, de l'erreur sur la solution cinématiquement admissible.

L'implantation des éléments équilibre dans un code éléments finis existant s'est révélée relativement facile à réaliser et fournit un estimateur d'erreur par excès d'une grande précision.

Remerciements

Les auteurs remercient Audrey Marty de la société Renault SA pour la mise à disposition du maillage du carter de différentiel, Luc Masset de l'Université de Liège pour son précieux soutien logistique, la D.G.T.R.E. de la Région Wallonne et le Fonds Social Européen pour le soutien au projet FIRST-Europe Objectif 1 " ACaSD ".

7. Bibliographie

- [ALM 96] MOITINHO DE ALMEIDA J. P., PEREIRA O. J. B. A., « A set of hybrid equilibrium finite element models for the analysis of three-dimensional solids », *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 39, 1996, p. 2789-2802.
- [BEC 72] BECKERS P., « Les fonctions de tension dans la méthode des éléments finis », PhD thesis, Université de Liège, 1972.
- [DEB 95] DEBONGNIE J.-F., ZHONG H.-G., BECKERS P., « Dual analysis with general boundary conditions », *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engng.*, vol. 122, 1995, p. 183-192.
- [LYN 75] LYNESS J. N., JESPERSEN D., « Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle », *J. Inst. Maths, Applics.*, vol. 15, 1975, p. 19-32.
- [VEU 65] FRAEIJIS DE VEUBEKE B., « Displacements and equilibrium models in the finite elements method », ZIENKIEWICZ O. C., HOLISTER G. S., Eds., *Stress analysis*, chapitre 9, John Wiley & Sons, London, 1965.
- [VEU 73] FRAEIJIS DE VEUBEKE B., « Diffusive equilibrium models », Lecture notes, International research seminar, University of Calgary, Canada, 1973.