



UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES



Application des méthodes d'analyse stochastique à l'étude des effets du vent sur les structures du génie civil

VINCENT DENOËL

Ingénieur Civil des Constructions
Aspirant du Fonds National de la Recherche Scientifique

TOME 1

Année académique 2004 – 2005

Travail présenté en vue de
l'obtention du grade de Docteur en
Sciences Appliquées

Application des méthodes d'analyse stochastique à l'étude
des effets du vent sur les structures du génie civil

V. DENOEL

Table des matières

1	Contexte de travail	1
1.1	Contexte, motivations et objectifs	1
1.2	Etat des connaissances	3
1.2.1	Dimensionnement de structures soumises au vent	3
1.2.2	Prise en compte des termes d'ordres supérieurs du chargement . .	5
1.2.3	Caractéristiques mécaniques d'une structure à plusieurs degrés de liberté	9
1.2.4	Intégration du travail dans le contexte fixé	10
1.3	Plan du travail	10
I	Analyse d'un système 1-DDL	13
2	Introduction	15
3	Linéarisation stochastique	21
3.1	Introduction	21
3.2	Principes de la linéarisation stochastique	22
3.2.1	La linéarisation stochastique et l'analyse au vent turbulent	23
3.2.2	Analyse stochastique d'une structure linéaire	24
3.3	Approche analytique	35
3.3.1	Détermination des densités spectrales	36
3.3.2	Détermination des moments spectraux	39
3.3.3	Grandeurs maximales et extrêmes	42
3.3.4	Application numérique de la méthode	45
3.4	Approche numérique 1 : L'approximation en bruit blanc	46
3.4.1	Développements théoriques	46
3.4.2	Application au problème	50
3.5	Approche numérique 2 : Approximation par un processus d'Ornstein . . .	52
3.6	Approche numérique 3 : décomposition en fonctions-impulsions	59
3.7	Approche numérique 4 : Intégration numérique des DSP	63
3.7.1	Remarques préliminaires	63
3.7.2	Justification de l'algorithme d'intégration choisi	64
3.7.3	Représentation correcte de la sollicitation	65
3.7.4	Représentation correcte de la fonction de transfert	73
3.7.5	Mise en commun des points d'intégration	82

3.8	Application des méthodes au cas du vent	84
3.8.1	Approximation en bruit blanc	85
3.8.2	Approche par un processus à corrélation exponentielle	90
3.8.3	Décomposition en fonctions-impulsions	91
3.8.4	Intégration numérique optimale	96
3.9	Conclusions	97
4	Approche fréquentielle exacte	101
4.1	Introduction	101
4.2	Caractéristiques de variables aléatoires	102
4.2.1	Moments	102
4.2.2	Cumulants	105
4.2.3	Caractéristiques de fonctions de variables aléatoires	107
4.3	Caractéristiques de processus aléatoires	113
4.3.1	Caractéristiques de second ordre	113
4.3.2	Caractéristiques de troisième ordre	121
4.3.3	Caractéristiques d'ordres supérieurs	123
4.4	Réponse de l'oscillateur au premier ordre	127
4.5	Réponse de l'oscillateur au second ordre	128
4.5.1	Caractéristiques de la sollicitation	128
4.5.2	Réponse du système 1-DDL	135
4.5.3	Extension à une sollicitation quelconque	142
4.6	Réponse de l'oscillateur au troisième ordre	159
4.6.1	Introduction	159
4.6.2	Développements théoriques	161
4.6.3	Le développement en série de Volterra	165
4.6.4	Caractérisation de la sollicitation	170
4.6.5	Réponse de l'oscillateur simple	177
4.6.6	Approche numérique	183
4.7	Réponse de l'oscillateur au quatrième ordre	202
4.7.1	Développements théoriques	202
4.7.2	Caractéristique du troisième noyau de Volterra	205
4.7.3	Caractérisation de la sollicitation	212
4.7.4	Réponse de l'oscillateur simple	221
4.8	Résumé de l'analyse fréquentielle exacte	225
4.9	Grandeurs extrémales	226
4.9.1	Décomposition en série de Gram-Charlier	227
4.9.2	Transformation cubique	229
4.10	Conclusions	238
5	Approche temporelle	241
5.1	Introduction	241
5.2	Equations de Fokker-Planck	243
5.2.1	Marche au hasard de la particule libre	243
5.2.2	Equations de Fokker-Planck	245
5.2.3	Application à l'analyse d'un système dynamique quelconque	249
5.2.4	Exemple	250

5.3	Equations d'Ito	252
5.3.1	Développements théoriques	252
5.3.2	Analyse de l'oscillateur simple	256
5.3.3	Stratégie de calcul	264
5.3.4	Séparation des variables d'état	267
5.4	Conclusions	267
6	Simulations de Monte Carlo	269
6.1	Introduction	269
6.2	Génération d'échantillons de processus aléatoires	271
6.2.1	Le calcul numérique des densités spectrales de puissance	272
6.2.2	Génération d'un processus unidimensionnel	277
6.2.3	Remarques sur les caractéristiques d'ordres supérieurs	281
6.2.4	Génération de processus multidimensionnels	287
6.3	Représentation correcte de la fonction de transfert du système	303
6.3.1	Résolution fréquentielle optimale	303
6.3.2	Fréquence maximale à représenter	304
6.4	Représentation du contenu fréquentiel de la sollicitation	305
6.4.1	Résolution fréquentielle optimale	306
6.4.2	Fréquence maximale à représenter	307
6.5	Caractéristiques de génération liées à la résolution pas-à-pas	308
6.5.1	Fréquence maximale à représenter	308
6.5.2	Résolution fréquentielle maximale	309
6.6	Représentation du contenu aux très basses fréquences	311
6.6.1	Principe général	311
6.6.2	Shift du contenu fréquentiel	313
6.6.3	Exemple	314
6.7	Conclusions	319
7	Amortissement non linéaire - Excitation paramétrique	321
7.1	Introduction	321
7.2	Equations aux moments	322
7.3	Terme d'excitation paramétrique	324
7.4	Terme d'amortissement non linéaire	328
7.5	Amortissement non linéaire et excitation paramétrique	330
7.6	Conclusions	332
II	Analyse d'un système M-DDL	335
8	Introduction	337
9	Le couplage modal	343
9.1	Introduction	343
9.2	Contributions intermodales	347
9.2.1	Considérations d'ordre général	347
9.2.2	Illustration numérique	348

9.2.3	Discussion sur la conservation de l'énergie	352
9.2.4	L'approximation en bruit blanc et le couplage modal	353
9.2.5	Couplage modal en présence d'amortisseur par masse accordée . .	359
9.2.6	Conclusions	362
9.3	Le couplage aérodynamique	362
9.3.1	Introduction	362
9.3.2	La matrice d'amortissement généralisé	363
9.3.3	Prise en compte de l'amortissement non proportionnel	366
9.3.4	Exemple	371
9.3.5	Prise en compte du couplage au niveau de la sollicitation	378
9.4	Conclusions	383
10	Approche fréquentielle exacte	385
10.1	Introduction	385
10.2	Caractéristiques des sollicitations nodales	386
10.2.1	Densités spectrales	386
10.2.2	Bispectres	389
10.3	Caractéristiques des sollicitations modales	399
10.3.1	Densités spectrales	399
10.3.2	Bispectres	400
10.4	Réponses modales	400
10.4.1	Éléments diagonaux	400
10.4.2	Éléments non diagonaux	401
10.4.3	Le couplage modal à l'ordre 3	403
10.5	Réponses structurelles	406
10.6	Exemple de calcul	407
10.6.1	Structure étudiée	407
10.6.2	Approche analytique	409
10.6.3	Approche numérique dans le domaine temporel	414
10.6.4	Approche numérique dans le domaine fréquentiel	419
10.6.5	Etude paramétrique	427
10.7	Conclusions	431
11	Approche temporelle	433
11.1	Introduction	433
11.2	Présentation sur un système à deux degrés de liberté	434
11.2.1	Ecriture du système d'équations à résoudre	434
11.2.2	Transformation au formalisme d'Ito	435
11.2.3	Caractéristiques du champ de turbulence	436
11.2.4	Caractéristiques des forces appliquées	437
11.2.5	Caractéristiques des coordonnées structurelles	438
11.3	Systématisation de la méthode	441
11.3.1	Objectifs	441
11.3.2	L'algèbre de Kronecker	443
11.3.3	Application à l'étude des structures soumises au vent turbulent . .	444
11.3.4	Explication de la programmation de la méthode	450
11.4	Conclusions	456

III Applications propres au domaine du vent	457
12 Introduction	459
13 Météorologie - Aérodynamique	461
13.1 Introduction	461
13.2 L'écoulement des fluides autour des corps	462
13.3 Caractérisation du vent	465
13.3.1 Composante moyenne	465
13.3.2 Caractérisation de la turbulence	466
13.4 Expression des forces aérodynamiques	468
13.5 Conclusions	470
14 La sollicitation aérodynamique	471
14.1 Introduction	471
14.2 Linéarisation des forces aérodynamiques	472
14.2.1 Norme de la vitesse	472
14.2.2 Incidence du vent	472
14.2.3 Coefficients aérodynamiques	473
14.2.4 Hypothèse de petites rotations	475
14.2.5 Découplage selon le type de mouvement	475
14.2.6 Turbulence et vitesse structurale d'ordre 2	475
14.3 Termes d'ordres supérieurs du chargement aérodynamique	476
14.3.1 Norme de la vitesse	477
14.3.2 Incidence du vent	477
14.3.3 Coefficients aérodynamiques	479
14.3.4 Expression des efforts	480
14.4 Analyse de quelques coefficients aérodynamiques	482
14.5 Statistiques de l'angle d'incidence	486
14.6 Conclusions	490
15 Calcul d'une structure en champ bidimensionnel	493
15.1 Introduction	493
15.2 Calcul des sollicitations	494
15.2.1 Densités spectrales des forces nodales	494
15.2.2 Bispectres des forces nodales	497
15.3 Analyse d'un oscillateur simple	503
15.3.1 Réponse de la structure au second ordre	504
15.3.2 Réponse de la structure au troisième ordre	505
15.3.3 Validation à l'aide d'une étude par simulations de Monte Carlo	508
15.3.4 Effet de la cohérence entre les composantes de la turbulence	512
15.4 Analyse d'une structure continue	513
15.4.1 Approche analytique	514
15.4.2 Approche numérique	523
15.5 Conclusions	561

16 Calcul d'une structure en champ tridimensionnel	563
16.1 Introduction	563
16.2 FineLg	564
16.2.1 Présentation du code	564
16.2.2 L'analyse au vent dans FineLg	565
16.3 Développements personnels dans FineLg	570
16.3.1 Représentation complète des densités spectrales	571
16.3.2 Prise en compte des contributions intermodales	572
16.3.3 Calcul des efforts internes	572
16.3.4 Prise en compte de l'amortissement non proportionnel	573
16.3.5 Introduction d'un chargement par forces nodales stochastiques	574
16.3.6 Possibilité d'analyses par simulations de Monte Carlo	574
16.3.7 Prise en compte des termes d'ordres supérieur du chargement	575
16.4 Conclusions	583
 IV Conclusions et perspectives	 585
17 Conclusions	587
17.1 Contributions personnelles	587
17.1.1 Aspects pratiques	587
17.1.2 Aspects théoriques	589
17.2 Perspectives	597
17.3 Conclusions	599
 V Bibliographie	 601
 VI Annexes	 609
A Calcul d'intégrales de fractions rationnelles	611
B Résumé de la méthode basée sur le produit de Kronecker	615
C Transformées de Fourier pour le calcul du bi-spectre	617
D Transformées de Fourier pour le calcul du tri-spectre	619
E Représentation de la DDP conjointe gaussienne	627
F Efforts en champ de turbulence bidimensionnel	629
G Efforts en champ de turbulence tridimensionnel	637
G.1 Densités spectrales	637
G.2 Bispectres	639

H	Intégrales pour le calcul de l'admittance numérique	649
H.1	Première intégrale	649
H.2	Deuxième intégrale	650
H.3	Troisième intégrale	652
H.4	Quatrième intégrale	653
H.5	Cinquième intégrale	654

Résumé

L'analyse des structures du génie civil soumises aux actions du vent turbulent recourt généralement à une série d'hypothèses souvent trop peu justifiées. La formulation de ces hypothèses est motivée par la possibilité d'appliquer des mathématiques simplifiées. Elles permettent en effet à l'étude de se dérouler dans un monde gaussien. Ce travail présente et surtout applique une méthode d'analyse qui permet de prendre en compte les termes du chargement qui sont habituellement négligés. Dans le cadre de structures à plusieurs degrés de liberté, d'autres simplifications concernant les couplages entre réponses modales sont généralement formulées. Ces conditions sont également étudiées et différentes solutions pour leur prise en compte (éventuellement partielle) sont proposées.

En partant de l'étude la plus simple qu'il existe, celle d'un oscillateur à un degré de liberté soumis à un chargement aérodynamique simple, ce travail présente progressivement des situations de plus en plus complexes. Dans une dernière étape, les développements nécessaires à l'étude plus réaliste d'une structure sont présentés. Ces développements permettent l'analyse d'une structure tridimensionnelle à comportement linéaire plongée dans un champ de turbulence tridimensionnel et avec prise en compte des effets non linéaires du chargement aérodynamique. Ces effets non linéaires proviennent des termes quadratiques de la turbulence ainsi que de l'expression non linéaire des coefficients aérodynamiques en fonction de l'incidence du vent

In the civil engineering field, the analysis of structures subjected to wind loading is generally based on several hypotheses. Their justification is often fuzzy and they are usually postulated in order to apply simplified mathematics. These hypotheses allow the resolution to be run in a gaussian context. This work aims at presenting and applying an analysis which allows accounting for the usually neglected terms of the loading. When studying multi degree of freedom structures, other simplifications concerning the coupling effects between modes are generally formulated. These conditions are also approached and several solutions to take them (eventually partially) into account are proposed.

From the simplest analysis of a single degree of freedom system subjected to a simple aerodynamic loading, this work presents more and more complex structures. The last step is to present to developments necessary to analyse a real structure. The developments will allow to analyse a linear 3-D structure subjected to a 3-D aerodynamic field whose non linear characteristics are taken into account. These non linear effects can come from the quadratic terms in the expression of the turbulence and from the non linearity of the aerodynamic coefficients in terms of the wind angle of attack.

Remerciements

La coutume veut que l'espace réservé aux remerciements soit une énumération des personnes qui ont de près ou de loin contribué à la motivation de l'auteur. En lieu et place de cette traditionnelle formulation, je tiens à présenter mes plus sincères et respectueux remerciements à ces différents acteurs, au travers d'une présentation chronologique du contexte dans lequel ce travail a été réalisé.

D'un point de vue administratif, ce contexte est celui qui est offert par le Fonds National de la Recherche Scientifique. Cette institution m'a offert, sous les deux mandats d'aspirants de 2001-2003 et 2003-2005, des conditions de travail sans lesquelles la réalisation de cette thèse de doctorat n'aurait certainement pas pu être aussi efficace. Je dois à R. Maquoi une gratification toute particulière pour m'avoir accueilli au sein du département M&S. La préparation méticuleuse de mon dossier de candidature a été menée à bien grâce aux observations attentives de R. Maquoi et V. de Ville- de Goyet.

En raison de l'enseignement rigoureux et mathématique qu'il nous a donné de la dynamique des structures, je dois certainement à G. Fonder mes premières motivations pour cet aspect particulier de ma formation en génie civil. L'axe de recherche qui est celui de l'effet du vent sur les structures souples m'a été proposé par V. de Ville - de Goyet. Plongé dans un bureau d'études où fourmillent des ingénieurs occupés à la conception du plus haut viaduc du monde, il s'est également passionné pour les problèmes de dynamique structurelle. Il ne fait nul doute que la motivation qu'il porte lui-même au problème de la prise en compte des effets du vent sur les structures souples m'a permis de m'engager dans ce travail d'un pas enthousiaste. On peut comprendre facilement que cet élan dans un domaine de recherches, ne faisant ni partie des formations traditionnelles dispensées à l'Université de Liège, ni des compétences de recherche de mon département d'accueil, a nécessité quelques essais et erreurs avant de viser l'axe de recherches plus précis qui est présenté dans cet ouvrage. Il faut cependant concéder que ces égarements m'ont permis d'obtenir une vue générale des problèmes rencontrés dans ce domaine.

En me retournant maintenant vers ces trois dernières années, je dois également remercier mes autorités scientifiques pour la liberté de manoeuvre qu'elles m'ont laissée ainsi que la confiance qu'elles m'ont témoignée. Je dois concéder que ce "statut d'indépendant" m'a permis de m'investir d'un point de vue scientifique et moral dans ce travail.

Il est difficile de présenter le contexte scientifique sans évoquer les observations intéressantes et intéressées de H. Degée. Ses développements dans le cadre d'un problème de dynamique stochastique similaire étaient tantôt une référence, tantôt une motivation. Les échanges que nous avons pu avoir en confrontant les méthodes d'analyse au vent de mon côté et l'étude de l'interaction pont-véhicule du sien, n'ont pu qu'être fructueux pour l'efficacité de nos travaux respectifs. Aussi, il serait dommage de citer ce brillant chercheur en me limitant aux aspects scientifiques. En effet, le partage d'un espace de travail

commun nous a permis d'échanger agréablement nos impressions musicales, culturelles, architecturales.

Ces aspects moins scientifiques du contexte de travail ne peuvent en aucune manière contourner ma chère et tendre épouse. Partant d'une vie commune à deux dans les combles d'un immeuble à appartement en septembre 2001, nous voici, environ trois ans plus tard, mariés et installés dans une vieille maison presque entièrement retapée de nos quatre mains. Je voudrais la féliciter bien plus que la remercier ... essentiellement pour son dévouement, sa patience, son soutien moral dans les inévitables creux. La reconnaissance que je voudrais lui porter concerne aussi tous les détails discrets du quotidien qui sont invisibles de l'extérieur. Je tiens également à m'excuser pour les vacances et week-end que nous n'avons pas eus. Dès demain, j'espère qu'un nouveau rythme pourra redémarrer.

Personne ne peut prétendre pouvoir se dévouer entièrement pour son travail. Je ne peux donc pas présenter le décor objectivement en omettant les moments de détente entre amis. Finalement, et pour revenir plus concrètement sur la réalisation de ce document, je tiens à remercier également l'équipe de relecture de littéraires pour qui le décryptage de ce document n'a presque pu se limiter qu'à une interprétation syntaxique et une chasse aux tournures alambiquées.

Si ces quelques mots constituent vos premières lignes de lecture, il faut savoir que ce sont mes dernières à écrire. C'est ici que je pose la plume, en vous souhaitant une agréable lecture et en vous remerciant également, cher lecteur, et peut-être membre du Jury, pour l'attention que vous pourrez porter à l'évaluation de ce document.

Chapitre 1

Contexte de travail

1.1 Contexte, motivations et objectifs

Les évolutions technologiques tant du point de vue des matériaux mis en oeuvre que des méthodes de calcul développées permettent d'atteindre de nouveaux records dans le domaine du génie civil. Ces évolutions ont permis, outre la recherche accrue d'esthétisme, la réalisation de structures de plus en plus légères et donc également économiques. Cette diminution de la masse propre structurelle a sans aucun doute conduit au dessin de structures plus souples mais également davantage sensibles aux problèmes vibratoires.

Le travail que nous présentons trouve ses applications majeures dans les structures les plus souples du génie civil, à savoir, les ponts suspendus et haubanés, les hauts buildings, les toitures de stades, les câbles à haute tension, les tours de refroidissement... Ils permettent également l'étude de structures de plus petites dimensions comme par exemple les panneaux d'indication routière ou les poteaux d'éclairage public. Il nous semble cependant que l'application des méthodes d'analyse stochastique pour l'étude de ces petites structures pose moins de problèmes que pour l'analyse des structures de plus grandes dimensions. Pour ces structures, des organisations particulières du calcul doivent être imaginées de façon à pouvoir réaliser l'étude et le dimensionnement dans un délai raisonnable.

Ce travail vise une prise en compte des effets dynamiques du chargement et consiste donc de ce fait en l'intégration dans l'analyse des caractéristiques d'inertie et de souplesse de la structure. L'analyse passe alors par la résolution d'un système d'équations différentielles, les équations du mouvement, dont les inconnues sont les déplacements $x(t)$. Pour une structure linéaire discrète, ce problème s'écrit :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (1.1)$$

où M , C et K représentent les caractéristiques de masse, d'amortissement et de raideur et où $F(t)$ représente la sollicitation appliquée à la structure. Cette équation du mouvement se rencontre dans d'autres domaines du génie civil tels par exemple ceux de l'analyse de structures en zone sismique, de structures soumises à des explosions, de l'étude du passage de piétons sur des passerelles ou des effets de machines vibrantes sur des planchers. Pour chacun de ces contextes et types de chargement, les caractéristiques des sollicitations appliquées sont différentes ([62]) : chargement stationnaire ou instationnaire, contenu fréquentiel en bande large ou limitée, caractérisation aléatoire ou déterministe, prédominance du comportement inertiel, visqueux ou quasi-statique.

Les méthodes de résolution de l'équation du mouvement dépendent des caractéristiques du chargement. Ces méthodes sont généralement bien connues, du moins pour les analyses déterministes, et reprises dans bon nombre de cours et ouvrages de référence ([4], [16], [39], [42]). Elles sont souvent structurées en méthodes analytiques ou numériques, en base structurelle ou réduite et dans le domaine temporel ou fréquentiel. Dans le cadre de ce travail, nous serons amenés à appliquer plusieurs de ces méthodes d'analyses.

Il est assez difficile en définitive de vouloir prétendre résoudre l'équation du mouvement pour tous les types de chargements. Nous avons choisi d'étudier les effets du vent turbulent. Rien que dans ce domaine, le problème est déjà relativement complexe car les interactions entre la structure et l'écoulement du fluide peuvent être prises en compte de différentes façons ([14]).

Le vent est une sollicitation naturelle et donc a fortiori entachée d'un certain caractère aléatoire. La vitesse du vent en un point de l'espace et à un instant donné est a priori inconnue. Lors de l'étude d'une structure du génie civil, il est assez rare que tous les paramètres entrant en jeu soient parfaitement déterminés. Ces incertitudes peuvent être classées en deux groupes bien distincts : celui des incertitudes sur les sollicitations, comme dans notre cas, et celui des incertitudes sur les caractéristiques structurelles. Ces deux groupes nécessitent des méthodes de résolution sensiblement différentes. Dans les catégories d'analyse dynamique, nous limitons donc notre champ d'étude à celui de vibrations aléatoires de structures déterministes soumises à des sollicitations aléatoires. Les théories qui permettent la résolution de ce genre de problème sont également bien connues et se trouvent dans de nombreux ouvrages de référence en la matière ([3], [16], [80], [87]).

L'analyse d'une structure soumise aux effets de la turbulence du vent est généralement considérée comme complexe car elle nécessite la connaissance et la maîtrise de plusieurs domaines tels celui de l'analyse des structures, de la mécanique des fluides et de la météorologie. Toutes ces théories, avec leur particularités et habitudes respectives doivent s'accorder sur un langage qui devrait permettre les interactions entre elles. Ce point commun n'est en réalité rien d'autre que les mathématiques nécessaires à la résolution des problèmes envisagés, à savoir, essentiellement les théories des probabilités et des processus aléatoires.

Etant donné que les sollicitations appliquées à la structure étudiée sont aléatoires, les déplacements résultant de l'analyse ne sont pas parfaitement déterminés. L'objectif de cette analyse consiste donc à déterminer les caractéristiques statistiques de la réponse comme par exemple la moyenne ou la variance. L'analyse doit également donner une idée des déplacements et contraintes internes maximales qui peuvent être rencontrées dans la mesure où la structure doit être dimensionnée sur base de ces valeurs maximales. Dans la référence ([26]), nous présentons de façon exhaustive, et à l'occasion d'une première partie de rappels théoriques, les notions qui permettent de réaliser ce genre d'étude. Les développements que nous avons repris sont ceux que l'on peut trouver dans les ouvrages de référence en mécanique aléatoire.

De l'analyse dynamique aléatoire, que nous avons restreinte à l'étude des structures soumises au vent turbulent, nous avons également choisi de ne travailler qu'avec une seule formulation du chargement : il s'agit de la formulation aérodynamique. Cette méthode est généralement adoptée pour réaliser l'étude globale des vibrations de la structure. Aussi simple et pratiquée que soit cette méthode, elle se fonde généralement sur quelques hypothèses (visant à la linéarisation de l'effort appliqué) que nous avons décidé d'étudier plus

précisément. Les justifications de ces hypothèses formulées sont fréquemment confuses et il est souvent tu que ces simplifications n'aspirent à rien d'autre qu'une simplification mathématique du problème. La première motivation de ce travail se trouve en cette frustration de devoir simplifier l'analyse, faute de justifications fondées ou du moins fouillées. Un des objectifs principaux de ce travail consiste donc en la prise en compte des termes non linéaires qui sont habituellement négligés.

Quelques explorateurs, Kac et Siegert ([61]), Soize ([86]), Grigoriu ([45]), Naess ([75]) et ensuite Winterstein ([95]) ont montré que les termes quadratiques négligés influencent essentiellement les déplacements et contraintes maximales (extrêmes). Pour différentes raisons (de diffusion de publication, de langue), les développements de ces chercheurs se sont déroulés en parallèle et dans des directions légèrement différentes. Il faut aussi avouer que les domaines de recherche de ces pionniers étaient sensiblement différents (les émetteurs-récepteurs radio, la mécanique, les structures du génie civil, les structures maritimes et les mathématiques pures), ce qui ne facilite évidemment pas les interactions. Dans le travail, nous présenterons brièvement les démarches suivies par Soize et Grigoriu.

En débutant notre travail de recherche, nous savons que les effets des termes non linéaires sont donc non négligeables. Ceci constitue une seconde motivation. Nous ne remettons pas en cause les modèles de Soize et Grigoriu que nous appliquerons. L'objectif des développements consistera donc essentiellement à calculer les grandeurs nécessaires à l'application de ces méthodes. Etant donné que nous avons décidé de présenter les développements dans l'ordre logique d'une analyse stochastique, nous demanderons au lecteur d'être patient et d'admettre que les grandeurs statistiques d'ordres supérieurs que nous allons déterminer au début de ce document et qui pourraient éventuellement paraître farfelues à la première lecture seront utiles lors de l'estimation des grandeurs extrêmes.

Les développements théoriques que l'on peut trouver dans la littérature se limitent essentiellement à l'étude des systèmes à un degré de liberté. Un autre objectif de ce travail consiste en l'adaptation des méthodes d'analyse, non seulement pour les structures à plusieurs degrés de liberté mais également de grandes dimensions. La motivation de cet autre objectif consiste en la nécessité de pouvoir travailler sur des structures à plusieurs degrés comme celles qui sont rencontrées dans le domaine du génie civil.

1.2 Etat des connaissances

1.2.1 Dimensionnement de structures soumises au vent

Le dimensionnement des structures soumises au vent, et essentiellement des ponts haubanés et suspendus, doit passer par plusieurs étapes. Tous les ouvrages spécifiques aux actions du vent sur les structures ([17], [18], [35], [56], [67], [85]) présentent une liste plus ou moins exhaustive des vérifications à entreprendre pour l'étude d'un tablier de pont. L'objectif de ce travail ne consiste pas en l'étude de tous ces phénomènes qui, étant généralement assez particuliers et pointus, nécessiteraient probablement chacun un travail de d'ampleur de celui-ci. Par exemple, nous ne nous préoccuperons pas des vérifications de stabilité (flottement, divergence, galop) qui ont valu la célèbre ruine du pont de Tacoma-Narrows pour une vitesse de vent inférieure à la vitesse pour laquelle il avait été dimensionné.

Nous nous concentrerons essentiellement sur les vérifications de comportement global

structurel sous l'écoulement du vent. Cet écoulement fluide autour de la structure étudiée produit des surpressions et des dépressions locales qui peuvent être considérées comme les sollicitations de la structure. Sous ces sollicitations, la structure, supposée souple, se déforme. Ses mouvements et vibrations modifient l'écoulement du fluide alentour et induit donc des modifications de pressions sur l'élément étudié. C'est en ce sens que l'on peut parler d'interaction entre l'écoulement du fluide et la structure. Comme annoncé ci-avant, il existe plusieurs formulations pour représenter cette interaction. Les deux approches les plus connues consistent en les expressions aérodynamique ou aéroélastique des efforts.

L'approche aéroélastique représente plus précisément l'interaction lorsque les mouvements de la structure étudiée sont assez rapides. Cette approche a été adaptée de l'étude des vibrations des ailes d'avions. Dans le domaine du génie civil, nous utilisons les coefficients de Scanlan qui sont les équivalents des coefficients de Küssner utilisés en aéronautique ([85]). Ces coefficients permettent d'exprimer les efforts au moyen d'une formulation dans le domaine fréquentiel. Les ouvrages de référence présentent les développements théoriques relatifs à cette méthode. Il semble que son application soit universelle car on peut trouver des applications tant sur le continent américain (Jain, Jones et Scanlan, [60], qui sont trois auteurs incontournables en la matière) que sur le continent asiatique ([71]). Bien que les sollicitations soient initialement exprimées dans le domaine fréquentiel, Kareem propose une formulation mixte entre les domaines temporel et fréquentiel ([63]) de façon à prendre également en compte les phénomènes transitoires et non linéaires. L'analyse à proprement parler de la structure est alors également entreprise entre les domaines temporel et fréquentiel, à l'aide de la théorie des ondelettes.

Dans le cadre de ce travail, nous allons exclusivement concentrer nos efforts sur l'expression aérodynamique de la sollicitation. Ces expressions prennent en compte de façon réduite l'interaction entre le fluide et la structure. Cette approche suppose que les vibrations de la structure sont suffisamment lentes pour que l'écoulement fluide s'adapte de façon quasi-permanente. Dans ce cas, les sollicitations aérodynamiques (traînée F_D , portance F_L , moment M) appliquées sur la structure peuvent être déterminées à partir des coefficients aérodynamiques. Ces coefficients (C_D , C_L , M) peuvent être obtenus à l'aide d'essais en soufflerie en mesurant les sollicitations aérodynamiques :

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} \\ C_L &= \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} \\ C_M &= \frac{M}{\frac{1}{2}\rho U^2 B^2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

où ρ et B représentent la masse volumique de l'air et la largeur du tablier. Dans le domaine des vitesses de vent qui nous concernent, ces coefficients sont faiblement variables vis-à-vis de la vitesse moyenne U choisie pour réaliser les mesures. Par contre, ces coefficients aérodynamiques varient substantiellement avec l'angle d'incidence du vent par rapport à la section étudiée. L'approche aérodynamique des efforts consiste à supposer que les forces appliquées sur la structure peuvent continuer de s'exprimer, dans un champ turbulent, à l'aide de ces relations. Par exemple, pour la traînée :

$$F_D = \frac{1}{2}\rho C_D B (U + u(t) - \dot{x}(t))^2 \tag{1.3}$$

où $U + u(t)$ représente la vitesse du vent turbulent (une vitesse moyenne plus une composante turbulente) et $x(t)$ représente la vitesse structurelle de la section étudiée. Dans cette formulation des sollicitations, le seul couplage qu'il existe entre le fluide et la structure se limite à ce terme $\dot{x}(t)$. Dès le chapitre suivant, nous donnerons plus de précisions quant aux termes intervenant dans cette expression du chargement.

Cette expression du chargement aérodynamique fait également intervenir les termes non linéaires que nous avons annoncés. Dans le cadre des études menées à l'heure actuelle sur des structures réalistes, ces expressions sont toujours linéarisées. Au fil des développements, nous comprendrons pourquoi cette linéarisation est avantageuse. Au moins, on peut imaginer dès à présent qu'elle devrait rendre abordable l'analyse de la structure dans le domaine fréquentiel. Ceci constitue une des raisons principales. La littérature regorge d'exemple d'analyse de structures soumises à cette sollicitation aérodynamique ([2], [15],...). Bien que ce modèle de chargement puisse sembler quelque peu simpliste, un grand nombre d'études recourant à cette version linéarisée du modèle sont publiées chaque année. Cette version linéarisée des sollicitations permet de comparer de façon assez intéressante les résultats issus d'analyses dans les domaines fréquentiel et temporel ([1]). Cela constituait également un des objectifs du travail que nous avons présenté pour l'obtention du Diplôme d'Etudes Approfondies ([26]). Après avoir accompli notre premier objectif, ce travail visait à étudier les effets des termes non linéaires du chargement. Les moyens mis en oeuvre se limitaient à des simulations de Monte Carlo et des résolutions de structures dans le domaine temporel. La principale conclusion de ce travail, qui a orienté nos recherches vers le contenu de ce document, consiste en la difficulté de tirer des lignes conductrices claires et évidentes des simulations de Monte Carlo. Aussi, les interprétations physiques que l'on peut tirer d'une telle analyse sont assez limitées, ce qui rend boiteuses les éventuelles généralisations.

Dans ce travail, nous allons présenter des méthodes d'analyse plus rigoureuses qui permettront de prendre en compte les termes non linéaires du chargement.

1.2.2 Prise en compte des termes d'ordres supérieurs du chargement

Le premier objectif du travail, visant à prendre en compte les termes quadratiques de chargement, n'est pas tout à fait innovateur. En effet, comme introduit brièvement ci-dessus, ces termes ont déjà été étudiés par quelques explorateurs isolés. Il ne fait aucun doute que les premiers développements sont dus à des mathématiciens amusés par la théorie des probabilités et les multiples difficultés qu'elle offre.

Tout au long de ce document, nous verrons que la prise en compte des termes de chargement non linéaires n'est pas nécessairement évidente. De plus, bien que la théorie relative à ces développements puisse déjà être considérée comme particulièrement complexe, il n'en reste pas moins que les détails pratiques nécessaires à sa mise en oeuvre efficace sont encore plus touffus. Ceci explique pourquoi les expressions des efforts sont généralement rendues linéaires ou simplifiées d'une façon ou d'une autre. Ci-après, nous présentons quelques méthodes proposées par différents auteurs pour approcher le problème de façon plus simpliste (et donc non rigoureuse).

Depuis les développements originels de Soize et Grigoriu, et malgré le travail méritoire que les auteurs ont présenté, on ne peut pas réellement affirmer que ce domaine de recherche ait évolué. Pour preuve, Grigoriu a représenté en 2002 ([50]) un article en tout point identique à celui qu'il avait présenté en 1986 ([46]). Une recherche bibliogra-

phique en la matière montre que le temps semble s'être arrêté pendant une bonne dizaine d'années.

A l'heure actuelle, la pointe de la recherche en la matière - nous entendons par là, des développements rigoureux - semble toujours être presque limitée à l'étude d'un oscillateur simple soumis à une sollicitation qui présente des termes de chargement non linéaires. Les deux principaux sites de développements sont l'Université de Notre Dame à Notre Dame (Indiana, Etats-Unis) où excelle le célèbre A. Kareem et à Palerme (Italie), sous la régie de M. Di Paola. Les recherches menées dans chacun de ces deux sites sont complémentaires dans la mesure où l'un présente les développements dans le domaine fréquentiel, et l'autre dans le domaine temporel. Nous présenterons les caractéristiques de ces deux méthodes et confronteront les résultats qu'elles offrent.

Ci-après, nous présentons brièvement les différentes méthodes, y compris les méthodes approchées, qui permettent de résoudre le problème que nous avons choisi d'étudier. Nous commençons par les trois méthodes rigoureuses : l'approche par simulations de Monte Carlo, l'approche temporelle (Di Paola) et l'approche fréquentielle rigoureuse (Kareem). Ensuite, nous présenterons différentes solutions approchées.

Approche temporelle par simulations de Monte Carlo

L'analyse par simulations de Monte Carlo consiste à générer des histoires de vent et à les appliquer sur la structure étudiée. L'analyse dynamique transitoire de la structure pour chacune de ces sollicitations permet d'obtenir, pour chaque échantillon généré, une réponse déterministe. En répétant cette opération un nombre suffisant de fois, les caractéristiques statistiques de la réponse peuvent être établies.

Cette méthode d'analyse ne peut pas être évoquée sans éviter le célèbre G. Schüeller (Innsbruck, Autriche) et son équipe de recherche essentiellement tournée vers ces méthodes Monte Carlo. De cet établissement, il convient de souligner les travaux de Pradtlwarter ([78], [79]) qui est essentiellement responsable des études dynamiques. L'utilisation de processeurs suffisamment puissants permet d'étudier, à l'aide de ces simulations de Monte Carlo, des structures de dimensions relativement importantes. Ces études peuvent porter aussi bien sur les analyses statiques que dynamiques, linéaires que non linéaires. Cette méthode d'analyse peut donc prendre en compte le chargement proposé sans formuler d'hypothèse.

La génération des échantillons de vitesse de vent en différents points de l'espace avec les corrélations temporelles et les cohérences spatiales réalistes n'est pas une opération aisée. Dans ce document, nous présenterons un exposé des différentes méthodes existant pour générer ces échantillons. Nous pouvons souligner le travail d'un groupe, italien à nouveau, qui a largement étudié ce problème. Carassalle et Solari présentent une version continue ([10]) alors que Solari et Tubino ([90]), Bartoli et Borri ([5]) et Giofrè, Gusella et Grigoriu ([44]) présentent une version discrète. Nous verrons que la génération de plusieurs composantes de vent cohérentes entre elles doit passer par l'établissement d'une base "modale" (des composantes principales) où les échantillons sont non corrélés. Tous les auteurs recourent à cette solution. On peut également remarquer la proposition de Di Paola ([33]) qui consiste à travailler dans une base réduite. Les développements que nous avons menés ([24]) montrent que cette solution n'est pas toujours appropriée. Nos contributions personnelles ([26], [24]) dans ce domaine seront également présentées dans ce document.

Analyse temporelle probabiliste

Les méthodes d'analyse de structures linéaires soumises à des sollicitations aléatoires sont généralement bien connues ([3], [16], [80], [87]). Etant basées sur des intégrales de convolution, ces méthodes ne sont plus applicables lorsque la structure étudiée possède un comportement non linéaire et reste chargée par une sollicitation aléatoire. Dans ce cas, on peut penser immédiatement aux simulations de Monte Carlo.

Il existe en réalité une autre façon plus rigoureuse d'aborder le problème. Cette démarche, initialement basée sur l'écriture et la résolution des équations de Fokker-Planck-Kolmogorov, permet d'exprimer les caractéristiques statistiques de la réponse d'un système non linéaire. Pendant de nombreuses années, cette méthode a été considérée comme limitée aux problèmes unidimensionnels; notons cependant que l'amélioration des outils informatiques permettent à l'heure actuelle d'étudier des structures de petites dimensions ([82]).

Dans le courant des années 60, les développements de Stratonovich et Ito ([92]) ont mené à une théorie bien plus vaste, basée sur le calcul différentiel stochastique dit d'Ito. Bien qu'étant limitée aux sollicitations de type "markoviennes", tout comme pour les équations de Fokker-Planck-Kolmogorov d'ailleurs, cette théorie permet une étude analytique assez vaste des systèmes non linéaires. Nous la présenterons brièvement dans le cadre de ce travail. L'ampleur de cette théorie est si importante que les équations de Fokker-Planck-Kolmogorov en sont un cas particulier. Nous présenterons et appliquerons également une autre classe d'équations dérivées de cette théorie générale : les équations aux moments.

Les premiers auteurs qui ont appliqué cette théorie dans le cadre de l'étude de structures linéaires soumises à des chargements aléatoires non linéaires sont Soize ([87]), Grigoriu et Ariaratnam ([46], [47], [49], 1986) dans le domaine des structures offshore soumises aux effets de la houle et Lutes ([68], [69], 1986) dans le domaine de la mécanique. Les premiers développements se limitaient à l'étude d'oscillateurs simples (structures à un seul degré de liberté).

Suivent ensuite les contributions de l'équipe de Di Paola ([31], [32]) dont Benfratello ([6], [7]) et Muscolino ([73], [74]) qui réécrivent les équations dans un formalisme plus général. Ces auteurs présentent également une méthode pour appréhender le comportement de structures à plusieurs degrés de liberté. Leurs contributions se limitent essentiellement aux développements théoriques et mathématiques. Dans le cadre de ce document, nous présenterons les raisonnements à suivre pour appliquer cette méthode particulière. Ces auteurs, ainsi que Hu ([57]), présentent également les développements nécessaires à l'étude de formes non linéaires de processus aléatoires non gaussiens. Ces développements nous concernent moins dans la mesure où, à l'heure actuelle, les composantes de la turbulence du vent sont généralement considérées comme gaussiennes.

Rappelons que le domaine d'application des équations différentielles stochastiques est bien plus vaste que celui auquel nous nous limitons. Bien d'autres développements scientifiques recourent donc à l'utilisation de ces équations dans le cadre de l'étude d'autres phénomènes ([32], [52], [55], [58], [72], [97]) : excitation paramétrique, système non linéaire, ...

Approche fréquentielle

L'approche dans le domaine temporel à l'aide de la théorie des équations différentielles stochastiques d'Ito est certainement bien trop élaborée pour traiter le problème que nous voulons étudier. En effet, dans le cadre de ce document, nous allons essentiellement nous limiter à l'étude du comportement d'une structure linéaire soumise à une forme non linéaire d'un (ou plusieurs) processus aléatoire(s). Etant donné que le comportement dynamique que nous tentons d'examiner reste linéaire, l'étude peut être menée dans le domaine fréquentiel.

Nous allons voir que le problème que nous étudions n'est en réalité rien d'autre que celui de l'étude de la réponse d'une structure soumise à une sollicitation non gaussienne. L'objectif de l'analyse consiste donc à donner les grandeurs statistiques qui permettent de caractériser la non gaussianité de la sollicitation et de la réponse. Ceci peut être réalisé à l'aide des moments statistiques d'ordres supérieurs. Tout comme la densité spectrale de puissance peut être utilisée pour déterminer la variance de la réponse du système, d'autres grandeurs, les bispectres (trispectres, ...) permettent de déterminer ces caractéristiques d'ordres supérieurs de la réponse. Nous montrerons que la démarche suivie pour cette étude est basée sur une représentation du système à l'aide de ses noyaux de Volterra de différents ordres.

En invoquant cette méthode de résolution dans le domaine fréquentiel, on ne peut pas contourner A. Kareem ([65], [11], [53]) qui a largement contribué à la diffusion de cette méthode d'analyse. Ses efforts se sont essentiellement portés sur l'étude de systèmes à un degré de liberté. Il a confirmé à l'aide des théories de Kac-Siegert et Grigoriu concernant les estimations de grandeurs extrêmes que les termes non linéaires du chargement pouvaient influencer significativement les caractéristiques extrêmes de la réponse. Les résultats qu'il obtient sont sensiblement comparables aux résultats obtenus par Soize dans le domaine temporel, avec un autre modèle pour la prise en compte des grandeurs extrêmes.

L'approche dans le domaine fréquentiel permet également d'étudier des structures à plusieurs degrés de liberté. Etant donné les importants efforts de calcul, ce genre d'analyse est encore relativement rare à l'heure actuelle. Gusella et Materazzi ([54]) présentent l'analyse d'une structure possédant quelques degrés de liberté.

Pour le type de problème que nous nous sommes proposé d'étudier, il nous semble que cette approche soit plus appropriée que l'approche par simulations de Monte Carlo (bien plus coûteuses en temps de calcul, et difficile à reproduire ...) ou l'approche dans le domaine temporel pour laquelle l'interprétation physique des phénomènes mis en jeu est bien moins évidente. Cette méthode d'analyse dans le domaine fréquentiel occupera donc une place importante dans la présentation de ce travail. Nous nous efforcerons de présenter les détails de l'implémentation intelligente de cette méthode de façon à pouvoir réaliser l'étude de structures de très grandes dimensions.

Approche fréquentielle à l'aide de la linéarisation stochastique

Mis à part le recours à l'une de ces trois méthodes dont les deux dernières sont strictement rigoureuses, le problème ne peut être résolu qu'en formulant certaines hypothèses réductrices. Comme annoncé ci-avant, la méthode qui est la plus souvent présentée dans le domaine du vent turbulent consiste à rendre la sollicitation linéaire, de sorte à étudier

la réponse d'une structure gaussienne soumise à une sollicitation linéaire. Cette proposition originellement due à Davenport ([20], 1961) a rencontré un succès démesuré et est d'ailleurs encore largement utilisée à l'heure actuelle.

Cette sollicitation linéaire « équivalente » peut être obtenue selon différentes méthodes comme par exemple en laissant simplement de côté les termes non linéaires, ou en recourant à la linéarisation stochastique.

L'avantage majeur de cette simplification consiste en une résolution beaucoup plus rapide puisque seules les moyennes et variances des réponses structurelles doivent être calculées. Ceci constitue la raison principale pour laquelle cette méthode est largement utilisée en bureau d'études, pour le dimensionnement des structures du génie civil.

Approche fréquentielle à l'aide de la quadratization stochastique

Kareem ([64]) et Carrasselle ([11]) présentent une méthode approchée qui consiste à remplacer la sollicitation non linéaire par une sollicitation équivalente qui s'exprime par une forme quadratique d'un processus aléatoire gaussien. Cette approche est particulièrement intéressante dans le domaine de l'analyse de structures soumises au vent turbulent car la forme du chargement peut souvent s'exprimer sous une telle forme. La méthode est dérivée de l'approche rigoureuse dans le domaine fréquentiel présentée ci-avant.

Approche fréquentielle à l'aide d'un processus gaussien équivalent

Dans la liste des méthodes approchées, nous pouvons souligner également le travail de Floris ([37], [38]) qui conseille de remplacer la sollicitation non gaussienne par une sollicitation gaussienne équivalente qui permet de représenter plus précisément la topologie de la queue de la densité de probabilité exacte de la sollicitation. Les exemples fournis par l'auteur semblent montrer que cette méthode permette, au prix d'un effort de calcul à peine plus important, de s'approcher plus précisément de la réponse exacte de la structure soumise à la sollicitation non linéaire.

1.2.3 Caractéristiques mécaniques d'une structure à plusieurs degrés de liberté

Quel que soit le domaine de recherche concerné, il nous semble important, à l'heure actuelle, de pouvoir représenter le comportement des systèmes à plusieurs degrés de liberté. En effet, l'étude des structures de plus en plus complexes que nous rencontrons ne peut que trop rarement se rapporter à l'étude d'oscillateurs simples. C'est pour cette raison que nous avons jugé intéressant et nécessaire de porter notre attention sur ces systèmes à plusieurs degrés de liberté.

L'étude de ces systèmes est généralement entreprise dans une base réduite, comme la base des modes propres. En plus d'une simplification substantielle des efforts de calcul, la projection dans cette base particulière permet une interprétation physique bien plus aisée.

Dans certaines circonstances, des couplages peuvent se produire entre les réponses dans ces modes propres ou entre les réponses structurelles. Dans ce document, nous donnerons une présentation concise des différents types de couplage modaux qui peuvent prendre place dans une structure. Il nous semble que cette présentation de concepts

basiques ne soit pas superflue dans la mesure où, dans le domaine du génie civil, ces notions de couplage sont très rarement intégrées.

Les références bibliographiques en la matière sont celles qui traitent de la dynamique des structures et que nous avons déjà citées ci-avant.

1.2.4 Intégration du travail dans le contexte fixé

Au terme de cette étude bibliographique, nous pouvons maintenant comprendre pourquoi notre travail s'intitule "Application des méthodes d'analyse stochastique ...". En effet, la présentation que nous venons de donner montre que les méthodes d'analyse existent mais qu'elles semblent difficilement applicables aux structures de plus grandes dimensions rencontrées en pratique.

Mise à part l'étude au troisième ordre d'une structure dans la base des modes propres, cette présentation n'apporte pas réellement d'innovation au niveau des méthodes appliquées. Nous reprendrons cependant un exposé relativement détaillé des développements théoriques menant à l'établissement des méthodes appliquées dans la mesure où les références bibliographiques intéressantes présentent parfois certaines discordances. Afin de valider les résultats que nous avons présentés dans ce document, nous avons systématiquement comparé les résultats venant des trois approches rigoureuses (Monte Carlo, approche dans le domaine fréquentiel, approche dans le domaine temporel). Il nous semble que ce genre de comparaison manque souvent dans la littérature et mène donc à une certaine remise en question des résultats présentés.

Tout au long de ce travail, nous nous sommes également imposé une seconde ligne de conduite concernant les interprétations physiques des grandeurs mises en jeu. Cet aspect, qui nous semble occuper une place importante pour pouvoir "palper" plus aisément les grandeurs résultant d'une analyse, est rarement favorisé dans les présentations scientifiques. Ceci pourrait également être considéré comme un aspect original de notre travail.

1.3 Plan du travail

Ce travail s'inscrit dans la lignée d'un travail préalable publié à l'occasion d'un Diplôme d'Etudes Approfondies en Sciences Appliquées. Afin de raccourcir au maximum la présentation de ce travail, nous allons passer directement à l'étude plus précise du problème que nous étudions. Les notions élémentaires des théories de probabilités, des processus aléatoires et de l'analyse dynamique de structures linéaires sont donc censées être connues. Si tel n'était pas le cas, le lecteur peut consulter ce travail ([26]) ou les références bibliographiques que nous venons de donner.

Le travail est essentiellement divisé en trois parties, chacune d'elles étant subdivisée en différents chapitres. Le premier chapitre de chacune des parties consiste en une introduction des phénomènes qui sont détaillés dans cette partie. Les autres chapitres permettent de structurer la partie étudiée de façon à présenter les aspects liés à des méthodes de résolutions différentes. Chacun de ces chapitres présente également une introduction et une conclusion. Le document complet est écrit de façon telle que la lecture des introductions de chaque partie, ainsi que des introductions et conclusions de chaque chapitre permette une bonne compréhension générale du travail réalisé. Il pourrait éventuellement être intéressant de débiter par cette lecture simplifiée.

La première partie du document traite de l'étude du système à un degré de liberté. Le comportement de ce système très simple est déjà bien maîtrisé, même lorsque la sollicitation appliquée à cet oscillateur simple est non gaussienne (cf Kareem, Di Paola). Bien que les développements théoriques soient généralement limpides, l'application de ces méthodes n'est pas nécessairement évidente. Dans le cadre de l'étude d'un système aussi simple, on ne se force généralement pas à optimiser la méthode de calcul tant elle est immédiate. Il faut cependant savoir que ces développements doivent servir de base pour l'étude de structures à plusieurs degrés de liberté pour lesquelles il est nécessaire d'optimiser la démarche de résolution. Il nous semble important de commencer cette optimisation au niveau de l'étude de l'oscillateur simple. Nous présenterons donc nos contributions personnelles sur cet aspect de "l'application des méthodes d'analyse stochastique". Les analyses dans les deux domaines d'aux seront présentées et les résultats obtenus à l'aide de ces deux méthodes seront comparés.

Nous profiterons également de cette première partie pour réaliser une étude comparative entre différentes méthodes approchées dont la célèbre approximation en bruit blanc, généralement appliquée dans le cadre de l'analyse au vent turbulent des structures du génie civil. Plusieurs études comparatives seront présentées de façon à mettre en évidence non seulement les effets de la non linéarité du chargement mais également des différentes méthodes simplifiées (ou combinaisons de méthodes simplifiées) imaginables. Nous pouvons également mentionner la présentation d'une méthode originale, intermédiaire entre l'approximation en bruit blanc et l'intégration numérique.

La deuxième partie du document est consacrée à l'étude des structures à plusieurs degrés de liberté. Un premier chapitre présente les différentes notions de couplage modal que nous avons pu identifier dans l'analyse stochastique. Nous y donnons une vision personnelle de l'interprétation du couplage modal rencontré lorsque la matrice d'amortissement n'est pas proportionnelle. Les chapitres suivants présentent les applications dans les domaines fréquentiel et temporel des méthodes d'analyse des structures à plusieurs degrés de liberté soumises à des sollicitations non gaussiennes. Pour les grandes structures rencontrées dans le domaine du génie civil, l'analyse dans une base modale semble être inévitable. Nous avons donc choisi de développer une méthode d'analyse au troisième ordre et en base modale. Cette méthode sera présentée en parallèle avec les interprétations physiques et géométriques nécessaires à sa bonne assimilation. Les commentaires que nous avons donnés en parcourant la liste des références bibliographiques montrent que les aspects que nous présentons à ces chapitres sont particulièrement innovateurs.

La troisième partie du document présente quelques applications plus particulières au domaine de l'analyse de structures soumises au vent turbulent. En effet, les développements des deux premières parties, bien qu'étant légèrement orientés vers ce domaine, présentent un caractère relativement général et pourraient également être appliqués à d'autres domaines tels celui de l'étude des effets de la houle sur les structures offshore. A la troisième partie du document, nous étudions une sollicitation aérodynamique plus précise, celle d'un champ de turbulence bidimensionnel. A cet effet, nous mettrons en évidence l'apparition de nouveaux termes de chargement non linéaires. Ces termes non linéaires proviennent de la non linéarité des coefficients aérodynamiques (C_D , C_L et C_M) vis-à-vis de l'angle d'incidence du vent. Les développements que nous aurons menés jusqu'à ce point nous permettront de prendre en compte de façon rigoureuse (et à l'aide de notre code de calcul écrit dans le domaine fréquentiel) ces non linéarités des coefficients aérodynamiques. De nouveau, les commentaires qui seront fournis aspirent à une inter-

prétation physique maximale de sorte à pouvoir tirer les lignes de conduite générales qui pourraient être utiles dans le cadre du dimensionnement d'un nouvel ouvrage d'art.

Cette étude, certes encore limitée, d'une étude plongée dans un champ de turbulence bidimensionnel présente encore certaines limitations pour pouvoir être appliquée à la conception précise et définitive d'une structure réaliste. Pour terminer cette présentation, nous donnerons finalement une entrevue générale (sans rentrer dans les détails de la programmation) des développements qui ont été entrepris dans le code de calcul *FineLg*. Ces développements permettent l'analyse d'une structure tridimensionnelle plongée dans un champ de turbulence tridimensionnel, avec prise en compte des termes quadratiques de la turbulence et des non linéarités des coefficients aérodynamiques. A la fin du document, les modifications à apporter à l'analyse simplifiée habituelle pour prendre en compte ces phénomènes devraient apparaître assez évidentes, du moins nous l'espérons.

“Pour les esprits qui savent comprendre, à côté de la beauté d'une loi générale, les finesses d'une analyse subtile et délicate frôlant parfois le paradoxe, la théorie des hasards présentera un attrait et un charme tout particuliers”

Louis Bachelier

Première partie

Analyse d'un système 1-DDL

Chapitre 2

Introduction

Dans de nombreux problèmes de dynamique à basse fréquence rencontrés à l'heure actuelle, la réponse du système étudié peut se limiter à celle du premier mode propre de vibration. L'exemple le plus typique dans le cas du vent est la sollicitation d'un panneau d'indication routière ou d'un poteau d'éclairage public. Pour les systèmes plus complexes nécessitant l'étude de plusieurs modes de vibration, la réponse s'obtient en considérant chacun des modes l'un après l'autre. Il est donc important, avant d'aborder ce problème plus complexe, de bien maîtriser le fonctionnement d'un oscillateur simple.

Dans la première partie de ce document, nous allons présenter les principales méthodes d'analyse dynamique stochastique de structures soumises à des processus aléatoires. Etant donné que ces méthodes sont largement utilisées à l'heure actuelle, nous nous limiterons à ne présenter de ces méthodes que les astuces nécessaires à leur application efficace.

La méthode la plus simple pour caractériser le processus aléatoire sollicitant un oscillateur simple consiste en sa densité spectrale de puissance. Pour autant que le processus étudié soit gaussien, cette grandeur suffit entièrement à la caractérisation. Dans le domaine qui nous concerne plus précisément, les processus aléatoires sollicitants ne sont pas tout à fait gaussiens. Par exemple, l'équation du mouvement représentant la dynamique d'un oscillateur simple soumis au vent turbulent est :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = \frac{1}{2}\rho C_d A [\bar{U} + u(t) - \dot{x}(t)]^2 \quad (2.1)$$

où M , C , K représentent les caractéristiques structurelles, $\rho C_d A$ représente les caractéristiques aérodynamiques et les trois vitesses $\bar{U}$, $u(t)$ et $\dot{x}(t)$ représentent la vitesse moyenne du vent, la composante turbulente du vent (fluctuation autour de cette moyenne) et la vitesse structurelle. Tout au long de la première partie de ce document, nous allons discuter cette équation qui paraît assez simple à première vue mais qui présente en réalité des complications inévitables lorsque les caractères non gaussiens de la sollicitation et de la réponse doivent être pris en compte.

La composante turbulente du vent $u(t)$ est généralement considérée comme un processus aléatoire gaussien. Cette hypothèse est assez bonne ; il est de toute façon assez difficile de faire autrement, faute d'informations. Si l'expression complète et rigoureuse de l'effort est conservée et pour autant que la réponse $\dot{x}(t)$ soit également considérée comme un processus aléatoire gaussien, la sollicitation appliquée s'exprime alors par le carré d'un processus aléatoire gaussien $(\bar{U} + u(t) - \dot{x}(t))$. Il va de soi, mais nous le démontrerons ci-dessous, que cet effort est donc non gaussien. Le développement du carré intervenant

dans l'expression de la sollicitation donne six termes dont chacun d'eux possède une particularité :

- $\frac{1}{2}\rho C_d A \bar{U}^2$ est un terme de chargement constant. Pour autant que l'intensité de la turbulence soit assez faible, ce terme représente l'effort moyen que subit l'oscillateur. Dans le schéma classique de l'analyse d'une structure soumise au vent turbulent, la réponse associée à ce terme de chargement constant est étudié séparément à l'aide d'une analyse statique ;
- $\rho C_d A \bar{U} u(t)$ est un terme de chargement directement proportionnel à la turbulence du vent. Tout au long du document, nous supposons que la composante turbulente de la vitesse du vent est un processus aléatoire gaussien de moyenne nulle. Il en est donc de même de ce terme de chargement. Ses effets sur la réponse de la structure peuvent être étudiés à l'aide d'une analyse stochastique dans le domaine fréquentiel, par exemple. Les théories des processus aléatoires nous apprennent que la réponse d'une structure à une sollicitation gaussienne est également gaussienne, ce qui facilite grandement la représentation statistique de la réponse d'une structure soumise à ce terme d'excitation ;
- $-\rho C_d A \bar{U} \dot{x}(t)$ est un terme de chargement proportionnel à la vitesse de la structure et de signe contraire. Ramené au membre de gauche de l'équation du mouvement, ce terme contribue à l'amortissement complet de la structure en s'ajoutant à l'amortissement structurel éventuellement présent. Ceci lui vaut le qualificatif de "terme d'amortissement aérodynamique".

Au chapitre 13, nous présenterons les différents modèles qui quantifient les effets de l'écoulement fluide autour du corps étudié. L'approche que nous avons choisie (Eq. 2.1) est l'approche aérodynamique. Dans cette approche, la représentation de l'interaction fluide-structure est limitée à ce terme d'amortissement aérodynamique.

- $\frac{1}{2}\rho C_d A u^2(t)$ est le terme de chargement extérieur non linéaire. La moyenne de ce terme de chargement ($\frac{1}{2}\rho C_d A \sigma_u^2$) est non nulle puisqu'il est toujours positif. On peut cependant constater que cette contribution est généralement faible comparé au terme de chargement constant (point 1, ci-dessus) puisque l'écart type de la turbulence σ_u est généralement faible vis-à-vis de la vitesse moyenne du vent $\bar{U}$. Puisqu'il s'exprime à partir du carré d'un processus aléatoire gaussien $u(t)$, le terme de chargement extérieur non linéaire n'est pas un processus aléatoire gaussien. La caractérisation statistique correcte de ce terme et de ses effets sur la structure constitue un objectif majeur de cette partie du document ;
- $-\rho C_d A u(t) \dot{x}(t)$ et $\frac{1}{2}\rho C_d A \dot{x}^2(t)$ sont les termes d'excitation paramétrique et d'amortissement non linéaire respectivement. Ces deux termes assez singuliers requièrent une attention toute particulière. Leur prise en compte rigoureuse fait l'objet de développements spécifiques qui sortent du cadre des présentes discussions. ([97]). Au chapitre 7, nous présenterons les raisons pour lesquelles ces termes sont plus difficiles à prendre en compte. Dès à présent, nous pouvons préciser que certains auteurs les négligent en prétendant que la vitesse structurelle $\dot{x}$ est petite par rapport à la vitesse moyenne du vent. Il vaut cependant mieux être prudent avec ce genre de raisonnement étant donné que le système dynamique étudié n'est plus le même dès lors que l'amortissement non linéaire est pris en compte.

Dans la majeure partie du document, nous laisserons ces deux derniers termes de côté

et nous nous limiterons ainsi à étudier l'équation du mouvement suivante :

$$\ddot{x}(t) + 2\varpi\xi\dot{x}(t) + \varpi^2x(t) = \gamma [\bar{U} + u(t)]^2 \quad (2.2)$$

où $\gamma = \frac{1}{2M}\rho C_d A$ et $\xi = \frac{C + \rho C_d A \bar{U}}{2\sqrt{KM}}$ regroupe les amortissements aérodynamique $\left(\frac{\rho C_d A \bar{U}}{2\sqrt{KM}}\right)$ et structurel $\left(\frac{C}{2\sqrt{KM}}\right)$.

En outre, nous travaillerons régulièrement sous l'hypothèse que la partie fluctuante de la vitesse du vent, $u(t)$, est un processus aléatoire d'Ornstein-Uhlenbeck. Ce processus aléatoire est le processus autorégressif¹ le plus simple qui soit puisque qu'il est obtenu par :

$$\frac{du(t)}{dt} = -\alpha u(t) + \sigma_u \sqrt{2\alpha} W(t) \quad (2.3)$$

où $W(t)$ représente un bruit blanc gaussien d'intensité unitaire. Les paramètres $\alpha > 0$ et $\sigma_u > 0$ servent à caractériser le processus aléatoire $u(t)$ ainsi obtenu. De cette définition, on vérifie aisément que la densité spectrale de puissance de ce processus aléatoire est une fraction rationnelle :

$$S_u(\omega) = \frac{\sigma_u^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \varpi^2)} \quad (2.4)$$

et que la fonction d'autocorrélation de ce processus est une exponentielle décroissante :

$$R_u(\Delta t) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\Delta t|} \quad (2.5)$$

ce qui lui vaudra également dans la suite la dénomination de processus à corrélation exponentielle.

Cette forme de densité spectrale présente une valeur maximale ainsi qu'une tangente horizontale à l'origine et une décroissance assez rapide en fonction des pulsations. Ce genre de comportement est identique aux formes des densités spectrales rencontrées en pratique dans le domaine du vent. Dans certaines circonstances, nous verrons qu'il peut être avantageux de remplacer les densités spectrales réelles de turbulence par des processus à corrélation exponentielle.

Soit ϖ une pulsation de référence (ou par exemple la pulsation naturelle de l'oscillateur), le rapport

$$\frac{S_u(0)}{S_u(\varpi)} = \frac{\alpha^2 + \varpi^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{\varpi^2}{\alpha^2} \quad (2.6)$$

permet de donner une interprétation au paramètre α . Plus le paramètre α est grand par rapport à la pulsation de référence ϖ , plus l'énergie de la sollicitation contenue dans la bande de fréquence $[0; \varpi]$ est importante. A titre d'exemple, retenons qu'en $\varpi = 7\alpha$ la densité spectrale ne vaut plus qu' $1/50^{\text{ème}}$ de sa valeur à l'origine.

L'utilisation de ce processus aléatoire très simple nous permettra de réaliser des développements analytiques de complexité limitée. Ceci permettra ainsi d'une part, d'obtenir des formulations faciles à interpréter et, d'autre part, de réaliser des études paramétriques très rapidement. Ces résultats analytiques pourront également servir de références pour apprécier les qualités des différentes approches numériques. En effet, parallèlement à ces

¹Nous donnerons plus de détails concernant les processus autorégressifs au chapitre 6.2.2. On peut retenir pour l'instant qu'un processus autorégressif s'exprime à partir d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

développements analytiques, nous verrons comment aborder le problème numériquement afin de pouvoir étudier des densités spectrales de puissance quelconques.

L'objectif des différentes analyses que nous allons présenter consiste en la détermination des caractéristiques statistiques de la réponse structurelle : moyenne, variance, densité spectrale et les grandeurs qui en sont dérivées, à savoir les fréquences de passage par des seuils fixés et les distributions de probabilité des maxima et extrema. Les résultats qui sont présentés au chapitre 3 découlent de l'application habituelle de la méthode d'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel. En effet, l'application de la linéarisation stochastique permet de rendre le problème étudié parfaitement gaussien. Les points importants de ce chapitre concernent davantage la mise en oeuvre de la méthode que les développements théoriques. En effet, tout au long du document, il convient de garder à l'esprit que les méthodes d'analyse que nous allons présenter doivent pouvoir être étendues et appliquées à des structures complexes et de grandes dimensions. Dans ce premier chapitre, nous discutons essentiellement les méthodes d'application de la méthode d'analyse stochastique de façon à la rendre la plus efficace possible.

Au chapitre 4, nous étudierons le problème sans formuler les hypothèses supplémentaires permettant de rendre le chargement gaussien. Cela signifie donc que le terme de chargement quadratique $\frac{1}{2}\rho C_d A u^2(t)$ peut être pris en considération. Après discussion, nous verrons que, dans le cadre des sollicitations que nous étudions, ce terme de chargement induit finalement peu de modifications sur des caractéristiques statistiques de la réponse telles la moyenne ou l'écart type. Au cours de nos développements, nous verrons également que certaines autres grandeurs d'ordres supérieurs doivent également être calculées pour représenter correctement la réponse. Etant donné que ces méthodes d'analyse sont encore peu connues, la présentation que nous donnons de la méthode à appliquer devrait permettre un apprentissage autodidacte assez rapide. L'importance volumique de ce chapitre reflète assez bien l'attention qui devrait lui être portée. En effet, les considérations élémentaires que nous pourrions retirer de ces développements seront appliquées dans la suite à la résolution de problèmes plus pratiques de l'analyse de structures soumises au vent turbulent.

Le chapitre suivant (5) présente une méthode d'analyse, dans le domaine temporel cette fois, sensiblement différente (analyse à l'aide du calcul différentiel stochastique d'Ito). Elle permettra de prendre en compte les effets dynamiques non linéaires, quels qu'ils soient. Dans le cadre de cette présentation, nous accordons moins d'importance à ce chapitre car l'outil qui y est présenté est incontestablement trop puissant pour le simple problème que nous allons aborder. La présentation qui en est faite nous permettra cependant de valider, à l'aide de cette méthode complètement différente, les résultats qui seront obtenus dans le domaine fréquentiel. Aussi, nous aurons l'occasion de voir dans ce chapitre quelles autres applications du domaine du génie civil pourraient être intéressées par ce genre d'approche.

Nous continuerons la présentation au chapitre 6 avec quelques exemples d'applications dans le domaine temporel, par simulations de Monte Carlo. Comparément aux autres méthodes d'analyse présentées, il faut savoir que la méthode d'analyse par simulations de Monte Carlo ne permet d'obtenir des résultats que sous certaines combinaisons de paramètres. Il est par exemple assez fastidieux de réaliser une étude paramétrique à l'aide de cette méthode d'analyse. Les développements et résultats que nous présentons dans ce chapitre résument les travaux que nous avons déjà publiés préalablement. Nous nous contentons donc essentiellement de mettre l'accent sur quelques points parti-

culiers auxquels il convient d'être attentif lors d'études par simulations dans le domaine temporel.

Le dernier chapitre de cette première partie (7) est donné à titre instructif. C'est la seule partie du document complet qui prend en compte les termes d'amortissement non linéaire et ceux d'excitation paramétrique. Nous y présentons quelques réflexions sur ces deux effets particuliers et les implications qu'ils peuvent avoir dans le domaine du génie civil. L'exposé vise également à démontrer que la prise en compte de ces deux phénomènes est relativement complexe.

Chapitre 3

Linéarisation stochastique

(Au sujet de la distribution Gaussienne) "Tout le monde y croit, car les expérimentateurs s'imaginent que c'est un théorème de mathématique, et les mathématiciens que c'est un fait expérimental".

Henri Poincaré

3.1 Introduction

La théorie des processus aléatoires nous apprend que la réponse d'une structure linéaire soumise à un processus gaussien est également gaussienne. Ceci est relativement évident dans la mesure où cette réponse peut être estimée par une convolution (c'est-à-dire un opérateur linéaire) de la sollicitation. Nous pourrions de toute façon constater ceci au travers des exemples présentés ci-après.

Il faut savoir également que les processus aléatoires gaussiens sont des êtres mathématiques assez plaisants à manipuler puisque leur caractérisation statistique est très simple. A partir du chapitre suivant seulement nous comprendrons que la caractérisation d'un processus aléatoire quelconque est assez lourde. Un processus gaussien quant à lui est complètement caractérisé par sa densité spectrale de puissance, ou, de façon équivalente par sa fonction d'autocorrélation. Ces grandeurs sont des caractéristiques d'ordre 2 car elles permettent de représenter les statistiques des valeurs prises en des instants différents.¹

¹ Quel que soit l'ordre de caractérisation qui soit observé, les caractéristiques d'ordre(s) inférieur(s) sont toujours incluses dans la grandeur d'ordre supérieur. Par exemple la moyenne et le carré moyen du processus gaussien peuvent être obtenus par l'asymptote horizontale et la valeur à l'origine de la fonction d'autocorrélation. Des propriétés équivalentes existent également en terme de densité spectrale ; il suffit "d'appliquer une transformée de Fourier" à ces propriétés : le carré de la moyenne est l'intensité du Dirac concentré à l'origine et le carré moyen est l'intégrale de la densité spectrale sur le domaine des pulsations.

Cette double argumentation représente les raisons pour lesquelles les physiciens (et donc a fortiori également les ingénieurs) se sont dans un premier temps limités à établir des modèles linéaires. A l'heure actuelle, le dimensionnement des structures du génie civil recourt, dans la majorité des analyses, à ce genre de simplification. Aussi, lorsque le problème est linéarisé, stochastiquement parlant, plusieurs hypothèses supplémentaires, telle l'approximation en bruit blanc, peuvent être formulées pour faciliter le calcul des variances. Dans les développements suivants, nous présenterons différentes démarches et réaliserons une étude sur la précision qu'elles peuvent offrir dans le cadre de l'analyse d'une structure soumise aux effets du vent turbulent.

3.2 Principes de la linéarisation stochastique

L'analyse rigoureuse d'une structure soumise aux effets du vent turbulent nécessite la résolution d'un problème non linéaire pour des raisons de chargement extérieur non linéaire d'une part et d'amortissement non linéaire d'autre part. De manière plus générale, les problèmes de dynamique stochastique rencontrés dans d'autres applications peuvent être non linéaires. Pour autant que ces non linéarités soient d'une importance limitée, il est extrêmement tentant de remplacer le système non linéaire par un système linéaire qui serait statistiquement équivalent. Plusieurs méthodes sont actuellement disponibles ([37], [38]) mais la plus courante et certainement la plus utilisée est la linéarisation stochastique due à Caughey ([12]).

Cette méthode propose de remplacer le système non linéaire :

$$m\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = f(t) \quad (3.1)$$

par un système linéaire équivalent dont les grandeurs représentatives sont m , $c_{\text{équ}}$ et $k_{\text{équ}}$:

$$m\ddot{y} + c_{\text{équ}}\dot{y} + k_{\text{équ}}y = f(t) \quad (3.2)$$

La solution $y(t)$ de cette équation différentielle linéaire est évidemment différente de la solution exacte $x(t)$ de 3.1 qui représente la réponse du système non linéaire. L'introduction de la réponse approchée $y(t)$ dans la relation 3.1 ne permet donc pas d'équilibrer les sollicitations extérieures :

$$m\ddot{y} + g(y, \dot{y}) = f(t) + \varepsilon(t) \quad (3.3)$$

L'équivalence telle qu'elle est présentée dans la méthode de la linéarisation stochastique consiste à minimiser l'écart $\varepsilon(t)$ au sens des carrés moyens² :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= m\ddot{y} + g(y, \dot{y}) - f(t) \\ &= g(y, \dot{y}) - c_{\text{équ}}\dot{y} - k_{\text{équ}}y \end{aligned} \quad (3.4)$$

Les paramètres du système linéaire équivalent sont donc obtenus en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial [E[\varepsilon^2(t)]]}{\partial c_{\text{équ}}} = 0 \\ \frac{\partial [E[\varepsilon^2(t)]]}{\partial k_{\text{équ}}} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

²Minimiser cet écart plutôt que l'écart $x(t) - y(t)$ présente l'avantage de ne pas devoir calculer la solution $x(t)$. Si tel était le cas, on imagine bien sûr que l'on n'aurait alors pas recours à la linéarisation stochastique.

3.2.1 La linéarisation stochastique et l'analyse au vent turbulent

Dans notre analyse des effets de la turbulence sur les structures du génie civil, nous nous limitons à étudier des structures linéaires soumises à des chargements non linéaires. La méthode de la linéarisation stochastique telle qu'elle est présentée habituellement peut être adaptée assez facilement dans ce cas. Au lieu d'étudier la sollicitation exacte :

$$f(t) = \gamma [\bar{U} + u(t)]^2 \quad (3.6)$$

nous allons formuler une expression linéaire du chargement qui est statistiquement équivalente :

$$f_{\text{équ}}(t) = A + Bu(t) \quad (3.7)$$

L'écart à minimiser s'exprime maintenant par :

$$\varepsilon(t) = f(t) - f_{\text{équ}}(t) = \gamma [\bar{U} + u(t)]^2 - A - Bu(t) \quad (3.8)$$

Comme dans méthode originelle, les paramètres A et B peuvent être estimés en exprimant la minimisation du carré de cet écart :

$$\varepsilon(t) = (\gamma\bar{U}^2 - A) + (2\gamma\bar{U} - B)u(t) + \gamma u^2(t) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) &= (\gamma\bar{U}^2 - A)^2 + (2\gamma\bar{U} - B)^2 u^2(t) + \gamma^2 u^4(t) + 2(\gamma\bar{U}^2 - A)(2\gamma\bar{U} - B)u(t) \\ &\quad + 2\gamma(\gamma\bar{U}^2 - A)u^2(t) + 2\gamma(2\gamma\bar{U} - B)u^3(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Etant donné que le processus aléatoire $u(t)$ est un processus gaussien centré, les quelques premiers moments s'écrivent³ :

$$\begin{aligned} E[u(t)] &= 0 \\ E[u^2(t)] &= \sigma_u^2 \\ E[u^3(t)] &= 0 \\ E[u^4(t)] &= 3\sigma_u^4 \end{aligned}$$

Le carré moyen de l'écart prend donc une forme assez simple :

$$E[\varepsilon^2(t)] = (\gamma\bar{U}^2 - A)[\gamma\bar{U}^2 - A + 2\gamma\sigma_u^2] + (2\gamma\bar{U} - B)^2\sigma_u^2 + 3\gamma^2\sigma_u^4 \quad (3.11)$$

et les paramètres A et B qui caractérisent l'effort stochastiquement linéarisé s'expriment par :

$$\frac{\partial E[\varepsilon^2(t)]}{\partial A} = 0 \Rightarrow A = \gamma\bar{U}^2 + \gamma\sigma_u^2 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial E[\varepsilon^2(t)]}{\partial B} = 0 \Rightarrow B = 2\gamma\bar{U} \quad (3.13)$$

³Toutes ces relations peuvent ne pas être évidentes pour l'instant. Nous donnerons plus de précisions à ce sujet au paragraphe 4.2.1.

La linéarisation stochastique de la sollicitation non linéaire $f(t) = \gamma \bar{U}^2 + 2\gamma \bar{U}u(t) + \gamma u(t)^2$ est donc :

$$f(t) = \gamma \bar{U}^2 + 2\gamma \bar{U}u(t) + \gamma \sigma_u^2 \quad (3.14)$$

Ce chapitre est dédié à l'analyse d'une structure linéaire soumise à un chargement non linéaire par cette méthode de linéarisation stochastique. Mis sous forme d'équation, le problème que nous allons donc traiter dans ce chapitre s'écrit :

$$\ddot{x}(t) + 2\varpi\xi\dot{x}(t) + \varpi^2x(t) = \gamma\bar{U}^2 + \gamma\sigma_u^2 + 2\gamma\bar{U}u(t) \quad (3.15)$$

On constate donc que l'objectif de la linéarisation stochastique est atteint puisque le problème ainsi obtenu est parfaitement linéaire.

Ce problème est assez simple ou plutôt, la méthodologie à appliquer pour résoudre ce problème est assez simple. Nous ne reviendrons que brièvement sur la méthodologie d'analyse stochastique. Les points importants présentés dans ce chapitre portent plutôt sur la mise en oeuvre de la méthode et les problèmes pratiques qui peuvent se présenter lors de sa programmation.

Dans la relation 3.15, l'expression de l'effort peut être décomposée en deux contributions : la première ($\gamma\bar{U}^2 + \gamma\sigma_u^2$) est un terme de chargement constant qui peut être traité séparément à l'aide d'une analyse linéaire au premier ordre. Remarquons que l'écart type de la composante turbulente du vent (σ_u) est généralement assez faible par rapport à la vitesse moyenne du vent ($\bar{U}$). De l'expression moyenne de la sollicitation, on ne garde donc généralement que $\gamma\bar{U}^2$.

La partie la plus attrayante de l'analyse consiste en l'analyse stochastique de la structure soumise à la seconde contribution. Nous allons donc essentiellement nous attarder à la résolution de :

$$\ddot{x}(t) + 2\varpi\xi\dot{x}(t) + \varpi^2x(t) = 2\gamma\bar{U}u(t) \quad (3.16)$$

où le processus aléatoire $x(t)$ représente maintenant la partie fluctuante de la réponse (de moyenne nulle) et non plus l'expression complète du déplacement.

3.2.2 Analyse stochastique d'une structure linéaire

La réponse d'une structure linéaire soumise à une sollicitation gaussienne est un processus aléatoire gaussien. Cela signifie donc que la réponse à l'ordre 2 suffit parfaitement à la caractérisation de la réponse. Par ordre de caractérisation, nous entendons en réalité le nombre de coupes nécessaires à réaliser sur l'axe temporel pour caractériser le processus aléatoire.

Par exemple, au premier ordre, les grandeurs statistiques sont obtenues en réalisant une seule coupe, c'est à dire en observant un instant donné. Les caractéristiques que l'on peut obtenir sont alors la moyenne et la variance. Pour les processus stationnaires tels les processus que nous étudions dans ce document, les grandeurs statistiques ainsi obtenues sont indépendantes de l'instant observé.

Au second ordre, les caractéristiques sont obtenues en réalisant deux coupes sur l'axe temporel (en t_1 et t_2) et en observant les statistiques conjointes des valeurs prises par le processus en ces deux instants. Il est donc ainsi possible d'apprécier le contenu fréquentiel du processus aléatoire étudié. Notons que, pour les processus stationnaires, les grandeurs

statistiques ainsi obtenues ne dépendent que du décalage temporel $|t_2 - t_1|$ entre les instants d'observation. En réalisant les deux coupes en des instants identiques ($t_1 = t_2$), on peut retrouver les grandeurs statistiques obtenues à l'ordre 1 (variance et non plus covariance). Par caractéristique à l'ordre 2, on entend donc également caractéristique du carré du processus en un instant fixé. On comprend donc que les caractéristiques d'ordre inférieur peuvent toujours être obtenues par projection dans un espace de dimension(s) inférieure(s).

Pour des raisons de simplification d'expression, et bien qu'étant intrinsèquement une caractéristique de premier ordre, la variance sera dans la suite considérée comme une caractéristique de second ordre. Il en sera de même pour toutes les caractéristiques d'ordre n ramenées dans un espace de dimension(s) inférieure(s). Dans la suite, lorsque nous parlerons :

- de moment d'ordre 1, il s'agira donc exclusivement de la moyenne ;
- de moment d'ordre 2, il s'agira donc de la fonction d'autocorrélation (et donc également de densité spectrale de puissance), qui, éventuellement peut dégénérer en la variance du processus aléatoire si les coupes sont réalisées aux mêmes instants ;
- de moment d'ordre 3, il s'agira des caractéristiques d'ordre trois du processus aléatoires, c'est-à-dire des statistiques conjointes des valeurs prises en trois instants différents. La projection de cette fonction dans un espace de dimension 1 (les trois coupes sont réalisées au même instant) correspond au moment statistique d'ordre 3 au sens de la variable aléatoire et non plus au sens du processus aléatoire ;
- de moment d'ordre 4, ...

Maintenant que ces précisions sont établies, nous pouvons aborder les caractérisations de premier et de second ordres de la réponse d'un système linéaire soumis à un processus aléatoire gaussien.

Caractérisation de premier ordre

Pour rappel, l'équation différentielle que nous essayons de résoudre est :

$$\ddot{x}(t) + 2\varpi\xi\dot{x}(t) + \varpi^2x(t) = f(t) \quad (3.17)$$

où $x(t)$ et $f(t)$ sont des processus aléatoires. Pour les développements qui suivent, il est assez commode de se représenter un processus aléatoire comme un ensemble de réalisations qui satisfont les caractéristiques statistiques du processus en question. Ainsi, pour chacune des réalisations de $f(t)$, la réponse associée s'obtient par :

$$x(t) = \int_0^t \underbrace{\frac{1}{\varpi_d} e^{-\xi\varpi(t-\tau)} \sin(\varpi_d(t-\tau))}_{h(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (3.18)$$

où $\varpi_d = \varpi\sqrt{1-\xi^2}$ représente la pulsation propre amortie. La fonction $h(t) = \frac{1}{\varpi_d} e^{-\xi\varpi t} \sin(\varpi_d t)$ représente la fonction impulsionnelle du système étudié⁴. En appli-

⁴L'hypothèse de causalité est un postulat qui semble tomber sous le sens de la physique : un phénomène qui prend place en un instant donné est la conséquence d'une action qui a eu lieu en un instant préalable. La fonction impulsionnelle que nous utilisons ici est donc nulle pour des arguments négatifs.

quant l'opération d'espérance mathématique membre à membre, ce qui revient pratiquement à considérer toutes les réalisations possibles du processus aléatoire $f(t)$, on trouve :

$$E[x(t)] = \int_0^t h(t-\tau) E[f(\tau)] d\tau \quad (3.19)$$

Si l'effort appliqué peut être considéré comme stationnaire, la moyenne de la sollicitation ne dépend alors pas de l'instant auquel elle est estimée, $E[f(\tau)] = \mu_f$, et nous voyons que l'expression précédente se réduit à :

$$\begin{aligned} \mu_x(t) &= E[x(t)] = \mu_f \int_0^t h(t-\tau) d\tau \\ &= \mu_f \int_0^t \frac{1}{\varpi_d} e^{-\xi\varpi(t-\tau)} \sin(\varpi_d(t-\tau)) d\tau \\ &= \frac{\mu_f}{\varpi^2} \left(1 - e^{-\xi\varpi t} \left[\cos(\varpi_d t) - \xi \frac{\varpi}{\varpi_d} \sin(\varpi_d t) \right] \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ceci indique donc que la stationnarité de l'effort appliqué n'implique pas nécessairement celle de la réponse. Si le système étudié est un système dynamique stable, un état stationnaire peut être atteint, au pire, comme ici, après un temps infini⁵. Cet état stationnaire peut être obtenu en faisant tendre le temps t vers l'infini :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_f}{\varpi^2} \left(1 - e^{-\xi\varpi t} \left[\cos(\varpi_d t) - \xi \frac{\varpi}{\varpi_d} \sin(\varpi_d t) \right] \right) = \frac{\mu_f}{\varpi^2} \quad (3.21)$$

A l'équation 3.18, nous avons choisi $\tau = 0$ comme borne d'intégration inférieure, ce qui revient à supposer que l'effort appliqué sur la structure débute à l'instant $t = 0$. Cela revient donc également à supposer que l'effort appliqué sur l'intervalle $] -\infty; 0]$ est nul et donc que la condition initiale appliquée en $t = -\infty$ a eu le temps de s'atténuer sur cet intervalle. Ceci permet donc d'étudier la phase transitoire de mise en vibration de la structure.

Dans l'étude qui nous concerne actuellement, c'est essentiellement la phase stationnaire qui nous intéresse. Plutôt que de calculer la limite pour t tendant vers l'infini, il suffit de repartir de la relation 3.18 en remplaçant la borne d'intégration inférieure par $\tau = -\infty$. Cela revient à supposer que la sollicitation a pris naissance à cet instant. Les perturbations liées aux conditions initiales qui ont été appliquées en $t = -\infty$ ont eu le temps de se dissiper avant d'arriver à un instant t fini. L'étude sur le domaine $] -\infty; 0]$ ($-\infty$ non compris!) ne dépend donc pas des conditions initiales appliquées, ce qui est effectivement la signature d'un état stationnaire. En procédant de la sorte, on aurait écrit successivement :

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= \int_{-\infty}^t h(t-\tau) E[f(\tau)] d\tau \\ \mu_x &= \mu_f \int_{-\infty}^t \frac{1}{\varpi_d} e^{-\xi\varpi(t-\tau)} \sin(\varpi_d(t-\tau)) d\tau \\ \mu_x &= \frac{\mu_f}{\varpi^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

⁵L'état stationnaire peut être atteint plus rapidement pour des systèmes non linéaires. Evoquons simplement l'étude d'un système linéaire en raideur mais où la dissipation d'énergie se produit par frottement sec.

Le résultat obtenu est donc identique. La différence avec le raisonnement précédent réside donc en ce que la limite pour $t \rightarrow \infty$ ne doit pas être estimée ; en choisissant $-\infty$ comme borne inférieure d'intégration, le résultat de cette intégrale ne comporte automatiquement plus la variable t . La raison physique est celle qui vient d'être présentée.

Dans le cadre de l'analyse au vent turbulent de l'oscillateur simple que nous nous sommes proposés d'étudier, la détermination des caractéristiques d'ordre 1 est immédiate. Puisque l'effort s'exprime par :

$$f(\tau) = \gamma \bar{U}^2 + 2\gamma \bar{U} u(t) \quad (3.23)$$

on vérifie sans peine que $\mu_f = \gamma \bar{U}^2$ et donc que :

$$\mu_x = \frac{\gamma \bar{U}^2}{\varpi^2} \quad (3.24)$$

Caractérisation de second ordre

La distinction entre les domaines temporel et fréquentiel surgit dès lors que les caractéristiques à l'ordre 2 sont considérées. En effet, ces caractéristiques peuvent s'exprimer en considérant des valeurs relatives prises en des instants différents (domaine temporel) ou prises avec une certaine fréquence de répétition (domaine fréquentiel). Afin de bien comprendre les développements que nous mènerons plus tard pour des ordres supérieurs à l'ordre 2, il importe de bien comprendre les développements que nous allons mener dans le domaine temporel d'abord et dans le domaine fréquentiel ensuite. Tout au long du document, nous avons choisi de présenter systématiquement les développements dans le domaine temporel puis fréquentiel car cette démarche nous semble préférable pour faciliter la compréhension des développements. Aborder le domaine fréquentiel de prime abord semble effectivement être plus compliqué. Si le sens physique des développements (aux ordres supérieurs surtout) commençait à être flou, nous conseillons toujours de revenir aux grandeurs équivalentes du domaine temporel

Dans le domaine temporel Par caractérisation de second ordre, on entend les caractéristiques relatives aux statistiques des valeurs prises en des instants différents. Raisonnons de nouveau à partir de l'ensemble des réalisations que peut prendre l'effort $f(t)$ et limitons nous pour l'instant à n'en considérer qu'une seule (qui sera également notée $f(t)$). Dans le domaine temporel, le déplacement $x(t)$ qui y correspond est obtenu à l'aide de l'intégrale de convolution :

$$x(t) = \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (3.25)$$

Nous allons à nouveau illustrer le raisonnement préalable concernant l'établissement du régime stationnaire. Dans un premier temps, nous allons réaliser les développements en conservant $\tau = 0$ comme borne inférieure d'intégration. Ceci nous permettra donc d'évaluer la réponse en régime transitoire. Un passage à la limite pour t tendant vers l'infini permettra alors d'obtenir les caractéristiques du régime stationnaire. Dans un second temps, nous reprendrons directement les mêmes développements en prenant $\tau = -\infty$ comme borne d'intégration. Comme annoncé précédemment, ceci nous donnera donc un accès direct au régime stationnaire.

Pour l'échantillon $x(t)$ obtenu, le produit des valeurs prises en des instants différents vaut :

$$\begin{aligned} x(t_1)x(t_2) &= \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau_1) f(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{t_2} h(t_2 - \tau_2) f(\tau_2) d\tau_2 \\ &= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau_1) f(\tau_1) f(\tau_2) h(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

L'étude de ce produit permet d'obtenir la caractérisation de second ordre du processus aléatoire $x(t)$. En effet, on ne s'intéresse pas à la réponse d'une structure soumise à une sollicitation déterministe mais plutôt à une sollicitation aléatoire. La relation 3.26 reste valable quelle que soit la réalisation du processus aléatoire $f(t)$. Les caractéristiques statistiques sont obtenues en prenant les espérances mathématiques de l'équation 3.26 membre à membre :

$$\begin{aligned} E[x(t_1)x(t_2)] &= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau_1) E[f(\tau_1)f(\tau_2)] h(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ R_x(t_1, t_2) &= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau_1) R_f(\tau_1, \tau_2) h(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

La relation ainsi obtenue fait intervenir pour la première fois les fonctions d'autocorrélation de l'effort $R_f(\tau_1, \tau_2)$ et de la réponse $R_x(t_1, t_2)$. Si la sollicitation est stationnaire, c'est-à-dire, si sa fonction d'autocorrélation peut s'exprimer en fonction d'un décalage temporel uniquement ($\tau'_2 = \tau_2 - \tau_1$), on peut écrire :

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau_1) R_f(\tau'_2) h(t_2 - \tau'_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau'_2 \\ &= \int_0^{t_2} R_f(\tau'_2) \left(\int_0^{t_1} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau'_2 - \tau_1) d\tau_1 \right) d\tau'_2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Le résultat de l'intégrale entre parenthèses ne peut en toute généralité pas s'exprimer en fonction de $t_2 - t_1$ et τ'_2 uniquement. Ceci montre que la stationnarité de la sollicitation (appliquée depuis une durée de temps finie) n'est pas une condition suffisante pour obtenir la stationnarité de la réponse.

Admettons par exemple que la sollicitation stationnaire appliquée soit un bruit blanc d'intensité S_0 . La fonction d'autocorrélation associée à ce processus aléatoire particulier est $R_f(\tau'_2) = 2\pi S_0 \delta(\tau'_2)$. Dans ce cas, la fonction d'autocorrélation de la réponse s'exprime par ($t_2 \geq t_1$) :

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= 2\pi S_0 \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_1) d\tau_1 \\ &= 2\pi S_0 \frac{e^{-\xi(t_2 - t_1)\varpi}}{4\xi\varpi^3} \left[\cos((t_1 - t_2)\varpi_d) - \xi \frac{\varpi}{\varpi_d} \sin((t_1 - t_2)\varpi_d) \right] \\ &\quad + 2\pi S_0 \frac{e^{-\xi(t_1 + t_2)\varpi}}{4\xi\varpi^3} \left(\xi^2 \frac{\varpi^2}{\varpi_d^2} \cos((t_1 + t_2)\varpi_d) - \xi \frac{\varpi}{\varpi_d} \sin((t_1 + t_2)\varpi_d) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \xi^2 \frac{\varpi^2}{\varpi_d^2} \right) \cos((t_1 - t_2)\varpi_d) \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

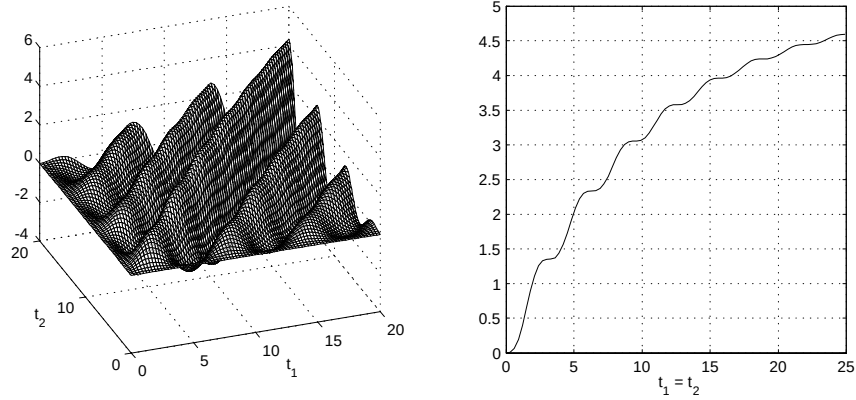


FIG. 3.1 – Fonction d'autocorrélation de la réponse d'un oscillateur excité par un bruit blanc ($\varpi = 2\text{rad/s}$, $\xi = 0.03$)

La trace de cette fonction dans la plan $t_1 = t_2$ représente l'évolution de la variance de la réponse au cours du temps. Elle est représentée à la figure 3.1.

Les caractéristiques de l'état stationnaire peuvent être obtenues en faisant tendre t_1 et t_2 vers l'infini tout en imposant $t_2 = t_1 + \Delta t$:

$$R_x(\Delta t) = 2\pi S_0 \frac{e^{-\xi \Delta t \varpi}}{4\xi \varpi^3} \left[\cos(\varpi_d \Delta t) + \xi \frac{\varpi}{\varpi_d} \sin(\varpi_d \Delta t) \right] \quad (3.30)$$

Plus particulièrement, la variance du régime stationnaire s'exprime par :

$$\sigma_x^2 = R_x(0) = \frac{\pi S_0}{2\xi \varpi^3} \quad (3.31)$$

Les sollicitations réelles sont parfois approchées par des bruits blancs. Cette relation est donc assez souvent utilisée en pratique pour déterminer les caractéristiques de la réponse à l'ordre 2.

Plutôt que d'utiliser une intégration limitée et de recourir au passage à la limite, nous savons que les caractéristiques de la réponse au second ordre peuvent également être obtenues en partant de :

$$\begin{aligned} x(t_1) x(t_2) &= \\ &= \int_{-\infty}^{t_2} \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1 - \tau_1) f(\tau_1) f(\tau_2) h(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

La fonction d'autocorrélation de la réponse s'exprime alors par :

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{t_2} \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1 - \tau_1) R_f(\tau_1, \tau_2) h(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h(\tau'_1) R_f(t_1 - \tau'_1, t_2 - \tau'_2) h(\tau'_2) d\tau'_1 d\tau'_2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Si la sollicitation est stationnaire, sa fonction d'autocorrélation peut s'exprimer en fonction de la différence de ses arguments :

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h(\tau'_1) R_f(t_2 - t_1 + \tau'_1 - \tau'_2) h(\tau'_2) d\tau'_1 d\tau'_2 \quad (3.34)$$

et l'on peut ainsi constater que la fonction d'autocorrélation ainsi obtenue n'est alors plus qu'une fonction du décalage temporel $t_2 - t_1$, ce qui indique que le processus x a atteint le régime stationnaire. La variance de la réponse peut être obtenue assez facilement en choisissant $t_2 - t_1 = 0$:

$$\sigma_x^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h(\tau'_1) R_f(\tau'_1 - \tau'_2) h(\tau'_2) d\tau'_1 d\tau'_2 \quad (3.35)$$

Les deux méthodes qui sont présentées sont mathématiquement fort proches l'une de l'autre. L'interprétation physique est par contre sensiblement différente. Lors des développements à l'ordre 3, nous n'utiliserons plus que la seconde méthode. Celle-ci a été privilégiée car elle permet une simplification substantielle des opérations arithmétiques.

Dans le domaine fréquentiel La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire est définie à partir de la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Par exemple, la densité spectrale de puissance de la sollicitation s'exprime par :

$$S_f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.36)$$

Cette définition n'a de sens que pour une processus aléatoire stationnaire. Sous une sollicitation stationnaire, une structure stable amortie atteindra toujours un état stationnaire pour lequel nous venons de voir que la fonction d'autocorrélation s'exprime par :

$$R_x(\tau) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h(\tau'_1) R_f(\tau + \tau'_1 - \tau'_2) h(\tau'_2) d\tau'_1 d\tau'_2 \quad (3.37)$$

La densité spectrale de la réponse s'obtient à partir de la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation associée. En injectant dans la relation obtenue l'expression 3.34 de l'autocorrélation de la réponse puis en permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h(\tau'_1) h(\tau'_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} R_f(\tau + \tau'_1 - \tau'_2) e^{-i\omega\tau} d\tau d\tau'_1 d\tau'_2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Le changement de variables $T = \tau + \tau'_1 - \tau'_2$ permet de découpler l'intégration triple en :

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h(\tau'_1) h(\tau'_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} R_f(T) e^{-i\omega(T+\tau'_2-\tau'_1)} dT d\tau'_1 d\tau'_2 \\ &= \int_0^{+\infty} h(\tau'_1) e^{i\omega\tau'_1} d\tau'_1 \int_0^{+\infty} h(\tau'_2) e^{-i\omega\tau'_2} d\tau'_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} R_f(T) e^{-i\omega T} dT \\ &= \bar{H}(\omega) H(\omega) S_f(\omega) = |H(\omega)|^2 S_f(\omega) \end{aligned} \quad (3.39)$$

où $H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{-m\omega^2 + i\omega c + k} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2i\xi \frac{\omega}{\omega_0}}$ représente la fonction de transfert de l'oscillateur simple. Etant donné que les sollicitations s'appliquant aux structures étudiées sont généralement caractérisées à l'aide de leur densité spectrale, l'analyse stochastique la plus couramment employée consiste à appliquer la relation 3.39. Etant donné que la détermination de la densité spectrale de la réponse s'exprime par une simple multiplication, cette méthode présente l'avantage d'être très rapide. Par exemple, la réponse de l'oscillateur soumis au bruit blanc d'intensité S_0 s'exprime par :

$$S_x(\omega) = S_0 |H(\omega)|^2 \quad (3.40)$$

et la variance de la réponse, obtenue par intégration de la densité spectrale de puissance s'exprime par :

$$\sigma_x^2 = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_0)^2} d\omega = \frac{S_0}{\omega_0^4} \frac{\pi\omega_0}{2\xi} = \frac{\pi S_0}{2\xi\omega_0^3} \quad (3.41)$$

ce qui correspond bien au résultat que nous avons obtenu par ailleurs dans le domaine temporel.

Les développements qui viennent d'être rappelés ici, ou du moins les résultats qui en découlent, sont en réalité assez basiques. Nous les avons repris ici dans le seul but de clarifier l'exposé des développements aux ordres supérieurs.

Avant d'aborder l'étude concrète du problème que nous nous sommes imposé, il est bon de vérifier que les connaissances de base en dynamique stochastique sont bien acquises. Nous avons déjà présenté un exposé assez exhaustif en la matière ([26]). Le lecteur intéressé peut également trouver les notions de base dans des ouvrages de référence. Par souci de compacité, nous ne reprenons donc plus ici les développements théoriques. Les relations principales sont simplement présentées ci-dessous comme en memento.

Memento de la théorie des processus aléatoires Les fonctions d'autocorrélation et les densités spectrales de puissance des deux premières dérivées du processus aléatoires $x(t)$ peuvent être exprimées à partir des grandeurs équivalentes du processus lui-même :

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\Delta t) = \frac{-d^2 R_{xx}(\Delta t)}{d\Delta t^2} \Leftrightarrow S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_{xx}(\omega) \quad (3.42)$$

$$R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\Delta t) = \frac{d^4 R_{xx}(\Delta t)}{d\Delta t^4} \Leftrightarrow S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_{xx}(\omega) \quad (3.43)$$

Les moments spectraux sont des grandeurs dérivées de la densité spectrale de puissance. Le moment spectral d'ordre i est défini par :

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i S_{xx}(\omega) d\omega \quad (3.44)$$

De cette définition, on constate aisément que les moments spectraux d'ordres 0, 2 et 4 s'identifient respectivement aux variances du déplacement, de la vitesse et de l'accélération.

Les notions de densité spectrale et de fonction d'autocorrélation peuvent être étendues au cas de plusieurs processus aléatoires. On parle alors de processus aléatoire vectoriel. Les densités spectrales de puissance (unilatérales et croisées) peuvent être regroupées dans

la matrice des densités spectrales dont l'intégration sur le domaine permet d'obtenir la matrice des covariances. On peut également utiliser la matrice des cross-corrélations qui regroupe les fonctions d'autocorrélation (éléments diagonaux) et les fonctions de cross-corrélation (éléments non diagonaux). L'estimation de cette matrice pour un décalage temporel nul permet de retrouver également la matrice des covariances.

Soit le processus aléatoire vectoriel $\{y(t)\}$ défini en fonction du processus aléatoire vectoriel $\{x(t)\}$ par la relation statique suivante :

$$\underbrace{\{y(t)\}}_{m \times 1} = \underbrace{[Z]}_{m \times n} \underbrace{\{x(t)\}}_{n \times 1} \quad (3.45)$$

On peut montrer que les matrices des densités spectrales de ces deux processus vectoriels sont reliées par :

$$\underbrace{[S_y]}_{m \times m} = \underbrace{[Z]}_{m \times n} \underbrace{[S_x]}_{n \times n} \underbrace{[Z]^T}_{n \times m} \quad (3.46)$$

Soit le processus aléatoire $\{y(t)\}$ défini en fonction du processus aléatoire $\{x(t)\}$ par la relation suivante :

$$\underbrace{\{Y(\omega)\}}_{m \times 1} = \underbrace{[H(\omega)]}_{m \times n} \underbrace{\{X(\omega)\}}_{n \times 1} \quad (3.47)$$

où $\{Y(\omega)\}$ et $\{X(\omega)\}$ représentent les transformées de Fourier des processus aléatoires $\{y(t)\}$ et $\{x(t)\}$. On peut montrer que les matrices des densités spectrales de ces deux processus vectoriels sont reliées par :

$$[S_y] = [H(\omega)] [S_x] \overline{[H(\omega)]}^T \quad (3.48)$$

La fréquence de passage du processus aléatoire $x(t)$ par le seuil $x = \xi$ avec vitesse positive s'exprime par :

$$\nu_\xi^+ = \int_0^\infty \dot{x} p(\xi, \dot{x}) d\dot{x} \quad (3.49)$$

où $p(x, \dot{x})$ représente la densité de probabilité conjointe entre le déplacement et la vitesse de l'oscillateur étudié. Dans le cas d'un processus aléatoire gaussien, cette densité de probabilité se factorise en le produit des densités de probabilité de l'un et l'autre. Dans ce cas, la fréquence de passage par le seuil $x = \xi$ avec vitesse positive vaut :

$$\nu_\xi^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}} = \nu_0^+ e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.50)$$

où σ_x et $\sigma_{\dot{x}}$ représentent les écarts-types du déplacement et de la vitesse. Une grandeur relativement importante est la fréquence de passage par le seuil $x = 0$ avec vitesse positive ν_0^+ :

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (3.51)$$

La densité de probabilité des maxima relatifs d'un processus aléatoire gaussien s'exprime par :

$$p_{\max}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \varepsilon e^{-\frac{\eta^2}{2\varepsilon^2}} + \sqrt{1-\varepsilon^2} \eta e^{-\frac{\eta^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \eta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\} \quad (3.52)$$

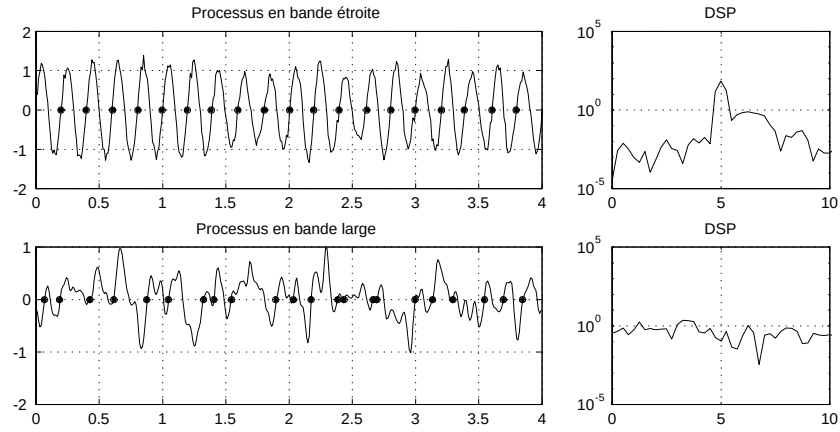


FIG. 3.2 – Illustration de processus en bandes étroite et large : passages par zéro

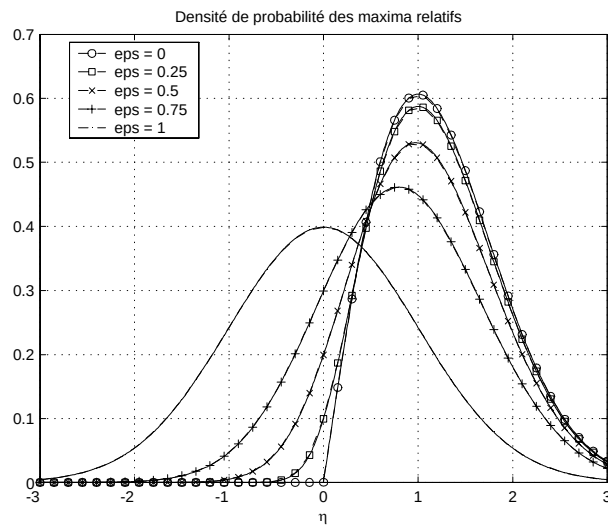


FIG. 3.3 – Densité de probabilité des maxima (relatifs) en fonction du paramètre spectral du processus

où $\eta = \frac{x}{\sqrt{m_0}}$ et $\varepsilon^2 = 1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} = 1 - \left(\frac{\nu_0^+}{\mu}\right)^2$ (paramètre spectral). La fréquence de passage par un maximum relatif est obtenue en intégrant cette densité de probabilité. Pour un processus gaussien, on trouve :

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (3.53)$$

Un processus aléatoire est dit en bande large lorsque le paramètre spectral ε est proche de l'unité. Dans ce cas, la fréquence de passage par zéro ν_0^+ est faible vis-à-vis de la fréquence de passage par un maximum relatif μ et la densité de probabilité des maxima relatifs $p_{\max}(\eta)$ tend vers une distribution gaussienne.

Un processus aléatoire est dit en bande étroite lorsque le paramètre spectral ε est proche de zéro. Dans ce cas, la fréquence de passage par zéro ν_0^+ est du même ordre de grandeur (tout en restant inférieure, bien sûr) que la fréquence de passage par un maximum relatif μ et la densité de probabilité des maxima relatifs $p_{\max}(\eta)$ tend vers une distribution de Rayleigh. Dans ce cas, le maximum relatif moyen vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x$.

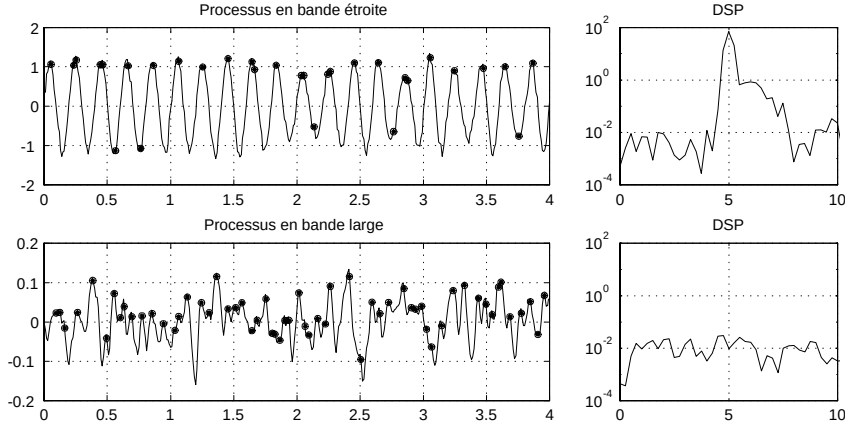


FIG. 3.4 – Illustration de processus en bandes étroite et large : passages par un maximum

La densité de probabilité du maximum y relevé sur n tirages d'une variable aléatoire x s'exprime par :

$$p_{y^{(n)}}(a) = n [P_{\max}(a)]^{n-1} p_x(a) \quad (3.54)$$

où $p_{\max}(x)$ et $P_{\max}(x)$ représentent la densité de probabilité et la fonction de répartition de la variable aléatoire x . En appliquant cette relation aux maxima relatifs, on peut obtenir une expression de la densité de probabilité du maximum absolu sur une durée d'observation. La formulation la plus courante est un modèle poissonnien qui suppose que les occurrences des maxima relatifs sont indépendantes. La valeur moyenne et l'écart type de l'extremum s'expriment alors par :

$$\overline{y^{(n)}} = \left[\sqrt{2 \ln(T \nu_0^+)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln(T \nu_0^+)}} \right] \sqrt{m_0} \quad (3.55)$$

$$\left[\sigma^{(n)} \right]^2 = \frac{\pi \sqrt{m_0}}{6 \sqrt{2 \ln(T \nu_0^+)}} \quad (3.56)$$

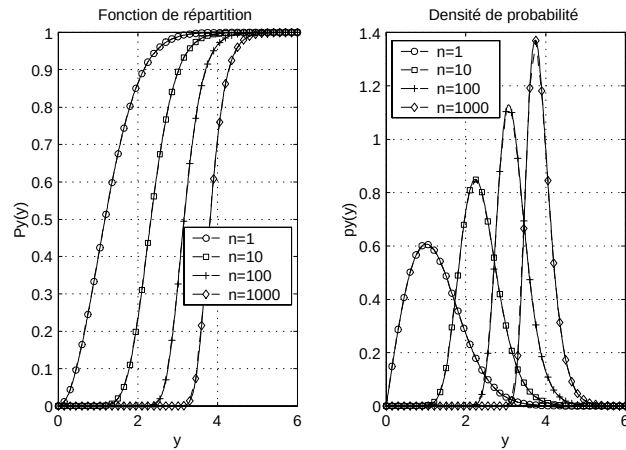


FIG. 3.5 – Fonction de répartition et densité de probabilité de la variable y (maximum de n valeurs distribuées selon une loi de Rayleigh)

où $\gamma = 0.5772^6$. Le terme entre crochets dans la relation 3.55 est appelé le facteur de pointe du processus aléatoire. Son utilisation est assez commode car il permet, comme le montre la relation, d'exprimer l'extremum moyen en terme de l'écart type du processus aléatoire.

3.3 Approche analytique

Après ces brefs rappels de la théorie des processus aléatoires, revenons maintenant au problème qui nous préoccupe, celui de l'analyse d'un oscillateur simple soumis à la turbulence du vent. Dans ce paragraphe, nous nous limiterons au cas où le processus aléatoire sollicitant est à corrélation exponentielle.

Rappelons qu'à ce stade, le problème que nous allons résoudre est complètement linéarisé (structure et chargement). Il s'agit de l'approche qui est généralement utilisée pour le dimensionnement des structures du génie civil soumises au vent turbulent.

Dans les paragraphes suivants, nous allons simplement nous contenter d'appliquer les relations qui viennent d'être rappelées. L'objectif consiste à obtenir des relations analytiques simples qui pourraient être appliquées avantageusement lors de l'étude d'une structure soumise à une densité spectrale différente, mais qui pourrait être assimilée à un processus aléatoire à corrélation exponentielle. Nous reviendrons sur cette idée dans les paragraphes ultérieurs.

⁶La constante d'Euler (γ) intervient dans la définition que Weierstrass donne de la fonction gamma :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right]$$

où $\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \ln m\right)$

3.3.1 Détermination des densités spectrales

La linéarisation stochastique du problème que nous étudions a permis de simplifier l'expression de la sollicitation à deux termes dont l'un des deux est constant et peut être traité séparément. De l'expression complète de la sollicitation, il ne reste donc que :

$$f(t) = 2\gamma\bar{U}u(t) \quad (3.57)$$

où $u(t)$ est un processus aléatoire d'Orstein-Uhlenbeck, c'est-à-dire dont la densité spectrale de puissance s'exprime par :

$$S_u(\omega) = \frac{\sigma_u^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \quad (3.58)$$

La propriété 3.46 permet d'écrire :

$$S_f(\omega) = 4\gamma^2\bar{U}^2 S_u(\omega) \quad (3.59)$$

La densité spectrale de la réponse de l'oscillateur peut être obtenue en multipliant cette expression de l'effort par la norme au carré de la fonction de transfert :

$$S_x(\omega) = \frac{4\gamma^2\bar{U}^2 S_u(\omega)}{(\varpi^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\varpi)^2} = \frac{4\gamma^2\bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^4} \frac{1}{\pi\alpha \left(1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2\right) \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\varpi}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\varpi}\right)^2\right]} \quad (3.60)$$

Cette grandeur contient une quantité d'information assez importante, et de toute façon suffisante à la caractérisation complète du processus aléatoire gaussien que constitue la réponse du système.

La figure 3.6 représente les densités spectrales du déplacement obtenues pour différentes pulsations naturelles ($\varpi = 1$, $\varpi = 10$ ou $\varpi = 30$) et pour deux valeurs du taux d'amortissement $\xi = 0.01$ et $\xi = 0.05$. Pour le tracé de ces courbes, les paramètres $4\gamma^2\bar{U}^2\sigma_u^2$ et α ont été fixés à 1. Cette figure montre que les densités spectrales des déplacements présentent une valeur importante dans le voisinage de l'origine ainsi que dans le voisinage de la fréquence propre. On peut ainsi identifier assez facilement les densités spectrales associées aux différentes raideurs. L'effet du coefficient d'amortissement relatif est localisé dans la gamme de fréquence contrôlée par le terme de viscosité, c'est-à-dire le voisinage du pic de résonance. Conformément à l'intuition, une augmentation du taux d'amortissement va dans le sens d'une diminution de l'amplitude du pic.

On retrouve à la figure 3.6 la forme caractéristique des densités spectrales des déplacements de structures souples soumises aux effets du vent turbulent : un contenu énergétique dans les basses fréquences (provenant de la sollicitation) et un contenu énergétique dans le voisinage de la fréquence naturelle (résonance). Cette distinction revêt une importance majeure dans l'interprétation des résultats issus d'une analyse au vent turbulent. En effet, si le concepteur de projet désirait réduire les déplacements obtenus, les mesures à prendre seraient différentes selon que le contenu fréquentiel se trouve dans les basses ou dans les hautes fréquences. Dans le premier cas, les modifications seraient à apporter au niveau de l'aérodynamique du profil tandis que dans le second cas, on imagine plus facilement une intervention visant à accroître l'amortissement global de l'ouvrage. Cette distinction entre la contribution aux basses fréquences et celle dans le

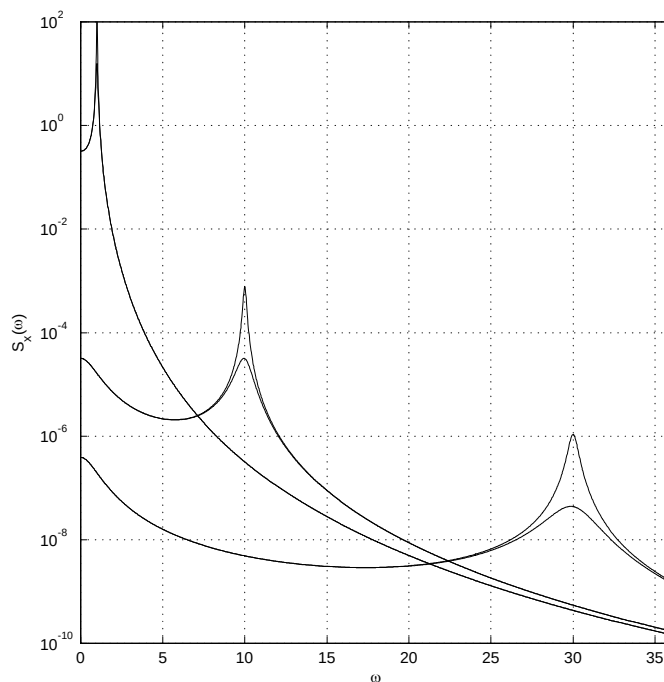


FIG. 3.6 – Exemples de densités spectrales de déplacements ($\varpi = 1\text{rad/s}$, 10rad/s ou 30rad/s ; $\xi = 0.01$ ou 0.05)

voisinage du pic de résonance est également à la base d’une célèbre méthode approchée (voir ci-après). En ce qui nous concerne, même si cette méthode approchée ne donne pas des résultats tout à fait précis, nous recommandons tout de même cette décomposition en deux contributions pour obtenir une idée grossière de la répartition énergétique.

Lorsque ϖ est de l’ordre de α , soit sur le graphique ci-dessus lorsque $\varpi = 1$, on peut constater que les deux contributions distinguées se confondent. Ceci peut se remarquer par le fait que la densité spectrale ne présente plus de minimum entre le pic de résonance et la pulsation $\omega = 0$. Ce genre de circonstance peut être assez désagréable car la décomposition n’est alors plus envisageable. Dans le domaine qui nous intéresse, ces deux paramètres (ϖ et α) prennent les ordres de grandeurs suivants :

- la fréquence minimale des structures étudiées ne peut raisonnablement pas descendre en dessous de 0.1Hz , soit $\varpi = 0.63\text{rad/s}$ car sinon la structure étudiée serait vraiment trop souple et présenterait déjà des problèmes d’excès de déformation sous poids propre ;
- il est par contre plus difficile de parler de fréquence maximale du contenu du vent. Certaines densités spectrales utilisées en pratique (Von Karman, entre autres) présentent une densité spectrale monotonément décroissante alors que d’autres densités spectrales présentent un pic dans le voisinage des basses fréquences (Davenport). Dans ce dernier cas, l’estimation de la fréquence prépondérante du contenu du vent peut s’exprimer à partir de la position du pic. Le maximum de la densité spectrale de Davenport peut être obtenu assez facilement : $f_{\max} = \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{\bar{U}}{L}$ où $L = 1200\text{m}$ est le choix d’échelle recommandé par l’auteur ([35]). La fréquence repérant la position

du maximum s'exprime donc par $6.45.10^{-4}\bar{U}$ (avec $\bar{U}$ en m/s) et prend ainsi des valeurs de l'ordre de $0.02Hz$ pour les vitesses moyennes de vent rencontrées en pratique.

Ces ordres de grandeur montrent donc que la majeure partie des structures soumises au vent turbulent présente cette distinction entre les deux contributions. Nous porterons donc essentiellement notre attention aux cas où ϖ est plus grand que α .

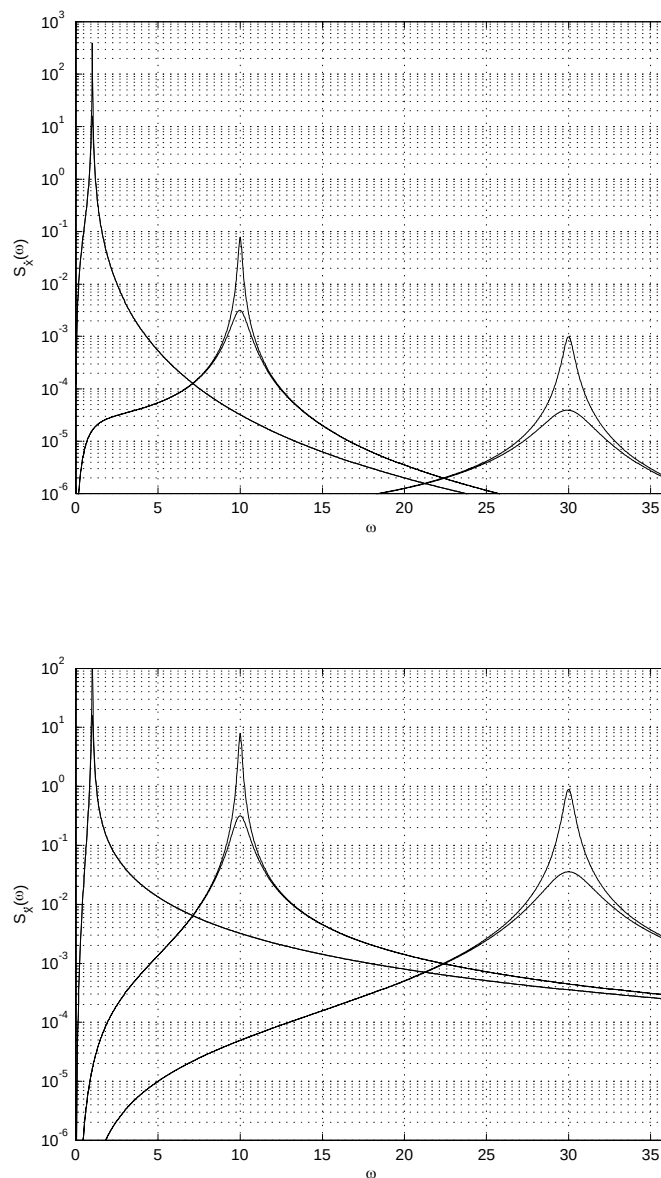


FIG. 3.7 – Exemples de densités spectrales de vitesses et accélérations ($\varpi = 1rad/s$, $10rad/s$ ou $30rad/s$; $\xi = 0.01$ ou 0.05)

Les formules rappelées au paragraphe précédent permettent également d'établir les densités spectrales de la vitesse et de l'accélération. Quelques illustrations sont également

représentées à la figure 3.7. Leurs expressions analytiques respectives sont les suivantes :

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) = \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^2} \frac{\omega^2}{\varpi^2} \frac{1}{\pi \alpha \left(1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2\right) \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\varpi}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\varpi}\right)^2\right]} \quad (3.61)$$

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega) = 4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 \frac{\omega^4}{\varpi^4} \frac{1}{\pi \alpha \left(1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2\right) \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\varpi}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\varpi}\right)^2\right]} \quad (3.62)$$

Contrairement aux densités spectrales de déplacement qui présentent en règle générale une contribution dans les basses fréquences, on peut par contre dire que les vitesses et davantage encore les accélérations voient la majeure partie de leur contenu énergétique dans une bande de fréquence proche du pic de résonance. Ceci provient de la multiplication du spectre de déplacement par ω^2 et ω^4 , c'est-à-dire la traduction de l'opération de dérivation. Ceci permet de justifier que la vitesse moyenne et l'accélération moyenne prises sur une durée égale à quelques fois la période propre à peine doivent être très petites.

3.3.2 Détermination des moments spectraux

La majeure partie de l'information contenue dans les densités spectrales de puissance peut en être extraite et interprétée à l'aide des moments spectraux (Eq. 3.44). Ils sont obtenus par intégration des densités spectrales. Bien que les densités spectrales de puissance obtenues présentent un air assez sympathique, le calcul des moments spectraux qui en découle n'est guère chose aisée. Tout au long du document, nous rencontrerons des calculs d'intégrales assez compliqués. Les intégrands présenteront presque toujours la particularité d'être des fractions rationnelles et les bornes d'intégration seront aussi presque exclusivement $-\infty$ et $+\infty$. Pour le calcul de toutes ces intégrales, nous avons profité avantageusement du théorème des résidus (dit aussi théorème de Cauchy) ainsi que des lemmes de Jordan, des grandes et des petites encoches. Les énoncés de ces théorèmes ainsi que les résultats des intégrales calculées sont présentés à l'annexe A.

En ce qui nous concerne pour l'instant, le calcul du moment d'ordre 0 du déplacement de l'oscillateur, c'est-à-dire sa variance, s'exprime par :

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 \alpha}{\pi \varpi^4} \frac{\frac{\pi \varpi^4}{\alpha} + \frac{\pi \varpi}{2\xi} (\alpha^2 + \varpi^2 (1 - 4\xi^2))}{\alpha^4 + 2\alpha^2 (1 - 2\xi^2) \varpi^2 + \varpi^4} \\ &= \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^4} \frac{\varpi^4 + \frac{\alpha \varpi}{2\xi} (\alpha^2 + \varpi^2 (1 - 4\xi^2))}{\alpha^4 + 2\alpha^2 (1 - 2\xi^2) \varpi^2 + \varpi^4} \\ &= \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^4} \frac{\varphi}{2\xi} \frac{1 + (1 - 4\xi^2) \varphi^2 + 2\xi \varphi^3}{1 + 2(1 - 2\xi^2) \varphi^2 + \varphi^4} = \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^4} \frac{\varphi}{2\xi} \frac{1 + 2\xi \varphi}{1 + 2\xi \varphi + \varphi^2} \quad (3.63) \end{aligned}$$

où $\varphi = \frac{\varpi}{\alpha}$.

Cette formulation montre que la variance du déplacement peut s'exprimer comme le produit de deux quantités :

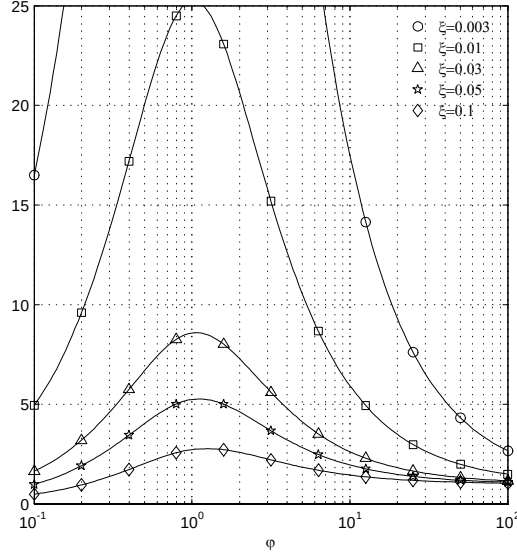


FIG. 3.8 – Coefficient d'amplification dynamique des déplacements

- $\frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^4}$ représente la réponse quasi-statique obtenue en divisant la variance de l'effort appliqué $4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2$ par le carré de la raideur de l'oscillateur ϖ^4 . Physiquement, cela représente la variance du déplacement que l'oscillateur aurait s'il s'adaptait à chaque instant à la sollicitation imposée (aucune masse, aucun amortissement). Cela revient également à supposer que la durée d'application de l'effort est grande vis-à-vis de la constante de temps du système étudié.
- $\frac{\varphi}{2\xi} \frac{1+2\xi\varphi}{1+2\xi\varphi+\varphi^2}$ est une grandeur adimensionnelle qui ne dépend que des paramètres $\varphi = \frac{\varpi}{\alpha}$ et ξ . Cette grandeur peut être vue comme le facteur d'amplification dynamique. Pour de grandes valeurs du paramètre φ , cette fonction possède une asymptote horizontale valant l'unité ; plus précisément, son comportement aux grandes valeurs de φ est $1 + \frac{1}{2\xi\varphi}$. C'est pour cette raison que l'on parle d'amplification dynamique et non pas de "réduction dynamique".

En réalité, ce facteur d'amplification dynamique n'est pas toujours plus grand que l'unité puisqu'il se comporte en $\frac{\varphi}{2\xi}$ pour les petites valeurs du paramètre φ . On peut assez facilement vérifier que le facteur discuté est plus petit que l'unité pour $\varphi < \frac{2\xi}{1-4\xi^2}$ et plus grand que l'unité pour les valeurs supérieures à ce rapport. Pour les valeurs rencontrées en pratique du taux d'amortissement et du paramètre φ , on peut constater qu'il s'agit pour ainsi dire toujours d'une amplification dynamique. On peut interpréter graphiquement assez facilement le fait que ce facteur soit plus grand que l'unité. La courbe de réponse quasi-statique obtenue en divisant la densité spectrale de la réponse par le carré de la raideur structurelle décroît comme la sollicitation, c'est-à-dire, en $\frac{1}{\varphi^2}$. La fonction de transfert, quant à elle, décroît en $\frac{1}{\varphi^4}$. La réponse quasi-statique et la réponse exacte doivent donc se croiser quelque part après le pic. Pour les grandes valeurs du paramètre φ , cette intersection se passe tellement loin après le pic (tout est relatif ; le graphique est dessiné en axes logarithmiques !) que la surface couverte par le pic est plus grande que la surface perdue par effets inertiels. Le coefficient d'amplification dynamique est donc

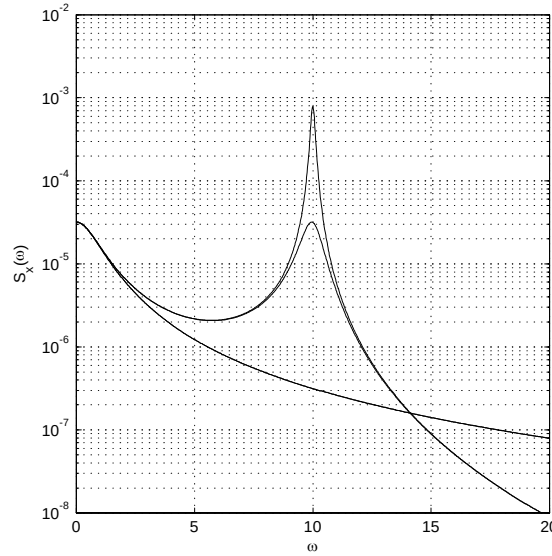


FIG. 3.9 – Représentation de la composante quasi-statique. Preuve intuitive que le coefficient d’amplification dynamique est plus grand que l’unité

plus grand que l’unité.

Il pourrait être intéressant de simplifier l’expression du coefficient d’amplification dynamique en prenant en compte que, dans les applications qui nous intéressent, ξ est petit et φ est grand. Pour cela, nous proposons deux méthodes.

La première méthode est rigoureuse et donne le meilleur développement de cette formule lorsque ξ est petit, quelque soit la valeur de φ . Il s’agit du développement en série de Laurent du coefficient d’amplification dynamique :

$$\frac{\varphi}{2\xi} \frac{1 + 2\xi\varphi}{1 + 2\xi\varphi + \varphi^2} = \frac{\varphi}{2\xi(1 + \varphi^2)} + \frac{\varphi^4}{(1 + \varphi^2)^2} - \frac{2\xi\varphi^5}{(1 + \varphi^2)^3} + o\left(\frac{\xi^2}{\varphi^2}\right) \quad (3.64)$$

Etant donné que les cas d’application pratique nous intéressant correspondent à ξ petit et φ grand, les quelques premiers termes de ce développement semblent déjà donner une bonne approximation du coefficient d’amplification dynamique. Afin de préciser quelque peu les choses, disons que ξ est de l’ordre de 10^{-2} et que φ est de l’ordre de 10^2 . Les termes respectifs du développement sont alors d’ordres 10^0 , 10^0 , 10^{-4} , 10^{-8} ,... Les deux premiers termes sont donc du même ordre de grandeur et suffisent largement à l’estimation du coefficient. Nous reviendrons sur ce point plus tard mais nous pouvons dès à présent pressentir que le calcul du facteur d’amplification dynamique (c’est-à-dire le calcul de l’intégrale de la densité spectrale) pourrait être simplifié en ne considérant que la somme de deux termes.

La seconde solution consiste à prendre également en compte que φ est grand et écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi}{2\xi} \frac{1+2\xi\varphi}{1+2\xi\varphi+\varphi^2} &= \frac{\frac{\varphi}{2\xi} + \varphi^2}{1+2\xi\varphi+\varphi^2} = \frac{\frac{\varphi}{2\xi} + \varphi^2 + 1 + 2\xi\varphi - 1 - 2\xi\varphi}{1+2\xi\varphi+\varphi^2} \\
&= 1 + \frac{\frac{\varphi}{2\xi} - 1 - 2\xi\varphi}{1+2\xi\varphi+\varphi^2} = 1 + \frac{\varphi}{2\xi} \frac{1-4\xi^2-\frac{2\xi}{\varphi}}{1+2\xi\varphi+\varphi^2} \\
&\simeq 1 + \frac{\varphi}{2\xi} \frac{1}{1+\varphi^2}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Pour autant que l'on ne conserve que deux termes dans la décomposition en série de Laurent de la relation 3.64 et que l'on suppose que φ est assez grand, les deux relations alors obtenues donnent le même résultat $(1 + \frac{\varphi}{2\xi} \frac{1}{1+\varphi^2})$. Nous utiliserons cette expression dans la suite.

Les moments spectraux d'ordre 2 et 4 de la densité spectrale du déplacement s'identifient aux variances de la vitesse et de l'accélération respectivement. De nouveau, le calcul des intégrales mises en jeu est reporté à l'annexe A. Seuls les résultats sont présentés ici. La variance de la vitesse et la variance de l'accélération peuvent également s'exprimer comme le produit de deux facteurs :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\dot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega &= \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 \alpha}{\pi \varpi^4} \frac{\pi \varpi}{2\xi} \frac{\varpi^2}{\alpha^2 + 2\xi\alpha\varpi + \varpi^2} \\
&= \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^2} \frac{\frac{\varphi}{2\xi}}{1+2\xi\varphi+\varphi^2}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\ddot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^4 S_x(\omega) d\omega &= \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 \alpha}{\pi \varpi^4} \frac{\pi \varpi}{2\xi} \frac{(2\xi\alpha + \varpi) \varpi^3}{\alpha^2 + 2\xi\alpha\varpi + \varpi^2} \\
&= 4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 \frac{1 + \frac{\varphi}{2\xi}}{1+2\xi\varphi+\varphi^2}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Les nouvelles grandeurs introduites $\frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^2}$ et $4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2$ représentent respectivement les vitesses et accélérations quasi-statiques. Cette fois, il ne s'agit pas des vitesses et accélérations que la structure aurait si elle s'adaptait de manière instantanée, c'est-à-dire se déplaçait de façon quasi-statique (puisque ces vitesse et accélération sont nulles), mais bien les vitesse et accélération que la structure aurait si elle vibrait de façon harmonique, à sa fréquence propre, avec des amplitudes telles que la variance du déplacement résultant corresponde au déplacement quasi-statique.

Les facteurs d'amplification dynamique portant sur la vitesse et l'accélération tendent vers 0 pour de grandes valeurs du paramètre φ ; leur comportement asymptotique est $\frac{1}{2\xi\varphi}$. La figure 3.10 représente ces coefficients pour quelques valeurs du coefficient d'amortissement.

3.3.3 Grandeurs maximales et extrêmes

La fréquence de passage par zéro avec vitesse positive s'exprime par :

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} = \frac{\varpi}{2\pi} \sqrt{\frac{1 + 2(1-2\xi^2)\varphi^2 + \varphi^4}{[1 + (1-4\xi^2)\varphi^2 + 2\xi\varphi^3][1 + 2\xi\varphi + \varphi^2]}} \tag{3.68}$$

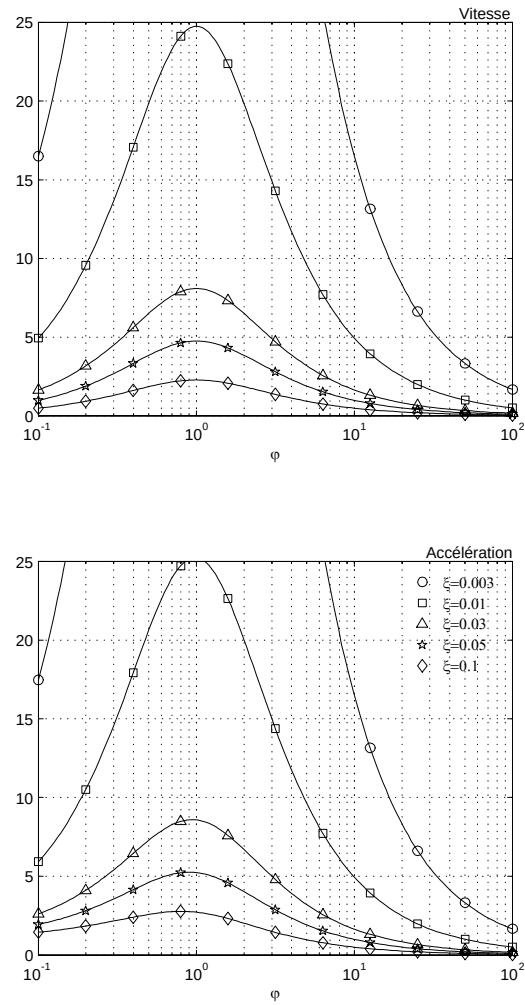


FIG. 3.10 – Coefficient d'amplification dynamique des vitesses et accélérations

Cette grandeur est représentée à la figure 3.11. On peut y constater que la fréquence de passage par zéro est d'autant plus petite vis-à-vis de la fréquence propre de l'oscillateur que le paramètre φ est grand. En effet, pour les structures plus raides (φ grand), la contribution essentielle de la réponse se trouve dans le voisinage des basses fréquences. L'oscillateur tend donc à répondre de façon quasi-statique, c'est-à-dire à prendre une réponse homothétique à la forme de la sollicitation qui présente un contenu important dans les basses fréquences. Il n'est donc pas étonnant que les structures plus raides présentent une fréquence de passage par zéro proportionnellement plus faible que leur fréquence propre.

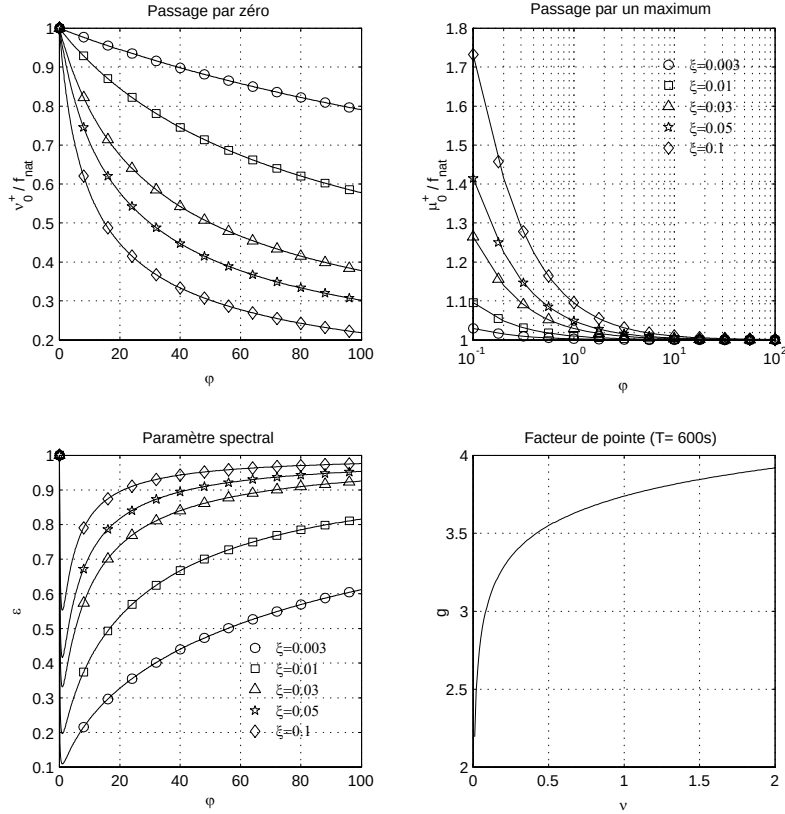


FIG. 3.11 – Caractéristiques statistiques de la réponse d'un oscillateur soumis à un processus à corrélation exponentielle (approche analytique)

La fréquence de passage par un maximum s'exprime par :

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} = \frac{\varpi}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{2\xi}{\varphi}} \quad (3.69)$$

Nous venons de voir que les réponses en termes de vitesse et d'accélération sont de nature essentiellement dynamique. Les formes assez semblables des coefficients d'amplification relatifs à ces deux grandeurs justifient une fréquence de passage par un maximum relatif proche de la fréquence propre structurale. Ceci est en bon accord avec les

fréquences de passage par des maxima relatifs qui peuvent être calculées sur base de densités spectrales représentant mieux le contenu fréquentiel du vent.

La figure 3.11 représente également le paramètre spectral :

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{\nu_0^+}{\mu}\right)^2} \quad (3.70)$$

Assez naturellement, ce paramètre prend des valeurs d'autant plus grandes que la structure étudiée est raide puisque la réponse est alors essentiellement quasi-statique. Sa largeur de bande se rapproche donc de celle de la sollicitation qui, elle-même, est assez élevée. Pour conclure nos développements analytiques, nous avons également représenté sur cette figure l'évolution du facteur de pointe en fonction de la raideur de la structure étudiée. La définition du facteur de pointe (Eq. 3.55) montre qu'il s'agit d'une grandeur qui varie dans le même sens que la fréquence de passage par zéro. Afin de représenter une courbe la plus générale possible, nous avons représenté l'évolution du facteur de pointe en fonction de la fréquence de passage par zéro.

3.3.4 Application numérique de la méthode

Nous venons d'illustrer analytiquement et sur un exemple simple, toutes les étapes d'une analyse stochastique numérique. Cet exemple simple va servir à l'établissement d'une procédure de calcul plus générale d'une part et de comparaison avec des résultats obtenus numériquement d'autre part.

On imagine aisément que ce type d'analyse est destiné à être appliqué dans des circonstances certainement moins académiques. Il ne fait alors nul doute que la résolution analytique doit inévitablement être suppléée par une approche numérique.

La densité spectrale contient une quantité d'informations certainement trop importante. De plus, il est difficilement imaginable, dans le contexte de l'analyse de structures complexes, de calculer les densités spectrales de tous les déplacements (et/ou efforts, contraintes, réactions, etc.). On est donc évidemment tenté de ne pas calculer (ou du moins stocker en mémoire) l'entièreté de ces densités spectrales de puissances ; on essaie ainsi de ne calculer que les plus importantes grandeurs dérivées des densités spectrales, à savoir, les moments spectraux.

Le problème de l'obtention de ces moments spectraux se présente alors. Rigoureusement, ces moments s'obtiennent par intégration de la densité spectrale (Eq. 3.44). Une application rigoureuse de cette définition est en définitive assez lourde à mettre en oeuvre car elle nécessite de calculer les densités spectrales pour un nombre relativement important de fréquences de calcul.

Plusieurs solutions peuvent être envisagées pour pallier cet inconvénient :

- l'approximation en bruit blanc. C'est la méthode qui est proposée dans la majeure partie des références dans le domaine des actions du vent sur les structures du génie civil. La mise en oeuvre de cette méthode est très simple, mais ses limitations ne sont généralement pas exposées. Nous proposons d'étudier la mise en oeuvre de cette approximation au paragraphe 3.4.
- l'approximation par un processus à corrélation exponentielle. La méthode précédente recourt au remplacement de la densité spectrale de puissance exacte par un bruit blanc. Au paragraphe 3.5, nous proposons une méthode qui remplace le

- processus de sollicitation réel (Davenport, Von Karman, Harris, ou autre) par un processus à corrélation exponentielle. L'utilisation des relations analytiques développées au paragraphe précédent permet alors d'obtenir une estimation très rapide des moments spectraux. L'avantage de ces deux premières méthodes consiste à ne devoir évaluer la densité spectrale de la sollicitation que pour une seule fréquence.
- au paragraphe 3.6, nous présenterons une autre méthode semi-analytique qui consiste à développer la densité spectrale de la sollicitation en fonctions-impulsions. Nous présentons cette méthode car elle est parfois référencée dans la littérature[[80]]. L'avantage principal de cette méthode est de pouvoir recourir à une discrétisation fréquentielle qui ne dépend que de la sollicitation appliquée. Elle fournit des résultats de meilleure qualité que les deux premières méthodes mais au prix d'un effort de calcul plus important.
 - une autre solution, qui n'est certes pas une solution en soi, consiste à intégrer numériquement la densité spectrale. Il s'agit donc de l'application numérique rigoureuse de la définition des moments spectraux. Cette méthode est encore plus consommatrice de temps de calcul. Le principal défi en la matière consiste à mettre au point un schéma d'intégration qui permette d'évaluer précisément et rapidement l'intégrale de la densité spectrale. Les développements que nous avons menés à ce sujet sont présentés au paragraphe 3.7.
 - A l'occasion d'un travail préalable [[26]], nous avons présenté une méthode d'intégration de fonctions à forte acuité dont les positions des pics sont connus a priori. Cette méthode est donc également d'application dans ce contexte. Nous ne la présentons cependant pas dans ce document bien qu'elle offre une efficacité tout aussi valable que les quatre premières méthodes présentées. La fonction à intégrer doit être évaluée dans une boucle dont le nombre d'itérations est inconnu a priori⁷, ce qui présente l'inconvénient majeur de rendre la lisibilité de la programmation plus floue.

3.4 Approche numérique 1 : L'approximation en bruit blanc

3.4.1 Développements théoriques

Considérations générales

L'objectif ultime de l'analyse stochastique consiste davantage en la détermination des moments spectraux de la réponse plutôt qu'en la détermination de la densité spectrale en soi. Pour rappel, ces moments spectraux sont obtenus par intégration de la densité spectrale :

$$m_x^{(i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i S_x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i |H(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega \quad (3.71)$$

La formulation de l'une ou l'autre hypothèse pourrait permettre d'éviter l'opération fastidieuse du calcul ainsi que du stockage de la densité spectrale de la réponse. Dans ce paragraphe, nous allons illustrer, dans le cas du calcul du moment d'ordre 0, la méthode d'approximation en bruit blanc qui permet d'éviter cette opération d'intégration.

⁷il s'agit donc d'une boucle qui se termine à l'aide d'un critère d'arrêt, de type convergence.

Si la sollicitation appliquée à l'oscillateur étudié était un bruit blanc d'intensité S_0 , le calcul de la variance serait immédiat puisqu'il résulterait de l'intégration suivante :

$$\sigma_x^2 = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = S_0 \frac{\pi \varpi}{2\xi} \quad (3.72)$$

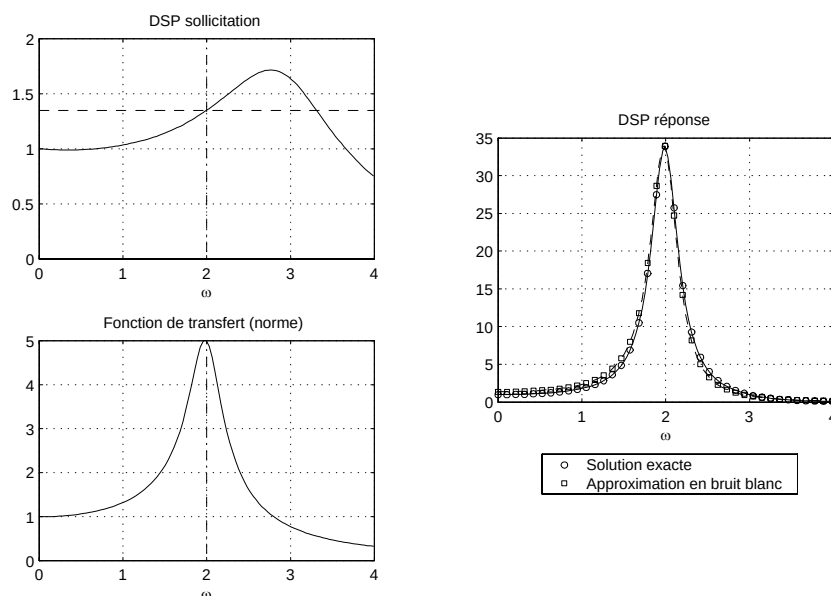


FIG. 3.12 – Illustration de l'approximation en bruit blanc

Le calcul analytique de l'intégrale peut être entrepris assez facilement et on peut donc constater que, dans ce cas, l'intégration numérique de la densité spectrale peut être évitée. Cette relation peut être appliquée au cas de sollicitations différentes de bruits blancs. Dans ce cas, si l'amortissement de l'oscillateur étudié n'est pas trop important, la fonction de transfert est très pointue dans le voisinage de la fréquence propre ; dans ce cas, le contenu énergétique de la réponse est essentiellement conditionné par ce qu'il se passe dans le voisinage du pic de résonance. L'approximation en bruit blanc consiste donc à remplacer la vraie densité spectrale de la sollicitation $S_x(\omega)$ par un bruit blanc dont l'intensité est celle au niveau de la fréquence de résonance (Fig. 3.12) :

$$\sigma_x^2 \simeq S_f(\varpi) \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = S_f(\varpi) \frac{\pi \varpi}{2\xi} \quad (3.73)$$

Lorsque cette approximation est licite, elle est évidemment bien plus efficace qu'une intégration numérique qui nécessite souvent un grand nombre de points d'intégration puisqu'en cas de faible amortissement l'acuité est très importante dans le voisinage de la fréquence propre.

Les graphiques de la figure 3.13 mettent en évidence deux conditions nécessaires à l'application judicieuse de l'approximation en bruit blanc :

- d'une part, il faut que la densité spectrale de l'effort ne soit pas trop faible dans le voisinage de la fréquence propre (première ligne) ;

- d'autre part, il faut que le système ne soit pas trop amorti de sorte que le pic soit suffisamment marqué (seconde ligne).

Il convient également de noter que l'approximation en bruit blanc présentée ici peut être appliquée dans le cadre d'une analyse d'une structure à plusieurs degrés de liberté. La méthode est alors appliquée pour chacun des modes propres séparément (pour autant que les réponses dans ces modes puissent être évaluées indépendamment l'une de l'autre, cf § 9.1, p. 343).

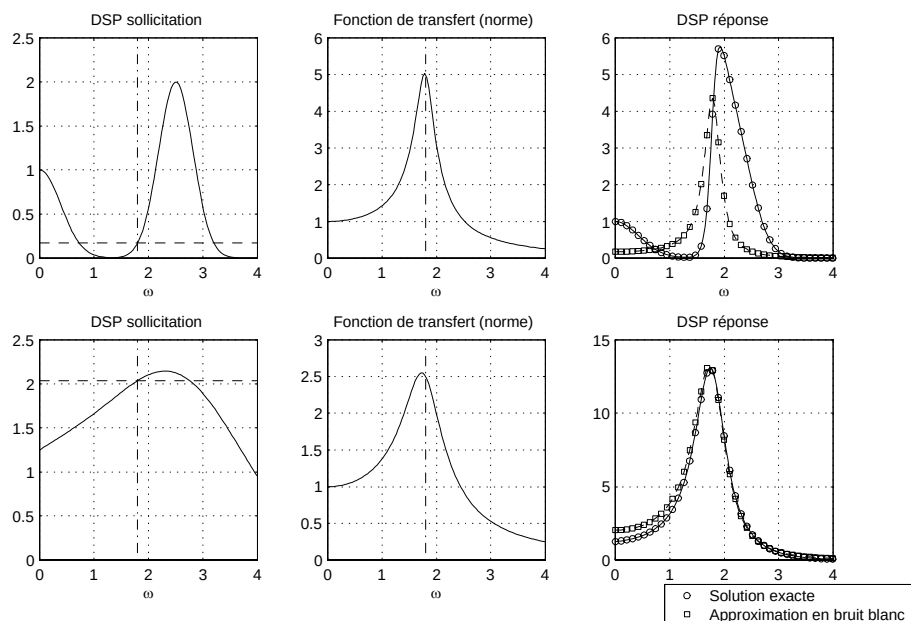


FIG. 3.13 – Limites d'application de l'approximation en bruit blanc : densité spectrale de puissance trop faible au niveau de la fréquence propre ou amortissement trop important ($\xi = 20\%$)

Application au vent

La méthode d'approximation en bruit blanc telle qu'elle vient d'être présentée est donc soumise à des limitations assez sévères. Dans le cadre d'analyses de structures soumises à l'action du vent turbulent, les conditions d'application de cette méthode sont rarement remplies puisque nous savons que la densité spectrale de sollicitation est monotonément décroissante et présente des valeurs très faibles dans le voisinage des pulsations propres que l'on rencontre dans le domaine du génie civil.

Afin de pouvoir être appliquée dans notre domaine, la méthode de base a été aménagée sur base de l'observation que les densités spectrales de réponse présentent deux zones relativement distinctes. Illustrons de nouveau le raisonnement sur base du calcul de la variance du déplacement. Il paraît logique que le contenu aux basses fréquences soit

représenté correctement. La variance de la réponse s'exprime donc par :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) |H(0)|^2 d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) (|H(\omega)|^2 - |H(0)|^2) d\omega \\
 &= |H(0)|^2 \sigma_f^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) (|H(\omega)|^2 - |H(0)|^2) d\omega
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

On peut voir assez facilement que cette dernière relation n'a pas de sens mathématique dans la mesure où la fonction $(|H(\omega)|^2 - |H(0)|^2)$ tend vers une valeur non nulle pour ω tendant vers l'infini. Cette relation est donc remplacée par :

$$\sigma_x^2 = |H(0)|^2 \sigma_f^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega \tag{3.75}$$

où la nouvelle intégrale est estimée par la méthode de l'approximation en bruit blanc afin de ne pas répéter la prise en compte du contenu aux basses fréquences :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^2 &= |H(0)|^2 \sigma_f^2 + S_f(\varpi) \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \\
 &= \underbrace{|H(0)|^2 \sigma_f^2}_{\sigma_{x_{qs}}^2} + \underbrace{S_f(\varpi) \frac{\pi\varpi}{2\xi}}_{\sigma_{x_d}^2}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Les deux termes qui apparaissent peuvent être associés aux deux contributions (appelées désormais quasi-statique et dynamique) qui se présentent manifestement dans la forme des densités spectrales rencontrées en pratique (Fig. 3.14).

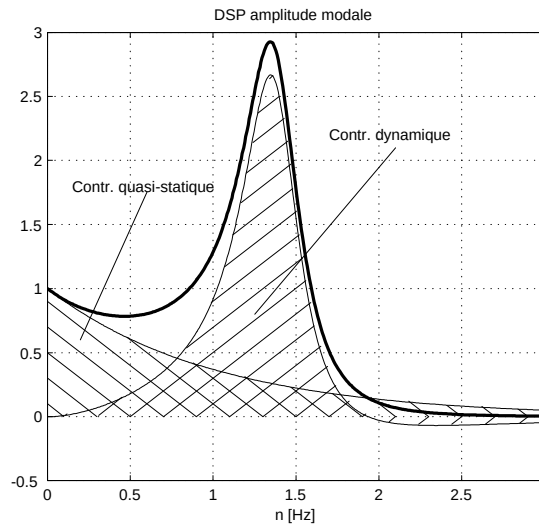


FIG. 3.14 – Illustration des contributions quasi-statique et dynamique

Pour rappel, le but de la relation 3.76 est de permettre un calcul rapide de la variance de la réponse. Dans la suite du document, lorsque nous parlerons de l'approximation en bruit blanc (sans autre spécification), c'est à cette relation que nous faisons référence. Cette méthode est très souvent appliquée dans le domaine du vent. Elle a été initiée dans ce domaine par Davenport ([21], 1962).

3.4.2 Application au problème

Afin d'illustrer la mise en oeuvre de la méthode d'approximation en bruit blanc, nous allons appliquer les relations présentées ci-avant dans le cadre du problème que nous nous sommes proposés d'étudier. Dans ce cas particulier, les deux composantes de la variance du déplacement peuvent être obtenues assez facilement :

$$\sigma_{x_{qs}}^2 = \frac{1}{\varpi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) d\omega = \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^4} \quad (3.77)$$

$$\sigma_{x_d}^2 = S_f(\varpi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varpi^4} \frac{1}{\left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\varpi}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\varpi}\right)^2 \right]} d\omega = \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 \alpha}{\pi (\alpha^2 + \varpi^2)} \frac{1}{\varpi^4} \frac{\pi \varpi}{2\xi} \quad (3.78)$$

Assez logiquement, on retrouve ici l'expression de la réponse quasi-statique ($\sigma_{x_{qs}}^2$) introduite au paragraphe 3.3.2. La variance du déplacement obtenue à l'aide de l'approximation en bruit blanc est donc :

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x_{qs}}^2 + \sigma_{x_d}^2 = \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^4} \left[1 + \frac{\varphi}{2\xi (1 + \varphi^2)} \right] \quad (3.79)$$

Cette relation est tout à fait identique à l'approximation que nous avons tenté de dériver de l'expression exacte du coefficient d'amplification dynamique (Eq. 3.65). Ces développements constituent donc la démonstration du pressentiment exprimé préalablement, qui postulait que l'approximation en bruit blanc pouvait être valable à condition que les contributions quasi-statique et dynamique soient suffisamment séparées (c'est-à-dire φ assez grand, hypothèse que nous avons faite pour simplifier les deux premiers termes de la série de Laurent) et que le taux d'amortissement ne soit pas trop important (hypothèse présentée dans la seconde méthode, menant directement à cette formulation simplifiée). La figure 3.15 représente le rapport entre l'écart type de la contribution dynamique et celui de la contribution quasi-statique. L'étude de ce rapport montre que, pour les ordres de grandeur rencontrés en pratique ($\varphi \sim 50$, $\xi \sim 0.01$), les contributions quasi-statique et dynamique participent de manière semblable à l'élaboration de la réponse de l'oscillateur étudié. Ce graphique permet de préciser le développement en série du paragraphe précédent (termes d'ordres 0, 0, -4, -8) pour lequel les deux premiers termes présentaient le même ordre de grandeur.

L'approximation en bruit blanc peut également être appliquée aux densités spectrales de vitesse et d'accélération. Les densités spectrales de ces deux grandeurs sont obtenues en multipliant la densité spectrale des déplacements respectivement par ω^2 et ω^4 . Ces caractéristiques statistiques de la vitesse et de l'accélération peuvent donc être vues de deux manières différentes :

- soit à partir de leurs définitions en fonction de la densité spectrale des déplacements comme nous venons de le voir,

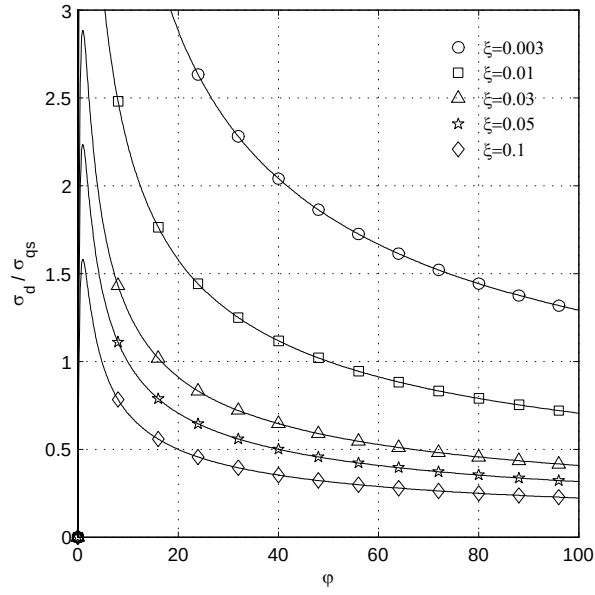


FIG. 3.15 – Répartition de la réponse entre contributions dynamique et quasi-statique - Oscillateur sollicité par un processus à corrélation exponentielle

- soit comme étant les réponses (en déplacement) d'un système linéaire sollicité par des pseudo-efforts obtenus en multipliant la densité spectrale réelle de sollicitation par ω^2 et ω^4 .

Si l'on considère cette deuxième possibilité, on peut comprendre aisément que le contenu fréquentiel de cette pseudo-sollicitation dans le voisinage des basses fréquences est alors très faible et donc que les variances de la vitesse et de l'accélération peuvent être évaluées à l'aide de la méthode d'approximation en bruit blanc dans sa version originelle (c'est-à-dire en ne conservant qu'une seule contribution). On trouve alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{\dot{x}}^2 &= \varpi^2 S_f(\varpi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varpi^4} \frac{1}{\left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\varpi}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\varpi}\right)^2 \right]} d\omega \\ &= 4\gamma^2 \bar{U}^2 \frac{\varpi^2}{\pi} \frac{\sigma_u^2 \alpha}{\alpha^2 + \varpi^2} \frac{1}{\varpi^4} \frac{\pi \varpi}{2\xi} \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\ddot{x}}^2 &= \varpi^4 S_f(\varpi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varpi^4} \frac{1}{\left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\varpi}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\varpi}\right)^2 \right]} d\omega \\ &= 4\gamma^2 \bar{U}^2 \frac{\varpi^4}{\pi} \frac{\sigma_u^2 \alpha}{\alpha^2 + \varpi^2} \frac{1}{\varpi^4} \frac{\pi \varpi}{2\xi} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Après calcul de ces intégrales et simplification, l'approximation en bruit blanc donne

finalemt :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^2} \frac{\varphi}{2\xi} \frac{1}{1+\varphi^2} \quad (3.82)$$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = 4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 \frac{\varphi}{2\xi} \frac{1}{1+\varphi^2} \quad (3.83)$$

qui ne sont en réalité rien d'autre que les premiers termes des développements en série de Laurent des expressions exactes que nous avons développées analytiquement. Cette manière de procéder devrait donner de meilleurs résultats pour l'estimation des vitesses et accélérations que les déplacements, étant donné que les hypothèses proposées pour l'approximation en bruit blanc originelle sont moins fortes que celles de l'approximation en bruit blanc modifiée. Ceci peut être constaté à la figure 3.16 où les erreurs relatives sont représentées en fonction des paramètres φ et ξ . Dans les cas d'application concernant les effets du vent sur les structures du génie civil ($\varphi \sim 30$, voir § 3.5, p.59), on peut constater que l'approximation en bruit blanc peut être considéré comme valable.

La fréquence de passage par zéro avec vitesse positive et la fréquence de passage par un maximum s'expriment respectivement par :

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} = \frac{\varpi}{2\pi} \sqrt{\frac{\varphi}{2\xi(1+\varphi^2) + \varphi}} \quad (3.84)$$

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} = \frac{\varpi}{2\pi} \quad (3.85)$$

La fréquence de passage par zéro est égale à la fréquence propre de l'oscillateur étudié. Ceci est une caractéristique de l'application de la méthode d'approximation en bruit blanc. Physiquement, on peut comprendre ceci assez facilement puisque, pour l'estimation de la vitesse et de l'accélération, seule la composante dynamique a été considérée. L'examen de la figure 3.17 qui représente la solution exacte montre que cette approximation est valable dans une zone de paramètres (ξ, φ) assez large.

Le paramètre spectral de la réponse de l'oscillateur prend une forme assez simple :

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{\nu_0^+}{\mu} \right)^2 = \frac{2\xi(1+\varphi^2)}{2\xi(1+\varphi^2) + \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{\varphi}{2\xi(1+\varphi^2)}} \quad (3.86)$$

Le processus obtenu ressemble donc d'autant plus à un processus en bande large ($\varepsilon \rightarrow 1$) que le taux d'amortissement est élevé ($\xi \gg 1$) et que les contributions statiques et dynamiques sont fort espacées ($\varphi \gg 1$). Les graphiques de la figure 3.17 représentent la fréquence de passage par zéro et le paramètre spectral obtenu par l'approximation en bruit blanc. Par comparaison avec la figure 3.11, on peut à nouveau constater que cette approximation donne de bons résultats lorsque ξ est faible et que φ est élevé.

3.5 Approche numérique 2 : Approximation par un processus d'Ornstein

Nous venons de présenter une méthode couramment mise en oeuvre pour éviter l'intégration sur le domaine des fréquences. Cette méthode est la plus courante ; elle est classiquement reconnue comme étant celle qui a été proposée lors de l'adaptation des

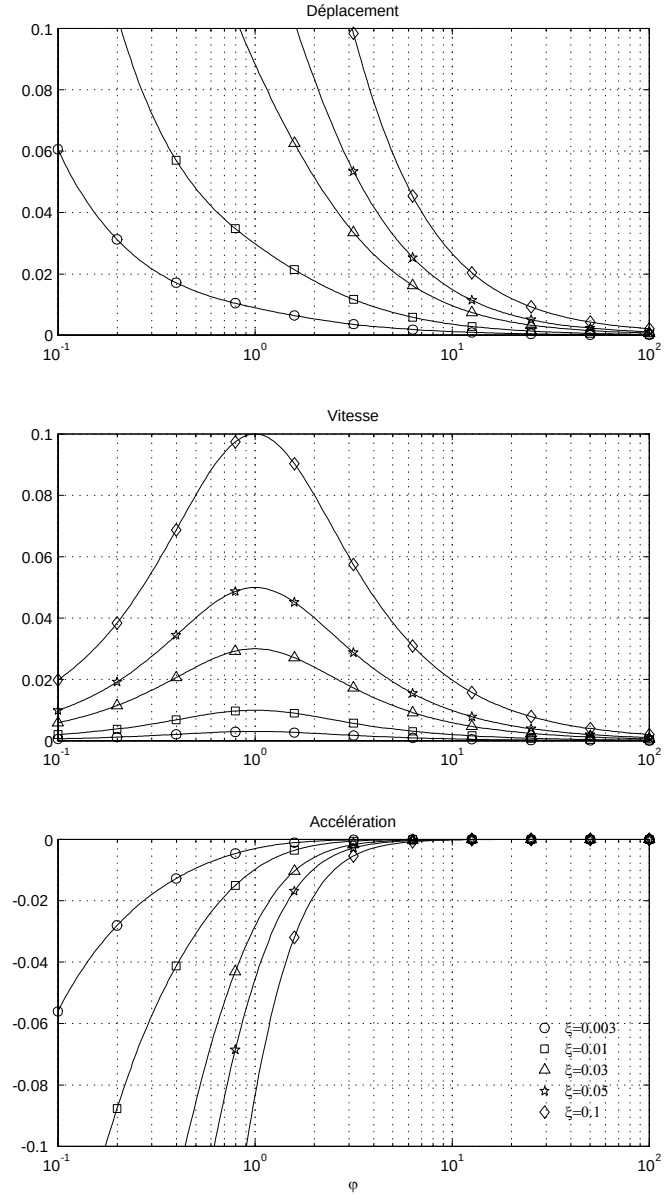


FIG. 3.16 – Erreurs commises sur l'estimation des déplacements, vitesses et accélérations lors de l'application de la méthode d'approximation en bruit blanc.

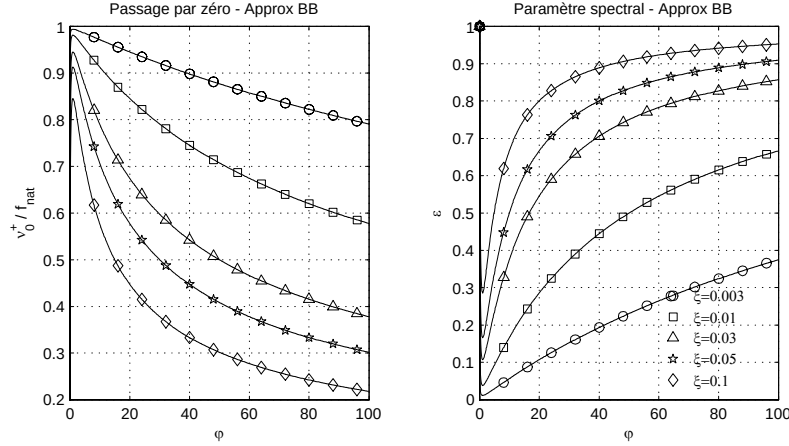


FIG. 3.17 – Fréquence de passage par zéro et paramètre spectral obtenus à l'aide de l'approximation en bruit blanc

méthodes d'analyse stochastique au domaine du vent. Nous venons de présenter cette méthode, l'approximation en bruit blanc, comme étant une modification de la fonction de transfert pour l'estimation de la contribution dynamique de la réponse.

Nous allons maintenant présenter une méthode originale qui se base plutôt sur une approximation de la sollicitation. Pour rappeler le contexte, nous devons calculer le produit de la norme au carré de la fonction de transfert et de la densité spectrale de la force appliquée, celle-ci étant quelconque a priori. Plutôt que de travailler sur la forme de la fonction de transfert, nous allons supposer que la densité spectrale de la force appliquée peut être assimilée à un processus d'Orstein-Uhlenbeck. L'idée consiste donc à trouver les paramètres α et σ qui caractérisent un processus à corrélation exponentielle tel que l'effort appliqué soit au mieux approché par ce processus d'Orstein-Uhlenbeck.

Nous pouvons annoncer d'emblée que cette méthode ne fournit pas les résultats les plus satisfaisants lorsque la densité spectrale de la force est la mieux représentée globalement, par exemple en déterminant les paramètres α et σ par une méthode des moindres carrés. En effet, l'objectif de la méthode n'est pas de représenter au mieux la sollicitation mais plutôt d'obtenir, avec un processus d'Orstein-Uhlenbeck comme sollicitation, une réponse qui soit la plus proche possible de la réponse exacte. Les critères qui vont servir à la détermination des paramètres α et σ doivent donc avoir pour objectif une bonne représentation de la réponse et non de la sollicitation.

La première méthode simplifiée qui a été présentée vient de nous apprendre que la réponse pouvait, dans certaines circonstances, être décomposée en deux parties, l'une étant caractérisée par la variance de l'effort (contribution quasi-statique) et l'autre par la valeur de l'effort au droit de la fréquence propre de l'oscillateur (contribution dynamique).

Nous avons donc choisi de baser l'équivalence entre la densité spectrale réelle de l'effort appliqué et la densité spectrale (équivalente) du processus d'Orstein-Uhlenbeck sur :

- une variance identique ; σ sera donc choisi égal à la variance de l'effort réel. Cette grandeur est en général connue et ne nécessite pas l'intégration sur les fréquences ;
- une valeur identique au niveau du pic de résonance. Le paramètre α sera donc

calculé en imposant :

$$\frac{\alpha\sigma^2}{\pi(\alpha^2 + \varpi^2)} = S_F(\varpi) \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma^2 \pm \sqrt{\sigma^4 - 4\pi^2\varpi^2 S_F^2}}{S_F} \quad (3.87)$$

Il va de soi que cette méthode sera d'autant plus efficace que le comportement aux hautes fréquences s'approche d'une hyperbole de second ordre (comme dans Orstein-Uhlenbeck). Dans le cas de l'analyse de structures soumises au vent turbulent, cette méthode pourrait donc a priori donner de bons résultats puisque les densités spectrales de sollicitation se comportent en $\omega^{-5/3}$.

Aussi, on peut constater que cette méthode ne peut fonctionner que si $\sigma^4 - 4\pi^2\varpi^2 S_F^2 \geq 0$ c'est-à-dire si $S_F(\varpi) \leq \frac{\sigma^2}{2\pi\varpi}$. Dans le cas de densités spectrales de vent, cette condition est généralement vérifiée. Pour s'en convaincre, il suffit de tracer le rapport $\frac{S_F(\varpi)}{\frac{\sigma^2}{2\pi\varpi}}$ et de constater qu'il est toujours plus petit que l'unité, quel que soit la pulsation ϖ choisie. Ce rapport est tracé à la figure 3.18 pour les densités spectrales de Davenport et Von Karman et pour 2 valeurs du paramètre de forme β dont nous détaillons la signification ci-après. On peut en effet constater que les courbes sont toujours inférieures à l'unité. Aussi, si elles devaient passer cette limite d'application de cette méthode, ce serait pour des pulsations inférieures au demi *rad/s*, ce qui ne peut éventuellement être rencontré que dans le cadre de l'étude de certains ponts suspendus.

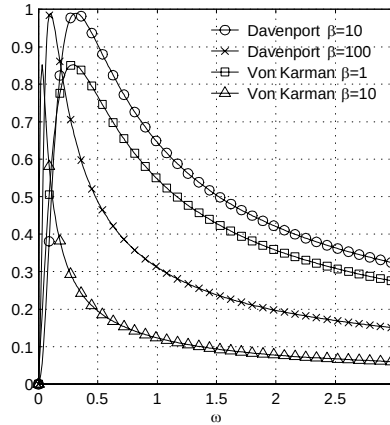


FIG. 3.18 – Preuve de l'applicabilité de la méthode proposée dans le cadre de l'analyse au vent turbulent.

Illustrons cette méthode à l'aide d'un exemple simple où nous supposons que la densité spectrale de force peut s'exprimer sous une formulation de Davenport :

$$S_F(\omega) = \frac{\beta\sigma^2|\omega|}{(1 + 3\beta\omega^2)^{4/3}} \quad (3.88)$$

où le paramètre β permet de jauger la répartition fréquentielle de l'énergie totale σ^2 . De petites valeurs de β correspondent à un contenu fréquentiel plus étalé vers les hautes fréquences. Sous la formulation de Davenport, cette répartition est quantifiée par

les paramètres L et $\bar{U}$ qui représentent l'échelle de turbulence et la vitesse moyenne du vent.

La forme analytique de la densité spectrale de Davenport est généralement présentée en termes de fréquences s'étendant sur l'intervalle $[0, +\infty[$. La relation 3.88 est strictement équivalente mais exprimée en termes de pulsations sur l'intervalle $] - \infty, +\infty[$. La démarche suivie pour obtenir cette relation est assez simple. La densité spectrale de Davenport exprimée en fonction de la fréquence est :

$$S_F^{(Dav)}(n) = \frac{2}{3} \frac{\sigma^2 \left(\frac{L}{\bar{U}}\right)^2 n}{\left(1 + \left(\frac{nL}{\bar{U}}\right)^2\right)^{4/3}} \quad (3.89)$$

L'équivalent en terme de densité spectrale que nous sommes en train de traiter est donc :

$$S_F(\omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{L}{\bar{U}}\right)^2 \sigma^2 \left|\frac{\omega}{2\pi}\right|}{\left(1 + \left(\frac{L}{2\pi\bar{U}}\right)^2 \omega^2\right)^{4/3}} \quad (3.90)$$

où l'on a divisé par le facteur 2 puisque la nouvelle densité spectrale est définie sur $] - \infty, +\infty[$; et de nouveau par 2π puisque la variance doit maintenant être obtenue par intégration sur les pulsations et non plus les fréquences. La comparaison de cette relation avec la densité spectrale telle qu'elle est définie par Davenport (Eq. 3.89) montre que le paramètre de forme β que nous avons choisi est donc assimilable à :

$$\beta = \frac{1}{3} \left(\frac{1200}{2\pi\bar{U}}\right)^2 \quad (3.91)$$

Il convient donc de prendre des valeurs de l'ordre de $\beta = 10s^2$ ($\bar{U}$ élevée) à $\beta = 100s^2$ ($\bar{U}$ faible) dans le cadre d'analyses au vent.

Nous sommes maintenant en mesure de comparer les résultats issus de trois approches différentes :

- une méthode d'intégration numérique avec une discrétisation suffisamment précise que pour pouvoir considérer que le résultat obtenu est le résultat exact ;
- la méthode d'approximation en bruit blanc qui donne, en appliquant strictement la méthode présentée au paragraphe précédent :

$$\sigma_{x_{BB}}^2 = \frac{\sigma^2}{\varpi^4} + \frac{\beta \sigma^2 |\varpi|}{(1 + 3\beta \varpi^2)^{4/3}} \frac{\pi}{2\xi \varpi^3} \quad (3.92)$$

où l'on reconnaît les contributions quasi-statique et dynamique.

- la méthode présentée ici qui consiste à remplacer l'effort appliqué par un processus d'Orstein-Uhlenbeck qui donnerait des déplacements comparables. Les deux paramètres à rentrer dans la loi d'Orstein-Uhlenbeck sont la valeur de l'écart type σ utilisé pour la définition de la densité spectrale de l'effort. Quant au paramètre α , il est déterminé par la relation 3.87.

Pour chacune de ces deux dernières méthodes, l'erreur commise par rapport à la solution exacte peut être calculée. Elles sont représentées en courbes de niveau aux figures 3.19 et 3.20 pour différentes valeurs de la pulsation naturelle, du taux d'amortissement et du paramètre β . On peut constater que la méthode présentée ici donne, dans le cadre

de l'analyse au vent, des résultats qui sont légèrement plus précis que l'approximation en bruit blanc. En effet, si l'on prend deux points de coordonnées identiques dans un graphique de gauche et dans un graphique de droite, celui de gauche se trouve sur une courbe de niveau inférieure à celle sur laquelle se trouve le point dans le graphique de droite.

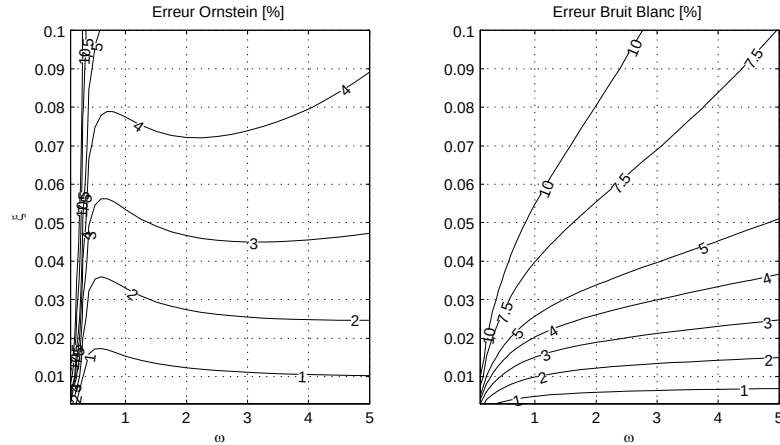


FIG. 3.19 – Erreurs commises par deux méthodes approchées pour l'estimation de la réponse d'un oscillateur soumis à une densité spectrale de Davenport ($\beta = 10s^2$)

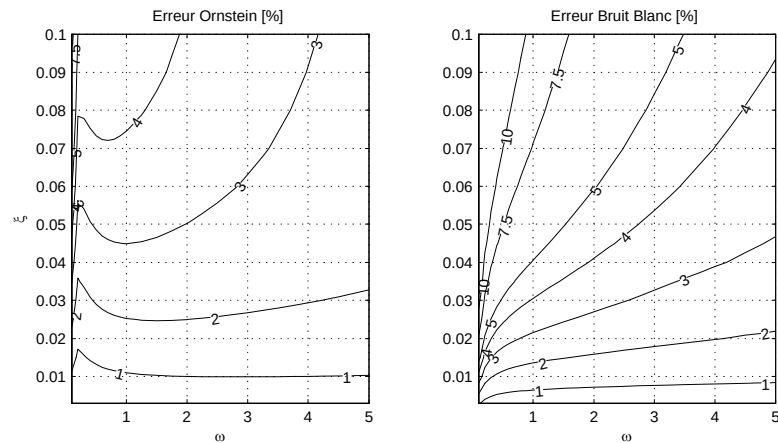


FIG. 3.20 – Erreurs commises par deux méthodes approchées pour l'estimation de la réponse d'un oscillateur soumis à une densité spectrale de Davenport ($\beta = 100s^2$)

La collection de graphiques identiques aux figures 3.19 et 3.20 qui serait obtenue pour tous les paramètres β possibles peut être un outil assez intéressant. En effet, connaissant la vitesse moyenne du vent ainsi que l'échelle de turbulence – ce qui revient à déterminer la valeur de β –, un utilisateur lambda pourrait déterminer l'erreur commise sur la réponse du système à un degré de liberté qu'il étudie. Il suffit de retrouver, dans cette collection, l'erreur associée à son paramètre β , à sa pulsation naturelle et son taux d'amortissement.

Il convient de noter que la collection ainsi établie ne concerne que la densité spectrale de Davenport et qu'il faudrait idéalement déterminer cette collection pour toute autre densité spectrale de vent.

Notons également que l'universalité de ces courbes serait limitée par leur applicabilité à l'étude de systèmes à un degré de liberté. Il faut en effet savoir que l'étude d'un système à plusieurs degrés de liberté passe généralement par une base modale. Dans cette base, les efforts sollicitant les oscillateurs simples considérés ont une forme (comprendre ici, une répartition fréquentielle) dépendant de la forme de la structure, de sa taille et de la cohérence présente dans la structure du vent. Ces points seront abordés plus en détails dans la partie III du document.

A titre d'illustration, il pourrait être intéressant de donner une représentation de la densité spectrale de puissance correspondant à l'application de la méthode d'Ornstein-Uhlenbeck. Ceci est réalisé à la figure 3.21 obtenue pour $\beta = 100s^2$ et $\sigma = 3m/s$. La méthode présentée permet de trouver $\sigma = 3m/s$ et $\alpha = 0.160rad/s$ comme paramètres caractérisant la densité spectrale à corrélation exponentielle équivalente.

Mentionnons également dès à présent (avant de commenter la figure) que les densités spectrales ne coïncident pas au mieux. On peut constater ceci à la partie gauche de la figure 3.21 ; la densité spectrale de Davenport est représentée en trait continu (facilement identifiable car elle possède une valeur nulle à l'origine) et la densité spectrale équivalente est représentée en traits discontinus. Le lecteur inattentif pourrait s'attendre à formuler des critiques quant à l'adéquation de la densité spectrale exacte et la densité spectrale approchée par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Rappelons que l'objectif de la méthode ne consiste pas en une optimisation de l'adéquation entre la vraie sollicitation et la sollicitation équivalente mais plutôt en une équivalence au niveau des réponses à chacune de ces sollicitations. (La structure étudiée présente une pulsation naturelle $\varpi = 2rad/s$ et un coefficient d'amortissement $\xi = 0.03$)

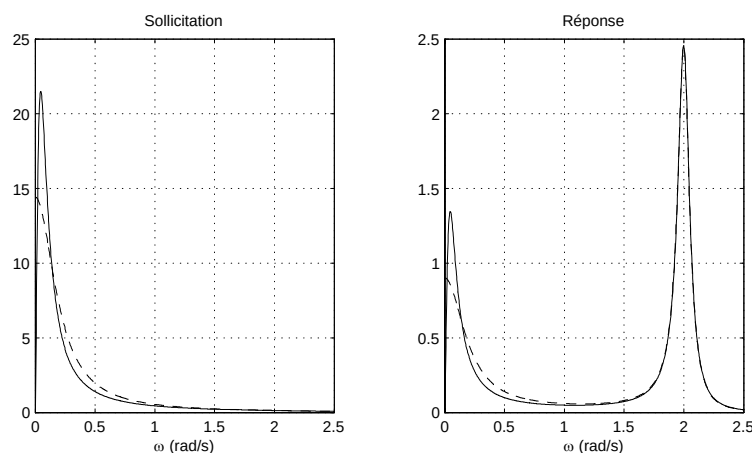


FIG. 3.21 – Exemple de densités spectrales obtenues pour l'exemple proposé ($\varpi = 2$, $\xi = 0.03$). Traits continus : sollicitation exacte ; traits discontinus : approximation par un processus à corrélation exponentielle.

Sur la partie droite du graphique, on peut constater que la composante dynamique est bien représentée (en raison de l'équivalence choisie, critère 2) et que la composante

quasi-statique est bien représentée globalement mais mal distribuée (critère 1).

L'exercice développé ici dans le cadre de la densité spectrale de Davenport peut également être réalisé avec une densité spectrale de Von Karman. Cette densité spectrale présente une forme qui est déjà beaucoup plus proche de celle d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. On peut donc dès à présent imaginer que la méthode proposée donnera d'excellents résultats avec la densité spectrale de Von Karman. En termes de pulsations, celle-ci s'exprime par :

$$S_F(\omega) = \frac{\beta \sigma^2}{(1 + 17.7 \beta^2 \omega^2)^{5/6}} \quad (3.93)$$

En effet, l'expression proposée par Von Karman en termes de fréquences et sur l'intervalle de $[0, \infty[$ est :

$$S_F^{(VK)}(n) = \frac{\frac{4L}{U} \sigma^2}{\left(1 + 70.8 \left(\frac{nL}{U}\right)^2\right)^{5/6}} \quad (3.94)$$

Donc :

$$S_F(\omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{4L}{U} \sigma^2}{\left(1 + 70.8 \left(\frac{L}{2\pi U}\right)^2 \omega^2\right)^{5/6}} \quad (3.95)$$

où nous avons divisé par 4π de sorte que l'intégration depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ sur les pulsations (et non plus les fréquences) rende σ^2 . Le paramètre β doit donc maintenant être estimé par :

$$\beta = \frac{L}{\pi \bar{U}} \quad (3.96)$$

où L représente l'échelle de turbulence et $\bar{U}$ la vitesse moyenne. Ce paramètre est donc maintenant d'un ordre de grandeur $\beta = 1s$ à $\beta = 10s$. Les mêmes graphiques que ceux obtenus pour Davenport sont représentés aux figures 3.22 et 3.23. On peut de nouveau constater une amélioration substantielle de la réponse obtenue en choisissant la méthode proposée plutôt que l'approximation en bruit blanc.

Maintenant que nous sommes en mesure de déterminer les paramètres des processus à corrélation exponentielle qui permettent d'établir une équivalence avec les densités spectrales de vitesses de vent couramment utilisées, nous pouvons donc déterminer, pour une densité spectrale donnée, l'expression du paramètre α en fonction de la pulsation naturelle de la structure étudiée (Eq. 3.87). La figure 3.24 représente l'expression du paramètre adimensionnel φ en fonction de la pulsation naturelle de la structure étudiée, et ce pour différentes densités spectrales de puissance.

Les valeurs que l'on peut lire sur ce graphique permettent de justifier l'ordre de grandeur du paramètre φ que nous avons utilisé jusqu'ici, et qui reviendra encore dans la suite du document.

3.6 Approche numérique 3 : décomposition en fonctions-impulsions

Au paragraphe suivant, nous démontrerons (bien que ce soit pratiquement évident) que les problèmes liés à l'intégration numérique de la densité spectrale de la réponse d'un

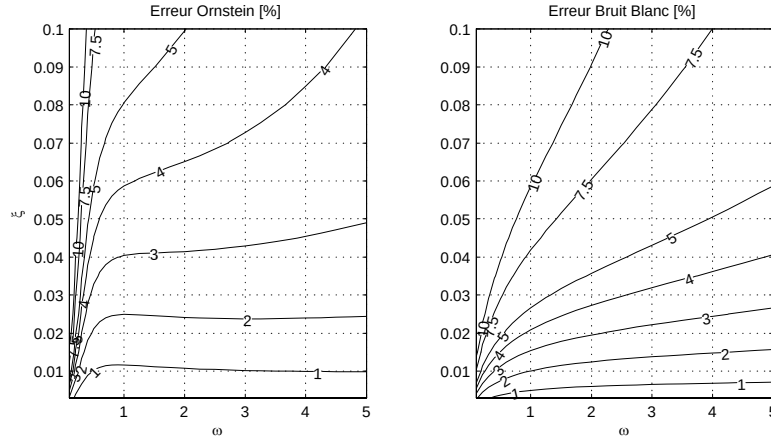


FIG. 3.22 – Erreurs commises par deux méthodes approchées pour l'estimation de la réponse d'un oscillateur soumis à une densité spectrale de Von Karman ($\beta = 1s$)

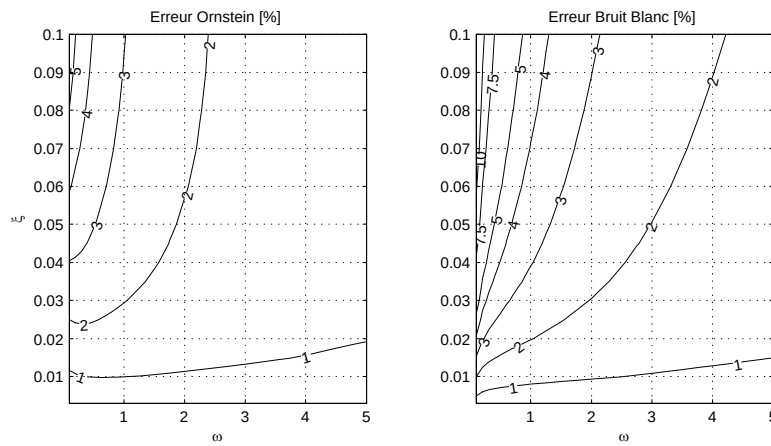


FIG. 3.23 – Erreurs commises par deux méthodes approchées pour l'estimation de la réponse d'un oscillateur soumis à une densité spectrale de Von Karman ($\beta = 10s$)

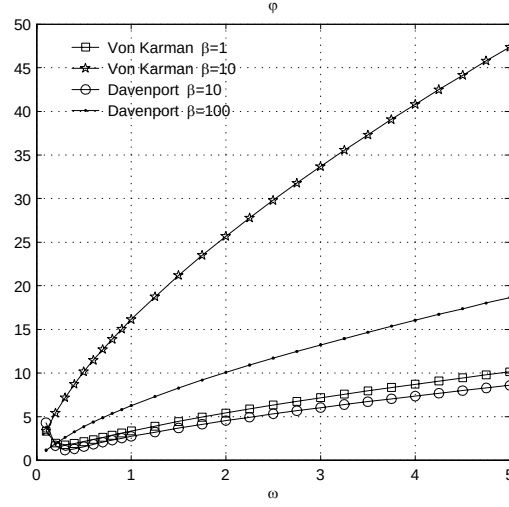


FIG. 3.24 – Estimation du paramètre φ équivalent à considérer pour différents charge-ments aérodynamiques, et en fonction de la pulsation propre.

oscillateur proviennent essentiellement des pics de résonance. Preumont ([80]) évite ce problème en décidant d'intégrer analytiquement la densité spectrale des déplacements. Son raisonnement commence par un cas simple, celui d'un oscillateur soumis à un bruit blanc en largeur limitée. La sollicitation s'exprime par :

$$S_F(\omega) = \begin{cases} S_0 & \text{si } \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.97)$$

Pour cette sollicitation très particulière, la densité spectrale de réponse s'exprime par :

$$S_x(\omega) = \begin{cases} \frac{S_0}{K^2} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\varpi}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\varpi}\right)^2} & \text{si } \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.98)$$

Les moments spectraux associés à cette densité spectrale sont assez simples à calculer puisqu'ils résultent d'une intégration limitée sur l'intervalle $[\omega_1; \omega_2]$. Le calcul peut être mené analytiquement et donne :

$$m_0 = \frac{\pi}{2} \frac{S_0}{K^2} \frac{\varpi}{\xi} \left[I\left(\frac{\omega_2}{\varpi}, \xi\right) - I\left(\frac{\omega_1}{\varpi}, \xi\right) \right] \quad (3.99)$$

$$m_1 = \frac{\pi}{2} \frac{S_0}{K^2} \frac{\varpi^2}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left[L\left(\frac{\omega_2}{\varpi}, \xi\right) - L\left(\frac{\omega_1}{\varpi}, \xi\right) \right] \quad (3.100)$$

$$m_2 = \frac{\pi}{2} \frac{S_0}{K^2} \frac{\varpi^3}{\xi} \left[J\left(\frac{\omega_2}{\varpi}, \xi\right) - J\left(\frac{\omega_1}{\varpi}, \xi\right) \right] \quad (3.101)$$

où

$$I(\chi, \xi) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{2\xi\chi}{1-\chi^2} + \frac{\xi}{2\pi\sqrt{1-\xi^2}} \ln \frac{1+\chi^2+2\chi\sqrt{1-\xi^2}}{1+\chi^2-2\chi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.102)$$

$$L(\chi, \xi) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\chi^2-1+2\xi^2}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.103)$$

$$J(\chi, \xi) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{2\xi\chi}{1-\chi^2} - \frac{\xi}{2\pi\sqrt{1-\xi^2}} \ln \frac{1+\chi^2+2\chi\sqrt{1-\xi^2}}{1+\chi^2-2\chi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.104)$$

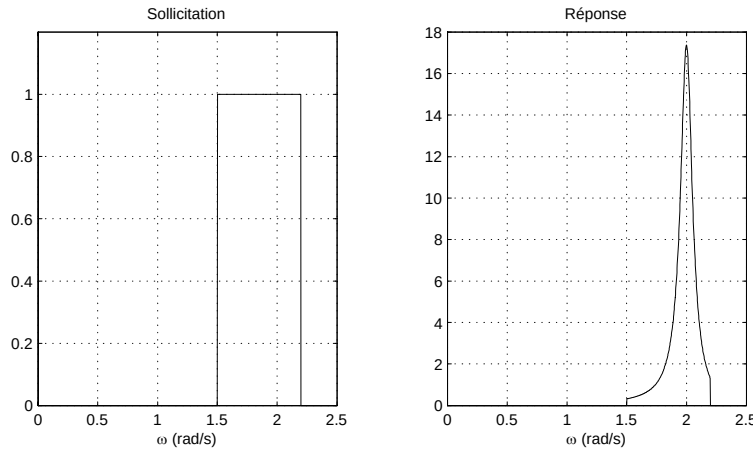


FIG. 3.25 – Sollicitation et réponse d'un oscillateur soumis à un bruit blanc en largeur limitée ($\varpi = 2\text{rad/s}$, $\xi = 0.03$, $\omega_1 = 1.5\text{rad/s}$, $\omega_2 = 2.2\text{rad/s}$, $S_0 = 1N^2s$)

L'utilisation de ces trois relations permet d'obtenir la valeur exacte des moments jusqu'à l'ordre 2 dans le cas de la sollicitation assez simple présentée. La figure 3.25 illustre le calcul entrepris sur base d'un exemple numérique.

Ces formules analytiques assez simples peuvent être utilisées pour estimer la réponse d'un oscillateur soumis à une densité spectrale plus compliquée. L'idée proposée par l'auteur consiste à découper cette densité spectrale plus complexe en des bandes de fréquences sur lesquelles elle peut être considérée comme constante. Chacune de ces bandes contribue de manière indépendante à l'élaboration des moments spectraux du processus complet. Chacune de ces contributions peut être obtenue en appliquant les relations 3.99 à 3.101 en y remplaçant ω_1 et ω_2 par les bornes de la bande considérée.

Cette méthode d'intégration "semi-numérique" permet de se libérer du caractère très aigu des fonctions de transfert. Avec cette méthode, la qualité de l'intégration ne dépend plus que de la précision avec laquelle la sollicitation est représentée. L'auteur ne présente que des formulations relatives aux deux premiers moments spectraux. Des expressions pourraient certainement être obtenues pour les moments d'ordres supérieurs ; il va de soi que l'expression obtenue sera d'autant plus complexe que l'ordre est élevé. Au paragraphe 3.8.3, on présente une application de cette méthode à l'analyse d'un oscillateur simple soumis au vent turbulent.

3.7 Approche numérique 4 : Intégration numérique des DSP

3.7.1 Remarques préliminaires

Rappelons que nous travaillons toujours dans le contexte de la recherche de méthodes permettant d'obtenir les moments spectraux et grandeurs dérivées lorsque le problème ne peut plus être traité analytiquement. Jusqu'à ce point, nous avons mentionné l'approximation en bruit blanc ainsi que l'approche du processus réel par un processus à corrélation exponentielle. Ces méthodes sont toutes deux très rapides mais recourent à des hypothèses qui peuvent dans certains cas être assez importantes; elles fournissent donc des résultats approchés. La troisième méthode présentée permet de s'affranchir du caractère pointu de la fonction de transfert. Sa précision ne dépend plus que d'une bonne représentation de la sollicitation. La dernière méthode que nous allons présenter consiste à intégrer numériquement les densités spectrales de puissance afin d'en déduire les moments spectraux. Il va de soi que cette méthode sera beaucoup plus coûteuse en temps de calcul. Etant donné que nous désirons développer une méthode compétitive, c'est-à-dire procurant un rapport précision-temps de calcul similaire aux autres méthodes, il est important d'élaborer une méthode d'intégration numérique qui permette d'obtenir une précision bien plus importante (c'est-à-dire une erreur relative au moins inférieure au pourcent lors de l'estimation des différents moments).

Avant de présenter les détails de l'algorithme retenu, quelques considérations sur la forme de la fonction de transfert sont nécessaires.

Position du maximum

La position du maximum de la norme au carré de la fonction de transfert est obtenu en annulant la dérivée de cette fonction. Outre la tangente horizontale à l'origine ($\omega = 0$), l'annulation de cette dérivée permet de trouver un maximum en $\omega_{\max} = \varpi_d = \varpi\sqrt{1 - \xi^2}$ qui porte le nom de pulsation propre amortie. Dans les domaines d'application qui nous concernent, les pulsations propres amortie et non amortie sont très proches l'une de l'autre et donc souvent confondues.

Hauteur du pic

La hauteur du pic peut être estimée en bonne approximation par la norme de la fonction de transfert au droit de la pulsation propre, soit $|H^2|_{\max} = \frac{1}{4\xi^2 K^2}$.

Calcul de la largeur du pic de résonance à sa mi-hauteur

On peut avoir une bonne idée de l'acuité de la fonction de transfert en calculant la largeur du pic à sa mi-hauteur. Pour ce faire, travaillons avec la fonction de transfert normée à l'unité à l'origine :

$$H^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{f^2}{f_{nat}^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{f}{f_{nat}}\right)^2} \quad (3.105)$$

c'est-à-dire dont la hauteur du pic s'exprime par $|H^2|_{\max} = \frac{1}{4\xi^2}$. La largeur du pic à mi-hauteur est alors obtenue par la différence des racines de l'équation :

$$H^2(f) = \frac{1}{8\xi^2} \quad (3.106)$$

Ces deux racines, f_1 et f_2 , satisfont donc la relation :

$$(1 - \lambda)^2 + 4\xi^2\lambda = 8\xi^2 \quad (3.107)$$

où $\lambda = \left(\frac{f}{f_{nat}}\right)^2$. En termes du paramètre λ , les racines de ce polynôme du second degré satisfont :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2(1 - 2\xi^2) \quad (3.108)$$

$$\lambda_1\lambda_2 = 1 - 8\xi^2 \quad (3.109)$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = 4(1 - 2\xi^2)^2 - 4(1 - 8\xi^2) \simeq 16\xi^2 \quad (3.110)$$

En réintroduisant la fréquence dans cette relation et en prenant la racine carrée membre à membre, on obtient :

$$(f_1^2 - f_2^2) = (f_1 - f_2) \underbrace{(f_1 + f_2)}_{\simeq 2f_{nat}} \simeq 4\xi f_{nat}^2$$

soit une largeur de bande à mi-hauteur $f_1 - f_2 \simeq 2\xi f_{nat}$.

Position des points d'inflexion

La position des points d'inflexion de la norme de la fonction transfert au carré s'expriment par : $f_{\inf} = \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\xi - \frac{17}{18}\xi^2\right) f_{nat}$. Ceci est une approximation au second ordre en ξ (issu d'un développement en série de Taylor) de l'expression exacte obtenue en annulant la dérivée seconde de la fonction étudiée.

3.7.2 Justification de l'algorithme d'intégration choisi

Pour avoir n points ($n \simeq 10$) pour représenter le pic sur sa moitié supérieure, il faut donc choisir un pas de fréquence $\Delta f \simeq \frac{2\xi}{n} f_{nat}$ dans le voisinage du pic. Etant donné que la fonction de transfert doit au moins être représentée jusqu'à une fréquence d'environ $3f_{nat}$, le nombre de pas de fréquence uniformes qu'il faudrait utiliser est :

$$N = \frac{3f_{nat}}{\Delta f} \simeq \frac{3n}{2\xi} \quad (3.111)$$

Pour les valeurs du paramètre ξ rencontrées en pratique, ce nombre de points serait de l'ordre de 2000, ce qui est énorme.

Il est important de remarquer que la fonction de transfert que l'on désire intégrer présente une asymptote horizontale dans le voisinage de l'origine. D'autre part, la méthode

du trapèze ne requiert pas, dans cette zone, un pas de fréquence aussi petit que dans le voisinage du pic, pour représenter correctement la fonction.

Voici donc les principales motivations du choix d'une intégration par la méthode du trapèze et avec une répartition non uniforme des points d'intégration. L'objectif à remplir consiste donc en une disposition optimale de ces points d'intégration de façon à représenter correctement l'intégrale la densité spectrale d'un déplacement ou d'un effort choisi. Etant donné que l'analyse stochastique recourt à une multiplication dans le domaine fréquentiel, cet objectif final ne peut aller de pair qu'avec une bonne représentation de la sollicitation, d'une part, et une bonne représentation de la fonction de transfert d'autre part. Ces deux objectifs seront présentés séparément dans la suite.

3.7.3 Représentation correcte de la sollicitation

Problème préliminaire

Nous nous proposons de résoudre le problème général d'optimisation suivant : soit une fonction $y(x)$ connue analytiquement et notons A le résultat connu de l'intégration exacte de cette fonction sur un intervalle $[a, b]$ donné. L'intégrale de cette fonction doit être estimée numériquement à l'aide de la méthode du trapèze, avec N points d'intégration tels que $x_1 = a, x_N = b$ et $x_i < x_{i+1}$. On se propose de trouver la position optimale des points d'intégration $x_2, \dots, x_{N-1}$ qui minimisera l'écart entre l'intégrale exacte A et le résultat I de l'intégration numérique

Nous allons dans un premier temps limiter le problème à l'estimation de l'intégrale d'une fonction positive à concavité tournée vers le haut. Pour une telle fonction, nous savons que la méthode du trapèze surestime l'intégrale. La position optimale des points est donc celle qui minimise le résultat de l'intégration numérique. L'optimisation peut donc être interprétée comme la minimisation de la fonction :

$$F(x_2, \dots, x_{N-1}) = I(x_2, \dots, x_{N-1}) = \sum_{i=1}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) \frac{y(x_{i+1}) + y(x_i)}{2} \quad (3.112)$$

La recherche de l'optimum doit passer par l'estimation de la dérivée de la fonction objectif par rapport à chacun de ses paramètres :

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{y(x_{j-1}) - y(x_{j+1})}{2} + y'(x_j) \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} \quad (3.113)$$

L'annulation de la relation 3.113 écrite pour chacun des paramètres constitue un système de $N - 2$ équations non linéaires dont les $N - 2$ inconnues sont les positions optimales des points d'intégration. Ce système d'équations non linéaires peut être résolu itérativement à l'aide de la méthode de Newton-Raphson.

Pour la simplicité des notations, regroupons tous les paramètres dans le même vecteur $\{X\}$. Le premier itéré $\{X^{(0)}\}$, qui constitue une première estimation de la solution optimale, sera choisi en répartissant les points d'intégration de manière uniforme entre les bornes fixées. Les itérés successifs sont alors obtenus par :

$$\{X^{(k+1)}\} = \{X^{(k)}\} - [J^{(k)}] \{G^{(k)}\} \quad (3.114)$$

où $G_i^{(k)} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{\{X\}=\{X^{(k)}\}}$ et $J_{ij}^{(k)} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\{X\}=\{X^{(k)}\}}$. Afin d'améliorer la précision du calcul, toutes les dérivées de la fonction F sont calculées analytiquement. Ceci est réalisable dans la mesure où F est connu analytiquement. Il convient de remarquer, vu la forme particulière du problème à résoudre, que la matrice J est tridiagonale, ce qui accélère substantiellement les itérations. Les figures 3.26 et 3.27 montrent un exemple de cette méthode d'optimisation ; l'application consiste à calculer l'intégrale de $y(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0; 4]$. Le nombre de points d'intégration est $N = 5$ ou $N = 41$.

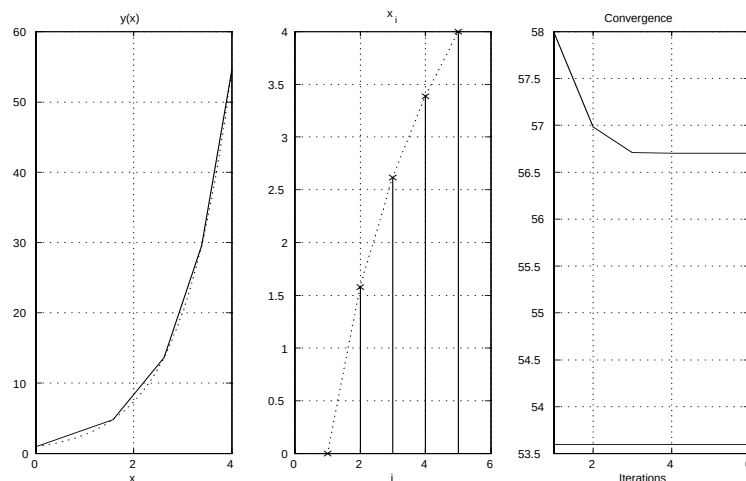


FIG. 3.26 – Illustration de l'optimisation de l'intégration numérique de $y(x) = e^x$ sur $x \in [0, 4]$ à l'aide de $N = 5$ points

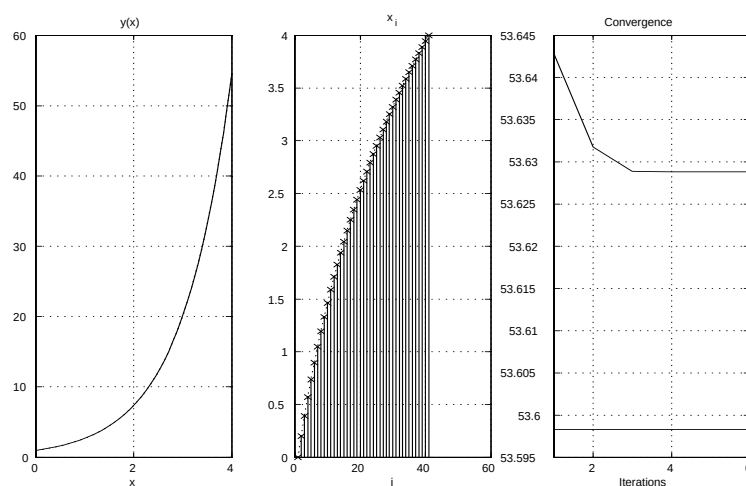


FIG. 3.27 – Illustration de l'optimisation de l'intégration numérique de $y(x) = e^x$ sur $x \in [0, 4]$ à l'aide de $N = 41$ points

Sur chacune de ces figures, le graphique de gauche représente la fonction à intégrer

(en pointillés) ainsi que la représentation que l'on en donne (courbe brisée). Le graphique du centre représente les positions des points d'intégration et celui de droite représente l'évolution au cours des itérations de l'estimation de l'intégrale. La valeur de cette intégrale à la première estimation correspond à l'intégrale obtenue en disposant les points d'intégration uniformément.

On peut constater, sur base de cet exemple simple, que les positions des points d'intégration semblent pouvoir être exprimées par une transformation non linéaire (la courbe en trait pointillés des graphiques du centre) d'une série de points espacés uniformément. L'existence d'une telle fonction est évidente ; ce qui paraît plus impressionnant est que la forme de cette fonction non linéaire semble être indépendante du nombre de points choisis pour intégrer la fonction.

Laissons momentanément cette constatation de côté et appliquons la méthode à l'intégration d'une fonction beaucoup plus simple : une parabole $y(x) = ax^2 + bx + c$. Pour une telle fonction, les équations du système à résoudre 3.113 s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j} &= \frac{a(x_{j-1}^2 - x_{j+1}^2) + b(x_{j-1} - x_{j+1})}{2} + (2ax_j + b) \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} \\ &= a \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} [2x_j - (x_{j-1} + x_{j+1})] \end{aligned} \quad (3.115)$$

Etant donné que l'on recherche une solution pour laquelle $x_{j-1} < x_j < x_{j+1}$, la seule façon d'annuler les équations constitutives du système consiste à imposer $2x_j = x_{j-1} + x_{j+1}$, ce qui démontre donc que la répartition optimale pour représenter une parabole est une répartition uniforme des points d'intégration. Notons également que si $a = 0$, le système d'équation à résoudre est trivial. Il est automatiquement satisfait, ce qui est logique puisque l'intégration d'une fonction linéaire par la méthode du trapèze peut se faire en disposant les points d'intégration n'importe où !

Optimisation analytique.

Sur base de ces deux constatations :

- le pressentiment d'existence d'une fonction non linéaire associée à la fonction à intégrer ;
 - la représentation optimale d'une parabole à l'aide de points espacés uniformément,
- nous avons décidé de développer une méthode d'optimisation analytique. L'objectif consiste toujours en la meilleure estimation possible de :

$$I = \int_a^b y(x) dx \quad (3.116)$$

Nous savons que si la fonction $y(x)$ était une parabole, les points d'intégration devraient idéalement être choisis uniformément. Malheureusement, les fonctions qui nous intéressent en pratique présentent généralement un caractère plutôt fortement variable. Effectuons alors le changement de variable $x = x(t)$ pour obtenir :

$$I = \int_{t_a}^{t_b} y(x(t)) x'(t) dt \quad (3.117)$$

où $a = x(t_a)$ et $b = x(t_b)$. L'astuce consiste à se débrouiller pour que la nouvelle fonction à intégrer, à savoir $y(x(t))x'(t)$ soit une parabole :

$$y(x)x'(t) = t^2 \Rightarrow y(x)dx = t^2 dt \Rightarrow Y(x) = \int y(x)dx = \frac{t^3}{3} \quad (3.118)$$

Nous pouvons donc constater que cette condition sera satisfaite à condition de choisir $t(x) = \sqrt[3]{3Y(x)}$ où $Y(x)$ représente une primitive de $y(x)$. Ce changement de variable ne peut être valable que si $t(x)$ est une relation univoque, c'est-à-dire également si $Y(x)$ est monotone sur $[a; b]$, soit encore si $y(x)$ est de signe constant sur $[a; b]$. Etant donné que les fonctions qui nous concernent sont essentiellement des densités spectrales de puissance, toujours positives, la méthode présentée ici sera toujours d'application.

Cette méthode appelée "Optimisation analytique" démontre l'existence de la fonction non linéaire observée ci-avant. Il s'agit bien sûr de la relation $x(t)$, inverse de la relation $t(x)$. Les courbes en traits pointillés des figures 3.26 et 3.27 ont été obtenues en suivant cette méthodologie. Ceci prouve donc également que l'algorithme itératif développé précédemment converge vers une transformation non linéaire, la fonction $x(t)$ exposée ici, d'une répartition uniforme des points d'intégration. Cette méthode d'optimisation analytique permet donc directement d'obtenir le résultat de l'algorithme itératif après convergence.

Afin de démontrer l'aptitude de cette méthode à intégrer des fonctions non monotones, nous proposons de l'illustrer au calcul de cette intégrale :

$$I = \int_0^b \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx \quad (3.119)$$

La méthode d'optimisation analytique recommande l'utilisation du changement de variable :

$$t(x) = \sqrt[3]{3 \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx} = \sqrt[3]{\frac{-3}{1+x^2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{-3}{t^3} - 1} \quad (3.120)$$

Moyennant ce changement de variable, l'intégrale à calculer devient :

$$I = \int_0^b \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx = \int_{\sqrt[3]{-3}}^{\sqrt[3]{\frac{-3}{1+b^2}}} \frac{2\sqrt{\frac{-3}{t^3} - 1}}{\left(1 + \frac{-3}{t^3} - 1\right)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{-3}{t^3} - 1}} \left(\frac{9}{t^4}\right) dt = \int_{\sqrt[3]{-3}}^{\sqrt[3]{\frac{-3}{1+b^2}}} t^2 dt \quad (3.121)$$

ce qui montre bien que nous nous ramenons au problème de l'intégration d'une parabole. La figure 3.28 montre quelques résultats issus de ce calcul réalisé avec $N = 15$. Le graphique de gauche montre la fonction représentée à l'aide de points d'intégration disposés uniformément ou de façon optimale. Le graphique du centre représente les positions des points d'intégration, soit également une image de la fonction non linéaire qui transforme la série des points espacés uniformément $(1, 2, \dots, N)$ en la série de points d'intégration optimisés. Finalement, le graphique de droite, représente, en fonction du nombre de points d'intégration, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale, en choisissant des points espacés uniformément ou de manière optimale. On peut y constater que la nouvelle méthode surestime l'intégrale alors que l'utilisation de points d'intégration disposés uniformément la sous-estime (ceci provient du fait que la fonction est à concavité

ournée vers le bas dans sa zone la plus aigüe). 20 points d'intégration espacés intelligemment permettent de limiter l'erreur à 0.1% alors que 20 points espacés uniformément donnent une erreur de l'ordre du pourcent.

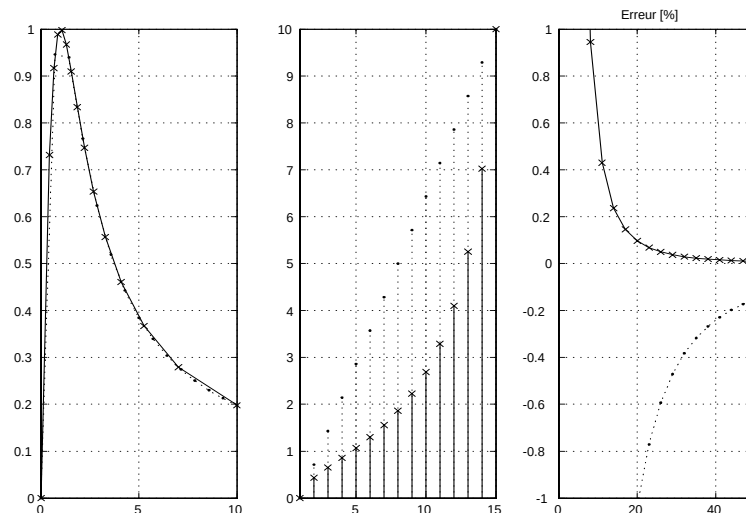


FIG. 3.28 – Illustration de l'optimisation analytique au calcul de l'intégrale d'une fonction non monotone.

Voici un résumé de la méthodologie à suivre pour obtenir les positions optimales des points d'intégration :

1. Calculer $t(x) = \sqrt[3]{3Y(x)}$ et sa fonction réciproque $x(t)$. Ces fonctions sont toutes deux biunivoques sur l'intervalle d'intégration, à condition que $y(x)$, la fonction à intégrer, soit de signe constant sur cet intervalle ;
2. Calculer $t_a = t(a)$ et $t_b = t(b)$;
3. Espacer régulièrement les points d'intégration entre t_a et t_b . On forme alors ainsi une suite de points (t_i) ;
4. Utiliser la fonction non linéaire $x(t)$ pour transformer cette première suite de points (t_i) en une nouvelle suite de points qui constituent des points positionnés de manière optimale pour représenter $y(x)$ sur l'intervalle $[a; b]$.

Représentation des densités spectrales de vitesse de vent

Dans le cadre d'analyse de structures soumises au vent turbulent, la sollicitation principale est généralement exprimée à partir des densités spectrales de vitesse de vent. Nous allons dans ce paragraphe appliquer la méthode d'optimisation analytique aux densités spectrales de vent habituelles.

Davenport. La densité spectrale de puissance proposée par Davenport s'exprime par :

$$S(n) = \frac{2}{3} \frac{n \left(\frac{L}{U}\right)^2 \sigma_u^2}{\left[1 + \left(\frac{nL}{U}\right)^2\right]^{4/3}} \quad (3.122)$$

Une primitive de cette relation est :

$$Y(n) = -\sigma_u^2 \left[1 + \left(\frac{nL}{\bar{U}} \right)^2 \right]^{-1/3} \quad (3.123)$$

et le changement de variable recommandé est :

$$t(n) = \sqrt[3]{-3\sigma_u^2 \left[1 + \left(\frac{nL}{\bar{U}} \right)^2 \right]^{-1/3}} \Leftrightarrow n(t) = \frac{\bar{U}}{L} \sqrt{\left(\frac{-3\sigma_u^2}{t^3} \right)^3 - 1} \quad (3.124)$$

Cette relation permet d'appliquer la méthode qui vient d'être présentée au cas de la densité spectrale de Davenport.

Von Karman. La densité spectrale de puissance proposée par Von Karman s'exprime par :

$$S(n) = \frac{4 \frac{L}{\bar{U}} \sigma_u^2}{\left[1 + 70.8 \left(\frac{nL}{\bar{U}} \right)^2 \right]^{5/6}} \quad (3.125)$$

Les primitives de cette relation s'expriment en terme de fonctions hypergéométriques qui ne sont jamais très agréables à utiliser. De plus, aucune formulation analytique simple ne permet d'écrire leurs fonctions réciproques. Nous voici donc en face d'un premier inconvénient assez important de la méthode d'optimisation analytique, celui de la nécessité de travailler avec des relations analytiques simples. Ce problème peut être contourné mais il ne peut être résolu qu'au cas par cas, éventuellement, en s'inspirant des développements menés ci-après pour la densité spectrale de Von Karman.

Nous allons d'abord nous concentrer sur la représentation des fréquences de l'ordre des fréquences propres structurales, c'est-à-dire, celles pour lesquelles $70.8 \left(\frac{nL}{\bar{U}} \right)^2$ est plus grand que l'unité. La représentation de la fonction doit donc dans un premier temps être entreprise entre $n_{\min}$ tel que :

$$70.8 \left(\frac{n_{\min} L}{\bar{U}} \right)^2 = 1 \quad (3.126)$$

et $n_{\max}$ choisi par l'utilisateur. Nous nous préoccuperons dans un second temps de la représentation entre $n = 0$ et $n = n_{\min}$. Sur l'intervalle $[n_{\min}, n_{\max}]$, la fonction à représenter peut être approchée par :

$$S(n) \simeq \frac{4 \frac{L}{\bar{U}} \sigma_u^2}{(70.8)^{5/6} \left(\frac{nL}{\bar{U}} \right)^{5/3}} \quad (3.127)$$

On conçoit aisément que le facteur multiplicateur ne modifie en rien la répartition optimale des points d'intégration. Il sera donc laissé de côté dans la suite des développements. La méthode générale présentée ci-avant peut être appliquée à la fonction ainsi obtenue :

$$Y(n) = -\frac{3\bar{U}}{2L} \left(\frac{nL}{\bar{U}} \right)^{-2/3} \quad (3.128)$$

$$t(n) = \sqrt[3]{-\frac{9\bar{U}}{2L} \left(\frac{nL}{\bar{U}}\right)^{-2/3}} \Leftrightarrow n(t) = \frac{\bar{U}}{L} \sqrt[3]{\left(\frac{-9\bar{U}}{2Lt^3}\right)^3} \quad (3.129)$$

M points d'intégration sont placés uniformément entre $t(n_{\min})$ et $t(n_{\max})$ puis la transformation non linéaire $n(t)$ permet de retrouver les M points d'intégration optimalement placés entre $n_{\min}$ et $n_{\max}$. A condition de vouloir représenter la densité spectrale de Von Karman jusqu'à une fréquence suffisamment grande, les bornes d'intégration sur la variable t sont :

$$t(n_{\min}) = \sqrt[3]{-\frac{9\bar{U}}{2L} \sqrt[3]{70.8}} = -2.65 \sqrt[3]{\frac{\bar{U}}{L}} \quad (3.130)$$

$$t(n_{\max}) \simeq 0 \quad (3.131)$$

ce qui signifie donc que la suite de t_i est composée de valeurs espacées de $\Delta t \simeq \frac{2.65}{M} \sqrt[3]{\frac{\bar{U}}{L}}$.

On peut montrer⁸ que le pas de fréquence résultant de la démarche précédente vaut, dans le voisinage de $n_{\min}$, $\Delta n = \frac{3n_{\min}}{M}$. La première partie de la densité spectrale de Von Karman peut donc ainsi être représentée correctement entre $n_{\min}$ et $n_{\max}$ supposé suffisamment grand que pour pouvoir limiter l'erreur de troncature. Sur cet intervalle, les points d'intégration sont répartis de façon optimale, avec un pas de fréquence minimal ($\Delta n = \frac{3n_{\min}}{M}$) du côté de la borne inférieure.

Pour des valeurs habituelles des paramètres $\bar{U}$ et L , la fréquence $n_{\min}$ est très faible. La seconde zone à représenter, celle comprise entre $n = 0Hz$ et $n = n_{\min}$ est donc assez courte. Nous avons décidé de conserver le pas de fréquence minimum pour les fréquences inférieures à $n_{\min}$; ceci permet donc d'obtenir les positions de $M/3$ nouveaux points d'intégration. Le nombre M est choisi de sorte qu'au total N (imposé) points d'intégration soient utilisés pour représenter l'entière de la fonction. Nous imposerons donc $N = M + \frac{M}{3}$, et donc $M = 3N/4$.

La figure 3.29 illustre cette méthode d'intégration de la densité spectrale de Von Karman. L'intégration est menée sur l'intervalle $f_L \in [0; 35]$ où $f_L = \frac{nL}{\bar{U}}$ représente une fréquence adimensionnelle. L'intégration est réalisée à l'aide de $N = 40$ points espacés uniformément ou de manière optimale. Le graphique de gauche montre que 40 points uniformément espacés ne permettent pas de représenter la densité spectrale correctement. Par contre, on peut constater que la méthode avec optimisation des points d'intégration donne une très bonne représentation. Le graphique central représente le pas de fréquence pour chacune des deux méthodes. On peut constater que l'optimisation analytique permet de fournir un pas de fréquence de plus en plus grand. La figure de droite représente, en fonction du nombre de points d'intégration, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale. On peut de nouveau constater une supériorité de la méthode que nous proposons.

La figure 3.30 représente l'erreur commise sur l'estimation des intégrales des densités spectrales de Von Karman et Davenport, avec le schéma d'intégration choisi et présenté

$$^8 \Delta n \simeq \Delta t \left[\frac{dn}{dt} \right]_{t=t(n_{\min})} = \frac{2.65}{M} \sqrt[3]{\frac{\bar{U}}{L}} \left[\frac{-243}{4\sqrt{2}t^{11/2}} \left(\frac{\bar{U}}{L}\right)^{5/2} \right]_{t=t(n_{\min})} = \frac{2.65}{M} \sqrt[3]{\frac{\bar{U}}{L}} 0.2 \left(\frac{\bar{U}}{L}\right)^{2/3} = \frac{0.53}{M} \frac{\bar{U}}{L} = \frac{4.46n_{\max}}{M}$$

Pratiquement, la borne maximale des t n'est pas vraiment égale à 0. Le pas de fréquence $\frac{4.46n_{\max}}{M}$ prend alors plus généralement des valeurs de l'ordre de $\frac{3n_{\max}}{M}$ à $\frac{3.5n_{\max}}{M}$.

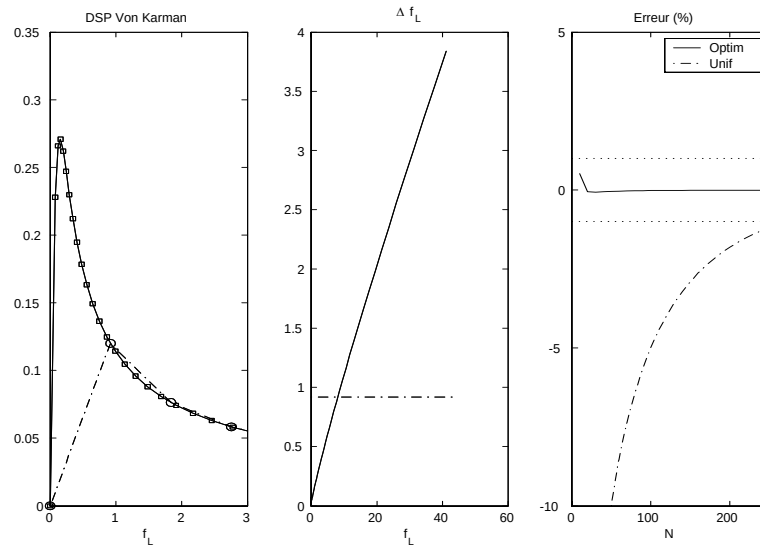


FIG. 3.29 – Intégration de la densité spectrale de Von Karman par optimisation analytique

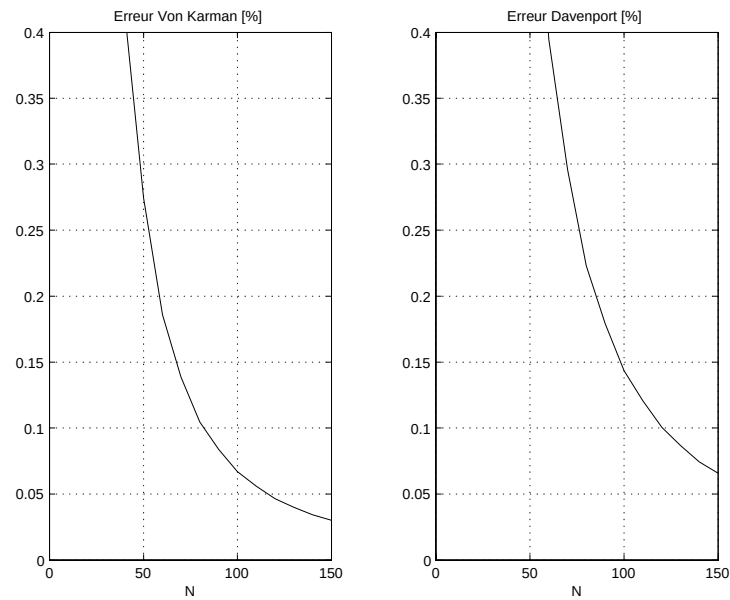


FIG. 3.30 – Erreur commises sur les intégrations des densités spectrales de Von Karman et Davenport en fonction du nombre de points d'intégration

ci-dessus. Dans la suite du travail, nous nous limiterons à l'utilisation de 120 points d'intégration pour représenter la sollicitation. Ceci permet de réaliser une erreur sur l'estimation de l'intégrale inférieure au dixième de pourcent.

3.7.4 Représentation correcte de la fonction de transfert

Optimisation analytique

Après avoir indiqué comment représenter au mieux les densités spectrales de vent les plus courantes, tâchons maintenant d'appliquer la méthode d'optimisation analytique à la fonction de transfert d'un système à un degré de liberté. Afin de simplifier les notations, nous allons nous contenter de l'étude de la fonction de transfert "adimensionnelle" :

$$H(\chi) = \frac{1}{(1 - \chi^2)^2 + (2\xi\chi)^2} \quad (3.132)$$

L'approche analytique requiert le calcul d'une primitive de cette relation, soit :

$$\begin{aligned} \int H(\chi) d\chi = & \frac{\frac{1}{4\xi\sqrt{-1+\xi^2}} \arctan \frac{\chi}{\sqrt{-1+2\xi^2-2\xi\sqrt{-1+\xi^2}}}}{\sqrt{-1+2\xi^2-2\xi\sqrt{-1+\xi^2}}} \\ & - \frac{\frac{1}{4\xi\sqrt{-1+\xi^2}} \arctan \frac{\chi}{\sqrt{-1+2\xi^2+2\xi\sqrt{-1+\xi^2}}}}{\sqrt{-1+2\xi^2+2\xi\sqrt{-1+\xi^2}}} \end{aligned} \quad (3.133)$$

En observant que le produit des dénominateurs est égal à l'unité et que :

$$\sqrt{-1+2\xi^2-2\xi\sqrt{-1+\xi^2}} \simeq \xi - i \quad (3.134)$$

$$\sqrt{-1+2\xi^2+2\xi\sqrt{-1+\xi^2}} \simeq \xi + i \quad (3.135)$$

cette primitive peut être approchée par :

$$\begin{aligned} Y(\chi) &= \frac{1}{4\xi\sqrt{1-\xi^2}} \left[(\xi i - 1) \arctan \frac{\chi}{\xi - i} - (\xi i + 1) \arctan \frac{\chi}{\xi + i} \right] \\ &= \frac{1}{4\xi\sqrt{1-\xi^2}} \left[\xi i \left(\arctan \frac{\chi}{\xi - i} - \arctan \frac{\chi}{\xi + i} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\arctan \frac{\chi}{\xi - i} + \arctan \frac{\chi}{\xi + i} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\xi\sqrt{1-\xi^2}} \left[\xi i \arctan \frac{2\chi i}{1 + \xi^2 + \chi^2} - \arctan \frac{2\xi\chi}{1 + \xi^2 - \chi^2} \right] \end{aligned} \quad (3.136)$$

Cette primitive $Y(\chi)$ est représentée à la figure 3.31. La méthode de l'optimisation analytique demande d'en calculer la racine cubique du triple (figure en haut à droite) et enfin d'en prendre la réciproque. La dérivée de cette dernière expression donne finalement une idée du pas de fréquence. On peut constater sur la dernière figure, chose à

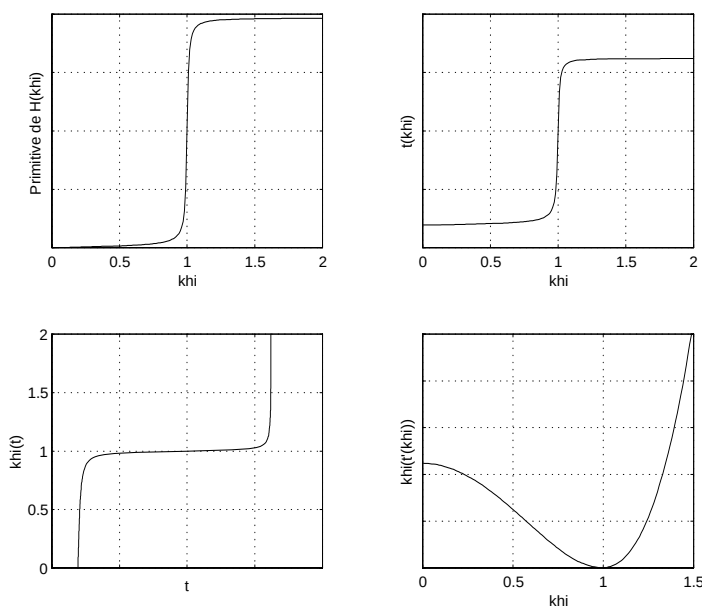


FIG. 3.31 – Application de l'optimisation analytique à la représentation de la fonction de transfert

laquelle nous pouvions nous attendre, que le pas de fréquence devrait diminuer dans le voisinage du pic résonance avant d'augmenter de nouveau rapidement vers les plus hautes fréquences.

Les graphiques qui sont donnés ici ne sont fournis qu'à titre illustratif car, en réalité, la fonction réciproque (en haut à droite) ne peut pas être obtenue analytiquement. Par application de méthodes numériques, les graphiques peuvent bien sûr être tracés ; mais pour une application intéressante, la méthode ne peut être applicable que si la relation analytique de la réciproque peut être écrite.

Bien que la méthode d'optimisation analytique ne puisse pas servir à déterminer vraiment les positions des points d'intégration, elle aura au moins eu le mérite de nous présenter la forme de la fonction non linéaire optimale.

Puisque le calcul exact de la fonction non linéaire recherchée semble impraticable, nous avons décidé d'en trouver une expression approchée, basée sur un raisonnement mathématique beaucoup plus simple. En essayant des formulations différentes, nous nous sommes rendus compte que le problème se trouvait alors en la recherche d'un compromis entre la simplicité d'expression et les limitations de la représentation que l'on s'est fixé. Il est inutile de présenter dans cet ouvrage l'ensemble des fonctions qui ont été "testées". Nous nous limitons à présenter deux candidats, dont le second a été retenu et validé pour les calculs de ce document.

Candidat n°1

L'idée passe toujours par une transformation non linéaire d'une série de valeurs de calcul espacées uniformément. Nous savons qu'une distribution uniforme n'est pas optimale pour intégrer une fonction fort pointue. En effet, on pressent effectivement qu'une

bonne représentation de la fonction ne peut aller de pair qu'avec un $\Delta\chi$ plus petit dans le voisinage du pic de résonance. Au lieu de travailler sur la représentation de cette fonction non linéaire, nous avons décidé d'essayer de travailler sur l'élaboration de sa dérivée première, c'est-à-dire de l'expression du pas de fréquence. Nous savons que cette fonction doit présenter un minimum dans le voisinage de $\chi = 1$ et remonter rapidement vers des $\Delta\chi$ plus grands lorsqu'on s'éloigne de cette fréquence. Des essais avec diverses formulations ont montré qu'il était important, d'un point de vue pratique, d'imposer un $\Delta\chi$ constant dans le voisinage de l'origine ainsi qu'aux plus hautes fréquences⁹. Ceci signifie que la fonction recherchée doit présenter des asymptotes horizontales (pas nécessairement égales) en $+\infty$ et $-\infty$. Voici un bon candidat pour cette fonction :

$$g(z) = \arctan \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{\Delta z^2} - \arctan \frac{z_1 z_2}{\Delta z^2}$$

Notons que le Δz qui apparaît dans cette relation représente une mise à l'échelle et non pas le pas de définition des z_i .

L'avantage de cette formulation est de donner une représentation unique pour l'ensemble des fréquences (et non pas une formulation par morceaux : si χ est plus petit que 1 ... sinon...). La transformation non linéaire, assez ardue à calculer, est obtenue par intégration de cette fonction :

$$\begin{aligned} \chi(z) = z & \left[\arctan \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{\Delta z^2} - \arctan \frac{z_1 z_2}{\Delta z^2} \right] \\ & - \frac{\sqrt{r}}{2} \left[\cos \frac{\theta}{2} \ln \sqrt{\frac{B^2 + r + 2R\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}}{B^2 + r - 2R\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}}} - \right. \\ & \left. \sin \frac{\theta}{2} \left(\arctan \frac{B \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r} + B \sin \frac{\theta}{2}} + \arctan \frac{B \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r} - B \sin \frac{\theta}{2}} \right) \right] \end{aligned}$$

où $B = 2z - z_1 - z_2$, $r = \sqrt{(z_1 - z_2)^4 + 16\Delta z^4}$ et $\theta = \pi + \arctan \frac{4\Delta z^2}{(z_1 - z_2)^2}$.

Bien qu'apparemment simples au départ, les développements subséquents sont assez lourds. Etant donné que l'idée de départ est de trouver une méthode simple pour disposer les points d'intégration, nous laissons tomber cette méthode au profit d'une autre encore plus simple.

Candidat n°2

La simplicité des expressions obtenues ne peut aller de pair, sous la condition d'une représentation acceptable de la fonction non linéaire, qu'avec une division des domaines étudiés. Dans cette méthode (qui sera appliquée dans le reste du document), nous avons décidé de diviser le problème en deux morceaux : l'un au delà du pic et l'autre en-deça.

Nous avons décidé de garder une forme générique d' $\arctan$ parce que cette fonction analytique est assez simple :

$$g(i) = A \arctan (Bi + C) + D \quad (3.137)$$

⁹ Cette conclusion d'essais de différentes fonctions non linéaires utilisées semble néanmoins en désaccord avec ce que la méthode analytique propose. Ceci peut être interprété en imaginant que la méthode analytique dispose d'un nombre infini de points à disposer et ne donne finalement que la densité de position de ces points.

où $i = 0, 1, \dots, N$ représente la suite de points espacés uniformément. Admettons que l'on travaille dans un premier temps sur la représentation de la fonction après le pic. De cette dernière relation, on peut obtenir, par intégration :

$$\chi(i) = Di + \frac{A}{B} \left[(C + Bi) \arctan(C + Bi) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + (C + Bi)^2}{1 + C^2} \right) - C \arctan C \right] + 1 \quad (3.138)$$

où la constante d'intégration a été choisie de sorte que $\chi(0) = 1$. Donc, $\chi(0) = 1$ correspond au pic de résonance et $\chi(N)$ correspond à la plus haute fréquence représentée.

Cette relation fait intervenir quatre paramètres A, B, C et D qui doivent être interprétés. Cette interprétation n'est guère évidente et, à défaut d'interprétation, nous devons au moins être capable de trouver les valeurs à donner à ces quatre paramètres lorsque l'on désire respecter certains critères.

Les deux premiers de ces critères que nous nous sommes fixés sont l'imposition des pas de fréquences (m et M) pour les fréquences au voisinage du pic de résonance et aux hautes fréquences respectivement. On impose donc :

$$m = g(0) = A \arctan C + D\chi \quad (3.139)$$

$$M = g(N) = A \arctan(BN + C) + D \quad (3.140)$$

Comme troisième critère, il est important de pouvoir imposer la plus haute fréquence représentée :

$$\chi_{\max} = \frac{A}{B} \left[(C + BN) \arctan(C + BN) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + (C + BN)^2}{1 + C^2} \right) - C \arctan C \right] + DN + 1 \quad (3.141)$$

Aussi, comme quatrième critère, il paraît également intéressant de pouvoir imposer la fréquence à partir de laquelle le pas commence à devenir de plus en plus grand, ce qui revient à imposer l'ordonnée de la fonction de $\chi(i)$ pour l'abscisse correspondant à l'annulation de sa dérivée troisième, soit au point d'inflexion dans $g(i)$:

$$\chi_{\text{coude}} = \chi \left(i = \frac{-C}{B} \right) = \frac{-CD}{B} + \frac{A \log(1 + C^2)}{2B} - \frac{AC \arctan C}{B} + 1 \quad (3.142)$$

Les relations 3.139 à 3.142 sont quatre équations non linéaires dont les quatre inconnues sont A, B, C et D . Les quatre critères peuvent donc être rigoureusement remplis à condition de résoudre ce système d'équations non linéaires. Pour ce faire, nous allons utiliser une méthode de Newton-Raphson, avec comme condition initiale :

$$g(i) = \frac{M - m}{\pi} \arctan \left(\frac{i}{2} - \frac{N}{4} \right) + \frac{M + m}{2}$$

soit une fonction $g(i)$ telle que les limites quand $i \rightarrow -\infty$ et $i \rightarrow +\infty$ soient respectivement m et M et que cette fonction présente un point d'inflexion pour $i = \frac{N}{2}$. Le problème est assez mal conditionné mais ce choix de conditions initiales permet d'obtenir de bons résultats¹⁰. Les critères qui permettent de déterminer le quadruplet (A, B, C, D)

¹⁰Pour l'application de la méthode de Newton-Raphson, les dérivées nécessaires à l'estimation du jacobien sont calculées analytiquement.

pour les points d'intégration situés à gauche du pic de résonance sont identiques à ceux qui viennent d'être proposés. L'écriture de ces critères nécessite donc simplement l'un ou l'autre changement de signe.

Lorsque les points d'intégration servant à représenter la fonction de transfert adimensionnelle ont été calculés, il ne reste alors plus qu'à transformer ces grandeurs adimensionnelles en fréquences ou pulsations :

$$f_i = f_{nat}\chi_i \quad (3.143)$$

$$\omega_i = \varpi\chi_i \quad (3.144)$$

La figure 3.32 donne un exemple de résultat obtenu pour la représentation d'une fonction de transfert caractérisée par $\xi = 0.003$ et $\varpi = 1$. Les grandeurs que nous avons imposées sont :

- pour le domaine avant le pic : $M = 0.1, m = \frac{\xi}{8}, \chi_c = 0.9$ et représentation entre 0 et 1 ;
- pour le domaine après le pic : $M = 0.1, m = \frac{\xi}{8}, \chi_c = 1.1$ et $f_{\max} = 3f_n$

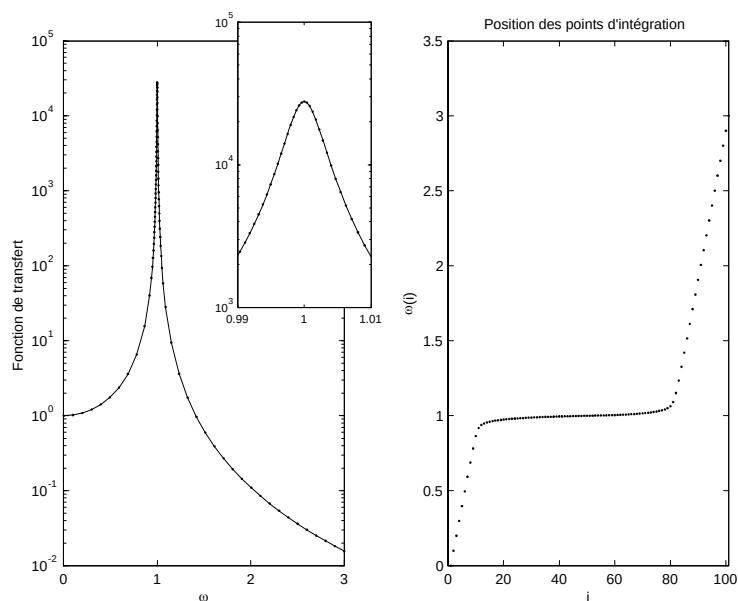


FIG. 3.32 – Représentation optimale de la fonction de transfert à l'aide de $N = 40$ points.

Un zoom dans le voisinage du pic montre que la fonction y est très bien représentée.

On imagine que l'utilisateur de la méthode ne doive idéalement pas recourir à la résolution itérative du système des quatre équations. De plus, si des critères farfelus sont introduits, le système d'équations peut ne pas posséder de solution réelle. Pour s'en convaincre, il suffit d'imaginer que l'utilisateur recherche les paramètres A, B, C et D en imposant $M = m < \frac{f_{\max}}{N}$.

Ces raisons nous ont donc poussé à obtenir une formulation plus simple encore d'application, pour laquelle il suffirait de fournir la fréquence propre, le taux d'amortissement et le nombre de points d'intégration désiré.

Nous avons donc décidé d'abandonner l'imposition des quatre critères présentés ci-avant et de ne conserver que l'imposition de la fréquence maximale (troisième critère). Lorsque les trois paramètres A , B et C sont connus, le paramètre D est alors fixé par la relation 3.141 de sorte que la fréquence maximale soit celle désirée. Nous avons alors de nouveau programmé une méthode d'optimisation, en conservant ces trois premiers paramètres comme variables. L'optimisation porte sur la minimisation de l'erreur commise sur l'intégration numérique de la fonction de transfert.

Dans la suite des développements, nous nous sommes limités à l'utilisation de $N = 50$ points d'intégration pour représenter chacune des deux zones. Aussi, la fréquence maximale représentée sera fixée à $3f_n$.

La fonction objectif doit être écrite après mûre réflexion. En effet, si l'on avait par exemple écrit :

$$F(A, B, C) = \left| \frac{I(A, B, C) - I_{exact}}{I_{exact}} \right| \quad (3.145)$$

le processus itératif d'optimisation (Newton-Raphson à nouveau, mais avec calcul des dérivées numériquement cette fois) aurait certainement du mal à converger. En voici la raison : la minimisation de cette fonction revient à trouver les positions de points d'intégration telles que l'intégrale numérique de la fonction corresponde au résultat exact de l'intégration. Or, nous savons que la fonction à intégrer présente, dans la zone post-pic, une courbure vers le bas suivie d'une courbure tournée vers le haut. De plus, nous savons également que la méthode d'intégration du trapèze sous-estime l'intégrale dans les zones à courbure vers le bas et surestime l'intégrale dans les zones à courbure tournée vers le haut. En regroupant tous ces arguments, nous pouvons facilement imaginer que le processus itératif convergera (ou non !) vers une situation où la sous-estimation dans la zone à courbure vers le bas est parfaitement compensée par la surestimation dans la zone à courbure vers le haut. Ceci ne correspond bien sûr pas à l'objectif escompté ; cette méthode de procéder permet d'obtenir, avec 50 points d'intégration, des valeurs de l'ordre de 10^{-30} pour la fonction objectif. La fonction objectif est certainement bien minimale mais l'optimum ne représente rien.

Pour pallier cet inconvénient, nous avons décidé de définir la fonction objectif par :

$$F(A, B, C) = \alpha \left(\frac{I_1(A, B, C) - I_1}{I_1} \right)^2 + (1 - \alpha) \left(\frac{I_2(A, B, C) - I_2}{I_2} \right)^2 \quad (3.146)$$

Notons que nous avons profité de ce raffinement pour procéder au positionnement du pic en sa position exacte, à savoir $\sqrt{1 - \xi^2}$. I_1 et I_2 représentent respectivement les résultats analytiques de l'intégration entre $\sqrt{1 - \xi^2}$ et le point d'inflexion situé à droite du pic, et entre ce point d'inflexion et une fréquence de $3f_{\max}$. $I_1(A, B, C)$ et $I_2(A, B, C)$ représentent les résultats de l'intégration numérique sur les mêmes domaines. Finalement, $\alpha = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$ est un facteur d'importance qui permet de pondérer les erreurs associées à chacune des parties. Cette nouvelle fonction objectif comporte donc deux termes qui sont toujours positifs ; son utilisation devrait donc permettre d'obtenir, après convergence, la série de points optimalement espacés.

Pratiquement, le calcul de la fonction objectif nécessite la transformation de la série de $N + 1$ points ($i = 0, \dots, N$) en une suite de fréquences comprises entre $\sqrt{1 - \xi^2}$ et $3f_{\max}$. Dans cette série est ensuite intercalée la fréquence correspondant au point d'inflexion de façon à pouvoir estimer plus correctement les intégrales numériques avant et après le pic.

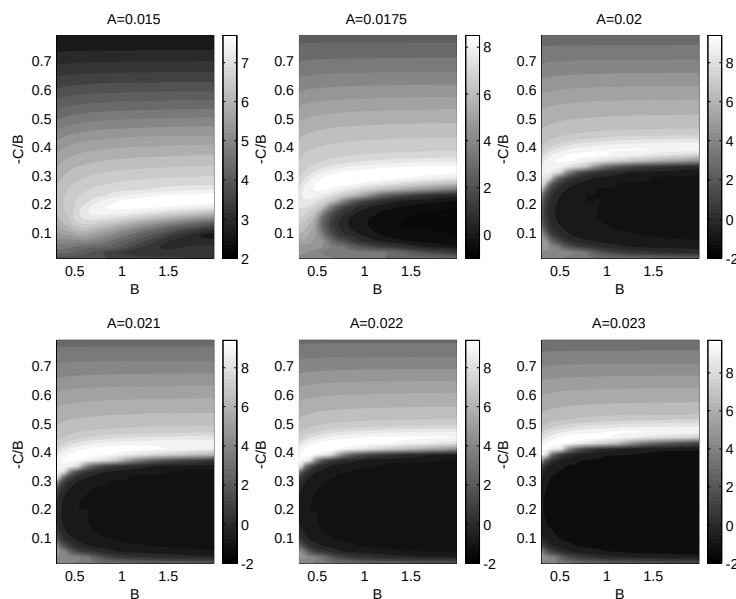


FIG. 3.33 – Fonction objectif ($-\ln(F)$, Eq. 3.146) pour différentes valeurs des paramètres A , B et C ($\xi = 0.01$)

Cette procédure est répétée pour les fréquences après le pic ainsi que pour les fréquences avant le pic, ce qui mène à une représentation de la fonction de transfert à l'aide de $2N + 3 = 103$ points (puisque $\sqrt{1 - \xi^2}$ est commun aux deux séries).

La figure 3.33 représente la fonction objectif ($-\ln(F)$ en réalité¹¹) ainsi calculée en fonction des paramètres A , B et $-C/BN$, plus parlant que le paramètre C puisque $-C/BN$ représente la position relative du point d'inflexion dans la fonction non linéaire étudiée.

Sur cette figure, on peut constater que plus on se rapproche de l'optimum (valeurs de A plus importantes), plus le paramètre B semble jouer un rôle moins important sur la position de l'optimum. Ceci est également confirmé par la figure 3.34 qui représente trois graphiques de contour identiques, indépendants de la valeur donnée au paramètre B .

Sur ces graphiques, on peut également constater (à l'examen des légendes de niveau) que l'erreur commise est plus faible lorsque le paramètre B est plus petit. Nous avons donc décidé de choisir $B = 0.5$ et de conserver cette valeur pour le reste du travail. Une représentation tridimensionnelle de la fonction objectif ($-\ln(F)$) est donnée à la figure 3.35.

Cette fonction présente une crête séparant deux zones à comportements totalement différents : d'un côté, la décroissance est assez lente, une petite imprécision sur le choix des valeurs proches de l'optimum n'influencera pas trop l'erreur commise ; l'autre côté par contre est très escarpé et il est important de ne pas se trouver dans cette zone sous peine de voir se dégrader très rapidement la qualité de l'intégration. Aussi, on peut constater que le niveau de la crête tend vers une asymptote pour des valeurs de $-C/BN$

¹¹L'objectif consistant à viser le minimum de la fonction F revient également à maximiser la fonction $-\ln(F)$

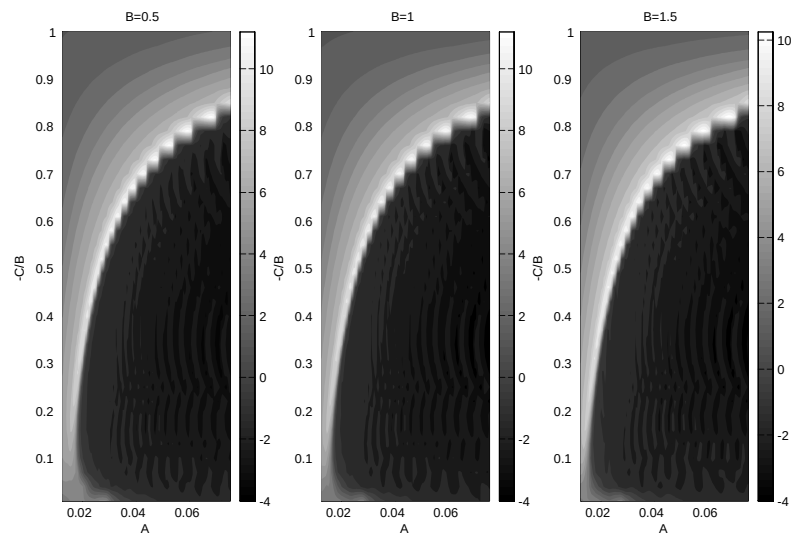


FIG. 3.34 – Illustration de la faible influence du paramètre B sur la fonction objectif $(-\ln(F))$

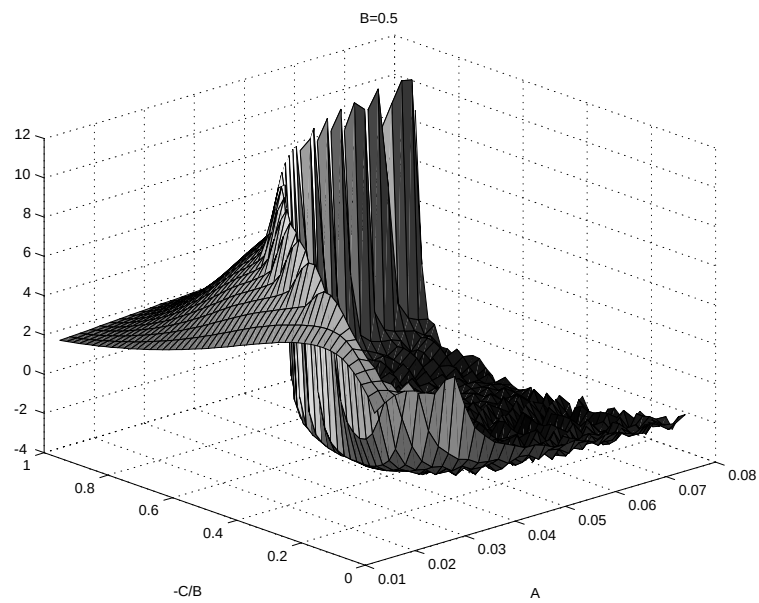


FIG. 3.35 – Représentation de la fonction objectif $(-\ln(F))$ en fonction des paramètres A et C .

croissantes, mais que le niveau de cette crête tend à osciller pour des valeurs trop grandes de $-C/BN$. Cela revient à positionner le point d'inflexion pour des i plus élevés, c'est-à-dire utiliser beaucoup de points dans le voisinage du pic. Ce comportement malsain, bien que donnant avec un peu de chance une meilleure intégration de la fonction, est certainement indésirable. Ce type de comportement est également observable pour d'autres valeurs du taux d'amortissement ξ . Nous avons décidé de fixer la valeur de $-C/BN$ à 0.5, valeur à laquelle aucune oscillation n'est observée, quel que soit le taux d'amortissement choisi.

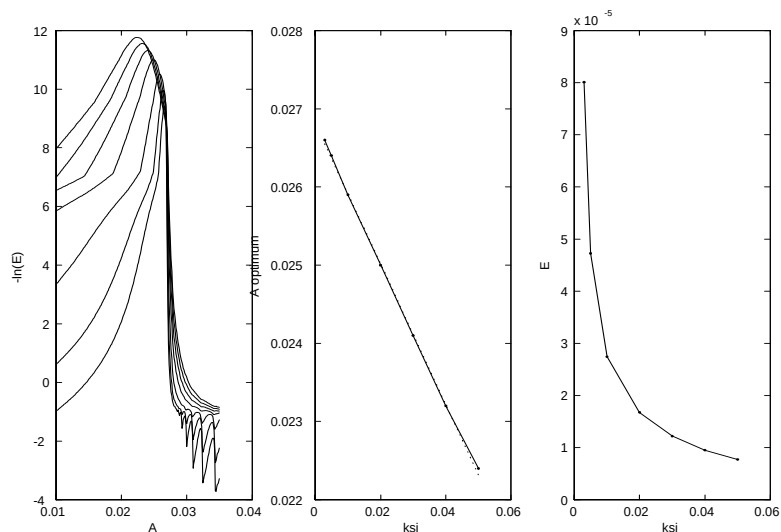


FIG. 3.36 – Evolution de la fonction objectif en fonction du dernier paramètre (A) et précision atteinte.

De tous les paramètres que nous avons gardé, il ne reste donc plus qu'un seul paramètre à faire varier. La figure 3.36 représente (à gauche) la fonction objectif en fonction du paramètre A et pour différentes valeurs du taux d'amortissement. On peut retrouver sur cette courbe le comportement présenté précédemment, à savoir une pente douce d'un côté de la crête et une pente très raide de l'autre. La valeur optimale du paramètre A est celle correspondant au maximum de la fonction. Cette valeur optimale peut être obtenue assez facilement de manière numérique. La figure du centre reprend cette valeur optimale en fonction du taux d'amortissement. Il est assez étonnant de voir que les valeurs optimales se trouvent presque alignées ! Ceci permet d'obtenir par fitting une formulation analytique très simple à donner au paramètre A :

$$A = 9 (2.98 - 10\xi) 10^{-3} \quad (3.147)$$

Avec ce choix de paramètre, la figure de droite reprend, en fonction du taux d'amortissement, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale de la fonction de transfert entre $\sqrt{1 - \xi^2} f_{nat}$ et $3f_{nat}$. On peut constater que l'erreur qui est réalisée est suffisamment petite et qu'il n'est donc nullement nécessaire d'utiliser davantage de points d'intégration.

Des développements similaires peuvent également être entrepris pour le domaine d'in-

tégration $[0; \sqrt{1 - \xi^2} f_{nat}]$ Pour ce domaine, les paramètres à choisir sont :

$$B = 0.5 \quad (3.148)$$

$$-C/BN = 0.5 \quad (3.149)$$

$$A = (1.32 - 7.1\xi) 10^{-2} \quad (3.150)$$

Nous sommes donc maintenant en mesure de représenter la fonction de transfert d'un oscillateur simple sur la gamme de fréquences $[0; 3f_{nat}]$ à l'aide de 103 points d'intégration. Pour terminer, en utilisant les paramètres optimaux que nous avons définis, on peut calculer la véritable erreur commise sur le calcul de l'intégrale. Les résultats de ce calcul sont repris à la figure 3.37 en fonction du taux d'amortissement. On peut y constater que, pour les taux d'amortissement rencontrés en pratique, l'erreur commise est de l'ordre du quart de pourcent, ce qui est tout à fait honorable.

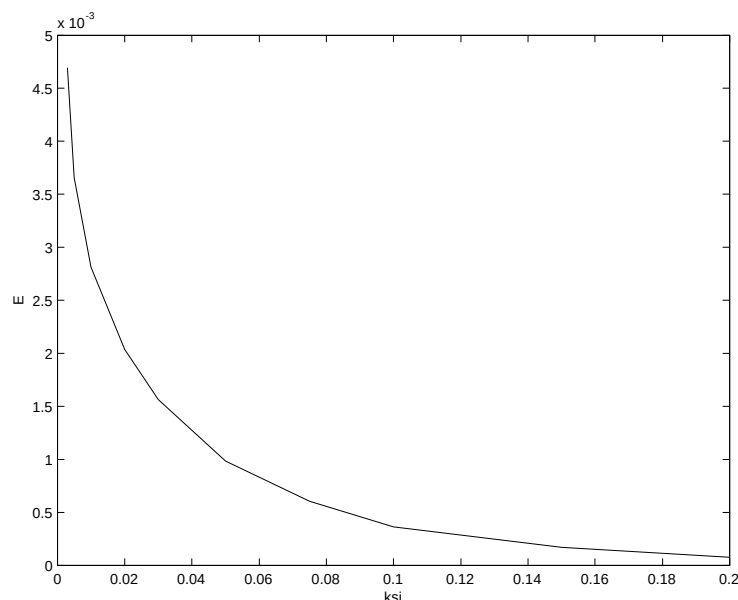


FIG. 3.37 – Erreur commise sur l'estimation de l'intégrale de la fonction de transfert (entre 0 et $3f_n$)

Nous avons annoncé précédemment qu'une faible erreur sur l'intégrale ne permettait pas d'assurer une position optimale des points d'intégration. Avec la nouvelle fonction objectif que nous avons définie, ce problème est évité et nous sommes maintenant certains que la fonction est correctement représentée.

3.7.5 Mise en commun des points d'intégration

Nous venons de mettre au point des stratégies de détermination des fréquences de calcul qui permettent d'obtenir une représentation la meilleure possible de la sollicitation ainsi que de la fonction de transfert. Au terme de ces deux opérations, nous disposons donc de deux séries de fréquences qu'il convient de mettre en commun. Dans le cas de l'analyse d'une structure à plusieurs degrés de liberté, nous aurons autant de séries qu'il

y a de modes propres retenus (M), plus une série pour la sollicitation¹², soit un nombre de $M + 1$ séries de fréquences à mettre en commun. Les nombres de fréquences dans les différentes séries peuvent a priori être différents; appelons n_k le nombre de fréquences dans la $k^{\text{ième}}$ série.

La mise en commun la plus simple qui puisse exister consiste à placer côte à côte l'ensemble des $\sum_k n_k$ fréquences définies indépendamment pour chaque série, puis à les réordonner de façon à former une seule et longue série croissante de $\sum_k n_k$ fréquences. Cette méthode a l'avantage d'offrir des représentations encore meilleures de chacun des modes propres par exemple puisque l'on ajoute encore des points d'intégration aux séries existantes. D'autre part, cette méthode présente le gros inconvénient de nécessiter un nombre de fréquences de calcul assez important. Par exemple, pour une structure nécessitant la conservation de 20 modes propres, le nombre total de fréquences sera : $120 + 20.103=2180$ fréquences de calcul, ce qui est assez élevé.

Nous proposons alors d'utiliser une autre méthode de détermination des fréquences de calcul dont les fondements sont illustrés sur l'exemple suivant. Nous nous proposons d'étudier une structure sollicitée par une densité spectrale de Von Karman ($\bar{U} = 10m/s$; $L = 200m$ représentée par 120 points entre $0Hz$ et $2Hz$) et dont la réponse dans trois modes doit être conservée. Les fréquences et coefficients d'amortissement associés à ces 3 modes sont donnés par :

$$f_1 = 0.35Hz \quad ; \quad f_2 = 0.5Hz \quad ; \quad f_3 = 0.8Hz \quad (3.151)$$

$$\xi_1 = 0.01 \quad ; \quad \xi_2 = 0.02 \quad ; \quad \xi_3 = 0.003 \quad (3.152)$$

Les graphiques de la figure 3.38 illustrent le raisonnement suivi. La première chose à faire consiste à établir, au cas où ce ne serait pas encore réalisé, les séries de fréquences pour chacun des modes ainsi que pour la sollicitation. Connaissant ces quatre séries, on peut en déduire la valeur de l'incrément de fréquence, en fonction de la fréquence. Le graphique en haut à gauche reprend ces quatre courbes pour les quatre séries. On peut y reconnaître la courbe particulière à Von Karman qui indique une augmentation croissante du pas de fréquence; on peut également distinguer les courbes associées à chaque mode qui présentent une diminution dans le voisinage de la fréquence propre, celle-ci étant d'autant plus pointue que le mode est peu amorti.

L'idée de la méthode de mise en commun consiste à établir l'enveloppe inférieure des quatre courbes qui viennent d'être discutées.

Pour ce faire, nous allons repérer, et ce pour chacune des $\sum_k n_k$ fréquences de calcul, la série qui offre le pas de fréquence minimum, c'est-à-dire, la représentation la plus précise. D'un point de vue pratique, ceci est réalisé en constituant le vecteur complet des $\sum_k n_k$ fréquences reprises et en repérant, pour chacune d'elles, le mode dominant, c'est-à-dire, celui offrant le plus petit pas. Le résultat est illustré sur le graphique situé en haut et à droite. On peut voir que le mode dominant est d'abord la sollicitation (mode n°4) puis le premier mode, puis le second, puis de nouveau le premier, etc.

La suite des opérations consiste à repérer les fréquences de changement de mode dominant de sorte à établir une succession d'intervalles de fréquences. Il reste alors à mettre bout à bout les fréquences associées à chaque mode dominant, pour chacun des intervalles trouvés. On obtient ainsi la série de fréquences recherchée. Il est alors possible

¹²Sauf si les sollicitations modales sont représentées indépendamment l'une de l'autre, auquel cas il y a M séries supplémentaires.

de tracer l'évolution du pas de fréquence en fonction de la fréquence ; ceci est représenté sur le graphique en bas à gauche qui représente bien l'enveloppe inférieure des courbes discutées ci-avant. La dernière figure représente la liste des fréquences de calcul ainsi obtenues. Elles sont au nombre de 302, ce qui constitue une économie d'environ 30% par rapport à la mise en commun basique présentée en premier lieu. Sur ce dernier graphique, on peut retrouver l'existence d'un palier au droit de chaque fréquence propre.

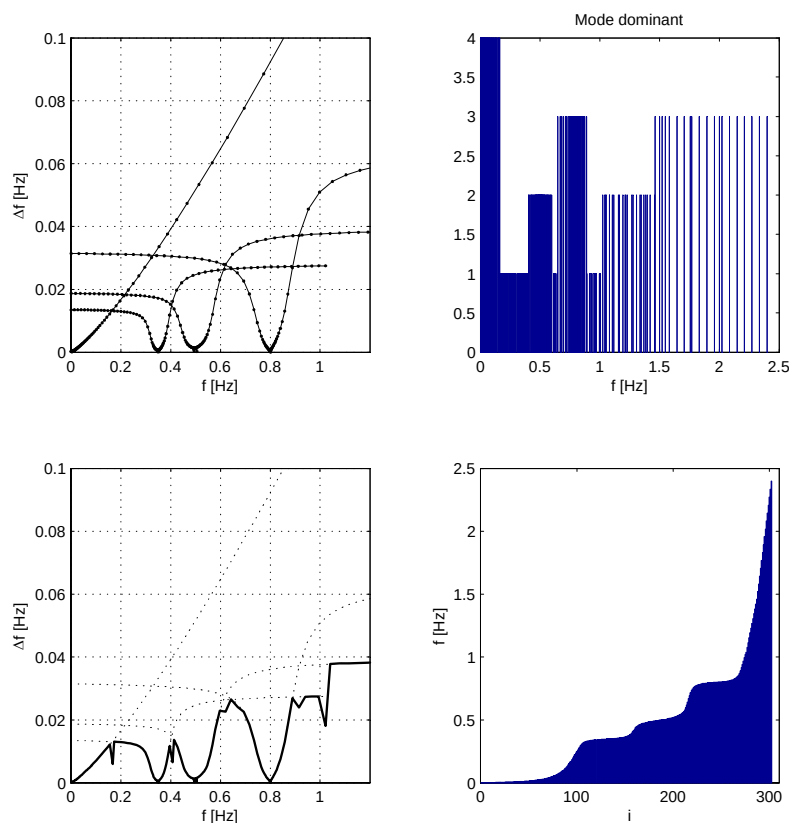


FIG. 3.38 – Illustration de la mise en commun des séries de fréquences

Il va de soi que la méthode présentée ici pour la mise en commun des fréquences issues de séries différentes sera d'autant plus efficace que les modes ont des fréquences propres et des taux d'amortissement proches.

3.8 Application des méthodes au cas du vent

Dans les paragraphes précédents, nous venons de discuter les détails pratiques de l'application d'une analyse stochastique traditionnelle. Les premiers développements ont pu être menés de façon analytique car l'expression de la sollicitation, un processus aléatoire d'Ornstein-Uhlenbeck, était assez simple. Dans les applications pratiques, il va de soi que ces développements doivent impérativement trouver un équivalent numérique.

Etant donné que la clé de la résolution consiste en la détermination des moments spectraux, obtenus par intégration des densités spectrales, l'application numérique la plus

évidente consiste en l'intégration numérique des densités spectrales. Cette opération peut néanmoins être assez consommatrice de temps et nous avons également présenté plusieurs solutions permettant d'obtenir des résultats approchés, mais presque immédiats.

Il serait maintenant intéressant de confronter les résultats que les différentes méthodes présentées peuvent fournir lors d'une analyse stochastique, depuis la détermination de la variance, jusqu'à la détermination des facteurs de pointe.

L'exemple choisi pour la comparaison est celui d'un oscillateur simple, sollicité par un effort dont la forme est celle de la densité spectrale de Davenport :

$$S_F(\omega) = \frac{\beta \sigma^2 |\omega|}{(1 + 3\beta \omega^2)^{4/3}} \quad (3.153)$$

avec $\beta = 50s^2$ et $\sigma = 10kN$. La structure étudiée est de masse unitaire avec une raideur ϖ^2 et un taux d'amortissement ξ variables.

Les quatre méthodes présentées ci-avant seront confrontées et comparées au résultat (supposé) exact obtenu par intégration numérique de la densité spectrale de la réponse, avec un pas suffisamment petit (intégration depuis 0 jusque $100rad/s$ avec un pas de $5.10^{-4}rad/s$).

3.8.1 Approximation en bruit blanc

Au paragraphe 3.4, nous avons déjà calculé, sous l'hypothèse d'approximation en bruit blanc, la variance du déplacement d'un oscillateur simple soumis à un effort caractérisé par une densité spectrale ayant la forme de celle de Davenport :

$$\sigma_{x_{BB}}^2 = \frac{\sigma^2}{\varpi^4} + \frac{\beta \sigma^2 |\varpi|}{(1 + 3\beta \varpi^2)^{4/3}} \frac{\pi}{2\xi \varpi^3} \quad (3.154)$$

Cette méthode revient donc à supposer que la variance du déplacement peut s'exprimer comme la somme de deux composantes. Cette méthode est très attirante dans la mesure où elle est presque immédiate. La plupart des logiciels de calcul de structures soumises au vent, même s'ils disposent d'une méthode d'intégration plus précise telle une intégration numérique, ont (ou devraient en tout cas avoir) également à disposition cette méthode simplifiée. De plus, l'interprétation physique de la variance du déplacement est évidemment plus limpide en concentrant le contenu aux basses fréquences en une seule fréquence très petite, et en concentrant le contenu aux plus hautes fréquences en la seule fréquence naturelle de l'oscillateur. Un résultat intéressant que l'ingénieur devrait calculer est le rapport entre ces deux contributions :

$$\frac{\sigma_{x_{QS}}^2}{\sigma_{x_{DY}}^2} \quad (3.155)$$

Ceci permet de mieux comprendre l'origine de la réponse. Si ce rapport est élevé, une amélioration du comportement structurel ne peut aller de pair qu'avec une diminution de la réponse quasi-statique, c'est-à-dire, par exemple, une amélioration des propriétés aérodynamiques de la section. Par contre, si ce rapport est faible, il serait par contre plus intéressant d'agir sur le taux d'amortissement de la structure, dans la mesure où l'origine du déplacement est alors de type vibratoire.

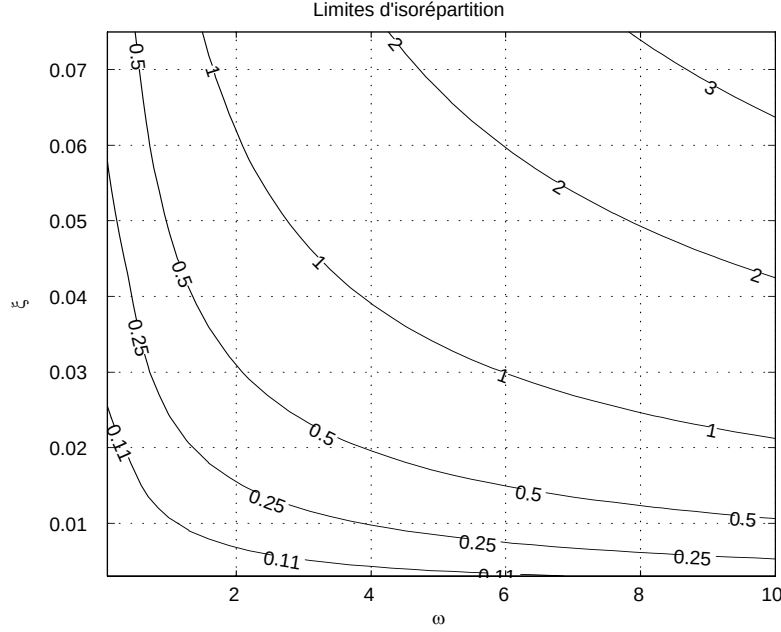


FIG. 3.39 – Courbes de niveau de $\frac{\sigma_{QS}}{\sigma_{DY}}$ pour le chargement étudié

Soit, il nous semble que ce rapport, non seulement simple d'interprétation physique mais aussi immédiat à calculer, puisse servir d'indicateur pour l'interprétation des résultats obtenus ici. La figure 3.39 est une représentation en courbe de niveaux, pour l'exemple étudié, du rapport entre les contributions quasi-statique et dynamique. La courbe d'isorepartition unitaire (la limite d'équirépartition) découpe le plan $(\xi; \varpi)$ en deux zones : la zone située dans le coin supérieur droit correspond à une réponse essentiellement quasi-statique alors que l'autre zone correspond à des oscillateurs souples ou faiblement amortis donnant une réponse essentiellement dynamique.

L'application peut également continuer avec les variances des vitesses et accélérations. Rappelons au passage que, pour ces deux grandeurs, la contribution quasi-statique occupe une place beaucoup moins importante et ne doit pas être calculée. Seule la contribution dynamique est alors conservée :

$$\sigma_{\dot{x}_{BB}}^2 = \frac{\beta \sigma^2 |\varpi|}{(1 + 3\beta \varpi^2)^{4/3}} \frac{\pi}{2\xi \varpi} \quad (3.156)$$

$$\sigma_{\ddot{x}_{BB}}^2 = \frac{\beta \sigma^2 |\varpi|}{(1 + 3\beta \varpi^2)^{4/3}} \frac{\pi \varpi}{2\xi} \quad (3.157)$$

Les formules tout à fait générales rappelées lors de la présentation de la méthode

d'approximation en bruit blanc permettent d'écrire :

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{x_{BB}}^2}{\sigma_{x_{BB}}^2}} = \frac{\varpi}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{2\xi}{\pi\varpi} \frac{(1+3\beta\varpi^2)^{4/3}}{\beta\varpi} + 1}} \quad (3.158)$$

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{x_{BB}}^2}{\sigma_{x_{BB}}^2}} = \frac{\varpi}{2\pi} \quad (3.159)$$

Notons que l'on peut à nouveau retrouver cette caractéristique importante de l'approximation en bruit blanc : $\mu = \frac{\varpi}{2\pi}$. Ces fréquences de passage sont des grandeurs importantes puisqu'elles conditionnent la distribution des maxima relatifs ainsi que celle des maxima extrêmes. Nous avons cependant préféré relever l'erreur commise sur le facteur de pointe dont l'interprétation physique est certainement plus immédiate. Le modèle choisi est celui de Poisson, supposant des passages par les maxima indépendants :

$$g_{BB} = \sqrt{2 \ln(\nu_0^+ T)} + \frac{0.577}{\sqrt{2 \ln(\nu_0^+ T)}} \quad (3.160)$$

La période d'observation T a été fixée à $T = 600s$. Ce facteur de pointe permet d'obtenir une espérance mathématique ("un maximum attendu" pour être plus précis) du déplacement extrême de l'oscillateur pendant la période d'observation :

$$x_{ext_{BB}} = g_{BB} \sqrt{m_0} = g_{BB} \sigma_{x_{BB}} \quad (3.161)$$

La figure 3.40 présente les erreurs relatives commises sur l'estimation de diverses grandeurs lors de l'application de cette méthode. Le graphique en haut à droite est semblable aux graphiques 3.19 et 3.20 qui avaient été tracés pour $\beta = 10s^2$ et $\beta = 100s^2$, celui-ci correspondant cette fois à $\beta = 50s^2$. La forme des courbes de niveau semble assez logique dans la mesure où :

- à taux d'amortissement fixé, l'erreur diminue avec l'augmentation de la pulsation naturelle. Ceci est logique puisque dans ce cas, la contribution quasi-statique (qui, elle, est bien estimée) occupe de plus en plus d'importance vis-à-vis de la contribution dynamique ;
- à pulsation propre fixée, l'erreur augmente en même temps que le taux d'amortissement, ce que nous avons déjà exprimé en présentant l'approximation en bruit blanc comme licite, pour autant que le taux d'amortissement reste assez faible.

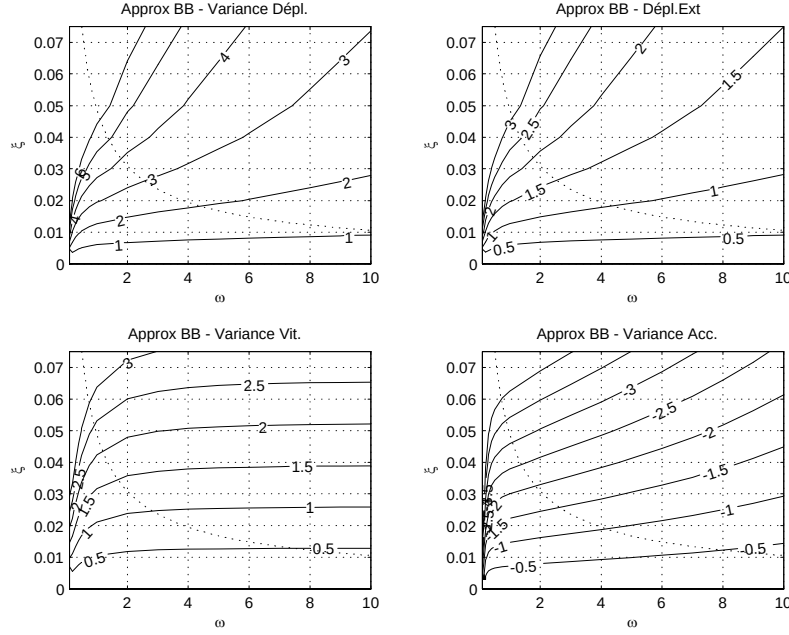


FIG. 3.40 – Erreurs réalisées sur le déplacement, la vitesse et l'accélération obtenus par la méthode d'approximation en bruit blanc.

Il est intéressant de noter que, dans le cadre de cet exemple, l'application de la méthode d'approximation en bruit blanc est sécuritaire : toutes les erreurs commises sont positives. Aussi, les erreurs représentées sur cette figure sont les erreurs commises sur l'estimation des variances des déplacements, approximativement égales au double des erreurs commises sur les écart types, puisque ceux-ci sont obtenus en prenant la racine carrée.

Le graphique situé en haut à droite représente l'erreur commise sur l'estimation du déplacement extrême. Les courbes obtenues ont une forme tout à fait similaire à celles du graphique en haut à gauche, mais avec des niveaux d'erreur approximativement diminués de moitié, c'est-à-dire des niveaux proches de ceux commis sur l'erreur de la variance. Ceci indique que l'erreur commise sur le facteur de pointe semble insignifiante. Pour les ordres de grandeur habituels du nombre de passage par zéro dans la fenêtre d'observation T , on peut démontrer qu'à une erreur ε sur l'estimation de la fréquence de passage par 0 correspond une erreur $\varepsilon/10$ sur l'estimation du facteur de pointe. En effet, l'erreur commise sur une fonction g d'une variable ν imparfaitement déterminée s'exprime par :

$$\varepsilon_g = \frac{g[\nu(1+\varepsilon)] - g[\nu]}{g[\nu]} \quad (3.162)$$

où ε représente l'erreur commise sur la variable ν . Pour des niveaux d'erreur très faibles, cette erreur peut être approchée à l'aide d'un développement en série de Taylor de $g[\nu(1+\varepsilon)]$ autour de $g[\nu]$:

$$\varepsilon_g = \varepsilon \frac{\nu g'[\nu]}{g[\nu]} \quad (3.163)$$

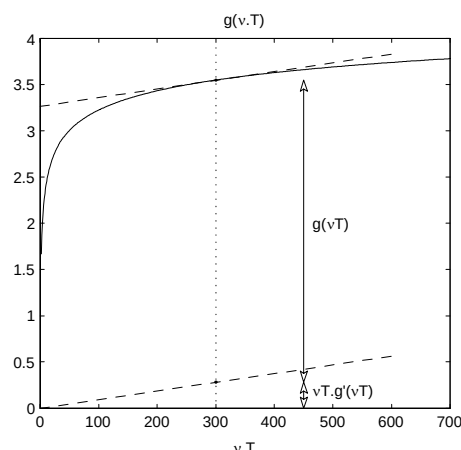


FIG. 3.41 – Illustration graphique de la faible sensibilité du facteur de pointe vis-à-vis d'incertitudes sur la fréquence de passage par zéro.

Puisque nous connaissons l'expression analytique de $g[\nu]$, l'erreur réalisée pourrait donc être calculée. Une interprétation graphique donne cependant une meilleure appréciation. Le graphique 3.41 représente, pour une valeur de νT fixée, les grandeurs $\nu T g'[\nu T]$ et $g[\nu T]$. Leur comparaison est immédiate ; la relation permet aussi de déduire qu'une erreur substantielle sur νT engendre une erreur beaucoup plus petite sur $g[\nu T]$. Nous donnons l'ordre de grandeur 10 à titre indicatif.

La détermination des densités spectrales ou, tout au moins des moments qui y sont associés, constitue une étape importante de l'analyse stochastique d'une structure. Dans une analyse stochastique, les moments spectraux d'ordres supérieurs sont utilisés à deux niveaux. Le premier est l'estimation de la fréquence de passage par 0 avec vitesse positive. Nous venons de démontrer l'inutilité d'estimer cette grandeur avec précision ; il est certain que la méthode de l'approximation en bruit blanc en donne une représentation suffisante.

Le seconde raison pour laquelle les moments spectraux d'ordres supérieurs doivent être calculés concerne les estimations des caractéristiques des vitesses et accélérations. Les critères de dimensionnement d'une structure peuvent également inclure des limites de confort ou d'utilisation de la structure en service. Ces limites sont généralement formulées en termes de vitesses (comprendre ici, variance ou écart type de vitesses ou d'accélération). C'est pour cette seconde raison essentiellement qu'il importe de pouvoir estimer ces grandeurs avec précision.

La figure 3.40 présente également les erreurs réalisées, lors de l'application de l'approximation en bruit blanc, sur les vitesses et accélérations. Nous avons déjà présenté la raison pour laquelle les erreurs commises sur la vitesse et l'accélération sont moindres que celles commises sur le déplacement. La forme assez particulière du mapping de l'erreur commise sur la vitesse peut être interprétée en considérant (comme à la p.50), la vitesse comme le filtrage de la vitesse à laquelle varie l'effort appliqué

$$\omega^2 S_F(\omega) = \frac{\beta \sigma^2 |\omega| \omega^2}{(1 + 3\beta \omega^2)^{4/3}} \quad (3.164)$$

$S_F(\omega)$, comme toutes les densités spectrales de vitesse de vent, se comporte comme

$0.14 \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{-5/3}$ aux hautes fréquences. La densité spectrale de pseudo-sollicitation se comporte donc, aux plus hautes fréquences, comme une racine cubique¹³. Le tracé de cette fonction pour la valeur $\beta = 50$ que nous avons choisie pour l'application numérique, montre effectivement une forte croissance pour des $\varpi < 3$ et puis une stabilisation sur la racine cubique. Nous savons que l'erreur commise sur l'approximation en bruit blanc (dans sa formulation de base) dépend essentiellement des niveaux relatifs de la densité spectrale de sollicitation dans le voisinage du pic et ailleurs. Quelle que soit la pulsation naturelle, pourvu qu'elle soit choisie sur le "plateau", c'est-à-dire être supérieure à $\varpi = 3$, les niveaux relatifs de la densité spectrale de force dans les voisinages de ces pics par rapport au reste de la densité spectrale sont plus ou moins identiques. Ceci justifie la faible importance de la pulsation propre, pour autant qu'elle soit plus grande que $\varpi = 3$, sur l'erreur commise sur la vitesse.

3.8.2 Approche par un processus à corrélation exponentielle

L'application de la seconde méthode au cas d'une analyse au vent turbulent a également déjà été commencée au paragraphe 3.5 (p. 52). Les figures 3.19 et 3.20 sont les équivalents, pour $\beta = 10s^2$ et $\beta = 100s^2$ de la figure 3.42 qui indique la même grandeur obtenue pour $\beta = 50s^2$. Il n'est donc pas illogique de retrouver un comportement intermédiaire. A nouveau, on peut constater que l'erreur commise sur le facteur de pointe est négligeable (puisque les courbes de niveau de la figure en haut à droite sont approximativement deux fois plus basses que celles de la figure en haut à gauche). Dès que les paramètres α et σ du processus d'Orstein-Uhlenbeck équivalent sont identifiés, cette méthode est aussi rapide que l'approximation en bruit blanc ; les variances des déplacements, vitesses, accélération peuvent être estimées analytiquement, et ce, tout autant que les fréquences de passage par 0, par un maximum, ou encore que le facteur de pointe.

Les figures inférieures représentent les erreurs commises sur les estimations de la vitesse et de l'accélération. Les interprétations physique ou géométrique de cette méthode sont indiscutablement plus complexes que celles qui peuvent assez facilement être fournies pour l'approximation en bruit blanc. On peut presque se contenter de constater que cette méthode donne des résultats meilleurs que ceux fournis par l'approximation en bruit blanc, soit une erreur environ deux fois plus petite sur l'estimation de la vitesse. L'accélération obtenue par cette méthode est étonnamment proche de celle fournie par l'approximation en bruit blanc.

¹³Cette densité spectrale ne peut donc en aucun cas représenter un phénomène physique réel. Ceci montre également que la vitesse du vent telle que modélisée habituellement n'est pas un processus dérivable. On ne peut donc donner aucune signification mathématique à "l'accélération de vent", ni à ses dérivées successives d'ordre supérieur d'ailleurs.

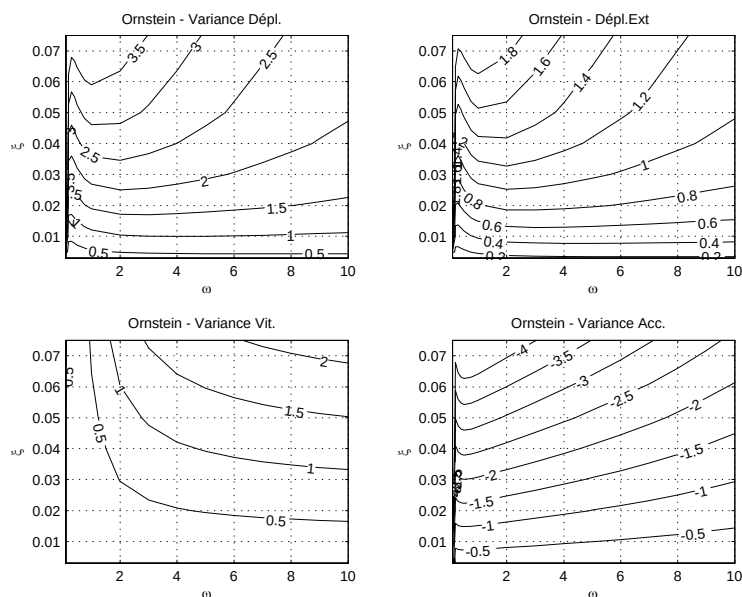


FIG. 3.42 – Erreurs réalisées sur le déplacement, la vitesse et l'accélération obtenus par la méthode d'approximation par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

3.8.3 Décomposition en fonctions-impulsions

La méthode d'intégration semi-analytique consiste à représenter la sollicitation par une fonction variable par paliers. Plusieurs stratégies pourraient être développées pour obtenir une représentation optimale. Etant donné que nous avons déjà fourni un travail considérable sur la bonne représentation de fonctions quelconques et plus particulièrement de densités spectrales de vent, il paraît opportun de tirer parti de ces développements. Nous avons établi une méthode disposant optimalement les fréquences de calcul, de sorte à représenter au mieux l'intégrale d'une densité spectrale de vent (dans cet ouvrage, nous avons limité la présentation à Davenport et Von Karman). La fonction objectif était basée sur une intégration par la méthode du trapèze, ce qui revient à supposer la fonction constante par palier, avec pour valeur sur chaque palier, la moyenne des ordonnées aux extrémités de l'intervalle.

Nous avons donc décidé d'utiliser ces points d'intégration et de prendre pour la valeur de chaque palier, non pas l'ordonnée au milieu de l'intervalle mais plutôt la moyenne des ordonnées en ses extrémités¹⁴. La figure 3.43 illustre la décomposition de la densité spectrale de la sollicitation pour différents nombres de bandes de fréquence considérées. Pour permettre une meilleure représentation, la pulsation maximale représentée est limitée à 1rad/s. Il va de soi qu'en pratique, cette pulsation maximale est plus importante (cf critères §6.4).

La figure 3.44 représente le résultat d'une étude de convergence sur le nombre de zones utilisées. Pour cette application, les caractéristiques de l'oscillateur sont $\varpi = 5\text{rad/s}$ et

¹⁴Ceci permet donc de représenter au mieux l'intégrale de la densité spectrale de la sollicitation. Aucune conclusion ne peut cependant être tirée concernant la densité spectrale de la réponse, ce qui reste tout de même l'objectif de l'analyse.

$\xi = 0.03$. Pour différentes valeurs du nombre de zones, cinq grandeurs statistiques sont calculées : variance du déplacement, variance de la vitesse, fréquence de passage par zéro, facteur de pointe et déplacement extrême. Dans chacun des cas, les fréquences de calcul sont réparties de façon optimale entre $\omega = 0$ et $\omega = 3\varpi = 15rad/s$. Afin de s'affranchir de l'erreur de troncature commise en n'intégrant que jusque cette fréquence maximale, les cinq grandeurs statistiques qui ont été obtenues pour chaque nombre de zones étudié ont été rapportées aux cinq grandeurs associées obtenues en utilisant 750 points d'intégration répartis de façon optimale entre $\omega = 0$ et $\omega = 15rad/s$.

La figure 3.44 montre que la grandeur statistique dont la convergence est la moins bonne est la variance de la vitesse, et donc par conséquent aussi la fréquence de passage par zéro. On peut néanmoins constater qu'utiliser 120 points d'intégration comme nous le recommandons pour la représentation des densités spectrales de vitesse de vent permet de limiter l'erreur à 0.1%, ce qui paraît suffisant comme précision. Cette méthode d'intégration semi-analytique semble donc être assez intéressante dans la mesure où un nombre réduit de points d'intégration suffit à la bonne représentation de la réponse.

Tout comme pour les deux premières méthodes, une étude paramétrique de la qualité des résultats obtenus par cette méthode a été entreprise. Les résultats sont présentés à la figure 3.45. Ils ont été obtenus en conservant 120 zones d'intégration, soit 121 points d'intégration répartis de façon optimale entre $\omega = 0$ et $\omega = 30\pi rad/s \simeq 95rad/s$; cette optimisation concerne la meilleure représentation de la densité spectrale de Davenport. Contentons-nous par exemple d'analyser uniquement la variance des déplacements. Cette figure semble indiquer un scénario dual : si le taux d'amortissement est supérieur à $\xi = 0.03$ la méthode semble fiable et l'erreur commise est très petite ; si le taux d'amortissement est inférieur à cette limite, l'erreur est négative (la variance est sous-estimée) et peut monter jusqu'à 2% d'écart.

Ce type de comportement provient d'une mauvaise représentation de la sollicitation dans le voisinage du pic de résonance. L'auteur présente en réalité la méthode comme s'il n'y avait plus besoin que de se tracasser de la représentation de la sollicitation. Il n'est en cependant pas tout à fait ainsi. Ceci est illustré à la figure 3.46 qui compare la densité spectrale exacte de la réponse d'un oscillateur ($\varpi = 2\pi, \xi = 0.003$) à celle qui correspond à la méthode d'intégration semi-analytique, c'est-à-dire en supposant la sollicitation variable par paliers. Comme pour l'étude paramétrique présentée ci-dessus, cette sollicitation a été représentée à l'aide de 120 points espacés de manière optimale entre $\omega = 0$ et $\omega = 30\pi rad/s \simeq 95rad/s$ ¹⁵. Cette façon de sélectionner les fréquences de calcul, sans se préoccuper de l'oscillateur étudié, débouche sur une représentation de la réponse à l'aide de fréquences de plus en plus espacées.

Aux basses fréquences, le pas est très petit. Même si la fonction est représentée par palier, elle donne tout de même un bon résultat au niveau de son intégration. En effet, nous savons que l'intégrale de la sollicitation est bien représentée. Or, pour obtenir la densité spectrale de la réponse, la densité spectrale de l'effort a été multipliée par la fonction de transfert qui possède une tangente horizontale dans le voisinage de l'origine. En toute logique, l'intégrale aux basses fréquences est toujours bien représentée.

Aux plus hautes fréquences, et en particulier dans le voisinage du pic de résonance, les intervalles séparant les fréquences représentatives sont plus longs. On obtient par

¹⁵Nous justifierons au paragraphe suivant la nécessité de devoir intégrer jusqu'à une fréquence aussi élevée.

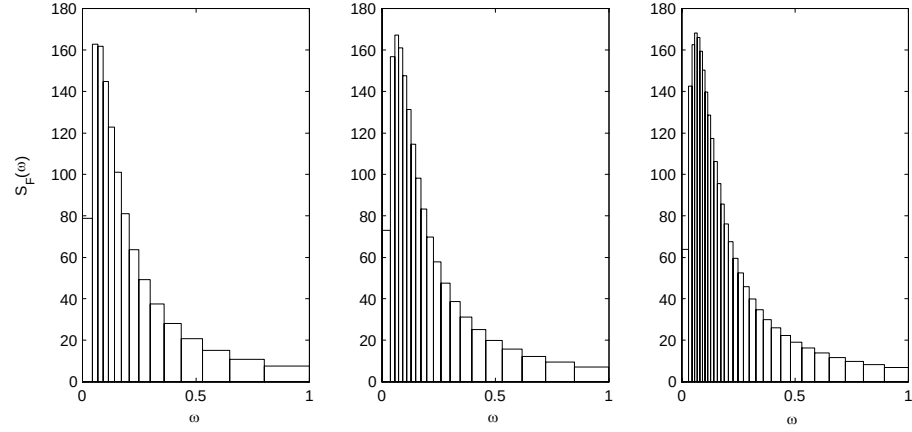


FIG. 3.43 – Décomposition de la densité spectrale de Davenport pour une approche en somme de fonctions-impulsions ($N = 15, 20$ ou 30 bandes)

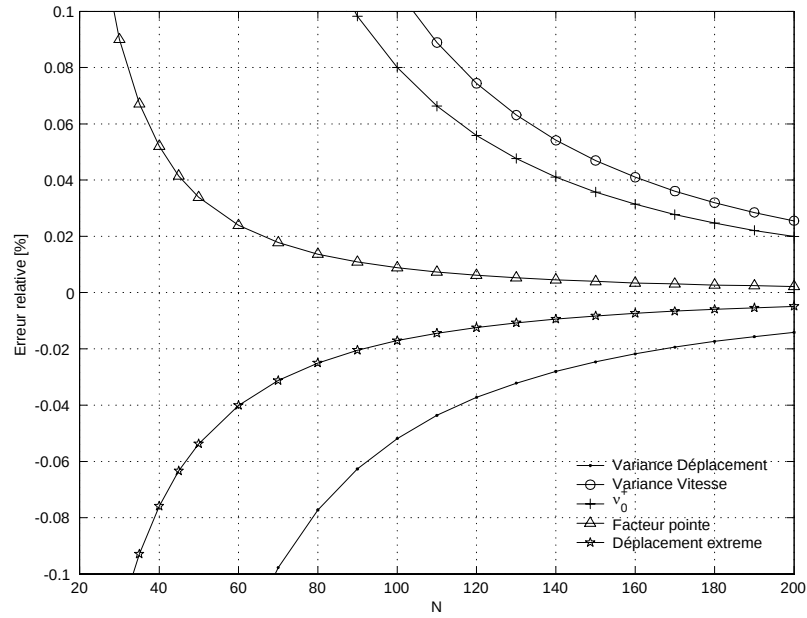


FIG. 3.44 – Etude de la précision de la méthode d'intégration analytique en fonction du nombre de bandes ($\varpi = 5 \text{ rad/s}$, $\xi = 0.03$)

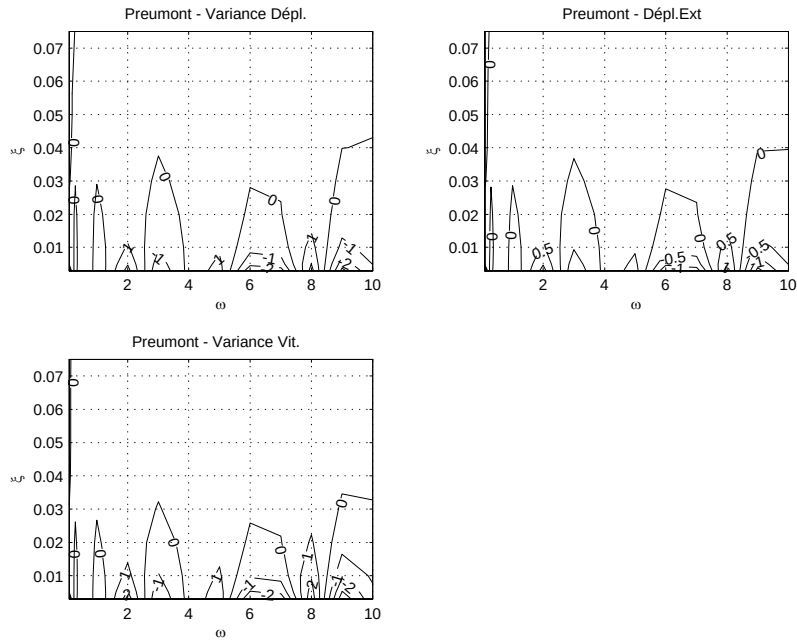


FIG. 3.45 – Erreurs réalisées sur le déplacement, la vitesse et l'accélération obtenus par la décomposition en fonctions-impulsions ($N = 120$ bandes)

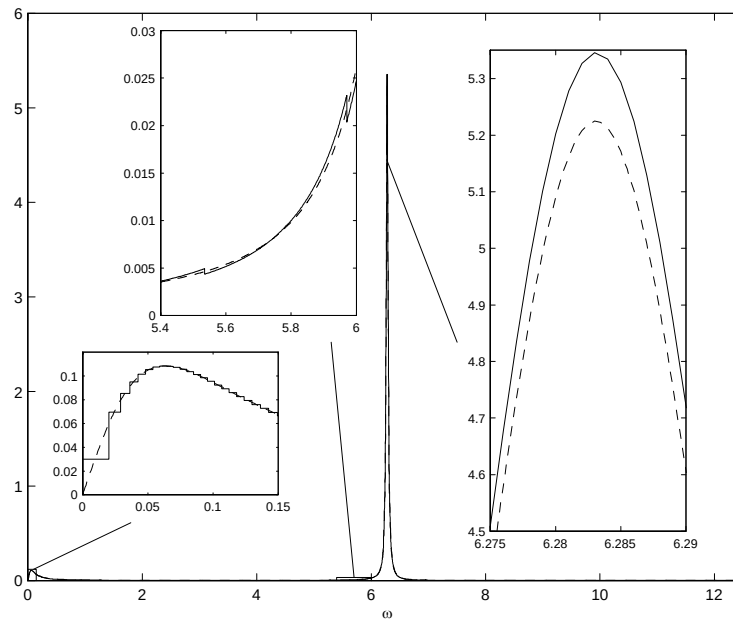


FIG. 3.46 – Illustration du mauvais comportement de la méthode de décomposition en somme de fonctions-impulsions pour les faibles taux d'amortissement.

exemple, dans ce cas concret d'application, des intervalles de $0.4Hz$. Il n'est guère besoin de préciser que, pour un taux d'amortissement aussi petit que le taux d'amortissement choisi, un seul pas de fréquence aussi grand que celui-là peut englober tout le pic de résonance. Ainsi que l'indique l'agrandissement dans le voisinage du pic, la sollicitation ne peut en tout rigueur plus être représentée par une fonction constante par morceaux. Malgré la petite taille de la zone considérée, ceci peut justifier l'ordre de grandeur de l'erreur commise (~ 1 à 2%).

Il apparaît donc nécessaire de devoir raffiner la représentation de la sollicitation dans le voisinage du pic de résonance. Pour ce faire, nous avons finalement mis en oeuvre la méthode de détermination des fréquences de calcul présentée au paragraphe 3.7.3, c'est-à-dire ajouté des fréquences pour la bonne représentation de la fonction de transfert de l'oscillateur simple puis mis en commun les deux séries obtenues. La figure 3.47 montre que les erreurs relatives commises en utilisant tous ces points d'intégration sont ridiculement petites.

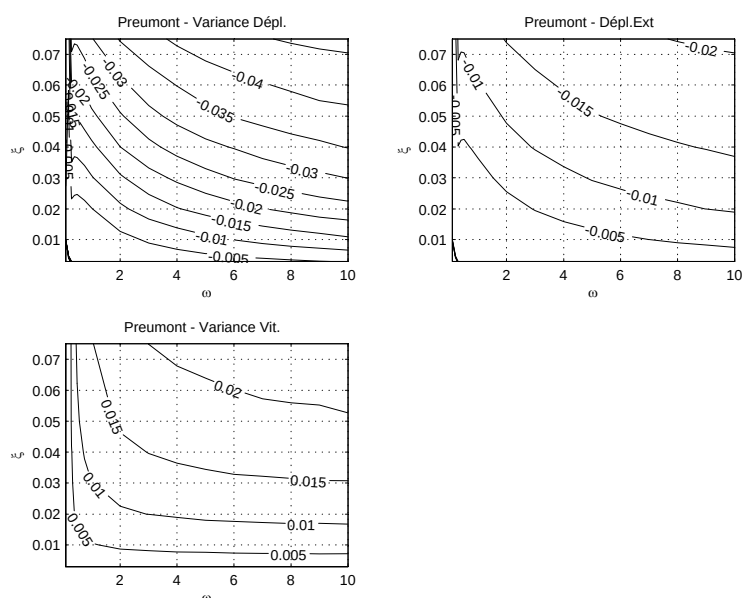


FIG. 3.47 – Erreurs réalisées sur le déplacement, la vitesse et l'accélération obtenus par la décomposition en fonctions-impulsions ($N = 323$ bandes)

En recourant à un nombre de points d'intégration qui permet a priori de représenter correctement le résultat à l'aide d'une méthode d'intégration numérique (la démonstration arrive au paragraphe suivant), la méthode d'intégration semi-numérique perd évidemment de son attraction. En fait, nous n'avons considéré que deux cas extrêmes :

- soit uniquement les points d'intégration nécessaires à la représentation de la sollicitation, soit 120 fréquences ;
- soit les points précédents auxquels sont ajoutés les points nécessaires à la représentation de la fonction de transfert, soit un total de 323 fréquences.

Pour rendre davantage d'intérêt à cette méthode d'intégration semi-numérique, il faudrait montrer qu'elle peut donner de bons résultats avec un nombre de points d'inté-

gration intermédiaire, ce que laisse supposer le faible niveau d'erreur obtenu en utilisant le plus grand nombre de points d'intégration.

3.8.4 Intégration numérique optimale

Au paragraphe précédent, nous avons présenté la démarche à suivre pour obtenir les fréquences de calcul optimales pour la bonne représentation de la distribution fréquentielle du contenu énergétique. Nous allons maintenant appliquer la méthode développée afin de mettre en évidence ses limitations. Commençons, comme cela a été présenté ci-avant, par représenter la fonction de transfert de l'oscillateur par ses 203 fréquences représentatives. Ces fréquences sont comprises entre $\omega = 0$ et $\omega = 3\varpi = 15\text{rad/s}$. Une seconde série de 120 fréquences représentatives de la sollicitation peuvent également être ajoutées. Etant donné que le contenu fréquentiel de la sollicitation supérieur à 3ϖ est filtré par le système à un degré de liberté, ces 120 fréquences sont, dans un premier temps, choisies dans le même intervalle $[0; 3\varpi]$.

La figure 3.48 est l'équivalent, pour cette méthode d'intégration, des figures 3.40, 3.42 et 3.47. On peut constater que la méthode telle qu'elle a été présentée donne d'excellentes estimations des variances des déplacements ainsi que des déplacements extrêmes. La précision sur la vitesse est encore acceptable ; par contre, la précision sur l'accélération laisse à désirer. La raison de cette imprécision provient d'une erreur de troncature. Jusqu'à ce point, nous avons toujours supposé que la quantité d'énergie qu'un oscillateur simple pouvait laisser passer au-dessus de trois fois sa pulsation propre était négligeable. Ceci est effectivement d'application en ce qui concerne les déplacements, mais doit être sérieusement revu pour l'extension aux vitesses et accélérations.

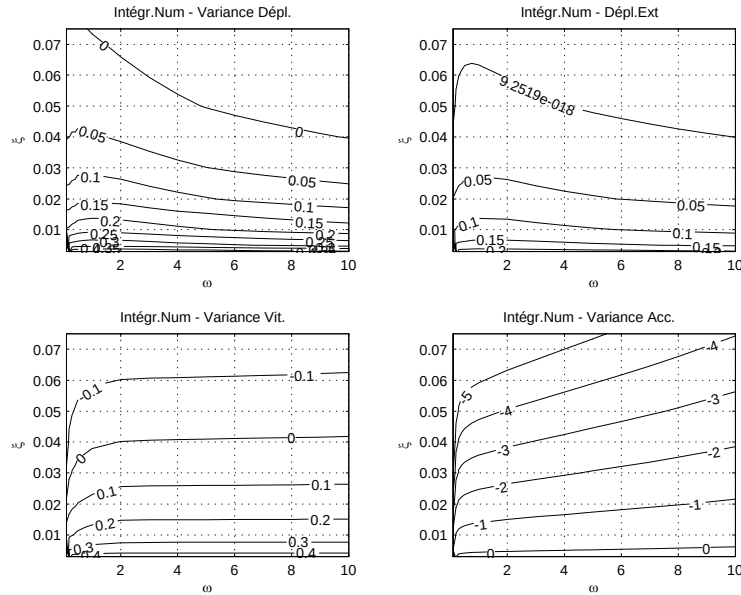


FIG. 3.48 – Erreurs réalisées sur le déplacement, la vitesse et l'accélération obtenus par l'intégration numérique développée

Etant donné que le problème est plus important pour les accélérations, nous allons

exposer la solution en raisonnant sur ces accélérations. La variance de l'accélération est obtenue en intégrant la densité spectrale d'accélération. Cette densité spectrale est obtenue en multipliant celle du déplacement par ω^4 . Ceci revient à utiliser une nouvelle fonction de transfert exprimée par $\omega^4 H(\omega)$. Contrairement à la fonction de transfert habituelle $H(\omega)$, cette nouvelle fonction de transfert possède une tangente horizontale d'ordonnée nulle à l'origine et, aux hautes fréquences, une asymptote horizontale égale à $\frac{1}{M^2}$, l'inverse du carré de la masse de l'oscillateur. L'existence d'une telle asymptote indique que l'entièreté du contenu aux hautes fréquences de la sollicitation se retrouvera dans l'accélération de l'oscillateur. Il va donc de soi que le critère de troncature à choisir soit uniquement établi en considérant la sollicitation. Ce critère sera étudié dans la suite (§ 6.4). Dans le cas d'une densité spectrale de Von Karman, nous verrons qu'il est au moins nécessaire de représenter la sollicitation jusqu'à une fréquence de $15Hz$.

Nous avons donc décidé de modifier la série de fréquences correspondant à la sollicitation. Afin de ne pas augmenter le temps de calcul, nous continuerons d'utiliser 120 fréquences, mais cette fois réparties entre $\omega = 30\pi rad/s \simeq 95rad/s$. Ceci revient donc à redistribuer vers le haut des fréquences qui se trouvaient en-dessous de $15rad/s$. Cette redistribution se fait de manière tout à fait aveugle, par la méthode d'optimisation analytique qui conseille alors d'utiliser 105 points en-dessous de $15rad/s$ et 15 points au-delà. La disposition des fréquences dans le voisinage de l'origine est fort peu modifiée, si bien que la représentation globale de la fonction reste très bonne. Ceci conforte d'une part le sentiment que 120 points étaient plus que suffisants pour représenter la fonction sur $[0; 15]rad/s$ et d'autre part démontre la robustesse de l'algorithme vis-à-vis d'éventuels étirements inattendus du domaine d'intégration.

La figure 3.49 présente les erreurs obtenues à l'aide de la méthode d'intégration numérique moyennant cette petite modification. Il ne reste qu'à constater que la précision rejoint la cible que nous nous étions fixée, soit l'ordre du pour mille.

3.9 Conclusions

Nous avons présenté, dans ce chapitre, différentes méthodes d'application de l'analyse stochastique d'un oscillateur simple soumis à un chargement aléatoire stationnaire.

Les premiers développements que nous avons présentés relevaient d'une approche analytique de la réponse du système simple étudié. Outre la présentation de la méthodologie à suivre pour une analyse stochastique, les développements de ce premier paragraphe visaient également à l'obtention d'une formulation analytique relativement simple de la réponse d'un oscillateur soumis à un processus aléatoire à corrélation exponentielle (Ornstein-Uhlenbeck). L'éventail des grandeurs statistiques obtenues est exhaustif et s'étend de la variance de la réponse à l'estimation de ses valeurs extrêmes.

Etant donné que les applications réalistes que nous devons traiter présentent une formulation analytique plus compliquée (ne serait-ce que les formes des densités spectrales de Von Karman, Davenport, ...), il ne fait nul doute que les applications moins académiques doivent passer par une approche numérique. Cela signifie donc que les densités spectrales doivent alors être intégrées numériquement pour pouvoir obtenir une expression précise des variances. A cet effet, nous avons présenté une méthode d'intégration particulièrement efficace, basée sur un schéma d'intégration à pas simple mais dont la particularité réside dans la disposition optimale des points d'intégration. Les développe-

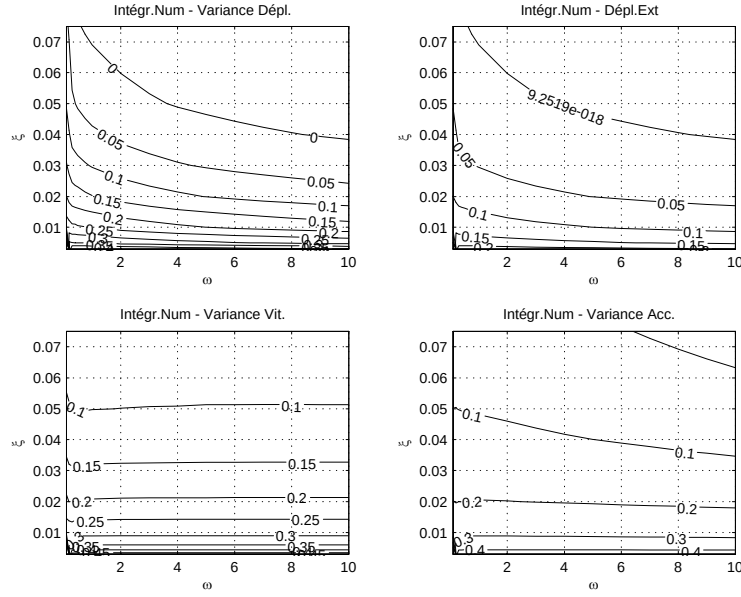


FIG. 3.49 – Erreurs réalisées sur le déplacement, la vitesse et l'accélération obtenus par l'intégration numérique développée (modifiée pour prendre en compte de façon plus précise le comportement inertiel aux hautes fréquences)

ments qui ont mené à l'obtention de la méthode retenue sont assez longs mais en font un algorithme bien réfléchi et étonnamment robuste. La simple connaissance de la fréquence propre de l'oscillateur et de son taux d'amortissement permettent d'obtenir la disposition optimale des points d'intégration.

Il peut être éventuellement intéressant de concéder une certaine précision sur le calcul de l'intégrale à condition d'obtenir une approche numérique plus rapide. C'est ce que conseille l'approximation en bruit blanc généralement appliquée dans le domaine étudié. Cette seconde approche numérique est particulièrement attractive dans la mesure où elle ne nécessite l'estimation des densités spectrales que pour deux seules valeurs (dont la variance en réalité). En outre, l'approche analytique que nous avons donnée au premier paragraphe nous a permis d'élaborer une troisième approche numérique. Celle-ci consiste à remplacer la sollicitation appliquée, non plus par un bruit blanc, mais bien par un processus à corrélation exponentielle. Nous disposons donc ainsi de deux paramètres et non plus un seul pour représenter le mieux possible la sollicitation appliquée. Cette méthode ne demande pas d'effort supplémentaire par rapport à l'approximation en bruit blanc et fournit des résultats légèrement plus précis. Nous avons également mentionné une quatrième approche numérique qui consiste à remplacer la densité spectrale de la sollicitation par une succession de fonctions-impulsions. Cette méthode est intermédiaire entre les deux extrêmes numériques présentés, tant du point de vue de la philosophie que de la précision et de la rapidité offertes.

Dans un ultime paragraphe, nous avons réalisé une étude comparative des précisions offertes par chacune de ces méthodes. Il nous semble qu'au terme de ce premier chapitre, les interprétations physiques (voire topologiques) de chacune des méthodes présentées

devraient être évidentes.

Chapitre 4

Approche fréquentielle exacte

"Il est prouvé que fêter les anniversaires est bon pour la santé. Les statistiques montrent que les personnes qui en fêtent le plus deviennent les plus vieilles."

S. DEN HARTOG, Ph D. Thesis University of Groningen

4.1 Introduction

Pour rappel, après avoir supprimé les termes d'excitation paramétrique et d'amortissement non linéaire (que nous traiterons, vu leur caractère assez spécifique dans un chapitre ultérieur), la forme de l'équation du mouvement se réduisait à :

$$\ddot{x}(t) + 2\omega\xi\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = \gamma [\bar{U} + u(t)]^2 \quad (4.1)$$

où $\xi = \frac{C + \rho C_d A \bar{U}}{2\sqrt{KM}}$ regroupe l'amortissement structural et la partie visqueuse de l'amortissement aérodynamique. $\bar{U}$ et $u(t)$ représentent respectivement la vitesse moyenne du vent et la composante turbulente. Dans le contexte de la théorie des signaux et des systèmes, le système caractérisé par la relation 4.1 est non linéaire dans la mesure où l'entrée du système $u(t)$ est élevée au carré avant d'être introduite dans le filtre linéaire de second ordre. Au chapitre précédent, nous avons appliqué une linéarisation stochastique, ce qui a permis de rendre linéaire l'entièreté de ce système. La solution consistait in fine à supprimer le terme en $u^2(t)$.

La connaissance des caractéristiques statistiques du processus aléatoire $u^2(t)$ semble être la seule étape différente de la résolution. En effet, étant donné que la structure étudiée est toujours linéaire, la méthode d'analyse au second ordre, basée sur les densités spectrales, que nous avons présentée au chapitre précédent est toujours d'application. La seule difficulté consistera en l'établissement de la densité spectrale associée au terme supplémentaire de la sollicitation $u^2(t)$.

Le nouveau processus aléatoire de sollicitation $\gamma [\bar{U} + u(t)]^2$ est obtenu en élevant au carré un processus aléatoire gaussien et ne possède donc plus cette caractéristique avantageuse. Nous verrons également que des développements supplémentaires sont nécessaires pour pouvoir déterminer les caractéristiques d'ordres supérieurs de la réponse (qui est donc aussi non gaussienne).

Afin de simplifier les interprétations physiques mais surtout afin de cerner l'entière des comportements que l'on pourrait rencontrer, nous allons dans un premier temps mener des développements analytiques, en supposant que la composante turbulente du vent peut être caractérisée par un processus aléatoire à corrélation exponentielle. Pour rappel, ce processus est le processus autorégressif le plus simple qui soit ; il est obtenu par le filtre suivant :

$$\frac{du(t)}{dt} = -\alpha u(t) + \sigma_u \sqrt{2\alpha} \frac{dB(t)}{dt} \quad (4.2)$$

Après cette première approche analytique, nous présenterons des méthodes numériques, similaires aux quatre méthodes numériques présentées au chapitre précédent, qui permettront d'établir les caractéristiques d'ordre 3 et plus des réponses de structures soumises à des densités spectrales de sollicitation quelconques.

On peut comprendre dès à présent que le terme qui est responsable de la non gaussianité de la sollicitation est le terme de chargement quadratique (terme en $u^2(t)$). La réponse de la structure sera donc également d'autant moins gaussienne que ce terme de chargement est important. En termes statistiques, ceci s'exprime par le fait que l'écart type de la composante turbulente du vent σ_u est grand vis-à-vis de la vitesse moyenne $\bar{U}$. Il n'est donc pas illogique de retrouver, tout au long de ce chapitre, l'intensité de la turbulence, définie par $I_u = \sigma_u / \bar{U}$, comme un des paramètres les plus importants.

Avant de nous plonger directement dans les mathématiques de la dynamique des phénomènes non gaussiens, nous allons d'abord présenter quelques notions élémentaires concernant les moments de variables aléatoires et puis les fonctions moments des processus aléatoires. A la suite de ces deux paragraphes, nous serons en mesure d'aborder l'étude des caractéristiques (en termes de fonctions moments) d'ordres supérieurs de la réponse d'une structure soumise à une sollicitation non gaussienne.

4.2 Caractéristiques de variables aléatoires

4.2.1 Moments

Soit la variable aléatoire u représentant par exemple la vitesse du vent observée en un point de l'espace et à un instant donné. Nous supposons que la densité de probabilité de cette variable aléatoire est de type gaussienne :

$$p_u(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.3)$$

La fonction caractéristique associée à une densité de probabilité est sa transformée de Fourier :

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta u} p_u(u) du \quad (4.4)$$

La décomposition en série de Taylor de cette fonction donne :

$$\begin{aligned}
 M(\theta) &= M(0) + \frac{\theta}{1!} \frac{dM}{d\theta} \Big|_{\theta=0} + \frac{\theta^2}{2!} \frac{d^2M}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} + \frac{\theta^3}{3!} \frac{d^3M}{d\theta^3} \Big|_{\theta=0} \\
 &\quad + \frac{\theta^4}{4!} \frac{d^4M}{d\theta^4} \Big|_{\theta=0} + \dots \\
 &= 1 + i\theta \int_{-\infty}^{+\infty} u p_u(u) du + \frac{1}{2} i^2 \theta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 p_u(u) du \\
 &\quad + \frac{1}{6} i^3 \theta^3 \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 p_u(u) du + \dots
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Les coefficients intervenant dans ce développement en série font intervenir les moments statistiques. Leur définition exacte est, pour le moment d'ordre j :

$$m_j = \frac{1}{i^j} \frac{d^j M}{d\theta^j} \Big|_{\theta=0} \tag{4.6}$$

Les moments s'interprètent donc comme les dérivées successives de la fonction caractéristique dans le voisinage de l'origine. Au vu des relations 4.5, on comprend que ces moments sont plus généralement estimés par :

$$m_j = \int_{-\infty}^{+\infty} u^j p_u(u) du \tag{4.7}$$

Cette relation permet en effet de calculer les moments sans pour autant recourir à l'estimation de la fonction caractéristique. De cette définition, il découle immédiatement que le moment d'ordre 1 correspond à la moyenne, le moment d'ordre 2 correspond au carré moyen, etc.

La fonction caractéristique de la variable aléatoire gaussienne s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 M(\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du \\
 &= e^{i\theta(\frac{1}{2}i\theta\sigma^2 + \mu)} = e^{-\frac{\theta^2\sigma^2}{2}} (\cos \mu\theta + i \sin \mu\theta)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Le développement en série de cette relation donne :

$$\begin{aligned}
 M(\theta) &= 1 + i\mu\theta + (\mu^2 + \sigma^2) \frac{(i\theta)^2}{2} + (\mu^3 + 3\mu\sigma^2) \frac{(i\theta)^3}{6} \\
 &\quad + (\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4) \frac{(i\theta)^4}{24} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Cette relation permet d'identifier les premiers moments de la variable aléatoire gaussienne :

$$\begin{aligned}
 m_0 &= 1 \\
 m_1 &= \mu \\
 m_2 &= \mu^2 + \sigma^2 \\
 m_3 &= \mu^3 + 3\mu\sigma^2 \\
 m_4 &= \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

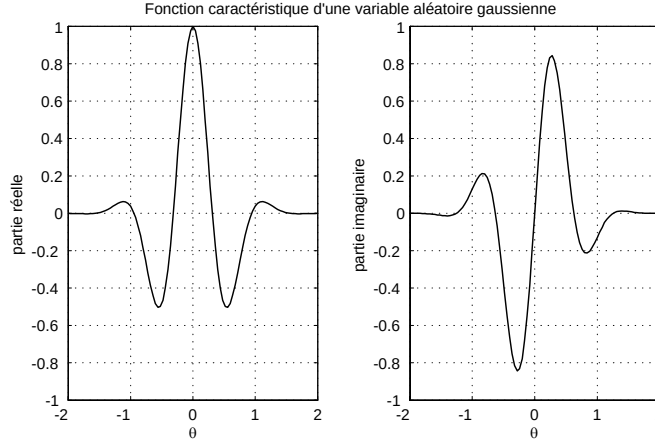


FIG. 4.1 – Fonction caractéristique d'une variable aléatoire gaussienne

Notons que ces expressions des moments auraient pu être obtenues plus simplement par intégration de la densité de probabilité (4.7). Dans le cas d'une variable aléatoire gaussienne, la connaissance des deux premiers moments permet d'identifier les paramètres μ et σ , moyenne et écart type, et donc ainsi de déduire les valeurs des moments d'ordres supérieurs. C'est pour cette raison qu'une variable aléatoire gaussienne est entièrement caractérisée par ses deux premiers moments.

L'interprétation que l'on peut faire des moments ainsi définis est généralement limitée et l'on préfère généralement utiliser les moments centrés :

$$\tilde{m}_j = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - m_1)^j p_u(u) du \quad (4.11)$$

qui permettent de caractériser la variable autour de sa moyenne. Ces nouvelles grandeurs peuvent s'exprimer en fonction des moments :

$$\tilde{m}_1 = 0 \quad (4.12)$$

$$\tilde{m}_2 = m_2 - m_1^2 \quad (4.13)$$

$$\tilde{m}_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 \quad (4.14)$$

$$\tilde{m}_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4 \quad (4.15)$$

Ces grandeurs sont généralement rendues adimensionnelles en les normalisant par rapport au moment centré d'ordre 2 :

$$\gamma_j = \frac{\tilde{m}_j}{(\tilde{m}_2)^{\frac{j}{2}}} \quad (4.16)$$

D'après cette définition, il va de soi que ces coefficients ne sont intéressants qu'à partir de l'ordre 3 ; ils portent les noms de coefficients de symétrie (γ_3) et de kurtosis (γ_4) et permettent de représenter respectivement l'asymétrie et l'étalement de la loi de densité de probabilité.

Dans le cas de la variable aléatoire gaussienne, ces coefficients sont assez facilement estimables. On trouve :

$$\gamma_3 = 0 \quad (4.17)$$

$$\gamma_4 = 3 \quad (4.18)$$

Le coefficient d'excès défini par :

$$\gamma_e = \gamma_4 - 3 \quad (4.19)$$

est nul pour la variable aléatoire gaussienne. Il est plus généralement utilisé dans la mesure où un coefficient de symétrie ou un coefficient d'excès non nul est automatiquement synonyme de variable non gaussienne.

Les étroites relations entre les théories des probabilités et des statistiques sont telles que les moments définis ici dans le cadre de probabilités peuvent également être calculés pour des échantillons de variables aléatoires. En effet, soit u_i ($i = 1, \dots, N$) une suite de valeurs représentatives prises par la variable aléatoire u . La théorie des statistiques nous apprend que si la variable aléatoire obéit à une distribution gaussienne de moyenne μ et écart type σ , alors :

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \quad (4.20)$$

$$\mu^2 + \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i)^2 \quad (4.21)$$

$$\mu^3 + 3\mu\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i)^3 \quad (4.22)$$

4.2.2 Cumulants

Pour la caractérisation de variables aléatoires, il arrive d'utiliser, plutôt que les moments, les cumulants qui leur sont parfaitement équivalents. Ces grandeurs s'obtiennent à l'aide du développement en série du logarithme de la fonction caractéristique (et non plus à partir du développement en série de la fonction caractéristique elle-même) :

$$\begin{aligned} K(\theta) &= \ln(M(\theta)) \\ K(\theta) &= K(0) + \frac{\theta}{1!} \frac{dK}{d\theta} \Big|_{\theta=0} + \frac{\theta^2}{2!} \frac{d^2K}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} + \frac{\theta^3}{3!} \frac{d^3K}{d\theta^3} \Big|_{\theta=0} \\ &\quad + \frac{\theta^4}{4!} \frac{d^4K}{d\theta^4} \Big|_{\theta=0} + \dots \end{aligned} \quad (4.23)$$

Les cumulants s'obtiennent de manière semblable aux moments ; leur définition exacte est, pour le cumulant d'ordre j :

$$k_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j K}{d\theta^j} \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{j!} \frac{d^j \ln(M(\theta))}{d\theta^j} \Big|_{\theta=0} \quad (4.24)$$

Dans le cas de la variable aléatoire gaussienne, la relation 4.8 permet d'écrire :

$$K(\theta) = i\theta \left(\frac{1}{2}i\theta\sigma^2 + \mu \right) = i\theta\mu - \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 \quad (4.25)$$

Les cumulants d'une variable aléatoire gaussienne s'expriment donc par :

$$\begin{aligned} k_0 &= 0 \\ k_1 &= \mu \\ k_2 &= \sigma^2 \\ k_j &= 0 \quad (j \geq 3) \end{aligned} \quad (4.26)$$

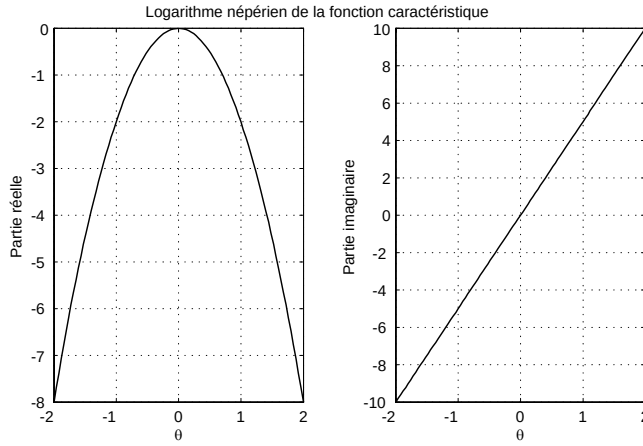


FIG. 4.2 – Approche polynomiale du logarithme de la fonction caractéristique

Ces relations montrent que la variable aléatoire gaussienne peut être facilement caractérisée par ses cumulants. Ils présentent l'avantage d'être nuls à partir du troisième cumulant. Les cumulants peuvent être utilisés très facilement pour quantifier le caractère non gaussien d'une variable aléatoire quelconque.

La définition des cumulants qui a été donnée permet de les relier directement aux moments. Pour les quatre premiers cumulants, on obtient :

$$k_1 = \frac{1}{i} \left. \frac{d \ln(M)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \frac{1}{i} \left[\frac{1}{M} \frac{dM}{d\theta} \right]_{\theta=0} = m_1 \quad (4.27)$$

$$k_2 = \frac{1}{i^2} \left. \frac{d^2 \ln(M)}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = \frac{1}{i^2} \left[\frac{-1}{M^2} \left(\frac{dM}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{M} \frac{d^2 M}{d\theta^2} \right]_{\theta=0} = m_2 - m_1^2 \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{1}{i^3} \left. \frac{d^3 \ln(M)}{d\theta^3} \right|_{\theta=0} \\ &= \frac{1}{i^3} \left[\frac{2}{M^3} \left(\frac{dM}{d\theta} \right)^3 - \frac{3}{M^2} \frac{dM}{d\theta} \frac{d^2 M}{d\theta^2} + \frac{1}{M} \frac{d^3 M}{d\theta^3} \right]_{\theta=0} \\ &= m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Moments centrés	Cumulants
$\tilde{m}_1 = 0$	$k_1 = m_1$
$\tilde{m}_2 = m_2 - m_1^2$	$k_2 = m_2 - m_1^2$
$\tilde{m}_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$	$k_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$
$\tilde{m}_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$	$k_4 = m_4 - 4m_1m_3 - 3m_2^2 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4$

TAB. 4.1 – Expression des moments centrés et cumulants en fonction des moments

Moments	Moments centrés
$m_1 = k_1$	$\tilde{m}_1 = 0$
$m_2 = k_1^2 + k_2$	$\tilde{m}_2 = k_2$
$m_3 = k_1^3 + 3k_1k_2 + k_3$	$\tilde{m}_3 = k_3$
$m_4 = k_1^4 + 6k_1^2k_2 + 4k_1k_3 + 3k_2^2 + k_4$	$\tilde{m}_4 = k_4 + 3k_2^2$

TAB. 4.2 – Expression des moments et moments centrés en fonction des cumulants

$$\begin{aligned}
k_4 &= \frac{1}{i^4} \frac{d^4 \ln(M)}{d\theta^4} \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{i^3} \left[\frac{-6}{M^4} \left(\frac{dM}{d\theta} \right)^4 + \frac{12}{M^3} \left(\frac{dM}{d\theta} \right)^2 \frac{d^2 M}{d\theta^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{M^2} \left(\frac{d^2 M(\theta)}{d\theta^2} \right)^2 - \frac{4}{M^2} \frac{dM}{d\theta} \frac{d^3 M(\theta)}{d\theta^3} + \frac{1}{M} \frac{d^4 M}{d\theta^4} \right] \\
&= m_4 - 4m_1m_3 - 3m_2^2 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Ces relations permettent de déterminer directement les cumulants à partir des moments qui auraient été obtenus par ailleurs. Elles peuvent également être très rapidement inversées pour obtenir les moments à partir de cumulants (système triangularisé).

Notons que le coefficient d'excès s'exprime en fonction des cumulants par :

$$\gamma_e = \gamma_4 - 3 = \frac{\tilde{m}_4}{\tilde{m}_2^2} - 3 = \frac{k_4 + 3k_2^2}{k_2^2} - 3 = \frac{k_4}{k_2^2} \tag{4.31}$$

Il peut donc être vu comme une mesure adimensionnelle du cumulant d'ordre 4, au même titre que le coefficient de kurtosis est une mesure adimensionnelle du moment d'ordre 4.

4.2.3 Caractéristiques de fonctions de variables aléatoires

Nous proposons à présent d'estimer les caractéristiques probabilistes d'une fonction d'une variable aléatoire gaussienne. Seul un exemple illustratif sera présenté : celui du carré d'une variable aléatoire.

Admettons que la variable aléatoire u obéisse à une densité de probabilité gaussienne (Eq. 4.3) et soit la fonction

$$y(u) = u^2 \tag{4.32}$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire y peut s'exprimer assez facilement

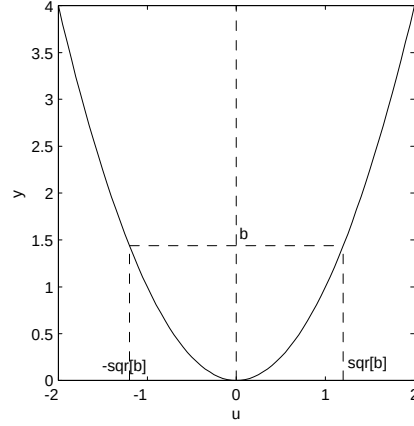


FIG. 4.3 – Illustration graphique du calcul de la fonction de répartition de la variable aléatoire y

en fonction de la fonction de répartition de u (Fig. 4.3) :

$$\begin{aligned}
 F_y(b) &= \text{prob}(y \leq b) \\
 &= \begin{cases} \text{prob}(-\sqrt{b} \leq u \leq \sqrt{b}) & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} F_u(\sqrt{b}) - F_u(-\sqrt{b}) & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

Le densité de probabilité s'obtient ensuite par dérivation de la fonction de répartition. Pour les valeurs de $y \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 p_y(b) &= \frac{dF_y(b)}{db} = \frac{1}{2\sqrt{b}} \frac{dF_u(\sqrt{b})}{d\sqrt{b}} - \frac{1}{2\sqrt{b}} \frac{dF_u(-\sqrt{b})}{d\sqrt{b}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{b}} \left[p_u(\sqrt{b}) + p_u(-\sqrt{b}) \right] \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

La densité de probabilité de la variable aléatoire y s'exprime donc finalement par :

$$p_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi y} \sigma} \left[e^{-\frac{(\sqrt{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{y}+\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

La figure 4.4 représente cette relation pour quelques valeurs différentes de l'écart type de la variable gaussienne (la moyenne étant fixée à $\mu = 5$). On constate que la forme de la densité de probabilité obtenue pour la variable élevée au carré est assez sensiblement affectée par le rapport $\frac{\mu}{\sigma}$.

Pour $\sigma = 1$, l'écart type est tellement faible devant la moyenne ($\frac{\mu}{\sigma} = 5$) que la variable aléatoire u prend presque uniquement des valeurs positives. Il semble alors logique que la densité de probabilité du carré arbore une forme semblable à celle de la densité de probabilité gaussienne avec un étalement plus important vers les grandes valeurs de y .

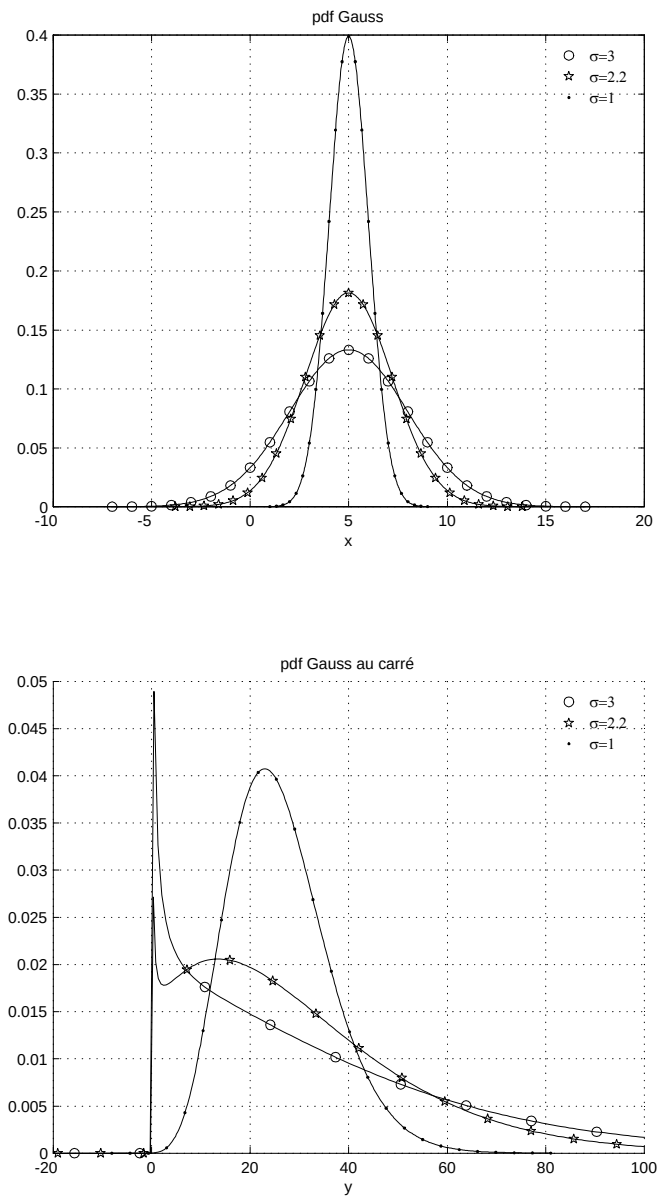


FIG. 4.4 – Densités de probabilité de variables gaussiennes (haut) et de variables gaussiennes élevée au carré (bas)

Ce type de densité de probabilité présente typiquement la forme des densités de probabilité que nous étudierons dans la suite.

Pour $\sigma = 3$, l'écart type est plus important ($\frac{\mu}{\sigma} = 1.7$) si bien que les occurrences de la variable aléatoire gaussienne u dans le domaine $u \leq 0$ commencent à occuper une place importante. L'objet de la fonction $y = u^2$ est de replier cette zone de densité de probabilité non négligeable autour de l'axe $u = 0$. La densité de probabilité résultante présente donc un pic dans le voisinage positif de l'origine. Les raisonnements menés sur cette courbe peuvent être poussés à la limite quand l'écart type est très grand par rapport à la moyenne, c'est-à-dire, pour un écart type fini, quand la moyenne est nulle. Dans ce cas, la densité de probabilité gaussienne est symétrique par rapport à l'origine et celle de la variable au carré décroît encore plus vite qu'une exponentielle décroissante (cf Eq. 4.35).

La dernière courbe ($\sigma = 2.2$) constitue un cas intermédiaire où ce pic à l'origine ainsi que le pic originellement placé au droit du carré de la moyenne coexistent.

Nous avons vu que les moments d'une variable aléatoire pouvaient être calculés par intégration de la densité de probabilité (Eq. 4.7) ou bien obtenus à l'aide du développement en série de la fonction caractéristique (Eq. 4.6).

La première méthode est assez immédiate. Elle permet d'obtenir :

$$m_0 = \int_0^{+\infty} p_y(y) dy = 1 \quad (4.36)$$

$$m_1 = \int_0^{+\infty} y p_y(y) dy = \sigma^2 + \mu^2 \quad (4.37)$$

$$m_2 = \int_0^{+\infty} y^2 p_y(y) dy = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4 \quad (4.38)$$

$$m_3 = \int_0^{+\infty} y^3 p_y(y) dy = 15\sigma^6 + 45\sigma^4\mu^2 + 15\sigma^2\mu^4 + \mu^6 \quad (4.39)$$

$$m_4 = \int_0^{+\infty} y^4 p_y(y) dy = 105\sigma^8 + 420\sigma^6\mu^2 + 210\sigma^4\mu^4 + 28\sigma^2\mu^6 + \mu^8 \quad (4.40)$$

Quant à la seconde méthode, elle nécessite l'estimation préalable de la fonction caractéristique de la variable aléatoire y :

$$M_y(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta y} p_y(y) dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\theta y}}{\sqrt{y}} \left[e^{-\frac{(\sqrt{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{y}+\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] dy \quad (4.41)$$

On obtient successivement :

$$\begin{aligned} M_y(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{1-2\sigma^2\theta i}} e^{\frac{\mu^2 i\theta}{1-2i\sigma^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{r}e^{-i\phi}} e^{\frac{\mu^2 i\theta}{r e^{-i\phi}}} = \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\frac{2\mu^2\sigma^2\theta^2}{r^2}} e^{i\left[\frac{\phi}{2} + \frac{\mu^2\theta}{r^2}\right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{1+4\sigma^4\theta^2}} e^{-\frac{2\mu^2\sigma^2\theta^2}{1+4\sigma^4\theta^2}} e^{i\left[\frac{\arctan[2\sigma^2\theta]}{2} + \frac{\mu^2\theta}{1+4\sigma^4\theta^2}\right]} \end{aligned} \quad (4.42)$$

où la représentation en coordonnées polaires $1 - 2\sigma^2\theta i = re^{-i\phi}$ a été momentanément adoptée. Les parties réelles et imaginaires de la fonction caractéristique s'expriment donc respectivement par :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[M_y(\theta)] &= \frac{1}{\sqrt[4]{1+4\sigma^4\theta^2}} e^{-\frac{2\mu^2\sigma^2\theta^2}{1+4\sigma^4\theta^2}} \cos\left[\frac{\arctan[2\sigma^2\theta]}{2} + \frac{\mu^2\theta}{1+4\sigma^4\theta^2}\right] \\ \operatorname{Im}[M_y(\theta)] &= \frac{1}{\sqrt[4]{1+4\sigma^4\theta^2}} e^{-\frac{2\mu^2\sigma^2\theta^2}{1+4\sigma^4\theta^2}} \sin\left[\frac{\arctan[2\sigma^2\theta]}{2} + \frac{\mu^2\theta}{1+4\sigma^4\theta^2}\right]\end{aligned}\quad (4.43)$$

On peut vérifier que leur développement en série s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[M_y(\theta)] &= 1 - [3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4] \frac{\theta^2}{2!} \\ &\quad + [105\sigma^8 + 420\sigma^6\mu^2 + 210\sigma^4\mu^4 + 28\sigma^2\mu^6 + \mu^8] \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\ \operatorname{Re}[M_y(\theta)] &= [\sigma^2 + \mu^2] \theta - [15\sigma^6 + 45\sigma^4\mu^2 + 15\sigma^2\mu^4 + \mu^6] \frac{\theta^3}{3!} + \dots\end{aligned}\quad (4.44)$$

ce qui correspond bien aux moments calculés selon la première méthode.

La figure 4.5 représente les fonctions caractéristiques associées aux exemples de la figure 4.4. On peut à nouveau constater que la nouvelle variable obtenue est d'autant plus gaussienne que l'écart type de la variable de départ est petit par rapport à sa moyenne.

Ce phénomène peut également être observé sur base de l'écart entre le logarithme de la fonction caractéristique et la parabole associable à une variable aléatoire gaussienne. On peut calculer ce logarithme assez aisément :

$$\ln[M_y(\theta)] = \left[\frac{\tan^{-1}[2\sigma^2\theta]}{2} + \frac{\mu^2\theta}{1+4\sigma^4\theta^2} \right] i - \frac{2\mu^2\sigma^2\theta^2}{1+4\sigma^4\theta^2} - \ln\left[\sqrt[4]{1+4\sigma^4\theta^2}\right]\quad (4.45)$$

En représentant les parties réelles et imaginaires de cette relation, on pourrait à nouveau constater un écart d'autant plus important que l'écart type de la variable gaussienne est grand par rapport à sa moyenne.

Les développements menés jusqu'ici indiquent que la mise en évidence du caractère non gaussien d'une variable aléatoire à l'aide de sa fonction caractéristique semble assez lourde à supporter du point de vue mathématique. Cela est d'autant plus important qu'il est difficile de tirer d'autres conclusions que celle de la constatation que les deux courbes diffèrent et donc que la variable obtenue n'est plus gaussienne. Il est donc généralement admis qu'une interprétation des moments et cumulants soit suffisante à l'attribution du qualificatif "non gaussien". Connaissant l'expression des moments statistiques, les moments centrés et les cumulants peuvent donc être obtenus à l'aide des relations du tableau 4.1. Ils sont indiqués au tableau 4.3.

A titre illustratif, nous avons repris, sur la gauche de la figure 4.6 l'évolution des coefficients de symétrie et de kurtosis en fonction du rapport entre la moyenne et l'écart type de la variable gaussienne de départ. La partie de droite indique le rapport entre les cumulants, ce qui est équivalent comme représentation. Chacun de ces deux graphiques montre que la variable y exprimée par le carré d'une variable gaussienne est également

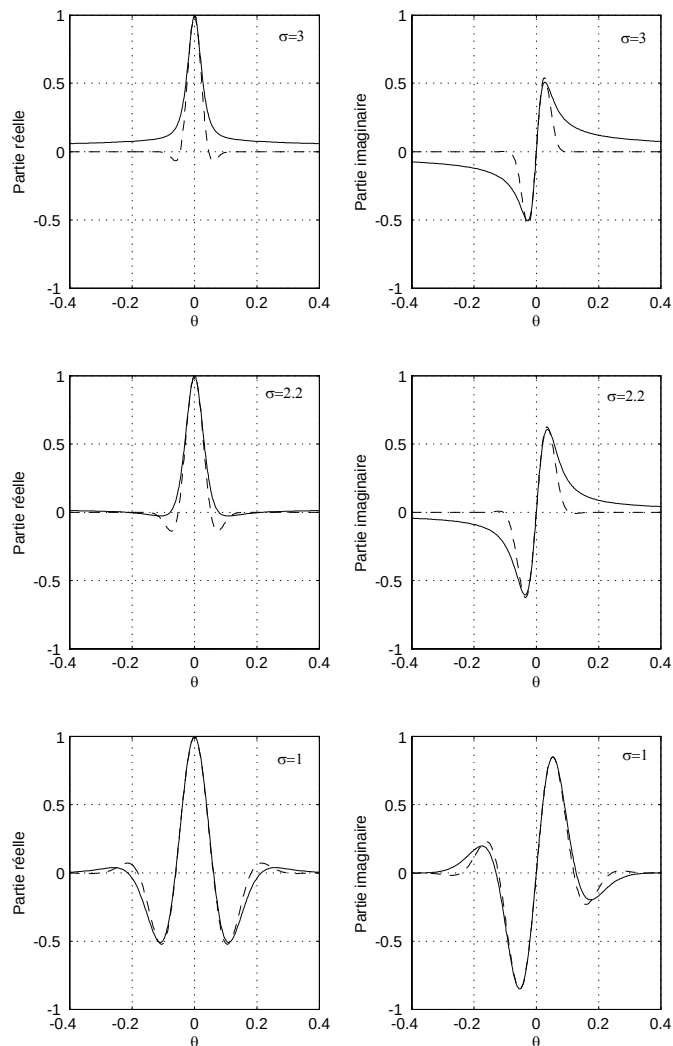


FIG. 4.5 – Fonctions caractéristiques de variables gaussiennes au carré (traits continus) et fonctions caractéristiques de variables gaussiennes de mêmes variances (traits discontinus)

Moments centrés	Cumulants
$\tilde{m}_1 = 0$	$k_1 = \sigma^2 + \mu^2$
$\tilde{m}_2 = 2\sigma^4 \left(1 + 2 \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right)$	$k_2 = 2\sigma^4 \left(1 + 2 \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right)$
$\tilde{m}_3 = 8\sigma^6 \left(1 + 3 \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right)$	$k_3 = 8\sigma^6 \left(1 + 3 \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right)$
$\tilde{m}_4 = 12\sigma^8 \left(5 + 20 \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 + 4 \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^4\right)$	$k_4 = 48\sigma^8 \left(1 + 4 \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

TAB. 4.3 – Moments centrés et cumulants d'une variable aléatoire gaussienne élevée au carré

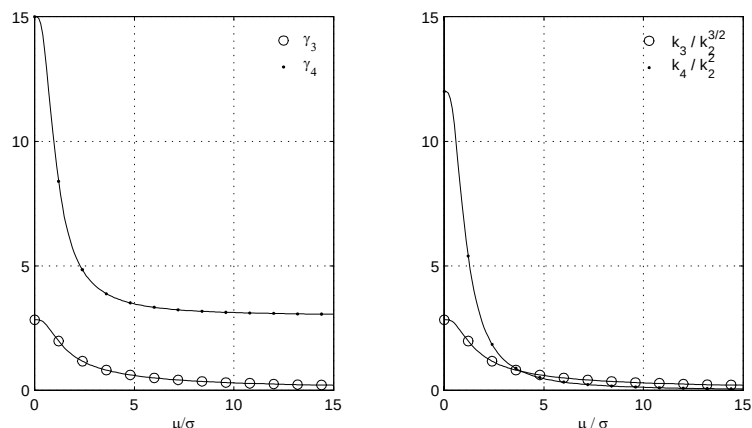


FIG. 4.6 – Moments centrés normés et cumulants normés d’une variable aléatoire gaussienne au carré

gaussienne (jusqu’à l’ordre 4) si le rapport $\frac{\mu}{\sigma}$ est suffisamment grand. Il faut cependant noter qu’aucune conclusion rigoureuse ne peut être avancée dans la mesure où aucune information n’est disponible pour les moments et cumulants d’ordres supérieurs.

Les parties de ce graphique nous intéressant sont celles pour lesquelles $\frac{\mu}{\sigma} \in [5, 10]$, soit une intensité de turbulence I_u de l’ordre de 10% à 20%.

4.3 Caractéristiques de processus aléatoires

4.3.1 Caractéristiques de second ordre

Moments de second ordre

Admettons maintenant que nous travaillons avec des processus aléatoires et non plus des variables aléatoires. En plus des caractéristiques probabilistes des valeurs que le processus peut prendre en un instant t , $p_u(u; t)$, il faut y ajouter les notions de corrélation entre deux instants différents. Ceci est réalisé à l’aide de la densité de probabilité d’ordre 2 :

$$p_u(u_1, u_2; t_1, t_2) \quad (4.46)$$

qui représente la densité de probabilité conjointe entre les deux variables aléatoires u_1 et u_2 (valeurs prises par le processus aléatoire aux instants t_1 et t_2). On imagine aisément que des densités de probabilité de tous ordres soient nécessaires à la représentation complète du processus aléatoire.

De façon similaire à ce qui est réalisé pour les variables aléatoires, une fonction caractéristique est définie :

$$M(\theta_1, \theta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta_1 u_1 + i\theta_2 u_2} p_u(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2 \quad (4.47)$$

Prenons l’exemple du processus aléatoire gaussien centré à corrélation exponentielle

caractérisé par :

$$p_u(u_1, u_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1 - e^{\frac{-2|t_1 - t_2|}{T_k}}}} e^{-\frac{u_1^2 - 2e^{\frac{-|t_1 - t_2|}{T_k}} u_1 u_2 + u_2^2}{2\sigma^2 \left(1 - e^{\frac{-2|t_1 - t_2|}{T_k}}\right)}} \quad (4.48)$$

Cette densité de probabilité d'ordre 2 est telle que les densités de probabilité marginales qui en dérivent $p_u(u_1; t_1)$ et $p_u(u_2; t_2)$ soient des densités de probabilité gaussiennes de moyenne nulle et variance σ^2 . Cette densité de probabilité caractérise aussi bien des valeurs relevées à des instants très proches que très éloignés. Dans ce dernier cas, la densité de probabilité dégénère en :

$$p_u(u_1, u_2; t_1, t_2 \mid |t_2 - t_1| \rightarrow \infty) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{u_1^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{u_2^2}{2\sigma^2}} \quad (4.49)$$

ce qui montre que les deux variables sont alors statistiquement indépendantes (puisque cette densité de probabilité conjointe s'écrit comme le produit de deux densités marginales).

La fonction caractéristique d'ordre 2 s'exprime par :

$$M(\theta_1, \theta_2) = e^{-\sigma^2 \left[\frac{\theta_1^2}{2} + \theta_1 \theta_2 e^{\frac{-|t_1 - t_2|}{T_k}} + \frac{\theta_2^2}{2} \right]} \quad (4.50)$$

Dans le cadre d'une variable aléatoire, nous avons introduit les moments à partir du développement en série de la fonction caractéristique. Cette notion est étendue ici aux fonctions moments¹ obtenues lors du développement en série de la fonction caractéristique de second ordre :

$$\begin{aligned} M(\theta_1, \theta_2) &= M(0, 0) + \frac{\theta_1}{1!} \frac{\partial M}{\partial \theta_1} \Big|_{(0,0)} + \frac{\theta_2}{1!} \frac{\partial M}{\partial \theta_2} \Big|_{(0,0)} \\ &+ \frac{\theta_1^2}{2!} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta_1^2} \Big|_{(0,0)} + \frac{\theta_1 \theta_2}{1!1!} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \Big|_{(0,0)} + \frac{\theta_2^2}{2!} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta_2^2} \Big|_{(0,0)} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} M(\theta_1, \theta_2) &= 1 + i\theta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 p_u(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2 \\ &+ i\theta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 p_u(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2 \\ &+ \frac{1}{2} i^2 \theta_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^2 p_u(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2 \\ &+ i^2 \theta_1 \theta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 u_2 p_u(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2 \\ &+ \frac{1}{2} i^2 \theta_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2^2 p_u(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2 \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (4.52)$$

¹En toute généralité, il s'agit d'une fonction du temps (t_1, t_2) . Dans le cas d'un processus stationnaire, il s'agit d'une fonction du décalage temporel $|t_1 - t_2|$.

Les fonctions moments (et non plus les moments) d'ordre (j, k) sont définies par :

$$m_{jk} = \frac{1}{i^{j+k}} \left. \frac{\partial^{j+k} M}{\partial \theta_1^j \partial \theta_2^k} \right|_{(0,0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^j u_2^k p_u(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2 \quad (4.53)$$

Ce sont des fonctions car elles peuvent a priori dépendre des paramètres t_1 et t_2 . Dans le cas d'un processus aléatoire normal à corrélation exponentielle, on obtient les valeurs reprises au tableau 4.4.

m_{jk}	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$k = 0$	1	0	σ^2	0	$3\sigma^4$
$k = 1$	0	$\sigma^2 e^{\frac{- t_1-t_2 }{T_k}}$	0	$3\sigma^4 e^{\frac{- t_1-t_2 }{T_k}}$	...
$k = 2$	σ^2	0	$\sigma^4 \left[1 + 2e^{\frac{-2 t_1-t_2 }{T_k}} \right]$	...	...
$k = 3$	0	$3\sigma^4 e^{\frac{- t_1-t_2 }{T_k}}$	...	...	...
$k = 4$	$3\sigma^4$	...	...	...	...

TAB. 4.4 – Fonctions moment pour un processus aléatoire normal à corrélation exponentielle

On pourrait démontrer assez facilement que toutes les fonctions moments m_{jk} sont nulles lorsque la somme $j + k$ est impaire. De plus, on peut également constater que les moments d'ordres plus élevés prennent des valeurs plus élevées ; il existe alors un nombre infini de fonctions moments non nulles. Cependant, de même que les moments statistiques d'ordres supérieurs ne dépendaient que des mêmes paramètres μ et σ , on peut constater que les fonctions moments s'expriment toutes en fonction de $e^{\frac{-|t_1-t_2|}{T_k}}$, le coefficient de corrélation entre u_1 et u_2 .

Le tableau 4.5 reprend sous une notation plus compacte les fonctions moments non nulles du processus aléatoire normal. La somme $j + k$ semble revêtir une certaine importance ; dans la suite, nous l'appellerons le rang de la fonction moment. Le tableau 4.5 rassemble donc les fonctions moments d'ordre 2 et de rangs 0, 2, 4 et 6.

Sous la fonction moment d'ordre 2, diagonale ($j = k$) et de second rang, on peut reconnaître la fonction d'autocorrélation du processus aléatoire considéré $R(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{\frac{-|t_1-t_2|}{T_k}}$. Son expression obtenue pour le processus aléatoire traité justifie la qualification de processus à corrélation exponentielle. Remarquons que le processus étudié est stationnaire puisque l'entière de la matrice des moments ne dépend que de la différence $|t_1 - t_2|$.

Les relations entre les théories des probabilités et des statistiques se rejoignent à nouveau sur l'estimation des fonctions moments. En effet, admettons que l'on connaisse un

$j + k =$	0	2	4	6
$k = 0$	1	σ^2	$3\sigma^4$	$15\sigma^6$
$k = 1$	$\times$	$\sigma^2 e^{\frac{- t_1-t_2 }{T_k}}$	$3\sigma^4 e^{\frac{- t_1-t_2 }{T_k}}$	$15\sigma^6 e^{\frac{- t_1-t_2 }{T_k}}$
$k = 2$	$\times$	σ^2	$\sigma^4 \left[1 + 2e^{\frac{-2 t_1-t_2 }{T_k}} \right]$	$3\sigma^6 \left[1 + 4e^{\frac{-2 t_1-t_2 }{T_k}} \right]$
$k = 3$	$\times$	$\times$	$3\sigma^4 e^{\frac{- t_1-t_2 }{T_k}}$	$3\sigma^6 e^{\frac{- t_1-t_2 }{T_k}} \left[3 + 2e^{\frac{-2 t_1-t_2 }{T_k}} \right]$
$k = 4$	$\times$	$\times$	$3\sigma^4$	$3\sigma^6 \left[1 + 4e^{\frac{-2 t_1-t_2 }{T_k}} \right]$
$k = 5$	$\times$	$\times$	$\times$	$15\sigma^6 e^{\frac{- t_1-t_2 }{T_k}}$
$k = 6$	$\times$	$\times$	$\times$	$15\sigma^6$

TAB. 4.5 – Fonctions moment pour un processus aléatoire normal à corrélation exponentielle

échantillon $u(t)$ représentatif d'un processus aléatoire normal à corrélation exponentielle. On devrait alors obtenir :

$$R(\Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) u(t - \Delta t) dt = \sigma^2 e^{\frac{-\Delta t}{T_k}} \quad (4.54)$$

Il convient également de remarquer que la connaissance des fonctions moments englobe également celle des moments statistiques (de la variable aléatoire). Pour obtenir ces moments, il suffit de poser $t_1 = t_2$; on obtient alors le tableau 4.6 par dégénérescence du tableau 4.5.

$j + k =$	0	2	4	6
$\forall k \leq j + k$	1	σ^2	$3\sigma^4$	$15\sigma^6$

TAB. 4.6 – Moments dégénérés pour un processus aléatoire normal à corrélation exponentielle

Cumulants de second ordre

De la même manière que pour les variables aléatoires, il peut être plus facile dans certaines circonstances de travailler avec les fonctions cumulant définies par :

$$k_{jk} = \frac{1}{i^{j+k}} \left. \frac{\partial^{j+k} \ln(M)}{\partial \theta_1^j \partial \theta_2^k} \right|_{(0,0)} \quad (4.55)$$

Ces fonctions sont particulièrement pratiques dans le cas du processus gaussien dans la mesure où les fonctions cumulant de rang supérieur à 3 sont toutes nulles :

k_{jk}	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$k = 0$	0	0	σ^2	0	0
$k = 1$	0	$\sigma^2 e^{\frac{- t_1-t_2 }{T_k}}$	0	0	...
$k = 2$	σ^2	0	0	...	...
$k = 3$	0	0	...	...	...
$k = 4$	0	...	...	...	...

TAB. 4.7 – Fonctions cumulant pour un processus aléatoire normal à corrélation exponentielle

La comparaison des tableaux 4.4 et 4.7 montre que les fonctions moments m_{jk} et les fonctions cumulant k_{jk} sont identiques pour $j + k = 2$. Il s'agit d'une propriété générale limitée aux processus à moyenne nulle. Dans notre cas, la fonction d'autocovariance (fonction moment d'ordre 2 et de rang (1,1)) et la fonction d'autocorrélation (fonction cumulant d'ordre 2 et de rang (1,1)) sont donc équivalentes.

Fonctions de processus aléatoires

Tout comme nous avons étudié des fonctions de variables aléatoires, il pourrait être intéressant de préciser en quelques mots la façon de caractériser une fonction d'un processus aléatoire. Par exemple, dans le cadre du problème que nous désirons traiter, il paraît intéressant de pouvoir caractériser la fonction

$$y(t) = u^2(t) \quad (4.56)$$

du processus aléatoire gaussien $u(t)$ à corrélation quelconque $\rho(t_1, t_2)$. La fonction de répartition conjointe du processus aléatoire ainsi défini peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned}
F_y(b_1, b_2) &= \text{prob}(y_1 \leq b_1 \text{ et } y_2 \leq b_2) \\
&= \begin{cases} \text{prob}(-\sqrt{b_1} \leq u_1 \leq \sqrt{b_1} \\ \text{et } -\sqrt{b_2} \leq u_2 \leq \sqrt{b_2}) & \text{si } b_1 \geq 0 \text{ et } b_2 \geq 0 \\ 0 & \text{si } b_1 < 0 \text{ ou } b_2 < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} F_u(\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}) - F_u(-\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}) \\ -F_u(\sqrt{b_1}, -\sqrt{b_2}) + F_u(-\sqrt{b_1}, -\sqrt{b_2}) & \text{si } b_1 \geq 0 \text{ et } b_2 \geq 0 \\ 0 & \text{si } b_1 < 0 \text{ ou } b_2 < 0 \end{cases} \quad (4.57)
\end{aligned}$$

La densité de probabilité conjointe qui y est associée est obtenue par dérivation :

$$\begin{aligned}
p_y(b_1, b_2) &= \frac{\partial^2 F_y(b_1, b_2)}{\partial b_1 \partial b_2} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{b_1 b_2}} \left[p_u(\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}) + p_u(\sqrt{b_1}, -\sqrt{b_2}) \right. \\
&\quad \left. p_u(-\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}) + p_u(-\sqrt{b_1}, -\sqrt{b_2}) \right] \quad (4.58)
\end{aligned}$$

En remplaçant dans cette expression $p_u(u_1, u_2)$ par la densité de probabilité conjointe entre u_1 et u_2 , on obtient, après simplifications :

$$p_y(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{y_1 - 2\rho\sqrt{y_1 y_2} + y_2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}} + e^{-\frac{y_1 + 2\rho\sqrt{y_1 y_2} + y_2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}}}{4\pi\sqrt{y_1 y_2}\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} & \text{si } y_1 \geq 0 \text{ et } y_2 \geq 0 \\ 0 & \text{si } y_1 < 0 \text{ ou } y_2 < 0 \end{cases} \quad (4.59)$$

Cette fonction est représentée à la figure 4.7 pour différentes valeurs de la fonction d'autocorrélation du processus aléatoire $u(t)$.

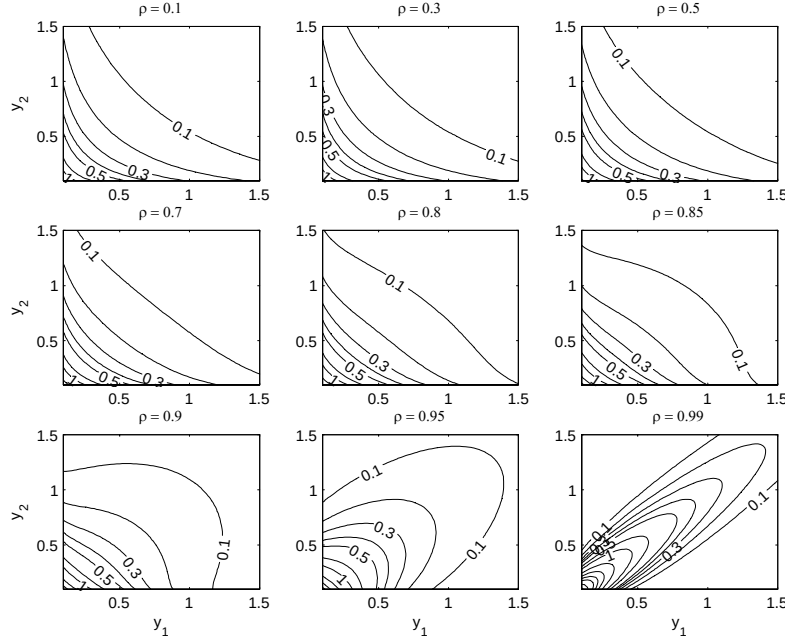


FIG. 4.7 – Densité de probabilité de second ordre du carré d'un processus aléatoire en fonction de la corrélation du processus de base

Si les valeurs y_1 et y_2 correspondent à des instants d'observation très espacés ($|t_1 - t_2| \rightarrow \infty$) tels que la fonction d'autocorrélation du processus aléatoire u puisse être supposée nulle, la relation précédente dégénère en :

$$p_y(y_1, y_2; t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{y_1 + y_2}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2\sqrt{y_1 y_2}} = \frac{e^{-\frac{y_1}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi y_1}\sigma} \frac{e^{-\frac{y_2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi y_2}\sigma} & \text{si } y_1 \geq 0 \text{ et } y_2 \geq 0 \\ 0 & \text{si } y_1 < 0 \text{ ou } y_2 < 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

Conformément à notre intuition, on constate que les valeurs prises par le processus aléatoire $y(t)$ en des instants très espacés sont statistiquement indépendantes.

La définition que nous avons donnée des fonctions moments (4.53) peut être appliquée à cette densité de probabilité conjointe. Nous ne présentons pas ici ces calculs assez longs qui ont permis d'obtenir les résultats du tableau 4.8 où sont présentés les moments d'ordres (j, k) du carré d'un processus aléatoire gaussien. Nous insistons de nouveau sur le fait que les relations contenues dans ce tableau sont assez générales dans la mesure où elles s'appliquent quelle que soit la fonction d'autocorrélation $\rho = \rho(t_1, t_2)$ (et donc aussi quelle que soit la densité spectrale) du processus aléatoire gaussien $u(t)$.

Nous savons que les moments d'ordres inférieurs peuvent toujours être obtenus à partir des moments d'ordres plus élevés. Dans le cadre de l'étude du carré du processus aléatoire gaussien, on peut constater qu'en posant $\rho = 1$, ce qui revient à choisir $t_1 = t_2$, les diagonales $j + k = \text{cst}$ du tableau 4.8 donnent toutes les mêmes valeurs et que ces valeurs sont les moments statistiques du carré de la variable aléatoire gaussienne obtenus au paragraphe 4.2.3.

Nous savons également que les fonctions moments d'un processus aléatoire peuvent également être déterminées à partir de la fonction caractéristique de second ordre. Pour l'exemple que nous étudions, cette fonction s'écrit² :

$$\begin{aligned}
& M_y(\theta_1, \theta_2) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta_1 y_1 + i\theta_2 y_2} p_y(y_1, y_2; t_1, t_2) dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{4\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\theta_1 y_1 + i\theta_2 y_2}}{\sqrt{y_1 y_2}} \left[e^{-\frac{y_1 - 2\rho\sqrt{y_1 y_2} + y_2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}} + e^{-\frac{y_1 + 2\rho\sqrt{y_1 y_2} + y_2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}} \right] dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - 4(1-\rho^2)\sigma^4\theta_1\theta_2 - 2i\sigma^2(\theta_1 + \theta_2)}} \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Les expressions des parties réelle et imaginaire de la fonction caractéristique

$$\operatorname{Re}[M_y(\theta_1, \theta_2)] = \frac{1}{s} \cos \left[\frac{\tan^{-1} \left[\frac{2\sigma^2(\theta_1 + \theta_2)}{1 - 4(1-\rho^2)\sigma^4\theta_1\theta_2} \right]}{2} \right] \tag{4.62}$$

$$\operatorname{Im}[M_y(\theta_1, \theta_2)] = \frac{1}{s} \sin \left[\frac{\tan^{-1} \left[\frac{2\sigma^2(\theta_1 + \theta_2)}{1 - 4(1-\rho^2)\sigma^4\theta_1\theta_2} \right]}{2} \right] \tag{4.63}$$

$$\text{où } s = \sqrt{[1 - 4(1-\rho^2)\sigma^4\theta_1\theta_2]^2 + 4\sigma^4(\theta_1 + \theta_2)^2}$$

²On peut de nouveau constater que la fonction caractéristique d'ordre inférieur peut être obtenue en posant $\theta_2 = 0$:

$$M_y(\theta_1, 0) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2i\sigma^2\theta_1}}$$

m_{jk}	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$k = 0$	1	σ^2	$3\sigma^4$	$15\sigma^6$	$105\sigma^8$
$k = 1$	σ^2	$[1 + 2\rho^2]\sigma^4$	$[3 + 12\rho^2]\sigma^6$	$[15 + 90\rho^2]\sigma^8$	...
$k = 2$	$3\sigma^4$	$[3 + 12\rho^2]\sigma^6$	$[9 + 72\rho^2 + 24\rho^4]\sigma^8$	...	...
$k = 3$	$15\sigma^6$	$[15 + 90\rho^2]\sigma^8$	...	...	...
$k = 4$	$105\sigma^8$	...	...	...	...

TAB. 4.8 – Fonctions moment pour le carré d'un processus aléatoire normal à corrélation exponentielle

permettent d'écrire plus facilement le développements en série de Taylor de la fonction :

$$\begin{aligned}
M_y(\theta_1, \theta_2) = & 1 + i\sigma^2\theta_1 + i\sigma^2\theta_2 \\
& -3\sigma^4\frac{\theta_1^2}{2} - (1 + 2\rho^2)\sigma^4\theta_1\theta_2 - 3\sigma^4\frac{\theta_2^2}{2!} \\
& -15\sigma^6\frac{\theta_1^3}{3!} - (3 + 12\rho^2)\sigma^6\frac{\theta_1\theta_2^2}{2!} - (3 + 12\rho^2)i\sigma^6\frac{\theta_1\theta_2^2}{2!} - 15\sigma^6\frac{\theta_2^3}{3!} \\
& +105\sigma^8i\sigma^8\frac{\theta_1^4}{4!} + (15 + 90\rho^2)i\sigma^8\frac{\theta_1^3\theta_2}{3!} + (9 + 72\rho^2 + 24\rho^4)i\sigma^8\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2!2!} \\
& + (15 + 90\rho^2)i\sigma^8\frac{\theta_1\theta_2^3}{3!} + 105\sigma^8i\sigma^8\frac{\theta_1^4}{4!}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

La définition que nous avons donnée des fonctions moments permet d'identifier ces fonctions dans cette relation ci-dessus. On peut vérifier qu'ils sont identiques aux moments qui ont été obtenus par intégration de la densité de probabilité conjointe (Tab. 4.8).

Les fonctions moments sont bien sûr des grandeurs intéressantes puisqu'elles incluent par exemple la célèbre fonction d'autocovariance. On leur préfère parfois les fonctions cumulants qui sont définies à partir du développement du logarithme népérien de la fonction caractéristique :

$$K_y(\theta_1, \theta_2) = \frac{\tan^{-1} \left[\frac{2\sigma^2(\theta_1 + \theta_2)}{1 - 4(1 - \rho^2)\sigma^4\theta_1\theta_2} \right]}{2} i - \ln \left[\sqrt[4]{[1 - 4(1 - \rho^2)\sigma^4\theta_1\theta_2]^2 + 4\sigma^4(\theta_1 + \theta_2)^2} \right] \tag{4.65}$$

Nous ne rentrons pas dans les détails du développement en série de cette fonction ; les fonctions cumulants qui sont obtenues à partir de ce développement sont présentées au tableau 4.9.

k_{jk}	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$k = 0$	0	σ^2	$2\sigma^4$	$8\sigma^6$	$48\sigma^8$
$k = 1$	σ^2	$2\rho^2\sigma^4$	$8\rho^2\sigma^6$	$48\rho^2\sigma^8$	...
$k = 2$	$2\sigma^4$	$8\rho^2\sigma^6$	$16\rho^2[2 + \rho^2]\sigma^8$	...	...
$k = 3$	$8\sigma^6$	$48\rho^2\sigma^8$	...	...	...
$k = 4$	$48\sigma^8$	...	...	...	...

TAB. 4.9 – Fonctions cumulants pour le carré d'un processus aléatoire normal à corrélation exponentielle

Au paragraphe précédent, nous avons pu établir que le carré d'une variable aléatoire gaussienne n'était pas une variable aléatoire gaussienne. En termes de processus aléatoires, il en est tout à fait de même. On peut en effet constater que les fonctions cumulants de rang supérieur à 2 sont non nulles. On peut également noter que les caractéristiques statistiques de la variable aléatoire peuvent également être retrouvées en posant $\rho = 0$, soit $t_1 = t_2$. Le contenu du tableau 4.9 dégénère alors en celui du tableau 4.3 pour lequel $\mu = 0$.

4.3.2 Caractéristiques de troisième ordre

Les moments de second ordre, obtenus à partir des densités spectrales de second ordre permettent déjà une représentation assez précise du processus aléatoire. Dans le cas du processus normal, la connaissance de la fonction d'autocorrélation suffit à la caractérisation complète du processus puisqu'elle fait intervenir à la fois la variance ainsi que la fonction de cohérence. Lorsque le processus étudié n'est pas normal, des moments d'ordres supérieurs sont nécessaires à sa représentation correcte.

Les moments de troisième ordre se déduisent à partir des densités de probabilité de troisième ordre $p_u(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3)$ de la même manière que pour les moments d'ordres inférieurs. Cette nouvelle densité de probabilité représente une densité de probabilité conjointe des variables aléatoires u_1, u_2 et u_3 qui sont les valeurs prises par le processus aux instants t_1, t_2 et t_3 . Pour rester dans le même formalisme, on introduit une fonction caractéristique de troisième ordre :

$$M(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta_1 u_1 + i\theta_2 u_2 + i\theta_3 u_3} p_u(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) du_1 du_2 du_3 \quad (4.66)$$

qui ne représente finalement qu'une transformée de Fourier multiple de cette densité de probabilité de troisième ordre. Le développement en série de la fonction caractéristique s'exprime par :

$$\begin{aligned} M(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = & M(0, 0) + \frac{\theta_1}{1!} \frac{\partial M}{\partial \theta_1} \Big|_{(0,0)} + \frac{\theta_2}{1!} \frac{\partial M}{\partial \theta_2} \Big|_{(0,0)} + \frac{\theta_3}{1!} \frac{\partial M}{\partial \theta_3} \Big|_{(0,0)} \\ & + \frac{\theta_1^2}{2!} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta_1^2} \Big|_{(0,0)} + \frac{\theta_2^2}{2!} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta_2^2} \Big|_{(0,0)} + \frac{\theta_3^2}{2!} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta_3^2} \Big|_{(0,0)} \\ & + \frac{\theta_1 \theta_2}{1!1!} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \Big|_{(0,0)} + \frac{\theta_2 \theta_3}{1!1!} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta_2 \partial \theta_3} \Big|_{(0,0)} + \frac{\theta_3 \theta_1}{1!1!} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta_3 \partial \theta_1} \Big|_{(0,0)} \\ & + \dots \end{aligned} \quad (4.67)$$

En introduisant dans cette relation la définition que nous avons donnée de la fonction caractéristique de troisième ordre (4.66), on trouve :

$$\begin{aligned} M(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = & 1 + i\theta_1 \iiint_{-\infty}^{+\infty} u_1 p_u(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) du_1 du_2 du_3 \\ & + i\theta_2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} u_2 p_u(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) du_1 du_2 du_3 \\ & + \frac{1}{2} i^2 \theta_1^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} u_1^2 p_u(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) du_1 du_2 du_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} i^2 \theta_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2^2 p_u(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) du_1 du_2 du_3 \\
& + \frac{1}{2} i^2 \theta_3^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_3^2 p_u(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) du_1 du_2 du_3 \\
& + i^2 \theta_1 \theta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 u_2 p_u(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) du_1 du_2 du_3 \\
& + i^2 \theta_2 \theta_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 u_3 p_u(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) du_1 du_2 du_3 \\
& + i^2 \theta_3 \theta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_3 u_1 p_u(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) du_1 du_2 du_3 \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Notons dès à présent que la connaissance de la fonction caractéristique de troisième ordre permet en posant $\theta_3 = 0$ de retrouver la fonction caractéristique de second ordre ; de même que la connaissance de la densité de probabilité de troisième ordre permet de retrouver la densité de probabilité (marginale) de second ordre par intégration le long de l'axe u_3 .

Tout comme pour les moments d'ordre inférieur, les fonctions moments de troisième ordre m_{jkl} peuvent être définies soit par les coefficients du développement en série de la fonction caractéristique, soit, directement à partir de la densité de probabilité de troisième ordre (généralement inconnue) :

$$\begin{aligned}
m_{jkl} &= \frac{1}{i^{j+k+l}} \left. \frac{\partial^{j+k+l} M}{\partial \theta_1^j \partial \theta_2^k \partial \theta_3^l} \right|_{(0,0,0)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^j u_2^k u_3^l p_u(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) du_1 du_2 du_3
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Pour illustrer ceci, reprenons l'exemple d'un processus aléatoire gaussien. Sa densité de probabilité de troisième ordre s'exprime par :

$$p_u(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2} \{X\}^T [\Sigma]^{-1} \{X\}} \tag{4.70}$$

où $\{X\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$ est le vecteur des variables aléatoires considérées et

$$[\Sigma] = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

est la matrice des corrélations³. La fonction caractéristique de troisième ordre associée à cette densité de probabilité peut être obtenue à l'aide de la relation 4.66 :

$$M(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = e^{-\frac{1}{2}\{\Theta\}^T[\Sigma]\{\Theta\}} \quad (4.72)$$

où $\{\Theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$. Les relations 4.69 et 4.72 sont les deux moyens (maintenant ha-

bituels!) dont nous disposons pour établir les expressions des fonctions moments d'ordre 3. Pour alléger la présentation, les moments d'ordre 3 du processus aléatoire ne sont pas présentées dans ce document. Il va de soi que l'exposé pourrait continuer avec les expressions des fonctions moments et cumulants du carré d'un processus aléatoire gaussien. Ces développements sont en tout point identiques aux développements menés jusqu'ici et les expressions finales obtenues sont relativement fastidieuses. Pour cette raison, nous avons décidé de passer directement à la formulation de la généralisation du problème.

4.3.3 Caractéristiques d'ordres supérieurs

D'après ce qui vient d'être développé dans les paragraphes précédents, il est clair qu'un processus aléatoire peut être caractérisé complètement par la connaissance de la densité de probabilité d'ordre maximal à partir de laquelle on peut retrouver, par intégration, les densités de probabilité d'ordres inférieurs quelconques. En termes de fonctions moments, cela signifie qu'il convient de connaître les fonctions moments de tous ordres et de tout rang.

Cette caractérisation rigoureuse est malheureusement trop complète pour représenter les processus aléatoires physiques réels (problème d'identification de tous ces paramètres). On se limite donc généralement aux moments d'ordres minima et de rangs minima. De ce qui précède, nous avons également pu constater qu'une importance primordiale est à accorder aux fonctions moments de rang unitaire en chacune des variables. Ainsi, par exemple, le moment d'ordre deux et de rang (1,1) s'identifie à la fonction d'autocorrélation du processus aléatoire. Pour les moments d'ordre supérieur, nous allons nous contenter, dans le cas d'un processus aléatoire gaussien centré, de développer une relation pour ces moments particuliers.

Pour un tel processus, la densité de probabilité d'ordre n peut s'écrire :

$$p_u(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}\{X\}^T[\Sigma]\{X\}} \quad (4.73)$$

où $\{X\}$ représente le vecteur de dimensions $n \times 1$ des variables aléatoires $u_1, \dots, u_n$ et $[\Sigma]$ est la matrice $n \times n$ des corrélations entre ces variables aléatoires. Grâce aux propriétés de la transformée de Fourier et de l'intégrale de Gauss, la fonction caractéristique d'ordre n s'exprime par la relation suivante :

$$M(\theta_1, \dots, \theta_n) = e^{-\frac{1}{2}\{\Theta\}^T[\Sigma]\{\Theta\}} \quad (4.74)$$

³ Si le processus est à corrélation exponentielle, cette matrice s'exprime par : $[\Sigma] = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & e^{-\frac{|t_1-t_2|}{T_k}} & e^{-\frac{|t_1-t_3|}{T_k}} \\ e^{-\frac{|t_2-t_1|}{T_k}} & 1 & e^{-\frac{|t_2-t_3|}{T_k}} \\ e^{-\frac{|t_3-t_1|}{T_k}} & e^{-\frac{|t_3-t_2|}{T_k}} & 1 \end{bmatrix}$

Cette relation particulière, une exponentielle d'une forme quadratique, ne dérive que du caractère gaussien de la variable aléatoire et n'est absolument pas inhérent au contenu fréquentiel du processus considéré. Les développements subséquents seront donc valables quelle que soit, par exemple, la densité spectrale du processus étudié.

Les grandeurs que nous allons estimer sont donc des généralisations des fonctions d'autocorrélation :

$$R^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n M(\theta_1, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_1 \dots \partial \theta_n} \Big|_{\{\Theta\}=\{0\}} \quad (4.75)$$

Il va de soi que d'après cette définition, les fonctions $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$ s'identifient respectivement à la moyenne et à la fonction d'autocorrélation habituelle. Nous allons simplement présenter ci-dessous la marche à suivre pour obtenir les premières fonctions moments. Il suffit en réalité de prendre son courage à deux mains et d'exprimer les dérivées successives de la fonction caractéristique d'ordre n :

$$\frac{\partial M}{\partial \theta_1} = -\{\Theta\}^T [\Sigma] \frac{\partial \{\Theta\}}{\partial \theta_1} e^{-\frac{1}{2}\{\Theta\}^T [\Sigma] \{\Theta\}} \quad (4.76)$$

L'évaluation de cette première dérivée en $\{\Theta\} = \{0\}$ permet de trouver $R^{(1)}(t_1) = 0$, la moyenne du processus aléatoire gaussien. Une seconde opération de dérivation permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = & \left\{ -\frac{\partial \{\Theta\}^T}{\partial \theta_2} [\Sigma] \frac{\partial \{\Theta\}}{\partial \theta_1} + \right. \\ & \left. \{\Theta\}^T [\Sigma] \frac{\partial \{\Theta\}}{\partial \theta_1} \{\Theta\}^T [\Sigma] \frac{\partial \{\Theta\}}{\partial \theta_2} \right\} e^{-\frac{1}{2}\{\Theta\}^T [\Sigma] \{\Theta\}} \end{aligned} \quad (4.77)$$

En prenant $\{\Theta\} = \{0\}$, on trouve :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \Big|_{\{\Theta\}=\{0\}} = -\frac{\partial \{\Theta\}^T}{\partial \theta_2} [\Sigma] \frac{\partial \{\Theta\}}{\partial \theta_1} = -\Sigma_{12} = -R^{(2)}(t_1, t_2) \quad (4.78)$$

où apparaît $R^{(2)}(t_1, t_2)$ l'expression de la fonction d'autocorrélation du processus aléatoire gaussien. Pour simplifier les notations, notons $[\Sigma] \frac{\partial \{\Theta\}}{\partial \theta_k} = \{\Sigma_k\}$ qui correspond à la $k^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $[\Sigma]$. En dérivant une troisième fois, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 M}{\partial \theta_1 \partial \theta_2 \partial \theta_3} = & \left\{ \Sigma_{12} \{\Theta\}^T \{\Sigma_3\} + \Sigma_{23} \{\Theta\}^T \{\Sigma_1\} + \Sigma_{31} \{\Theta\}^T \{\Sigma_2\} \right. \\ & \left. - \{\Theta\}^T \{\Sigma_1\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_2\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_3\} \right\} e^{-\frac{1}{2}\{\Theta\}^T [\Sigma] \{\Theta\}} \end{aligned} \quad (4.79)$$

En évaluant cette fonction en $\{\Theta\} = \{0\}$, on trouve :

$$\frac{\partial^3 M}{\partial \theta_1 \partial \theta_2 \partial \theta_3} \Big|_{\{\Theta\}=\{0\}} = 0 = iR^{(3)}(t_1, t_2, t_3) \quad (4.80)$$

ce qui ne fait en réalité que traduire la symétrie du processus aléatoire gaussien. Les expressions commencent à se compliquer à partir de la dérivée quatrième :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 M}{\partial \theta_1 \partial \theta_2 \partial \theta_3 \partial \theta_4} &= e^{-\frac{1}{2} \{\Theta\}^T [\Sigma] \{\Theta\}} \left\{ \Sigma_{12} \Sigma_{34} + \Sigma_{13} \Sigma_{24} + \Sigma_{14} \Sigma_{23} \right. \\
&\quad - \Sigma_{12} \{\Theta\}^T \{\Sigma_3\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_4\} - \Sigma_{13} \{\Theta\}^T \{\Sigma_2\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_4\} \\
&\quad - \Sigma_{14} \{\Theta\}^T \{\Sigma_2\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_3\} - \Sigma_{23} \{\Theta\}^T \{\Sigma_1\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_4\} \\
&\quad - \Sigma_{24} \{\Theta\}^T \{\Sigma_1\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_3\} - \Sigma_{34} \{\Theta\}^T \{\Sigma_1\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_2\} \\
&\quad \left. + \{\Theta\}^T \{\Sigma_1\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_2\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_3\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_4\} \right\} \quad (4.81)
\end{aligned}$$

L'évaluation en $\{\Theta\} = \{0\}$ de cette relation permet d'obtenir l'expression de la fonction moment d'ordre 4 d'un processus aléatoire gaussien :

$$\left. \frac{\partial^4 M}{\partial \theta_1 \partial \theta_2 \partial \theta_3 \partial \theta_4} \right|_{\{\Theta\}=\{0\}} = \Sigma_{12} \Sigma_{34} + \Sigma_{13} \Sigma_{24} + \Sigma_{14} \Sigma_{23} = R^{(4)}(t_1, t_2, t_3, t_4) \quad (4.82)$$

Dans l'introduction de ce paragraphe, nous avons insisté sur l'importance de l'évaluation des fonctions $R^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$. En effet, en posant $t_1 = t_3$ et $t_2 = t_4$, la fonction moment d'ordre 4 que nous venons d'obtenir permet de retrouver :

$$R^{(4)}(t_1, t_1, t_2, t_2) = E[u_1^2 u_2^2] = \Sigma_{11} \Sigma_{22} + 2\Sigma_{12}^2 \quad (4.83)$$

ce qui n'est en réalité rien d'autre que la fonction d'autocorrélation $E[y_1 y_2]$ du carré du processus aléatoire. Avec les notations des paragraphes précédents, on trouve :

$$R^{(4)}(t_1, t_1, t_2, t_2) = E[y_1 y_2] = \sigma^4 + 2\rho^2 \sigma^4 \quad (4.84)$$

que nous avons déjà calculé ci-avant (Tab. 4.8).

Pour faciliter les notations, nous allons introduire l'opérateur $\hat{S}(\cdot)$ qui représente une sommation cyclique. La dérivée quatrième s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 M}{\partial \theta_1 \partial \theta_2 \partial \theta_3 \partial \theta_4} &= \left\{ \underbrace{\hat{S}(\Sigma_{ij} \Sigma_{kl})}_{3 \text{ termes}} - \underbrace{\hat{S}(\Sigma_{ij} \{\Theta\}^T \{\Sigma_k\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_l\})}_{6 \text{ termes}} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\hat{S}(\{\Theta\}^T \{\Sigma_i\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_j\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_k\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_l\})}_{1 \text{ terme}} \right\} e^{-\frac{1}{2} \{\Theta\}^T [\Sigma] \{\Theta\}} \quad (4.85)
\end{aligned}$$

Grâce aux propriétés de l'opérateur introduit, les dérivées d'ordres supérieurs peuvent être obtenues assez facilement :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^5 M}{\partial \theta_1 \cdots \partial \theta_5} \\
&= \left\{ \underbrace{-\hat{S}(\Sigma_{ij} \Sigma_{kl} \{\Theta\}^T \{\Sigma_m\})}_{15 \text{ termes}} + \underbrace{\hat{S}(\Sigma_{ij} \{\Theta\}^T \{\Sigma_k\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_l\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_m\})}_{10 \text{ termes}} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\hat{S}(\{\Theta\}^T \{\Sigma_i\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_j\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_k\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_l\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_m\})}_{1 \text{ terme}} \right\} e^{-\frac{1}{2} \{\Theta\}^T [\Sigma] \{\Theta\}}
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Évaluée en $\{\Theta\} = \{0\}$, cette expression permet de vérifier que les moments d'ordres impairs des processus aléatoires gaussiens sont bien nuls :

$$\left. \frac{\partial^5 M}{\partial \theta_1 \cdots \partial \theta_5} \right|_{\{\Theta\}=\{0\}} = 0 = -iR^{(5)}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) \tag{4.87}$$

En procédant de nouveau à une dérivation, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^6 M}{\partial \theta_1 \cdots \partial \theta_6} = \\
& \left\{ \underbrace{-\hat{S}(\Sigma_{ij} \Sigma_{kl} \Sigma_{mn})}_{15 \text{ termes}} + \underbrace{\hat{S}(\Sigma_{ij} \Sigma_{kl} \{\Theta\}^T \{\Sigma_m\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_n\})}_{45 \text{ termes}} \right. \\
& \quad \left. - \underbrace{\hat{S}(\Sigma_{ij} \{\Theta\}^T \{\Sigma_k\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_l\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_m\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_n\})}_{15 \text{ termes}} \right. \\
& \quad \left. + \underbrace{\hat{S}(\{\Theta\}^T \{\Sigma_i\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_j\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_k\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_l\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_m\} \{\Theta\}^T \{\Sigma_n\})}_{1 \text{ terme}} \right\} \\
& \quad e^{-\frac{1}{2} \{\Theta\}^T [\Sigma] \{\Theta\}}
\end{aligned} \tag{4.88}$$

L'estimation de cette relation en $\{\Theta\} = \{0\}$ permet d'obtenir l'expression de la fonction moment d'ordre 6 du processus aléatoire gaussien :

$$\left. \frac{\partial^6 M}{\partial \theta_1 \cdots \partial \theta_6} \right|_{\{\Theta\}=\{0\}} = -\underbrace{\hat{S}(\Sigma_{ij} \Sigma_{kl} \Sigma_{mn})}_{15 \text{ termes}} = -R^{(6)}(t_1, \dots, t_6) \tag{4.89}$$

Cette fonction nous sera utile dans la suite pour évaluer par exemple :

$$\begin{aligned}
E[u_1^2 u_2^2 u_3 u_4] &= \Sigma_{11} \Sigma_{22} \Sigma_{34} + 2\Sigma_{11} \Sigma_{23} \Sigma_{24} + 2\Sigma_{22} \Sigma_{13} \Sigma_{14} + \Sigma_{12}^2 \Sigma_{34} \\
&\quad + 4\Sigma_{12} \Sigma_{13} \Sigma_{24} + 4\Sigma_{12} \Sigma_{14} \Sigma_{23} + \Sigma_{12}^2 \Sigma_{34}
\end{aligned} \tag{4.90}$$

$$E [u_1^2 u_2^2 u_3^2] = \Sigma_{11} \Sigma_{22} \Sigma_{33} + 8 \Sigma_{12} \Sigma_{23} \Sigma_{31} + 2 \Sigma_{11} \Sigma_{23}^2 + 2 \Sigma_{22} \Sigma_{13}^2 + 2 \Sigma_{33} \Sigma_{12}^2 \quad (4.91)$$

Le calcul des dérivées de la fonction caractéristique a été poussé jusqu'à la dérivée huitième car il s'agit de l'ordre maximal dont nous aurons (localement) besoin dans les développements réalisés dans le reste du document. L'expression complète de la fonction moment d'ordre 8 est assez lourde à présenter puisqu'elle comporte 105 termes. Nous ne la présentons donc pas ici. Nous nous limitons à donner l'expression de la fonction moment d'ordre 4 du carré du processus aléatoire $y(t) = u^2(t)$:

$$\begin{aligned} E [u_1^2 u_2^2 u_3^2 u_4^2] = & 4 \Sigma_{12}^2 \Sigma_{34}^2 + 4 \Sigma_{13}^2 \Sigma_{24}^2 + 4 \Sigma_{14}^2 \Sigma_{23}^2 \\ & + 2 \Sigma_{12}^2 \Sigma_{33} \Sigma_{44} + 2 \Sigma_{13}^2 \Sigma_{22} \Sigma_{44} + 2 \Sigma_{14}^2 \Sigma_{22} \Sigma_{33} + \\ & + 2 \Sigma_{11} \Sigma_{22} \Sigma_{34}^2 + 2 \Sigma_{11} \Sigma_{33} \Sigma_{24}^2 + 2 \Sigma_{11} \Sigma_{44} \Sigma_{23}^2 \\ & + 16 \Sigma_{12} \Sigma_{13} \Sigma_{24} \Sigma_{34} + 16 \Sigma_{12} \Sigma_{14} \Sigma_{23} \Sigma_{34} + 16 \Sigma_{13} \Sigma_{14} \Sigma_{23} \Sigma_{24} \\ & + 8 \Sigma_{12} \Sigma_{13} \Sigma_{23} \Sigma_{44} + 8 \Sigma_{12} \Sigma_{14} \Sigma_{24} \Sigma_{33} + 8 \Sigma_{13} \Sigma_{14} \Sigma_{34} \Sigma_{22} \\ & + 8 \Sigma_{23} \Sigma_{24} \Sigma_{34} \Sigma_{11} + \Sigma_{11} \Sigma_{22} \Sigma_{33} \Sigma_{44} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Les développements que nous venons de reprendre en détails peuvent être généralisés. Il est vrai que les expressions des dérivées successives de la fonction caractéristique sont assez complexes. En réalité, seules leurs expressions en $\{\Theta\} = \{0\}$ nous intéressent. Ces expressions peuvent se résumer à :

$$R^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \hat{S}(\Sigma_{i_1 i_2} \dots \Sigma_{i_{n-1} i_n}) & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (4.93)$$

Cette relation générale sera utilisée tout au long du document. Elle permet d'obtenir des relations comme celles des équations 4.90 et 4.91. Beaucoup d'autres applications de cette relation seront données dans la suite. Rappelons que la seule limitation de cette relation consiste en la nécessité de travailler avec un processus gaussien. La relation 4.93 est particulièrement intéressante pour nous car elle permet d'évaluer les fonctions moments de formes polynômiales de processus gaussiens (4.83, 4.91).

Pour conclure ces développements théoriques, rappelons que les fonctions moments de tous ordres ne dépendent que de $[\Sigma]$, c'est-à-dire des caractéristiques d'ordre 2 du processus aléatoire. Il en résulte donc que, pour un processus aléatoire gaussien, les caractéristiques d'ordre 2 suffisent à sa caractérisation et que la connaissance de la matrice des covariances $[\Sigma]$ donne ipso facto accès aux fonctions moments d'ordres supérieurs.

4.4 Réponse de l'oscillateur au premier ordre

Après cette remise à niveau sur les notions élémentaires de moments, moments centrés, cumulants et fonctions moment, revenons au problème qui nous intéresse, c'est-à-dire celui de la résolution de :

$$\ddot{x}(t) + 2\varpi \xi \dot{x}(t) + \varpi^2 x(t) = \gamma [\bar{U} + u(t)]^2 \quad (4.94)$$

où le terme de chargement non linéaire a été conservé. Le calcul de la réponse de l'oscillateur au premier ordre peut être entrepris comme au chapitre précédent. En prenant l'espérance mathématique membre à membre, on obtient :

$$\varpi^2 \mu_x = E \left[\gamma [\bar{U} + u(t)]^2 \right] = \gamma (\bar{U}^2 + \sigma_u^2) \quad (4.95)$$

Le terme σ_u^2 intervenant dans l'expression de la moyenne du déplacement structurel provient du terme quadratique de chargement $(u^2(t))$. Voici donc la première influence de ce terme de chargement. Il s'agit d'une influence sur le déplacement moyen de la structure. L'influence va toujours dans le sens d'une augmentation du déplacement moyen. L'importance de ce terme peut être quantifiée à l'aide du coefficient $\zeta_1 \geq 1$:

$$\zeta_1 = \frac{\bar{U}^2 + \sigma_u^2}{\bar{U}^2} = 1 + I_u^2 \quad (4.96)$$

obtenu en rapportant le déplacement moyen réel au déplacement moyen obtenu en négligeant le terme quadratique. Pour les ordres de grandeur des intensités de turbulence rencontrées en pratique ($I_u \simeq 10\%$ à 20%), l'effet du terme de second ordre sur le déplacement moyen est assez limité.

4.5 Réponse de l'oscillateur au second ordre

De même que pour la réponse au premier ordre, il n'y a aucune raison pour que les développements du chapitre précédent qui ont permis d'exprimer la réponse structurelle à l'ordre 2 ne soient plus valables. Ainsi, la densité spectrale de la réponse de l'oscillateur étudié s'exprime toujours par le produit de la densité spectrale de la sollicitation par la norme au carré de la fonction de transfert. L'influence du terme quadratique de chargement concerne exclusivement la densité spectrale de la sollicitation. L'objectif principal de ce paragraphe consiste donc en l'étude de l'impact du terme de chargement non linéaire sur la densité spectrale de la sollicitation.

4.5.1 Caractéristiques de la sollicitation

Commençons par les développements analytiques désormais habituels et tentons de déterminer les caractéristiques statistiques de la sollicitation f obtenue en prenant le carré d'un processus aléatoire d'Orstein-Uhlenbeck⁴ :

$$f(t) = \gamma [\bar{U} + u(t)]^2 \quad (4.97)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = -\alpha u(t) + \sigma_u \sqrt{2\alpha} \frac{dB(t)}{dt} \quad (4.98)$$

Puisque nous étudions pour l'instant la réponse au second ordre de la réponse de l'oscillateur, nous nous limitons à déterminer la densité spectrale de l'effort $S_f(\omega)$. Etant donné que l'effort est exprimé en fonction de la vitesse du vent, caractérisée elle-même par sa densité spectrale de puissance $S_u(\omega)$, il semblerait assez logique de mener les

⁴Ce processus n'est en réalité rien d'autre que le processus à corrélation exponentielle discuté au paragraphe précédent

développements dans le domaine fréquentiel. Ils peuvent cependant être réalisés soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine fréquentiel.

Bien que l'on ait décidé de travailler pour le moment avec une vitesse de vent caractérisée par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, il faut cependant garder à l'esprit que les densités spectrales réelles devront également pouvoir être utilisées. Nous recherchons donc une méthode générale, permettant de donner la densité spectrale du carré d'un processus aléatoire caractérisé lui-même par sa densité spectrale. Nous allons voir que les développements dans le domaine fréquentiel ne sont pas nécessairement évidents. Deux approches, une dans chacun des domaines, seront donc présentées.

Dans le domaine fréquentiel

Le problème que l'on se propose actuellement de résoudre est illustré ci-dessous ; il tient en cette simple question : quelle est la densité spectrale de $f(t) = \gamma [\bar{U} + u(t)]^2$ sachant que le processus $u(t)$ est déterminé par la densité spectrale de puissance $S_u(\omega)$?

$$\begin{array}{ccc} u & \rightarrow & S_u(\omega) \\ \downarrow & & \updownarrow ? \\ f = \gamma [\bar{U} + u]^2 & & S_f(\omega) \end{array}$$

Le premier élément de réponse se base sur une propriété importante des densités spectrales (sous-jacente à l'hypothèse d'ergodicité) stipulant que la densité spectrale d'un processus aléatoire peut être évaluée à partir de la norme au carré de la transformée de Fourier d'un échantillon représentatif. Avant de résoudre le problème au niveau des densités spectrales, il convient donc de l'étudier au niveau de la transformée de Fourier d'un échantillon $u(t)$ du processus aléatoire. Le théorème de dualité constitue la propriété fondamentale de la transformée de Fourier. Il établit qu'à un produit de fonctions dans l'un des deux domaines correspond une convolution dans l'autre domaine, soit :

$$F(x \otimes y) = Fx Fy \quad (4.99)$$

$$F(xy) = Fx \otimes Fy \quad (4.100)$$

où l'opérateur F symbolise la transformée de Fourier et l'opérateur $\otimes$ représente la convolution. Le résultat escompté est obtenu en particulierisant cette dernière relation à $x = u$ et $y = u$:

$$F(u^2) = Fu \otimes Fu \quad (4.101)$$

la transformée de Fourier du carré d'un signal (en temporel) peut donc être obtenue en réalisant l'auto-convolution de la transformée de Fourier de ce signal⁵. L'application de cette propriété au problème étudié donne :

$$\begin{aligned} F[\gamma (\bar{U} + u)^2] &= \gamma F[\bar{U} + u] \otimes F[\bar{U} + u] \\ &= \gamma (\bar{U} \delta(\omega) + F[u]) \otimes (\bar{U} \delta(\omega) + F[u]) \end{aligned} \quad (4.102)$$

où la propriété de linéarité de l'opérateur de Fourier a été utilisée et la dernière relation est obtenue en considérant que $\bar{U}$ est une constante. Compte tenu de la propriété

⁵ c'est-à-dire en convoluant la transformée de Fourier de ce signal avec elle-même.

de distributivité de l'opération de convolution⁶, on peut aussi écrire :

$$F \left[\gamma (\bar{U} + u)^2 \right] \quad (4.103)$$

$$= \gamma \bar{U}^2 \left(\delta(\omega) \otimes \delta(\omega) + \delta(\omega) \otimes \frac{F[u]}{\bar{U}} + \frac{F[u]}{\bar{U}} \otimes \delta(\omega) + \frac{F[u]}{\bar{U}} \otimes \frac{F[u]}{\bar{U}} \right) \quad (4.104)$$

$$= \gamma \bar{U}^2 \left(\delta(\omega) + \vartheta(-\omega) + \vartheta(\omega) + \underbrace{\vartheta(\omega) \otimes \vartheta(\omega)}_{\frac{F[u^2(t)]}{\bar{U}^2}} \right) \quad (4.105)$$

où nous avons utilisé la notation $\vartheta(\omega) = \frac{F[u]}{\bar{U}}$ pour simplifier l'écriture. Cette dernière relation constitue l'expression de la transformée de Fourier de la force sollicitant l'oscillateur simple. Il reste à en prendre la norme au carré afin d'obtenir une estimation de sa densité spectrale :

$$\begin{aligned} & \left| F \left[\gamma (\bar{U} + u)^2 \right] \right|^2 \\ &= F \left[\gamma (\bar{U} + u)^2 \right] \overline{F \left[\gamma (\bar{U} + u)^2 \right]} \\ &= \gamma^2 \bar{U}^4 \delta(\omega) \left[\delta(\omega) + \overline{\vartheta(\omega)} + \overline{\vartheta(-\omega)} + \overline{\vartheta(\omega) \otimes \vartheta(\omega)} \right] \\ & \quad + \gamma^2 \bar{U}^4 (\vartheta(\omega) + \vartheta(-\omega)) \left[\delta(\omega) + \overline{\vartheta(\omega)} + \overline{\vartheta(-\omega)} + \overline{\vartheta(\omega) \otimes \vartheta(\omega)} \right] \\ & \quad + \gamma^2 \bar{U}^4 (\vartheta(\omega) \otimes \vartheta(\omega)) \left[\delta(\omega) + \overline{\vartheta(\omega)} + \overline{\vartheta(-\omega)} + \overline{\vartheta(\omega) \otimes \vartheta(\omega)} \right] \end{aligned} \quad (4.106)$$

L'objectif que nous nous sommes fixé est de pouvoir exprimer la densité spectrale de la sollicitation à partir de celle de la composante turbulente du vent, ce qui revient à exprimer l'expression 4.106 est fonction de $F[u] \overline{F[u]}$ ou $\vartheta(\omega) \overline{\vartheta(\omega)}$ uniquement. Plusieurs pistes de développements peuvent être menées à partir de cette expression mais il n'est guère évident d'aboutir à l'expression simple recherchée.

Bien que l'on s'attende à un développement plus simple dans le domaine fréquentiel (puisque la turbulence u est caractérisée par sa densité spectrale), le raisonnement qui vient d'être entrepris montre que ces développements ne sont en définitives pas aussi simples que prévus. Nous allons voir que le problème peut par contre être résolu assez facilement dans le domaine temporel.

Dans le domaine temporel

Au lieu de raisonner sur les densités spectrales de puissance, nous allons reporter le problème au niveau des fonctions d'autocorrélation : admettons que l'on désire déterminer la fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire obtenu en prenant le carré d'un autre processus caractérisé lui-même par sa fonction d'autocorrélation. Ce problème est illustré ci-dessous. Notons dès à présent qu'il s'apparente aux développements théoriques élémentaires du paragraphe 4.3.

$$\begin{array}{ccc} u & \rightarrow & R_u(t_1, t_2) \\ \downarrow & & \updownarrow ? \\ f = \gamma [\bar{U} + u]^2 & & R_f(t_1, t_2) \end{array}$$

⁶ $(f + g) \otimes (f + g) = f \otimes f + f \otimes g + g \otimes f + g \otimes g$

La fonction d'autocorrélation des forces appliquées s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 R_f(\tau) &= E[f(t)f(t+\tau)] \\
 &= E\left[\gamma^2 [\bar{U} + u(t)]^2 [\bar{U} + u(t+\tau)]^2\right] \\
 &= \gamma^2 \bar{U}^4 E\left[\left(1 + 2\frac{u(t)}{\bar{U}} + \frac{u^2(t)}{\bar{U}^2}\right) \left(1 + 2\frac{u(t+\tau)}{\bar{U}} + \frac{u^2(t+\tau)}{\bar{U}^2}\right)\right] \\
 &= \gamma^2 \bar{U}^4 \left[1 + 2\frac{\sigma_u^2}{\bar{U}^2} + 4\frac{R_u(\tau)}{\bar{U}^2} + 2\frac{E[u(t)u^2(t+\tau) + u^2(t)u(t+\tau)]}{\bar{U}^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{E[u^2(t)u^2(t+\tau)]}{\bar{U}^4}\right] \tag{4.107}
 \end{aligned}$$

où nous avons donc essayé d'exprimer la fonction d'autocorrélation de l'effort appliqué $R_f(\tau)$ en fonction de celle de la vitesse du vent $R_u(\tau)$. Cette démarche rejoint effectivement les développements indiqués lors de l'étude des fonctions moments.

Finalement, l'expression 4.107 est assez compacte. Au vu des développements présentés au paragraphe 4.3, deux termes pourraient éventuellement être simplifiés davantage :

- $E[u(t)u^2(t+\tau) + u^2(t)u(t+\tau)]$ est une fonction moment de rang impair d'un processus gaussien centré. Nous avons vu que ces fonctions étaient obligatoirement nulles ;
- $E[u^2(t)u^2(t+\tau)]$ est une fonction moment de quatrième rang. Cette fonction est assez particulière car il s'agit de la fonction d'autocorrélation du processus $u^2(t)$. Nous avons démontré qu'elle pouvait également s'exprimer, pour un processus aléatoire gaussien centré par : $R_{u^2}(\tau) = \sigma_u^4 + 2R_u^2(\tau)$

Pour autant que l'on travaille avec un processus $u(t)$ gaussien et centré, ce qui est toujours le cas dans le domaine du vent turbulent, nous arrivons à cette relation tout à fait générale, valable quelle que soit la fonction d'autocorrélation de la composante turbulente du vent :

$$R_f(\tau) = \gamma^2 \bar{U}^4 \left[(1 + I_u^2)^2 + 4\frac{R_u(\tau)}{\bar{U}^2} + \frac{2R_u^2(\tau)}{\bar{U}^4} \right] \tag{4.108}$$

où $I_u = \frac{\sigma_u}{\bar{U}}$ représente l'intensité de la turbulence. Les développements de ce chapitre visent une prise en compte du terme quadratique du chargement éolien. Si ce terme n'avait pas été considéré, nous aurions obtenu :

$$R_{fin}(\tau) = \gamma^2 \bar{U}^4 E\left[\left(1 + 2\frac{u(t)}{\bar{U}}\right) \left(1 + 2\frac{u(t+\tau)}{\bar{U}}\right)\right] \tag{4.109}$$

$$= \gamma^2 \bar{U}^4 \left[1 + 4\frac{R_u(\tau)}{\bar{U}^2}\right] \tag{4.110}$$

La différence entre la fonction d'autocorrélation exacte $R_f(\tau)$ et celle obtenue par linéarisation du problème, au sens stochastique du terme, $R_{fin}(\tau)$ permet d'estimer l'erreur commise en négligeant le terme de chargement quadratique. L'application de ces

relations au processus d'Orstein-Uhlenbeck donne :

$$R_f(\tau) = \gamma^2 \bar{U}^4 \left[(1 + I_u^2)^2 + 4I_u^2 e^{-\alpha|\tau|} + 2I_u^4 e^{-2\alpha|\tau|} \right] \quad (4.111)$$

$$R_{fin}(\tau) = \gamma^2 \bar{U}^4 \left[1 + 4I_u^2 e^{-\alpha|\tau|} \right] \quad (4.112)$$

On peut constater que la fonction d'autocorrélation approchée constitue un développement limité au premier ordre en I_u^2 de la fonction d'autocorrélation exacte. Puisque les intensités de turbulence rencontrées dans les cas pratiques d'analyse au vent (hormis les cyclones et tornades) sont généralement comprises entre 10% et 25%, ceci permettrait éventuellement de justifier le recours à la linéarisation stochastique.

Retour au domaine fréquentiel

La relation 4.108 qui vient d'être établie dans le domaine fréquentiel est la relation recherchée entre les fonctions d'autocorrélation de la turbulence du vent et de la sollicitation appliquée à l'oscillateur. L'application de la transformée de Fourier aux deux membres de cette relation va nous permettre d'obtenir une expression équivalente dans le domaine fréquentiel.

Rappelons tout d'abord que les relations de Wiener-Khintchine permettent de relier la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale au travers de la transformée de Fourier :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} F[R(t)] \quad (4.113)$$

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 2\pi F^{-1}[S(\omega)] \quad (4.114)$$

Notons également que la transformée de Fourier d'une constante a est une fonction de Dirac d'intensité $2\pi a$ ⁷ :

$$F[a] = a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi a \delta(\omega) \quad (4.115)$$

Les quelques développements qui suivent sont assez élémentaires. Nous jugeons cependant leur présentation nécessaire car la définition de la densité spectrale de puissance à un facteur 2π près de la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation peut rendre les développements flous. La présence du même facteur dans l'expression de la transformée de Fourier d'une constante mêle davantage les choses. La présentation de ces développements nous semble nécessaire afin de bien comprendre l'origine des relations utilisées.

Le théorème de dualité peut être formulé grâce à la relation 4.115. Il permet d'exprimer que la transformée de Fourier d'un produit dans le domaine temporel s'exprime par

⁷Cette intégrale est difficile à justifier mais le calcul devient évident en considérant que :

$$F^{-1}[2\pi a \delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi a \delta(\omega) e^{i\omega t} d\omega = a$$

une convolution dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned}
 F[x(t)y(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega_1)Y(\omega_2)e^{i\omega_1 t}e^{i\omega_2 t}e^{-i\omega t} d\omega_1 d\omega_2 dt \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega_1)Y(\omega_2)2\pi\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) d\omega_1 d\omega_2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega_1)Y(\omega - \omega_1) d\omega_1
 \end{aligned} \tag{4.116}$$

En appliquant ce théorème au carré de la fonction d'autocorrélation, on obtient :

$$\begin{aligned}
 F[R^2(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[R_u(\tau)]_{\omega=\omega_1} F[R_u(\tau)]_{\omega=\omega-\omega_1} d\omega_1 \\
 &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1)S_u(\omega - \omega_1) d\omega_1
 \end{aligned} \tag{4.117}$$

En prenant la transformée de Fourier membre à membre de la relation 4.108, on obtient son équivalent dans le domaine fréquentiel, valable quelle que soit la densité spectrale de la composante turbulente du vent (pour autant qu'elle soit gaussienne) :

$$\begin{aligned}
 F[R_f(\tau)] &= \gamma^2 \bar{U}^4 F \left[(1 + I_u^2)^2 + 4 \frac{R_u(\tau)}{\bar{U}^2} + \frac{2R_u^2(\tau)}{\bar{U}^4} \right] \\
 2\pi S_f(\omega) &= \gamma^2 \bar{U}^4 \left[(1 + I_u^2)^2 2\pi\delta(\omega) + 4 \frac{2\pi S_u(\omega)}{\bar{U}^2} + 2 \frac{2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1)S_u(\omega - \omega_1) d\omega_1}{\bar{U}^4} \right] \\
 S_f(\omega) &= \gamma^2 \bar{U}^4 \left[(1 + I_u^2)^2 \delta(\omega) + 4 \frac{S_u(\omega)}{\bar{U}^2} + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_u(\omega_1)}{\bar{U}^2} \frac{S_u(\omega - \omega_1)}{\bar{U}^2} d\omega_1 \right]
 \end{aligned} \tag{4.118}$$

La relation 4.118 est la relation que l'on aurait obtenue en menant à terme les développements du paragraphe précédent lié à la première approche dans le domaine fréquentiel. La relation 4.118 constitue l'expression de la densité spectrale de sollicitation $S_f(\omega)$ que nous désirions exprimer en fonction de la densité spectrale de la composante turbulente du vent $S_u(\omega)$. Si le terme de chargement quadratique avait été négligé, nous aurions obtenu l'expression de la densité spectrale de puissance du chapitre précédent :

$$S_{fin}(\omega) = \gamma^2 \bar{U}^4 \left[\delta(\omega) + 4 \frac{S_u(\omega)}{\bar{U}^2} \right] \tag{4.119}$$

où la fonction de Dirac est cette fois présente car nous avons conservé dans l'analyse le terme de chargement moyen. On peut en effet se convaincre assez aisément que l'intensité de la fonction de Dirac centrée en $\omega = 0$ dans une densité spectrale de puissance correspond au carré de la moyenne du processus étudié. En rapportant les intensités de ces fonctions de Dirac présentes dans les expressions exacte (4.118) et linéarisée (4.119) de la sollicitation, on peut en effet retrouver le premier facteur d'impact introduit à la relation 4.96 à l'occasion de l'étude des caractéristiques d'ordre 1 de la réponse.

Afin de laisser de côté cet effet de chargement moyen différent, nous pouvons redéfinir les densités spectrales de sollicitation (exacte ou linéarisée) par :

$$S_f(\omega) = 4\gamma^2 \bar{U}^2 S_u(\omega) + 2\gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1) S_u(\omega - \omega_1) d\omega_1 \quad (4.120)$$

$$S_{fin}(\omega) = 4\gamma^2 \bar{U}^2 S_u(\omega) \quad (4.121)$$

Le terme de chargement quadratique modifie donc l'expression de la sollicitation en ajoutant le terme d'autoconvolution. Etant donné que la densité spectrale de la vitesse du vent $S_u(\omega)$ est une grandeur toujours positive, le complément de densité spectrale de sollicitation est donc toujours positif. Négliger le terme de chargement non linéaire revient donc à sous-estimer dans tous les cas la densité spectrale de sollicitation. Cette sous-estimation n'est cependant pas très importante. En effet, il suffit de considérer l'énergie associée à ce complément de densité spectrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2\gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1) S_u(\omega - \omega_1) d\omega_1 d\omega = 2\gamma^2 \sigma_u^4 \quad (4.122)$$

Pour les intensités de turbulence rencontrées en pratique, ce complément de variance est donc très petit vis-à-vis de la variance de la sollicitation obtenue en linéarisant le chargement ($4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2$). On peut donc annoncer que les effets du terme non linéaire du chargement sont globalement très faibles. Les effets du terme non linéaire du chargement peuvent être quantifiés précisément en comparant les écarts-types des sollicitations obtenus en conservant et en négligeant le terme discuté :

$$\sigma_f^2 = \gamma^2 \bar{U}^4 (4I_u^2 + 2I_u^4) \quad (4.123)$$

$$\sigma_{fin}^2 = \gamma^2 \bar{U}^4 4I_u^2 \quad (4.124)$$

$$\zeta_2 = \frac{\sigma_f}{\sigma_{fin}} = \sqrt{\frac{\sigma_f^2}{\sigma_{fin}^2}} = \sqrt{\frac{\gamma^2 \bar{U}^4 (4I_u^2 + 2I_u^4)}{\gamma^2 \bar{U}^4 4I_u^2}} = \sqrt{1 + \frac{I_u^2}{2}} \simeq 1 + \frac{I_u^2}{4} \quad (4.125)$$

soit une erreur, de nouveau insécuroitaire, mais tout à fait insignifiante, de l'ordre du pourcent.

Il convient cependant de noter qu'une faible modification au niveau de l'énergie totale de la sollicitation peut s'accompagner d'une influence substantielle sur les déplacements de l'oscillateur. Pour preuve, il suffit de considérer que le complément de sollicitation soit concentré dans une gamme de fréquence proche de la fréquence propre de l'oscillateur et dans laquelle la sollicitation linéarisée présente une densité spectrale assez faible. Dans les paragraphes qui suivent, nous allons tenter de clarifier l'impact de l'autoconvolution de la densité spectrale sur la réponse du système étudié.

A titre illustratif, le calcul du complément de densité spectrale de sollicitation peut être particularisé au problème que nous étudions analytiquement :

$$S_u(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha \sigma_u^2}{\alpha^2 + \omega^2} \implies \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1) S_u(\omega - \omega_1) d\omega_1 = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha \sigma_u^4}{4\alpha^2 + \omega^2} \quad (4.126)$$

Dans cet exemple simple, la densité spectrale de la sollicitation prend donc la forme suivante :

$$S_f(\omega) = \gamma^2 \bar{U}^4 \left[\frac{\alpha}{\pi} \frac{4I_u^2}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{\alpha}{\pi} \frac{4I_u^4}{4\alpha^2 + \omega^2} \right] \quad (4.127)$$

$$S_{fin}(\omega) = \gamma^2 \bar{U}^4 \frac{\alpha}{\pi} \frac{4I_u^2}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (4.128)$$

L'expression du facteur ζ_2 peut être retrouvé assez facilement sur cette relation particulière⁸.

4.5.2 Réponse du système 1-DDL

Même si l'approximation en bruit blanc pour le calcul de la réponse d'un oscillateur simple n'est pas rigoureuse, il n'en reste pas moins que la bonne interprétation physique qu'elle fournit peut être utilisée pour développer certains raisonnements simples. Cette formulation montre que la réponse d'un oscillateur simple ne dépend pas uniquement de la variance de l'effort appliqué (partie quasi-statique) mais également de la valeur de la densité spectrale de sollicitation, au niveau de la pulsation propre de l'oscillateur étudié (partie dynamique).

Si l'oscillateur répondait de façon quasi-statique, l'erreur commise sur l'estimation de l'écart type du déplacement correspondrait à l'erreur commise sur l'écart type de la sollicitation et serait donnée par la relation 4.125. Pour autant que les structures étudiées soient assez souples, la contribution dynamique prend également une certaine importance, si bien que l'erreur commise en pratique, en négligeant les termes de second ordre dans le chargement du vent, peut être plus importante. Tout au long de ce paragraphe, nous nous proposons d'en réaliser l'étude. Les variances des déplacements, vitesses et accélérations pourraient a priori être déterminées par une des différentes méthodes présentées au chapitre précédent. Nous nous limiterons cependant à étudier la réponse du système à l'aide de l'approximation en bruit blanc dans un premier temps (car elle facilite grandement l'interprétation physique) puis à l'aide de la méthode exacte afin d'obtenir des résultats plus rigoureux.

Afin de présenter les éléments de réflexion dans un ordre de difficulté, nous présentons d'abord l'analyse d'une structure soumise à un processus aléatoire à corrélation exponentielle. Ensuite, nous généraliserons les développements et commentaires formulés pour des formes tout à fait quelconques de densités spectrales de sollicitation.

Approximation en bruit blanc

Au chapitre précédent, nous avons présenté l'approximation en bruit blanc comme une méthode fulgurante permettant d'éviter l'intégration numérique des densités spectrales lors de la détermination des moments spectraux. Etant donné que nous disposons

⁸On peut également vérifier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\alpha \sigma_u^4}{4\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \sigma_u^4$$

ce qui était exprimé de façon plus générale à la relation 4.122.

maintenant de la densité spectrale de la sollicitation, cette méthode peut être mise en pratique de la même façon qu'au chapitre précédent. La variance du déplacement s'exprime par une somme de deux contributions :

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x_{dy}}^2 + \sigma_{x_{qs}}^2 \quad (4.129)$$

où

$$\sigma_{x_{dy}}^2 = S_f(\varpi) \frac{1}{\varpi^4} \frac{\pi \varpi}{2\xi} \quad (4.130)$$

$$\sigma_{x_{qs}}^2 = \frac{\sigma_f^2}{\varpi^4} \quad (4.131)$$

En négligeant le terme quadratique du chargement, les erreurs commises sur chacune de ces contributions s'expriment à l'aide des rapports :

$$\frac{\sigma_{x_{dy}}^2}{\sigma_{x_{dylin}}^2} = \frac{S_f(\varpi)}{S_{flin}(\varpi)} = \frac{\frac{\alpha}{\pi} \frac{4I_u^2}{\alpha^2 + \varpi^2} + \frac{\alpha}{\pi} \frac{4I_u^4}{4\alpha^2 + \varpi^2}}{\frac{\alpha}{\pi} \frac{4I_u^2}{\alpha^2 + \varpi^2}} = 1 + I_u^2 \frac{1 + \varphi^2}{4 + \varphi^2} \quad (4.132)$$

$$\frac{\sigma_{x_{qs}}^2}{\sigma_{x_{qslin}}^2} = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_{flin}^2} = 1 + \frac{I_u^2}{2} \quad (4.133)$$

L'expression de l'erreur commise sur la contribution quasi-statique a été commenté ci-avant : il ne dépend bien sûr que de l'erreur commise sur la variance de l'effort appliqué. Quant à l'erreur commise sur la contribution dynamique, elle dépend directement de l'importance du complément de densité spectrale $\left(\frac{\alpha}{\pi} \frac{4I_u^4}{4\alpha^2 + \varpi^2}\right)$ vis-à-vis de la densité spectrale stochastiquement linéarisée $\left(\frac{\alpha}{\pi} \frac{4I_u^2}{\alpha^2 + \varpi^2}\right)$. Ces deux densités spectrales n'étant pas homothétiques, il n'est donc pas étrange d'y retrouver l'influence de la pulsation propre du système $\varphi = \frac{\varpi}{\alpha}$.

Pour la sollicitation particulière choisie, l'erreur sur la contribution dynamique est minimale et vaut $1 + \frac{I_u^2}{4}$, pour les structures excessivement souples ($\varphi \ll 1$) et augmente jusqu'à une valeur de $1 + I_u^2$ pour les structures plus raides rencontrées en pratique. L'erreur réalisée sur l'estimation de la variance ne peut alors qu'être intermédiaire entre ces deux extrêmes. Plus précisément, elle s'exprime à l'aide du rapport :

$$\zeta_3 = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{xlin}^2} = \frac{\sigma_{x_{qs}}^2}{\sigma_{x_{qslin}}^2} + \frac{\sigma_{x_{dy}}^2}{\sigma_{x_{dylin}}^2} = \Psi \left(1 + \frac{I_u^2}{2}\right) + (1 - \Psi) \left(1 + I_u^2 \frac{1 + \varphi^2}{4 + \varphi^2}\right) \quad (4.134)$$

où $\Psi = \frac{\sigma_{x_{qslin}}^2}{\sigma_{xlin}^2} \simeq \frac{\sigma_{x_{qs}}^2}{\sigma_x^2}$ représente l'importance de la partie quasi-statique dans la réponse. Cette relation est représentée à la figure 4.8 pour $\varphi = 10$, soit la plus petite valeur qui puisse raisonnablement être rencontrée dans le domaine du génie civil. Cette valeur correspond à des vitesses moyennes de vent très importantes vis-à-vis de l'échelle de turbulence rapportée à la période propre structurelle. Les courbes en traits discontinus correspondent à l'erreur maximale réalisée sur la contribution dynamique pour φ tendant vers l'infini.

Les développements qui viennent d'être menés constituent une nouvelle démonstration de la rapidité et de la facilité d'interprétation et de mise en oeuvre de l'approximation

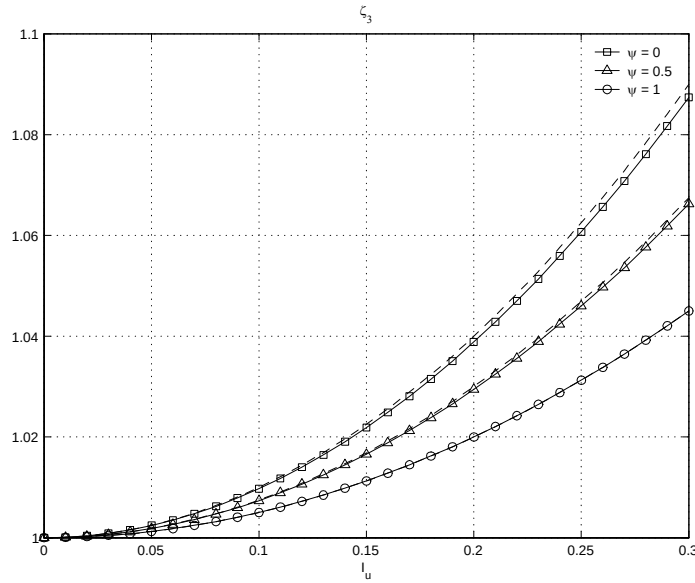


FIG. 4.8 – Estimation, par la méthode d'approximation en bruit blanc, de l'erreur commise sur la variance de la réponse en négligeant le terme de chargement quadratique

en bruit blanc. A titre d'ordre de grandeur, on peut retenir que l'erreur commise sur la variance de la réponse en négligeant le terme non linéaire du chargement est comprise entre $1 + \frac{I_u^2}{2}$ et $1 + I_u^2$.

L'approximation en bruit permet également de donner une idée des variances de la vitesse et de l'accélération. Souvenons-nous que ces deux grandeurs sont estimées sur base d'une contribution dynamique uniquement. Pour les structures rencontrées dans le domaine du génie civil, les erreurs commises sur l'estimation de la vitesse et de l'accélération sont donc de l'ordre de I_u^2 . La courbe $\Psi = 0$ de la figure 4.8 peut servir d'illustration de l'erreur réalisée sur ces grandeurs.

Approche exacte

Après avoir mis en oeuvre l'approximation en bruit blanc et même s'il s'avère qu'à l'ordre 2 les effets du terme non linéaire de chargement sont toujours très limités, il serait néanmoins intéressant de procéder à l'évaluation des grandeurs exactes. Sur l'exemple simple que nous étudions, ces développements peuvent encore être menés de façon analytique. Il va de soi qu'une généralisation de la méthode à d'autres formes de processus aléatoires pour la caractérisation de la turbulence ne peut s'accompagner que de développements numériques. Ces détails seront présentés dans la suite.

La densité spectrale de la réponse s'obtient en multipliant la densité spectrale exacte de la force appliquée par la norme au carré de la fonction de transfert :

$$S_x(\omega) = \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 \alpha}{\pi} \frac{\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{I_u^2}{4\alpha^2 + \omega^2}}{\left[(\varpi^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\varpi)^2 \right]} \quad (4.135)$$

Afin de ne pas alourdir la présentation, nous avons laissé de côté la fonction de Dirac centrée en $\omega = 0$. Ce terme correspond au carré de la force moyenne exercée par le vent et on peut lui attribuer une fonction de Dirac dans la densité spectrale du déplacement qui correspond au carré du déplacement moyen. Son intensité est obtenue en divisant l'intensité du Dirac dans l'effort par $|H(0)|^2 = \varpi^4$. L'erreur réalisée sur le déplacement moyen est donc identique à celle réalisée sur la moyenne de l'effort appliqué. Elle est caractérisée par le paramètre ζ_1 .

La variance ainsi que les moments spectraux d'ordres supérieurs de la réponse s'obtiennent par intégration de la densité spectrale de puissance. Connaissant les résultats du chapitre précédent (Equ. 3.63), la variance exacte de la réponse est immédiate. En effet, la densité spectrale de déplacements peut être décomposée en deux parties. La première partie correspond à la densité spectrale qui aurait été obtenue en linéarisant le problème. Elle a donc déjà été estimée (Equ. 3.63). La seconde correspond au complément de sollicitation et s'obtient instantanément en constatant que le nouvel intégrant est obtenu en remplaçant α par 2α dans la première formulation :

$$\sigma_x^2 = \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^4} \frac{1}{2\xi} \left(\frac{\varphi(1+2\xi\varphi)}{1+2\xi\varphi+\varphi^2} + \frac{I_u^2 \varphi(1+\xi\varphi)}{4+4\xi\varphi+\varphi^2} \right) \quad (4.136)$$

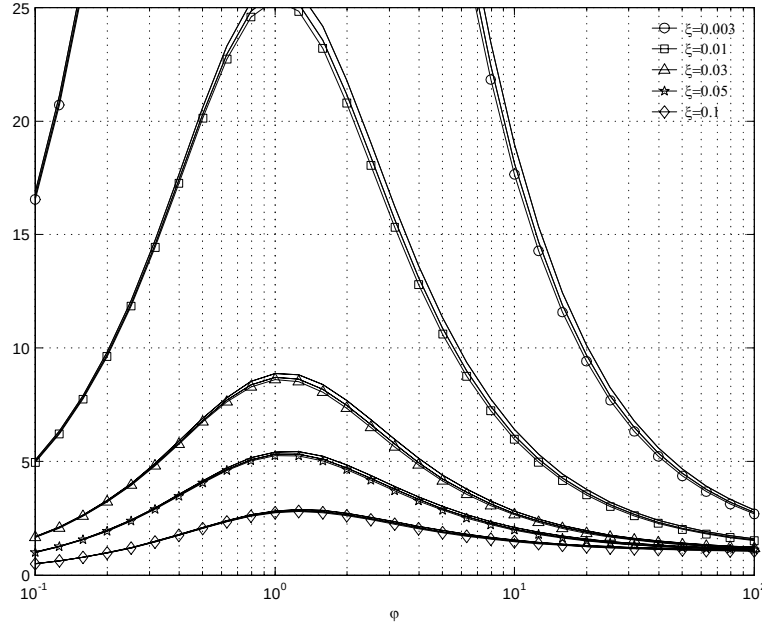


FIG. 4.9 – Coefficient d'amplification dynamique des déplacements, avec prise en compte du terme non linéaire de chargement ($I_u = 10\%$, $I_u = 20\%$, $I_u = 30\%$)

Dans cette expression, le premier facteur représente le déplacement quasi-statique que nous avons déjà obtenu en linéarisant la sollicitation. La fonction adimensionnelle $\frac{1}{2\xi} \left(\frac{\varphi(1+2\xi\varphi)}{(1+2\xi\varphi+\varphi^2)} + \frac{I_u^2 \varphi(1+\xi\varphi)}{(4+4\xi\varphi+\varphi^2)} \right)$ représente donc le nouveau coefficient d'amplification dynamique intégrant les effets du terme de chargement non linéaire⁹. Son comportement

⁹Notons que le coefficient d'amplification dynamique rigoureux devrait être calculé par rapport au

asymptotique pour les structures très raides ($\varphi \rightarrow \infty$) tend vers $1 + \frac{I_u^2}{2}$. Ce résultat est tout à fait logique puisque l'on étudie alors une structure très raide. Le comportement est donc quasi-statique et la variance du déplacement est obtenue en divisant par le carré de la raideur la variance de la sollicitation. C'est le raisonnement que nous avons mené en appliquant l'approximation en bruit blanc.

La figure 4.9 représente le coefficient d'amplification dynamique pour différentes intensités de turbulence. Les courbes marquées par les symboles géométriques correspondent à $I_u = 10\%$. On peut constater que l'intensité de turbulence influence très peu la forme du coefficient d'amplification dynamique. Les formes obtenues à cette figure sont donc très proches du coefficient d'amplification dynamique obtenu sous l'hypothèse de la linéarisation stochastique (Fig. 3.8).

Puisque le second terme de la parenthèse dans l'expression 4.136 est la correction à ajouter au premier terme pour prendre en compte le terme quadratique du chargement, un nouveau facteur d'importance ζ'_3 peut être défini :

$$\zeta'_3 = 1 + I_u^2 \frac{1 + 2\xi\varphi + \varphi^2}{4 + 4\xi\varphi + \varphi^2} \frac{1 + \xi\varphi}{1 + 2\xi\varphi} \quad (4.137)$$

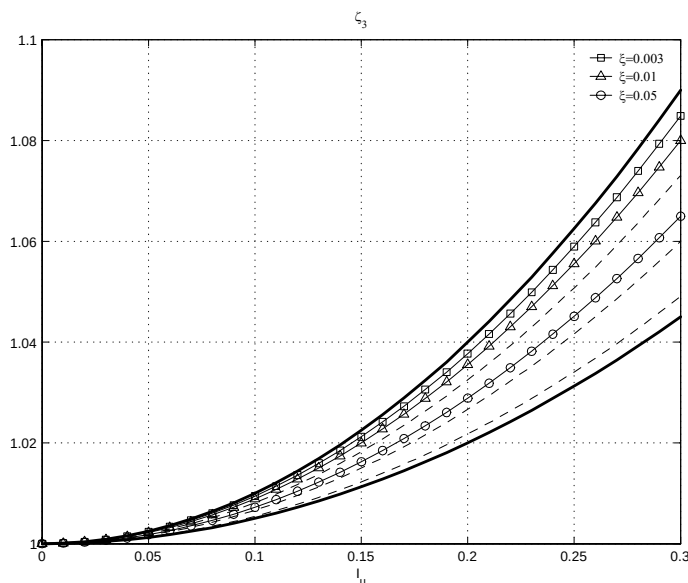


FIG. 4.10 – Influence du terme de chargement quadratique sur la variance du déplacement

La figure 4.10 illustre graphiquement l'erreur qui est en fait réalisée. L'apparente similitude avec la figure 4.8 montre que l'approximation en bruit blanc permettait déjà de donner de bons résultats. Les bornes obtenues lors du raisonnement avec l'approximation en bruit blanc ont été reportées ici en traits gras. Moins le système est amorti, plus la contribution dynamique est importante et plus les termes non linéaires du chargement affectent la variance du déplacement.

déplacement quasi-statique obtenu en conservant le terme non linéaire du chargement.

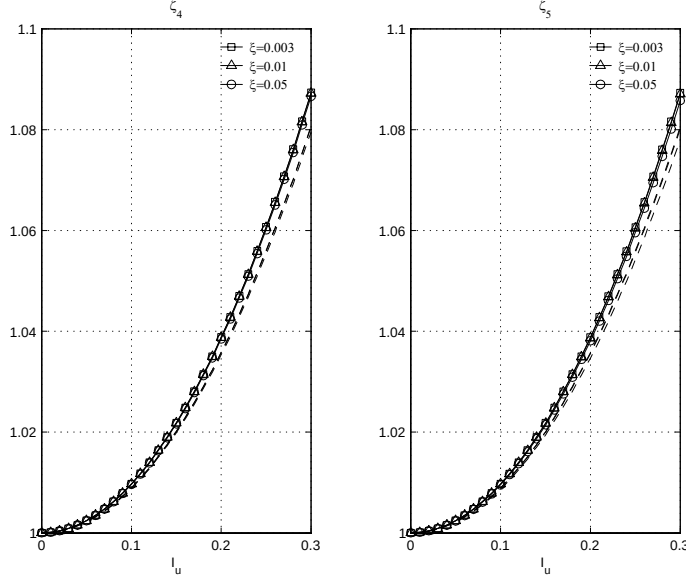


FIG. 4.11 – Influence du terme de chargement quadratique sur les variances de la vitesse et de l'accélération (courbes en traits continus : $\varphi = 10$; courbes en traits discontinus : $\varphi = 5$)

Les considérations menées jusqu'ici peuvent également s'étendre aux vitesses et accélérations. Les densités spectrales exactes de ces deux grandeurs sont obtenues en multipliant la densité spectrale du déplacement par ω^2 et ω^4 respectivement. Les moments d'ordres 2 et 4 peuvent aussi être obtenus très simplement à partir des résultats du chapitre précédent (3.66, 3.67) :

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 \alpha \pi \varpi}{\pi \varpi^4} \frac{\pi \varpi}{2\xi} \left(\frac{\varpi^2}{\alpha^2 + 2\xi\alpha\varpi + \varpi^2} + I_u^2 \frac{\varpi^2}{4\alpha^2 + 4\xi\alpha\varpi + \varpi^2} \right) \quad (4.138)$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 \alpha \pi \varpi}{\pi \varpi^4} \frac{\pi \varpi}{2\xi} \left(\frac{(2\xi\alpha + \varpi) \varpi^3}{\alpha^2 + 2\xi\alpha\varpi + \varpi^2} + I_u^2 \frac{(4\xi\alpha + \varpi) \varpi^3}{4\alpha^2 + 4\xi\alpha\varpi + \varpi^2} \right) \quad (4.139)$$

Deux nouveaux paramètres quantifiant l'impact de termes quadratiques de la turbulence sur la vitesse et l'accélération de l'oscillateur peuvent être introduits :

$$\zeta_4 = 1 + I_u^2 \frac{1 + 2\xi\varphi + \varphi^2}{4 + 4\xi\varphi + \varphi^2} \quad (4.140)$$

$$\zeta_5 = 1 + I_u^2 \frac{1 + 2\xi\varphi + \varphi^2}{4 + 4\xi\varphi + \varphi^2} \frac{2\xi + \varphi}{4\xi + \varphi} \quad (4.141)$$

Ces deux nouvelles fonctions sont reprises à la figure 4.11. On peut y constater une très faible influence du paramètre ξ , ce que semble également montrer les relations analytiques ci-dessus. On peut vérifier que ce type de comportement coïncide très bien avec les résultats obtenus en appliquant la méthode d'approximation en bruit blanc aux vitesses et accélérations (courbes représentées en traits gras à la figure 4.11).

Afin de rendre l'étude exhaustive, les développements peuvent encore continuer avec les estimations de la fréquence de passage par 0, par les maxima relatifs, et finalement l'estimation du facteur de pointe. Au chapitre précédent, nous avons démontré que l'erreur réalisée sur le facteur de pointe était généralement petite vu sa faible sensibilité aux variations de la fréquence de passage par zéro. Nous pouvons tout de même évaluer l'erreur commise sur cette fréquence caractéristique. Elle peut être quantifiée par un sixième paramètre¹⁰ :

$$\begin{aligned}\zeta_6 &= \frac{\nu_0^+}{\nu_{0lin}^+} = \frac{\frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}}{\frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}_{lin}}}{\sigma_{x_{lin}}}} = \frac{\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_{\dot{x}_{lin}}}}{\frac{\sigma_x}{\sigma_{x_{lin}}}} = \frac{\zeta_4}{\zeta_3} \\ &\simeq 1 + I_u^2 \frac{\xi\varphi}{1 + 2\xi\varphi} \frac{1 + 2\xi\varphi + \varphi^2}{4 + 4\xi\varphi + \varphi^2}\end{aligned}\quad (4.142)$$

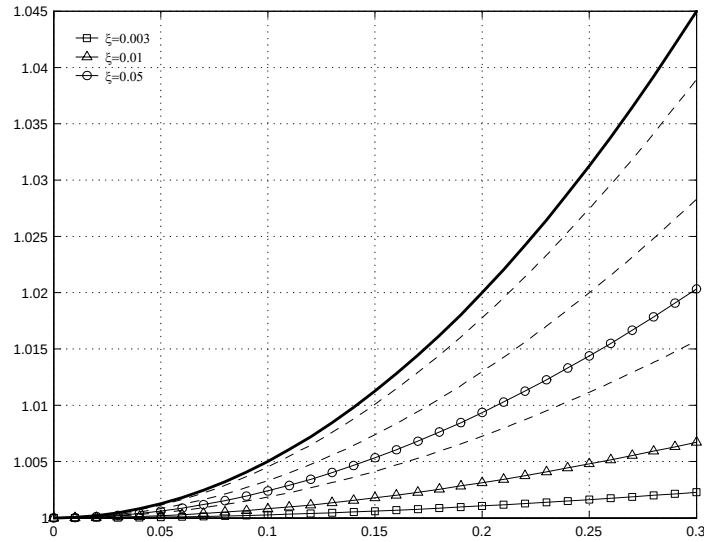


FIG. 4.12 – Influence du terme de chargement quadratique sur la fréquence de passage par zéro

Cette relation est représentée graphiquement à la figure 4.12. Il est intéressant de constater que l'erreur est maintenant systématiquement inférieure à $I_u^2/2$, et d'autant plus grande que φ est grand. Il paraît en effet assez logique de constater une faible modification de cette grandeur étant donné qu'il s'agit d'une caractéristique intrinsèque du système étudié ; même si la sollicitation est modifiée, la structure tend tout de même à répondre à sa fréquence propre, d'autant plus que la contribution dynamique de la réponse est importante (c'est-à-dire que le paramètre φ est petit).

¹⁰Notons que

$$\frac{1 + \alpha I_u^2}{1 + \beta I_u^2} \simeq 1 + (\alpha - \beta) I_u^2$$

Comme prévu, une erreur aussi faible sur la fréquence de passage par zéro ne donnera qu'une modification insignifiante du facteur de pointe et l'on peut ainsi considérer en très bonne approximation qu'en négligeant le terme quadratique, l'erreur réalisée sur la variance du déplacement correspond donc également à l'erreur commise sur le déplacement extrême¹¹.

4.5.3 Extension à une sollicitation quelconque

Introduction

Nous venons de voir, dans le cadre strict d'une sollicitation par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, que le terme non linéaire de chargement affectait de manière presque insignifiante les caractéristiques de second ordre de la réponse d'un oscillateur simple.

L'objectif de ce paragraphe est d'élargir le domaine de validité des conclusions tirées à d'autres types de sollicitations, et essentiellement aux densités spectrales de sollicitation rencontrées dans le domaine du vent. Les conclusions qui doivent être tirées des développements à venir doivent permettre :

- de justifier de manière précise la nécessité ou non de recourir à la prise en compte du terme quadratique ;
- d'aborder avec une bonne maîtrise du problème l'étude d'un système soumis au carré d'un processus aléatoire caractérisé par une densité spectrale quelconque.

Nous allons baser nos développements sur l'approximation en bruit blanc car cette méthode est immédiate, donc idéale pour cette discussion. Il va de soi que si l'autoconvolution de la densité spectrale de vent peut être établie, une approche plus rigoureuse pourrait être obtenue par intégration numérique. Les quatre méthodes qui ont été présentées au chapitre précédent pourraient en réalité être appliquées.

Admettons, à partir de ce point, que la turbulence du vent soit caractérisée par une densité spectrale de puissance quelconque. L'application de l'approximation en bruit blanc, qui semble donner une bonne estimation de l'erreur réalisée, nous apprend que le terme quadratique de chargement aura d'autant plus d'importance que :

- d'une part, la variance associée au complément de densité spectrale de sollicitation est importante vis-à-vis de la variance de la partie linéarisée de l'effort ; nous avons vu dans un raisonnement tout à fait général que l'erreur commise sur la variance de la sollicitation et donc également sur la variance de la réponse quasi-statique était systématiquement égale à $\frac{I_u^2}{2}$, quelle que soit la répartition fréquentielle de l'énergie contenue dans la sollicitation.
- d'autre part, la valeur de la densité spectrale au niveau du pic de résonance est importante dans le complément de densité spectrale vis-à-vis de la valeur correspondante dans la densité spectrale linéarisée (au sens stochastique). Il est assez difficile de démontrer que $\frac{4S_u(\varpi)}{U^2}$ est beaucoup plus important que $\frac{2}{U^4} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1) S_u(\varpi -$

¹¹Le modèle utilisé pour le calcul du facteur de pointe est identique à celui qui est présenté depuis le début du document. Maintenant que le processus étudié n'est plus gaussien, ce modèle n'est plus d'application. Nous verrons au paragraphe 4.9 que le caractère non gaussien de la réponse se manifeste essentiellement par des modification du facteur de pointe.

$\omega_1)d\omega$ de manière tout à fait générale. Cela est même impossible en réalité. En effet, il existe certains cas pour lesquels l'autoconvolution de la densité spectrale adimensionnelle $(S_u(\omega)/\bar{U}^2)$ est beaucoup plus importante que la densité spectrale adimensionnelle elle-même. Nous allons démontrer ceci à l'aide d'un exemple (paragraphe suivant).

Etant donné que le terme de chargement non linéaire peut modifier significativement la contribution dynamique de la réponse, nous ne pouvons donc pas conclure pour l'instant que, quelle que soit la densité spectrale de sollicitation choisie, le terme quadratique n'a qu'une influence limitée sur la variance de la réponse d'un oscillateur simple.

Interprétation physique de l'autoconvolution

Au paragraphe 4.5.1, nous avons constaté que prendre en compte le terme quadratique du chargement revenait à ajouter un complément d'autocorrélation :

$$\Delta R_f(\tau) = 2\gamma^2 R_u^2(\tau) \quad (4.143)$$

à la fonction d'autocorrélation obtenue en pratiquant la linéarisation stochastique. L'équivalent dans le domaine fréquentiel consiste à ajouter un complément de densité spectrale :

$$\Delta S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_u(\omega_1)}{\bar{U}^2} \frac{S_u(\omega - \omega_1)}{\bar{U}^2} d\omega_1 \quad (4.144)$$

à la densité spectrale de force obtenue sans prendre en compte le terme quadratique. Il serait intéressant de pouvoir interpréter physiquement ce passage au carré dans la fonction d'autocorrélation, ou cette convolution de la densité spectrale.

La figure 4.13 illustre l'opération d'autoconvolution. Cette opération consiste à recopier la fonction $\frac{S_u(\omega_1)}{\bar{U}^2}$ en la décalant d'une pulsation ω . L'intégrale du produit des deux fonctions ainsi obtenues (surface sous la courbe en gras) correspond à la valeur de l'autoconvolution pour cette pulsation ω . A la figure 4.13, nous avons représenté le calcul de l'autoconvolution pour quatre pulsations discrètes ($\omega = 1, \omega = 2, \omega = 3, \omega = 4$).

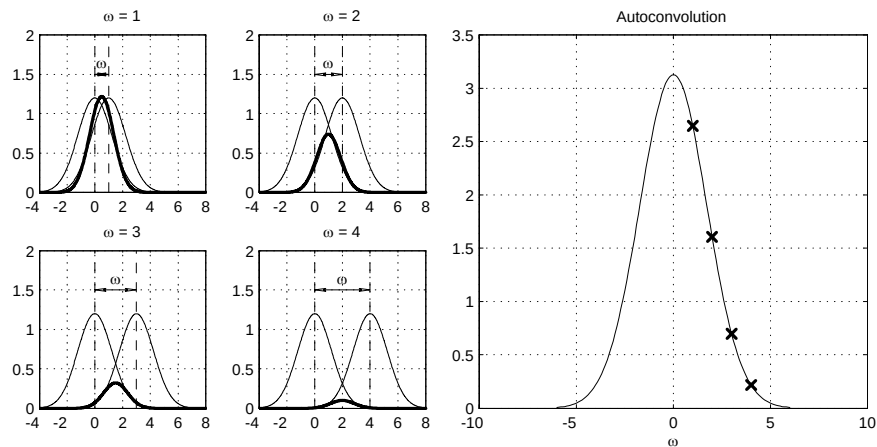


FIG. 4.13 – Illustration de l'opération d'autoconvolution

On comprend à l'aide de cette figure pourquoi l'autoconvolution doit présenter des valeurs importantes dans le voisinage de l'origine.

Lorsque le processus aléatoire étudié est un processus réel, c'est-à-dire que sa densité spectrale est symétrique, seul le résultat des décalages positifs suffit. En effet :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1) S_u(-\omega - \omega_1) d\omega_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1) S_u(\omega + \omega_1) d\omega_1 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\Omega - \omega) S_u(\Omega) d\Omega \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\Omega) S_u(\omega - \Omega) d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.145}$$

ce qui montre que si la densité spectrale est symétrique, il en est alors de même de son autoconvolution. Ceci semble de toute façon assez logique dans la mesure où nous savons que cette autoconvolution représente la densité spectrale d'un processus réel (le carré du processus u) et doit donc être symétrique. Nous ne traiterons donc dans la suite que les décalages positifs.

Continuons notre apprentissage de l'opération d'autoconvolution en considérant le processus aléatoire en bande étroite caractérisé par :

$$S_u(\omega) = \begin{cases} S & \text{si } |\omega \pm \omega_A| \leq \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.146}$$

Cette densité spectrale de puissance présente donc deux pics centrés en $\omega = \pm\omega_A$. L'illustration de la figure 4.13 permet de comprendre facilement que, dans le cas de ce processus en bande étroite, le résultat de l'autoconvolution ne peut être non nul que :

- si le décalage ω est plus petit que $\Delta\omega$ et donc qu'il persiste un recouvrement entre les pics initiaux et décalés ;
- si le décalage ω est de l'ordre de $2\omega_A$ de sorte que le pic en pulsations négatives vienne recouvrir le pic en pulsations positives.

Plus précisément, l'expression analytique de l'autoconvolution de la densité spectrale $S_u(\omega)$ prise pour exemple s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1) S_u(\omega - \omega_1) d\omega_1 = \begin{cases} 2S^2(\Delta\omega - \omega) & \text{si } 0 \leq \omega \leq \Delta\omega \\ S^2(\Delta\omega - |2\omega_A - \omega|) & \text{si } 2\omega_A - \Delta\omega \leq \omega \leq 2\omega_A + \Delta\omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.147}$$

Elle est représentée graphiquement à la figure 4.14. On constate que l'énergie contenue dans le processus résultant de la mise au carré d'un processus en bande étroite se compose de deux contributions équivalentes (du point de vue énergétique) :

- l'une est centrée en $\omega = (\pm) 2\omega_A$. Ceci montre que la période dominante du signal étudié est divisée par 2 (ce que l'on peut observer en élevant au carré un signal sinusoïdal) ;¹²

¹²Il est primordial que les développements soient réalisés sur la densité spectrale complète, définie depuis $-\infty$ jusque $+\infty$. Si nous avons utilisé la densité spectrale définie sur $[0; +\infty]$, la rencontre entre les deux pics pour un décalage $\omega \sim 2\omega_A$ ne se serait pas produite. Cette contribution énergétique centrée sur $2\omega_A$ n'aurait donc pas pu être mise en évidence.

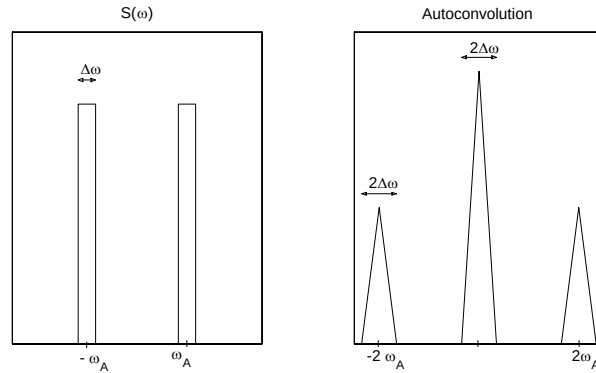


FIG. 4.14 – Autoconvolution d'un processus en bande étroite. Représentation du spectre du processus de départ et du processus autoconvolué.

	u	u^2
$m_0 :$	$2S\Delta\omega$	$4S^2\Delta\omega^2$
$m_2 :$	$2S\Delta\omega \left(\omega_A^2 + \frac{\Delta\omega^2}{12} \right)$	$8S^2\Delta\omega^2 \left(\omega_A^2 + \frac{\Delta\omega^2}{12} \right)$
$m_4 :$	$2S\Delta\omega \left(\omega_A^4 + \frac{\omega_A^2\Delta\omega^2}{2} + \frac{\Delta\omega^4}{80} \right)$	$\frac{4}{15}S^2\Delta\omega^2 (120\omega_A^4 + 30\omega_A^2\Delta\omega^2 + \Delta\omega^4)$
$\omega_0^+ :$	$\omega_A + \frac{\Delta\omega}{24\omega_A}\Delta\omega$	$\sqrt{2}\omega_A + \frac{\Delta\omega}{12\sqrt{2}\omega_A}\Delta\omega$
$\omega_\mu :$	$\omega_A + \frac{5\Delta\omega}{24\omega_A}\Delta\omega$	$2\omega_A + \frac{\Delta\omega}{6\omega_A}\Delta\omega$
$\varepsilon :$	$\frac{\Delta\omega^2}{3\omega_A^2}$	$\frac{1}{2} + \frac{\Delta\omega^2}{24\omega_A^2}$

TAB. 4.10 – Moments spectraux et paramètres spectraux d'un processus en bande étroite et de son autoconvolution

- l'autre contribution se trouve dans les basses fréquences. Elle s'accompagne d'une augmentation de la moyenne du signal (à moyenne nulle au départ) qui a été élevé au carré.

Elever un signal au carré a donc pour effet de modifier assez sérieusement sa forme. Si cette constatation est évidente en observant le signal dans le domaine temporel, elle l'est certainement moins dans le domaine fréquentiel. En termes de moments spectraux et paramètre spectral, quelques grandeurs sont résumées au tableau 4.10. L'analyse du paramètre spectral ε montre de manière assez significative le passage d'un processus en bande étroite ($\varepsilon \sim 0$) à un processus en bande large ($\varepsilon > 0.5$). Les résultats donnés pour ω_0^+ , ω_μ et ε sont des développements en série au premier ordre en $\frac{\Delta\omega}{\omega_A}$.

Revenons maintenant à la discussion sur l'influence du terme quadratique de chargement sur la réponse d'un oscillateur simple. Nous avons décomposé la réponse en deux contributions dont la première, la partie quasi-statique a déjà été largement discutée. Aussi, nous avons vu que la correction (représentant l'influence du terme quadratique) à apporter à la partie dynamique ne dépendait que de l'importance du résultat de l'autoconvolution estimée pour la pulsation propre de l'oscillateur. Le rapport entre cette grandeur et la valeur de la densité spectrale initiale estimée pour la même pulsation constitue un indicateur d'importance des termes quadratiques. Nous voyons que ce rapport peut être aussi grand que l'on veut. En effet, dans l'exemple présenté, il suffirait que la pulsation

propre de la structure étudiée soit $\varpi = 2\omega_A$, ce qui maximiserait l'importance du terme quadratique du chargement.

Nous venons donc ainsi de prouver, à l'aide d'un contre-exemple, que la condition $I_u \ll 1$ ne suffit pas à certifier que les termes quadratiques de chargement apportent des modifications non significatives à la variance de la réponse.

Afin d'illustrer concrètement le genre de situation qui vient d'être présenté, nous avons réalisé l'étude par simulations de Monte Carlo¹³ de la réponse d'un oscillateur simple ($f_{nat} = 1.5Hz$, $\xi = 0.01$) sollicité par un chargement aérodynamique :

$$f(t) = \gamma \bar{U} \left(1 + \frac{u}{\bar{U}}\right)^2 \quad (4.148)$$

où $\gamma \bar{U} = 1$ et où la densité spectrale de $\frac{u}{\bar{U}}$ est donnée par :

$$S_{\frac{u}{\bar{U}}}(f) = \frac{2I_u^2}{\sqrt{2\pi}\Delta} e^{-\frac{(f-f_0)^2}{2\Delta^2}} \quad (4.149)$$

dont on peut vérifier que l'intégration sur les fréquences depuis 0 jusque $+\infty$ permet bien d'obtenir le carré de l'échelle de turbulence. Cette sollicitation est une sollicitation en bande étroite, centrée sur la fréquence principale $f = f_0$. Pour l'application numérique, nous avons choisi : $f_0 = 0.6Hz$ et $\Delta = 0.1Hz$. On peut donc ainsi constater que le contenu fréquentiel de la vitesse du vent est faible dans le voisinage de f_{nat} mais présente une valeur bien plus importante dans le voisinage de $f_{nat}/2$. En accord avec le raisonnement plus général qui vient d'être présenté, ceci laisse donc présumer une certaine importance du terme quadratique de chargement. La figure 4.15 présente, sur la gauche, la densité spectrale de la composante turbulente du vent ($I_u = 20\%$). On peut constater que la vitesse de vent générée (10 échantillons de vitesse de 4096 points chacun, $\Delta f = 4.5E-3$) présente un contenu fréquentiel assez proche de la cible fixée. Pour chacun des échantillons de vitesse générés, la force appliquée sur la structure peut être calculée en conservant ou en négligeant le terme de chargement non linéaire. Les densités spectrales de force ainsi obtenues sont représentées sur la partie droite du graphique. L'ajout du terme non linéaire de chargement ne modifie donc presque pas le contenu énergétique de la sollicitation (surface sous la densité spectrale). Au vu des développements préalables, nous sommes maintenant en mesure de comprendre pourquoi ce terme de chargement modifie le contenu de la sollicitation dans les basses fréquences ainsi que dans le voisinage de $2f_0 = 1.2Hz$.

La figure 4.16 représente des morceaux d'échantillons des forces générées ainsi que les déplacements de l'oscillateur correspondant. On peut de nouveau constater que la différence entre les sollicitations exacte et linéarisée est très faible. L'augmentation du contenu fréquentiel de la sollicitation dans les basses fréquences se traduit, sur ce graphique, par un décalage vers le haut de certains pics de l'échantillon généré.

Bien que la sollicitation soit visiblement plus ou moins identique, la réponse obtenue en conservant ou en négligeant le terme quadratique du chargement peut être substantiellement différente. La présence d'un contenu fréquentiel plus important dans le voisinage de la fréquence propre (lorsque le terme non linéaire est conservé) permet ainsi, bien qu'il

¹³Le chapitre 6 est dédié à la présentation de critères et conditions d'application de la méthode de Monte Carlo. L'exposé complet de la méthode d'analyse par simulation sera donc présenté dans ce chapitre ; l'exemple qui suit doit simplement être considéré comme une illustration.

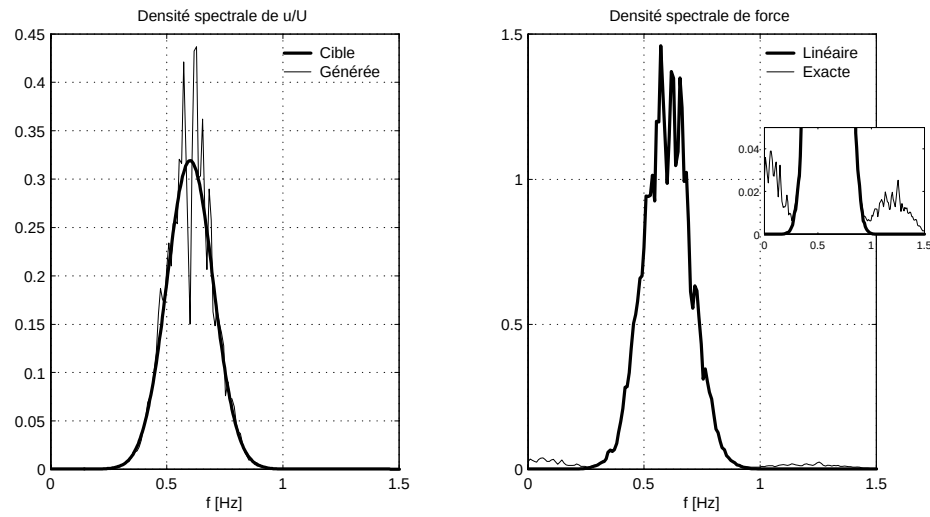


FIG. 4.15 – Densité spectrale de la sollicitation : valeur cible, échantillons sans et avec le terme non linéaire de chargement

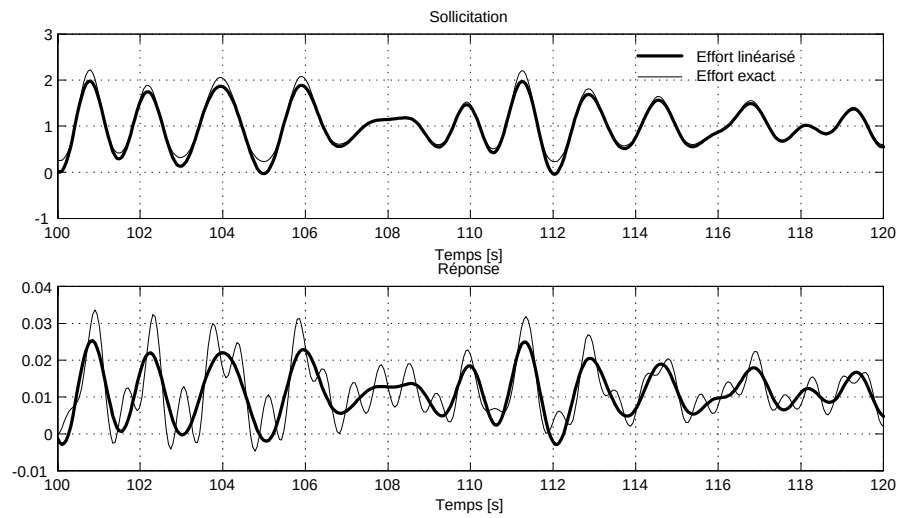


FIG. 4.16 – Représentation de la sollicitation générée et de la réponse correspondante

soit très faible, d'exciter suffisamment la structure pour qu'elle présente une réponse à cette fréquence.

La figure 4.17 représente la densité spectrale de la réponse obtenue en conservant ou en négligeant les termes de chargement non linéaire. L'examen de cette figure confirme le raisonnement qui vient d'être avancé. En termes de variances, nous avons calculé, en prenant une moyenne sur les dix échantillons, que l'écart type de la réponse passe de $0.0078m$, sans le terme non linéaire à $0.0103m$ avec le terme non linéaire, soit une modification de l'ordre de 30%.

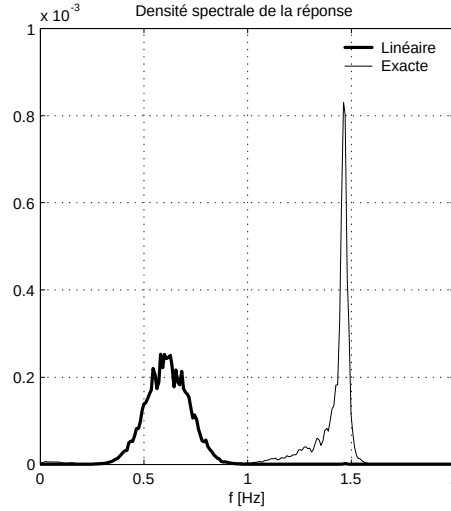


FIG. 4.17 – Densité spectrale de la réponse : avec ou sans le terme non linéaire de chargement

Exemple de processus à contenu fréquentiel monotone

On comprend bien maintenant pourquoi et de quelle manière la contribution dynamique peut prendre assez rapidement de l'importance. D'un autre côté, l'exemple qui vient d'être présenté est sans doute un peu extrême dans la mesure où, en imposant $\varpi = 2\omega_A$, on choisit un contenu fréquentiel de sollicitation nul dans le voisinage de la pulsation propre de la structure mais une autoconvolution du spectre maximale. Ceci ne peut bien sûr se produire qu'avec la sollicitation particulière en bande étroite choisie.

Restreignons à partir de maintenant notre étude aux densités de probabilités monotones (décroissantes pour assurer la signification physique) telles que rencontrées dans le domaine du vent. Etudions la répartition fréquentielle de l'autoconvolution d'un tel spectre. Intuitivement, on peut également pressentir une forme monotone dans la mesure où le contenu de l'autoconvolution dans la bande $[\omega_1; \omega_1 + d\omega_1]$ provenant du contenu du spectre de base dans la bande $\left[\frac{\omega_1}{2}; \frac{\omega_1}{2} + \frac{d\omega_1}{2}\right]$ sera, par comparaison de leurs origines, certainement plus important que le contenu de l'autoconvolution dans la bande $[\omega_2; \omega_2 + d\omega_2]$ avec $\omega_2 > \omega_1$ provenant d'une bande moins alimentée en énergie.

A titre d'exemple, considérons la densité spectrale suivante :

$$S_u(\omega) = \frac{\sigma_u^2}{2} \beta e^{-\beta|\omega|} \quad (4.150)$$

Son autoconvolution peut être assez facilement calculée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1) S_u(\omega - \omega_1) d\omega_1 = \frac{\sigma_u^4 \beta}{4} (\beta |\omega| + 1) e^{-\beta|\omega|} \quad (4.151)$$

La fonction ainsi obtenue est toujours monotone mais décroît moins vite que $S_u(\omega)$. Nous avons vu que le rapport

$$\frac{\frac{2}{U^4} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1) S_u(\omega - \omega_1) d\omega}{\frac{4S_u(\omega)}{U^2}} = \frac{\sigma_u^2}{4U^2} (\beta |\omega| + 1) = \frac{I_u^2}{4} (\beta |\omega| + 1) \quad (4.152)$$

permettait d'exprimer l'erreur commise sur la variance de la réponse en négligeant les termes de sollicitation quadratiques. A nouveau l'intensité de la turbulence joue un rôle important mais on constate également que la pulsation propre de l'oscillateur compte également pour beaucoup. On peut comprendre que les structures les plus raides devraient être les plus affectées.

Application au domaine du vent turbulent

Nous venons de voir comment quantifier de façon très simple et probablement un peu approchée (puisque l'on se base sur l'approximation en bruit blanc) l'erreur commise sur la variance de la réponse. Pour les quelques densités spectrales traitées ci-avant (processus d'Ornstein-Uhlenbeck, processus monochromatique, processus à contenu fréquentiel exponentiel), les développements analytiques sont assez simples et ont pu être menés à bien. Dans ce paragraphe, nous proposons des méthodes d'application aux densités spectrales de vent.

Approche analytique Parmi toutes les méthodes que l'on pourrait mettre en oeuvre, il demeure bien sûr évident que les développements analytiques sont les plus avantageux. En effet, il faut garder à l'esprit que si une forme analytique de l'autoconvolution peut être déterminée, la nouvelle densité spectrale ainsi obtenue peut être utilisée avantageusement pour calculer les caractéristiques statistiques de la réponse. Si une formulation analytique de l'autoconvolution est connue,

- la valeur de cette fonction pour une pulsation particulière (la pulsation propre de l'oscillateur) peut être déterminée, ce qui permet l'application de la méthode d'approximation en bruit blanc ;
- l'écart type de l'autoconvolution est de toute façon connu (σ_u^4), ce qui permet également l'approche de cette densité spectrale par un processus aléatoire d'Ornstein équivalent ;
- plusieurs fréquences représentatives peuvent être choisies et la fonction peut être calculée pour ces différentes fréquences, ce qui permet l'application de l'intégration numérique avec répartition optimale des points d'intégration, ou l'approche de la fonction par une succession de fonctions-impulsions.

La premier avantage de la formulation analytique réside donc en la richesse d'informations et en la liberté d'exploiter la relation analytique obtenue à une fin quelconque. De plus, il convient de remarquer que les développements ne se font qu'une seule fois, lors de l'élaboration de la formule.

Commençons par exemple par le calcul analytique de l'autoconvolution du spectre proposé par Von Karman :

$$S_u(\omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{4 \frac{L_u^x}{U} \sigma_u^2}{\left(1 + 70.8 \left(\frac{L_u^x}{U} \frac{\omega}{2\pi}\right)^2\right)^{5/6}} \quad (4.153)$$

Le changement de variable $\omega_1 = \frac{2\pi t \bar{U}}{L_u^x \sqrt{70.8}}$ et $\omega = \frac{2\pi y \bar{U}}{L_u^x \sqrt{70.8}}$ permet d'écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1) S_u(\omega - \omega_1) d\omega_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{2 \frac{L_u^x}{U} \sigma_u^4}{\pi \bar{U} \sqrt{70.8}} dt}{(1 + t^2)^{5/6} \left(1 + (y - t)^2\right)^{5/6}} \quad (4.154)$$

La formulation analytique présente un nombre assez important d'avantages... à condition de pouvoir dégager l'autoconvolution analytiquement. Dans le cas de la densité spectrale proposée par Von Karman, les développements débouchent sur l'estimation d'une intégrale indéfinie, ce qui ne permet pas d'obtenir la relation analytique idyllique. Des développements similaires montrent des conclusions identiques pour la densité spectrale de Davenport.

Puisque la méthode la plus rigoureuse ne peut pas être appliquée, il ne reste plus qu'à se tourner vers des méthodes approchées. Ci-dessous, nous présentons plusieurs méthodes pour prendre en compte les effets du terme quadratique de chargement. Nous avons vu que ce terme complémentaire peut se traduire par un complément de sollicitation tout à fait indépendant de la sollicitation proposée dans la linéarisation stochastique. Deux possibilités s'offrent alors :

- soit ce complément de sollicitation est ajouté à la sollicitation de base et elles sont ensuite traitées simultanément pour la détermination de la variance de la réponse. L'une ou l'autre des quatre méthodes proposées au chapitre précédent peut être appliquée ;
- soit ce complément de sollicitation est traité séparément et donne donc également lieu à un complément de réponse, c'est-à-dire un complément de variance et de moments spectraux d'ordres supérieurs. Dans ce cas, des méthodes d'intégration différentes peuvent être utilisées pour déterminer les réponses associées au chargement linéaire et non linéaire. Par exemple, il paraîtrait assez logique d'utiliser une méthode procurant une meilleure précision pour la première partie et une méthode plutôt approchée (approximation en bruit blanc, approche par un processus d'Ornstein) pour la seconde partie qui nécessite indiscutablement moins de précision.

Dans la suite, nous présentons quelques combinaisons de méthodes numériques permettant d'estimer l'effet du terme non linéaire.

Intégration numérique Le calcul numérique d'une autoconvolution est assez coûteux en effort de calcul. En effet, le résultat de l'intégrale de convolution doit être calculé

pour un certain nombre de fréquences discrètes ω_k et, pour chacune de ces fréquences, l'intégrale numérique suivante doit être estimée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1) S_u(\omega_k - \omega_1) d\omega_1 \simeq \sum_i S_u(\omega_i) S_u(\omega_k - \omega_i) \Delta\omega \quad (4.155)$$

Le problème de la précision associée à l'estimation d'intégrales a déjà été longuement discuté. La mise en oeuvre d'une méthode d'intégration numérique nécessite un choix judicieux des points d'intégration. Sans rentrer dans les détails, la méthodologie devrait comporter les points suivants :

- le choix judicieux des points d'intégration pour représenter correctement la densité spectrale de vitesse $S_u(\omega_1)$. Au chapitre précédent, nous avons recommandé l'utilisation de 120 points d'intégration sur l'intervalle $[0, f_{\max}]$. Il convient donc ici d'utiliser 239 points d'intégration répartis de façon optimale sur $[-f_{\max}, f_{\max}]$;
- le choix judicieux des points d'intégration pour représenter correctement $S_u(\omega_k - \omega_1)$, soit un simple décalage des points d'intégration déterminés ci-avant ;
- une mise en commun par la méthodologie présentée au chapitre précédent de ces deux séries de fréquences. Ceci permet de former une série de fréquences représentatives dont la taille est comprise entre 239 et 478 valeurs selon le décalage fréquentiel ω_k choisi ;
- finalement, l'intégration numérique (certainement par la méthode du trapèze) peut être entreprise avec ces points d'intégration.

Cette méthode pourrait sembler assez laborieuse à appliquer si l'autoconvolution devait être estimée pour un nombre important de fréquences. Admettons maintenant que le complément de sollicitation provenant du terme quadratique du chargement soit pris en compte séparément¹⁴ et par une méthode d'approximation en bruit blanc ou par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Il suffirait alors de connaître uniquement le résultat de l'autoconvolution pour une seule fréquence ($\omega_k = \varpi$, correspondant à la pulsation propre de l'oscillateur), ainsi que la variance (pour la contribution quasi-statique) de ce complément de fréquence. Or, nous avons déjà démontré que cette variance était égale, en toute généralité à σ_u^4 , ce qui rend cette approche numérique assez intéressante.

Le recours à une estimation numérique de l'autoconvolution semble assez lourd à mettre en pratique pour tout un ensemble de fréquences ω_k nécessaires à la bonne représentation de l'autoconvolution. Avant l'utilisation de l'algorithme de la Fast Fourier Transform, il en était également de même pour le calcul de la Discrete Fourier Transform d'un signal que l'on imaginait ne pouvoir entreprendre que pour une série raisonnable de fréquences ω_k . L'apparition de la Fast Fourier Transform, nécessitant malheureusement une répartition uniforme des fréquences de calcul ω_k , a permis de rendre ce genre de calcul accessible. A l'heure actuelle, la plupart des algorithmes de calcul de convolution¹⁵ se basent sur l'utilisation de la Fast Fourier Transform : les deux signaux (ici ces signaux sont identiques et correspondent à la densité spectrale de la vitesse du vent) sont envoyés, grâce à la Fast Fourier Transform, dans le domaine fréquentiel. Le résultat de leur multiplication dans ce domaine est ensuite ramené dans le domaine temporel à l'aide de la Fast Fourier Inverse.

¹⁴Seconde solution proposée à la page 150

¹⁵pour autant que la taille des échantillons soit assez grande

Cette méthode permet d'obtenir à moindre coût une bonne représentation de l'auto-convolution d'une densité spectrale quelconque. Notons cependant que l'on dispose alors d'une représentation de la fonction en des fréquences qui ne correspondent pas nécessairement aux fréquences nécessaires à l'estimation de la réponse. Selon la méthode de calcul des variances choisies, des interpolations linéaires devront nécessairement être effectuées.

La méthode qui vient d'être présentée va nous permettre d'estimer l'erreur commise en négligeant le terme quadratique du chargement d'une structure soumise à un vent réaliste. Nous avons réalisé une étude paramétrique visant à déterminer le bien-fondé de la nécessité de prendre en compte ces termes non linéaires. La structure étudiée est toujours un oscillateur simple dont les caractéristiques naturelles (ϖ) et l'amortissement (ξ) seront considérées comme paramètres. Cette structure est sollicitée par un vent dont la turbulence est caractérisée par un spectre de Davenport :

$$S_u(\omega) = \frac{\beta \omega \sigma_u^2}{(1 + 3\beta \omega^2)^{4/3}} \quad (4.156)$$

où $\beta = \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{1200}{\bar{U}}\right)^2$. Deux valeurs distinctes sont choisies pour la vitesse moyenne du vent : $\bar{U} = 15m/s$ ou $\bar{U} = 30m/s$. De même, l'intensité de la turbulence, paramètre dont nous avons déjà mis l'importance en emphase, se verra attribuer successivement les valeurs $I_u = 10\%$, $I_u = 20\%$; $I_u = 30\%$. Dans chacun des cas rencontrés, en faisant varier tous ces paramètres ($\varpi, \xi, \bar{U}$ et I_u), trois calculs sont réalisés :

- une première analyse est entreprise en négligeant le terme quadratique du chargement. Les moments spectraux de la réponse sont déterminés par intégration numérique avec une disposition optimale des fréquences de calcul ;
- la seconde analyse laisse également de côté le terme quadratique du chargement mais cette fois, les moments spectraux sont déterminés à l'aide de l'approximation en bruit blanc ;
- la troisième analyse prend en compte le terme quadratique du chargement de façon rigoureuse, c'est-à-dire en incluant le complément de sollicitation qui s'exprime en termes de l'autoconvolution de la densité spectrale de puissance. Ce terme a été obtenu numériquement, calculé à l'aide de la Fast Fourier Transform, pour des fréquences discrètes espacées entre -15Hz et +15Hz avec un pas de 0.002Hz, ce qui est nécessaire à la bonne représentation de la densité spectrale de puissance de Davenport, dans le voisinage de l'origine.

Les résultats de cette dernière analyse sont considérés comme étant les résultats exacts. Les écarts entre ces résultats et ceux fournis par les deux autres méthodes peuvent donc être considérés comme les erreurs commises en négligeant le terme quadratique du chargement et en recourant ou non à l'approximation en bruit blanc. Ces erreurs sont représentées aux figures 4.18 à 4.23.

Une première constatation ressort de l'observation de ces six figures. Elle consiste en une influence réduite de la vitesse moyenne. Théoriquement, on pourrait vérifier (à l'aide d'une analyse dimensionnelle par exemple) que cette grandeur ne doit pas influencer l'erreur commise en négligeant le terme de chargement non linéaire. On peut également constater ceci dans les développements analytiques qui viennent d'être menés.

Nous avons vu précédemment que l'erreur commise sur l'estimation de la variance est proportionnelle au carré de l'intensité de la turbulence :

$$\varepsilon = k I_u^2$$

Ce type de comportement peut à nouveau être observé en comparant les graphiques associés à différentes valeurs de I_u . Prenons par exemple la courbe de niveau correspondant aux erreurs commises en appliquant l'intégration numérique pour les plus grandes valeurs du coefficient d'amortissement. Aux figures 4.18, 4.20 et 4.22, on peut relever les valeurs respectives $\varepsilon = -0.7\%$, $\varepsilon = -2.75\%$ et $\varepsilon = -6\%$. L'identification du coefficient de proportionnalité k donnerait donc les résultats suivants : $k_{10\%} = \frac{-0.7}{(0.1)^2} = -70$, $k_{20\%} = \frac{-2.75}{(0.2)^2} = -69$, $k_{30\%} = \frac{-6}{(0.3)^2} = -67$ soit des valeurs tout à fait comparables au vu de la précision de lecture des valeurs associées aux courbes de niveau. Ceci démontre donc que les cartes d'erreur commise en recourant à l'intégration numérique sont homothétiques, le niveau de chacune d'elles étant effectivement proportionnel au carré de l'intensité du vent.

Ce comportement qui avait été prédit par l'approche analytique n'est pas observable lorsque les densités spectrales sont intégrées à l'aide de la méthode d'approximation en bruit blanc. Ce comportement est donc en définitive assez malsain ; contrairement aux résultats obtenus par intégration numérique, la forme des courbes obtenues en appliquant l'approximation en bruit blanc est difficilement explicable.

Pour une intensité de turbulence de 20% ou 30%, l'approximation en bruit blanc semble donner des résultats plus précis que la méthode d'intégration numérique. Rappelons que les courbes étudiées reproduisent les écarts entre une analyse avec le terme de chargement non linéaire et une analyse sans ce terme de chargement. A la précision liée à l'algorithme d'intégration numérique que nous avons développé, on peut dire que cette erreur est représentée par les courbes intitulées "Intégration numérique". Les erreurs représentées aux graphiques intitulés "Approximation en bruit blanc" proviennent en réalité de deux phénomènes : l'erreur liée au terme de chargement non linéaire et l'erreur liée à l'approximation en bruit blanc. Au chapitre précédent, nous avons vu que l'approximation en bruit blanc surestimait le résultat d'une analyse linéaire. Les deux hypothèses formulées agissent donc en sens contraire et cette compensation explique pourquoi l'approximation en bruit blanc semble donner des résultats de meilleure qualité. Ceci est donc un aspect positif à ajouter aux avantages liés à l'approximation en bruit blanc. Nous incitons cependant les utilisateurs de cette méthode à prendre conscience des raisons pour lesquelles cette méthode donne de bons résultats.

Quelques autres constatations peuvent encore être tirées de l'observation de ces graphiques. Nous allons maintenant nous limiter à discuter les résultats issus de l'approche numérique et voir que les tendances indiquées aux figures 4.18 à 4.23 peuvent être interprétées à partir de commentaires formulés à l'occasion de l'approche analytique du problème.

On peut par exemple observer que les courbes de l'erreur commise sur le déplacement s'orientent parallèlement aux axes $\varpi = cst$ pour les petites valeurs de la pulsation naturelle. En effet, dans ce cas, la réponse est essentiellement dynamique et est donc inversement proportionnelle au coefficient d'amortissement structural. Ceci est valable, que le terme complémentaire de chargement soit pris en compte ou non. Il est donc logique que le rapport entre ces deux grandeurs soit indépendant du taux d'amortissement. Notons que ceci peut également être observé sur base du raisonnement analytique : le développement en série du coefficient ζ'_3 (Eq. 4.137) pour de faibles valeurs de φ s'exprime par $\zeta'_3 = 1 + \frac{I_u^2}{4}$ qui est également indépendant du taux d'amortissement.

Le comportement des structures très raides est également assez simple à étudier. En

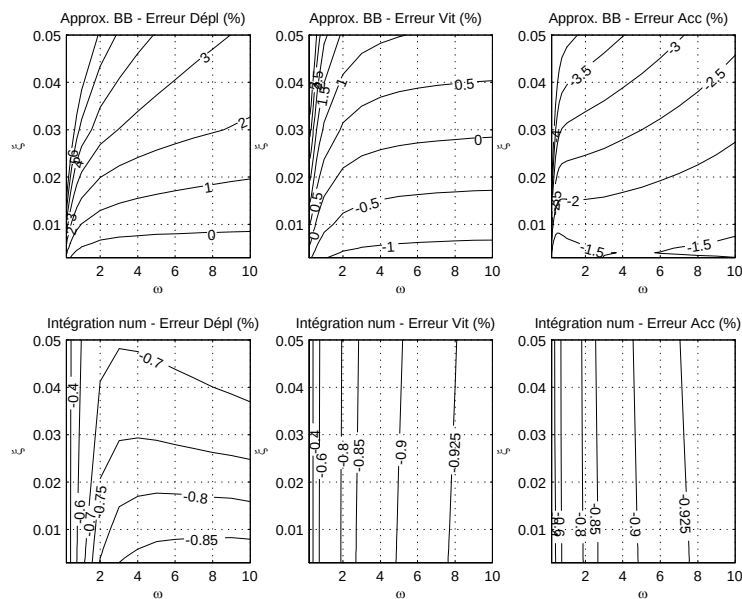


FIG. 4.18 – Erreur commise en négligeant le terme de second ordre de chargement. Application au vent turbulent ($\bar{U} = 30m/s$; $I_u = 10\%$)

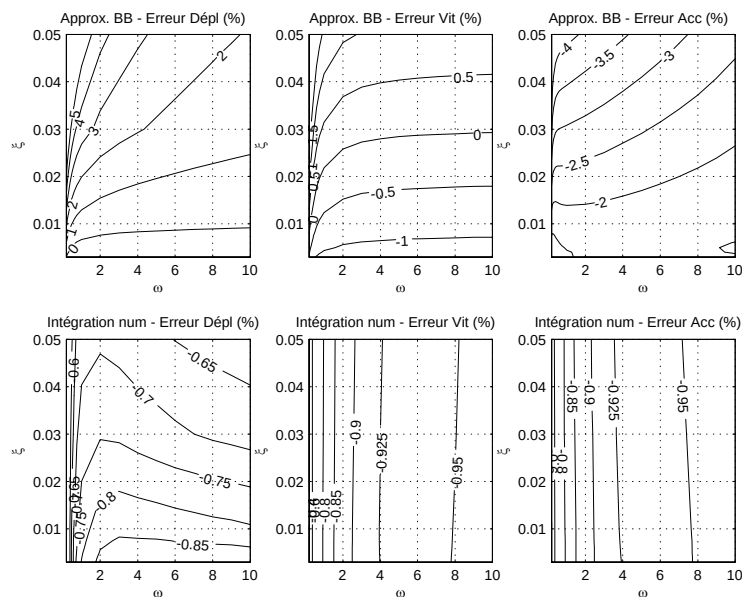


FIG. 4.19 – Erreur commise en négligeant le terme de second ordre de chargement. Application au vent turbulent ($\bar{U} = 15m/s$; $I_u = 10\%$)

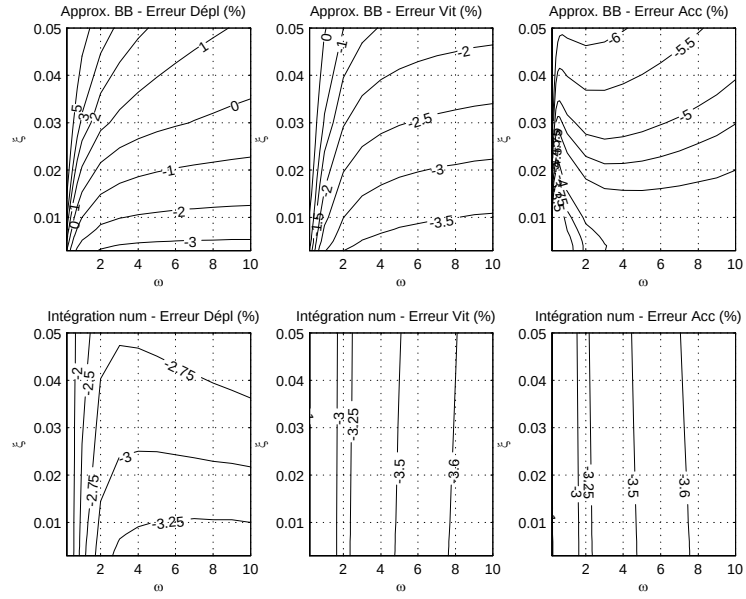


FIG. 4.20 – Erreur commise en négligeant le terme de second ordre de chargement. Application au vent turbulent ($\bar{U} = 30m/s$; $I_u = 20\%$)

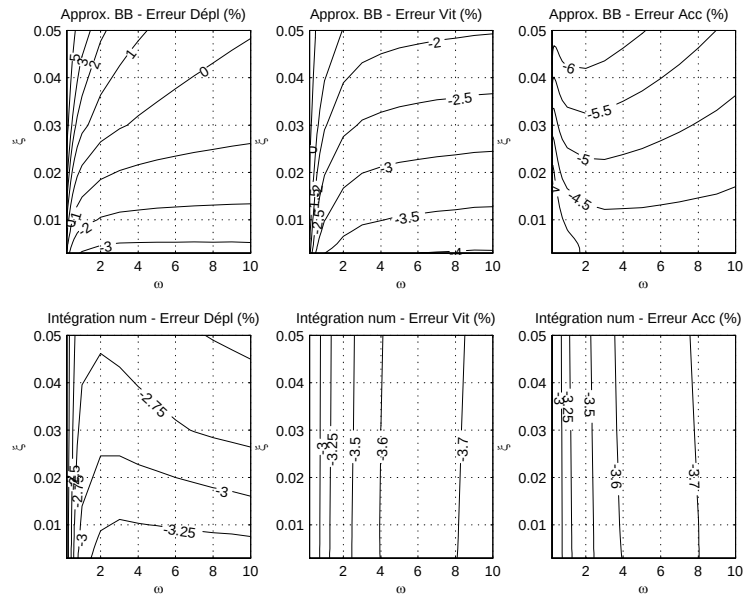


FIG. 4.21 – Erreur commise en négligeant le terme de second ordre de chargement. Application au vent turbulent ($\bar{U} = 15m/s$; $I_u = 20\%$)

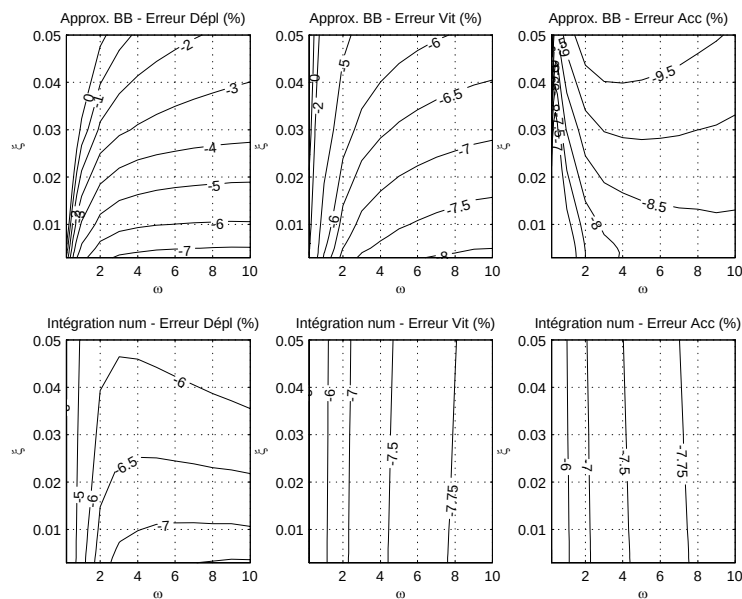


FIG. 4.22 – Erreur commise en négligeant le terme de second ordre de chargement. Application au vent turbulent ($\bar{U} = 30m/s$; $I_u = 30\%$)

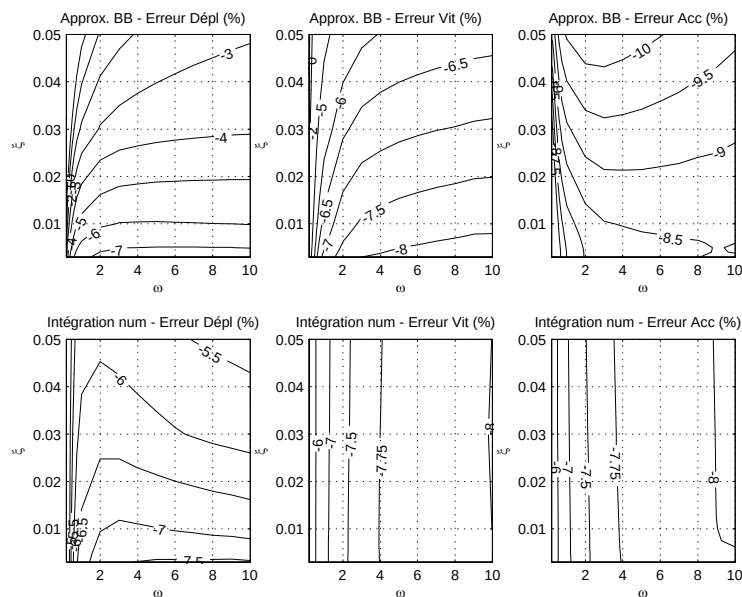


FIG. 4.23 – Erreur commise en négligeant le terme de second ordre de chargement. Application au vent turbulent ($\bar{U} = 15m/s$; $I_u = 30\%$)

effet, dans ce cas, la réponse est essentiellement quasi-statique et l'erreur commise sur la réponse est donc constante et identique à l'erreur commise sur la sollicitation. Il est donc assez logique que les courbes de niveau de l'erreur présentent une tangente horizontale pour les grandes valeurs de la pulsation naturelle.

A l'occasion des développements analytiques, nous avons pu mettre en évidence de manière assez claire (Fig 4.11) que l'erreur commise sur la vitesse était plus ou moins identique à l'erreur commise sur l'accélération et était également fort peu dépendante du taux d'amortissement. Cette constatation est également valable lorsque la densité spectrale de sollicitation est une densité spectrale plus réaliste. L'ordre de grandeur de l'erreur donné dans l'approche analytique où la vitesse du vent était caractérisée par une densité spectrale à corrélation exponentielle ($\varphi = 10$) est identique dans notre approche numérique. Sur le graphique 4.11, on peut relever une erreur d'environ 4% pour une intensité de turbulence $I_u = 20\%$, ce que l'on peut également retrouver à la figure 4.20.

Approximation par Ornstein Au chapitre précédent, nous avons présenté une méthode permettant de remplacer la densité spectrale de vitesse de vent réelle par un processus aléatoire à corrélation exponentielle. Nous sommes donc en mesure de fournir les paramètres α et σ_u^2 tels que l'utilisation de

$$S_u(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha \sigma_u^2}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (4.157)$$

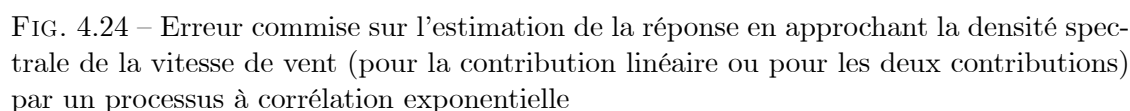
au lieu de la densité spectrale de vent réelle donne des variances de déplacement semblables à celles qui seraient obtenues avec la vraie sollicitation. Nous avons pu constater que cette méthode donnait de meilleurs résultats que ceux fournis par l'approximation en bruit blanc dans le cadre d'une approche par linéarisation stochastique du problème.

De plus, nous avons mené, au paragraphe 4.5.2, les développements analytiques permettant de prendre en compte le terme quadratique de chargement pour un tel processus.

L'idée probablement la plus élémentaire consiste donc à remplacer, dès le début de la résolution, la densité spectrale de vent réelle, par cette forme simplifiée. La réponse de l'oscillateur simple, en termes de ses moments spectraux de différents ordres, peut alors être obtenue très rapidement, à l'aide de relations analytiques simples (4.136 à 4.138).

Une seconde idée consiste à estimer d'une part la réponse linéaire par une intégration numérique avec répartition optimale des points d'intégration et, d'autre part, la réponse non linéaire (associée au complément de densité spectrale uniquement) par voie analytique en supposant que le processus de départ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck équivalent (basé sur la même équivalence que celle qui a été présentée).

De nouveau, les résultats obtenus à l'aide de ces deux méthodes peuvent être comparés au résultat exact résultant d'une étude complètement numérique où nous nous sommes assurés que les pas de fréquences étaient suffisamment petits. Cette fois, les erreurs qui sont commises ne représentent pas les erreurs commises en négligeant le terme non linéaire de chargement (puisque'il est pris en compte) mais bien l'erreur sur une analyse complète en appliquant une méthode d'approximation par un processus d'Orstein. Les erreurs commises sur les variances des déplacements, vitesses et accélérations sont présentées à la figure 4.24.



La seconde méthode qui propose l'approximation par un processus d'Ornstein sur le complément de densité spectrale uniquement donne de très bons résultats. L'avantage de cette méthode réside en sa très bonne précision (erreur de l'ordre du demi pourcent). Utiliser l'approximation sur le complément de densité spectrale permet également de limiter les efforts de calcul puisque l'autoconvolution de la densité spectrale de la sollicitation ne doit pas être calculée.

Les résultats de la figure 4.24 montrent qu'il semble très intéressant d'estimer les moments spectraux de la contribution linéaire de la réponse par intégration numérique, de façon à (au moins) représenter cette partie correctement, et d'utiliser une méthode approchée, beaucoup plus rapide, pour l'estimation de la composante non linéaire de la réponse. Nous venons en effet de voir que cela fonctionne assez bien avec l'approximation par un processus d'Ornstein (méthode semi-Ornstein).

Au lieu d'appliquer cette méthode originale, l'approximation en bruit blanc pourrait

également être appliquée pour estimer la réponse associée au complément de densité spectrale (méthode semi-BB). L'application de cette approximation est par contre moins évidente à mettre en pratique puisqu'elle nécessite l'estimation du complément de densité spectrale au niveau de la pulsation propre de l'oscillateur, c'est-à-dire l'autoconvolution de la densité spectrale de Davenport pour un décalage correspondant à la pulsation propre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1) S_u(\varpi - \omega_1) d\omega_1 \quad (4.158)$$

Comparément à la méthode présentée ci-avant, cette opération est évidemment plus coûteuse puisqu'elle nécessite le calcul et le stockage de la densité spectrale complète, pour des fréquences réparties uniformément. Cette différence qui existe entre ces deux méthodes (qui ont pourtant l'air très proches) se trouve aux fondements des deux approximations. Au chapitre précédent, nous avons vu que l'approximation par un processus d'Ornstein remplace la sollicitation réelle par une autre de forme simple ; ceci permet de terminer l'analyse avec des fonctions analytiquement très simples (la densité spectrale d'un processus à corrélation exponentielle et la fonction de transfert d'un oscillateur simple). Quant à l'approximation en bruit blanc, nous avons vu qu'elle pouvait être interprétée comme une décomposition de la fonction de transfert. Elle nécessite donc encore l'estimation de la densité spectrale de la sollicitation, inévitablement plus complexe dans le domaine du vent. Lorsqu'il s'agit d'estimer la réponse linéarisée (basée sur le calcul de la densité spectrale de sollicitation), cela ne pose aucun problème ; par contre, au second ordre, c'est l'autoconvolution de cette densité spectrale (bien plus complexe) qui doit être évaluée.

Cette méthode a tout de même été appliquée à l'oscillateur simple étudié jusqu'ici. A la figure 4.25, on retrouve le résultat de l'analyse semi-Ornstein de la figure 4.24 ainsi que le résultat de l'analyse semi-BB. La comparaison des ordres de grandeurs des erreurs commises en appliquant ces deux méthodes ne permet pas de justifier l'utilisation de la seconde, inévitablement plus lourde à mettre en oeuvre.

4.6 Réponse de l'oscillateur au troisième ordre

4.6.1 Introduction

Au paragraphe précédent, nous venons de voir comment prendre en compte les effets du terme quadratique de chargement sur la variance de la réponse. Dans le domaine du vent, nous avons pu constater que ces effets sur les caractéristiques de second ordre sont assez limités. Souvenons-nous que ces caractéristiques de second ordre sont dénommées ainsi car elles permettent de rendre l'état de probabilité de la valeur prise en un instant t_1 lorsqu'est connue la valeur prise par le processus aléatoire en un instant différent t_2 . Dans le domaine fréquentiel, cette notion de corrélation temporelle se traduit, à l'aide de la transformée de Fourier, en contenu fréquentiel.

Par caractérisation de second ordre, on entend également, caractérisation de second ordre (comprendre de second rang) de la densité de probabilité d'une valeur prise en un instant donné par le processus. En effet, il suffit de faire $t_1 = t_2$ et on retrouve le carré moyen du processus aléatoire (moment d'ordre 2).

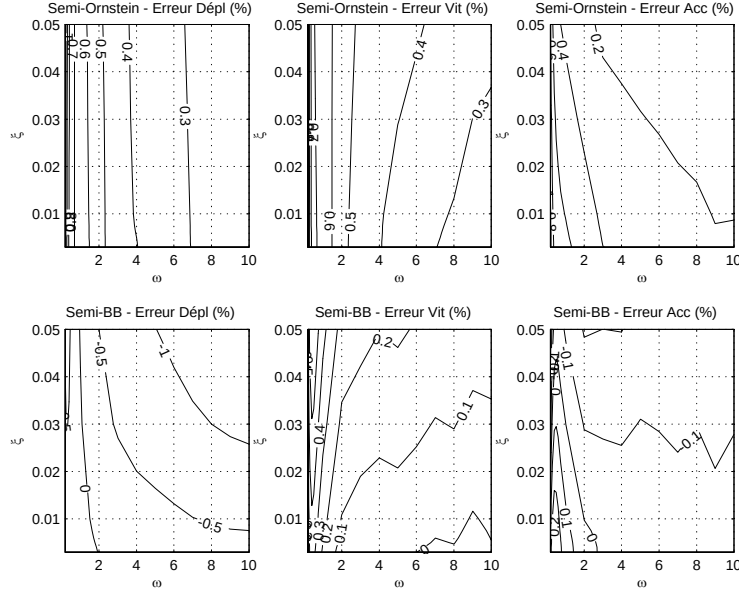


FIG. 4.25 – Erreur commise sur l'estimation de la réponse en appliquant la méthode d'approximation en bruit blanc (pour la contribution linéaire ou pour les deux contributions)

Nous avons vu également que la réponse de la structure ne pouvait pas vraiment être considérée comme gaussienne lorsque les termes quadratiques du chargement étaient considérés. Ceci signifie donc que les moments statistiques jusqu'à l'ordre 2 ne suffisent pas à la caractérisation complète de la réponse. Nous allons donc maintenant nous intéresser à la détermination des moments d'ordres supérieurs.

De même que la variance pouvait être estimée à partir de la fonction moment d'ordre 2 (la fonction d'autocorrélation), les moments statistiques d'ordre supérieur peuvent être estimés à partir des fonctions moments d'ordres supérieurs. Par exemple, la fonction moment d'ordre 3 $R_f(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ estimée à l'origine ($\tau_1 = 0, \tau_2 = 0, \tau_3 = 0$) correspond au moment statistique d'ordre 3. Nous verrons qu'il existe également un équivalent d'ordre 3 à la densité spectrale de puissance, qui, après intégration, permet de retrouver le moment d'ordre 3 de la réponse.

Etant donné que nous travaillons dans un contexte où la sollicitation est connue dans le domaine fréquentiel, il semble assez avantageux de mener l'entièreté des développements dans ce domaine. L'objectif de ce paragraphe consiste donc à établir, dans le domaine fréquentiel, les caractéristiques d'ordre 3 (et plus) de la réponse. Cet objectif sera atteint en développant dans un premier temps les relations de base dans le domaine temporel puis en en prenant les formulations équivalentes (par transformée de Fourier) dans le domaine fréquentiel. Cette démarche est identique à celle menée précédemment pour les caractéristiques statistiques d'ordre 2.

4.6.2 Développements théoriques

Dans le domaine temporel

Admettons pour l'instant que nous connaissions le moment d'ordre 3, appelé dans la suite la fonction de bicorrélation, de la sollicitation :

$$B_f(t_1, t_2, t_3) = E[f(t_1) f(t_2) f(t_3)] \quad (4.159)$$

Le même raisonnement que celui mené ci-avant sur la fonction d'autocorrélation permet d'obtenir la fonction de bicorrélation de la réponse. Imaginons que le processus f représente un ensemble d'échantillons dont les caractéristiques statistiques sont identiques. Pour chacune des réalisations de f , on peut écrire :

$$x(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau \quad (4.160)$$

Le produit $x(t_1) x(t_2) x(t_3)$ prend alors l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{aligned} & x(t_1) x(t_2) x(t_3) \quad (4.161) \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1 - \tau_1) f(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2 - \tau_2) f(\tau_2) d\tau_2 \int_{-\infty}^{t_3} h(t_3 - \tau_3) f(\tau_3) d\tau_3 \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \int_{-\infty}^{t_3} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) h(t_3 - \tau_3) f(\tau_1) f(\tau_2) f(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & x(t_1) x(t_2) x(t_3) \quad (4.162) \\ &= \int_0^{+\infty} h(\tau_1) f(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \int_0^{+\infty} h(\tau_2) f(t_2 - \tau_2) d\tau_2 \int_0^{+\infty} h(\tau_3) f(t_3 - \tau_3) d\tau_3 \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) h(\tau_3) f(t_1 - \tau_1) f(t_2 - \tau_2) f(t_3 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

Lors des développements à l'ordre 2, nous avons vu qu'il existe deux démarches sensiblement différentes mais assez proches mathématiquement pour écrire l'expression de la fonction d'autocorrélation de la réponse d'un oscillateur simple. Ces deux démarches peuvent également être appliquées à l'ordre 3.

Les fonctions de bicorrélation de la sollicitation et de la réponse peuvent être reliées en prenant l'espérance mathématique membre à membre dans la relation 4.161 :

$$\begin{aligned} & B_x(t_1, t_2, t_3) \quad (4.163) \\ &= E[x(t_1) x(t_2) x(t_3)] \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \int_{-\infty}^{t_3} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) h(t_3 - \tau_3) B_f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

Lorsque la sollicitation est stationnaire, la bicorrélation $B_f(t_1, t_2, t_3)$ ne dépend alors plus que de deux paramètres $t_2 - t_1$ et $t_3 - t_1$ et peut donc être écrite $B_f(t_2 - t_1, t_3 - t_1)$.

t_1). Dans la suite des développements, lorsque la bicorrélation sera notée avec deux arguments, cela signifiera donc implicitement que le processus étudié est stationnaire. Ces deux arguments représentent alors des délais. Cette notation est inspirée de la fonction d'autocorrélation qui ne présente qu'un seul argument pour un processus stationnaire. Les développements suivants partent de l'expression 4.162 pour exprimer la bicorrélation de la réponse car nous avons vu à l'ordre 2 que les développements partant de cette relation permettent d'éviter un passage à la limite. En régime stationnaire, on peut écrire :

$$\begin{aligned} B_x(t_1, t_2, t_3) &= \iiint_0^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) h(\tau_3) B_f(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2, t_3 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ B_x(\Delta t_1, \Delta t_2) &= \iiint_0^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) h(\tau_3) B_f(\Delta t_1 + \tau_1 - \tau_2, \Delta t_2 + \tau_1 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (4.164)$$

Dans le domaine fréquentiel

Tout comme la densité spectrale de puissance est définie à partir de la fonction d'autocorrélation, on définit également la densité bispectrale de puissance (ou bispectre par facilité) à partir de la fonction de bicorrélation. Etant donné que l'on travaille désormais avec des fonctions de plusieurs paramètres, cette définition se base maintenant sur une transformée de Fourier multidimensionnelle. Par exemple, pour la sollicitation, on écrit :

$$D_f(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_f(\tau_1, \tau_2) e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.165)$$

Cette relation et son inverse :

$$B_f(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D_f(\omega_1, \omega_2) e^{i\omega_1 \tau_1} e^{i\omega_2 \tau_2} d\omega_1 d\omega_2 \quad (4.166)$$

constituent les équivalents à l'ordre 3 des relations de Wiener-Khintchine. En choisissant $\tau_1 = 0$ et $\tau_2 = 0$ dans cette relation, on trouve :

$$B_f(0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D_f(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (4.167)$$

soit que la double intégration du bispectre sur les pulsations correspond à la valeur à l'origine de la bicorrélation, que l'on sait par ailleurs (Eq. 4.159) correspondre au moment d'ordre 3. Cette relation est la propriété fondamentale du bispectre.

Comme l'indiquent les relations 4.165 et 4.166 (la fonction de bicorrélation n'a que deux arguments), le bispectre n'a de sens que si le phénomène étudié est stationnaire. En injectant la forme stationnaire (4.164) de la fonction de bicorrélation dans la définition

du bispectre, on obtient :

$$\begin{aligned}
& D_x(\omega_1, \omega_2) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_x(\Delta t_1, \Delta t_2) e^{-i\omega_1 \Delta t_1} e^{-i\omega_2 \Delta t_2} d\Delta t_1 d\Delta t_2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) h(\tau_3) \\
&\quad B_f(\Delta t_1 + \tau_1 - \tau_2, \Delta t_2 + \tau_1 - \tau_3) e^{-i\omega_1 \Delta t_1} e^{-i\omega_2 \Delta t_2} d\Delta t_1 d\Delta t_2 d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3
\end{aligned} \tag{4.168}$$

Le changement de variables

$$\Delta t_1 \rightarrow \theta_1 = \Delta t_1 + \tau_1 - \tau_2 \tag{4.169}$$

$$\Delta t_2 \rightarrow \theta_2 = \Delta t_2 + \tau_1 - \tau_3 \tag{4.170}$$

permet de simplifier le calcul de cette intégrale puisque l'on obtient alors un découplage des intégrales :

$$\begin{aligned}
D_x(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_f(\theta_1, \theta_2) e^{-i\omega_1 \theta_1} e^{-i\omega_2 \theta_2} d\theta_1 d\theta_2 \\
&\quad \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) h(\tau_3) e^{i(\omega_1 + \omega_2)\tau_1} e^{-i\omega_1 \tau_2} e^{-i\omega_2 \tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_f(\theta_1, \theta_2) e^{-i\omega_1 \theta_1} e^{-i\omega_2 \theta_2} d\theta_1 d\theta_2 \\
&\quad \int_0^{+\infty} h(\tau_1) e^{i(\omega_1 + \omega_2)\tau_1} d\tau_1 \int_0^{+\infty} h(\tau_2) e^{-i\omega_1 \tau_2} d\tau_2 \int_0^{+\infty} h(\tau_3) e^{-i\omega_2 \tau_3} d\tau_3 \\
&= D_f(\omega_1, \omega_2) H(\omega_1) H(\omega_2) \bar{H}(\omega_1 + \omega_2)
\end{aligned} \tag{4.171}$$

Au chapitre 3, nous avons vu que la réponse d'un oscillateur simple pouvait s'obtenir soit dans le domaine temporel par une convolution de la fonction d'autocorrélation de la sollicitation par la fonction impulsionnelle, soit dans le domaine fréquentiel par une multiplication de la densité spectrale de la sollicitation par la fonction de transfert. Ceci n'est en réalité qu'une manifestation du théorème de dualité. Ces relations peuvent également être appliquées à l'ordre 3. En effet, les relations 4.164 et 4.171 montrent qu'à une double convolution dans le domaine temporel correspond une multiplication de plusieurs facteurs dans le domaine fréquentiel. Ces deux relations sont tout à fait générales : elles peuvent s'appliquer à n'importe quel processus aléatoire, pour autant qu'il soit stationnaire. Voici donc établies les relations permettant de déterminer la réponse de l'oscillateur simple.

Remarques complémentaires

La notion de bispectre est certainement moins familière que celle de densité spectrale de puissance. Quelques remarques complémentaires sur ce genre de fonction peuvent être fournies afin de mieux en percevoir la constitution physique.

La propriété la plus importante a déjà été introduite : la double intégration du bispectre dans le domaine fréquentiel permet d'obtenir le moment d'ordre 3 du processus

étudié. Tout comme le carré moyen obtenu en intégrant l'expression complète de la densité spectrale de puissance se répartissait entre la variance et le carré de la moyenne, le bispectre se répartit également en plusieurs contributions, dont, par exemple le cube de la moyenne, représenté par un Dirac concentré en $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$. La partie intéressante du bispectre, le moment centré d'ordre 3, est la contribution étalée sur les fréquences.

La fonction de bicorrélation, tout autant que la fonction d'autocorrélation, est paire. Ceci découle de la définition de stationnarité du processus étudié :

$$B_f(t_1, t_2) = E[f(t)f(t+t_1)f(t+t_2)] = E[f(t)f(t-t_1)f(t-t_2)] = B_f(-t_1, -t_2) \quad (4.172)$$

Cette parité n'est pas valable par rapport aux plans $t_1 = 0$ ou $t_2 = 0$, c'est-à-dire que :

$$B_f(-t_1, t_2) \neq B_f(t_1, t_2) \quad (4.173)$$

$$B_f(t_1, -t_2) \neq B_f(t_1, t_2) \quad (4.174)$$

La fonction de bicorrélation est symétrique par rapport à ses arguments. Cela découle immédiatement de sa définition :

$$B_f(t_1, t_2) = E[f(t)f(t+t_1)f(t+t_2)] = B_f(t_2, t_1) \quad (4.175)$$

Ces quelques propriétés intéressantes dans le domaine temporel peuvent être utilisées pour déterminer quelques propriétés des bispectres. Pour commencer, on peut remarquer que le bispectre est également une fonction "paire"¹⁶ :

$$\begin{aligned} D_x(-\omega_1, -\omega_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_x(\tau_1, \tau_2) e^{i\omega_1\tau_1} e^{i\omega_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{B_x(\tau_1, \tau_2) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2}} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \overline{D_x(\omega_1, \omega_2)} \end{aligned} \quad (4.176)$$

Aussi, le plan $\omega_1 = \omega_2$ est un plan de symétrie pour un bispectre :

$$\begin{aligned} D_x(\omega_2, \omega_1) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_x(\tau_1, \tau_2) e^{i\omega_2\tau_1} e^{i\omega_1\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_x(\tau_2, \tau_1) e^{i\omega_2\tau_2} e^{i\omega_1\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= D_x(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (4.177)$$

Contrairement à la densité spectrale de puissance, le bispectre d'un signal réel est une grandeur généralement complexe. Le moment d'ordre 3 obtenu par l'intégrale dans

¹⁶ à partie réelle symétrique et partie imaginaire antisymétrique

le plan (ω_1, ω_2) fournit cependant un résultat réel. En effet, soit $u = -\omega_1$, $v = -\omega_2$,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D_x(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\
 = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D_f(\omega_1, \omega_2) H(\omega_1) H(\omega_2) \bar{H}(\omega_1 + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\
 = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D_f(-u, -v) H(-u) H(-v) \bar{H}(-u - v) du dv \\
 = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D_f(\omega_1, \omega_2) \bar{H}(\omega_1) \bar{H}(\omega_2) H(\omega_1 + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\
 = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{D}_x(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2
 \end{aligned} \tag{4.178}$$

car $D_f(\omega_1, \omega_2)$ est réel, $D_f(\omega_1, \omega_2) = D_f(-\omega_1, -\omega_2)$, $H(-\omega) = \bar{H}(\omega)$. L'intégrale double de $D_x(\omega_1, \omega_2)$ sur les fréquences est égale à celle de son conjugué et est donc réelle.

A l'occasion des développements préliminaires sur les fonctions moments (§ 4.3), nous avons annoncé que les moments d'ordres inférieurs pouvait toujours être retrouvés à partir des moments d'ordre supérieur. Cette propriété se retrouve également ici en imposant par exemple $\omega_2 = 0$. On trouve alors :

$$D_x(\omega_1, 0) = D_f(\omega_1, 0) H(0) |H(\omega_1)|^2 \tag{4.179}$$

c'est-à-dire le formalisme du second ordre.

4.6.3 Le développement en série de Volterra

Pour conserver le même formalisme que celui utilisé à l'ordre 2, on peut noter :

$$D_x(\omega_1, \omega_2) = D_f(\omega_1, \omega_2) H(\omega_1) H(\omega_2) \bar{H}(\omega_1 + \omega_2) = D_f(\omega_1, \omega_2) K_2(\omega_1, \omega_2) \tag{4.180}$$

où $K_2(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1) H(\omega_2) \bar{H}(\omega_1 + \omega_2)$ représente le second noyau de Volterra d'un système linéaire à un degré de liberté. Cette fonction de deux variables caractérise la réponse au troisième ordre, de même que la fonction plus habituelle $H(\omega_1)$ permet de caractériser la réponse au second ordre.

Les caractéristiques principales de ce second noyau seront présentées après quelques brefs développements pour resituer l'origine des noyaux de Volterra. Les détails d'une résolution à l'ordre 3 seront donnés un peu plus tard mais on peut imaginer dès à présent que la résolution va être menée essentiellement en deux étapes : établissement du bispectre de la sollicitation pour certains couples de fréquences de calcul permettant de représenter correctement cette fonction et puis multiplication par le second noyau de Volterra.

Les origines du développement en série de Volterra

La dénomination "second noyau de Volterra" peut paraître étrange à première vue. Nous allons présenter brièvement le contexte dans lequel les développements, originellement menés par Volterra, ont été amenés.

Volterra est principalement connu pour s'être penché sur la résolution d'une large classe d'équations intégrales auxquelles il a laissé son nom ([66]). Nous allons donc présenter dans un premier temps quelques commentaires sur ces équations et la méthodologie proposée par Volterra pour les résoudre. Ensuite, nous verrons en quoi et comment cela peut devenir utile dans le cadre de la dynamique des structures.

Equations intégrales de Volterra Une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (4.181)$$

où $f(x)$ et $K(x, t)$ sont des fonctions connues et où λ est une paramètre numérique donné, est appelée une équation intégrale de Volterra de seconde espèce. Cette équation est dite de première espèce lorsque la fonction inconnue $\varphi(x)$ n'apparaît que sous l'intégrale :

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (4.182)$$

Résoudre une équation intégrale revient donc à rechercher la fonction $\varphi(x)$ telle que la relation soit satisfaite. Par exemple, l'équation de première espèce suivante :

$$\int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = x \quad (4.183)$$

admet comme solution $\varphi(x) = 1 - x$. Dans le cadre de la dynamique des structures, ces équations intégrales peuvent éventuellement être utiles dans la mesure où n'importe quelle équation différentielle linéaire (à coefficients non constants) peut se mettre sous la forme d'une équation intégrale. Par exemple, résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = F(x) \quad (4.184)$$

avec comme condition initiale $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$ et $y(0) = 0$, revient à résoudre l'équation intégrale :

$$\varphi(x) = - \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \varphi(t) dt + F(x) \quad (4.185)$$

où $\varphi(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$. Volterra propose de rechercher une solution de l'équation intégrale de seconde espèce en recherchant une solution s'écrivant sous la forme d'une série illimitée :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \lambda^2 \varphi_2(x) + \dots \quad (4.186)$$

En portant cette relation dans l'équation 4.181, on trouve :

$$\varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \lambda^2 \varphi_2(x) + \dots = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi_0(t) dt + \lambda^2 \int_a^x K(x, t) \varphi_1(t) dt + \dots \quad (4.187)$$

et, en égalant les coefficients des différentes puissances de λ :

$$\varphi_0(x) = f(x) \quad (4.188)$$

$$\varphi_1(x) = \int_a^x K(x, t) \varphi_0(t) dt = \int_a^x K(x, t) f(t) dt \quad (4.189)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \int_a^x K(x, t) \varphi_1(t) dt = \int_a^x K(x, t) \int_a^t K(t, t_1) f(t_1) dt_1 dt \\ &= \int_a^x \underbrace{\left[\int_{t_1}^x K(x, t) K(t, t_1) dt \right]}_{K_2(x, t_1)} f(t_1) dt_1 \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.190)$$

Par récurrence, on peut établir que :

$$\varphi_n(x) = \int_a^x K_n(x, t) f(t) dt \quad (4.191)$$

où les $K_n(x, t)$ représentent les noyaux itérés de l'équation intégrale. Ils sont obtenus par la relation de récurrence suivante :

$$K_1(x, t) = K(x, t) \quad (4.192)$$

$$K_n(x, t) = \int_t^x K(x, t) K_{n-1}(t, t_1) dt \quad (4.193)$$

Finalement, la solution de l'équation intégrale s'écrit sous la forme d'une série (dite de Volterra) :

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^x K_n(x, t) f(t) dt \quad (4.194)$$

Pour être rigoureux, il conviendrait d'étudier les conditions de convergence de cette série. Nous allons cependant limiter les développements mathématiques et conclure en retenant qu'exprimer la solution en série de Volterra revient à réaliser un développement dont le $n^{\text{ième}}$ terme s'exprime à l'aide du $n^{\text{ième}}$ noyau itéré, celui-ci s'exprimant par une intégrale dans un espace à n dimensions.

Application à la dynamique des structures L'idée générale des séries de Volterra a été adoptée par le domaine de la dynamique des structures. Dans ce domaine, l'objectif consiste à déterminer la relation entre la sollicitation et la réponse. Pour une structure linéaire et une analyse au premier ordre, ceci est représenté par le filtre caractérisé par la fonction de transfert $H(\omega)$.

La réponse d'un système linéaire peut s'exprimer par l'intégrale de convolution suivante :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (4.195)$$

où $h(\tau)$ représente la fonction impulsionnelle unitaire. La réponse du système non linéaire peut s'exprimer de manière similaire par un développement en séries de Volterra :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) f(t - \tau_1) f(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \quad (4.196)$$

où $h_2(\tau_1, \tau_2)$ est la réponse impulsionnelle d'ordre 2. L'avantage de cette représentation est de modéliser correctement, en conservant un développement jusqu'à l'ordre n , les non linéarités polynômiales de degré inférieur ou égal à n . Aussi, la transformée de Fourier de cette relation peut être assez facilement établie :

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) + \sum_{\omega_1 + \omega_2 = \omega} H_2(\omega_1, \omega_2)F(\omega_1)F(\omega_2) + \dots \quad (4.197)$$

où $X(\omega)$ et $F(\omega)$ représentent les transformées de Fourier de la réponse et de la sollicitation respectivement. $H_2(\omega_1, \omega_2)$ est la fonction de transfert de second ordre obtenue par : $H_2(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t_1, t_2) e^{-i\omega_1 t_1} e^{-i\omega_2 t_2} dt_1 dt_2$.

Pour un système linéaire, le premier terme du membre de droite suffit à représenter l'influence de l'effort sur la structure. Ce modèle linéaire suppose qu'il n'y a aucune interaction entre les différentes fréquences puisque le contenu fréquentiel de la réponse pour une pulsation ω choisie ne dépend que du contenu fréquentiel de la sollicitation à la même pulsation. Par contre, dans le cas d'un système non linéaire, les contenus dans des bandes de fréquences ne sont plus indépendants. L'interaction entre les composantes de la sollicitation pour différentes fréquences doit donc être prise en compte pour représenter le comportement non linéaire. Ceci rejoint les remarques formulées lors du calcul de l'auto-convolution de la densité spectrale.

Etude du second noyau de Volterra

Vis-à-vis des caractéristiques de troisième ordre, le second noyau de Volterra joue donc le rôle de la fonction de transfert (que l'on pourrait également appeler, par extension, le premier noyau de Volterra). Il paraît donc important de lui accorder un peu d'attention. Ce second noyau est défini par :

$$K_2(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1)H(\omega_2)\bar{H}(\omega_1 + \omega_2) \quad (4.198)$$

La fonction de transfert d'un oscillateur simple $H(\omega)$ possède une asymptote horizontale aux basses fréquences ainsi qu'un pic très pointu dans le voisinage de la pulsation propre $\omega = \varpi$, et en son symétrique $\omega = -\varpi$. Sur base de ces constatations, nous pouvons déduire que le second noyau de Volterra :

- doit présenter une cuvette dans le voisinage de l'origine. La figure 4.26 montre que cette cuvette est à courbes de niveau elliptiques ;
- doit présenter six lignes de crête d'équations :

$$\omega_1 = \pm \varpi \quad (4.199)$$

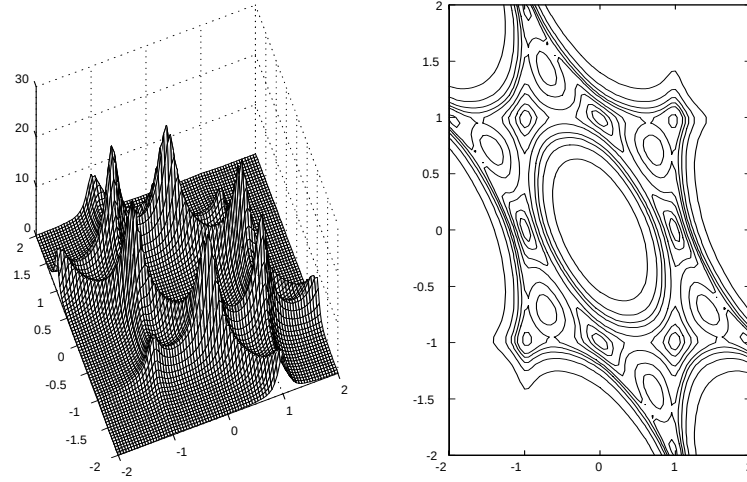
$$\omega_2 = \pm \varpi \quad (4.200)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \pm \varpi \quad (4.201)$$

Ces lignes de crête peuvent être distinguées à la figure 4.26. Assez logiquement, les intersections de ces lignes de crête donnent lieu à des pics plus ou moins importants. On peut distinguer :

- six pics hauts dont les coordonnées sont données au tableau 4.11. Etant donné que $H(\pm \varpi) \simeq \frac{1}{K} \frac{\pm 1}{2i\xi}$ et que $H(0) = \frac{1}{K}$, on peut constater que tous ces pics ont le même niveau. Il est donné par : $|K_2(\varpi, 0)| \simeq \frac{1}{4\xi^2 K^3}$

- six pics bas présentant également tous le même niveau. Etant donné que $H(\pm 2\varpi) \simeq \frac{1}{K} \frac{1}{-3 \pm 4i\xi}$, ce niveau est donné par : $|K_2(\varpi, -2\varpi)| \simeq \frac{1}{4\xi^2 K^3} \frac{1}{\sqrt{9+16\xi^2}}$. Les pics bas sont donc environ trois fois plus bas que les six autres pics.

FIG. 4.26 – Représentation du second noyau de Volterra ($\varpi = 1$, $\xi = 0.1$)

Pic	ω_1	ω_2	$\omega_1 + \omega_2$	$ K_2(\omega_1, \omega_2) $
1	ϖ	$-\varpi$	0	$\frac{1}{4\xi^2 K^3}$
2	ϖ	0	ϖ	$\frac{1}{4\xi^2 K^3}$
3	0	ϖ	ϖ	$\frac{1}{4\xi^2 K^3}$
4	$-\varpi$	ϖ	0	$\frac{1}{4\xi^2 K^3}$
5	$-\varpi$	0	$-\varpi$	$\frac{1}{4\xi^2 K^3}$
6	0	$-\varpi$	$-\varpi$	$\frac{1}{4\xi^2 K^3}$
7	ϖ	-2ϖ	$-\varpi$	$\frac{1}{4\xi^2 K^3} \frac{1}{\sqrt{9+16\xi^2}}$
8	2ϖ	$-\varpi$	ϖ	$\frac{1}{4\xi^2 K^3} \frac{1}{\sqrt{9+16\xi^2}}$
9	ϖ	ϖ	2ϖ	$\frac{1}{4\xi^2 K^3} \frac{1}{\sqrt{9+16\xi^2}}$
10	$-\varpi$	2ϖ	ϖ	$\frac{1}{4\xi^2 K^3} \frac{1}{\sqrt{9+16\xi^2}}$
11	-2ϖ	ϖ	$-\varpi$	$\frac{1}{4\xi^2 K^3} \frac{1}{\sqrt{9+16\xi^2}}$
12	$-\varpi$	$-\varpi$	-2ϖ	$\frac{1}{4\xi^2 K^3} \frac{1}{\sqrt{9+16\xi^2}}$

TAB. 4.11 – Position et hauteur des pics du second noyau de Volterra

Un propriété intéressante de cette fonction est sa symétrie. En effet, d'après la définition du second noyau de Volterra, on peut écrire :

$$K_2(\omega_2, \omega_1) = K_2(\omega_1, \omega_2) \quad (4.202)$$

et :

$$\begin{aligned} K_2(-\omega_1, -\omega_2) &= H(-\omega_1)H(-\omega_2)\bar{H}(-\omega_1 - \omega_2) \\ &= \bar{H}(\omega_1)\bar{H}(\omega_2)H(\omega_1 + \omega_2) = \overline{K_2}(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (4.203)$$

Il pourrait également être intéressant de déterminer l'intégrale sous la surface délimitée par le noyau. Cette surface correspondrait au moment centré d'ordre 3 de la réponse d'un oscillateur sollicité par un effort dont le bispectre est unitaire. Ce type de sollicitation n'a guère plus de signification mathématique que le bruit blanc habituel. Elle pourrait cependant être utilisée afin de mettre au point une extension de la méthode d'approximation en bruit blanc.

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_2(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{K^3 \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi \frac{\omega_1}{\varpi} \right] \left[1 - \left(\frac{\omega_2}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi \frac{\omega_2}{\varpi} \right] \left[1 - \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{\varpi} \right)^2 - 2i\xi \frac{\omega_1 + \omega_2}{\varpi} \right]} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varpi^2 dx dy}{K^3 [1 - x^2 + 2i\xi x] [1 - y^2 + 2i\xi y] [1 - (x + y)^2 - 2i\xi (x + y)]} \\ &= \frac{1}{K^3} \frac{8\pi^2 \varpi^2}{3(1 + 8\xi^2)} \end{aligned} \quad (4.204)$$

4.6.4 Caractérisation de la sollicitation

Après avoir introduit toutes les notions dont nous aurons besoin, revenons maintenant au problème qui nous préoccupe, celui de l'analyse d'un oscillateur simple soumis au carré d'un processus aléatoire gaussien. La seule étape qu'il nous reste à franchir est le calcul de la fonction de bicorrélation de la sollicitation. Lorsque cela sera réalisé, il ne restera plus ensuite qu'à appliquer la relation 4.164 afin d'obtenir la fonction de bicorrélation de la réponse. Les développements équivalents peuvent également être menés dans le domaine fréquentiel. Nous présenterons ces développements dans un second temps.

Dans le domaine temporel

Le processus aléatoire u , représentant la composante turbulente du vent, est un processus caractérisé par sa fonction d'autocorrélation uniquement. En effet, la connaissance de cette fonction moment suffit à sa caractérisation complète puisqu'il s'agit d'un processus aléatoire gaussien. Pour un processus aléatoire gaussien, nous savons que les fonctions moments d'ordres supérieurs peuvent s'exprimer uniquement en fonction de la matrice des covariances. Au paragraphe 4.3, nous avons présenté la méthodologie de calcul des fonctions moments (de tous ordres) d'un processus aléatoire gaussien centré. La sollicitation que nous étudions ici s'exprime par le carré d'un processus aléatoire gaussien (non centré) :

$$f(t) = \gamma [\bar{U} + u(t)]^2 \quad (4.205)$$

En nous inspirant des développements du paragraphe 4.3, nous allons donc pouvoir établir l'expression de la fonction moment d'ordre 3 (la fonction de bicorrélation) de la sollicitation en fonction de la fonction d'autocorrélation de la composante turbulente du vent. La fonction de bicorrélation de la sollicitation s'exprime par :

$$B_f(\tau_1, \tau_2) = E[f(t) f(t + \tau_1) f(t + \tau_2)] \quad (4.206)$$

$$B_f(\tau_1, \tau_2) = E\left[\gamma^3 [\bar{U} + u(t)]^2 [\bar{U} + u(t + \tau_1)]^2 [\bar{U} + u(t + \tau_2)]^2\right] \quad (4.207)$$

Pour simplifier les notations, nous allons momentanément utiliser $u_1 = u(t)$, $u_2 = u(t + \tau_1)$ et $u_3 = u(t + \tau_2)$:

$$\begin{aligned} B_f = & \gamma^3 \bar{U}^6 + 2\gamma^3 \bar{U}^5 E[u_1 + u_2 + u_3] + \gamma^3 \bar{U}^4 E[u_1^2 + u_2^2 + u_3^2] \\ & + 4\gamma^3 \bar{U}^4 E[u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1] \\ & + 2\gamma^3 \bar{U}^3 E[u_1^2 (u_2 + u_3) + u_2^2 (u_3 + u_1) + u_3^2 (u_1 + u_2)] + 8\gamma^3 \bar{U}^3 E[u_1 u_2 u_3] \\ & + \gamma^3 \bar{U}^2 E[u_1^2 u_2^2 + u_2^2 u_3^2 + u_3^2 u_1^2] + 4\gamma^3 \bar{U}^2 E[(u_1 + u_2 + u_3) u_1 u_2 u_3] \\ & + 2\gamma^3 \bar{U} E[(u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1) u_1 u_2 u_3] + \gamma^3 E[u_1^2 u_2^2 u_3^2] \end{aligned} \quad (4.208)$$

Etant donné que le processus aléatoire u est gaussien et centré, nous savons que tous les moments d'ordres impairs intervenant dans cette expression sont nuls. Quant aux termes restant, ils semblent moins immédiats à calculer mais nous pouvons nous baser sur les résultats de la section 4.3 où nous avons établi que :

- $R^{(4)}(t_1, t_1, t_2, t_2) = E[u_1^2 u_2^2] = \sigma_u^4 + 2R_u^2(\tau_1)$ et correspond à la fonction d'autocorrélation du carré de la composante turbulente ;
- $R^{(4)}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \Sigma_{12}\Sigma_{34} + \Sigma_{13}\Sigma_{24} + \Sigma_{14}\Sigma_{23}$. En particulierisant au cas $t_4 = t_1$, on obtient $R^{(4)}(t_1, t_1, t_2, t_3) = 2\Sigma_{12}\Sigma_{13} + \Sigma_{11}\Sigma_{23}$, soit $E[u_1^2 u_2 u_3] = 2R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) + \sigma_u^2 R_u(\tau_2 - \tau_1)$;
- Nous avons vu également que $R^{(6)}(t_1, t_1, t_2, t_2, t_3, t_3) = \Sigma_{11}^3 + 2\Sigma_{11}\Sigma_{12}^2 + 2\Sigma_{11}\Sigma_{23}^2 + 2\Sigma_{11}\Sigma_{31}^2 + 8\Sigma_{12}\Sigma_{23}\Sigma_{31}$, soit, pour nous : $E[u_1^2 u_2^2 u_3^2] = \sigma_u^6 + 2\sigma_u^2 R_u^2(\tau_1) + 2\sigma_u^2 R_u^2(\tau_2) + 2\sigma_u^2 R_u^2(\tau_2 - \tau_1) + 8R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1)$.

La fonction de bicorrélation de la sollicitation s'exprime donc par :

$$\begin{aligned} B_f(\tau_1, \tau_2) = & \gamma^3 \bar{U}^6 + \gamma^3 \bar{U}^4 [3\sigma_u^2 + 4R_u(\tau_1) + 4R_u(\tau_2) + 4R_u(\tau_2 - \tau_1)] \\ & + \gamma^3 \bar{U}^2 [3\sigma_u^4 + 4\sigma_u^2 R_u(\tau_1) + 4\sigma_u^2 R_u(\tau_2) + 4\sigma_u^2 R_u(\tau_2 - \tau_1) + 2R_u^2(\tau_1) + \\ & \quad 2R_u^2(\tau_2) + 2R_u^2(\tau_2 - \tau_1) + 8R_u(\tau_1) R_u(\tau_2)] \\ & + 8R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_1) + 8R_u(\tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1)] \\ & + \gamma^3 [\sigma_u^6 + 2\sigma_u^2 (R_u^2(\tau_1) + R_u^2(\tau_2) + R_u^2(\tau_2 - \tau_1)) \\ & \quad + 8R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1)] \end{aligned} \quad (4.209)$$

Les termes intervenant dans cette expression peuvent être regroupés différemment :

$$\begin{aligned} B_f(\tau_1, \tau_2) = & \gamma^3 \bar{U}^6 + \gamma^3 \bar{U}^2 (\bar{U}^2 + \sigma_u^2) [3\sigma_u^2 + 4R_u(\tau_1) + 4R_u(\tau_2) + 4R_u(\tau_2 - \tau_1)] \\ & + 2\gamma^3 (\bar{U}^2 + \sigma_u^2) (R_u^2(\tau_1) + R_u^2(\tau_2) + R_u^2(\tau_2 - \tau_1)) + \\ & + 8\gamma^3 \bar{U}^2 [R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) + R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_1) + R_u(\tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1)] \\ & + \gamma^3 [\sigma_u^6 + 8R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1)] \end{aligned} \quad (4.210)$$

Pour autant que le processus aléatoire u soit gaussien, cette relation est tout à fait générale ; elle peut être utilisée quel que soit le contenu fréquentiel de la vitesse du vent.

Nous savons que l'évaluation de la fonction de bicorrélation à l'origine permet de rendre le moment d'ordre 3 de l'effort :

$$B_f(0,0) = m_{3f} = \gamma^3 (\bar{U}^6 + 15\bar{U}^4\sigma_u^2 + 45\bar{U}^2\sigma_u^4 + 15\sigma_u^6) \quad (4.211)$$

Notons cependant que le calcul de ce moment ne nécessite pas la connaissance de la fonction de bicorrélation et aurait pu être obtenu par une voie beaucoup plus simple en notant que :

$$\begin{aligned} m_{3f} &= E \left[\left(\gamma (\bar{U} + u)^2 \right)^3 \right] \\ &= \gamma^3 E [\bar{U}^6 + 6\bar{U}^5u + 15\bar{U}^4u^2 + 20\bar{U}^3u^3 + 15\bar{U}^2u^4 + 6\bar{U}u^5 + u^6] \\ &= \gamma^3 (\bar{U}^6 + 15\bar{U}^4\sigma_u^2 + 15\bar{U}^2(3\sigma_u^4) + (15\sigma_u^6)) \\ &= \gamma^3 (\bar{U}^6 + 15\bar{U}^4\sigma_u^2 + 45\bar{U}^2\sigma_u^4 + 15\sigma_u^6) \end{aligned} \quad (4.212)$$

Connaissant les expressions du moment d'ordre 1 (la moyenne $m_{1f} = \bar{U}^2 + \sigma_u^2$) et du moment d'ordre 2 (le carré moyen $m_{2f} = \bar{U}^4 + 6\bar{U}^2\sigma_u^2 + 3\sigma_u^4$) de la sollicitation, on peut obtenir l'expression du moment centré d'ordre 3 qui caractérise plus particulièrement la dissymétrie de la densité de probabilité :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{3f} &= m_{3f} - 3m_{1f}m_{2f} + 2m_{1f}^3 \\ &= \gamma^3 (\bar{U}^6 + 15\bar{U}^4\sigma_u^2 + 45\bar{U}^2\sigma_u^4 + 15\sigma_u^6) \\ &\quad - 3\gamma^3 (\bar{U}^2 + \sigma_u^2) (\bar{U}^4 + 6\bar{U}^2\sigma_u^2 + 3\sigma_u^4) + 2\gamma^3 (\bar{U}^2 + \sigma_u^2)^3 \\ &= 8\gamma^3\sigma_u^4 (3\bar{U}^2 + \sigma_u^2) \end{aligned} \quad (4.213)$$

Cette valeur, toujours positive, témoigne non seulement de la non gaussianité du processus aléatoire mais également d'une tendance à l'étalement de la densité de probabilité vers des valeurs plus grandes que la moyenne. Ceci signifie que les incursions dans les zones de fortes valeurs seront moins rares que pour un processus gaussien.

Le coefficient de dissymétrie associé à ce moment centré peut être obtenu assez facilement :

$$\gamma_{3f} = \frac{\tilde{m}_{3f}}{\tilde{m}_{2f}^{3/2}} = \frac{8\gamma^3\sigma_u^4 (3\bar{U}^2 + \sigma_u^2)}{[2\gamma^2\sigma_u^2 (2\bar{U}^2 + \sigma_u^2)]^{3/2}} = 3I_u \frac{1 + I_u^2}{(1 + I_u^2)^{3/2}} \simeq 3I_u \quad (4.214)$$

Les développements menés jusqu'ici sont tout à fait généraux ; cette relation est un moyen assez rapide et intéressant pour caractériser la dissymétrie de la sollicitation. Elle est valable dans un domaine d'application très large. Pour les intensités de turbulence rencontrées en pratique, nous pouvons donc retenir $\gamma_{3f} = 0.4$ à $\gamma_{3f} = 0.6$.

Il pourrait être intéressant d'établir l'expression de la fonction de bicorrélation que l'on aurait obtenue si l'on avait négligé le terme quadratique du chargement, c'est-à-dire s'il l'on avait supposé :

$$f_{lin}(t) = \gamma \bar{U} [\bar{U} + 2u(t)] \quad (4.215)$$

Des développements similaires à ceux qui viennent d'être menés peuvent également

être entrepris. Les expressions obtenues sont évidemment beaucoup plus simples :

$$\begin{aligned}
 B_{f_{lin}}(\tau_1, \tau_2) &= E[f_{lin}(t) f_{lin}(t + \tau_1) f_{lin}(t + \tau_2)] \\
 &= \gamma^3 \bar{U}^3 E[\bar{U}^3] + \gamma^3 \bar{U}^3 E[2\bar{U}^2(u_1 + u_2 + u_3)] \\
 &\quad + \gamma^3 \bar{U}^3 E[4\bar{U}(u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1)] + \gamma^3 \bar{U}^3 E[8\bar{U} u_1 u_2 u_3] \\
 &= \gamma^3 \bar{U}^6 + 4\gamma^3 \bar{U}^4 (R_u(\tau_1) + R_u(\tau_2) + R_u(\tau_2 - \tau_1)) \quad (4.216)
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, le moment d'ordre 3 vaut :

$$m_{3_{lin}} = \gamma^3 (\bar{U}^6 + 12\bar{U}^4 \sigma_u^2) \quad (4.217)$$

La comparaison des expressions 4.212 et 4.217 pourrait laisser supposer que cette linéarisation de la sollicitation permet d'obtenir une très bonne approximation du moment d'ordre 3 pour les intensités de turbulence rencontrées en pratique. Malheureusement, ce n'est pas le moment d'ordre 3 qu'il est important de bien représenter mais plutôt le moment centré d'ordre 3, qui, lui, caractérise directement la dissymétrie de la densité de probabilité. Lorsque l'effort est linéarisé, ce moment centré vaut :

$$\begin{aligned}
 \tilde{m}_{3_{lin}} &= m_{3_{lin}} - 3m_{1_{lin}}m_{2_{lin}} + 2m_{1_{lin}}^3 \\
 &= \gamma^3 (\bar{U}^6 + 12\bar{U}^4 \sigma_u^2) - 3\gamma^3 \bar{U}^2 (\bar{U}^4 + 4\sigma_u^4) + 2\gamma^3 \bar{U}^6 = 0 \quad (4.218)
 \end{aligned}$$

Ce résultat était bien sûr attendu dans la mesure où l'effort appliqué devient gaussien lorsque le terme quadratique du chargement n'est plus pris en compte.

Ces quelques remarques clôturent les développements généraux relatifs à l'expression de la fonction de bicorrélation de la sollicitation. A ce stade nous avons donc tous les éléments nécessaires pour aborder une analyse stochastique (au troisième ordre) : en appliquant la relation 4.164, une double convolution de cette fonction de bicorrélation permet de retrouver la grandeur équivalente, pour les déplacements de l'oscillateur.

Dans le cadre d'un processus aléatoire d'Ornstein-Uhlenbeck, la fonction d'autocorrélation de la composante turbulente s'exprime à l'aide d'une exponentielle décroissante et la fonction de bicorrélation prend la forme :

$$\begin{aligned}
 \frac{B_f(\tau_1, \tau_2)}{\gamma^3 \bar{U}^6} &= 1 + (1 + I_u^2) I_u^2 \left[3 + 4e^{-\alpha|\tau_1|} + 4e^{-\alpha|\tau_2|} + 4e^{-\alpha|\tau_2 - \tau_1|} \right] \\
 &\quad + 2I_u^4 (1 + I_u^2) \left(e^{-2\alpha|\tau_1|} + e^{-2\alpha|\tau_2|} + e^{-2\alpha|\tau_2 - \tau_1|} \right) + \\
 &\quad + 8I_u^4 \left[e^{-\alpha(|\tau_1| + |\tau_2|)} + e^{-\alpha(|\tau_1| + |\tau_2 - \tau_1|)} + e^{-\alpha(|\tau_2| + |\tau_2 - \tau_1|)} \right] \\
 &\quad + I_u^6 \left[1 + 8e^{-\alpha(|\tau_1| + |\tau_2| + |\tau_2 - \tau_1|)} \right] \quad (4.219)
 \end{aligned}$$

Cette fonction est représentée à la figure 4.27.

Dans le domaine fréquentiel

L'application à la relation 4.210 de la transformée de Fourier double permet d'obtenir la densité bispectrale de puissance dénommée aussi bispectre :

$$D_f(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_f(\tau_1, \tau_2) e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.220)$$

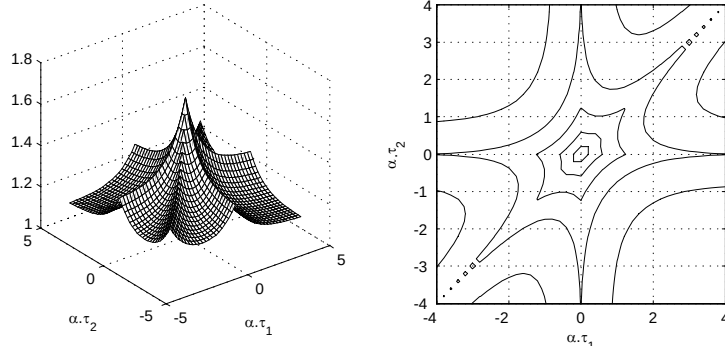


FIG. 4.27 – Fonction de bicorrélation de la sollicitation aérodynamique lorsque la composante turbulente est à corrélation exponentielle

Le calcul des transformées de Fourier double des termes génériques de la fonction de bicorrélation de l'effort appliqué sont reportés à l'annexe C. Ces relations permettent d'écrire la forme complète du bispectre. De nouveau, cette relation est tout à fait générale et peut être appliquée pour un processus gaussien quelle que soit sa densité spectrale de puissance $S_u(\omega)$. Etant donné que cette relation est un peu longue à écrire, nous l'avons découpée en plusieurs contributions :

$$\begin{aligned} D_f(\omega_1, \omega_2) = & F_1 \delta(\omega_1) \delta(\omega_2) + F_2(\omega_1) \delta(\omega_1) + F_3(\omega_2) \delta(\omega_2) \\ & + F_4(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) + F_5(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (4.221)$$

– le premier terme fait intervenir l'expression de :

$$F_1 = \gamma^3 (\bar{U}^6 + 3\sigma_u^2 \bar{U}^4 + 3\sigma_u^4 \bar{U}^2 + \sigma_u^6) \quad (4.222)$$

Il s'agit d'un Dirac concentré à l'origine. On peut vérifier sans peine qu'il s'agit du cube de la moyenne de la sollicitation. Cette valeur aurait pu être obtenue beaucoup plus simplement puisque :

$$E^3[f(t)] = \gamma^3 (\bar{U}^2 + \sigma_u^2)^3 \quad (4.223)$$

– les trois termes suivants sont des lignes de Dirac dans le plan (ω_1, ω_2) . Les expressions exactes de leurs intensités sont :

$$F_2(\omega_1) = 2\gamma^3 (\bar{U}^2 + \sigma_u^2) \left[2\bar{U}^2 S_u(\omega_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega \right] \quad (4.224)$$

$$F_3(\omega_2) = 2\gamma^3 (\bar{U}^2 + \sigma_u^2) \left[2\bar{U}^2 S_u(\omega_2) + \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega \right] \quad (4.225)$$

$$F_4(\omega_2) = 2\gamma^3 (\bar{U}^2 + \sigma_u^2) \left[2\bar{U}^2 S_u(\omega_2) + \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega \right] \quad (4.226)$$

Ces termes permettent de donner une idée de la caractérisation de second ordre. On peut en effet reconnaître l'expression de la densité spectrale de la sollicitation sous ces formes.

En tant que contributions à l'élaboration du bispectre, ces quatre premiers termes participent à l'érection du moment d'ordre 3 de la sollicitation. Ils ne participent cependant pas à la dissymétrie de la densité de probabilité, c'est-à-dire à la valeur du moment centré. Ceci est à rapprocher du fait que le terme muni d'un Dirac dans l'expression de la densité spectrale, le carré de la moyenne, participe au moment d'ordre 2 de la réponse (le carré moyen) sans pour autant apporter de contribution à son moment centré (la variance). Nous vérifierons ceci dans la suite.

La double intégration de ces quatre premiers termes sur le domaine des fréquences permet d'obtenir :

$$m_3^{(1)} = \gamma^3 (\bar{U}^6 + 15\bar{U}^4\sigma_u^2 + 21\bar{U}^2\sigma_u^4 + 7\sigma_u^6) \quad (4.227)$$

- le cinquième terme correspond à la partie du moment d'ordre 3 qui est répartie sur les fréquences. C'est cette partie qui est responsable de la dissymétrie dans la densité de probabilité de la force appliquée. Les développements analytiques reportés à l'annexe C permettent d'obtenir l'expression complète de ce terme :

$$\begin{aligned} F_5(\omega_1, \omega_2) = & 8\gamma^3 \bar{U}^2 [S_u(\omega_1) S_u(\omega_2) + S_u(\omega_1 + \omega_2) S_u(\omega_1) + S_u(\omega_2) S_u(\omega_1 + \omega_2)] \\ & + 8\gamma^3 \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega + \omega_1) S_u(\omega_2 - \omega) S_u(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (4.228)$$

Cette contribution pourrait également être subdivisée en deux termes dont la différence essentielle réside dans l'ordre de grandeur. En effet, si l'on attribue σ_u^2 à l'ordre de grandeur de $S_u(\omega)$, on peut constater que le premier terme serait de l'ordre de $\bar{U}^2\sigma_u^4$ alors que le second serait de l'ordre de σ_u^6 . L'intensité de turbulence semble donc à nouveau jouer un rôle important. Pour les faibles intensités de turbulence rencontrées en pratique, le second terme pourrait éventuellement être négligé. Certains auteurs recourent à cette solution sans pour autant la justifier dans le cadre des densités spectrales qu'ils utilisent.

Le moment d'ordre 3 à associer à cette cinquième composante peut être évalué assez facilement par double intégration sur le domaine des fréquences :

$$m_3^{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_5(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = 24\gamma^3 \bar{U}^2 \sigma_u^4 + 8\gamma^3 \sigma_u^6 = 8\gamma^3 \sigma_u^4 (3\bar{U}^2 + \sigma_u^2) \quad (4.229)$$

Le rapport $\frac{8\gamma^3 \sigma_u^6}{24\gamma^3 \bar{U}^2 \sigma_u^4} = \frac{I_u^2}{3}$ indique, comme pressenti, que le terme exprimé à l'aide d'une intégrale participe peu à l'élaboration du moment d'ordre 3. Cette constatation ne permet pour autant pas de négliger purement et simplement ce terme vis-à-vis du premier. En effet, souvenons-nous du raisonnement mené à l'occasion des caractéristiques de second ordre : nous avons conclu que l'importance en termes de moments d'ordre 2, sur la réponse du système, d'un terme quadratique de chargement et de faible variance ne pouvait pas être relié au fait que ce terme contribue

peu à l'élaboration de la variance (son contenu fréquentiel pourrait être proportionnellement plus important dans une zone de résonance dynamique, exemple du processus sollicitant en bande étroite).

La somme des moments d'ordre 3 associés à chacun des termes détaillés ci-avant permet de retrouver le moment d'ordre 3 obtenu préalablement en prenant la valeur à l'origine de la fonction de bicorrélation :

$$m_3^{(1)} + m_3^{(2)} = \gamma^3 (\bar{U}^6 + 15\bar{U}^4 \sigma_u^2 + 45\bar{U}^2 \sigma_u^4 + 15\sigma_u^6)$$

L'objectif des développements menés jusqu'ici n'était pas de retrouver l'expression du moment d'ordre 3 mais bien de savoir de quelle façon ce moment se répartit dans le domaine des fréquences. Lors de l'approche dans le domaine temporel, nous avons vu que le moment centré d'ordre 3 qui caractérise plus particulièrement la dissymétrie de la densité de probabilité s'exprimait par :

$$\tilde{m}_3 = 8\gamma^3 \sigma_u^4 (3\bar{U}^2 + \sigma_u^2) \quad (4.230)$$

ce qui correspond exactement à la contribution du terme $F_5(\omega_1, \omega_2)$. Ceci montre, ainsi que nous l'avons laissé sous-entendre, que les contributions concentrées (termes munis de Diracs) ne participent pas à l'élaboration du moment centré.

Lorsque la vitesse du vent est caractérisée par un processus aléatoire d'Orstein-Uhlenbeck, la densité spectrale de puissance s'exprime par une fraction algébrique simple, ce qui permet de particulariser la forme générale du bispectre à notre problème précis. Par souci de simplicité des notations, nous laisserons de côté les termes munis des fonctions de Dirac :

$$\begin{aligned} D_f(\omega_1, \omega_2) = & 8\gamma^3 \bar{U}^2 \frac{\sigma_u^4}{\pi^2} \alpha^2 \frac{3\alpha^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2}{(\alpha^2 + \omega_1^2)(\alpha^2 + \omega_2^2)(\alpha^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)} \\ & + 8\gamma^3 \frac{\sigma_u^6}{\pi^3} \alpha^3 \frac{2\pi(12\alpha^2 + \omega_1^2 + \omega_1\omega_2 + \omega_2^2)}{\alpha(4\alpha^2 + \omega_1^2)(4\alpha^2 + \omega_2^2)(4\alpha^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)} \quad (4.231) \end{aligned}$$

Ce bispectre de sollicitation est représenté à la figure 4.28.

Les détails relatifs au calcul des intégrales des fractions rationnelles sont donnés à l'annexe A. On reconnaît sous cette formulation les deux termes (de différents ordres en σ_u) discutés ci-avant.

Le second terme aura d'autant plus d'importance vis-à-vis du premier que le rapport¹⁷ :

$$\chi_1 = 2I_u^2 \frac{12\alpha^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_1\omega_2}{3\alpha^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2} \frac{(\alpha^2 + \omega_1^2)(\alpha^2 + \omega_2^2)(\alpha^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)}{(4\alpha^2 + \omega_1^2)(4\alpha^2 + \omega_2^2)(4\alpha^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)} \quad (4.232)$$

¹⁷ Les rapports ζ_1 à ζ_6 introduits au paragraphe précédent visaient à quantifier différentes erreurs commises en négligeant les termes quadratiques du chargement. Quant à χ_1 , il représente l'importance du terme de second ordre en I_u^2 dans l'expression du moment centré de la sollicitation. Ceci est tout à fait différent dans la mesure où les deux termes ici comparés n'existeraient pas et le moment centré serait nul si le terme de chargement quadratique n'était pas pris en compte.

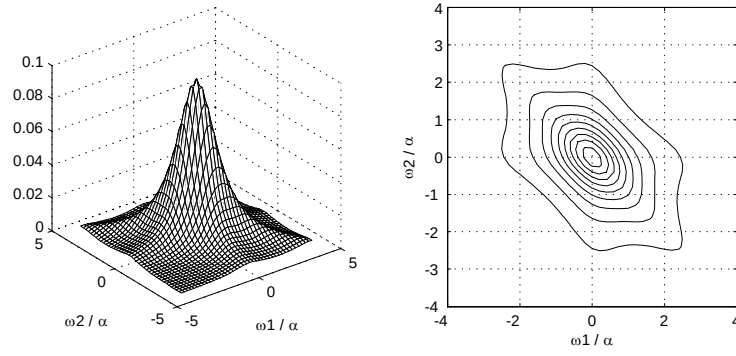


FIG. 4.28 – Bispectre de la sollicitation aérodynamique lorsque la composante turbulente est à corrélation exponentielle ($I_u = 20\%$)

est grand. Ce rapport est représenté à la figure 4.29 ; l'analyse de cette fonction montre qu'elle est comprise entre $I_u^2/8$ (pour les valeurs du paramètre α très grandes vis-à-vis de ω_1 et ω_2) et I_u^2 . Dans un raisonnement identique à l'approximation en bruit blanc, nous pourrions donc conclure que, dans le cadre d'un processus d'Ornstein Uhlenbeck, le terme s'exprimant à l'aide d'une intégrale dans l'expression du bispectre pourrait être négligé.

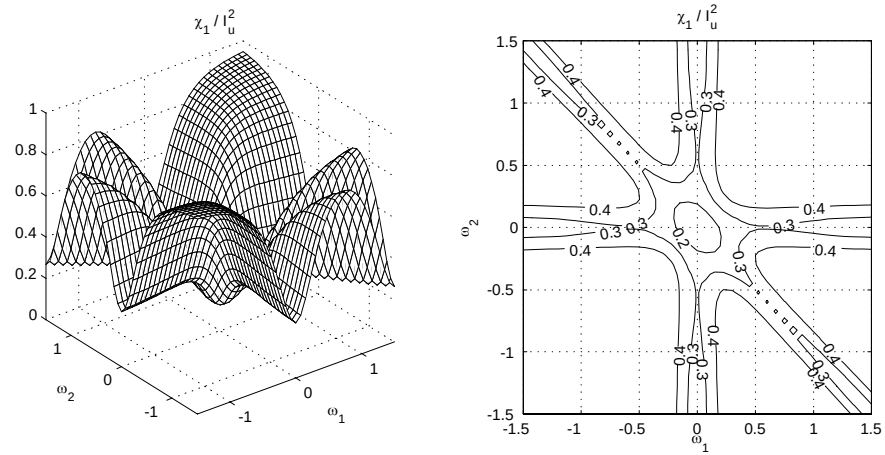


FIG. 4.29 – Importance du terme de chargement d'ordre supérieur en I_u sur la réponse de l'oscillateur.

4.6.5 Réponse de l'oscillateur simple

Estimation du déplacement de l'oscillateur

Maintenant que les caractéristiques statistiques de la sollicitation sont établies jusqu'au troisième ordre, les grandeurs similaires pour la réponse du système 1 DDL peuvent être obtenues. Continuons par exemple dans le domaine fréquentiel, ce qui se produit en

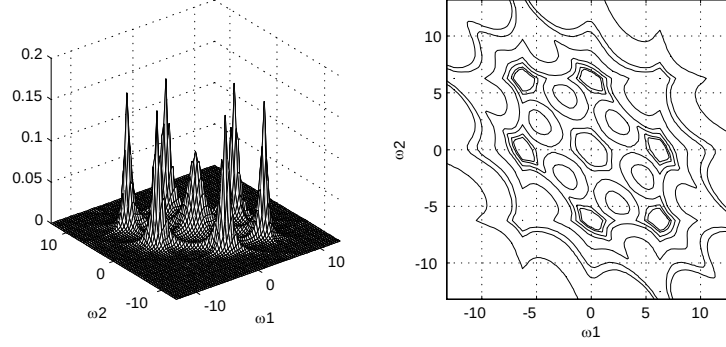


FIG. 4.30 – Représentation de la valeur absolue du bispectre de la réponse de l'oscillateur simple ($\gamma = 1$, $\bar{U} = 1$, $\sigma_u = 0.2$, $\alpha = 1$, $M = \frac{1}{4\pi^2}$, $K = 1$, $\xi = 0.05$)

pratique, puisque les vitesses de vent sont caractérisées par leur densité spectrale de puissance. Pour rappel, le bispectre de la réponse peut s'écrire :

$$D_x(\omega_1, \omega_2) = D_f(\omega_1, \omega_2)H(\omega_1)H(\omega_2)\bar{H}(\omega_1 + \omega_2) \quad (4.233)$$

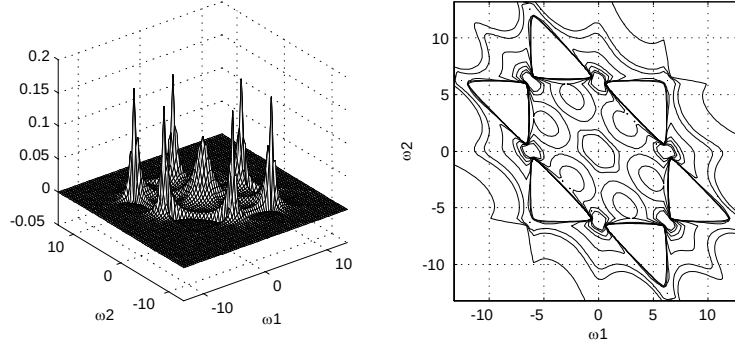


FIG. 4.31 – Représentation de la partie réelle du bispectre de la réponse de l'oscillateur simple ($\gamma = 1$, $\bar{U} = 1$, $\sigma_u = 0.2$, $\alpha = 1$, $M = \frac{1}{4\pi^2}$, $K = 1$, $\xi = 0.05$)

Le moment centré de troisième ordre de la réponse peut alors être estimé à partir de l'intégrale de cette fonction. Les développements nécessaires à son estimation sont assez lourds et ardu. Bien que la fonction à intégrer soit une fonction complexe, nous savons que le résultat de l'intégration doit être réel (puisque'il s'agit du bispectre d'un processus réel). Le calcul peut donc être simplifié en ne considérant que l'intégrale de la partie réelle.

Les figures 4.30 et 4.31 donnent un exemple de réponse obtenue. La représentation de la valeur absolue de cette fonction est plus habituelle mais certainement moins utile puisqu'il s'agit en définitive d'intégrer la partie réelle.

Etant donné que la sollicitation est exprimée comme somme de deux termes, nous

$a_0(\xi)$	32	$b_0(\xi)$	8
$a_1(\xi)$	352ξ	$b_1(\xi)$	32ξ
$a_2(\xi)$	$8(17 + 184\xi^2)$	$b_2(\xi)$	$5(1 + 8\xi^2)$
$a_3(\xi)$	$16\xi(53 + 184\xi^2)$	$b_3(\xi)$	$2\xi(1 + 8\xi^2)$
$a_4(\xi)$	$131 + 2040\xi^2 + 2816\xi^4$		
$a_5(\xi)$	$2\xi(197 + 1128\xi^2 + 512\xi^4)$		
$a_6(\xi)$	$12(3 + 34\xi^2 + 80\xi^4)$		
$a_7(\xi)$	$24\xi(1 + 8\xi^2)$		

TAB. 4.12 – Coefficient permettant d'exprimer les coefficients d'amplification dynamique à l'ordre 3

adoptons la même démarche pour la réponse. Tous calculs faits, on trouve finalement :

$$\begin{aligned}\tilde{m}_3 &= \frac{8\gamma^3\bar{U}^2\sigma_u^4}{\varpi^6}M_1\left(\frac{\varpi}{\alpha}, \xi\right) + \frac{8\gamma^3\sigma_u^6}{\varpi^6}M_2\left(\frac{\varpi}{\alpha}, \xi\right) \\ &= \frac{8\gamma^3\bar{U}^2\sigma_u^4}{\varpi^6}\left[M_1\left(\frac{\varpi}{\alpha}, \xi\right) + I_u^2M_2\left(\frac{\varpi}{\alpha}, \xi\right)\right]\end{aligned}\quad (4.234)$$

où

$$\begin{aligned}M_1(\varphi, \xi) &= \frac{1}{1 + 8\xi^2} \frac{\varphi^2 \sum_{k=0}^{k=7} a_k(\xi) \varphi^k}{(1 + 2\xi\varphi)(1 + 2\xi\varphi + \varphi^2)^2(4 + 4\xi\varphi + \varphi^2)(1 + 4\xi\varphi + 4\varphi^2)} \\ M_2(\varphi, \xi) &= \frac{1}{1 + 8\xi^2} \frac{\varphi^2 \sum_{k=0}^{k=3} b_k(\xi) \varphi^k}{2(1 + \xi\varphi)(4 + 4\xi\varphi + \varphi^2)(1 + 2\xi\varphi + \varphi^2)}\end{aligned}\quad (4.235)$$

et les coefficients $a_k(\xi)$, $b_k(\xi)$ sont donnés au tableau 4.12.

De même qu'à l'ordre 2, l'autoconvolution de la densité spectrale apportait une modification très limitée à la variance de la réponse structurelle, on peut constater qu'à l'ordre 3, le terme s'exprimant à l'aide d'une intégrale fournit inévitablement une contribution plus faible. Cette observation est motivée d'une part, par l'ordre de grandeur de cette contribution au terme de chargement (σ_u^6 vis-à-vis de $\bar{U}^2\sigma_u^4$) et, d'autre part, par l'effet limité qu'il produit sur la structure. On peut en effet constater sur la figure 4.32 que ce terme donne un moment centré plus petit. Au stade de la recherche actuelle, il ne nous semble pas impératif de devoir estimer les moments de troisième ordre avec une précision supérieure à 10%. Nous avons donc décidé de laisser tomber ce terme de chargement au troisième ordre. Ceci ne peut bien sûr que s'accompagner d'une accélération substantielle de la résolution lorsque la sollicitation est quelconque.

Le moment d'ordre 3 est une grandeur intéressante mais en définitive assez inhabituelle. Son interprétation physique se trouve dans la dissymétrie de la densité de probabilité mais la manipulation d'une grandeur ayant pour unités le cube de la grandeur de base rend cette interprétation assez difficile. C'est pour cette raison que l'on utilise plus généralement les coefficients adimensionnels obtenus en rapportant les moments centrés d'ordres supérieurs à la puissance adéquate du moment centré d'ordre 2. A l'ordre 3, le coefficient de dissymétrie s'obtient par :

$$\gamma_3 = \frac{\tilde{m}_3}{(\tilde{m}_2)^{3/2}} \quad (4.236)$$

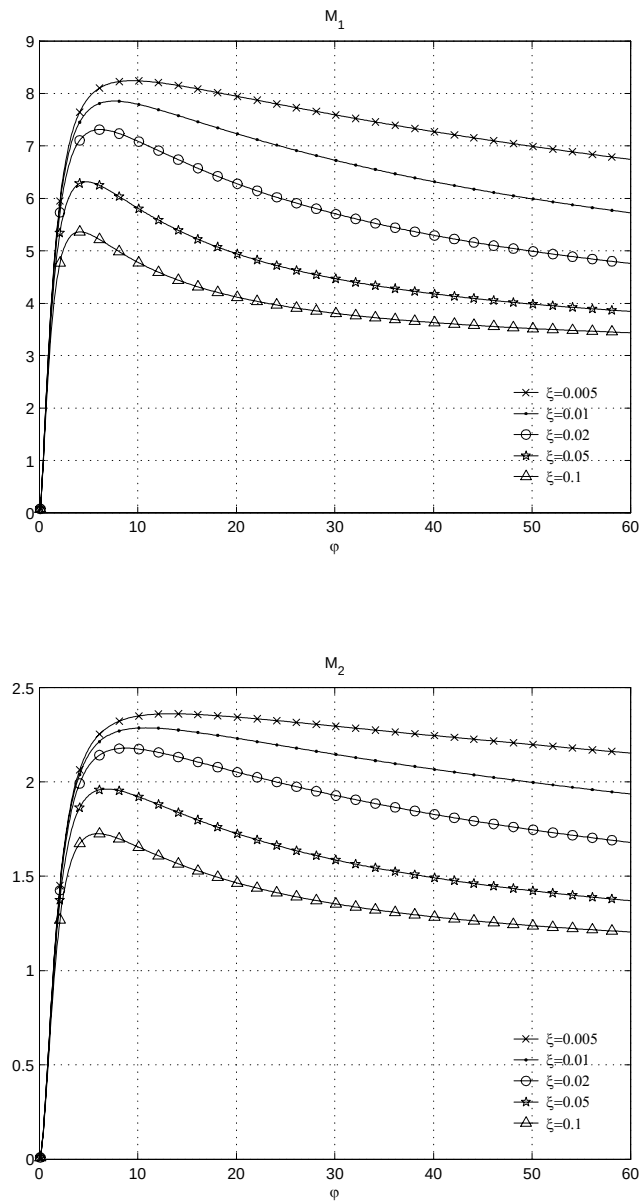


FIG. 4.32 – Composantes du coefficient d'amplification dynamique à l'ordre 3

Etant donné que nous avons limité ici notre étude en ne conservant que le terme le plus important dans le chargement (on néglige l'ordre 2 en I_u), nous avons décidé de rester cohérent avec cette hypothèse et donc de ne conserver également qu'un terme dans l'expression du moment centré d'ordre 2 de la réponse (4.136) ; il reste alors :

$$\sigma_x^2 = \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^4} \frac{1}{2\xi} \frac{\varphi(1 + 2\xi\varphi)}{1 + 2\xi\varphi + \varphi^2} \quad (4.237)$$

L'expression du coefficient de dissymétrie peut alors être obtenue :

$$\gamma_3 = \frac{\tilde{m}_3}{(\tilde{m}_2)^{3/2}} = I_u M_1(\varphi, \xi) \left(\frac{2\xi(1 + 2\xi\varphi + \varphi^2)}{\varphi(1 + 2\xi\varphi)} \right)^{3/2} \quad (4.238)$$

Cette fonction est représentée à la figure 4.33. Quelques réflexions permettent de rendre les formes de ces courbes évidentes. Nous savons que la réponse d'un oscillateur peut être interprétée comme la somme de deux contributions. La première, en basses fréquences, représente une adaptation quasi-statique de la structure soumise aux sollicitations de basses fréquences. Cette contribution présente donc la même caractéristique de dissymétrie que celle de la sollicitation. L'autre contribution est la contribution dynamique dont on imagine aisément que le caractère statistique doit être de type gaussien. Il paraît donc logique que le coefficient de symétrie de la réponse de l'oscillateur soit une valeur intermédiaire entre celui de la sollicitation ($3I_u$), que l'on obtiendrait pour une structure très raide, ou fortement amortie, et zéro, que l'on obtiendrait pour une réponse purement dynamique.

Ces réflexions se retrouvent assez facilement à la figure 4.33 où l'on peut par exemple retrouver en asymptote horizontale le coefficient de dissymétrie de la sollicitation (4.214). Assez logiquement, cette convergence asymptotique est d'autant plus rapide que la structure étudiée est amortie.

Moment d'ordre 3 de la vitesse et de l'accélération

De même qu'à l'ordre 2, les densités spectrales de la vitesse et de l'accélération pouvaient être calculées afin d'obtenir essentiellement les variances de ces grandeurs, les moments d'ordre 3 de la vitesse et de l'accélération peuvent également être déterminés. Pour ce faire, nous allons reprendre un développement dans le domaine temporel. Dans ce domaine, la fonction de bicorrélation de la vitesse s'exprime par :

$$B_{\dot{x}}(\tau_1, \tau_2) = E[\dot{x}(t) \dot{x}(t + \tau_1) \dot{x}(t + \tau_2)] \quad (4.239)$$

En revenant à la définition de la vitesse,

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t_0 \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t_0) - x(t)}{\Delta t_0} \quad (4.240)$$

$$\dot{x}(t + \tau_1) = \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{x(t + \tau_1 + \Delta t_1) - x(t + \tau_1)}{\Delta t_1} \quad (4.241)$$

$$\dot{x}(t + \tau_2) = \lim_{\Delta t_2 \rightarrow 0} \frac{x(t + \tau_2 + \Delta t_2) - x(t + \tau_2)}{\Delta t_2} \quad (4.242)$$

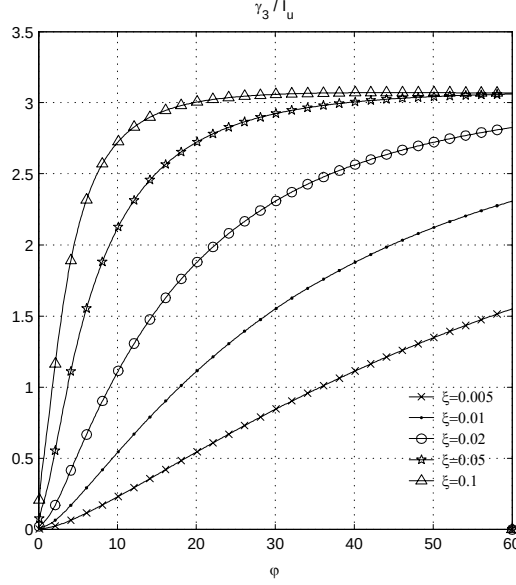


FIG. 4.33 – Représentation du coefficient de dissymétrie de la réponse d'un oscillateur simple soumis à une turbulence caractérisée par un processus à corrélation exponentielle.

et en injectant ces trois relations dans la relation 4.239 puis en intervertissant les opérations de limite et d'espérance mathématique, on trouve :

$$B_{\dot{x}}(\tau_1, \tau_2) = \lim_{\Delta t_0 \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{\partial^2 B_x}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \right]_{(\tau_1 - \Delta t_0, \tau_2 - \Delta t_0)} - \left[\frac{\partial^2 B_x}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \right]_{(\tau_1, \tau_2)}}{\Delta t_0} \quad (4.243)$$

La fonction de bicorrélation de la vitesse peut donc être obtenue par la dérivée "inclinée", dans la direction $\tau_1 = \tau_2$, de la dérivée seconde de la fonction de bicorrélation du déplacement. Cette dérivée inclinée peut également être exprimée plus simplement, en utilisant des coordonnées alignées selon cette direction et selon la direction perpendiculaire :

$$B_{\dot{x}}(\tau_1, \tau_2) = -2 \left[\frac{\partial \beta_x}{\partial u} \right]_{\substack{u=\tau_1+\tau_2 \\ v=\tau_1-\tau_2}} \quad (4.244)$$

où $\beta_x(u, v) = \left[\frac{\partial^2 B_x}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \right]_{\substack{\tau_1 = \frac{u+v}{2} \\ \tau_2 = \frac{u-v}{2}}}$. L'équivalent dans le domaine fréquentiel de cette relation

peut être obtenu en prenant simplement une transformée de Fourier double, membre à membre :

$$D_{\dot{x}}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\dot{x}}(\tau_1, \tau_2) e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.245)$$

En introduisant l'expression que nous avons obtenue pour la vitesse, on peut écrire successivement :

$$\begin{aligned}
& D_{\dot{x}}(\omega_1, \omega_2) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\Delta t_0 \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{\partial^2 B_x}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \right]_{(\tau_1 - \Delta t_0, \tau_2 - \Delta t_0)} - \left[\frac{\partial^2 B_x}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \right]_{(\tau_1, \tau_2)}}{\Delta t_0} \\
&\quad e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\Delta t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 B_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right]_{(\tau_1 - \Delta t_0, \tau_2 - \Delta t_0)} e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\
&\quad - \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\Delta t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 B_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right]_{(\tau_1, \tau_2)} e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left[\lim_{\Delta t_0 \rightarrow 0} \frac{e^{-i(\omega_1 + \omega_2)\Delta t_0} - 1}{\Delta t_0} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 B_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right]_{(\tau_1, \tau_2)} \\
&\quad e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \frac{-i(\omega_1 + \omega_2)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 B_x}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} e^{-i\omega_2 \tau_2} e^{-i\omega_1 \tau_1} d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \frac{-i(\omega_1 + \omega_2)}{4\pi^2} \left[i\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial B_x}{\partial \tau_2} e^{-i\omega_2 \tau_2} e^{-i\omega_1 \tau_1} d\tau_1 d\tau_2 \right] \\
&= \frac{-i(\omega_1 + \omega_2)}{4\pi^2} \left[i\omega_1 i\omega_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_x(\tau_1, \tau_2) e^{-i\omega_2 \tau_2} e^{-i\omega_1 \tau_1} d\tau_1 d\tau_2 \right] \\
&= i(\omega_1 + \omega_2) \omega_1 \omega_2 D_x(\omega_1, \omega_2) \tag{4.246}
\end{aligned}$$

Tout comme pour le bispectre du déplacement, cette grandeur est une grandeur complexe, pas nécessairement positive, mais telle que son intégration sur le domaine des fréquences donne un résultat réel : le moment centré d'ordre 3. Le résultat de cette intégration est réel car le symétrique du bispectre de vitesse coïncide avec son conjugué :

$$\begin{aligned}
D_{\dot{x}}(-\omega_1, -\omega_2) &= i(-\omega_1 - \omega_2)(-\omega_1)(-\omega_2) D_x(-\omega_1, -\omega_2) \\
&= -i(\omega_1 + \omega_2) \omega_1 \omega_2 \overline{D_x(\omega_1, \omega_2)} \\
&= \overline{D_{\dot{x}}(\omega_1, \omega_2)} \tag{4.247}
\end{aligned}$$

Une relation similaire peut être valable pour les accélérations :

$$D_{\ddot{x}}(\omega_1, \omega_2) = i(\omega_1 + \omega_2) \omega_1 \omega_2 D_{\dot{x}}(\omega_1, \omega_2)$$

et donc aussi finalement :

$$D_{\ddot{x}}(\omega_1, \omega_2) = -(\omega_1 + \omega_2)^2 \omega_1^2 \omega_2^2 D_x(\omega_1, \omega_2)$$

Les figures 4.34 et 4.35 sont des représentations des parties réelles des bispectres des vitesses et accélérations de l'oscillateur soumis au carré du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

4.6.6 Approche numérique

Dans le cadre du présent exemple, nous avons encore la possibilité de mener les développements de façon analytique. Il va de soi que lorsque nous traitons des densités

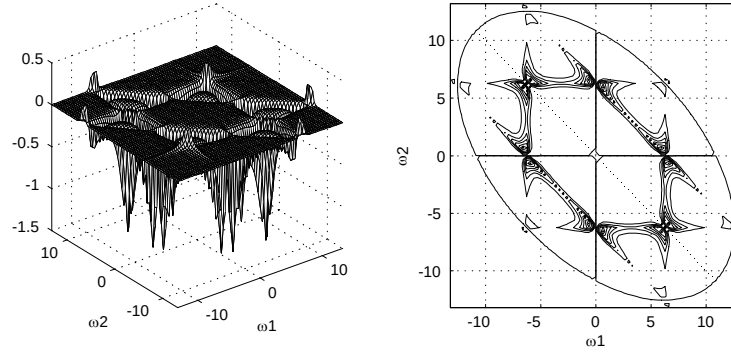


FIG. 4.34 – Représentation de la partie réelle du bispectre de la vitesse de l'oscillateur simple ($\gamma = 1$, $\bar{U} = 1$, $\sigma_u = 0.2$, $\alpha = 1$, $M = \frac{1}{4\pi^2}$, $K = 1$, $\xi = 0.05$)

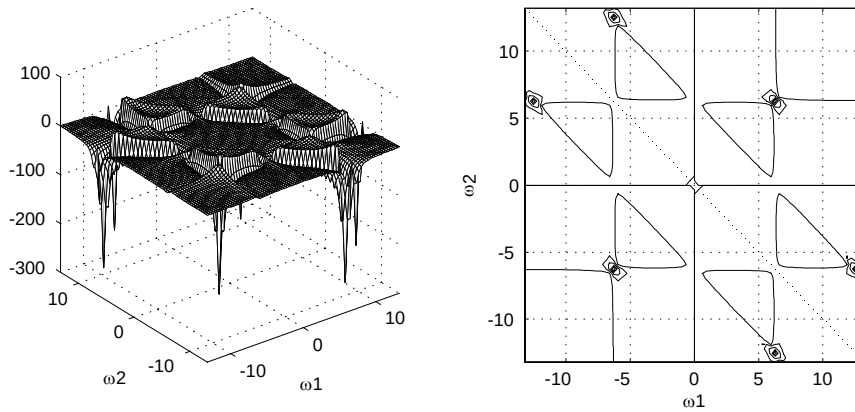


FIG. 4.35 – Représentation de la partie réelle du bispectre d'accélération de l'oscillateur simple ($\gamma = 1$, $\bar{U} = 1$, $\sigma_u = 0.2$, $\alpha = 1$, $M = \frac{1}{4\pi^2}$, $K = 1$, $\xi = 0.05$)

spectrales réelles de vent, ces développements deviennent rapidement impraticables. Il convient donc dès lors d'établir une stratégie d'estimation numérique des intégrales des bispectres. Pour ce faire, nous allons nous inspirer des quatre méthodes présentées à l'occasion de la caractérisation d'ordre 2.

Approximation en bruit blanc

La première méthode approchée que nous avons présentée était l'approximation en bruit blanc. Cette méthode tire parti du fait que la fonction à intégrer $S_x(\omega)$ s'obtient par le produit de deux fonctions à forte acuité. La première est la densité spectrale de puissance de la sollicitation, dont le contenu est essentiellement concentré aux basses fréquences et la seconde est la fonction de transfert d'un oscillateur simple, d'autant plus pointue dans le voisinage de la fréquence propre que l'oscillateur est peu amorti.

Les développements présentés au paragraphe 3.4 peuvent assez facilement être adaptés à la caractérisation de troisième ordre. La topologie du second noyau de Volterra semble effectivement se porter assez bien à ce genre de méthode. Dans les développements qui suivent, nous allons cependant voir que l'application de la méthode d'approximation en bruit blanc n'est cependant pas si évidente qu'il n'y paraît. Quelques éléments du raisonnement sont repris ci-après. Ils visent à démontrer la difficulté de développer, à l'ordre 3, une méthode similaire à l'approximation en bruit blanc.

Adaptation de l'approximation en bruit blanc habituelle De la géométrie assez particulière du second noyau de Volterra, on se limite généralement à mentionner la présence d'une cuvette à l'origine et, à plus grande distance, de pics assez pointus. Sous des hypothèses semblables à celles présentées au paragraphe 3.4, le moment centré d'ordre 3 semble donc pouvoir donc s'écrire :

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} D_x(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} D_f(\omega_1, \omega_2) K_2(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \simeq \tilde{m}_{3_{QS}} + \tilde{m}_{3_{DY}} \quad (4.248)$$

où deux contributions, l'une quasi-statique et l'autre dynamique, sont introduites. La première d'entre elles s'obtient en remplaçant le second noyau de Volterra par son plan tangent à l'origine :

$$\tilde{m}_{3_{QS}} = K_2(0, 0) \iint_{-\infty}^{+\infty} D_f(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \frac{\tilde{m}_{3_f}}{K^3} \quad (4.249)$$

Quant à la contribution dynamique, son expression la plus adéquate n'est pas si évidente. Supposons pour commencer que le bispectre de la sollicitation présente douze valeurs identiques au droit des pics du second noyaux de Volterra de coordonnées $(\omega_{1_i}^{(p)}, \omega_{2_i}^{(p)})$. Dans ce cas, la meilleure estimation que l'on puisse faire de la contribution dynamique semble assez logiquement pouvoir s'exprimer en remplaçant le bispectre réel par un bispectre constant d'intensité $D_f(\omega_{1_i}^{(p)}, \omega_{2_i}^{(p)})$, (i quelconque) :

$$\tilde{m}_{3_{DY}} = D_f(\omega_{1_i}^{(p)}, \omega_{2_i}^{(p)}) \iint_{-\infty}^{+\infty} K_2(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = D_f(\omega_{1_i}^{(p)}, \omega_{2_i}^{(p)}) \frac{8\pi^2}{3\varpi^4 (1 + 8\xi^2)} \quad (4.250)$$

où les $D_f(\omega_{1_i}^{(p)}, \omega_{2_i}^{(p)})$ sont tous égaux pour $i = 1, \dots, 12$.

En toute généralité, le bispectre de la sollicitation peut être différent d'un endroit à l'autre de l'espace des fréquences et il serait alors préférable de trouver une formulation plus générale. La représentation géométrique que l'on peut avoir de l'approximation en bruit blanc nous a mené vers ces observations :

- la contribution dynamique devrait être obtenue en remplaçant le bispectre de la sollicitation par un bispectre constant dans le voisinage de chaque pic, la valeur de cette constante étant déterminée par l'ordonnée du bispectre réel au droit du pic considéré,
- à chacun des douze pics, il convient également d'attribuer un domaine d'influence, ou plutôt une fraction ρ_i du volume complet $\frac{8\pi^2}{3\varpi^4(1+8\xi^2)}$ qui est situé sous le noyau de Volterra $K_2(\omega_1, \omega_2)$.

L'estimation de la contribution dynamique consiste alors à réaliser la sommation des contributions provenant de chacun des pics :

$$\tilde{m}_{3DY} = \sum_{i=1}^{12} \rho_i D_f(\omega_{1_i}^{(p)}, \omega_{2_i}^{(p)}) \frac{8\pi^2}{3\varpi^4(1+8\xi^2)} \quad (4.251)$$

Cette relation montre que l'approximation en bruit blanc telle que présentée ici pour la caractérisation d'ordre 3 consiste à considérer le bispectre de la sollicitation constant sur l'entière du domaine des fréquences, la constante étant une moyenne pondérée des ordonnées du bispectre au droit de chacun des pics du second noyau de Volterra. Etant donné que $\sum_{i=1}^{12} \rho_i = 1$, cette formule dégénère en la relation 4.250 lorsque le bispectre de la sollicitation présente des ordonnées identiques au droit de chacun des pics.

Penchons-nous maintenant sur la pondération ρ_i attribuée à chacun des pics. Etant donné que le noyau présente six pic hauts et six pics bas dont le niveau est trois fois plus bas, la démarche la plus simple consisterait à choisir $\rho_i = 1/8$ pour un pic haut et $\rho_i = 1/24$ pour un pic bas. Cette démarche simple et immédiate n'est a priori pas nécessairement exacte puisqu'elle revient à choisir des pondérations au prorata des hauteurs de pic et non pas des volumes sous les pics (dans un voisinage proche, bien entendu).

Afin de déterminer des poids plus réalistes, nous avons intégré numériquement le second noyau de Volterra dans le voisinage de chacun des pics. Pour chaque pic, l'intégrale est réalisée sur un petit carré de $2\varepsilon\varpi$ de côté et orienté avec ses côtés parallèles aux axes $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$. Ces intégrales doubles, donnant le volume sur chacun des pics dans leur voisinage proche, ont été calculées numériquement (pour $\xi = 0.01$). Afin de faciliter les comparaisons, le volume sous chacun des pics a été rapporté au volume calculé pour le pic n°1 (avec la numérotation du tableau 4.11). Les résultats de cette étude sont fournis à la figure 4.36. On peut y constater que la première approximation formulée est tout compte fait assez bonne. Ceci montre donc que les pics dans le second noyau de Volterra ont des sections droites comparables et sont simplement de hauteur différentes. Nous choisirons donc des fractions identiques pour chacun des six pics hauts et pour chacun des six pics bas ainsi qu'un pourcentage trois fois moindre pour ces derniers.

Appliquons maintenant la méthode proposée à la réponse de l'oscillateur soumis au carré d'un processus d'Orstein. Afin de simplifier les choses, nous allons nous limiter à ne conserver que le terme le plus important dans l'expression du bispectre de la sollicitation (Eq. 4.231). On peut vérifier assez facilement que les ordonnées du bispectre sont identiques pour chacun des six pics hauts d'une part et pour chacun des six pics bas d'autre

part :

$$D_f(\omega_{1_i}^{(p)}, \omega_{2_i}^{(p)}) = 8\gamma^3 \bar{U}^2 \frac{\sigma_u^4}{\pi^2} \frac{3\alpha^2 + 2\varpi^2}{(\alpha^2 + \varpi^2)^2} \quad \text{pour } i = 1, \dots, 6 \quad (4.252)$$

$$D_f(\omega_{1_i}^{(p)}, \omega_{2_i}^{(p)}) = 8\gamma^3 \bar{U}^2 \frac{\sigma_u^4}{\pi^2} \frac{3(\alpha^2 + 2\varpi^2)\alpha^2}{(\alpha^2 + \varpi^2)^2(\alpha^2 + 4\varpi^2)} \quad \text{pour } i = 7, \dots, 12 \quad (4.253)$$

Prenant en compte que $\sum_{i=1}^6 \rho_i = \frac{3}{4}$ et que $\sum_{i=7}^{12} \rho_i = \frac{1}{4}$, l'approximation en bruit blanc permet d'obtenir les contributions suivantes¹⁸ :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{3_{QS}} &= \frac{24\gamma^3 \sigma_u^4 \bar{U}^2}{\varpi^6} \\ \tilde{m}_{3_{DY}} &= 8\gamma^3 \bar{U}^2 \frac{\sigma_u^4}{\pi^2} \left(\frac{3}{4} \frac{3\alpha^2 + 2\varpi^2}{(\alpha^2 + \varpi^2)^2} + \frac{1}{4} \frac{3(\alpha^2 + 2\varpi^2)\alpha^2}{(\alpha^2 + \varpi^2)^2(\alpha^2 + 4\varpi^2)} \right) \frac{8\pi^2}{3\varpi^4(1 + 8\xi^2)} \end{aligned}$$

Le moment centré de troisième ordre de la réponse sera donc approché par :

$$\tilde{m}_3 = \tilde{m}_{3_{QS}} + \tilde{m}_{3_{DY}} = \frac{8\gamma^3 \sigma_u^4 \bar{U}^2}{\varpi^6} \left(3 + \frac{8\varphi^2}{(1 + 8\xi^2)} \frac{(1 + 4\varphi^2 + 2\varphi^4)}{(1 + \varphi^2)^2(1 + 4\varphi^2)} \right) \quad (4.254)$$

Aux grandes valeurs du paramètre φ , le développement en série de Taylor (en $1/\varphi$) de cette expression est le suivant :

$$3 + \frac{1}{(1 + 8\xi^2)} \left(4 - \frac{1}{\varphi^2} - \frac{7}{4\varphi^4} - \dots \right) \quad (4.255)$$

Il peut être comparé avec le développement semblable de la fonction M_1 introduite à l'équation 4.235 :

$$3 + \frac{1}{(1 + 8\xi^2)} \left(\frac{3 + 24\xi^2 - 192\xi^4}{2\varphi} - \frac{3 + 10\xi^2 + 480\xi^4 - 1280\xi^6}{4\varphi^2} + \dots \right) \quad (4.256)$$

La comparaison entre ces deux résultats montre que l'approximation telle qu'elle a été proposée ne peut donner de résultats corrects que lorsque la structure étudiée est fortement amortie ($\xi \gg 1$). Il semble assez normal de retrouver un résultat cohérent dans ce cas puisque la réponse de la structure est alors purement quasi-statique. Cette qualité de précision ne correspond absolument pas à la précision requise. En effet, on aimerait tout de même que la méthode développée converge, à la limite des taux d'amortissement petits, vers le résultat exact. En tout cas, il en était ainsi pour l'approximation en bruit blanc à l'ordre 2.

La figure 4.37 représente le coefficient d'amplification dynamique de troisième ordre obtenu par l'approche analytique (c'est-à-dire la fonction M_1) et par l'approximation en bruit blanc qui vient d'être développée. On peut constater visuellement cette fois que la formulation qui vient d'être développée ne permet pas d'obtenir un résultat très précis.

¹⁸ Etant donné que l'on ne conserve qu'un des deux termes contribuant à l'élaboration du bi-spectre de la sollicitation, le moment centré utilisé ici est le moment centré correspondant, soit $24\gamma^3 \sigma_u^4 \bar{U}^2$ au lieu de $8\gamma^3 \sigma_u^4 (3\bar{U}^2 + \sigma_u^2)$

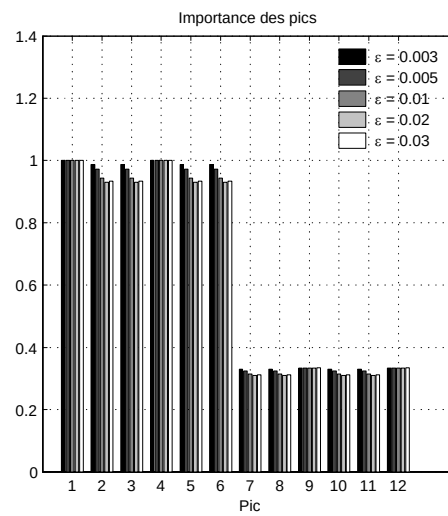


FIG. 4.36 – Etude sur les importances relatives des différents pics du second noyau de Volterra

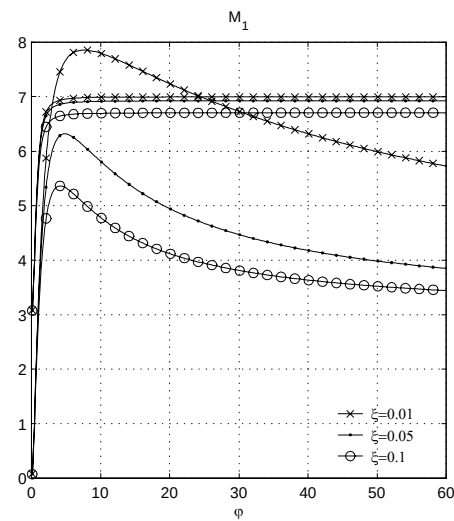


FIG. 4.37 – Représentation du coefficient d'amplification dynamique d'ordre 3 obtenu par une méthode d'approximation en bruit blanc adaptée

Cette figure montre que même le comportement statique n'est pas estimé correctement puisque les asymptotes horizontales de ces deux groupes de courbes ne sont pas identiques. En remontant les développements précédents en sens contraire, on peut comprendre que la raison pour laquelle le résultat quasi-statique n'est pas estimé correctement provient d'une contribution non nulle de la partie dynamique associée aux pics hauts. La raison précise est que la différence des puissances de ϖ (intervenant au numérateur et au dénominateur de la fraction intervenant à la relation 4.252) n'est que de 2. Les pics bas ne posent par contre aucun problème ; on peut constater que la différence des puissances de ϖ entre le numérateur et le dénominateur à la relation 4.253 est de 4.

Ceci démontre que la méthode telle que présentée ci-avant ne pourrait être applicable (de façon à présenter un bon comportement limite) qu'en choisissant un poids de pondération nul pour les pics hauts. Il va de soi que cette solution ne peut en aucune manière donner des résultats cohérents.

Justification du mauvais comportement Afin de justifier la qualité médiocre des résultats fournis par la méthode proposée, nous allons étudier la réponse de l'oscillateur non amorti. Pour un tel oscillateur, le second noyau de Volterra se limite à :

$$K_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{K^3} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\varpi}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega_2}{\varpi}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{\varpi}\right)^2\right]} \quad (4.257)$$

L'étude de l'oscillateur non amorti permet de comprendre les raisons pour lesquelles une telle méthode ne peut fonctionner. En effet, la relation 4.257 montre que le second noyau de Volterra présente, outre les singularités concentrées aux pics, des lignes singulières correspondant aux six axes de l'étoile (Fig. 4.26). Les pics qui se trouvent aux intersections de ces lignes singulières constituent alors en réalité des singularités d'ordre 2 (ou singularités doubles) mais ponctuelles sur cette version non amortie de l'oscillateur.

L'entière du volume compris sous le second noyau de Volterra se trouve donc réparti sur les éléments unidimensionnels à singularité simple et en des points (donc sans dimension) à double singularité. Il va donc de soi que ces deux contributions au volume total sont donc de même ordre et qu'aucune des deux ne peut être négligée par rapport à l'autre.

Les structures réelles étudiées en pratique présentent toujours un amortissement, aussi faible soit-il. Cette approche par singularité n'est plus justifiable mais le comportement limite doit cependant être conservé. Imaginons que l'oscillateur présente un taux d'amortissement très faible. Dans ce cas, le second noyau de Volterra présentera des lignes de crête assez hautes (disons, de niveau K_l) et des pics concentrés à leurs intersections, de niveau $2K_l$. A nouveau, on imagine aisément que le volume contenu sous ce noyau ne peut pas être considéré comme provenant exclusivement des pics.

Le raisonnement pourrait également être poussé plus en avant. Au vu des relations mathématiques mises en jeu, il nous semble évident que la partie de l'espace des fréquences située en dehors des lignes de crête ou à leurs intersections joue également un rôle important. Pour preuve, il suffit de considérer que l'intégrale exacte sous le second noyau de Volterra est inversement proportionnelle à $1 + 8\xi^2$, et non pas à ξ (ou ξ^2). En repartant d'une approche par singularité, cela signifie donc que les intégrations sur les singularités d'ordre 1 et 2 doivent être finies, ou du moins se compenser, ce qui laisse donc une place éventuellement substantielle au domaine d'intégration régulier. Notons que le

comportement au second ordre était beaucoup plus sain puisque l'intégration exacte (au sens de Riemann!) de la norme au carré de la fonction de transfert était inversement proportionnelle au coefficient d'amortissement.

Ce raisonnement nous a permis de conclure que la surface sous le second noyau de Volterra ne provient pas exclusivement des crêtes et pics. En observant la partie réelle du second noyau de Volterra d'un oeil plus attentif, on peut constater l'existence d'un domaine en zone négative qui est susceptible d'amener une contribution significative! Les six faces de l'étoile (grandes zones triangulaires à la figure 4.31) sont en réalité en zone négative.

Nous avons donc poursuivi les adaptations de la méthode d'approximation en bruit blanc de sorte à prendre en compte les effets de ces zones de bispectre négatif. On peut constater assez facilement que les ordres en ϖ des expressions obtenues ne permettent toujours pas de retrouver une expression correcte (à la limite de structures raides) du comportement quasi-statique.

Approche à l'aide d'un processus d'Ornstein

Le paragraphe précédent nous ramène de nouveau à la discussion que nous avons déjà entamée sur la comparaison de l'approximation en bruit blanc et de l'approche par un processus équivalent d'Ornstein. Tout part toujours du fait que la première approximation formule une hypothèse sur les caractéristiques structurelles tandis que la seconde formule une hypothèse sur la sollicitation.

Les développements analytiques, certes assez ardues mais développés une bonne fois pour toutes, montrent qu'il est assez simple d'estimer les caractéristiques d'ordre 3 de la réponse d'un oscillateur simple soumis à un processus aléatoire qui s'exprime par le carré d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

La seconde méthode numérique pour l'estimation des caractéristiques de troisième ordre est donc relativement immédiate. L'équivalence qui peut être utilisée entre la densité spectrale de sollicitation réelle et la densité spectrale équivalente a déjà été présentée. L'analyse au troisième ordre revient donc à appliquer ces quelques relations (3.87, 4.235).

Représentation par morceaux de la sollicitation

Lors du calcul de la réponse à l'ordre 2, nous avons évoqué la possibilité du calcul des moments par une méthode semi-analytique (par décomposition de la densité spectrale de puissance en somme de fonctions-impulsions), consistant à décomposer la densité spectrale de la sollicitation sans prendre égard aux caractéristiques structurelles. Nous allons présenter une adaptation à l'ordre 3 de cette méthode. Deux démarches différentes sont successivement présentées; la première consiste essentiellement à travailler sur la densité spectrale de la sollicitation, alors que la seconde méthode revient à concentrer les hypothèses au niveau du bispectre de la sollicitation.

Décomposition de la densité spectrale de puissance Lors du calcul de la réponse à l'ordre 2, il avait été proposé de représenter la densité spectrale de la turbulence par une succession de plateaux définis sur des intervalles $[\omega_i; \omega_{i+1}]$:

$$S_u(\omega) = \sum_{i=0}^N \vartheta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\omega) s_{u_i} \quad (4.258)$$

où $\vartheta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\omega)$ est une fonction unité sur les intervalles $[\omega_i; \omega_{i+1}]$ et $[-\omega_{i+1}; -\omega_i]$ et nulle partout ailleurs.

Pour commencer, nous pouvons nous intéresser à l'étude d'un processus aléatoire dont la densité spectrale de puissance s'exprime par une telle fonction. Il s'agit donc d'un processus en bande étroite pour autant que ω_i et ω_{i+1} soient assez proches. Le bispectre de l'effort obtenu sur base de cette turbulence particulière peut être obtenu par la formule générale 4.228. Des deux termes intervenant dans cette relation, nous ne retenons que le premier qui, comme déjà annoncé, occupe une place prépondérante dans les applications qui nous intéressent. Le bispectre de l'effort peut donc être obtenu par :

$$D_u(\omega_1, \omega_2) = 8\gamma^3 \bar{U}^2 [S_u(\omega_1) S_u(\omega_2) + S_u(\omega_1 + \omega_2) S_u(\omega_2) + S_u(\omega_1) S_u(\omega_1 + \omega_2)] \quad (4.259)$$

Compte tenu de la forme particulière de la densité spectrale du processus, le premier terme $S_u(\omega_1) S_u(\omega_2)$ ne peut être non nul que si ω_1 et ω_2 sont tous les deux compris dans l'un des intervalles $[\omega_i; \omega_{i+1}]$ ou $[-\omega_{i+1}; -\omega_i]$. Dans l'espace des (ω_1, ω_2) , cela correspond à quatre carrés de $\omega_{i+1} - \omega_i$ de côté disposés aux intersections des quatre bandes :

$$\omega_i \leq |\omega_1| \leq \omega_{i+1} \quad (4.260)$$

$$\omega_i \leq |\omega_2| \leq \omega_{i+1} \quad (4.261)$$

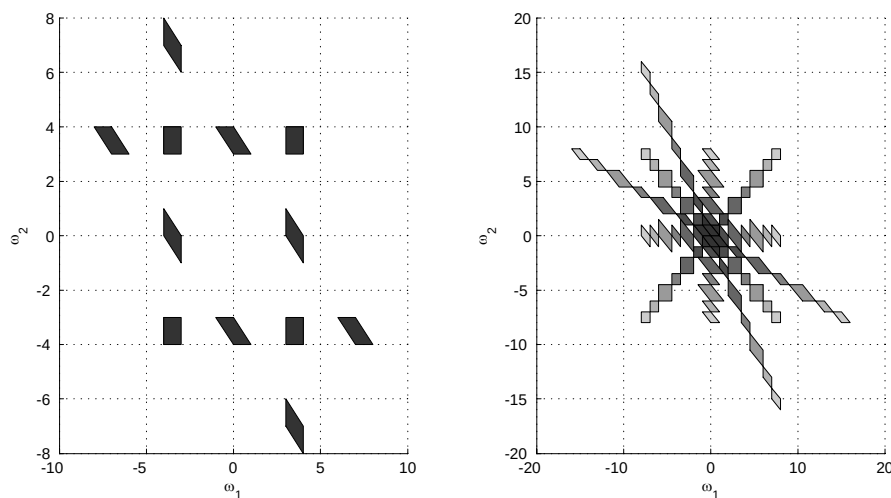


FIG. 4.38 – Représentation des zones élémentaires (associées à une densité spectrale en bande limitée) sur lesquelles les contributions au bispectre sont non nulles

Un raisonnement similaire peut être mené pour les second et troisième termes. Finalement, le bispectre de la force associée à une turbulence en bande étroite ne prend des valeurs non nulles que sur une zone composée de douze quadrilatères. Cette forme particulière est représentée à la figure 4.38 (partie gauche).

Venons-en maintenant à la représentation d'une turbulence quelconque. Le problème de la détermination des fonctions échelons à choisir pour représenter correctement cette fonction a déjà été discuté précédemment. Supposons donc que l'on connaisse une bonne

décomposition du processus réel en composantes monochromatiques :

$$S_u(\omega) = \sum_{i=0}^N \vartheta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\omega) s_{u_i} \quad (4.262)$$

Une première méthode approchée permettant d'obtenir une représentation du bispectre de force réel consisterait à superposer les bispectres associées à toutes ces composantes monochromatiques, soit à obtenir une représentation du bispectre de force sur un ensemble de domaines élémentaires, chacun d'eux étant lui-même composé de douze quadrilatères¹⁹. La figure 4.38 donne un exemple de bispectre ainsi obtenu. Ce bispectre prend une valeur constante sur chacun des quadrilatères élémentaires. Sur cette figure, on peut retrouver les groupes de douze quadrilatères provenant chacun de bandes de fréquences différentes. Remarquons que les zones de définition du bispectre ne sont jointives que par un sommet.

Un examen plus attentif de cette figure montre que la méthode n'est pas vraiment adéquate dans la mesure où le bispectre n'est représenté que le long de certains axes. Il ne s'agit que d'un moindre mal dans la mesure où l'on sait que les bispectres qui nous intéressent (les bispectres de carrés de processus gaussiens) présentent justement des valeurs maximales sur ces axes. En contrepartie, on sent que l'utilisateur d'une telle méthode doit trouver un compromis entre :

- choisir des bandes de fréquences très étroites de façon à représenter correctement le processus de départ. Ceci revient donc à concentrer les zones de définition du bispectre dans le voisinage des axes et donc à perdre de la précision dans la représentation de cette fonction ;
- par contre, s'il désire représenter le bispectre sur une zone s'éloignant un peu plus des axes principaux, il devra choisir des bandes de fréquence plus larges, ce qui mène inévitablement à une moins bonne représentation de la densité spectrale de la turbulence.

Nous avons déjà précisé que les composantes fréquentielles du carré d'un processus aléatoire ne pouvaient plus être considérées comme indépendantes. C'est la raison pour laquelle cette première méthode ne peut pas être efficace. Cela peut également se comprendre très facilement d'un point de vue mathématique. Considérons pour l'instant le premier terme du bispectre. Il s'exprime par :

$$\begin{aligned} S_u(\omega_1) S_u(\omega_2) &= \sum_{i=0}^N \vartheta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\omega_1) s_{u_i} \sum_{j=0}^N \vartheta_{\omega_j}^{\omega_{j+1}}(\omega_2) s_{u_j} \\ &= \sum_{i=0}^N \vartheta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\omega_1) \vartheta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\omega_2) s_{u_i}^2 + \sum_{i=0}^N \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \vartheta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\omega_1) \vartheta_{\omega_j}^{\omega_{j+1}}(\omega_2) s_{u_i} s_{u_j} \end{aligned} \quad (4.263)$$

La double sommation peut être décomposée en deux parties :

¹⁹Nous parlons de 12 quadrilatères pour simplifier l'exposé. En réalité, il n'est pas ainsi que lorsque $\omega_{i+1} > 2\omega_i$. Dans le cas contraire, il y a recouvrement de ces zones et la représentation analytique est un peu plus compliquée. A la limite, lorsque ω_i tend vers 0, le domaine sur lequel est défini le bi-spectre de force prend la forme d'un hexagone régulier.

- la première reprend tous les termes lorsque $j = i$; il ne reste alors qu'une simple somme et, en poursuivant le même raisonnement pour les autres contributions du bispectre de force, cela mènerait au bispectre calculé comme dans la première méthode présentée juste avant. Cette première partie ne donne donc des contributions que sur un domaine comme celui représenté à la figure 4.38 ;
- la second regroupe tous les autres termes, c'est-à-dire ceux pour lesquels $j \neq i$. Il reste une double sommation. C'est elle qui permet de rendre compte du couplage entre les différentes bandes de fréquence.

La première méthode proposée ci-avant peut donc être améliorée en procédant également au calcul du bispectre dans ces zones complémentaires. Comme introduit en note en bas de page (p.192), il convient de prendre garde aux éventuels recouvrements de zones. Pour les simples contributions, ces recouvrements n'apparaissent que dans le voisinage de l'origine. Par contre, pour les termes complémentaires, ces recouvrements peuvent apparaître a priori n'importe où. Cela rend l'application numérique de la méthode considérablement fastidieuse à moins de choisir des bandes de largeur constante, ce qui s'avère être peu efficace dans le mesure où les bandes aux plus hautes fréquences pourraient être substantiellement plus élargies.

Le moment centré d'ordre 3, qui s'obtient par intégration du bispectre de force, pourrait également être décomposé en ses contributions associées. Comme chacun des termes de la double sommation est positif, négliger les couplages entre les bandes de fréquences revient donc à sous-estimer le moment centré de la sollicitation.

Malgré cet inconvénient majeur de précision et de facilité de représentation, la méthode qui vient d'être proposée présente l'avantage d'être assez simple d'application puisqu'il s'agit de travailler uniquement sur la densité spectrale de puissance de la sollicitation.

Décomposition du bispectre Au lieu de décomposer la densité spectrale de la sollicitation en composantes élémentaires, il apparaît qu'une décomposition du bispectre de la sollicitation soit éventuellement plus simple. En effet, puisque nous travaillons à l'ordre 3, il paraît assez naturel de supposer que :

$$D_u(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \vartheta_{(\omega_i, \omega_j)}^{(\omega_{i+1}, \omega_{j+1})}(\omega_1, \omega_2) s_{u_{ij}}(\omega_1, \omega_2) \quad (4.264)$$

où $\vartheta_{(\omega_i, \omega_j)}^{(\omega_{i+1}, \omega_{j+1})}$ est une fonction unité sur les compacts²⁰ $[\omega_i; \omega_{i+1}] \times [\omega_j; \omega_{j+1}]$ et $[-\omega_{i+1}; -\omega_i] \times [-\omega_{j+1}; -\omega_j]$ et où $s_{u_{ij}}(\omega_1, \omega_2)$ est une fonction simple prédéfinie. Cette décomposition permet de représenter le bispectre de la sollicitation sur un domaine composé de rectangles jointifs, sans trous ni recouvrements. Ceci constitue un élément à porter aux avantages de cette méthode.

Le moment centré de troisième ordre de la sollicitation peut être obtenu en additionnant les moments obtenus sur chacune des zones élémentaires. Aussi, le moment centré de troisième ordre de la réponse peut être obtenu en sommant les contributions associées à chacune de ces zones. La seule difficulté du problème consiste donc en l'établissement du bispectre de la réponse d'une structure soumise à une sollicitation définie sur un compact $[\omega_i; \omega_{i+1}] \times [\omega_j; \omega_{j+1}]$ (i, j quelconques) ainsi qu'au moment élémentaire associé.

²⁰La symétrie du bispectre de la réponse rend assez commode l'utilisation de ces deux compacts plutôt qu'un seul

La forme la plus simple que l'on puisse choisir pour la fonction $s_{u_{ij}}(\omega_1, \omega_2)$ est une constante. La méthode alors obtenue est donc l'équivalent parfait de la méthode développée à l'ordre 2 par Preumont. On pourrait cependant imaginer utiliser :

$$s_{u_{ij}}(\omega_1, \omega_2) = a\omega_1\omega_2 + b\omega_1 + c\omega_2 + d \quad (4.265)$$

de façon à pouvoir utiliser des zones de définitions plus larges, ou même :

$$s_{u_{ij}}(\omega_1, \omega_2) = (a\omega_1^2\omega_2^2 + b\omega_1^2\omega_2 + c\omega_1\omega_2^2 + d\omega_1\omega_2 + e\omega_2 + f\omega_1) \omega_1^g \omega_2^h \quad (4.266)$$

de façon à représenter plus précisément la forme analytique des bispectres de vitesse de vent.

Nous pouvons par exemple continuer avec la relation 4.265 ; nous allons de toute façon voir assez rapidement que les développements deviennent vite très complexes et qu'il est inutile de pouvoir imaginer d'obtenir une formulation analytique pour l'expression plus complète de $s_{u_{ij}}(\omega_1, \omega_2)$.

Voyons dans un premier temps comment calculer les paramètres a , b , c et d qui permettent d'obtenir une représentation du bispectre de force sur le compact $[\omega_i; \omega_{i+1}] \times [\omega_j; \omega_{j+1}]$. Etant donné que les formes analytiques des bispectres sont généralement assez compliquées, nous nous limitons à utiliser des valeurs discrètes de cette fonction. Soit B_{11} , B_{12} , B_{21} et B_{22} , les valeurs du bispectres aux extrémités du compact étudié :

$$B_{11} = B(\omega_i, \omega_j) \quad ; \quad B_{12} = B(\omega_i, \omega_{j+1}) \quad ; \quad B_{21} = B(\omega_{i+1}, \omega_j) \quad ; \quad B_{22} = B(\omega_{i+1}, \omega_{j+1}) \quad (4.267)$$

Les paramètres a , b , c et d peuvent par exemple être imposés de façon à reproduire correctement les valeurs du bispectre aux extrémités. On trouve alors :

$$a = \frac{B_{22} - B_{21} - B_{12} + B_{11}}{(\omega_1^2 - \omega_1^1)(\omega_2^2 - \omega_2^1)} \quad (4.268)$$

$$b = \frac{\omega_2^2(B_{21} - B_{11}) - \omega_1^1(B_{22} - B_{12})}{(\omega_1^2 - \omega_1^1)(\omega_2^2 - \omega_2^1)} \quad (4.269)$$

$$c = \frac{\omega_1^2(B_{12} - B_{11}) - \omega_1^1(B_{22} - B_{21})}{(\omega_1^2 - \omega_1^1)(\omega_2^2 - \omega_2^1)} \quad (4.270)$$

$$d = \frac{\omega_1^2\omega_2^2B_{11} - \omega_1^2\omega_2^1B_{12} - \omega_1^1\omega_2^2B_{21} + \omega_1^1\omega_2^1B_{22}}{(\omega_1^2 - \omega_1^1)(\omega_2^2 - \omega_2^1)} \quad (4.271)$$

Le bispectre de la réponse s'exprime en multipliant celui de la sollicitation par le second noyau de Volterra. Le moment centré d'ordre 3 est obtenu par intégration sur le domaine de définition de $D_f(\omega_1, \omega_2)$, soit :

$$\begin{aligned} & m_x^{(3)} \\ = & \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \int_{\omega_j}^{\omega_{j+1}} D_x(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 + \int_{-\omega_{i+1}}^{-\omega_i} \int_{-\omega_{j+1}}^{-\omega_j} D_x(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (4.272) \\ = & 2 \operatorname{Re} \left[\int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \int_{\omega_j}^{\omega_{j+1}} \frac{(a\omega_1\omega_2 + b\omega_1 + c\omega_2 + d) d\omega_1 d\omega_2}{\varpi^6 \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\varpi^2} - 2i\xi \frac{\omega_1}{\varpi}\right) \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\varpi^2} - 2i\xi \frac{\omega_2}{\varpi}\right) \left(1 - \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{\varpi^2} + 2i\xi \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{\varpi}\right)} \right] \end{aligned}$$

Le résultat du calcul de cette double intégration est ce que nous visons à obtenir. La première intégration peut en effet être menée assez facilement. Bien que les bornes d'intégration soient maintenant finies, les théorèmes des résidus et des petites encoches peuvent être à nouveau appliqués pour le calcul de cette intégrale. L'expression du résultat de cette première intégration est assez lourd mais doit de nouveau être intégré une seconde fois. Même en posant a , b et c égaux à 0, cette nouvelle intégrale est tout à fait impraticable. Le résultat présente un nombre important de termes et la simplification semble ardue car elle doit rester valable quels que soient les paramètres ξ et ϖ .

Ceci conclut la présentation de l'approximation de la sollicitation par morceaux. Des deux méthodes qui ont été proposées, il s'avère qu'aucune ne semble appropriée pour une analyse à l'ordre 3.

Intégration numérique optimale

Lors du calcul numérique des moments spectraux dérivés des densités spectrales, nous avons démontré la nécessité de recourir à une disposition optimale des points d'intégration, sous peine de devoir fournir un effort de calcul inutilement élevé. Maintenant que nous passons à une intégration dans un espace de dimensions supérieures, le raisonnement qui avait été mené, ne peut être que renforcé. A titre d'exemple, calculons simplement le nombre de points d'intégration uniformément répartis qu'il serait nécessaire d'utiliser pour représenter correctement le noyau de Volterra. Les crêtes qui apparaissent dans le noyau de Volterra proviennent des pics dans les densités spectrales. La largeur de ces pics à leur mi-hauteur est approximativement égale à $2\xi\varpi$; il en résulte un pas de fréquence maximum de l'ordre de $\xi\varpi/5$ pour une représentation honnête mais certainement pas encore suffisamment précise. Considérons cependant cet ordre de grandeur pour intégrer les crêtes et les pics du second noyau de Volterra. Cette discrétisation fréquentielle doit être répétée dans les deux directions de l'espace de fréquences étant donné que les crêtes sont orientées selon les directions ω_1 et ω_2 . Les surfaces élémentaires de calcul ont donc des dimensions d'environ $\xi\varpi/5 \times \xi\varpi/5$ et doivent au total couvrir une surface s'étendant sur le compact $[-k\varpi; k\varpi] \times [-k\varpi; k\varpi]$, où k est de l'ordre de 3 à 4. Le nombre de surfaces élémentaires s'élèverait donc approximativement à :

$$\left(\frac{2k\varpi}{\xi\varpi/5}\right)^2 = \left(\frac{10k}{\xi}\right)^2 \quad (4.273)$$

Pour les structures peu amorties ($\xi \simeq 0.01$) rencontrées dans le domaine du génie civil, le nombre de points d'intégration uniformément répartis qu'il faudrait utiliser s'élève donc à plus de 10^7 ! Cette approche fréquentielle exacte jusqu'au troisième ordre (et jusqu'aux ordres supérieurs) est donc habituellement présentée comme une importante consommatrice de temps de calcul, inutilisable pour les systèmes faiblement amortis ($\xi \lesssim 0.03$) et presque exclusivement limitée aux systèmes à quelques degrés de liberté. Dans la littérature, on ne trouve pas d'autre algorithme d'intégration. Etant donné que ce nombre important de pas de fréquence ne peut, d'un point de vue pratique, pas être adopté, il ne reste alors qu'à augmenter les pas de fréquences ou à diminuer la fréquence maximale représentée. Il nous semble que recourir à ces solutions ne peut s'accompagner que d'une dégradation substantielle de la qualité de l'intégration. Quelques applications douteuses peuvent même être trouvées dans des revues renommées.

Ces importantes limitations constituent justement les cas d'applications les plus intéressants du génie civil et mériteraient d'être investigués plus précisément. C'est pour cette raison que nous avons mis au point une méthode d'intégration, toujours à pas simple, comme la méthode du trapèze utilisée à une dimension, mais recourant à une disposition optimale des points d'intégration.

Notons pour commencer qu'il serait intéressant d'élaborer une méthode qui permette de déterminer *a priori* (et non de manière itérative "externe") les couples de fréquences représentatives. En effet, nous pourrions nous inspirer de la méthode d'intégration itérative présentée en annexe de [26]. Cette méthode se base sur la convergence de l'intégrale calculée. A partir d'un maillage très lâche, elle permet d'ajouter, en subdivisant les zones élémentaires d'intégration, de nouveaux points à la liste des fréquences représentatives. Cet algorithme est optimal dans la mesure où les points d'intégration, dont les positions dépendent de la fonction à intégrer, sont alors en nombre strictement nécessaire. Cette méthode itérative présente cependant deux inconvénients :

- d'une part, elle est difficile à appliquer pour un système à plusieurs degrés de liberté ;
- d'autre part, la fonction à intégrer doit être évaluée à l'intérieur de la boucle principale des itérations. Ceci fournit donc une programmation assez désordonnée puisque la routine d'intégration devient alors la routine principale qui appelle le *main* du logiciel d'analyse de structure.

Ces deux raisons nous ont poussé à mettre au point la méthode de détermination *a priori* des points d'intégration qui a été présentée au chapitre précédent. C'est dans cette direction que nous allons également nous diriger. Tout comme nous l'avons également fait préalablement, nous allons nous contenter dans un premier temps de représenter correctement les caractéristiques structurelles, c'est-à-dire l'équivalent de la fonction de transfert, soit, le second noyau de Volterra. L'algorithme à mettre au point doit donc prendre en compte les aspects suivants :

- les positions des points d'intégration doivent être prédéterminables, c'est-à-dire qu'il doit donc exister une relation univoque entre d'une part la pulsation propre structurelle et le taux d'amortissement, et d'autre part, les positions des fréquences de calcul ;
- il convient de garder à l'esprit que la méthode est susceptible de pouvoir être utilisée pour l'étude d'une structure à plusieurs degrés de liberté. Il faut donc être en mesure de pouvoir réaliser une mise en commun des points d'intégration provenant de différentes séries (une par mode et par sollicitation modale) ;
- le résultat de l'intégration numérique est le volume sous la courbe $K_2(\omega_1, \omega_2)$. Dans une approche numérique, il résulte de la sommation de volumes élémentaires ayant la forme de bâtonnets. Il est donc important de pouvoir relier entre eux les points d'intégration, de façon à pouvoir former ces volumes élémentaires. Ceci revient à attribuer un poids d'intégration à chacun des points. Il ne suffit donc pas simplement de disposer des points d'intégration dans un espace bidimensionnel, mais plutôt de former un maillage qui serait plus dense dans les zones à fort gradient ;
- on imagine que la disposition optimale utilisée pour l'approche au second ordre pourrait être réutilisée dans ce cadre. En effet, on pourrait choisir deux séries de fréquences (ω_{1_k}) et (ω_{2_k}) avec $k = 1, \dots, N$, indépendamment l'une de l'autre puis considérer les k^2 couples obtenus en choisissant toutes les combinaisons possibles d'un pulsation de (ω_{1_k}) et une pulsation de (ω_{2_k}) . Cette manière de procéder per-

mettrait de représenter correctement les crêtes dont les axes sont parallèles aux axes $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$. La représentation des crêtes inclinées serait par contre beaucoup moins bonne. L'adaptation de la méthode présentée précédemment n'est donc pas immédiate et sera laissée de côté ;

- étant donné que la partie imaginaire du bispectre ne donne aucune contribution à l'intégrale sur l'ensemble du domaine des fréquences, nous pouvons nous contenter de ne représenter que la partie réelle du bispectre. Les propriétés énoncées au paragraphe 4.6.2 montrent que cette fonction possède deux plans de symétrie ; l'intégration sera donc limitée au domaine :

$$\omega_1 \leq \omega_M \quad (4.274)$$

$$-\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_1 \quad (4.275)$$

où ω_M représente une pulsation maximale à représenter (de l'ordre de trois à quatre fois ϖ).

- nous avons évoqué ci-dessus les désagréments liés à l'utilisation d'une méthode itérative. En réalité, une telle méthode n'est peu claire que lorsque le calcul de l'intégrale se trouve à l'intérieur de cette boucle. Dans le cas contraire, le recours à une méthode itérative peut être attirant. En effet, on imagine aisément partir d'un maillage lâche et le densifier progressivement dans les zones à plus fort gradient. La condition pour obtenir alors un algorithme acceptable est que l'estimation de la fonction n'apparaisse pas dans le critère de subdivision des éléments. C'est pour une telle méthode que nous avons opté.

En considérant simultanément tous ces aspects, la marche de manoeuvre devient relativement restreinte. L'algorithme qui a été mis au point en découle naturellement. Ses principaux avantages sont la facilité d'interprétation et d'adaptation. La mise en oeuvre de cette méthode résulte de l'application successive de trois routines élémentaires (éventuellement bouclées) : maillage initial, nécessité de subdivision et finalement subdivision.

Maillage initial Le maillage initial doit être simple. Pour faciliter les choses, nous pouvons utiliser un maillage régulier. Il est obtenu en divisant uniformément l'espace à intégrer en mailles de $\frac{\omega_M}{N}$ de côté. Le domaine à intégrer est donc exclusivement constitué de carrés (au centre) et de triangles (sur les bords).

Pratiquement, au terme de cette première étape, nous disposons donc de deux séries de pulsations (ω_{1_k}) et (ω_{2_k}), ainsi que d'une série de surfaces élémentaires Λ_j reprenant la liste des trois ou quatre sommets de cette surface élémentaire. La juxtaposition de ces surfaces élémentaires permet alors de reformer, sans trou ni recouvrement, l'entière de la surface à intégrer.

Cette première étape est très simple et rapide à appliquer : elle ne nécessite que la connaissance de la pulsation maximale et du nombre N de subdivisions à réaliser. Au vu de la forme du domaine à intégrer, ces surfaces élémentaires sont au nombre de $N(N+1)$. L'objectif de ce premier maillage est de permettre une bonne représentation des comportements quasi-statique et inertiel, c'est-à-dire du second noyau de Volterra en dehors des zones de pics ou crêtes.

Nécessité de subdivision Lorsque le premier maillage est établi, il convient bien sûr de le raffiner dans les zones où plus de points d'intégration sont nécessaires. L'objectif

consiste donc à établir une liste des éléments à subdiviser. Il existe une certaine zone de liberté pour le choix du critère de subdivision. Nous avons cependant insisté sur le fait que ce critère ne pouvait pas faire intervenir le calcul de la fonction à intégrer. Afin de rester suffisamment général, et sans introduire trop de nouveaux paramètres, voici le compromis que nous proposons.

Quatre lignes de crêtes différentes apparaissent dans le domaine sur lequel nous avons limité l'intégration. Nous savons que les zones situées autour de ces lignes de crête doivent être l'objet d'une attention plus particulière. Nous définissons alors quatre domaines, un par ligne de crête, obtenus en déplaçant les lignes de crête d'une pulsation Δ parallèlement à elle-même, dans un sens et dans l'autre. Ces domaines apparaissent donc comme des bandes de largeur 2Δ centrées sur les lignes de crêtes. Pour une bonne représentation du second noyau de Volterra, ces domaines sont donc les domaines sur lesquels il importe de raffiner le maillage.

Pour ce faire, la liste des éléments est passée en revue. L'élément est ajouté à la liste des éléments à subdiviser si l'une des deux conditions suivantes est remplie :

- au moins un des trois ou quatre sommets de l'élément appartient à au moins un des domaines définis ;
- un des quatre domaines au moins traverse l'élément²¹.

Cette méthode est relativement simple car elle nécessite uniquement l'introduction d'une largeur de bande 2Δ . Elle permet à l'utilisateur de garder une bonne interprétation physique du processus tout en restant également assez souple d'application (plusieurs subdivisions successives peuvent être réalisées, nous abordons cet aspect dans la suite).

Subdivison Lorsque la liste des surfaces élémentaires à subdiviser a été établie, il ne reste alors plus qu'à procéder au raffinement du maillage. A nouveau, nous préconisons une méthode simple basée sur un seul paramètre p : les côtés de chaque surface élémentaire sont divisés en p morceaux. Un carré est donc remplacé par p^2 carrés plus petits, et un triangle en $\frac{p(p-1)}{2}$ carrés et p triangles plus petits.

Compte tenu de cette procédure de subdivision et étant donné que le maillage initial ne comportait que des carrés et des triangles rectangles (sur les bords du domaine d'intégration), le maillage obtenu après subdivision sera donc également constitué de carrés et triangles rectangles.

Bien que conceptuellement très simple, l'application automatique de cette méthode est assez complexe : à chaque subdivision, elle nécessite, en formulation paramétrique, l'introduction d'un certain nombre de nouveaux points représentatifs, qu'il importe de relier correctement.

Comme nous l'avons laissé sous-entendre, cette opération de subdivision peut être répétée plusieurs fois afin d'obtenir un maillage de plus en plus fin au fur et à mesure que l'on approche des crêtes du second noyau de Volterra. Un exemple est présenté aux figures 4.39 et 4.40. Pour cette application, nous supposons que la pulsation propre de la structure est $\varpi = 1.2 \text{ rad/s}$. Les deux paramètres nécessaires à la détermination du maillage initial sont $\omega_M = 3.5 \text{ rad/s}$ et $N = 25$. Un premier raffinement du maillage sera réalisé avec les paramètres $\Delta = 0.1\varpi$ et $p = 2$. La figure 4.39 représente, sur la

²¹Cette seconde condition est nécessaire lorsque le paramètre Δ est faible et que les domaines sur lesquels il faut remailler sont très étroits. Il se peut alors qu'un domaine traverse un élément sans pour autant que l'un des sommets de l'élément ne soit compris dans le domaine.

partie gauche, le résultat du maillage initial. Les surfaces grisées en clair représentent les surfaces à subdiviser. On peut également repérer sur cette figure les quatre domaines qui ont servi au critère de subdivision des surfaces élémentaires. Le résultat du remaillage est illustré sur la partie droite du graphique.

Un second raffinement peut immédiatement être entrepris. Nous allons cette fois raffiner davantage les mailles dans une bande plus serrée autour des crêtes : $\Delta = 0.1\varpi$ et $p = 2$. La partie droite du graphique 4.40 est un agrandissement dans le voisinage du pic $(2\varpi; -\varpi)$; on y repère clairement les trois différentes tailles d'éléments.

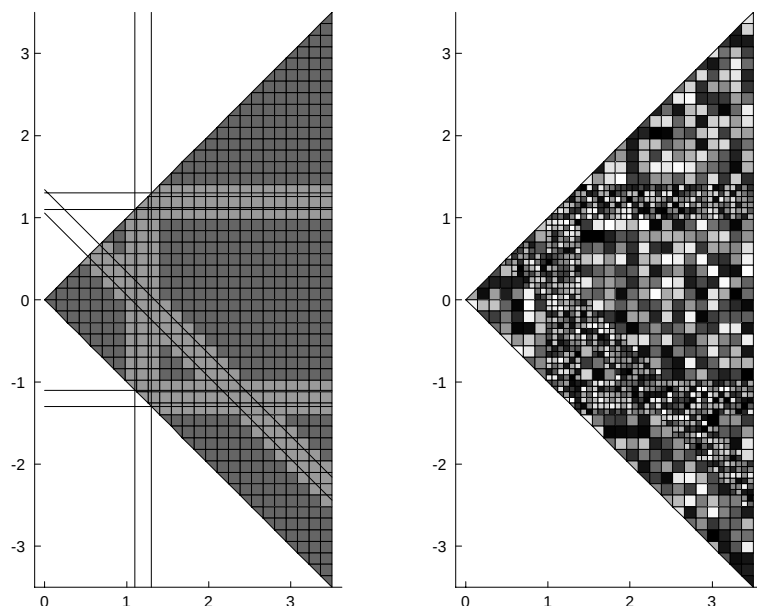


FIG. 4.39 – Illustration de l'algorithme de maillage de l'espace bidimensionnel des fréquences (maillage initial et première subdivision)

Maintenant que la méthodologie de choix des points d'intégration a été mise au point, il reste à donner quelques indications permettant à un nouvel utilisateur de choisir intelligemment les paramètres N , (Δ_i) et (p_i) . En effet, bien que la simplicité de la méthodologie procure une interprétation aisée, les valeurs numériques à donner aux paramètres n'apparaissent pas nécessairement de façon évidente. Bien sûr, l'idéal serait de trouver des relations qui associent au couple (ξ, ϖ) des valeurs recommandées (ou recommandables) des paramètres N , (Δ_i) et (p_i) .

Commentaires sur le choix des paramètres La taille des mailles initiales est $\frac{\omega_M}{N}$. ω_M est inévitablement plus grand que ϖ . Notons $\omega_M = k\varpi$ où k est de l'ordre de 3 à 4. Nous fixerons sa valeur à $k = 4$ dans la suite. La taille initiale de maille s'écrit donc aussi :

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega_M}{N} = \frac{4}{N}\varpi \quad (4.276)$$

Cette taille de maille devrait permettre de représenter correctement la réponse quasi-statique du système étudié. Pour ce faire, nous avons établi au chapitre précédent qu'il

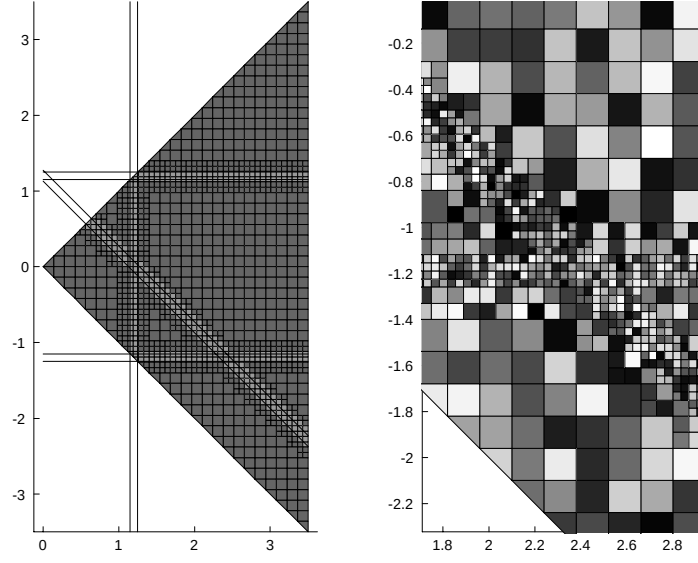


FIG. 4.40 – Illustration de l'algorithme de maillage de l'espace bidimensionnel des fréquences (subdivisions suivantes)

était impératif que le pas de fréquence dans le voisinage de l'origine soit inférieur au dixième de la fréquence propre, soit, ici :

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega_M}{N} = \frac{4}{N}\varpi \leq \frac{\varpi}{10} \quad (4.277)$$

Voici donc une première condition pour le choix du paramètre N :

$$N \geq 40 \quad (4.278)$$

Dans la suite, nous utiliserons systématiquement $N = 50$.

Lors de la première subdivision, les éléments situés sur les axes singuliers sont inévitablement divisés. La taille de leurs mailles est divisé par p_1 :

$$\Delta\omega_1 = \frac{\Delta\omega_0}{p_1} = \frac{k}{Np_1}\varpi \quad (4.279)$$

Le raisonnement peut être mené pour les subdivisions suivantes, menant alors, à la fin des subdivisions, à une taille de maille de :

$$\Delta\omega_k = \frac{k}{N \prod_k p_k} \varpi \quad (4.280)$$

L'objectif majeur d'une bonne représentation du second noyau de Volterra concerne ses crêtes. Pour réaliser une représentation correcte, la taille des mailles doit être inférieure à la largeur de crête dont nous connaissons l'ordre de grandeur ($2\xi\varpi$). Si l'on cherche par

exemple à obtenir $\Delta\omega_k \leq \frac{2\xi\varpi}{k'}$ où k' est de l'ordre de 10, il faudra imposer cette première condition :

$$N \prod_k p_k \geq \frac{kk'}{2\xi} \quad (4.281)$$

Avec les valeurs retenues pour les paramètres k et N , on trouve :

$$\prod_k p_k \gtrsim \frac{40}{(100\xi)} \quad (4.282)$$

Prenons, pour fixer les idées : $\prod_k p_k = \frac{36}{(100\xi)}$.

Pour un taux d'amortissement habituel de l'ordre de 2% à 3%, cette relation peut être assez facilement satisfaite. Par contre, pour un système très peu amorti - prenons par exemple une limite inférieure de $\xi = 0.003$ - il faut dans ce cas imposer que $\prod_k p_k = 120$, ce qui entraîne un nombre de points d'intégration assez important.

Admettons pour l'instant que nous étudions la réponse d'un système faiblement amorti : $0.003 \leq \xi \leq 0.015$, soit $24 \leq \prod_k p_k \leq 120$. Nous proposons à ce stade une méthode de détermination des couples de fréquences de calcul en quatre itérations. Nous imposons donc les valeurs de Δ_1 à Δ_4 . Compte tenu de l'importance relative de la bonne représentation de la composante quasi-statique, nous avons choisi d'imposer $\Delta_1 = 0.5\varpi$. D'autre part, la dernière bande de raffinement Δ_4 devrait idéalement être légèrement supérieure à la largeur de la crête. Nous avons alors choisi $\Delta_4 = 4\xi\varpi$. Assez logiquement, les largeurs des bandes intermédiaires doivent être choisies entre ces deux valeurs extrêmes. Une répartition uniforme n'est cependant certainement pas optimale dans la mesure où un raffinement assez fin ne s'impose que dans le voisinage des crêtes. Nous avons alors choisi de former une série harmonique, c'est-à-dire en imposant que Δ_2 et Δ_3 soient respectivement les moyennes harmoniques²² de Δ_1 et Δ_3 , et de Δ_2 et Δ_4 . La série des Δ_i ainsi obtenue est reprise au tableau 4.13.

Pour chacune de ces quatre subdivisions, il convient maintenant d'attribuer le paramètre de subdivision p . La seule condition dont nous disposons jusqu'à ce point concerne le produit des p_k . On conçoit aisément qu'il serait intéressant de placer ces p_k dans un ordre croissant afin de ne pas augmenter excessivement le nombre de fréquences de calcul. Le choix qui a été retenu est présenté au tableau 4.13. Pour les trois premières itérations, le nombre de subdivisions sera systématiquement porté à 2, 2 et 3. Quant au dernier paramètre (p_4), il est fixé de sorte à respecter la relation 4.282. Pour une structure faiblement amortie, telle que nous l'avons définie, ce dernier paramètre ne peut prendre que des valeurs comprises entre $p_4 = 2$ et $p_4 = 10$.

NOTE : la notation $[n]$ représente l'entier supérieur le plus proche de n .

Considérons maintenant que le système étudié soit davantage amorti ($\xi \geq 0.015$). Cette fois, le critère de base que nous avons établi donne : $\prod_k p_k \leq 24$. L'étude du premier cas limite montre que quatre itérations deviennent probablement inutiles. Dans ce cas, nous proposons de n'utiliser que trois itérations pour la génération des fréquences de calcul. Les raisons qui nous ont poussé à choisir $\Delta_1 = 0.5\varpi$ pour la première bande

²²Pour rappel, le théorème des moyennes stipule que les moyennes suivantes forment, dans cet ordre, une série croissante : moyenne harmonique, moyenne géométrique, moyenne arithmétique, moyenne quadratique. En vertu de l'objectif fixé, nous avons donc choisi la première de ces moyennes

$0.003 \leq \xi \leq 0.015$		$\xi \geq 0.015$	
$\Delta_1 = 0.5\varpi$	$p_1 = 2$	$\Delta_1 = 0.5\varpi$	$p_1 = 2$
$\Delta_2 = \frac{6\xi}{4\xi+1}\varpi$	$p_2 = 2$	$\Delta_2 = \frac{4\xi}{4\xi+1}\varpi$	$p_2 = 2$
$\Delta_3 = \frac{12\xi}{16\xi+1}\varpi$	$p_3 = 3$	$\Delta_3 = 2\xi\varpi$	$p_3 = \left\lfloor \frac{8}{(100\xi)} \right\rfloor$
$\Delta_4 = 4\xi\varpi$	$p_4 = \left\lfloor \frac{3}{(100\xi)} \right\rfloor$		

TAB. 4.13 – Paramètres conseillés pour réaliser le maillage

restent valables ; cette valeur peut donc à nouveau être utilisée. Concernant la dernière bande, il paraît plus opportun, maintenant que la surface à intégrer est moins aigue, de la limiter à $\Delta_3 = 2\xi\varpi^{23}$, ce qui ne peut s’accompagner que d’une économie sur le nombre total de points d’intégration. La largeur de la bande intermédiaire est à nouveau obtenue en prenant la moyenne harmonique de ces deux extrêmes.

Remarque sur la méthode d’intégration numérique La méthode de détermination des points d’intégration fournit également les éléments du maillage. L’intégration numérique consiste à calculer et à additionner les volumes de tous les bâtonnets élémentaires. La manière la plus simple de procéder consiste à multiplier la surface de base de l’élément par la moyenne des ordonnées calculées en chacun des sommets. Cette manière de procéder a été choisie ; elle permet d’intégrer parfaitement une hyperbole sur des éléments carrés. En effet, en adimensionnel, on peut calculer :

$$\int_0^1 \int_0^1 (Ax + By + Cxy + D) dx dy = \frac{1}{4} (2A + 2B + C + 4D) \quad (4.283)$$

ce qui correspond bien à la moyenne des ordonnées des quatre coins : $D, A + D, A + B + C + D, B + D$. Cette propriété n’est valable que si les surfaces à intégrer sont des carrés. Le schéma d’intégration que nous avons choisi revient donc à supposer que la surface est une hyperbole lorsque nous intégrons sur les carrés et que cette surface est plane lorsque nous intégrons sur les triangles.

4.7 Réponse de l’oscillateur au quatrième ordre

4.7.1 Développements théoriques

Les développements théoriques qui suivent ne sont jamais que les extrapolations à l’ordre 4 des développements que nous avons présenté aux ordres inférieurs. Afin d’éviter de rendre la présentation trop monotone, nous nous limiterons donc à présenter les principales relations et non plus les interprétations physiques de toutes les possibilités de développement.

Le lecteur attentif ne sera certainement pas étonné de nous voir débiter les calculs dans le domaine temporel et puis de les terminer dans le domaine fréquentiel.

²³Cette discontinuité dans les largeurs de bande est inévitable dans la mesure où la solution optimale se base sur l’utilisation d’un nombre différent d’itérations.

Dans le domaine temporel

Admettons pour l'instant que nous connaissions le moment d'ordre 4 (la fonction de tricorrélation) de la sollicitation :

$$T_f(t_1, t_2, t_3, t_4) = E[f(t_1) f(t_2) f(t_3) f(t_4)] \quad (4.284)$$

Le même raisonnement que ceux menés aux ordres inférieurs doit nous permettre d'estimer la fonction de tricorrélation de la réponse. La démarche consiste à considérer le processus sollicitant comme une collection de sollicitations déterministes ; le produit $x(t_1) x(t_2) x(t_3) x(t_4)$ prend alors la forme :

$$\begin{aligned} x(t_1) x(t_2) x(t_3) x(t_4) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1 - \tau_1) f(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_2 - \tau_2) f(\tau_2) d\tau_2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_3 - \tau_3) f(\tau_3) d\tau_3 \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) h(\tau_3) h(\tau_4) f(t_1 - \tau_1) f(t_2 - \tau_2) f(t_3 - \tau_3) \\ &\quad f(t_4 - \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \end{aligned} \quad (4.285)$$

ce qui permet, en prenant l'espérance mathématique membre à membre, de relier les fonctions de tricorrélation de la sollicitation et de la réponse :

$$\begin{aligned} T_x(t_1, t_2, t_3, t_4) &= E[x(t_1) x(t_2) x(t_3) x(t_4)] \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) h(\tau_3) h(\tau_4) \\ &\quad T_f(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2, t_3 - \tau_3, t_4 - \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \end{aligned} \quad (4.286)$$

Lorsque la sollicitation est stationnaire, la fonction de tricorrélation de la sollicitation $B_f(t_1, t_2, t_3, t_4)$ ne dépend que de trois paramètres $t_2 - t_1$, $t_3 - t_1$ et $t_4 - t_1$ et peut donc être écrite $B_f(t_2 - t_1, t_3 - t_1, t_4 - t_1)$.

$$\begin{aligned} T_x(t_1, t_2, t_3, t_4) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} T_f(t_1 - t_2 + \tau_2 - \tau_1, t_1 - t_3 + \tau_3 - \tau_1, t_1 - t_4 + \tau_4 - \tau_1) \\ &\quad h(\tau_1) h(\tau_2) h(\tau_3) h(\tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \end{aligned} \quad (4.287)$$

On peut donc constater que la réponse est alors stationnaire puisqu'elle s'exprime en terme des différences $t_2 - t_1$, $t_3 - t_1$ et $t_4 - t_1$ uniquement.

Dans le domaine fréquentiel

L'équivalence à l'ordre 4 de la densité spectrale de puissance et du bispectre est le trispectre. Sa définition s'exprime à partir de la transformée de Fourier triple de la fonction de tricorrélation. Par exemple, pour la sollicitation, on écrit :

$$Q_f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} T_f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (4.288)$$

Cette relation et son inverse :

$$T_f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} Q_f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) e^{i\omega_1\tau_1} e^{i\omega_2\tau_2} e^{i\omega_3\tau_3} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \quad (4.289)$$

forment les équivalents à l'ordre 4 des relation de Wiener_Khintchine. En choisissant $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ dans cette relation, on trouve :

$$T_f(0, 0, 0) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} Q_f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \quad (4.290)$$

soit que la triple intégration du trispectre sur le domaine des pulsations correspond à la valeur à l'origine de la fonction de tricorrélation : le moment d'ordre 4. La transformée de Fourier triple de la relation 4.287 permet d'obtenir l'expression du trispectre de la réponse :

$$\begin{aligned} Q_x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \\ \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} T_f(\Delta t_1 + \tau_1 - \tau_2, \Delta t_2 + \tau_1 - \tau_3, \Delta t_3 + \tau_1 - \tau_4) & h(\tau_1) h(\tau_2) \\ h(\tau_3) h(\tau_4) e^{-i\omega_1\Delta t_1} e^{-i\omega_2\Delta t_2} e^{-i\omega_3\Delta t_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\Delta t_1 d\Delta t_2 d\Delta t_3 & \quad (4.291) \end{aligned}$$

Le changement de variables :

$$\theta_1 = \Delta t_1 + \tau_1 - \tau_2 \quad (4.292)$$

$$\theta_2 = \Delta t_2 + \tau_1 - \tau_3 \quad (4.293)$$

$$\theta_3 = \Delta t_3 + \tau_1 - \tau_4 \quad (4.294)$$

permet de découpler l'intégrale multiple :

$$\begin{aligned} Q_x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) & \\ = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \iiint_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) h(\tau_3) h(\tau_4) T_f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) & \\ e^{-i\omega_1(\theta_1 - \tau_1 + \tau_2)} e^{-i\omega_2(\theta_2 - \tau_1 + \tau_3)} e^{-i\omega_3(\theta_3 - \tau_1 + \tau_4)} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 & \\ = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} T_f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) e^{-i\omega_1\theta_1} e^{-i\omega_2\theta_2} e^{-i\omega_3\theta_3} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 & \\ \iiint_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) h(\tau_3) h(\tau_4) e^{-i\omega_1\tau_2} e^{-i\omega_2\tau_3} e^{-i\omega_3\tau_4} & \\ e^{i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 & \\ = Q_f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \underbrace{H(\omega_1)H(\omega_2)H(\omega_3)\bar{H}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)}_{K_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)} & \quad (4.295) \end{aligned}$$

A l'ordre 4, nous avons de nouveau pu établir une expression assez simple permettant d'exprimer le trispectre de la réponse d'un oscillateur simple en fonction du trispectre de sa sollicitation. Les développements qui viennent d'être brièvement présentés ne sont qu'une adaptation à un espace de dimension supérieure de ce qui a été réalisé aux ordres inférieurs.

L'expression $K_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ qui apparaît à la relation 4.295 est le troisième noyau de Volterra. Dans le cadre de notre analyse, il permet de représenter, dans un espace de fréquences tridimensionnel, le filtrage de l'étalement de la densité de probabilité de la sollicitation. Quelques caractéristiques importantes de cette fonction sont données au paragraphe suivant.

4.7.2 Caractéristique du troisième noyau de Volterra

Toute une série de propriétés des trispectres peuvent s'aligner sur les développements menés au troisième ordre. Par exemple, le trispectre d'un processus aléatoire réel n'est pas nécessairement une fonction réelle. Nous verrons, dans les développements suivants, que le trispectre de la sollicitation que nous considérons dans le cadre de ce travail est une fonction réelle. Il n'en est par contre pas ainsi de la réponse du système qui est obtenue en multipliant le trispectre de la sollicitation par le troisième noyau de Volterra.

Bien que le trispectre d'un processus aléatoire réel soit une fonction complexe, on peut vérifier que le moment d'ordre 4 obtenu par intégration du trispectre est une grandeur réelle. Ceci est assez logique puisqu'elle représente le moment statistique d'une variable réelle. D'un point de vue mathématique, cette propriété se traduit par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{Q}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \quad (4.296)$$

L'implication pratique fondamentale de cette propriété nous permet de n'évaluer que la partie réelle du trispectre de la réponse.

Puisque le processus étudié est stationnaire, la fonction de tricorrélation est invariante par rapport à une permutation de ses arguments. L'équivalent de cette relation dans le domaine fréquentiel est l'invariance du trispectre par rapport à une permutation de ses arguments. Par exemple :

$$\begin{aligned} Q(\omega_2, \omega_1, \omega_3) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-i\omega_2\tau_1} e^{-i\omega_1\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\tau_2, \tau_1, \tau_3) e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &= Q(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{aligned} \quad (4.297)$$

Une autre propriété intéressante du trispectre est qu'il prend une valeur conjuguée

lorsqu'on change tous ses arguments de signe :

$$\begin{aligned}
 Q(-\omega_1, -\omega_2, -\omega_3) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{i\omega_1\tau_1} e^{i\omega_2\tau_2} e^{i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
 &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
 &= \bar{Q}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)^{24}
 \end{aligned} \tag{4.298}$$

Les quelques propriétés qui viennent d'être établies sont valables quel que soit le trispectre considéré. En particulier, elles sont valables pour la sollicitation ainsi que pour la réponse. Etant donné que le trispectre de la réponse s'obtient par une multiplication de celui de la sollicitation par le troisième noyau de Volterra, il va donc de soi que le troisième noyau de Volterra possède les mêmes propriétés. Par exemple, on peut vérifier assez facilement que :

$$K_3(-\omega_1, -\omega_2, -\omega_3) = H(-\omega_1)H(-\omega_2)H(-\omega_3)\bar{H}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) = \bar{K}_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \tag{4.299}$$

Revenons momentanément aux propriétés de symétrie des fonctions à deux arguments. Considérons une fonction de deux arguments qui reste invariante vis-à-vis d'un échange de ses arguments :

$$g(x, y) = g(y, x) \tag{4.300}$$

La connaissance que nous avons de l'étude des fonctions en deux dimensions nous apprend que la bissectrice $x = y$ est un axe de symétrie (axiale) des courbes de niveaux $g(x, y) = cst$ de cette fonction, et donc a fortiori également de la fonction elle-même. Considérons maintenant une fonction qui reste invariante lors d'un changement de signe de ses arguments :

$$g(x, y) = g(-x, -y) \tag{4.301}$$

La carte des courbes de niveau de cette fonction possède alors le point $(x, y) = (0, 0)$ comme centre de symétrie (centrale). Dans ce cas, le plan de définition de la fonction peut être coupé en deux zones séparées par la droite d'équation $x + y = 0$ de façon à obtenir ainsi deux figures superposables sans retournement.

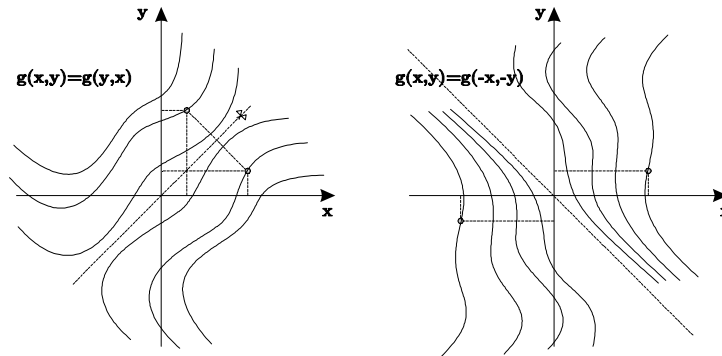


FIG. 4.41 – Illustration de la symétrie des courbes de niveaux d'une fonction de deux variables

Si la fonction $f(x, y)$ devait être intégrée sur le plan $[-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty]$, l'une ou l'autre des deux symétries présentées ci-dessus permettrait de réduire le domaine d'intégration de moitié.

Afin de limiter le domaine d'intégration du trispectre pour le calcul des moments, nous allons étendre ces propriétés à la dimension supérieure. Puisque le trispectre que nous étudions est invariant vis-à-vis d'un interchangement de ses arguments ω_1 et ω_2 , le plan $\omega_1 = \omega_2$ est un plan de symétrie pour la fonction étudiée. En raisonnant de façon identique pour les autres interchangements, on peut constater que la fonction étudiée possède les trois plans de symétrie suivants :

$$\omega_1 = \omega_2 \quad (4.302)$$

$$\omega_2 = \omega_3 \quad (4.303)$$

$$\omega_3 = \omega_1 \quad (4.304)$$

Ces trois plans sont assez particuliers car ils s'intersectent en une seule et unique droite d'équation $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$. Cela signifie donc que le domaine d'intégration du trispectre peut être réduit d'un facteur 6. La propriété supplémentaire d'invariance de la partie réelle du trispectre vis-à-vis d'un changement de signe de ses arguments permet encore de diviser le domaine d'intégration par un facteur 2. Il suffit en effet de considérer le demi-espace situé d'un côté ou de l'autre du plan $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ ²⁵.

La représentation graphique du trispectre d'un processus aléatoire est assez compliquée puisqu'il s'agit d'une fonction de trois arguments. Il existe plusieurs possibilités pour représenter cette fonction. La plus simple consiste à réaliser des coupes dans l'entité mathématique multidimensionnelle de façon à la rendre représentable comme une surface dans un espace tridimensionnel. Nous trouvons que cette méthode de représentation ne permet pas de donner une vue d'ensemble représentative de la fonction.

C'est pour cette raison que nous avons décidé de ne représenter que les surfaces de niveaux de la fonction de trois arguments. Les surfaces de niveaux sont l'équivalent, à l'ordre supérieur, des courbes de niveaux d'une fonction de deux paramètres. L'estimation de la fonction en chacun des points d'une même surface de niveaux permet de retrouver la même valeur, que nous appelons le niveau de la surface.

Afin de se représenter plus précisément la forme du troisième noyau de Volterra, nous avons représenté quelques surfaces de niveaux²⁶ aux figures 4.42 à 4.45. Deux angles de vue sont donnés pour faciliter la représentation.

La représentation des plans de symétrie annoncés montre que l'intégration d'un trispectre peut être opérée sur une partie se limitant à un douzième de l'espace complet. Lorsque le niveau de la surface étudiée est assez faible (Fig. 4.42), on peut identifier assez clairement une surface de niveau ellipsoïdale dans le voisinage de l'origine. Cette surface est l'équivalent à l'ordre quatre de la courbe de niveau elliptique du second noyau de Volterra dans le voisinage de l'origine (Fig. 4.26). Cette région est responsable du comportement quasi-statique de la structure.

La surface de niveau de la figure 4.45 associée à $K_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 200$ (211) montre que la zone de l'espace où le troisième noyau de Volterra prend les valeurs les plus importantes

²⁵Ce plan n'est pas un plan de symétrie ! Cette réduction provient du fait que le point $(0, 0, 0)$ est un centre de symétrie.

²⁶Une fonction de deux arguments peut être visualisée par la représentation simultanée d'une série de courbes de niveaux. A la dimension supérieure, on ne peut espérer garder une représentation claire qu'en représentant une, voire deux, surfaces de niveaux.

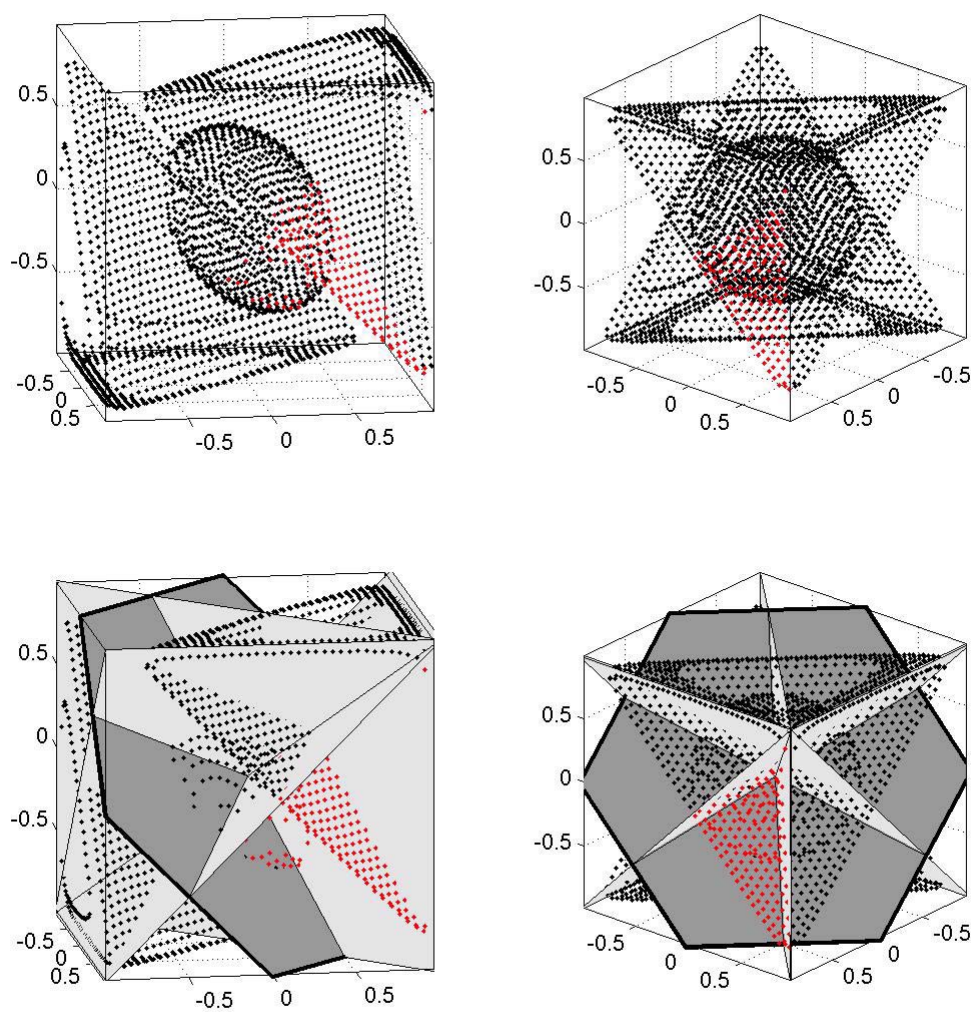


FIG. 4.42 – Surface de niveau $K_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 1.5$ du troisième noyau de Volterra ($\xi = 0.05$; $\varpi = 1$)

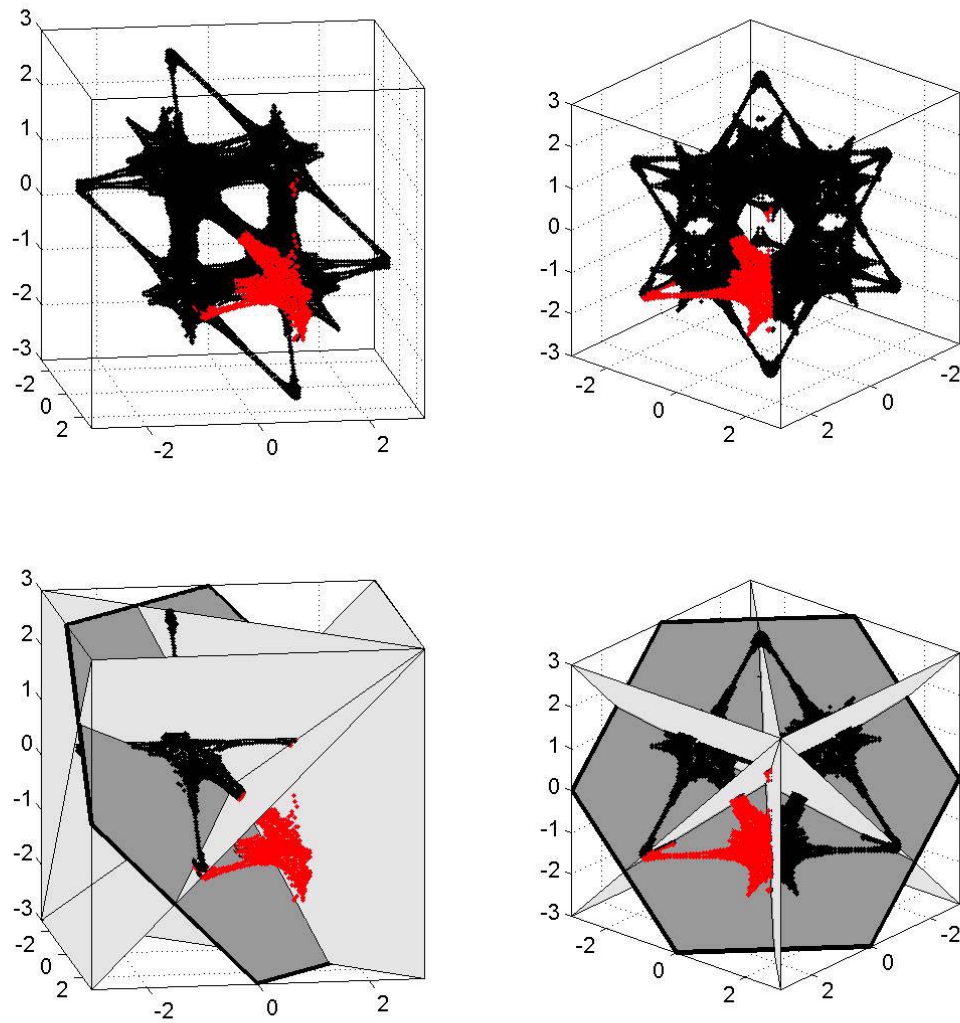


FIG. 4.43 – Surface de niveau $K_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 20$ du troisième noyau de Volterra ($\xi = 0.05$; $\varpi = 1$)

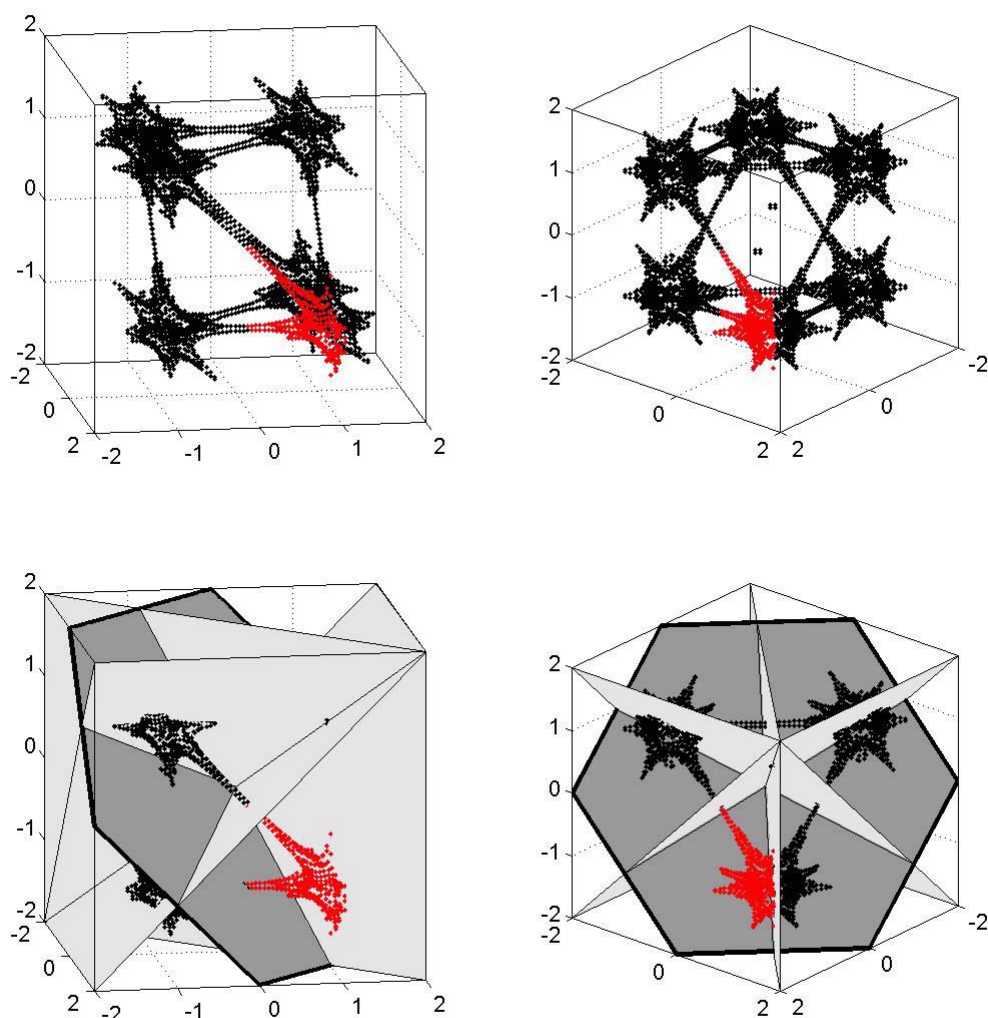


FIG. 4.44 – Surface de niveau $K_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 75$ du troisième noyau de Volterra ($\xi = 0.05$; $\varpi = 1$)

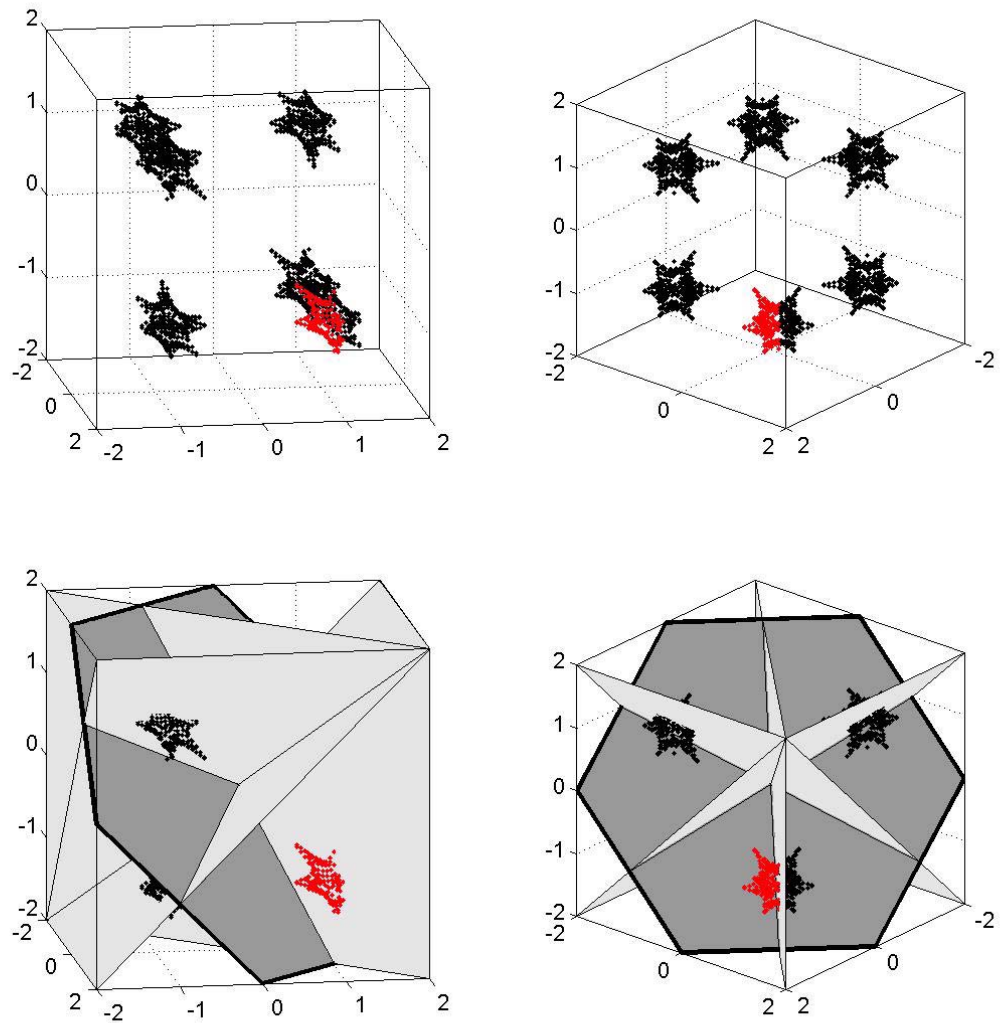


FIG. 4.45 – Surface de niveau $K_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 200$ du troisième noyau de Volterra ($\xi = 0.05$; $\varpi = 1$)

se limite à six étoiles. A l'intérieur de ces six étoiles, le troisième noyau de Volterra prend des valeurs encore plus importantes. Ces six étoiles représentent les équivalents à l'ordre quatre des six pics hauts que nous avons identifiés dans le second noyau de Volterra. Au vu des symétries établies, l'intégration peut n'avoir lieu que sur une demi étoile.

Les représentations associées aux niveaux intermédiaires permettent de montrer que le troisième noyau de Volterra prend également des valeurs assez importantes dans le voisinage du plan $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. A la figure 4.43, on voit également apparaître six petites étoiles aux sommets de la plus grande étoile (ayant la forme de l'étoile de David). Elles ne sont rien d'autre que les équivalents des six pics bas du second noyau.

Maintenant que les caractéristiques principales des bispectres et du troisième noyau de Volterra sont présentées, nous allons pouvoir utiliser ces êtres mathématiques assez inhabituels dans le cadre de l'analyse dynamique de structures soumises au vent. Avant d'aborder l'étude de l'oscillateur simple à proprement parler, nous allons d'abord présenter, dans les domaines temporel puis fréquentiel, la démarche permettant d'estimer le trispectre de la sollicitation. Tout comme aux ordres inférieurs, nous nous limiterons à supposer que l'effort s'exprime par une fonction polynômiale d'ordre 2 d'un processus aléatoire gaussien.

4.7.3 Caractérisation de la sollicitation

L'objectif de ce paragraphe consiste à établir les caractéristiques statistiques de quatrième ordre (en terme de la fonction moment d'abord, puis de son équivalent dans le domaine fréquentiel) d'un processus aléatoire non gaussien, non centré, qui s'exprime à partir du carré d'un processus aléatoire gaussien.

Cet exercice a déjà été entrepris dans le cadre d'un processus initial gaussien et centré (4.3). De même qu'à l'ordre 3, les résultats que nous avons présentés pour ce cas particulier vont nous permettre de simplifier les expressions assez compliquées que nous traitons maintenant.

Dans le domaine temporel

La fonction moment d'ordre 4 (la fonction de tricorrélation) de la sollicitation s'exprime par :

$$\begin{aligned} T_f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= E[f(t) f(t + \tau_1) f(t + \tau_2) f(t + \tau_3)] \\ T_f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= E\left[\gamma^4 [\bar{U} + u(t)]^2 [\bar{U} + u(t + \tau_1)]^2 [\bar{U} + u(t + \tau_2)]^2 [\bar{U} + u(t + \tau_3)]^2\right] \end{aligned} \quad (4.305)$$

En développant cette expression, nous devrions être en mesure de pouvoir exprimer cette fonction uniquement en termes de la fonction d'autocorrélation du processus aléatoire $u(t)$. Pour simplifier les notations, nous allons momentanément utiliser

$u_1 = u(t)$, $u_2 = u(t + \tau_1)$ et $u_3 = u(t + \tau_2)$ et $u_4 = u(t + \tau_3)$:

$$\begin{aligned}
\frac{T_f}{\gamma^4} &= E \left[[\bar{U}^2 + 2\bar{U}u_1 + u_1^2] [\bar{U}^2 + 2\bar{U}u_2 + u_2^2] [\bar{U}^2 + 2\bar{U}u_3 + u_3^2] [\bar{U}^2 + 2\bar{U}u_4 + u_4^2] \right] \\
&= E \left[(\bar{U}^4 + 2\bar{U}^3(u_1 + u_2) + \bar{U}^2(u_1^2 + 4u_1u_2 + u_2^2) + 2\bar{U}(u_2u_1^2 + u_1u_2^2) + u_1^2u_2^2) \right. \\
&\quad \left. (\bar{U}^4 + 2\bar{U}^3(u_3 + u_4) + \bar{U}^2(u_3^2 + 4u_3u_4 + u_4^2) + 2\bar{U}(u_4u_3^2 + u_3u_4^2) + u_3^2u_4^2) \right] \\
&= \bar{U}^8 + \bar{U}^6 \left(\sum_i^{4t} E[u_i^2] + 4 \sum_{i \neq j}^{6t} E[u_i u_j] \right) \\
&\quad + \bar{U}^4 \left(\sum_{i \neq j}^{6t} E[u_i^2 u_j^2] + 4 \sum_{i \neq j \neq k}^{12t} E[u_i^2 u_j u_k] \right) + 16\bar{U}^4 E[u_1 u_2 u_3 u_4] \\
&\quad + \bar{U}^2 \left(\sum_{i \neq j \neq k}^{4t} E[u_i^2 u_j^2 u_k^2] + 4 \sum_{i \neq j \neq k}^{6t} E[u_i^2 u_j^2 u_k u_l] \right) + E[u_1^2 u_2^2 u_3^2 u_4^2] \quad (4.306)
\end{aligned}$$

Dans cette expression, nous avons déjà supprimé les fonctions moments d'ordres impairs de la composante turbulente du vent car nous savons qu'elles sont nulles pour ce processus gaussien. Nous pouvons nous illustrer des développements du paragraphe 4.3 pour donner les expressions des termes intervenant dans la relation 4.306 :

- quelques relations sont assez immédiates et ont déjà été utilisées précédemment $E[u_i^2] = \sigma_u^2$, $E[u_i u_j] = R_u(\tau_{i-j})$, $E[u_i^2 u_j^2] = \sigma_u^4 + 2R_u^2(\tau_{i-j})$, $E[u_1^2 u_2 u_3] = 2R_u(\tau_1)R_u(\tau_2) + \sigma_u^2 R_u(\tau_2 - \tau_1)$
- avec les notations du paragraphe 4.3, nous avons également vu l'expression de ce moment d'ordre 6 $R^{(6)}(t_1, t_1, t_2, t_2, t_3, t_3) = \Sigma_{11}\Sigma_{22}\Sigma_{33} + 8\Sigma_{12}\Sigma_{23}\Sigma_{31} + 2\Sigma_{11}\Sigma_{23}^2 + 2\Sigma_{22}\Sigma_{13}^2 + 2\Sigma_{33}\Sigma_{12}^2$, soit, avec les notations actuelles :

$$\begin{aligned}
E[u_1^2 u_2^2 u_3^2] &= \sigma_u^6 + 2\sigma_u^2 (R_u^2(\tau_1) + R_u^2(\tau_2) + R_u^2(\tau_2 - \tau_1)) \\
&\quad + 8R_u(\tau_1)R_u(\tau_2)R_u(\tau_2 - \tau_1) \quad (4.307)
\end{aligned}$$

- l'expression d'un terme générique comme $E[u_1^2 u_2^2 u_3 u_4]$ peut encore être obtenu assez facilement :

$$\begin{aligned}
E[x_1^2 x_2^2 x_3 x_4] &= \sigma_u^4 R_u(\tau_3 - \tau_2) + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_1) \\
&\quad + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_2) R_u(\tau_3) + 2R_u^2(\tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) \\
&\quad + 4R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1) \\
&\quad + 4R_u(\tau_1) R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1) \quad (4.308)
\end{aligned}$$

Les expressions des autres termes, comme par exemple $E[u_1^2 u_2 u_3^2 u_4]$, peuvent être obtenues à partir de cette relation, en permutant les indices de façon adéquate ;

- l'expression du moment d'ordre 8, qui n'est en réalité rien d'autre que le moment

d'ordre 4 du processus aléatoire élevé au carré, doit également être estimée :

$$\begin{aligned}
& E[x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2] \\
= & 4R_u^2(\tau_1) R_u^2(\tau_3 - \tau_2) + 4R_u^2(\tau_2) R_u^2(\tau_3 - \tau_1) + 4R_u^2(\tau_3) R_u^2(\tau_2 - \tau_1) \\
& + 2\sigma_u^4 R_u^2(\tau_1) + 2\sigma_u^4 R_u^2(\tau_2) + 2\sigma_u^4 R_u^2(\tau_3) + 2\sigma_u^4 R_u^2(\tau_3 - \tau_2) \\
& + 2\sigma_u^4 R_u^2(\tau_2 - \tau_1) + 2\sigma_u^4 R_u^2(\tau_2 - \tau_1) \\
& + 16R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) \\
& + 16R_u(\tau_1) R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) \\
& + 16R_u(\tau_2) R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_1) \\
& + 8\sigma_u^2 R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1) + 8\sigma_u^2 R_u(\tau_1) R_u(\tau_3) R_u(\tau_3 - \tau_1) \\
& + 8\sigma_u^2 R_u(\tau_2) R_u(\tau_3) R_u(\tau_3 - \tau_2) \\
& + 8\sigma_u^2 R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) + \sigma_u^8
\end{aligned} \tag{4.309}$$

En utilisant ces relations²⁷, l'expression du trispectre de la sollicitation peut être développé afin de ne plus laisser apparaître que des fonctions moments d'ordre 2. L'expression complète ne comporte que des termes simples mais ils sont très nombreux. A titre d'exemple, voici un des termes intervenant dans l'expression recherchée :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \neq j \neq k}^{6t} E[u_i^2 u_j^2 u_k u_l] \\
= & \sigma_u^4 (R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u(\tau_3 - \tau_1) + R_u(\tau_2 - \tau_1) + R_u(\tau_3) + R_u(\tau_2) + R_u(\tau_1)) \\
& + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_2 - \tau_1) + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_3) R_u(\tau_2) + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_3 - \tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1) \\
& + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_3) R_u(\tau_1) + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_3 - \tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1) + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_2) R_u(\tau_1) \\
& + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_3 - \tau_2) R_u(\tau_2) + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_1) + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_3 - \tau_2) R_u(\tau_3) \\
& + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_1) + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_3) + 2\sigma_u^2 R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_2) \\
& + 2R_u^2(\tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) + 2R_u^2(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1) + 2R_u^2(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1) \\
& + 2R_u^2(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3) + 2R_u^2(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_2) + 2R_u^2(\tau_3 - \tau_2) R_u(\tau_1) \\
& + 4R_u(\tau_1) (R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1) + R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1)) \\
& + 4R_u(\tau_2) (R_u(\tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1)) \\
& + 4R_u(\tau_3) (R_u(\tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1)) \\
& + 4R_u(\tau_2 - \tau_1) (R_u(\tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1)) \\
& + 4R_u(\tau_3 - \tau_1) (R_u(\tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1)) \\
& + 4R_u(\tau_3 - \tau_2) (R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1) + R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1))
\end{aligned} \tag{4.310}$$

Après quelques simplifications, l'expression complète de la fonction de tricorrélation de la sollicitation ne tient toujours pas sur une page de ce document. Nous avons décidé de regrouper les termes intervenant dans cette expression selon des critères qui vont

²⁷Il est conseillé au lecteur désireux de rentrer dans les détails des développements théoriques de rétablir ces relations. Il faut cependant savoir que cet exercice est assez long.

paraître assez évidents dans la suite :

$$\begin{aligned}
\frac{T_f}{\gamma^4} = & (\bar{U}^2 + \sigma_u^2)^4 + 2(\bar{U}^2 + \sigma_u^2)^2 [2\bar{U}^2 r_A(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + r_B(\tau_1, \tau_2, \tau_3)] + \\
& 8\bar{U}^2 (\bar{U}^2 + \sigma_u^2) r_C(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + 16\bar{U}^4 r_D(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\
& + 8\bar{U}^2 (2r_E(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + r_F(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + r_G(\tau_1, \tau_2, \tau_3)) + 8\sigma_u^2 r_F(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\
& + 4r_H(\tau_1, \tau_2, \tau_3)
\end{aligned} \tag{4.311}$$

où

$$r_A(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = R_u(\tau_1) + R_u(\tau_2) + R_u(\tau_3) + R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u(\tau_3 - \tau_1) + R_u(\tau_3 - \tau_2)$$

$$r_B(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = R_u^2(\tau_1) + R_u^2(\tau_2) + R_u^2(\tau_3) + R_u^2(\tau_3 - \tau_2) + R_u^2(\tau_3 - \tau_1) + R_u^2(\tau_3 - \tau_2)$$

$$\begin{aligned}
r_C(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = & R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) + R_u(\tau_1) R_u(\tau_3) + R_u(\tau_2) R_u(\tau_3) \\
& + R_u(\tau_1) R_u(\tau_2 - \tau_1) + R_u(\tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_1) + R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_1) \\
& + R_u(\tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1) + R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) \\
& + R_u(\tau_3) R_u(\tau_3 - \tau_1) + R_u(\tau_3) R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2)
\end{aligned}$$

$$r_D(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = R_u(\tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1) + R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1)$$

$$\begin{aligned}
r_E(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = & R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1) + R_u(\tau_1) R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1) \\
& + R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u(\tau_2) R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1) \\
& + R_u(\tau_1) R_u(\tau_3) R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u(\tau_2) R_u(\tau_3) R_u(\tau_3 - \tau_1) \\
& + R_u(\tau_1) R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u(\tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_1) \\
& + R_u(\tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u(\tau_3) R_u(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_2 - \tau_1) \\
& + R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1) + R_u(\tau_3) R_u(\tau_3 - \tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_F(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = & R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1) + R_u(\tau_1) R_u(\tau_3) R_u(\tau_3 - \tau_1) \\
& + R_u(\tau_2) R_u(\tau_3) R_u(\tau_3 - \tau_1) + R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_G(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = & R_u^2(\tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) + R_u^2(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1) + R_u^2(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1) \\
& + R_u^2(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3) + R_u^2(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_2) + R_u^2(\tau_3 - \tau_2) R_u(\tau_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_H(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = & R_u^2(\tau_1) R_u^2(\tau_3 - \tau_2) + R_u^2(\tau_2) R_u^2(\tau_3 - \tau_1) + R_u^2(\tau_3) R_u^2(\tau_2 - \tau_1) \\
& + 4R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) \\
& + 4R_u(\tau_1) R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) \\
& + 4R_u(\tau_2) R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_1)
\end{aligned}$$

Dès à présent, nous pouvons regrouper les huit fonctions qui viennent d'être introduites en fonction de leur ordre en l'intensité de turbulence. Les moments de quatrième ordre des fonctions des quatre groupes $\{r_A\}$, $\{r_B, r_C, r_D\}$, $\{r_E, r_F, r_G\}$, $\{r_H\}$ ont des ordres différents. Plus précisément, ils s'expriment par :

$$\begin{aligned}
r_A(0, 0, 0) &= 6\sigma_u^2 \\
r_B(0, 0, 0) &= 6\sigma_u^4 \\
r_C(0, 0, 0) &= 12\sigma_u^4 \\
r_D(0, 0, 0) &= 3\sigma_u^4 \\
r_E(0, 0, 0) &= 12\sigma_u^6 \\
r_F(0, 0, 0) &= 4\sigma_u^6 \\
r_G(0, 0, 0) &= 6\sigma_u^6 \\
r_H(0, 0, 0) &= 15\sigma_u^8
\end{aligned} \tag{4.312}$$

L'évaluation de la fonction de tricorrélation pour $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = (0, 0, 0)$ permet d'obtenir le moment d'ordre 4 de la sollicitation :

$$T_f(0, 0, 0) = m_{4f} = \gamma^4 (\bar{U}^8 + 28\bar{U}^6\sigma_u^2 + 210\bar{U}^4\sigma_u^4 + 420\bar{U}^2\sigma_u^6 + 105\sigma_u^8) \tag{4.313}$$

Comme pour les caractéristiques d'ordres inférieurs, l'établissement de cette fonction moment (la fonction de tricorrélation) n'était pas nécessaire à la détermination du moment d'ordre 4 puisqu'il suffit de constater que :

$$\begin{aligned}
m_4 &= E \left[\left(\gamma (\bar{U} + u)^2 \right)^4 \right] \\
&= \gamma^4 E [\bar{U}^8 + 8\bar{U}^7 u + 28\bar{U}^6 u^2 + 56\bar{U}^5 u^3 + 70\bar{U}^4 u^4 + 56\bar{U}^3 u^5 + 28\bar{U}^2 u^6 + 8\bar{U} u^7 + u^8] \\
&= \gamma^4 (\bar{U}^8 + 28\bar{U}^6\sigma_u^2 + 210\bar{U}^4\sigma_u^4 + 420\bar{U}^2\sigma_u^6 + 105\sigma_u^8)
\end{aligned} \tag{4.314}$$

Calculer le moment d'ordre 4 sur base de l'expression complète de la fonction de tricorrélation constitue une première vérification de l'exactitude de son expression. Le moment centré d'ordre 4 qui caractérise plus précisément l'étalement de la densité de probabilité s'exprime par :

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_4 &= m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4 \\
&= \gamma^4 (48\bar{U}^4\sigma_u^4 + 240\bar{U}^2\sigma_u^6 + 60\sigma_u^8) \\
&= 12\gamma^4 \bar{U}^4\sigma_u^4 (4 + 20I_u^2 + 5I_u^4)
\end{aligned} \tag{4.315}$$

Une autre grandeur qu'il pourrait être intéressant d'établir est le cumulants d'ordre 4. Cette nouveauté apparaît à l'ordre 4 car, à l'ordre 3, cumulants et moment centré sont des grandeurs identiques. Ce cumulants s'exprime par :

$$\begin{aligned} k_4 &= \tilde{m}_4 - 3\tilde{m}_2^2 \\ &= 48\gamma^4 \bar{U}^2 \sigma_u^6 (4 + I_u^2) \end{aligned} \quad (4.316)$$

Cette valeur toujours positive montre que la variable aléatoire étudiée ici, la force appliquée sur l'oscillateur simple, est plus étalée que la variable aléatoire gaussienne de même variance. Il ne peut donc à nouveau en résulter que des excursions plus fréquentes dans le domaine des fortes sollicitations.

Notons qu'au passage du moment centré au cumulants (grandeur qui nous intéresse plus précisément), nous avons de nouveau perdu un ordre dans l'intensité de la turbulence ($\bar{U}^4 \sigma_u^4 \rightarrow \bar{U}^2 \sigma_u^6$).

Le moment centré et le cumulants d'ordre 4 restent des grandeurs encore assez difficiles à se représenter physiquement. On leur préfère généralement les coefficients de kurtosis (γ_4) ou d'excès (γ_e), qui sont parfois confondus. Pour la sollicitation appliquée à la structure, on peut écrire :

$$\gamma_4 = \frac{\tilde{m}_4}{\tilde{m}_2^2} = \frac{12\gamma^4 \bar{U}^4 \sigma_u^4 (4 + 20I_u^2 + 5I_u^4)}{(2\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 (2 + I_u^2))^2} = 3 \frac{4 + 20I_u^2 + 5I_u^4}{4 + 4I_u^2 + I_u^4} \quad (4.317)$$

Le coefficient d'excès qui caractérise plus particulièrement l'écart de la densité de probabilité ainsi obtenue par rapport à une densité de probabilité gaussienne s'exprime par :

$$\gamma_e = \gamma_4 - 3 = \frac{\tilde{m}_4}{\tilde{m}_2^2} - 3 = 4I_u^2 \frac{1 + \frac{I_u^2}{4}}{\left(1 + \frac{I_u^2}{2}\right)^2} \simeq 12I_u^2 \quad (4.318)$$

Contrairement au coefficient de dissymétrie de la sollicitation qui était proportionnel à l'intensité de la turbulence, le coefficient d'excès semble montrer que la sollicitation étudiée semble se rapprocher davantage (à l'ordre 4) d'une sollicitation gaussienne. Remarquons cependant que l'on peut encore rencontrer des intensités de turbulence de l'ordre de $I_u = 20\%$, soit des coefficients d'excès de l'ordre de $\gamma_e = 0.4$ à $\gamma_e = 0.5$.

Au paragraphe précédent, nous nous intéressions au moment centré d'ordre 3 et nous avons pu constater que ce moment était obtenu en supprimant, dans l'expression du bispectre, les fonctions de Dirac provenant de la transformation de fonctions constantes. Un raisonnement analogue peut être mené dans le cadre des moments d'ordre 4 : nous pouvons laisser de côté, dans l'expression de la fonction de bicorrélation, le terme $(\bar{U}^2 + \sigma_u^2)^4$ qui correspond à la quatrième puissance de la force moyenne. Aussi, nous pouvons laisser de côté les termes en $r_A(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, $r_B(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, $r_C(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ et $r_F(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ dont les expressions sont des sommes dont aucun des termes ne fait intervenir simultanément les paramètres τ_1, τ_2 et τ_3 ²⁸. De façon à conserver une fonction de tricorrélation qui permette de retrouver le moment centré et non plus le moment (total), nous utiliserons donc cette fonction :

²⁸Sous cette condition, le dernier terme de l'expression de $r_F(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ pourrait poser problème. En réalité, il convient de revenir aux fonctions moments de 4^{ème} ordre non stationnaires, fonction de 4 variables (t_0, t_1, t_2, t_3). Le dernier terme de $r_F(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ ne fait pas intervenir la variable t_0 et peut donc également être supprimé.

$$\frac{T_f}{\gamma^4} = 16\bar{U}^4 r_D(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + 8\bar{U}^2 (2r_E(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + r_G(\tau_1, \tau_2, \tau_3)) + 4r_H(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \quad (4.319)$$

On peut effectivement vérifier que l'estimation de cette fonction à l'origine donne le moment centré :

$$T_f(0, 0, 0) = \gamma^4 (48\bar{U}^4 \sigma_u^4 + 240\bar{U}^2 \sigma_u^6 + 60\sigma_u^8) \quad (4.320)$$

La relation 4.319 définissant la fonction de tricorrélation (centrée) est valable quelle que soit la fonction d'autocorrélation de la sollicitation étudiée. Nous allons maintenant utiliser cette relation pour établir les relations équivalentes dans le domaine fréquentiel.

Dans le domaine fréquentiel

L'application à la relation 4.319 de la transformée de Fourier triple permet d'obtenir l'expression de la densité trispectrale de puissance (dénommée aussi trispectre dans la suite) :

$$Q_f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (4.321)$$

En y introduisant l'expression retenue de la fonction de tricorrélation, on trouve l'expression similaire :

$$\begin{aligned} \frac{Q_f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\gamma^4} = & 16\bar{U}^4 d_D(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + 8\bar{U}^2 (2d_E(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + d_G(\omega_1, \omega_2, \omega_3)) \\ & + 4d_H(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{aligned} \quad (4.322)$$

où chacun des termes $d_X(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ($X \equiv D, E, G, H$) est la composante du trispectre associée à la composante $r_X(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ de la fonction de tricorrélation :

$$d_X(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_X(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (4.323)$$

Afin de simplifier les notations, nous introduisons l'opérateur de sommation cyclique sur trois indices $\mathfrak{L}_{1,2,3}^\odot$. Il représente toujours une somme de trois termes ; par exemple : $\mathfrak{L}_{1,2,3}^\odot [\omega_1\omega_2] = \omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1$. Etant donné leur manifeste répétitivité, les développements menant aux expressions des composantes élémentaires du trispectre ont été reportés à l'annexe D. On peut y trouver les expressions des composantes génériques pour tous les termes intervenant dans la fonction de tricorrélation complète, c'est-à-dire pour $X \equiv A, \dots, H$.

Les quatre termes qui nous intéressent plus particulièrement sont :

$$d_D(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \mathfrak{L}_{1,2,3}^\odot [\delta(\omega_2 + \omega_3) S_u(\omega_1) S_u(\omega_3)] \quad (4.324)$$

$$\begin{aligned}
d_E(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \mathfrak{L}_{1,2,3}^{\odot} [S_u(\omega_2) S_u(\omega_1 + \omega_3) (S_u(\omega_1) + S_u(\omega_3))] \\
&+ S_u(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \mathfrak{L}_{1,2,3}^{\odot} [S_u(\omega_1 + \omega_3) (S_u(\omega_1) + S_u(\omega_3))] \quad (4.325)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_G(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \mathfrak{L}_{1,2,3}^{\odot} \left[(\delta(\omega_2 + \omega_3) + \delta(\omega_1 + \omega_3)) S_u(\omega_2) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega \right] \quad (4.326)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_H(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \mathfrak{L}_{1,2,3}^{\odot} \left[\delta(\omega_2 + \omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega \right] \\
&+ 4\mathfrak{L}_{1,2,3}^{\odot} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1 + \omega_3 + \omega) S_u(\omega_2 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega \right] \quad (4.327)
\end{aligned}$$

Les propriétés d'équivalence entre domaines sont bien sûr toujours vérifiées. Par exemple :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} d_X(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 = r_X(0, 0, 0) \quad (4.328)$$

L'expression du trispectre de la sollicitation ainsi obtenue est parfaitement symétrique par rapport à ses arguments. Ceci est évident en raison des sommations cycliques. Notons cependant que toutes les composantes élémentaires ($X \equiv A, \dots, H$.) du trispectre ne sont pas composées que de termes présentant des sommations cycliques. A l'annexe D, nous avons également reporté quelques développements relatifs à ces termes plus particuliers qui démontrent également la symétrie de l'expression vis-à-vis de leurs arguments. Ces développements présentent moins d'intérêt pour l'instant puisque nous nous intéressons essentiellement aux fonctions D, E, G et H .

En injectant les relations 4.324 à 4.327 dans la relation 4.322, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{Q_f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\gamma^4} = & 16\bar{U}^4 \mathbb{C}_{1,2,3}^\odot [\delta(\omega_2 + \omega_3) S_u(\omega_1) S_u(\omega_3)] \\
& + 16\bar{U}^2 \mathbb{C}_{1,2,3}^\odot [S_u(\omega_2) S_u(\omega_1 + \omega_3) (S_u(\omega_1) + S_u(\omega_3))] \\
& + 16\bar{U}^2 S_u(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \mathbb{C}_{1,2,3}^\odot [S_u(\omega_1 + \omega_3) (S_u(\omega_1) + S_u(\omega_3))] \\
& + 8\bar{U}^2 \mathbb{C}_{1,2,3}^\odot \left[(\delta(\omega_2 + \omega_3) + \delta(\omega_1 + \omega_3)) S_u(\omega_2) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega \right] \\
& + 4\mathbb{C}_{1,2,3}^\odot \left[\delta(\omega_2 + \omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega \right] \\
& + 16\mathbb{C}_{1,2,3}^\odot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1 + \omega_3 + \omega) S_u(\omega_2 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega \right] \quad (4.329)
\end{aligned}$$

Aux ordres 2 et 3, nous avons constaté que les moments centrés résultaient intégralement d'une répartition fréquentielle de l'énergie. A l'ordre 4, la distinction entre cumulant et moment centré nécessite une généralisation du raisonnement. En effet, à l'ordre 4, cette propriété n'est plus vérifiée : une partie du moment centré provient d'une répartition dans le domaine tridimensionnel des fréquences alors qu'une autre partie du moment centré se trouve concentré sur les trois plans $\omega_1 + \omega_2 = 0$, $\omega_2 + \omega_3 = 0$ et $\omega_3 + \omega_1 = 0$. Les contributions énergétiques provenant de chacun d'eux peuvent être assez facilement obtenues :

- pour les termes correspondant au moment centré concentré sur les plans :

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_4^{(a)} &= 3 [16\bar{U}^4 \sigma_u^4 + 4\sigma_u^8 + 8\bar{U}^2 \sigma_u^6 + 8\bar{U}^2 \sigma_u^6] \\
&= 48\bar{U}^4 \sigma_u^4 + 48\bar{U}^2 \sigma_u^6 + 12\sigma_u^8 \quad (4.330)
\end{aligned}$$

- pour les termes correspondant au moment centré réparti dans l'espace tridimensionnel des fréquences :

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_4^{(b)} &= 16\bar{U}^2 (6\sigma_u^6) + 16\bar{U}^2 (6\sigma_u^6) + 16 (3\sigma_u^8) \\
&= 192\bar{U}^2 \sigma_u^6 + 48\sigma_u^8 \quad (4.331)
\end{aligned}$$

On peut bien sûr vérifier que la somme de ces deux contributions permet de retrouver le moment centré d'ordre 4. On peut également constater que la seconde contribution permet de retrouver l'expression exacte du cumulant. Voici donc une observation qui pourrait être démontrée de façon plus générale (pour un ordre quelconque n) : l'expression de la fonction cumulant d'ordre n peut être obtenu en retirant de l'expression complète de la fonction moment de même ordre tous les termes faisant intervenir des fonctions de Dirac.

Dans la suite, nous travaillerons uniquement avec l'expression du trispectre qui permet de retrouver, après intégration sur l'espace tridimensionnel des pulsations, le cumulant

d'ordre 4 :

$$\begin{aligned}
& \frac{Q_f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\gamma^4} \\
= & 16\bar{U}^2 \mathfrak{C}_{1,2,3}^{\odot} [(S_u(\omega_2) + S_u(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)) S_u(\omega_1 + \omega_3) (S_u(\omega_1) + S_u(\omega_3))] \\
& + 16\mathfrak{C}_{1,2,3}^{\odot} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1 + \omega_3 + \omega) S_u(\omega_2 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega \right] \quad (4.332)
\end{aligned}$$

En remontant en sens contraire dans l'établissement de ces relations, on constate facilement que cette expression du trispectre provient du terme $r_E(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ et d'une partie du terme $r_H(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

4.7.4 Réponse de l'oscillateur simple

Nous allons maintenant nous préoccuper de la réponse de l'oscillateur simple soumis au carré d'un processus aléatoire gaussien. Nous venons de voir que l'expression du trispectre de la sollicitation pouvait s'exprimer à l'aide de deux termes d'ordres différents en l'intensité de turbulence. Nous pourrions recommander encore une fois la nécessité de recourir à la prise en compte de ces deux termes en argumentant qu'une amplification dynamique pourrait rendre son importance au second terme (cependant moins énergétique d'un point de vue statique).

Dans le cadre de ce document, nous nous limitons à l'étude de l'oscillateur soumis au carré d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Pour rappel, la densité spectrale de puissance d'un tel processus s'exprime par :

$$S_u(\omega) = \frac{\sigma_u^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \quad (4.333)$$

Conformément à l'expression 4.295, le trispectre de la réponse s'obtient en multipliant celui de la sollicitation par le troisième noyau de Volterra. La principale grandeur que l'on peut retirer du trispectre est le cumulants d'ordre 4, obtenu par intégration. Etant donné que l'intégration est réalisée sur l'entièreté de l'espace tridimensionnel des fréquences, on conçoit aisément que chacun des termes d'une même sommation cyclique donnera le même résultat. Nous nous limiterons donc à calculer l'intégrale de l'argument de la sommation cyclique puis à multiplier par trois le résultat ainsi obtenu. Les intégrales rencontrées dans le cadre de ce document commencent à devenir assez compliquées analytiquement :

$$\begin{aligned}
k_{x_4} = & 48\gamma^4 \bar{U}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (S_u(\omega_2) + S_u(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)) S_u(\omega_1 + \omega_3) \\
& (S_u(\omega_1) + S_u(\omega_3)) K_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\
& + 48\gamma^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1 + \omega_3 + \omega) S_u(\omega_2 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega \quad (4.334)
\end{aligned}$$

L'expression complète du cumulants d'ordre 4 peut être obtenue après de longs développements :

$c_0(\xi)$	$c_0 = 12$
$c_1(\xi)$	$c_1 = 288\xi$
$c_2(\xi)$	$c_2 = 5(31 + 588\xi^2)$
$c_3(\xi)$	$c_3 = 3\xi(919 + 5592\xi^2)$
$c_4(\xi)$	$c_4 = 2(233 + 10001\xi^2 + 29520\xi^4)$
$c_5(\xi)$	$c_5 = 2\xi(3104 + 39141\xi^2 + 66528\xi^4)$
$c_6(\xi)$	$c_6 = (395 + 31256\xi^2 + 183212\xi^4 + 192192\xi^6)$
$c_7(\xi)$	$c_7 = 2\xi(3931 + 79174\xi^2 + 265704\xi^4 + 171648\xi^6)$
$c_8(\xi)$	$c_8 = 2(36 + 6441\xi^2 + 55496\xi^4 + 117752\xi^6 + 43008\xi^8)$
$c_9(\xi)$	$c_9 = 8\xi(72 + 2329\xi^2 + 10979\xi^4 + 14688\xi^6 + 2304\xi^8)$
$c_{10}(\xi)$	$c_{10} = 96\xi^2(9 + 128\xi^2 + 391\xi^4 + 264\xi^6)$
$c_{11}(\xi)$	$c_{11} = 288\xi^3(1 + 11\xi^2 + 24\xi^4)$

TAB. 4.14 – Coefficient permettant d'exprimer les coefficients d'amplification dynamique à l'ordre 4

$$k_{x_4} = 48 \frac{\gamma^4 \bar{U}^2 \sigma_u^6}{\varpi^8} N_1\left(\frac{\varpi}{\alpha}, \xi\right) + 48 \frac{\gamma^4 \sigma_u^8}{\varpi^8} N_2\left(\frac{\varpi}{\alpha}, \xi\right) \quad (4.335)$$

$$= 48 \frac{\gamma^4 \bar{U}^2 \sigma_u^6}{\varpi^8} \left(N_1\left(\frac{\varpi}{\alpha}, \xi\right) + I_u^2 N_2\left(\frac{\varpi}{\alpha}, \xi\right) \right) \quad (4.336)$$

où

$$N_1(\varphi, \xi) = \frac{1}{\xi(1 + 3\xi^2)} \frac{\varphi^3 \sum_{k=0}^{k=11} c_k(\xi) \varphi^k}{D_1(\varphi, \xi)} \quad (4.337)$$

$$D_1(\varphi, \xi) = (1 + \xi\varphi)(1 + 2\xi\varphi)(1 + 2\xi\varphi + \varphi^2)^2(4 + 4\xi\varphi + \varphi^2)(1 + 4\xi\varphi + 4\varphi^2) \\ (1 + 6\xi\varphi + 9\varphi^2)(1 + 6\xi\varphi + (1 + 8\xi^2)\varphi^2)$$

$$N_2(\varphi, \xi) = \frac{1}{8\xi(1 - \xi^2)(1 + 3\xi^2)} \frac{\sum_{k=0}^{k=19} d_k(\xi) \varphi^k}{D_{22}(\varphi, \xi)} \quad (4.338)$$

$$D_2(\varphi, \xi) = (1 + \xi\varphi)(1 + 2\xi\varphi + \varphi^2)(4 - 4\xi\varphi + \varphi^2)(4 + 4\xi\varphi + \varphi^2)(16 + 8\xi\varphi + \varphi^2) \\ (4 + 12\xi\varphi + 9\varphi^2)(4 + 20\xi\varphi + 25\varphi^2)(4 + 12\xi\varphi + (1 + 8\xi^2)\varphi^2) \\ (4 + 20\xi\varphi + (9 + 16\xi^2)\varphi^2)(4 + 20\xi\varphi + (1 + 24\xi^2)\varphi^2)$$

et les coefficients $c_k(\xi)$ sont donnés au tableau 4.14. Nous allons voir que l'expression exacte de N_2 est moins intéressante. Les coefficients $d_k(\xi)$ sont encore plus lourds et sont repris à l'annexe A.

Les fonctions $N_1(\varphi, \xi)$ et $N_2(\varphi, \xi)$ sont représentées à la figure 4.46. Tout comme les coefficients d'amplification dynamique obtenus aux ordres inférieurs ($M_1(\varphi, \xi)$ et $M_2(\varphi, \xi)$, par exemple), ces fonctions présentent une croissance rapide pour les faibles pulsations réduites φ , un maximum pour une pulsation naturelle de l'ordre de 2α et ensuite une décroissance plus ou moins lente vers un comportement asymptotique non nul. Ce comportement asymptotique correspond à des structures très raides et doit donc

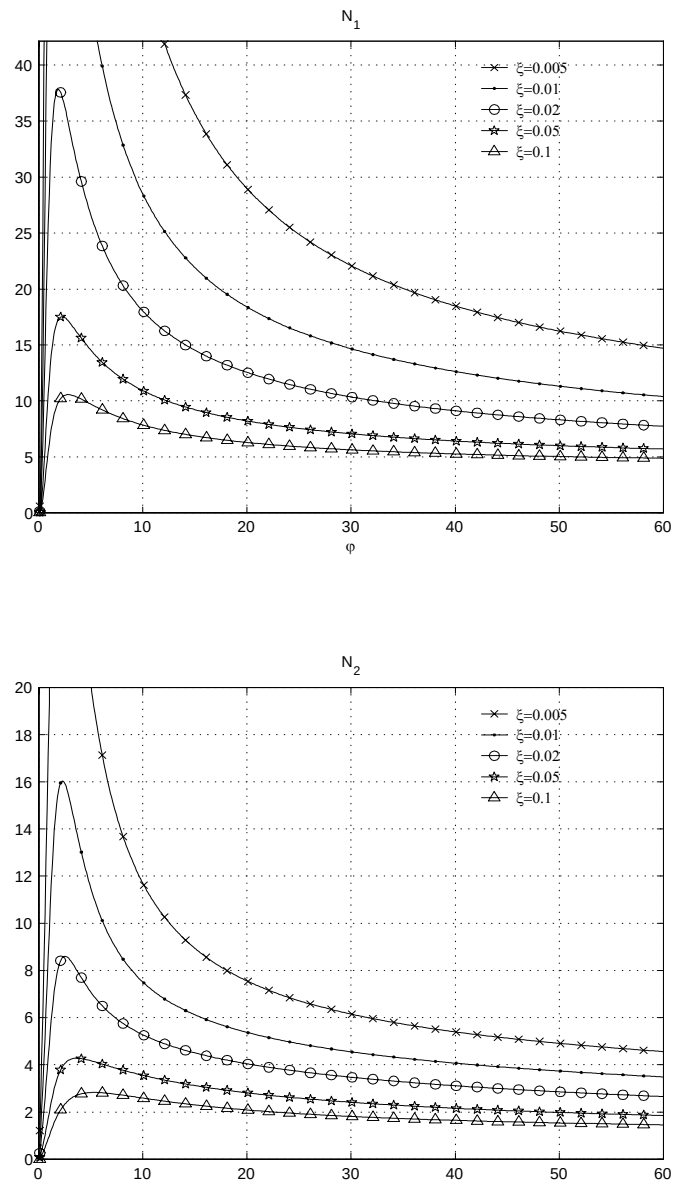


FIG. 4.46 – Composantes du coefficient d'amplification dynamique à l'ordre 4

permettre de retrouver la réponse quasi-statique. On peut calculer assez facilement que :

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} N_1(\varphi, \xi) = 4 \quad (4.339)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} N_2(\varphi, \xi) = 1 \quad (4.340)$$

On vérifie ainsi que le cumulante obtenu pour des structures très raides est celui de la sollicitation divisé par la quatrième puissance de la raideur structurelle :

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} k_{x_4} = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} 48 \frac{\gamma^4 \bar{U}^2 \sigma_u^6}{\varpi^8} (4 + I_u^2) = \frac{\gamma^4 \bar{U}^4 \sigma_u^4}{\varpi^8} 192 I_u^2 + \frac{\gamma^4 \bar{U}^4 \sigma_u^4}{\varpi^8} 48 I_u^4 \quad (4.341)$$

La figure n'est valable que pour un processus aléatoire à corrélation exponentielle. On peut constater que l'utilisation de cette densité spectrale à comportement monotonément décroissant permet d'obtenir une amplification dynamique $N_2(\varphi, \xi)$ environ trois fois moindre que le coefficient d'amplification dynamique principal $N_1(\varphi, \xi)$. Etant donné que le coefficient d'amplification $N_2(\varphi, \xi)$ n'est jamais que le coefficient d'un terme d'ordre supérieur en l'intensité de turbulence, dans les applications pratiques qui nous intéressent, nous pouvons écrire en très bonne approximation :

$$k_{x_4} = 48 \frac{\gamma^4 \bar{U}^2 \sigma_u^6}{\varpi^8} N_1\left(\frac{\varpi}{\alpha}, \xi\right) \quad (4.342)$$

A l'ordre 2, nous avons démontré que l'équivalent de cette simplification ne pouvait pas être valable en toute généralité. C'est le cas par exemple pour une densité spectrale de turbulence en bande étroite. Par contre, elle peut être appliquée pour les densités spectrales monotonément décroissantes. Cette réflexion pourrait être également menée à l'ordre 4, en investiguant davantage les manifestations physiques de l'équivalent à cet ordre de l'autoconvolution de la densité spectrale $(\int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1 + \omega_3 + \omega) S_u(\omega_2 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega)$.

Ne serait-ce qu'en raison de leurs unités, les moments centrés d'ordres supérieurs sont souvent difficiles à interpréter et on leur préfère généralement des grandeurs adimensionnelles associées. A l'ordre 4, il s'agit du kurtosis (γ_4) et du coefficient d'excès (γ_e) obtenus par :

$$\gamma_{e_x} = \gamma_{4_x} - 3 = \frac{\tilde{m}_{x_4}}{\tilde{m}_{x_2}^2} - 3 = \frac{k_{x_4}}{\tilde{m}_{x_2}^2} \quad (4.343)$$

où le moment centré d'ordre 2 $\tilde{m}_2$ représente la variance du processus aléatoire. Son expression a été calculée au chapitre précédent (Eq. 3.63). Par souci de simplicité, nous ne conservons que le terme d'ordre inférieur en l'intensité de turbulence :

$$\sigma_x^2 = \frac{2\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\xi \varpi^4} \frac{\varphi(1 + 2\xi\varphi)}{(1 + 2\xi\varphi + \varphi^2)} \quad (4.344)$$

Le cumulante d'ordre 4 de la réponse de l'oscillateur soumis au carré du processus d'Ornstein-Uhlenbeck s'écrit donc :

$$\gamma_{e_x} = 12 I_u^2 \frac{\xi}{(1 + 3\xi^2)} \frac{\varphi^2 \sum_{k=0}^{k=11} c_k(\xi) \varphi^k}{D_1(\varphi, \xi) (1 + 2\xi\varphi)^2 (1 + 2\xi\varphi + \varphi^2)^2} \quad (4.345)$$

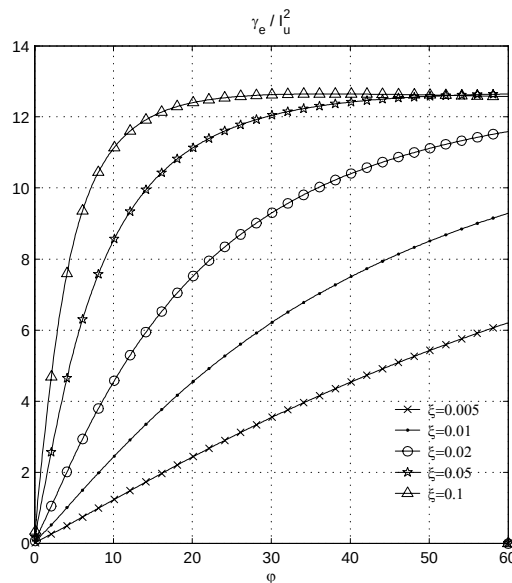


FIG. 4.47 – Représentation du coefficient d'excès de la réponse d'un oscillateur simple soumis à une turbulence caractérisée par un processus à corrélation exponentielle.

La figure 4.47 est une représentation du rapport γ_{e_x}/I_u^2 . La ressemblance de cette figure avec le rapport γ_{3_x}/I_u (Fig. 4.33) est assez surprenante. Il est en effet assez impressionnant que les deux figures qui résumeraient le mieux les effets d'ordres 3 et 4 soient aussi semblables.

Cette similitude permet de renvoyer aux commentaires qui ont été donné à l'ordre 3 pour l'analyse de cette figure. En résumé, nous avons annoncé que l'évolution (presque) monotone du coefficient d'amplification dynamique depuis les structures souples jusqu'aux structures les plus raides aurait pu être attendue. En effet, les structures souples (ou faiblement amorties) présentent une réponse essentiellement dynamique et donc gaussienne, tandis que les structures raides présentent une réponse essentiellement quasi-statique et donc de caractéristiques statistiques identiques à la sollicitation ($\gamma_{e_x} = \gamma_{e_f} = 12I_u^2$, cf Equ. 4.318).

4.8 Résumé de l'analyse fréquentielle exacte

Jusqu'à ce point, nous avons réalisé l'étude dans le domaine fréquentiel de l'oscillateur simple soumis au carré d'un processus aléatoire gaussien. L'application de la linéarisation stochastique (Chap.3) à ce problème reflète la démarche menée en bureau d'études pour l'analyse des ouvrages d'art. Nous avons vu que l'application de cette linéarisation revenait à négliger le terme de chargement non linéaire dans l'expression de la sollicitation. L'objectif du présent chapitre était d'étudier les effets de ce terme complémentaire de chargement.

À l'ordre 2, nous avons vu que la variance de la réponse structurale pouvait, pour certains types de chargement particuliers, être significativement affectée par ce terme

de chargement. Dans le cadre des applications qui nous concernent, la densité spectrale de vent est une fonction monotonément et rapidement décroissante de la pulsation. Ces conditions sont telles que le complément de densité spectrale attribuable au terme de chargement non linéaire n'engendre pas de modification significative de la réponse. L'ordre de grandeur de l'erreur commise sur l'estimation de la variance de la réponse est de I_u^2 .

Le terme de chargement non linéaire rend la sollicitation de la structure non gaussienne. Il en est donc de même de la réponse structurelle ; l'estimation des moments statistiques d'ordres supérieurs est donc nécessaire à la caractérisation exacte de la réponse. Nous avons également présenté une méthode d'analyse qui permet de déterminer les coefficients de dissymétrie, à l'ordre trois, et d'excès, à l'ordre quatre, qui permettent de représenter l'écart entre le processus non gaussien réellement observable et le processus gaussien qui aurait la même moyenne et variance.

À l'ordre trois, nous avons montré que le coefficient de dissymétrie obtenu varie dans l'intervalle $[0, 3I_u]$ selon le rapport entre les contributions quasi-statique et dynamique de la réponse. Il est assez sain de pouvoir constater que l'évolution du coefficient de dissymétrie en fonction de la raideur de la structure est monotone. Ceci provient à nouveau de la forme assez particulière des densités spectrales des vitesses de vent.

Le coefficient adimensionnel représentant le cumulatif d'ordre 4 de la réponse, le coefficient d'excès, est de nouveau proportionnel au carré de l'intensité de turbulence. Nous avons montré que ce coefficient se trouvait dans l'intervalle $[0, 12I_u^2]$; tout comme à l'ordre 3, les structures très souples correspondent à la borne inférieure de cet intervalle, alors que les structures raides correspondent à la borne supérieure.

4.9 Grandeurs extrémales

Nous nous sommes contentés de déterminer les coefficients de dissymétrie et d'excès de la réponse sans préciser de quelle manière ces grandeurs allaient nous être utiles. En effet, on se pose maintenant la question de savoir de quelle façon un coefficient de dissymétrie, ou d'excès peut être utilisé dans le dimensionnement d'une structure. Pour répondre à cette question, nous devons revenir à la théorie élémentaire des processus aléatoires ([16], [80], [87]). Souvenons-nous que l'objectif d'une analyse stochastique est la détermination de la variance de la réponse mais également de la fréquence de passage du processus par des seuils fixés, par des maxima relatifs et par des maxima absolus sur une période d'observation fixée.

Dans la théorie des processus aléatoires, les développements qui mènent à l'établissement de ces grandeurs sont réalisés pour des processus gaussiens. C'est pour cette raison d'ailleurs que l'expression communément utilisée du facteur de pointe (3.55) ne dépend que des caractéristiques statistiques d'ordre 2 de la réponse.

Nous comprenons donc de ce fait qu'il est impératif de devoir redévelopper les équivalents non gaussiens de cette théorie élémentaire. On attribue souvent les prémices de ces développements à C. Soize ([86]) qui a présenté une théorie permettant d'estimer le facteur de pointe d'un processus aléatoire en se basant sur un développement en série de la densité de probabilité conjointe entre déplacement et vitesse. Cette théorie a mis quelques années avant d'être communément utilisée. Elle sera présentée brièvement au paragraphe 4.9.1.

Dans le courant des années 80, les développements de théories plus complexes permettant de prendre en compte les processus non gaussiens deviennent à la mode. Quelques groupes de chercheurs travaillent sur des formulations différentes, toujours en visant pour objectif l'estimation des facteurs de pointe de processus aléatoires non gaussiens. ([53]).

Sur base des développements de Grigoriu, Kareem et Gurley ont proposé une méthode ([?]) qui est maintenant couramment utilisée dans la communauté scientifique. Elle se base sur une représentation du processus aléatoire gaussien par une transformation non linéaire d'un processus aléatoire normal. Comme toutes les théories existantes, celle de Kareem et Gurley se base sur des hypothèses, qui semblent néanmoins donner les meilleurs résultats. Au paragraphe 4.9.2, nous allons présenter les lignes importantes des développements qui ont permis d'arriver à l'expression d'un facteur de pointe dépendant des coefficients de dissymétrie et d'excès du processus étudié. Dans les développements qui suivent, il n'y a d'original que l'établissement des conditions sous lesquelles la méthode proposée par les auteurs est d'application. Aussi, nous vérifierons que cette théorie est applicable dans le cadre du problème que nous étudions analytiquement.

4.9.1 Décomposition en série de Gram-Charlier

La fonction de répartition des grandeurs extrêmes d'un processus aléatoire peut s'exprimer, pour les grandes valeurs de la variable x , par :

$$P_{u_{ex}}(x) = e^{-\nu_0 T e^{-\frac{x^2}{2}}} = e^{-\nu(x)T} \quad (4.346)$$

où $\nu(x) = \nu_0 e^{-\frac{x^2}{2}}$ représente la fréquence de passage du processus aléatoire par le seuil de niveau x et ν_0 représente la fréquence de passage par le seuil $x = 0$ (avec vitesse positive). La méthode proposée par Soize pour obtenir une estimation des statistiques des grandeurs extrêmes se base sur cette relation. La formule de Rice donne une expression rigoureuse de cette fréquence de passage par un seuil quelconque :

$$\nu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x} p_{x\dot{x}}(x, \dot{x}) d\dot{x} \quad (4.347)$$

où $p_{x\dot{x}}(x, \dot{x})$ représente la densité de probabilité conjointe entre les variables aléatoires x et $\dot{x}$. La connaissance de cette fonction est souvent imparfaite. Seuls les moments croisés du type $m_{pq} = E[x^p \dot{x}^q]$ sont généralement connus. L'objectif de la méthode proposée par Soize consiste donc à reformer une densité de probabilité conjointe $p_{x\dot{x}}(x, \dot{x})$ qui soit aussi proche que possible de la densité de probabilité réelle. L'auteur suggère d'approcher cette densité de probabilité conjointe entre déplacement et vitesse à l'aide d'une série d'Edgeworth (ou de Gram-Charlier) :

$$p_{x\dot{x}}(x, \dot{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{ij} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} \phi_2(x, \dot{x}) \quad (4.348)$$

où $\phi_2(x, \dot{x})$ représente la densité de probabilité conjointe de deux variables aléatoires gaussiennes. Etant donné que les moments d'ordres supérieurs à 4 sont généralement trop coûteux à déterminer, le développement est limité à l'ordre 4. Dans cette expression, les coefficients C_{ij} sont choisis de sorte que les moments statistiques associés à la densité de probabilité conjointe approchée correspondent aux moments statistiques calculés.

La formule de Rice (Eq. 4.347) permet alors d'obtenir une expression analytique de la fréquence de passage par un seuil quelconque. L'introduction de cette expression dans la relation 4.346 permet d'obtenir la fonction de répartition des extrema du processus aléatoire non gaussien étudié. La moyenne statistique de cette répartition rapportée à l'écart type de la réponse permet d'obtenir une expression du facteur de pointe du processus aléatoire non gaussien. Les développements nécessaires pour arriver jusqu'à ce point sont assez longs. Nous ne donnons ici que le résultat obtenu par Soize :

$$g = \beta + \frac{\gamma + \ln(1 + \varphi)}{\beta} \quad (4.349)$$

où $\beta = \sqrt{2 \ln(\nu_0 T)}$ et $\varphi = a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3 + a_4\beta^4$. Les valeurs des coefficients de ce polynôme sont :

$$a_0 = \frac{3 \frac{m_{40}}{m_{20}^2} - 6 \frac{m_{22}}{m_{20}m_{02}} - \frac{m_{04}}{m_{02}^2}}{24} \quad (4.350)$$

$$a_1 = \frac{\frac{m_{12}}{m_{02}\sqrt{m_{20}}} - \frac{m_{30}}{m_{20}\sqrt{m_{20}}}}{2} \quad (4.351)$$

$$a_2 = \frac{\frac{m_{22}}{m_{20}m_{02}} - \frac{m_{40}}{m_{20}^2} + 2}{4} \quad (4.352)$$

$$a_3 = \frac{m_{30}}{6m_{20}\sqrt{m_{20}}} \quad (4.353)$$

$$a_4 = \frac{\frac{m_{40}}{m_{20}^2} - 3}{24} \quad (4.354)$$

Les moments m_{20} et m_{02} sont faciles à estimer puisqu'il s'agit de la variance du déplacement et de la variance de la vitesse. Le moment m_{30} est le moment d'ordre 3 de la réponse du système étudié. Nous avons vu aux paragraphes précédents comment obtenir cette grandeur. Le moment m_{03} est le moment d'ordre 3 de la vitesse, obtenus par intégration du bispectre de vitesse. Remarquons que la formulation proposée par Soize nécessite de travailler en moments totaux ; les expressions complètes des bispectres et trispectres doivent donc être conservées.

L'expression du facteur de pointe d'un processus aléatoire non gaussien nécessite également l'estimation de moments croisés entre vitesse et déplacement. Au chapitre suivant, nous allons présenter une méthode d'analyse (dans le domaine temporel) où ces moments croisés découlent naturellement.

Dans l'approche fréquentielle qui vient d'être présentée, l'estimation de ces moments croisés n'est pas nécessaire. Ils peuvent par contre être estimés assez facilement. Exactement comme la corrélation entre déplacement et vitesse peut être prise en compte en intégrant la densité spectrale croisée entre déplacement et vitesse, les moments croisés d'ordres supérieurs peuvent être obtenus par une intégrale (dans un espace de fréquence de dimensions adéquates) d'un bispectre ou trispectre croisé entre déplacement et vitesse.

Imaginons par exemple que nous devons déterminer le moment croisé m_{22} entre déplacement et vitesse. Ce moment résulte de l'intégration du trispectre croisé entre déplacement et vitesse $Q_{xx\dot{x}}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, lui même obtenu à partir de la transformée de Fourier de la fonction de tricorrélation croisée entre ces grandeurs :

$$T_{xx\dot{x}}(\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3) = E[x(t)x(t + \Delta t_1)\dot{x}(t + \Delta t_2)\dot{x}(t + \Delta t_3)] \quad (4.355)$$

Cette fonction de tricorrélation peut s'exprimer à partir de la fonction de tricorrélation des déplacements uniquement. En effet, il suffit de revenir à la définition de la dérivée, puis d'invertir les opérateurs de passage à la limite et d'espérance mathématique pour trouver de manière assez immédiate :

$$\begin{aligned} T_{xxx\dot{x}}(\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3) &= \frac{\partial^2}{\partial \Delta t_2 \partial \Delta t_3} E[x(t) x(t + \Delta t_1) x(t + \Delta t_2) x(t + \Delta t_3)] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \Delta t_2 \partial \Delta t_3} T_{xxxx}(\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3) \end{aligned} \quad (4.356)$$

Le trispectre croisé qui nous intéresse maintenant s'exprime donc par :

$$\begin{aligned} Q_{xxx\dot{x}}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} T_{xxx\dot{x}}(\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3) e^{-i\omega_1 \Delta t_1} e^{-i\omega_2 \Delta t_2} e^{-i\omega_3 \Delta t_3} d\Delta t_1 d\Delta t_2 d\Delta t_3 \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 T_{xxxx}(\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3)}{\partial \Delta t_2 \partial \Delta t_3} e^{-i\omega_1 \Delta t_1} e^{-i\omega_2 \Delta t_2} e^{-i\omega_3 \Delta t_3} d\Delta t_1 d\Delta t_2 d\Delta t_3 \end{aligned} \quad (4.357)$$

En intégrant deux fois successivement par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned} Q_{xxx\dot{x}}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= (i\omega_2)(i\omega_3) \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} T_{xxxx} e^{-i\omega_1 \Delta t_1} e^{-i\omega_2 \Delta t_2} e^{-i\omega_3 \Delta t_3} d\Delta t_1 d\Delta t_2 d\Delta t_3 \\ &= -\omega_2 \omega_3 Q_{xxxx}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{aligned} \quad (4.358)$$

La méthode d'estimation du facteur de pointe d'un processus aléatoire non gaussien s'intègre assez facilement dans le cadre d'une approche temporelle. Dans le domaine fréquentiel, on peut voir que cette méthode requiert une quantité assez importante de calculs supplémentaires. Ceci justifie le recours à la méthode présentée au paragraphe suivant.

Il convient également de remarquer que l'approximation de la densité de probabilité conjointe réelle à l'aide d'une série de Edgeworth peut donner des densités de probabilité négatives sur certaines zones. Ceci rend donc la physique de la méthode assez douteuse ; c'est un argument important qui est souvent présenté pour décolorer l'aspect inventif de la démarche.

4.9.2 Transformation cubique

La méthode que nous avons appliquée dans le reste du document est l'approche proposée par Kareem et Gurley. Les paragraphes suivants donnent quelques renseignements sur la démarche suivie par les auteurs pour établir une expression assez simple du facteur de pointe d'un processus aléatoire non gaussien.

Etude d'une variable aléatoire

Dans un premier temps, nous allons nous limiter à étudier une variable aléatoire, le déplacement de l'oscillateur simple par exemple. La loi de probabilité exacte qui caractérise cette variable aléatoire est a priori inconnue. Cela pourrait être une loi lognormale, Gumbel, Frechet, beta ... mais en tout cas pas une loi normale. Tout ce que nous connaissons de la variable aléatoire, ce sont ses quatre premiers cumulants. Il paraît donc assez logique de choisir l'une de ces distributions de probabilité et d'imposer les paramètres qui y interviennent de façon à retrouver les mêmes cumulants jusqu'à l'ordre quatre. En procédant de la sorte, nous pouvons donc obtenir *une* expression (parmi d'autres) de la densité de probabilité de la variable étudiée.

La complexité des développements à mener pour l'étude du processus aléatoire est directement tributaire de la complexité de la forme analytique de la densité de probabilité qui a été choisie. L'originalité de la méthode proposée par Kareem et Gurley réside en le choix d'une densité de probabilité qui permette des développements analytiques subséquents assez simples. Leur idée consiste à caractériser la variable aléatoire par une loi de probabilité à quatre paramètres, assez particulière : il s'agit de la densité de probabilité du cube d'une variable aléatoire. Soit u une variable aléatoire distribuée normalement, et une nouvelle variable aléatoire x obtenue par :

$$x(u) = \frac{\alpha}{b} \left[\frac{u^3}{3} + au^2 + (b-1)u - a \right] \quad (4.359)$$

Comme annoncé, les paramètres a , b et α sont choisis de sorte que les moments jusqu'à l'ordre 4 de la variable x ainsi obtenue correspondent aux moments qui ont été déterminés pour la variable aléatoire étudiée. La densité de probabilité de la variable aléatoire x s'exprime par :

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2(x)}{2}} \frac{du}{dx} \quad (4.360)$$

où $u(x)$ est l'inverse de la relation 4.359, soit :

$$u(x) = \left[\zeta(x) + \sqrt{c + \zeta^2(x)} \right]^{1/3} + \left[\zeta(x) - \sqrt{c + \zeta^2(x)} \right]^{1/3} - a \quad (4.361)$$

où $c = (b-1-a^2)^3$ et $\zeta(x) = 1.5b \left(a + \frac{x}{\alpha} \right) - a^3$. Pour que cette relation inverse soit univoque, il faut que $b-1-a^2 \geq 0$. Cette condition est assez immédiate et s'obtient en imposant que la cubique ne possède pas d'extremum relatif réel. Il est impératif que cette condition soit satisfaite, sans quoi l'expression 4.360 n'est plus valable.

Les moments statistiques de la variable aléatoire x peuvent être déterminés à partir de l'expression de sa densité de probabilité :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} p_x(x) dx &= 1 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x p_x(x) dx &= 0 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_x(x) dx &= \left(\frac{\alpha}{b}\right)^2 \frac{2 + 6a^2 + 3b^2}{3} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 p_x(x) dx &= 2 \left(\frac{\alpha}{b}\right)^3 a (6 + 4a^2 + 6b + 3b^2) \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 p_x(x) dx &= \\
&\left(\frac{\alpha}{b}\right)^4 \frac{124 + 180a^4 + 144b + 84b^2 + 24b^3 + 9b^4 + 12a^2 (62 + 48b + 15b^2)}{3}
\end{aligned}$$

Supposons, pour simplifier les développements, que la variable aléatoire x ait été normée et centrée. Les valeurs des paramètres α , a et b sont alors choisies de sorte que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_x(x) dx = 1 \quad (4.362)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 p_x(x) dx = \gamma_3 \quad (4.363)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 p_x(x) dx = \gamma_4 \quad (4.364)$$

où γ_3 et γ_4 sont les coefficients de dissymétrie et de kurtosis déterminés lors de l'analyse de la structure. Les paramètres α , a et b résultent donc de la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{\alpha}{b}\right)^2 \frac{2 + 6a^2 + 3b^2}{3} \\
\gamma_3 &= 2 \left(\frac{\alpha}{b}\right)^3 a (6 + 4a^2 + 6b + 3b^2) \\
\gamma_4 &= \left(\frac{\alpha}{b}\right)^4 \frac{124 + 180a^4 + 144b + 84b^2 + 24b^3 + 9b^4 + 12a^2 (62 + 48b + 15b^2)}{3}
\end{aligned} \quad (4.365)$$

La résolution analytique de ce système est assez compliquée. Au moins, on désire que la première relation soit satisfaite. Pour qu'il en soit ainsi, on pose :

$$a = \frac{h_3}{3h_4}; b = \frac{1}{3h_4}; \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 2h_3^2 + 6h_4^2}} \quad (4.366)$$

En effet, en remplaçant dans la première des équations 4.365 α , a et b par ces valeurs, l'équation est trivialement satisfaite. Il ne reste donc finalement qu'à résoudre un système de deux équations à deux inconnues (h_3 et h_4) :

$$\gamma_3 = \frac{2h_3 (3 + 4h_3^2 + 18h_4 + 54h_4^2)}{\left(\sqrt{1 + 2h_3^2 + 6h_4^2}\right)^3} \quad (4.367)$$

$$\gamma_4 = \frac{3 (1 + 20h_3^4 + 8h_4 + 84h_4^2 + 432h_4^3 + 1116h_4^4 + 4h_3^2 (5 + 48h_4 + 186h_4^2))}{(1 + 2h_3^2 + 6h_4^2)^2} \quad (4.368)$$

Kareem et Gurley proposent une solution approchée de ce système d'équations :

$$h_3 = \frac{\gamma_3}{4 + 2\sqrt{1 + 1.5\gamma_e}} \quad (4.369)$$

$$h_4 = \frac{\sqrt{1 + 1.5\gamma_e} - 1}{18} \quad (4.370)$$

Cette solution approchée peut éventuellement servir de condition initiale pour une résolution itérative du système d'équations non linéaires. Dans les applications futures, nous utiliserons cette méthode (méthode itérative de Newton-Raphson, calcul des dérivées numériquement). Pour les faibles coefficients de dissymétrie et d'excès que nous rencontrerons, deux ou trois itérations sont largement suffisantes pour arriver à convergence. Le critère de convergence est un écart relatif absolu de moins de 10^{-5} entre deux itérés successifs et vérifié pour chacune des deux variables séparément.

Les équations 4.366, 4.369 et 4.370 permettent d'écrire la condition d'applicabilité²⁹ $b - 1 - a^2 \geq 0$ de la méthode en terme du coefficient de dissymétrie et du coefficient d'excès de la variable étudiée. Après quelques simplifications, on trouve que la méthode est applicable, pour autant que :

$$|\gamma_3| \leq \frac{1}{3} \left(1 - 1.5\gamma_e - \sqrt{1 + 1.5\gamma_e} \right) \sqrt{\frac{6}{\sqrt{1 + 1.5\gamma_e} - 1} - 1} \quad (4.371)$$

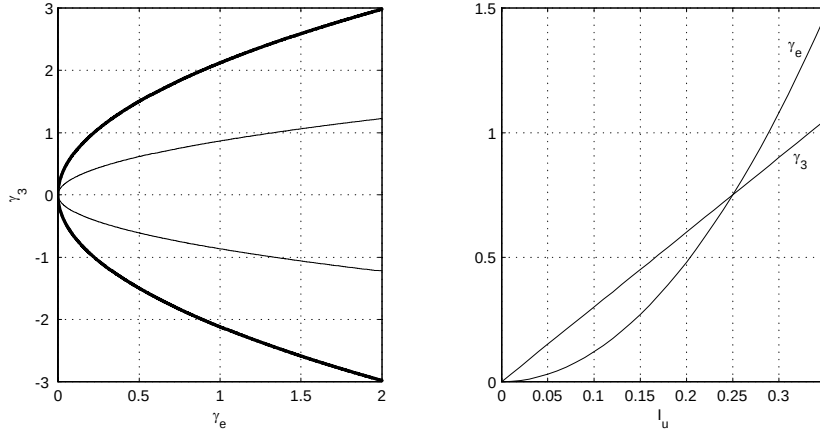


FIG. 4.48 – Vérification de l'applicabilité de la méthode pour la sollicitation étudiée

Cette relation limite est représentée en trait gras à la figure 4.48. Les couples de points (γ_3, γ_e) pour lesquels la méthode est applicable sont situés entre les deux courbes en gras. Dans le problème que nous étudions depuis le début du document, nous avons

²⁹Cette limite d'applicabilité de la méthode n'est pas présentée par les auteurs. Ceci peut s'avérer assez pervers dans la mesure où le système d'équations non linéaire ne possède, dans certains cas, pas de solution réelle, alors que la solution approchée permet toujours d'obtenir un résultat (du moins tant que $\gamma_4 > 0$). L'utilisation de la solution approchée permet donc par exemple de calculer un facteur de pointe pour l'importe quel processus non gaussien. Cette grandeur ne peut cependant pas être représentative dans la mesure où la transformation non linéaire choisie n'est plus bijective!

vu que les coefficients de dissymétrie et d'excès de la sollicitation pouvaient s'exprimer par :

$$\gamma_3 \simeq 3I_u \quad (4.372)$$

$$\gamma_e \simeq 12I_u^2 \quad (4.373)$$

Ces relations sont représentées sur la partie droite du graphique. En éliminant le paramètre I_u entre ces deux relations, on peut obtenir les couples de coefficients adimensionnels (γ_3, γ_e) associés à la sollicitation. Les courbes $\gamma_3(\gamma_e)$ ainsi obtenues sont représentées sur la partie gauche du graphique. On peut constater que le modèle de variable aléatoire non gaussienne proposé par Kareem et Gurley est d'application pour représenter la sollicitation.

Une démarche similaire peut être entreprise pour les caractéristiques statistiques de la réponse. Aux figures 4.33 et 4.47, nous avons présenté les valeurs prises par les coefficients de dissymétrie et d'excès. La ressemblance entre les formes des courbes obtenues a déjà été soulignée. Cette ressemblance pourrait également être constatée en reportant dans un diagramme (γ_3, γ_e) les points qui correspondent aux mêmes pulsations propres et aux mêmes taux d'amortissement. En effet, les couples de points ainsi obtenus s'alignent relativement bien sur la droite $\gamma_3 = \gamma_e/4I_u$. Cette relation que l'on sait être applicable pour la sollicitation et donc également pour les structures raides semble donc pouvoir aussi s'appliquer aux structures souples.

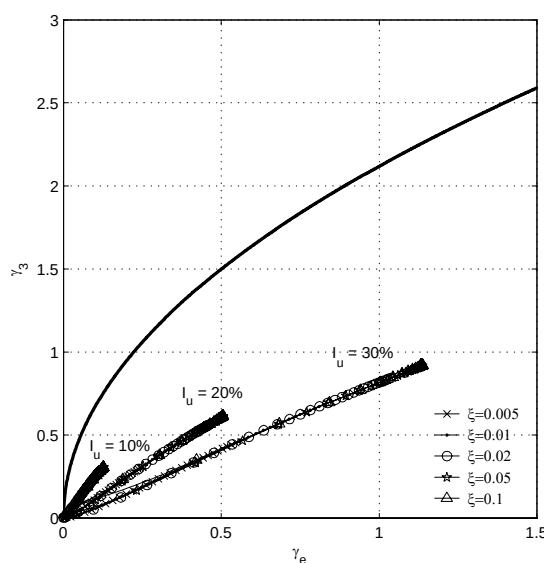


FIG. 4.49 – Vérification de l'applicabilité de la méthode pour la réponse du système étudié

A la figure 4.49, nous avons représenté les couples de points (γ_3, γ_e) associés à la réponse de l'oscillateur. Nous venons de justifier la forme de ces courbes³⁰. L'extrémité supérieure de chacune d'elles correspond à la courbe que nous avons tracée pour la

³⁰Notons cependant qu'un agrandissement dans le voisinage de l'origine (réponse de structures souples ou peu amorties) montre que les couples représentatifs ne s'alignent pas tout à fait.

sollicitation (Fig. 4.48). On peut constater que le modèle de processus aléatoire non gaussien proposé par Kareem et Gurley est applicable à la réponse de la structure que nous étudions.

Nous présentons, à la figure 4.50 un exemple d'application du modèle de variable aléatoire non gaussienne. La variable qui doit être représentée possède les caractéristiques $\gamma_3 = 0.6$ et $\gamma_e = 0.6$. La résolution du système d'équation (4.367, 4.368) présenté ci-avant permet de déterminer les paramètres a , b et α qui transforment une distribution normale en une distribution non gaussienne ayant les moments d'ordre 3 et 4 voulus ($a = 6.70, b = 67.8, \alpha = 0.990$).

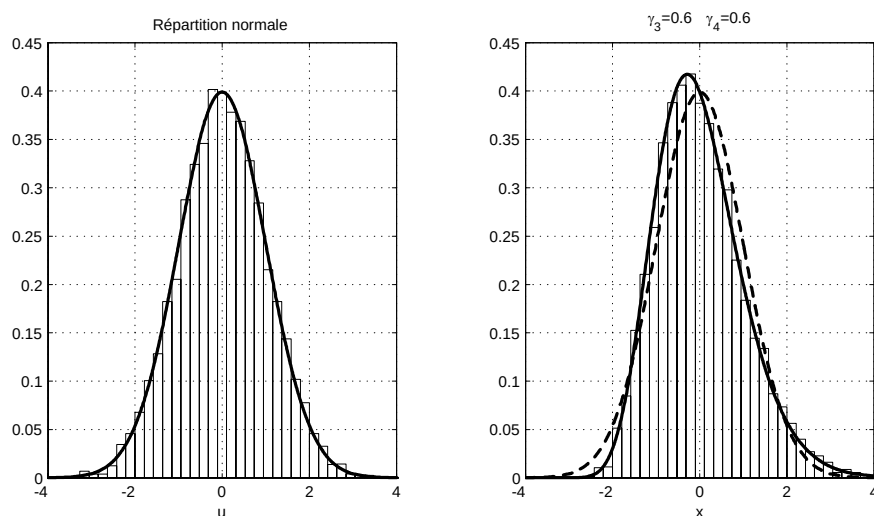


FIG. 4.50 – Exemple de modélisation d'une variable aléatoire par transformation cubique d'une variable normale

Sur le graphique de droite, la densité de probabilité de la variable non gaussienne a pu être tracée (Eq. 4.360). Pour faciliter la comparaison, la densité de probabilité normale a également été reportée. Bien que les variables possèdent toutes deux la même variance (unitaire) et la même moyenne (nulle), on peut constater que les excursions dans le domaine des grandes valeurs de x sont plus fréquentes pour le processus non gaussien que pour le processus gaussien.

Pour compléter l'illustration, l'histogramme d'une série de 7500 valeurs distribuées normalement est reporté sur la gauche du graphique. La transformation non linéaire (4.359) de cette série de valeurs permet de retrouver une simulation de la variable aléatoire non gaussienne. L'histogramme de la série ainsi obtenue est reporté sur la droite du graphique. On peut vérifier qu'il correspond très bien avec la densité de probabilité de la variable non gaussienne. Ces histogrammes constituent les équivalents statistiques des courbes continues (densités de probabilité) fournies par la théorie des probabilités.

Si la variable aléatoire x était effectivement gaussienne, les paramètres γ_3 et γ_e seraient nuls. La solution approchée du système d'équations non linéaires correspond dans

ce cas à la solution exacte : $h_3 = 0$, $h_4 = 0$ et la transformation cubique se limite à :

$$\begin{aligned} x &= 3h_4 \left[\frac{u^3}{3} + au^2 + \left(\frac{1}{3h_4} - 1 \right) u - \frac{h_3}{3h_4} \right] \\ &= h_4 u^3 + 3h_4 a u^2 + (1 - 3h_4) u - h_3 \\ &= u \end{aligned} \quad (4.374)$$

Ceci montre que la transformation considérée dégénère correctement lorsque le processus étudié est gaussien. Cette propriété est évidemment importante dans la mesure où les processus que nous étudions sont faiblement non gaussiens.

Etude d'un processus aléatoire

La démarche qui vient d'être menée pour la représentation d'une variable non gaussienne peut maintenant être utilisée pour la détermination des facteurs de pointe. Pour un processus gaussien, nous savons que la fonction de répartition des grandeurs extrêmes est donnée par :

$$P_{u_{ex}}(u) = e^{-N(1-P_{u_{max}}(u))} \quad (4.375)$$

où $P_{u_{max}}(u)$ représente la fonction de répartition des maxima relatifs (3.52). Dans cette relation, $N = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} T$ représente le nombre moyen de maxima relatifs rencontrés sur l'intervalle de temps $[0; T]$. Pour les grandes valeurs de la variable u , l'approximation suivante (hypothèse de Gumbel) est généralement formulée :

$$1 - P_{u_{max}}(u) \simeq \sqrt{1 - \varepsilon^2} e^{-\frac{u^2}{2}} = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (4.376)$$

ce qui permet d'écrire :

$$P_{u_{ex}}(u) = e^{-\sqrt{\frac{m_2}{m_0}} T e^{-\frac{u^2}{2}}} = e^{-\nu_0 T e^{-\frac{u^2}{2}}} \quad (4.377)$$

Cette expression de la fonction de répartition des grandeurs extrêmes est assez pratique puisqu'elle ne fait intervenir que les moments spectraux jusqu'à l'ordre 2. Ceci signifie donc également que la connaissance de la fréquence de passage par zéro $\nu_0 = \sqrt{m_2/m_0}$ est suffisante pour déterminer les caractéristiques statistiques des extrema ; le calcul de la fréquence de passage par un maximum relatif n'est donc pas nécessaire.

En se basant sur la transformation non linéaire cubique, la fonction de répartition des extrema du processus aléatoire non gaussien x peut être facilement obtenue :

$$P_{x_{ex}}(x) = e^{-\nu_0 T e^{-\frac{u(x)^2}{2}}} \quad (4.378)$$

Cette relation est valable sous les mêmes limites d'applicabilité que celles présentées précédemment puisqu'un extremum de u ne correspond à un extremum de x que si la relation $x(u)$ est monotone. La densité de probabilité des extrema de x s'obtient en dérivant la fonction de répartition :

$$p_{x_{ex}}(x) = \frac{dP_{x_{ex}}(x)}{dx} \quad (4.379)$$

et finalement, l'extremum moyen, que l'on utilise habituellement pour le dimensionnement des structures est obtenu par :

$$\bar{x}_{ex} = \int_0^{+\infty} x p_{x_{ex}}(x) dx = g_{ng} \sigma_x \quad (4.380)$$

Cette relation est la définition du facteur de pointe. Nous venons donc d'obtenir une formulation qui permet de calculer le facteur de pointe d'un processus aléatoire non gaussien. Il ne reste donc plus qu'à réaliser le calcul de cette intégrale et à la rapporter à l'écart type du processus non gaussien (unitaire dans ces développements). Bien que le modèle de variable aléatoire choisi soit assez simple, nous allons voir que le calcul de cette intégrale est assez compliqué. En utilisant le changement de variable :

$$\psi = \nu_0 T e^{-\frac{u(x)^2}{2}} \iff u(\psi) = \sqrt{2 \ln \left(\frac{\nu_0 T}{\psi} \right)} \quad (4.381)$$

le facteur de pointe peut s'écrire :

$$\begin{aligned} g_{ng} &= \int_0^{+\infty} x dP_{x_{ex}}(x) = \int_0^{+\infty} x(\psi) dP_{x_{ex}}(\psi) = \int_0^{+\infty} x(\psi) e^{-\psi} d\psi \\ &= \frac{\alpha}{b} \int_0^{+\infty} \left[\frac{u^3(\psi)}{3} + a u^2(\psi) + (b-1) u(\psi) - a \right] e^{-\psi} d\psi \end{aligned} \quad (4.382)$$

En introduisant l'expression rigoureuse de $u(\psi)$ (Equ. 4.381), on obtient l'expression exacte du facteur de pointe. Etant donné que l'intégrand obtenu présente encore une forme assez compliquée, un développement en série de $u(\psi)$ peut être entrepris :

$$\begin{aligned} u(\psi) &= \sqrt{2 \ln \left(\frac{\nu_0 T}{\psi} \right)} = u(\psi) = \sqrt{2 \ln(\nu_0 T)} \sqrt{1 - \frac{\ln \psi}{\ln(\nu_0 T)}} \\ &\simeq \sqrt{2 \ln(\nu_0 T)} \left(1 - \frac{\ln \psi}{2 \ln(\nu_0 T)} - \frac{1}{8} \left(\frac{\ln \psi}{\ln(\nu_0 T)} \right)^2 - \dots \right) \\ &= \beta - \frac{\ln \psi}{\beta} - \frac{1}{8} \frac{\ln^2 \psi}{\beta^3} - \dots \end{aligned} \quad (4.383)$$

où $\beta = \sqrt{2 \ln(\nu_0 T)}$. En injectant ce développement de $u(\psi)$ dans l'équation 4.382 et en ne conservant ensuite que les termes d'ordre $\frac{1}{\beta}$ et plus, il reste :

$$\begin{aligned} g_{ng} &= \frac{\alpha}{b} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\beta^3}{3} + a\beta^2 - (1-b+\ln \psi) \beta - a(1+2 \ln \psi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\ln \psi (8-8b+9 \ln \psi)}{8\beta} + \frac{5a \ln^2 \psi}{4\beta^2} \right] e^{-\psi} d\psi \\ &= \frac{\alpha}{b} \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{\beta^3}{3} + b\beta + a\beta^2 - \beta - a \right) - \left(\beta - \frac{1-b}{\beta} + 2a \right) \ln \psi \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{9}{8\beta} + \frac{5a}{4\beta^2} - \frac{1-b}{8\beta^3} \right) \ln^2 \psi \right] e^{-\psi} d\psi \end{aligned} \quad (4.384)$$

En notant que :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-\psi} d\psi &= 1 \\ \int_0^{+\infty} \ln \psi e^{-\psi} d\psi &= -\gamma \\ \int_0^{+\infty} \ln^2 \psi e^{-\psi} d\psi &= \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}\quad (4.385)$$

l'expression du facteur de pointe d'un processus aléatoire non gaussien prend donc la forme suivante :

$$\begin{aligned}g_{ng} = \frac{\alpha}{b} &\left[\left(\frac{\beta^3}{3} + (1+a)\beta^2 - \beta - a \right) + \gamma \left(\beta - \frac{1}{\beta} + 1 + 2a \right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{9}{8\beta} + \frac{1+10a}{8\beta^2} - \frac{1}{8\beta^3} \right) \left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) \right] \quad (4.386)\end{aligned}$$

Les paramètres a , b et α intervenant dans cette relation sont ceux qui ont été obtenus lors de l'identification à l'aide du modèle de variable aléatoire non gaussienne par transformation cubique. En introduisant maintenant les expressions de h_3 et h_4 , on peut obtenir, après simplifications :

$$\begin{aligned}g_{ng} = \alpha &\left(\beta + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}}{8\beta^3} \right) + \alpha h_3 \left(-1 + \beta^2 + 2\gamma + \frac{5(\pi^2 + 6\gamma^2)}{24\beta^2} \right) \\ &+ \alpha h_4 \left(\beta^3 - 3\beta(1-\gamma) + \frac{1}{\beta} \left(-3\gamma + \frac{27\gamma^2}{8} + \frac{9\pi^2}{16} \right) - \frac{1}{\beta^3} \left(\frac{3\gamma^2}{8} + \frac{\pi^2}{16} \right) \right) \quad (4.387)\end{aligned}$$

Les périodes d'observation utilisées en pratique sont assez longues; ceci a permis de réaliser le développement en série de β . Les plus basses fréquences de passage par zéro que l'on imagine devoir traiter, du moins dans le domaine du génie civil, sont des fréquences de l'ordre de $0.1Hz$. Etant donné que la période d'observation considérée pour l'étude des structures soumises au vent turbulent est généralement $T = 600s$, cette valeur minimale de la fréquence structurelle correspond à une valeur $\beta = 2.86$. La valeur assez importante du $1/\beta$ correspondant justifie la nécessité de devoir garder autant de termes dans le développement limité.

Une étude des ordres de grandeur³¹ des termes intervenant dans l'expression 4.387 montre que, pour les applications qui sont habituellement traitées dans le domaine du génie civil, la relation suivante est suffisamment précise :

$$g_{ng} = \alpha \left(\beta + \frac{\gamma}{\beta} \right) + \alpha h_3 (-1 + \beta^2 + 2\gamma) + \alpha h_4 \left(\beta^3 - 3\beta(1-\gamma) + \frac{1}{\beta} \left(-3\gamma + \frac{27\gamma^2}{8} + \frac{9\pi^2}{16} \right) \right) \quad (4.388)$$

Cette expression est l'expression du facteur de pointe non gaussien présentée par Kareem et Gurley. Si le processus étudié était gaussien, c'est-à-dire si $\alpha = 1$, $h_3 = 0$ et $h_4 = 0$, on obtiendrait :

$$g = \beta + \frac{\gamma}{\beta} = \sqrt{2 \ln(\nu_0 T)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln(\nu_0 T)}} \quad (4.389)$$

³¹ $\frac{\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}}{8\beta^3} = 0.00344$; $\frac{5(\pi^2 + 6\gamma^2)}{24\beta^2} = 0.0362$; $\frac{1}{\beta^3} \left(\frac{3\gamma^2}{8} + \frac{\pi^2}{16} \right) = 0.00135$

qui est la formule habituellement appliquée pour les processus aléatoire gaussiens. Pour des coefficients de dissymétrie et d'excès positifs, comme ceux que nous rencontrerons dans les applications, le facteur de pointe du processus non gaussien, calculé à partir de la relation 4.388 est toujours plus grand que le facteur de pointe du processus gaussien qui aurait le même contenu fréquentiel. La figure 4.51 représente le rapport entre les facteurs de pointe non gaussien et gaussien, pour différentes valeurs des coefficients de dissymétrie et d'excès, et pour différentes valeurs du nombre $\nu_0 T$ de passages par zéro dans la fenêtre d'observation considérée.

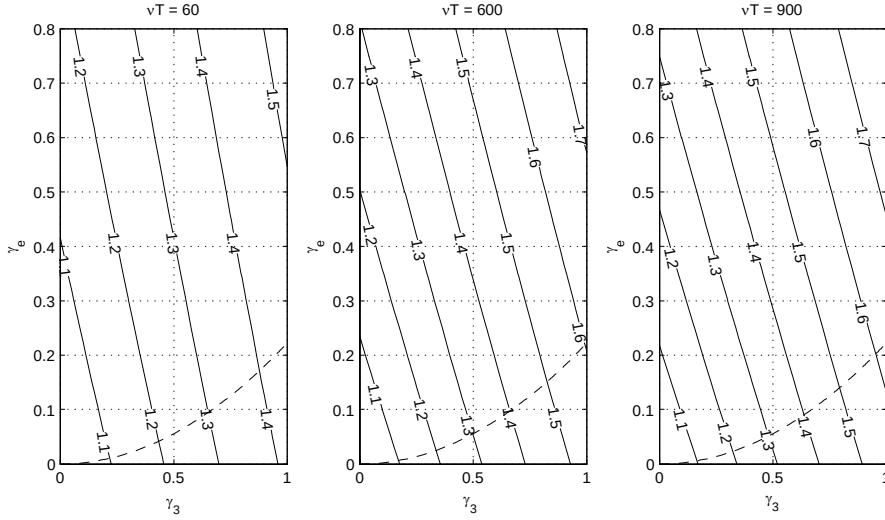


FIG. 4.51 – Rapport entre les facteurs de pointe des processus non gaussiens et gaussiens en fonction des coefficients de dissymétrie et d'excès

Nous avons également reporté sur cette figure les limites d'applicabilité de la méthode. On peut constater que l'application brutale de la formule donnant le facteur de pointe d'un processus non gaussien donne, sous la limite d'applicabilité, des résultats qui pourraient sembler corrects mais qui ne peuvent en aucun cas être considérés comme tels.

4.10 Conclusions

Par rapport au chapitre précédent, la seule modification apportée concerne la prise en compte du terme de chargement quadratique. Les développements théoriques que nous avons repris ici sont ceux qui ont été suivis par les pionniers de la dynamique non gaussienne. Nous avons cependant porté l'accent sur les différentes possibilités d'application de ces méthodes ainsi que sur les interprétations physiques qui peuvent être formulées.

Nous nous permettons dans cette conclusion, de reprendre en marche arrière le cheminement suivi. Pour rappel, une motivation essentielle de notre travail consiste en l'observation que les facteurs de pointe de processus aléatoires gaussiens et non gaussiens sont sensiblement différents. Plusieurs modèles de grandeurs extrêmes permettent de représenter ces phénomènes non gaussiens (Soize [86], Grigoriu [45]). Nous n'avons pas remis en question ces modèles et nous avons simplement étudié l'estimation des grandeurs néces-

saires au calcul des facteurs de pointe de processus non gaussiens. Ces grandeurs peuvent se résumer aux coefficients de dissymétrie (pour l'ordre 3) et de kurtosis (pour l'ordre 4). Ils représentent respectivement les caractéristiques de symétrie et d'étalement de la densité de probabilité du processus étudié. Avant d'aborder les statistiques des valeurs extrêmes, nous avons donc présenté les méthodes de calcul de ces coefficients.

La réponse d'un système dynamique à une sollicitation non gaussienne est également non gaussienne. Les développements que nous avons menés montrent que la non gaussianité de la réponse ne peut (presque) pas être plus importante que celle de la sollicitation. Sur base d'un raisonnement très simple séparant les contributions quasi-statique et dynamique de la réponse, nous avons donné une interprétation physique simple des phénomènes rencontrés. Nous avons donc ainsi présenté les raisons pour lesquelles le terme de chargement non linéaire pouvait, en rendant la sollicitation non gaussienne, affecter le résultat d'une analyse stochastiquement linéarisée.

En continuant de remonter le cheminement en sens inverse, nous pouvons également mentionner l'étude de l'effet de ce terme non linéaire sur la moyenne et la variance de la réponse. Pour les faibles intensités de turbulence rencontrées en pratique, nous avons pu constater que cet effet était presque négligeable. Ceci justifie certainement les raisons pour lesquelles peu d'attention est généralement accordée à ce terme de chargement. Les développements ultimes concernant l'étude des facteurs de pointe montrent cependant qu'il ne devrait pas en être ainsi.

Chapitre 5

Approche temporelle

"Il existe trois sortes de mensonges : les mensonges, les affreux mensonges, et les statistiques"

Benjamin Disraeli

5.1 Introduction

Dans le domaine du génie civil, l'analyse de structures soumises à des sollicitations aléatoires est généralement entreprise dans le domaine fréquentiel. Dans le cadre de structures sollicitées par un vent turbulent, cette approche se justifie d'autant plus que la sollicitation telle qu'elle est fournie dans les codes est exprimée dans le domaine fréquentiel. La principale restriction d'une telle approche consiste en la nécessité de travailler avec un système linéaire. Au chapitre précédent, nous avons vu qu'une approche dans le domaine fréquentiel pouvait également être envisagée lorsque la sollicitation de la structure était le résultat d'un filtrage statique non linéaire d'un processus aléatoire caractérisé par sa densité spectrale de puissance.

Les développements suivis dans ce domaine fréquentiel ont leur équivalent dans le domaine temporel. En réalité, ce sont les équations que nous avons déjà présentées et qui expriment les fonctions d'autocorrélation, de bicorrélation et de tricorrélation de la réponse en fonction de grandeurs identiques de la sollicitation. Ces relations nécessitent également la linéarité de la structure puisqu'elles sont basées sur des intégrales de convolution (faisant appel au principe de superposition).

Ces deux approches, que ce soit dans le domaine fréquentiel ou dans le domaine temporel, constituent l'approche ingénieur actuelle la plus courante pour la résolution des problèmes de dynamique aléatoire.

Du côté moins appliqué des sciences, quelques groupes de mathématiciens et de physiciens ont travaillé à la résolution de problèmes identiques. La démarche et les raisonnements qu'ils ont menés ont abouti à une théorie bien plus vaste, permettant par exemple

d'étudier des systèmes non linéaires parfaitement déterminés soumis à des sollicitations aléatoires. Il s'agit du calcul différentiel stochastique. L'outil qui est resté pendant des années la pierre d'angle de cette théorie est l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov ([82]). L'objectif de cette théorie consiste à exprimer sous forme d'une équation différentielle l'évolution de la densité de probabilité conjointe de tous les processus aléatoires intervenant dans le problème à résoudre.

Etant issue d'un milieu essentiellement mathématicien, cette méthode a d'abord été appliquée analytiquement à des cas assez simples. Au moment de passer à des applications plus réalistes, il s'est avéré que la résolution de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov était assez laborieuse à mettre en oeuvre, même numériquement. Elle a été considérée pendant de nombreuses années comme limitée aux structures à un ou deux degrés de liberté.

Ensuite, et toujours en quête de problèmes plus complexes, quelques mathématiciens se sont à nouveau rendus compte que la théorie du calcul différentiel stochastique n'était pas applicable à tous les processus aléatoires. Des mathématiciens tel Ito, Stratonovich et Gihman sont alors à la base du calcul différentiel stochastique d'Ito, permettant d'étudier la réponse de systèmes non linéaires soumis à des processus aléatoires singuliers comme par exemple le célèbre bruit blanc ([92]).

Depuis les premiers développements de cette théorie, plusieurs autres chercheurs de renommée et de qualité ont apporté leurs contributions à la matière pour en faire, au terme des années 1970, une arme remarquable. De nombreux domaines tels la physique, la chimie, l'économie ou la biologie ont assez rapidement adopté les développements et les techniques d'analyse de systèmes dynamiques initiés par Ito et Stratonovich. Etant donné l'étendue d'application assez vaste de ces théories, il va de soi que le domaine du génie ne peut qu'être aussi intéressé par le sujet.

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques informations générales permettant de comprendre le fonctionnement de l'approche temporelle. Comme annoncé, le domaine d'application de cette méthode est très vaste et permet la prise en compte de phénomènes bien plus complexes que le simple terme de chargement non linéaire étudié au chapitre précédent. Par exemple, les termes de chargement paramétrique et d'amortissement non linéaire que nous avons dû laisser de côté pour l'approche fréquentielle peuvent être pris en compte dans cette approche temporelle. Au chapitre 7, nous présenterons les caractéristiques principales des effets de ces termes grâce à une étude non linéaire dans le domaine temporel.

Nous nous limiterons dans ce chapitre à n'étudier de nouveau que les effets du terme de chargement non linéaire. L'objectif de ce chapitre est donc double : d'une part valider les développements qui ont été réalisés ci-avant dans le domaine fréquentiel et d'autre part, présenter la méthode d'analyse qu'il conviendrait d'appliquer pour l'étude d'un problème plus complexe.

Les développements théoriques que nous allons présenter se trouvent (du moins en partie) dans les bons ouvrages de référence en la matière ([80]). Souvent, il s'agit de documents rédigés à l'attention de mathématiciens. L'exposé que nous donnons ci-après est certainement moins rigoureux mais présente cependant l'avantage d'être compris par un quidam désireux d'aborder le problème d'un oeil panoramique. Aussi, nous tenons à porter la préférence sur l'approche fréquentielle du chapitre précédent pour les problèmes semblables à celui que nous étudions dans ce document. En effet, cette approche permet de conserver une illustration géométrique simple de la dynamique mise en jeu. Nous

conseillons donc de n'appliquer les développements qui sont donnés dans ce chapitre que pour aborder des problèmes plus complexes (prise en compte d'autres effets non linéaires, étude instationnaire ...) qui peuvent être rencontrés dans d'autres domaines du génie civil comme l'analyse sismique, la dissipation plastique, la dissipation par frottement ...

Les développements suivants s'articulent en deux étapes : d'abord la présentation et l'établissement des équations de Fokker-Planck-Kolmogorov. Cette partie devrait permettre au lecteur d'apprécier la méthodologie de l'analyse dans le domaine temporel ainsi que les limitations de cette analyse. Ensuite, la seconde partie sera dédiée à la présentation du calcul stochastique différentiel d'Ito ainsi que son application au problème étudié.

5.2 Equations de Fokker-Planck

Il faut concéder que les développements de ce paragraphe proviennent essentiellement de [80]. Nous avons repris ces développements car l'utilisation de ce genre d'équations est assez rare dans le domaine du génie civil. Ils nous paraissent cependant nécessaires à la bonne compréhension de la méthode exposé au paragraphe suivant.

5.2.1 Marche au hasard de la particule libre

Avant de développer dans un cadre plus général les équations de Fokker-Planck, nous allons illustrer le phénomène de diffusion de densité de probabilité sur un exemple simple. Il s'agit du célèbre problème de la marche au hasard d'une particule libre. Pour simplifier la présentation, nous allons travailler sur un système discret. La particule libre se trouve donc sur une sorte de damier unidimensionnel et, à chaque instant, elle doit se déplacer d'une case vers la gauche ou vers la droite.

La probabilité que la particule, partant de la case m , se retrouve après s sauts sur la case n est notée $P(n, s|m)$. Pour $s = 1$, $P(n, 1|m)$ désigne la probabilité qu'en un seul saut la particule puisse passer de la case m à la case n . En vertu des règles du jeu que nous nous sommes fixées, cette probabilité est nulle dans tous les cas sauf si $m = n - 1$ ou $m = n + 1$ auquel cas, cette probabilité est égale à $\frac{1}{2}$. Elle peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} P(n, 1|m) &= \frac{1}{2}\delta(n+1, m) + \frac{1}{2}\delta(n-1, m) \\ &= \frac{1}{2}\delta(n, m-1) + \frac{1}{2}\delta(n, m+1) \end{aligned} \quad (5.1)$$

où $\delta(i, j) = \delta_{ij}$ représente l'indice de Kronecker.

De manière plus générale, pour que la particule se trouve sur la case n après $s + 1$ sauts, tout en partant de la case m au départ, il faut absolument qu'elle se soit trouvée sur l'une des deux cases adjacentes $n + 1$ ou $n - 1$ après s sauts. Donc,

$$P(n, s+1|m) = \frac{1}{2}P(n+1, s|m) + \frac{1}{2}P(n-1, s|m) \quad (5.2)$$

Ceci constitue une équation où seule intervient la densité de probabilité de la position de la particule au cours du temps. Supposons, pour simplifier les choses, que la particule débute de la case $m = 0$. $P(n, s|m)$ sera alors simplement noté $P(n, s)$. Ceci n'altère en rien la généralité des développements. La condition initiale du problème est que la

particule se trouve (avec certitude) sur la case $n = 0$ à l'instant initial : $P(n, 0) = \delta(n, 0)$. L'équation qui régit la position de la particule peut alors être résolue par récurrence. En effet, écrite pour $s = 0$, elle devient :

$$P(n, 1) = \frac{1}{2}P(n+1, 0) + \frac{1}{2}P(n-1, 0) = \frac{1}{2}\delta(n+1) + \frac{1}{2}\delta(n-1) \quad (5.3)$$

Pour $s = 1$:

$$\begin{aligned} P(n, 2) &= \frac{1}{2}P(n+1, 1) + \frac{1}{2}P(n-1, 1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\delta(n+2) + \frac{1}{2}\delta(n) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-2) \right) \\ &= \frac{1}{4}\delta(n+2) + \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Pour $s = 2$:

$$\begin{aligned} P(n, 3) &= \frac{1}{2}P(n+1, 2) + \frac{1}{2}P(n-1, 2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\delta(n+3) + \frac{1}{2}\delta(n+1) + \frac{1}{4}\delta(n-1) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\delta(n+1) + \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{1}{4}\delta(n-3) \right) \\ &= \frac{1}{8}\delta(n+3) + \frac{3}{8}\delta(n+1) + \frac{3}{8}\delta(n-1) + \frac{1}{8}\delta(n-3) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Les développements peuvent ainsi continuer jusqu'à l'obtention de :

$$P(n, s) = \begin{cases} \frac{s! \left(\frac{1}{2}\right)^s}{\left(\frac{s+n}{2}\right)! \left(\frac{s-n}{2}\right)!} & \text{si } n \leq s \text{ et si } n+s \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.6)$$

Cette fonction est représentée à la figure 5.1. On peut y constater l'étalement progressif de la densité de probabilité de la réponse. On devine également que cette densité de probabilité tend vers une distribution gaussienne après un temps suffisamment long. La démonstration de cette propriété constitue un des développements mathématiques les plus célèbres et sort des objectifs de ce document.

Pour cet exemple assez simple, l'équation régissant la densité de probabilité de la position de la particule (Eq. 5.2) peut également s'écrire :

$$P(n, s+1) - P(n, s) = \frac{1}{2}P(n+1, s) + \frac{1}{2}P(n-1, s) - P(n, s) \quad (5.7)$$

Soit également :

$$\frac{P(n, s+1) - P(n, s)}{\Delta s} = \frac{\Delta n^2}{2\Delta s} \frac{P(n+1, s) - 2P(n, s) + P(n-1, s)}{\Delta n^2} \quad (5.8)$$

On peut donc obtenir une représentation du phénomène continu équivalent en faisant tendre Δs et Δn vers 0 de sorte que le rapport $\frac{\Delta n^2}{2\Delta s}$ conserve une quantité finie D . Il reste alors, en rebaptisant s par t :

$$\frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(n, t)}{\partial n^2} \quad (5.9)$$

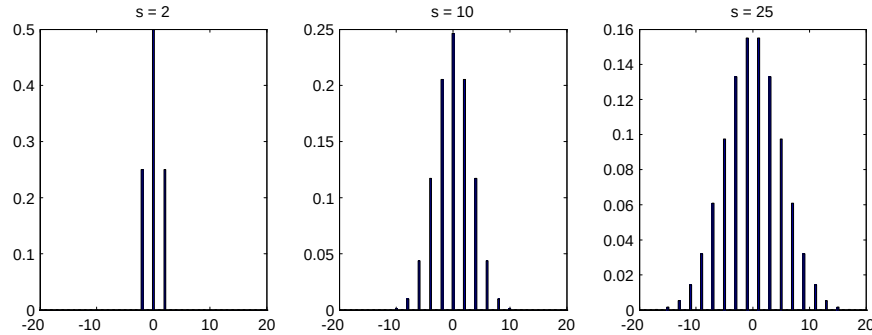


FIG. 5.1 – Illustration de l'établissement de la densité de probabilité dans le problème de la marche au hasard

La densité de probabilité de la position de la particule est donc la solution d'une équation de diffusion. Cette équation est identique à celle qui régit l'écoulement de chaleur dans un milieu conducteur unidimensionnel (loi de Fourier). L'analogie entre les deux phénomènes est assez claire : en transfert de chaleur, l'augmentation de température d'une tranche dx d'un barreau pendant le laps de temps dt (membre de gauche) provient de la différence de flux de chaleur entre ce qui entre et ce qui sort de cette tranche pendant le même laps de temps¹ (membre de droite). Pour la particule libre, un raisonnement identique peut être mené. Il paraît cependant plus évident de réfléchir sur une boîte comprenant un très grand nombre de particules lâchées en $m = 0$ à l'instant initial : la variation du nombre de particules se trouvant dans la tranche dn pendant le laps de temps dt s'accompagne d'une augmentation de concentration de ces particules dans la même tranche, pendant le même laps de temps.

La densité de probabilité de la position de la particule libre obéit donc à un processus de diffusion. Elle évolue au cours du temps depuis une configuration initiale (une fonction unitaire centrée en $n = 0$, Fig. 5.1) vers une autre configuration (une répartition gaussienne lorsque le temps s'écoule à l'infini). On parle donc d'*écoulement* ou de *diffusion* de densité de probabilité.

5.2.2 Equations de Fokker-Planck

L'équation de diffusion qui vient d'être dérivée dans le cadre d'un exemple simple peut être obtenue pour toute densité de probabilité. Nous continuerons toujours le raisonnement dans le cadre d'un mouvement unidimensionnel. La démonstration se base sur cette relation :

$$q(x, t + \Delta t | x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(z, t | x_0) q(x, \Delta t | z) dz \quad (5.10)$$

qui exprime simplement que la position de la particule à l'instant $t + \Delta t$ s'obtient en considérant toutes les positions z que la particule peut prendre à l'instant précédent,

¹ $\frac{\partial Q}{\partial x} = K\Omega \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + c\Omega \frac{\partial T}{\partial t}$ où Q , K , c , Ω et T représentent respectivement le flux de chaleur (W), le coefficient de conduction (W/mK), la capacité calorifique (J/m^3K), la section du barreau et la température à la section d'abscisse x

ainsi que les probabilités de passer de ces positions à la nouvelle position pendant le laps de temps Δt . Cette relation est l'équivalent continu de la relation 5.2.

L'obtention de l'équation de diffusion ne peut s'obtenir qu'en réalisant le calcul de $\frac{\partial q(x, t|x_0)}{\partial t}$ et en exprimant cette dérivée temporelle en termes de dérivées spatiales. A cette fin, considérons l'intégrale suivante, où la fonction $R(x)$ est une fonction quelconque mais qui s'annule suffisamment vite à l'infini pour que l'intégrale existe :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \frac{\partial q(x, t|x_0)}{\partial t} dx \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \frac{q(x, t + \Delta t|x_0) - q(x, t|x_0)}{\Delta t} dx \end{aligned} \quad (5.11)$$

En remplaçant $q(x, t + \Delta t|x_0)$ par son expression tirée de la relation 5.10, on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) q(z, t|x_0) q(x, \Delta t|z) dz dx - \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) q(x, t|x_0) dx \right\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} q(z, t|x_0) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) q(x, \Delta t|z) dx \right] dz - \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) q(x, t|x_0) dx \right\} \end{aligned}$$

Le développement en série de la fonction $R(x)$ dans le voisinage de $x = z$ s'écrit :

$$\begin{aligned} R(x) &= R(z) + (x - z) \left. \frac{dR}{dx} \right]_{x=z} + \frac{(x - z)^2}{2} \left. \frac{d^2 R}{dx^2} \right]_{x=z} + \dots \\ &= R(z) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n(z) (x - z)^n \end{aligned} \quad (5.12)$$

où $r_n(z) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n R}{dx^n} \right]_{x=z}$ et donc :

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} q(z, t|x_0) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(R(z) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n(z) (x - z)^n \right) q(x, \Delta t|z) dx \right] dz \\ &\quad - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) q(x, t|x_0) dx \end{aligned} \quad (5.13)$$

Compte tenu que

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} q(z, t|x_0) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} R(z) q(x, \Delta t|z) dx \right] dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(z, t|x_0) R(z) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} q(x, \Delta t|z) dx}_{1} dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(z, t|x_0) R(z) dz \end{aligned} \quad (5.14)$$

de l'expression de l'intégrale, il ne reste plus que :

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} q(z, t|x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} r_n(z) (x-z)^n q(x, \Delta t|z) dx dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(z, t|x_0) \sum_{n=1}^{\infty} r_n(z) \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-z)^n q(x, \Delta t|z) dx dz}_{A_n(z)} \quad (5.15) \end{aligned}$$

Les fonctions $A_n(z)$ telles que définies dans cette relation sont les moments incrémentiels. Ils peuvent s'exprimer en terme des moments statistiques du processus aléatoire $x(t) - z$:

$$A_n(z) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-z)^n q(x, \tau|z) dx = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{E[(x-z)^n]}{\tau} \quad (5.16)$$

Cette relation est l'équivalent continu de la relation 5.1. Ces moments incrémentiels n'existent qu'à condition que $E[(x-z)^n]$ soit de la forme :

$$E[(x-z)^n] = A_n(z) \tau + O(\tau^2) \quad (5.17)$$

Etant donné que les cumulants d'une variable aléatoire sont toujours de même ordre que les moments correspondants, les cumulants du processus $(x-z)$ prennent également la forme :

$$\kappa_n[x-z] = A_n(z) \tau + O(\tau^2) \quad (5.18)$$

Le processus aléatoire $\xi(t)$ dérivé de $x(t) - z$ satisfait la relation suivante :

$$x(\tau) - z = \int_t^{t+\tau} \xi(t_1) dt_1 \quad (5.19)$$

si bien que le cumulant d'ordre n s'exprime également, après inversion des opérations d'intégration et espérance mathématique :

$$\kappa_n[x-z] = \int_t^{t+\tau} \cdots \int_t^{t+\tau} \kappa_n[\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)] dt_1 \cdots dt_n \quad (5.20)$$

Par comparaison avec la relation 5.18, on peut donc noter que le cumulant d'ordre n du processus dérivé $\xi(t)$ doit avoir la forme :

$$\kappa_n[\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)] = A_n(z) \delta(t_1 - t_2) \delta(t_2 - t_3) \cdots \delta(t_n - t_1) \quad (5.21)$$

Ceci indique donc que le processus aléatoire $\xi(t)$ est un bruit blanc. Si l'on suppose par ailleurs que ce processus est gaussien, il en résulte que :

$$\kappa_1[\xi(t_1)] = \mu_\xi \Rightarrow A_1(z) = \mu_\xi \quad (5.22)$$

$$\kappa_2[\xi(t_1) \xi(t_2)] = K \delta(t_1 - t_2) \Rightarrow A_2(z) = K \quad (5.23)$$

$$\kappa_n[\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)] = 0 \Rightarrow A_n(z) = 0 \text{ pour } n \geq 3 \quad (5.24)$$

Dans ces conditions, l'intégrale que nous avons considérée s'écrit :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} q(z, t|x_0) A_1(z) r_1(z) dz + \int_{-\infty}^{+\infty} q(z, t|x_0) A_2(z) r_2(z) dz \quad (5.25)$$

Afin de faire apparaître les dérivées de la densité de probabilité q par rapport à la position z de la particule étudiée, ces intégrales vont être calculées par parties :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(z, t|x_0) A_1(z) r_1(z) dz + \left[\frac{r_1(z)}{2} q(z, t|x_0) A_2(z) \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial [q(z, t|x_0) A_2(z)]}{\partial z} \frac{r_1(z)}{2} dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(q(z, t|x_0) A_1(z) - \frac{1}{2} \frac{\partial [q(z, t|x_0) A_2(z)]}{\partial z} \right) r_1(z) dz \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial [q(z, t|x_0) A(z)]}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [q(z, t|x_0) A_2(z)]}{\partial z^2} \right) R(z) dz \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial [q(x, t|x_0) A(x)]}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [q(x, t|x_0) A_2(x)]}{\partial x^2} \right) R(x) dx \quad (5.26) \end{aligned}$$

En soustrayant membre à membre cette relation et la première expression de l'intégrale (Eq. 5.11), on obtient finalement :

$$I - I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \left(\frac{\partial q(x, t|x_0)}{\partial t} + \frac{\partial [q(x, t|x_0) A_1(x)]}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [q(x, t|x_0) A_2(x)]}{\partial x^2} \right) dx = 0 \quad (5.27)$$

Etant donné que cette relation est valable quelle que soit la fonction $R(x)$, il en découle que l'expression entre parenthèses ne peut qu'être identiquement nulle :

$$\frac{\partial q(x, t|x_0)}{\partial t} + \frac{\partial [q(x, t|x_0) A_1(x)]}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [q(x, t|x_0) A_2(x)]}{\partial x^2} = 0 \quad (5.28)$$

Cette équation constitue l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov pour un processus unidimensionnel. Cette équation régit l'évolution au cours du temps de la densité de probabilité de la variable aléatoire x . On peut vérifier assez facilement que l'équation 5.9 constitue un cas particulier de cette relation pour lequel $A_1(x) = 0$ et $A_2(x)$ est constant.

En introduisant la notion de courant de probabilité $G(x)$,

$$G(x) = q(x, t|x_0) A_1(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial [q(x, t|x_0) A_2(x)]}{\partial x} \quad (5.29)$$

l'équation de Fokker-Planck prend la forme simplissime suivante :

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial G(x)}{\partial x} = 0 \quad (5.30)$$

Le courant de probabilité s'interprète donc comme étant la quantité de probabilité qui traverse l'abscisse x par unité de temps et dans le sens des x positifs. Cette dernière relation est une relation de conservation de la probabilité. Elle implique inévitablement un écoulement de probabilité.

5.2.3 Application à l'analyse d'un système dynamique quelconque

La première équation (Eq. 5.10), d'où nous sommes partis pour l'établissement de l'équation de Fokker-Planck consiste à supposer que le passage de la particule depuis sa position en t vers sa position en $t + dt$ est totalement indépendant de ce qu'il s'est passé avant l'instant t . Cela revient donc à supposer que le processus aléatoire étudié est un processus à un pas de mémoire simple. Ce genre de processus porte le nom de processus de Markov. On peut montrer qu'un processus réel peut être approché par un processus de Markov pour des intervalles de temps plus grands que le temps de corrélation de ce processus réel. Bien que l'application de l'équation de Fokker-Planck soit limitée rigoureusement aux processus de Markov, une relation également applicable dans le cadre de processus réels peut cependant être formulée.

On peut démontrer que la densité de probabilité du processus aléatoire $x(t)$ défini par :

$$\dot{x}(t) = g(x, t) \quad (5.31)$$

est gouvernée par l'équation de Fokker-Planck suivante :

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(m(x) + \frac{k'(x)}{4} \right) q(x, t) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [k(x) q(x, t)] = 0 \quad (5.32)$$

où

$$m(x) = E[g(x, t)] \quad (5.33)$$

$$k(x) = 2 \int_{-\infty}^0 \kappa_2 [g(x, t), g(x, t + \Delta t)] d\Delta t \quad (5.34)$$

$$k'(x) = 4 \int_{-\infty}^0 \kappa_2 \left[\frac{\partial g(x, t)}{\partial x}, g(x, t + \Delta t) \right] d\Delta t \quad (5.35)$$

De même, pour un système à plusieurs degrés de liberté, caractérisé par N processus aléatoires regroupés dans le processus vectoriel X et satisfaisant :

$$\dot{X} = G(X, t) \quad (5.36)$$

On peut démontrer que ces processus aléatoires quelconques peuvent être approchés par des processus de Markov et satisfont alors l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov multidimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial q(X, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial X_i} [A_1^i(X) q(X, t)] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} [A_2^{ij}(X) q(X, t)] = 0 \quad (5.37)$$

où

$$A_1^i(X) = E[G_i(X, t)] + \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^0 \kappa_2 \left[\frac{\partial G_i(X, t)}{\partial X_k}, G_k(X, t + \Delta t) \right] d\Delta t \quad (5.38)$$

$$A_2^{ij}(X) = 2 \int_{-\infty}^0 \kappa_2 [G_i(X, t), G_j(X, t + \Delta t)] d\Delta t \quad (5.39)$$

5.2.4 Exemple

L'exemple le plus célèbre de résolution d'équation de Fokker-Planck est certainement celui du mouvement brownien des particules d'un fluide. Le botaniste anglais Brown fut le premier à observer et modéliser ce phénomène. Il modélisa une particule du fluide comme un oscillateur simple linéaire sollicité par une force aléatoire résultant des chocs avec les autres particules. Cette force peut être considérée comme un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'amplitude :

$$S_0 = \frac{\nu k T}{\pi} \quad (5.40)$$

où ν , k et T représentent respectivement un coefficient de friction interne au fluide, la constante de Boltzmann et la température absolue du fluide étudié. L'équation du mouvement gouvernant l'évolution d'une particule s'écrit donc :

$$\ddot{x} + 2\xi\varpi\dot{x} + \varpi^2 x = F(t) \quad (5.41)$$

où la fonction d'autocorrélation de la force appliquée est celle d'un bruit blanc, soit $R_{FF}(\Delta t) = 2D\delta(\Delta t)$. Dans l'espace d'état, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varpi^2 & -2\xi\varpi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\varpi^2 x - 2\xi\varpi y + F(t) \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

où nous avons utilisé la notation $y = \dot{x}$.

Les moments incrémentiels du processus de Markov équivalent (5.38, 5.39) sont donc :

$$A_1(X) = \begin{pmatrix} y \\ -\varpi^2 x - 2\xi\varpi y \end{pmatrix} \text{ et } A_2(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2D \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

et l'équation de Fokker-Planck correspondante s'écrit :

$$\frac{\partial q(x, y, t)}{\partial t} + y \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} [(\varpi^2 x + 2\xi\varpi y) q(x, y, t)] - D \frac{\partial^2 q(x, y, t)}{\partial y^2} = 0 \quad (5.44)$$

Cette équation de Fokker-Planck est célèbre non seulement pour le contexte et la situation physique qu'elle représente mais également car elle constitue une des seules équations de Fokker-Planck qui puisse être résolue analytiquement. En prenant comme conditions initiales $x = x_0$ et $y = y_0$, la solution de cette équation est :

$$p_{xy}(x, y, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_x(t)\sigma_y(t)\sqrt{1-\rho(t)^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho(t)^2)} \left(\frac{(x-\mu_x(t))^2}{\sigma_x^2(t)} - 2\rho \frac{(x-\mu_x(t))(y-\mu_y(t))}{\sigma_x(t)\sigma_y(t)} + \frac{(y-\mu_y(t))^2}{\sigma_y^2(t)} \right)} \quad (5.45)$$

où

$$\mu_x(t) = \frac{y_0}{\varpi_d} e^{-\xi \varpi t} \sin(\varpi_d t) + \frac{x_0}{\varpi_d} e^{-\xi \varpi t} (\varpi_d \cos(\varpi_d t) + \xi \varpi \sin(\varpi_d t)) \quad (5.46)$$

$$\mu_y(t) = \frac{\varpi}{\varpi_d} y_0 e^{-\xi \varpi t} \left(\sqrt{1 - \xi^2} \cos(\varpi_d t) - \xi \sin(\varpi_d t) \right) - \frac{x_0 \varpi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \varpi t} \sin(\varpi_d t) \quad (5.47)$$

$$\sigma_x^2(t) = \frac{D}{2\xi \varpi^3} \left[1 - \frac{e^{-2\xi \varpi t}}{\varpi_d^2} (\varpi_d^2 + 2\xi^2 \varpi^2 \sin^2(\varpi_d t) + \xi \varpi_d \varpi \sin(2\varpi_d t)) \right] \quad (5.48)$$

$$\sigma_y^2(t) = \frac{D}{2\xi \varpi} \left[1 - \frac{e^{-2\xi \varpi t}}{\varpi_d^2} (\varpi_d^2 + 2\xi^2 \varpi^2 \sin^2(\varpi_d t) - \xi \varpi_d \varpi \sin(2\varpi_d t)) \right] \quad (5.49)$$

$$\rho(t) = \frac{\varpi}{\sigma_x(t) \sigma_y(t)} \frac{D}{\varpi_d^2} e^{-2\xi \varpi t} \sin^2(\varpi_d t) \quad (5.50)$$

L'évolution de cette densité de probabilité au cours du temps est reproduite à la figure 5.2. Cette densité de probabilité transitionnelle a été obtenue en posant $(x_0, y_0) = (5, 2)$ comme conditions initiales. L'oscillateur étudié est supposé être caractérisé par un taux d'amortissement $\xi = 0.05$ et une pulsation propre $\varpi = 1 \text{ rad/s}$.

L'évolution du point de probabilité maximale suit une spirale logarithmique. Les coordonnées de ce point sont $(\mu_x(t), \mu_y(t))$ et auraient pu être obtenues très facilement, sans écrire l'équation de Fokker-Planck du système, simplement en prenant l'espérance mathématique membre à membre de l'équation du mouvement. A l'instant initial, la densité de probabilité conjointe entre les deux variables aléatoires (déplacement et vitesse) est une fonction de Dirac d'intensité unitaire concentrée au point de conditions initiales. Aux tout premiers instants, la variance de la vitesse augmente plus rapidement que la variance du déplacement. La densité de probabilité s'étire donc d'abord dans la direction de l'axe y . Au fur et à mesure que le temps s'écoule, la densité de probabilité s'étale de plus en plus, et, à la limite :

$$\sigma_x^2(t) = \frac{D}{2\xi \varpi^3} \quad ; \quad \sigma_y^2(t) = \frac{D}{2\xi \varpi} \quad ; \quad \rho(t) = 0 \quad (5.51)$$

Les variables aléatoires x et $\frac{y}{\varpi}$ deviennent donc des variables aléatoires non corrélées et de même variance. La densité de probabilité correspondante est donc axisymétrique ; sa représentation en courbes de niveau est constituée de cercles concentriques.

Le problème qui vient d'être résolu maintenant a en réalité déjà été présenté à l'occasion des rappels sur l'analyse dynamique stochastique (Eqs. 3.20 et 3.29). Une approche dans le domaine temporel nous avait permis de formuler la même loi d'évolution de la variance du déplacement et l'approche dans le domaine fréquentiel, sur base des densités spectrales de puissance, nous avait permis de déterminer la répartition fréquentielle de la variance de la réponse, dont l'intégrale correspond également au résultat trouvé maintenant. La formulation et la résolution de l'équation de Fokker-Planck n'étaient donc en réalité pas nécessaire pour ce problème qui peut être résolu plus facilement par ailleurs. Le recours à cette nouvelle technique permet par contre d'aborder facilement des problèmes de dynamique non linéaire (la fonction G de l'équation 5.36 peut être non linéaire).

L'équation de Fokker-Planck est une équation aux dérivées partielles qui fait intervenir le temps. Cela signifie que la résolution complète de cette équation permet de prendre en compte les phénomènes transitoires. En combinant cette aptitude particulière et leur

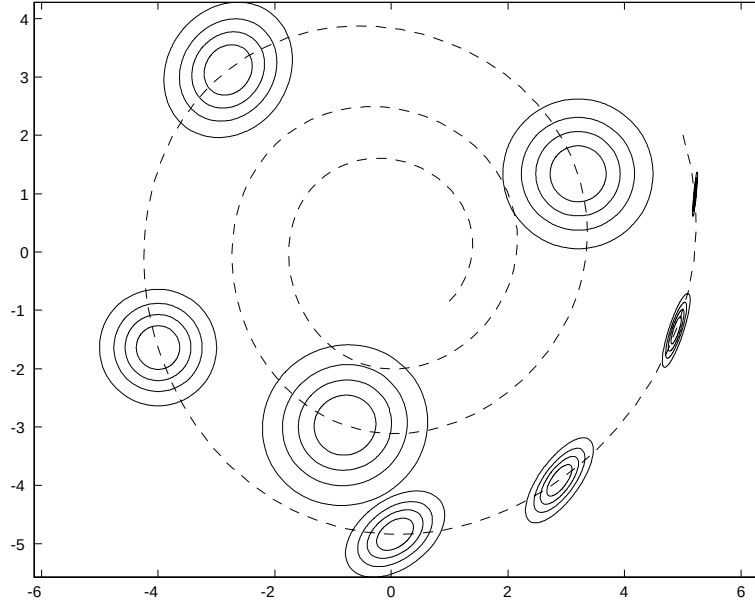


FIG. 5.2 – Illustration de la diffusion de la densité de probabilité de l'oscillateur simple (mouvement brownien)

capacité de prendre en compte des phénomènes non linéaires, les équations de Fokker-Planck constituent par exemple un outil intéressant pour l'analyse de structures soumises à des tremblements de terre.

Dans le cadre de ce travail, nous nous limitons à l'étude de structures soumises au vent turbulent dont le comportement est supposé stationnaire. C'est donc également le comportement stationnaire de la réponse qui nous intéresse. En comparant les expressions des grandeurs transitoires (Eq 5.45 à 5.50) et des valeurs stationnaires correspondantes (Eq 5.51), on imagine aisément que se limiter à l'étude du problème stationnaire permet de simplifier considérablement l'approche de la réponse.

Nous recherchons donc la densité de probabilité $q(X)$ qui satisfait l'équation :

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial X_i} [A_1^i(X) q(X)] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} [A_2^{ij}(X) q(x)] = 0 \quad (5.52)$$

A condition que le système étudié soit linéaire, cette équation possède une solution unique.

5.3 Equations d'Ito

5.3.1 Développements théoriques

Le calcul stochastique différentiel d'Ito est une branche particulière du calcul différentiel stochastique qui permet de prendre en compte des processus aléatoires assez singuliers. La portée de la règle de différentiation établie par les fondateurs de cette

théorie, Ito et Stratonovich, est très vaste. Nous allons voir qu'elle englobe par exemple l'établissement des équations de Fokker-Planck.

Cette théorie se focalise sur l'étude du système non linéaire sollicité par un bruit blanc :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t) W(t) \quad (5.53)$$

où $f(x, t)$ et $g(x, t)$ représentent des fonctions déterministes régulières quelconques et $W(t)$ représente le bruit blanc gaussien de moyenne nulle. Etant donné que ce processus aléatoire est un processus gaussien, il est complètement caractérisé par sa fonction d'autocorrélation :

$$R_W(\Delta t) = E[W(t)W(t + \Delta t)] = q_2 \delta(\Delta t) \quad (5.54)$$

où q_2 représente l'intensité du bruit blanc considéré. Nous supposons dans la suite que le bruit blanc est stationnaire, c'est-à-dire que q_2 ne dépend pas du temps². Au regard de cette relation, la variance du bruit blanc W , obtenue en prenant la valeur à l'origine de sa fonction d'autocorrélation, est donc infinie. C'est pour cette raison que l'équation différentielle stochastique 5.53 n'est pas une équation différentielle qui peut être résolue par les méthodes classiques. Aussi, c'est pour cette raison que cette équation est réécrite sous la forme :

$$dx = f(x, t) dt + g(x, t) dB(t) \quad (5.55)$$

où $dB(t) = W(t)dt$. Cette équation est à considérer comme à la base du calcul différentiel stochastique d'Ito. Le processus $B(t)$ est appelé le processus aléatoire de Wiener. Il est défini comme étant le processus aléatoire tel que sa dérivée correspond au bruit blanc. Etant donné que le bruit blanc est un processus aléatoire excessivement irrégulier, assimilé à des successions d'impulsions de Dirac arrivant indépendamment l'une de l'autre, le processus de Wiener est également un processus irrégulier qui présente des variations non bornées sur des intervalles de temps infinitésimaux. L'intégrale

$$\int_0^t g(x, t) dB(t) \quad (5.56)$$

n'a pas de sens mathématique (elle n'est pas intégrable au sens de Riemann) et c'est pour cette raison que l'équation de base du calcul différentiel stochastique d'Ito est fondée sur la relation infinitésimale. Il est très important de noter que l'ordre du processus aléatoire de Wiener est $o(dB) = \sqrt{dt}$. Une propriété importante de ce processus de Wiener est que :

$$E[f(x, t) dB(t)^n] = E[f(x, t)] E[dB(t)^n] \quad (5.57)$$

La règle de différentiation d'Ito établi que, pour une fonction scalaire quelconque $\varphi(x, t)$ dérivable deux fois par rapport à x et dérivable au moins une fois par rapport à t , l'incrément de cette fonction s'exprime par :

$$d\varphi(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (dx)^2 \quad (5.58)$$

²on différencie un *bruit blanc* et un *shot noise* selon que le processus à corrélation δ est stationnaire ou non

La différence principale existant entre cette formulation et le théorème de dérivation des fonctions de plusieurs variables concerne la conservation du dernier terme. Contrairement au calcul différentiel habituel, ce dernier terme doit absolument être conservé dans la mesure où l'expression de dx fait intervenir des termes d'ordre $\sqrt{dt}$ qui ne peuvent être négligés vis-à-vis du premier terme de la relation 5.58.

Cette règle de différentiation est assez puissante et générale. La fonction $\varphi(x, t)$ qui pourrait être a priori à peu près n'importe quelle fonction est cependant souvent choisie de la même façon. Il existe plusieurs possibilités :

1. En choisissant $\varphi(x, t) = e^{-i\theta x}$, la règle de différentiation donne :

$$d\varphi(x, t) = -i\theta e^{-i\theta x} dx + \frac{1}{2}(-i\theta)^2 e^{-i\theta x} (dx)^2 \quad (5.59)$$

En introduisant dans cette relation l'expression de dx issue de l'équation d'état du système étudié (Eq. 5.55) et en ne conservant que les termes d'ordre dt , il reste :

$$d\varphi(x, t) = -i\theta e^{-i\theta x} [f(x, t) dt + g(x, t) dB(t)] + \frac{1}{2}(-i\theta)^2 e^{-i\theta x} g^2(x, t) dB(t)^2 \quad (5.60)$$

En prenant l'espérance mathématique membre à membre puis en divisant par dt , cette équation devient :

$$\begin{aligned} E[d\varphi(x, t)] &= -i\theta E[e^{-i\theta x} f(x, t)] dt - i\theta E[e^{-i\theta x} g(x, t) dB(t)] \\ &\quad - \frac{1}{2}\theta^2 E[e^{-i\theta x} g^2(x, t) dB(t)^2] \\ E\left[\frac{d\varphi(x, t)}{dt}\right] &= -i\theta E[e^{-i\theta x} f(x, t)] - \frac{1}{2}\theta^2 q_2 E[e^{-i\theta x} g^2(x, t)] \end{aligned} \quad (5.61)$$

Pour obtenir cette relation, la propriété fondamentale du processus de Wiener (5.57) a été utilisée. En permutant les opérations de dérivation et d'espérance mathématique, le membre de gauche de cette relation peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} E\left[\frac{d\varphi(x, t)}{dt}\right] &= \frac{d}{dt} E[\varphi(x, t)] = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, t) p(x, t) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta x} p(x, t) dx = \frac{dM_x(\theta)}{dt} \end{aligned} \quad (5.62)$$

où $M_x(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta x} p(x, t) dx$ représente la fonction caractéristique de la variable aléatoire x (Equ. 4.5). Ce n'est pas un hasard de retrouver ici la fonction caractéristique ; en réalité, la fonction $\varphi(x, t)$ a été choisie à cette fin. La règle de différentiation d'Ito permet donc d'écrire une relation exprimant l'évolution au cours du temps de la fonction caractéristique de la variable aléatoire :

$$\frac{dM_x(\theta)}{dt} = -i\theta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta x} f(x, t) p(x, t) dx - \frac{1}{2}\theta^2 q_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta x} g^2(x, t) p(x, t) dx \quad (5.63)$$

Sous cette équation d'évolution de la fonction caractéristique, on peut reconnaître le phénomène de diffusion que nous avons introduit ci-avant. En effet, la transformée de Fourier inverse prise membre à membre permet d'obtenir :

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x, t) p(x, t)] + \frac{q_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [g^2(x, t) p(x, t)] \quad (5.64)$$

ce qui n'est en réalité rien d'autre que l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov associée au problème étudié.

2. En choisissant $\varphi(x, t) = x^r$, la règle de différentiation d'Ito donne :

$$d\varphi(x, t) = r x^{r-1} dx + \frac{1}{2} r(r-1) x^{r-2} (dx)^2 \quad (5.65)$$

La démarche est similaire à celle qui a été présentée au premier point. Elle consiste donc à introduire l'expression de dx issue de l'équation d'état du système étudié (Eq. 5.55) et à ne conserver que les termes d'ordre dt :

$$d\varphi(x, t) = r x^{r-1} [f(x, t) dt + g(x, t) dB(t)] + \frac{1}{2} r(r-1) x^{r-2} [g(x, t) dB(t)]^2 \quad (5.66)$$

En prenant l'espérance mathématique membre à membre, en divisant par dt et en utilisant la propriété fondamentale du processus de Wiener, on peut obtenir :

$$\frac{dE[x^r]}{dt} = rE[x^{r-1}f(x, t)] + \frac{q_2}{2} r(r-1) E[x^{r-2}g^2(x, t)] \quad (5.67)$$

$E[x^r]$ peut être noté m_r et représente le moment (total) d'ordre r de la variable aléatoire x . Cette équation constitue l'objet principal et certainement le plus reconnu des travaux d'Ito. Les fonctions $f(x, t)$ et $g(x, t)$ intervenant dans cette relation représentent le système étudié (5.55) et peuvent a priori être non linéaires. Cette équation permet donc d'exprimer l'évolution au cours du temps des moments statistiques d'une variable aléatoire telle la réponse d'un système dynamique non linéaire. Cela lui vaut la dénomination habituelle d'*équation aux moments*.

Une autre particularité assez intéressante de cette relation concerne l'aspect temporel. La détermination de l'expression de la dérivée temporelle du moment indique que la résolution de cette équation permet d'obtenir l'évolution au cours du temps des moments de différents ordres. Elle offre donc la possibilité de représenter des phénomènes transitoires.

Les équations aux moments constituent donc un outil relativement puissant ou en tout cas beaucoup plus puissant que ce qui est strictement nécessaire pour la résolution de notre système linéaire et stationnaire. Lorsque le système étudié est linéaire, c'est-à-dire si $f(x, t) = d(t)x$ et $g(x, t) = g(t)$, l'équation aux moments se simplifie en :

$$\frac{dE[x^r]}{dt} = r d(t) E[x^r] + \frac{q_2}{2} r(r-1) g^2(t) E[x^{r-2}] \quad (5.68)$$

$$\frac{dm_r}{dt} = r d(t) m_r + \frac{q_2}{2} r(r-1) g^2(t) m_{r-2} \quad (5.69)$$

Dans le problème qui nous intéresse, les fonctions $d(t)$ et $g(t)$ seront constantes. Pour plus de généralité, notons :

$$d = \lim_{t \rightarrow \infty} d(t) \quad (5.70)$$

$$g = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) \quad (5.71)$$

Mathématiquement, la réponse stationnaire peut être obtenue en faisant tendre le temps t vers l'infini et en annulant la dérivée temporelle. L'hypothèse de stationnarité que nous nous sommes imposée permet donc d'écrire :

$$0 = r d m_r + \frac{q_2}{2} r (r - 1) g^2 m_{r-2} \quad (5.72)$$

L'écriture des équations aux moments pour un système linéaire stationnaire permet donc d'établir un système d'équations algébriques linéaires dont la résolution est très rapide et permet d'obtenir les expressions des moments de différents ordres des grandeurs mises en jeu dans le problème. Ceci constitue un argument important qui pourrait nous faire préférer cette méthode à l'approche dans le domaine fréquentiel où les moments doivent être obtenus par intégration sur des domaines multidimensionnels.

5.3.2 Analyse de l'oscillateur simple

Afin d'illustrer la méthode de résolution des équations aux moments, nous nous proposons de reprendre le problème étudié par Grigoriu [[49]]. Il s'agit en réalité du problème que nous étudions depuis le début de ce document, à savoir la réponse d'un oscillateur simple soumis au carré d'un processus aléatoire gaussien. Avec nos notations :

$$\ddot{x}(t) + 2\varpi\xi\dot{x}(t) + \varpi^2 x(t) = \gamma [\bar{U} + u(t)]^2 \quad (5.73)$$

Afin de pouvoir utiliser les méthodes proposées dans le cadre des équations différentielles stochastiques, cette équation doit être réécrite sous la forme 5.55. En posant $x_1 = x(t)$, $x_2 = \dot{x}(t)$ et $x_3 = u(t)$, l'équation du mouvement peut être réécrite dans un espace d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\varpi\xi x_2 - \varpi^2 x_1 + \gamma [\bar{U} + x_3]^2 \\ \dot{x}_3 &= -\alpha x_3 + \sigma_u \sqrt{2\alpha} \frac{dB(t)}{dt} \end{aligned} \quad (5.74)$$

La nécessité de passer par un espace d'état montre que l'étude d'un système dynamique (c'est-à-dire faisant intervenir des dérivées d'ordre 2 au moins) donne irrémédiablement naissance à un problème multidimensionnel. Dans les développements qui suivent, nous considérerons en un seul bloc l'espace de trois variables (x_1, x_2, x_3) . Dans le cas de l'étude de systèmes linéaires soumis à des fonctions polynômiales de processus gaussiens, cette démarche est quelque peu prohibitive. Une approche permettant de séparer les espaces d'état de la sollicitation d'une part et de la structure d'autre part sera présentée dans la suite.

Dans un espace à plusieurs variables, la forme générale d'une équation différentielle stochastique d'Ito est :

$$\{dx(t)\} = \{g(x(t), t)\} dt + [h(x(t), t)] \{dB(t)\} \quad (5.75)$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse actuellement, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2\varpi\xi x_2 - \varpi^2 x_1 + \gamma [\bar{U} + x_3]^2 \\ -\alpha x_3 \end{pmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u \sqrt{2\alpha} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dB \end{pmatrix} \quad (5.76)$$

Pour ce problème en définitive assez simpliste, le vecteur $\{g\}$ et la matrice $[h]$ ne dépendent pas explicitement du temps, ce qui exprime respectivement que le système étudié est autonome et que la sollicitation est stationnaire. On peut également remarquer que la matrice $[h]$ ne fait pas intervenir les variables d'état du système étudié, ce qui indique que la sollicitation n'est pas paramétrique. La règle de différentiation d'Ito permet d'écrire :

$$\frac{dE[\phi]}{dt} = E\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right] + \sum_{i=1}^N E\left[g_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E\left[(hbh^T)_{ij} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\right] \quad (5.77)$$

où $\phi(x, t)$ est une fonction scalaire quelconque et $[b] = E\left[\{dB(t)\} \{dB(t)\}^T\right]$. Pour le problème que nous étudions, et pour une fonction ϕ qui ne dépend pas explicitement du temps, cette relation se limite à :

$$\begin{aligned} \frac{dE[\phi]}{dt} &= E\left[x_2 \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right] + E\left[\left(-2\varpi\xi x_2 - \varpi^2 x_1 + \gamma [\bar{U} + x_3]^2\right) \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right] \\ &\quad - E\left[\alpha x_3 \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right] + E\left[\alpha \sigma_u^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial^2 x_3}\right] \end{aligned} \quad (5.78)$$

Nous avons vu ci-dessus que la règle de différentiation était généralement utilisée dans deux contextes particuliers. Nous allons nous limiter à la seconde possibilité, c'est-à-dire à dériver les équations aux moments qui gouvernent l'évolution au cours du temps des moments statistiques de différents ordres des variables aléatoires x_1 , x_2 et x_3 . Pour ce faire, il convient de choisir la fonction ϕ suivante :

$$\phi(x) = x_1^p x_2^q x_3^r \quad (5.79)$$

L'espérance mathématique de cette fonction représente le moment statistique (éventuellement conjoint) des variables aléatoires x_1 , x_2 et x_3 d'ordre (p, q, r) :

$$E[\phi] = E[x_1^p x_2^q x_3^r] = m(p, q, r) \quad (5.80)$$

Les équations aux moments s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{dm(p, q, r)}{dt} &= pE\left[x_1^{p-1} x_2^{q+1} x_3^r\right] + qE\left[\left(-2\varpi\xi x_2 - \varpi^2 x_1 + \gamma [\bar{U} + x_3]^2\right) x_1^p x_2^{q-1} x_3^r\right] \\ &\quad - \alpha r E[x_1^p x_2^q x_3^r] + \alpha \sigma_u^2 r(r-1) E[x_1^p x_2^q x_3^{r-2}] \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$\begin{aligned}
\dot{m}(p, q, r) = & -q\varpi^2 m(p+1, q-1, r) - (2q\varpi\xi + \alpha r) m(p, q, r) \\
& + \alpha\sigma_u^2 r (r-1) m(p, q, r-2) + pm(p-1, q+1, r) + \gamma q\bar{U}^2 m(p, q-1, r) \\
& + 2\gamma q\bar{U} m(p, q-1, r+1) + \gamma qm(p, q-1, r+2)
\end{aligned} \tag{5.82}$$

Dans ces relations, un terme doit être considéré comme nul lorsqu'un des arguments de la fonction m est négatif.

Au terme des développements menés dans le cadre des équations de Fokker-Planck-Kolmogorov, nous savons maintenant que les caractéristiques statistiques de la réponse de l'oscillateur évoluent au cours du temps. Dans le cadre du travail actuel, le problème qui nous intéresse en réalité n'est pas l'expression de cette diffusion de probabilité mais essentiellement les valeurs vers lesquelles la structure sollicitée (partant par exemple du repos) va se stabiliser. L'étude de l'état stationnaire est entrepris en imposant égales à zéro toutes les dérivées temporelles des moments statistiques. L'équation générique qui permet d'obtenir les moments statistiques de la réponse stationnaire de l'oscillateur est donc :

$$\begin{aligned}
0 = & -q\varpi^2 m(p+1, q-1, r) - (2q\varpi\xi + \alpha r) m(p, q, r) \\
& + \alpha\sigma_u^2 r (r-1) m(p, q, r-2) + pm(p-1, q+1, r) + \gamma q\bar{U}^2 m(p, q-1, r) \\
& + 2\gamma q\bar{U} m(p, q-1, r+1) + \gamma qm(p, q-1, r+2)
\end{aligned} \tag{5.83}$$

Ceci montre, comme annoncé, que les moments de la réponse s'obtiennent simplement par la résolution d'équations algébriques linéaires. En faisant varier les paramètres p , q et r , on peut ainsi balayer un ensemble d'équations algébriques qui forment alors un ensemble d'équations à résoudre. Si l'on parvient à obtenir, dans ce système, le même nombre d'équations que d'inconnues, les moments statistiques qui ont été retenus s'obtiennent alors par la résolution d'un système linéaire ! Nous insistons sur le fait que ceci semble un peu irréaliste comme conclusion quand on voit l'effort que nous avons fourni dans le domaine fréquentiel où l'obtention du moment d'ordre 4, par exemple, nécessitait le calcul du trispectre et son intégration sur un espace tridimensionnel de fréquences ! Dans le domaine temporel, l'obtention de ce même moment résulte simplement de la résolution d'un système d'équations linéaires.

Voyons maintenant plus en détails comment obtenir ce (ou ces systèmes) d'équations et la manière de les résoudre. Commençons par un exemple simple ; considérons les équations obtenues en posant $p = 0$ et $q = 0$. La relation 5.83 se réduit alors à :

$$0 = -\alpha r m(0, 0, r) + \alpha\sigma_u^2 r (r-1) m(0, 0, r-2) \tag{5.84}$$

En faisant varier r depuis 0 vers des valeurs de plus en plus grandes, on trouve successivement :

$$\begin{aligned}
0 &= -\alpha m(0, 0, 1) \\
0 &= -2\alpha m(0, 0, 2) + 2\alpha\sigma_u^2 m(0, 0, 0) \\
0 &= -3\alpha m(0, 0, 3) + 6\alpha\sigma_u^2 m(0, 0, 1) \\
0 &= -4\alpha m(0, 0, 4) + 12\alpha\sigma_u^2 m(0, 0, 2) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.85}$$

Ceci indique que le moment $m(0, 0, r)$ peut être calculé à condition d'avoir préalablement calculé l'expression du moment $m(0, 0, r - 2)$. Ce problème peut donc être résolu de façon récursive avec comme condition initiale, la connaissance de $m(0, 0, 0) = 1$ et $m(0, 0, 1) = 0$. L'étude des cas particuliers pour lesquels $p = 0$ et $q = 0$ mène alors à :

$$m(0, 0, r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ est impair} \\ \frac{r!}{2^{r/2}(\frac{r}{2})!} \sigma_u^r & \text{si } r \text{ est pair} \end{cases} \quad (5.86)$$

La facilité d'expression de ces relations peut se comprendre assez facilement. En effet, nous savons que l'effort sollicitant est un processus aléatoire d'Orstein-Uhlenbeck. Etant donné que la réponse structurelle ne modifie en aucune manière l'expression de l'effort appliqué, il paraît donc logique de pouvoir le caractériser aussi facilement³. Les moments que nous obtenons à la relation 5.86 ne sont en réalité rien d'autre que les moments de la composante turbulente du vent. En écrivant cette relation pour quelques valeurs de r , on trouve :

$$m(0, 0, 1) = E[u] = 0 \quad (5.87)$$

$$m(0, 0, 2) = E[u^2] = \sigma_u^2 \quad (5.88)$$

$$m(0, 0, 3) = E[u^3] = 0 \quad (5.89)$$

$$m(0, 0, 4) = E[u^4] = 3\sigma_u^4 \quad (5.90)$$

$$m(0, 0, 5) = E[u^5] = 0 \quad (5.91)$$

$$m(0, 0, 6) = E[u^6] = 15\sigma_u^6 \quad (5.92)$$

Ces relations sont maintenant bien connues puisque nous les avons déjà établies au paragraphe 4.2 et surtout utilisées plus que généreusement dans les développements précédents.

Nous allons maintenant nous convaincre que l'équation générique 5.83 peut être résolue pour n'importe quelle valeur de p et q . En étudiant attentivement les différents termes de l'équation dont question, on peut constater que la somme des deux premiers arguments de la fonction m est égale à $p + q$ pour les quatre premiers termes et $p + q - 1$ pour les trois derniers. Il paraît donc avantageux de procéder à une résolution par récurrence sur le nouvel indice $s = p + q$. Par exemple, en écrivant toutes les relations que l'on peut obtenir pour $s = 1$:

$$0 = -\alpha r m(1, 0, r) + \alpha \sigma_u^2 r (r - 1) m(1, 0, r - 2) + m(0, 1, r) \quad (5.93)$$

$$0 = -\varpi^2 m(1, 0, r) - (2\varpi\xi + \alpha r) m(0, 1, r) + \alpha \sigma_u^2 r (r - 1) m(0, 1, r - 2) \\ + \gamma \bar{U}^2 m(0, 0, r) + 2\gamma \bar{U} m(0, 0, r + 1) + \gamma m(0, 0, r + 2) \quad (5.94)$$

on forme un système de deux équations dont les inconnues sont les moments d'ordre $p + q = 1$. Ces deux relations assez simples peuvent également être notées sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha r & 1 \\ -\varpi^2 & -(2\varpi\xi + \alpha r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m(1, 0, r) \\ m(0, 1, r) \end{Bmatrix} + \{F_1\} + \{G_1\} \quad (5.95)$$

³On peut également se convaincre de ceci en constatant que les moments obtenus pour la variable aléatoire x_3 ne dépendent pas des caractéristiques structurelles.

où les termes $\{F_1\}$ et $\{G_1\}$ sont des vecteurs de grandeurs qui ont été préalablement déterminées, c'est-à-dire déterminées pour une valeur de r inférieure (pour $\{F_1\}$) ou pour une valeur de s inférieure (pour $\{G_1\}$) :

$$\{F_1\} = \alpha \sigma_u^2 r (r-1) \begin{Bmatrix} m(1, 0, r-2) \\ m(0, 1, r-2) \end{Bmatrix} \quad (5.96)$$

$$\{G_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma \bar{U}^2 m(0, 0, r) + 2\gamma \bar{U} m(0, 0, r+1) + \gamma m(0, 0, r+2) \end{Bmatrix} \quad (5.97)$$

Dans le contexte actuel, l'équation 5.95 est une équation homogène puisque nous étudions le problème stationnaire. On peut remarquer qu'aucune complication supplémentaire n'apparaît pour l'établissement du système d'équations différentielles permettant de prendre en compte les effets transitoires. Seule la méthode de résolution est plus complexe.

L'ensemble des équations différentielles qui régissent l'évolution des moments d'ordre $s = 1$ des variables aléatoires x_1 et x_2 peut donc être extrait et résolu en considérant des valeurs de plus en plus grandes du paramètre r . Par exemple, on trouve :

$$\begin{aligned} m(1, 0, 0) &= E[x_1] = \frac{\gamma (\bar{U}^2 + \sigma_u^2)}{\varpi^2} \\ m(0, 1, 0) &= E[x_2] = 0 \end{aligned}$$

Ces résultats sont assez logiques et correspondent à ce que nous avons par ailleurs établi à l'occasion de l'approche fréquentielle exacte (4.95). Lors de cette approche, nous n'avions pas explicitement exprimé les grandeurs statistiques croisées entre réponse structurelle et sollicitation. Ces relations sont maintenant nécessaires ; par exemple pour $r = 1$ et $r = 2$, on trouve :

$$m(1, 0, 1) = E[x_1 x_3] = \frac{2\gamma \bar{U} \sigma_u^2}{\alpha^2 + 2\xi \alpha \varpi + \varpi^2} \quad (5.98)$$

$$m(0, 1, 1) = E[x_2 x_3] = \frac{2\alpha \gamma \bar{U} \sigma_u^2}{\alpha^2 + 2\xi \alpha \varpi + \varpi^2} \quad (5.99)$$

$$m(1, 0, 2) = E[x_1 x_3^2] = \frac{\gamma \sigma_u^2 (\bar{U}^2 + \sigma_u^2)}{\varpi^2} + \frac{2\gamma \sigma_u^4}{4\alpha^2 + 4\xi \alpha \varpi + \varpi^2} \quad (5.100)$$

$$m(0, 1, 2) = E[x_2 x_3^2] = \frac{4\alpha \gamma \sigma_u^4}{4\alpha^2 + 4\xi \alpha \varpi + \varpi^2} \quad (5.101)$$

La détermination de ces moments peut continuer jusqu'à des valeurs de r aussi importantes que l'on désire. En pratique, il importe de continuer jusqu'à une valeur suffisamment grande pour que les moments d'ordres s plus grands puissent être obtenus. Nous reviendrons sur cet aspect dans la suite, à l'occasion de l'établissement de la stratégie de calcul.

Lorsque tous les moments d'ordre $s = 1$ nécessaires ont été déterminés, le calcul peut continuer avec les moments d'ordre 2 ($s = 2$). Nous pouvons maintenant écrire trois

équations telles que $s = 2$:

$$0 = -\alpha r m(2, 0, r) + \alpha \sigma_u^2 r (r-1) m(2, 0, r-2) + 2m(1, 1, r) \quad (5.102)$$

$$0 = -\varpi^2 m(2, 0, r) - (2\varpi\xi + \alpha r) m(1, 1, r) + \alpha \sigma_u^2 r (r-1) m(1, 1, r-2) \\ + m(0, 2, r) + \gamma \bar{U}^2 m(1, 0, r) + 2\gamma \bar{U} m(1, 0, r+1) + \gamma m(1, 0, r+2) \quad (5.103)$$

$$0 = -2\varpi^2 m(1, 1, r) - (4\varpi\xi + \alpha r) m(0, 2, r) + \alpha \sigma_u^2 r (r-1) m(0, 2, r-2) \\ + 2\gamma \bar{U}^2 m(0, 1, r) + 4\gamma \bar{U} m(0, 1, r+1) + 2\gamma m(0, 1, r+2) \quad (5.104)$$

ou, sous forme matricielle, et en conservant le formalisme général de l'équation différentielle :

$$\begin{Bmatrix} \dot{m}(2, 0, r) \\ \dot{m}(1, 1, r) \\ \dot{m}(0, 2, r) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha r & 2 & 0 \\ -\varpi^2 & -(2\varpi\xi + \alpha r) & 1 \\ 0 & -2\varpi^2 & -(4\varpi\xi + \alpha r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m(2, 0, r) \\ m(1, 1, r) \\ m(0, 2, r) \end{Bmatrix} + \{F_2\} + \{G_2\} \quad (5.105)$$

où, à nouveau, les vecteurs $\{F_2\}$ et $\{G_2\}$ sont des quantités préalablement et respectivement calculées pour des valeurs des paramètres r et s inférieures :

$$\{F_2\} = \alpha \sigma_u^2 r (r-1) \begin{Bmatrix} m(2, 0, r-2) \\ m(1, 1, r-2) \\ m(0, 2, r-2) \end{Bmatrix} \quad (5.106)$$

$$\{G_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma \bar{U}^2 m(1, 0, r) + 2\gamma \bar{U} m(1, 0, r+1) + \gamma m(1, 0, r+2) \\ 2\gamma \bar{U}^2 m(0, 1, r) + 4\gamma \bar{U} m(0, 1, r+1) + 2\gamma m(0, 1, r+2) \end{Bmatrix} \quad (5.107)$$

De nouveau, le système d'équations 5.105 peut être résolu pour des valeurs de plus en plus grandes du paramètre r . En commençant par $r = 0$, on trouve par exemple :

$$m(2, 0, 0) = E[x_1^2] = \frac{\gamma^2 (\bar{U}^4 + 6\bar{U}^2 \sigma_u^2 + 3\sigma_u^4)}{\varpi^4} + \frac{2\gamma^2 \alpha \bar{U}^2 \sigma_u^2 ((1 - 4\xi^2) \varpi - 2\xi \alpha)}{\xi \varpi^4 (\alpha^2 + 2\xi \alpha \varpi + \varpi^2)} \\ + \frac{2\gamma^2 \alpha \sigma_u^4 ((1 - 4\xi^2) \varpi - 4\xi \alpha)}{\xi \varpi^4 (4\alpha^2 + 4\xi \alpha \varpi + \varpi^2)} \quad (5.108)$$

$$m(1, 1, 0) = E[x_1 x_2] = 0 \quad (5.109)$$

$$m(0, 2, 0) = E[x_2^2] = \frac{2\gamma^2 \alpha \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\xi \varpi (\alpha^2 + 2\xi \alpha \varpi + \varpi^2)} + \frac{2\gamma^2 \alpha \sigma_u^4}{\xi \varpi (4\alpha^2 + 4\xi \alpha \varpi + \varpi^2)} \quad (5.110)$$

On peut constater que les expressions obtenues deviennent assez rapidement compliquées à traiter analytiquement. Afin de pouvoir établir une correspondance parfaite entre cette approche dans le domaine temporel et l'approche précédente dans le domaine fréquentiel, nous avons cependant décidé de mener ces développements analytiques jusqu'au calcul des moments d'ordre 4.

La résolution des équations aux moments fournit des moments statistiques (éventuellement croisés) totaux des variables d'état du système. Pour faciliter la comparaison avec les développements menés dans le domaine fréquentiel, lors desquels nous travaillions avec les moments centrés, on pourrait par exemple estimer la variance du déplacement :

$$\sigma_x^2 = m(2, 0, 0) - m(1, 0, 0)^2 \\ = \frac{2\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2}{\varpi^4} \left[\frac{\varpi (\alpha + 2\xi \varpi)}{\xi (\alpha^2 + 2\xi \alpha \varpi + \varpi^2)} \right] + \frac{2\gamma^2 \sigma_u^4}{\varpi^4} \left[\frac{\varpi (\alpha + \xi \varpi)}{\xi (4\alpha^2 + 4\xi \alpha \varpi + \varpi^2)} \right] \quad (5.111)$$

Cette expression est exactement la même que celle qui a été obtenue lors des développements dans le domaine fréquentiel (4.136), sur base de la densité spectrale de puissance complète, c'est-à-dire incluant le terme d'autoconvolution dans le chargement.

De manière plus générale, un système d'équation différentielle peut être écrit pour la détermination des moments d'ordre s :

$$\begin{Bmatrix} \dot{m}(s, 0, r) \\ \dot{m}(s-1, 1, r) \\ \vdots \\ \dot{m}(0, s, r) \end{Bmatrix} = [T_s] \begin{Bmatrix} m(s, 0, r) \\ m(s-1, 1, r) \\ \vdots \\ m(0, s, r) \end{Bmatrix} + \{F_s\} + \{G_s\} \quad (5.112)$$

où les nouvelles grandeurs introduites $[T_s]$, $\{F_s\}$ et $\{G_s\}$ ne représentent qu'une généralisation des grandeurs introduites aux équations 5.95 et 5.105 pour les cas particuliers $s = 1$ et $s = 2$. $[T_s]$ est une matrice tridiagonale définie par :

$$[T_s] = \begin{bmatrix} -\alpha r & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varpi^2 & -(2\varpi\xi + \alpha r) & s-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\varpi^2 & -(4\varpi\xi + \alpha r) & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3\varpi^2 & \ddots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -(2(s-1)\varpi\xi + \alpha r) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s\varpi^2 & -(2s\varpi\xi + \alpha r) \end{bmatrix} \quad (5.113)$$

Les vecteurs $\{F_s\}$ et $\{G_s\}$ ne constituent également qu'une généralisation des grandeurs introduites précédemment :

$$\{F_s\} = \alpha\sigma_u^2 r(r-1) \begin{Bmatrix} m(s, 0, r-2) \\ m(s-1, 1, r-2) \\ \vdots \\ m(0, s, r-2) \end{Bmatrix} \quad (5.114)$$

$$\{G_s\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sum_{k=0}^2 a_k m(s-1, 0, r+k) \\ 2 \sum_{k=0}^2 a_k m(s-2, 1, r+k) \\ \vdots \\ s \sum_{k=0}^2 a_k m(0, s-1, r+k) \end{Bmatrix} \quad (5.115)$$

$$\text{où } \{a\} = \begin{Bmatrix} \gamma \bar{U}^2 \\ 2\gamma \bar{U} \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

La résolution des systèmes d'équations ainsi obtenus pour des valeurs de plus en plus grandes de l'ordre d'état s permettent de déduire successivement les expressions des moments d'ordre 3 et 4 de la réponse de l'oscillateur simple. L'expression du moment d'ordre 3 de la réponse est assez longue. Son expression ainsi que les expressions des moments croisés intermédiaires nécessaires à son obtention ne sont donc pas repris dans

ce document ; nous nous contentons de ne donner ici que l'expression du moment centré d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
 \tilde{m}_3 &= m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 \\
 &= \frac{8\gamma^3\bar{U}^2\sigma_u^4}{(1+8\xi^2)\varpi^4} \\
 &\quad \frac{\sum_{k=0}^{k=7} a_k(\xi) \alpha^{7-k} \varpi^k}{(\alpha + 2\xi\varpi)(\alpha^2 + 2\xi\alpha\varpi + \varpi^2)^2(4\alpha^2 + 4\xi\alpha\varpi + \varpi^2)(\alpha^2 + 4\xi\alpha\varpi + 4\varpi^2)} \\
 &\quad + \frac{4\gamma^3\sigma_u^6}{(1+8\xi^2)\varpi^4} \frac{\sum_{k=0}^{k=3} b_k(\xi) \alpha^{3-k} \varpi^k}{(\alpha + \xi\varpi)(\alpha^2 + 2\xi\alpha\varpi + \varpi^2)(4\alpha^2 + 4\xi\alpha\varpi + \varpi^2)} \quad (5.116)
 \end{aligned}$$

On peut vérifier que cette relation est identique à celle qui a été obtenue dans le domaine fréquentiel (4.234). Nous ne donnons pas ici les expressions complètes du moment d'ordre 4 ainsi que du moment centré d'ordre 4 qui sont assez longues. On peut cependant vérifier que le cumulante d'ordre 4 obtenu par la résolution du système d'équations algébriques correspond cependant bien avec le cumulante obtenu par intégration du trispectre de la réponse.

L'exemple qui vient d'être présenté montre que les approches dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel, bien qu'empruntant chacune des cheminements complètement différents fournissent des résultats identiques. Dans le domaine fréquentiel, les moments centrés d'ordres 3 et 4 s'obtiennent par intégration numérique des bispectres et trispectres, alors que dans le domaine temporel, ces mêmes moments s'obtiennent simplement par la résolution d'un système d'équations linéaires.

Analytiquement, ces développements dans l'un ou l'autre domaine demandent plus ou moins les mêmes efforts étant donné que le théorème des résidus permet de faciliter grandement le calcul des intégrales multiples. Par contre, dans le cadre d'une application pratique où le problème doit inévitablement être traité de manière numérique, il va de soi que l'approche dans le domaine temporel se présente comme une méthode fulgurante. Par contre, à la liste des inconvénients de cette méthode, il convient de noter que :

- le système d'équations linéaires ne peut être résolu que lorsque ces équations ont été établies. Le lecteur pourra se rendre compte lui-même que l'établissement de ces équations a été assez fastidieux ; du moins, on peut convenir que l'établissement d'un tel système semble devoir être réalisé au cas par cas. Ceci ne laisse bien sûr présager que du négatif pour une éventuelle extension aux structures présentant plus d'un degré de liberté ainsi que pour un éventuel couplage systématique à un code aux éléments finis ;
- la représentation et l'interprétation physique du problème est bien plus claire dans le domaine fréquentiel. En effet, même si la notion de densité spectrale, et plus tard dans les développements de bispectre et de trispectre, peut sembler a priori assez floue, un utilisateur quelque peu habitué aux développements dans ce domaine peut assez facilement comprendre les grandeurs physiques mises en jeu. Ceci provient essentiellement du fait que la réponse s'obtient par la multiplication du spectre de la sollicitation par le noyau de Volterra d'ordre associé. L'interprétation physique d'une multiplication est sans aucun doute bien plus évidente que celle d'une résolution d'un système d'équations, même linéaires. En bref, la résolution dans le

domaine temporel ne permet pas vraiment de porter un jugement physique sur les grandeurs obtenues ; les moments de la réponse sortent de la résolution sans que l'on ne puisse réellement comprendre s'ils proviennent par exemple plutôt d'un contenu en basse fréquence, d'un pic de résonance, d'une crête d'interaction fréquentielle ...

- l'utilisation des équations différentielles stochastiques se prête bien au problème que nous avons étudié. En effet, la composante turbulente du vent est représentée par un processus aléatoire d'Ornstein-Uhlenbeck. Ce processus très particulier est le processus autorégressif le plus simple qui existe. Cela a permis de le traiter de façon très simple dans les développements précédents. La forme des équations 5.75 et 5.76 montre que la méthode d'analyse basée sur les équations aux moments ne peut s'appliquer que lorsque la composante turbulente du vent est un processus autorégressif. Cela ne constitue pas un problème en soi car on peut montrer qu'un processus réel peut être approché d'aussi près que désiré par un processus autorégressif. Cela complique cependant fortement l'approche présentée dans ce chapitre. Nous serons donc confrontés à des problèmes de généralisation lorsque la méthode devra être appliquée plus rigoureusement dans le cadre des densités spectrales plus réalistes rencontrées dans le domaine du génie civil.

5.3.3 Stratégie de calcul

Nous venons de voir, sur un exemple simple, que l'application de la règle de différentiation d'Ito permettrait de résoudre très facilement les équations différentielles stochastiques régissant le problème étudié. Dans cet exemple, l'équation générique correspondant à différentes fonctions φ a été écrite et résolue pour plusieurs groupes de triplets (p, q, r) . La stratégie mise au point à l'occasion de cet exemple ne s'appliquera pas nécessairement à d'autres problèmes et c'est essentiellement en ce point que résident les complications inhérentes à l'application de la règle de différentiation d'Ito.

Reprenons de manière plus systématique la façon dont la stratégie de calcul a été établie pour l'exemple présenté ci-dessus. Comme dans tout problème, la première chose à considérer est l'objectif à atteindre, soit l'ordre maximal en l'une des variables d'état. Imposons-nous par exemple de déterminer les moments statistiques de la réponse jusqu'à l'ordre $s_{\max} = 4$. Ceci permet déjà de représenter assez bien le caractère non gaussien de la réponse. La démarche systématique consiste alors à démarrer de cet objectif et à revenir en arrière tout en listant les moments (d'ordres inférieurs en r et s) qui sont nécessaires à l'atteinte de cet objectif. L'équation générique (5.83) montre que la détermination des moments d'ordre $s_{\max}$ et $r = 0$ ne peut se faire qu'à condition d'avoir préalablement déterminé les moments d'ordre $s_{\max} - 1$ et $r = 0, 1$ et 2 . La figure 5.3 illustre graphiquement la démarche. La première figure indique que la détermination des moments⁴ ($r = 0; s = 4$) représentés par l'étoile nécessite la connaissance des moments ($r = 0, 1, 2; s = 3$).

Le cheminement peut ainsi continuer en considérant successivement la liste des moments qu'il est nécessaire d'avoir évalué avant de pouvoir calculer ces premiers moments ($r = 0, 1, 2; s = 3$). Pour chacun de ces trois groupes de moments, l'observation de l'équation générique permet de repérer la liste des moments nécessaires à leur évaluation. Ceux-

⁴L'imposition de $r = 0$ et $s = 4$ représente plusieurs moments puisque $s = p + q$. Ainsi, les moments d'ordre ($r = 0; s = 4$) forment en réalité l'ensemble des moments suivants : $m(4, 0, 0)$, $m(3, 1, 0)$, $m(2, 2, 0)$, $m(1, 3, 0)$ et $m(0, 4, 0)$.

ci sont représentés sur la seconde ligne de la figure 5.3. En regroupant les nouveaux ronds ainsi disposés, on peut constater que les moments $(r = 0, 1, 2; s = 3)$ ne peuvent être déterminés qu'à condition d'avoir préalablement calculé les moments $(r = 0, 1, 2, 3, 4; s = 2)$. On peut également noter que les moments $(r = 2; s = 3)$ ne peuvent être obtenus qu'après l'estimation des moments $(r = 0; s = 3)$, ce qui ne pose en fait aucun problème. En effet, lorsque les moments $(r = 0, 1, 2, 3, 4; s = 2)$ seront établis, il suffira de commencer par l'estimation des moments $(r = 0; s = 3)$, puis $(r = 1; s = 3)$ et finalement $(r = 2; s = 3)$. En définitive, les moments d'ordre $(r = 0, 1, 2; s = 3)$ pourront être obtenus dès lors que les cinq groupes de moments d'ordres $(r = 0, 1, 2, 3, 4; s = 2)$ auront été établis.

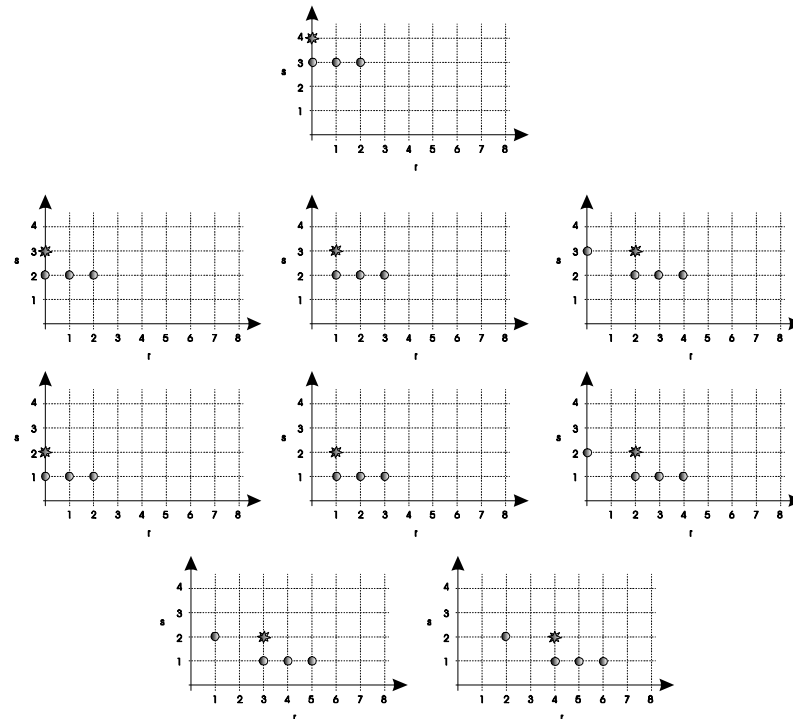


FIG. 5.3 – Stratégie de calcul des moments statistiques

Les cinq derniers graphiques de la figure 5.3 illustrent les moments à déterminer avant de pouvoir estimer ces cinq derniers groupes. Par un raisonnement similaire, on se convainc assez facilement que la condition nécessaire est d'avoir estimé les moments d'ordre $(r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; s = 1)$. De nouveau, il faut ajouter que ces groupes de moments doivent être évalués pour des valeurs de r croissantes. Finalement, et cela n'est cette fois pas représenté sur le graphique, la dernière étape consiste à considérer que ces sept groupes de moments ne pourront être évalués qu'après évaluation des moments $(r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; s = 0)$.

La démarche qui vient d'être suivie à reculons constitue la stratégie de calcul des moments statistiques de la réponse. Une fois ce cheminement établi, il suffit de le reproduire, dans le sens correct de la marche cette fois, pour déterminer successivement les moments statistiques qui permettront d'atteindre l'objectif fixé. Cette démarche est reproduite dans son intégralité à la figure 5.4. C'est le cheminement qui a été suivi ci-dessus pour

l'estimation analytique des moments d'ordre 3 et 4 de la réponse de l'oscillateur simple. On peut par exemple se souvenir que la première opération a été de poser $p = 0$ et $q = 0$, soit $s = 0$, et d'étudier les moments jusqu'à l'ordre 8 de la sollicitation.

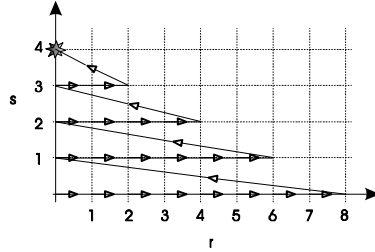


FIG. 5.4 – Stratégie de calcul des moments statistiques (résumé)

La démarche stratégique à suivre pour calculer le moment d'ordre $s_{\max}$ de la réponse peut être généralisée au cas d'une structure sollicitée par un polynôme de degré d d'un processus gaussien. Les raisonnements sont similaires à ceux qui viennent d'être présentés dans le cas particulier $d = 2$ et $s_{\max} = 4$. Seul un résumé de la méthodologie est présenté ici :

1. calculer les caractéristiques de l'effort appliqué jusqu'à l'ordre $r_{\max} = s_{\max}d$
2. calculer les moments d'ordre $s = 1$ pour les déplacements et vitesses pour des valeurs de r variant depuis $r = 0$ jusqu'à $r = r_{\max} - d$ (et dans cet ordre)
3. calculer les moments d'ordre $s = 2$ pour les déplacements et vitesses pour des valeurs de r variant depuis $r = 0$ jusqu'à $r = r_{\max} - 2d$ (et dans cet ordre)
4. continuer de la sorte jusqu'à la détermination des moments d'ordre $s = s_{\max}$ pour les déplacements et vitesses. En suivant la même logique, le paramètre r ne devrait plus varier que depuis 0 jusqu'à $r = r_{\max} - s_{\max}d = 0$. On étudie donc ainsi les moments croisés entre vitesse et déplacement uniquement.

A la figure 5.4, on peut constater que le moment d'ordre 4 de la réponse, que ce soit en vitesse ou déplacement, ne peut être obtenu que si le moment d'ordre 8 de la vitesse du vent a été déterminé. Ceci ne pose en pratique aucun problème étant donné que la vitesse du vent est supposée gaussienne. Par ailleurs, ceci peut également laisser place à la réflexion : la vitesse du vent est généralement considérée comme gaussienne car les cumulants d'ordres 3 et 4 sont pratiquement nuls ; qu'en est-il des cumulants d'ordres supérieurs ?

La classification du vent en tant que processus gaussien revient à formuler des hypothèses sur la forme des moments d'ordres supérieurs à l'ordre 2. Ceci peut être assez lourd en conséquences pour l'estimation des moments d'ordres supérieurs de la réponse puisqu'ils dépendent également des moments d'ordre 5, 6, 7 et 8 de la composante turbulente du vent.⁵

⁵Notons que cette réflexion aurait également pu être formulée lors de l'approche dans le domaine fréquentiel. En effet, souvenons-nous qu'un des termes de l'expression du trispectre faisait intervenir une intégrale (4.332). L'origine de ce terme était un moment d'ordre 8 de la composante turbulente du vent (4.309 qui a donné naissance au terme $r_H(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$). Lors de cette étude dans le domaine fréquentiel, nous avons pu constater que l'importance de ce terme d'ordre 8 était limitée ($N_2 \ll N_1$) ;

Il paraît assez illogique que le vent puisse être exactement caractérisé par un processus aléatoire gaussien ; d'autre part, il paraît, du moins à l'heure actuelle, inconcevable d'espérer pouvoir identifier les moments d'ordres supérieurs de la vitesse du vent. Cette réflexion nous démotive à procéder à l'estimation des moments d'ordre 4 de la réponse. L'examen des relations permettant d'établir les caractéristiques d'ordre 3 de la réponse, que ce soit dans le domaine fréquentiel ou temporel, montre que la contribution essentielle à ces moments provient des moments d'ordre 4 de la composante turbulente du vent. Il nous semble donc que les calculs entrepris à cet ordre soient tout à fait réalistes. C'est pour cette raison que nous nous sommes essentiellement concentrés, dans la suite, sur le calcul des caractéristiques d'ordre 3 de la réponse.

5.3.4 Séparation des variables d'état

Des développements précédents, une constatation assez évidente peut être tirée : l'analyse a été réalisée sur trois variables d'état x_1 , x_2 et x_3 qui semblent former deux groupes bien distincts : x_1 et x_2 d'une part, x_3 d'autre part. En effet, on conçoit aisément que les deux premières puissent être regroupées, étant donné qu'elles représentent les variables d'état de la structure. En outre, la stratégie de résolution des équations d'Ito nous a montré que les deux premières variables devaient être regroupées sous le paramètre s .

Il pourrait donc être intéressant de traiter ces trois variables d'état comme deux systèmes différents, ce qui semble également assez logique puisque la vitesse du vent est filtrée une première fois par le filtre polynômial et une seconde fois par le structuré. L'avantage d'une telle procédure consiste à obtenir une parfaite distinction entre la structure et la sollicitation. On peut alors assez facilement changer de sollicitation sans changer de structure, c'est-à-dire prendre en compte d'autres contenus fréquentiels pour la turbulence du vent.

A ce stade de la présentation, il est encore trop tôt pour comprendre que l'avantage primordial de cette séparation consiste en une réduction plus que substantielle de la taille du système d'équations à résoudre. Nous verrons que l'étude d'une structure à plusieurs degrés de liberté devient très vite laborieuse. Cette sous-structuration en sollicitation d'une part et structure de l'autre permet de travailler avec des systèmes plus petits et donc plus facilement maniables. Etant donné que les raisons précises de cette séparation de variables concernent essentiellement les systèmes à plusieurs degrés de liberté, nous présenterons cette réorganisation dans la partie dédiée à l'étude de structures à plusieurs degrés de liberté.

5.4 Conclusions

Ce chapitre relativement court vient de présenter la méthode d'analyse stochastique permettant de traiter les phénomènes dynamiques les plus divers (instationnarité, excitation non linéaire, paramétrique, comportement structurel non linéaire, ...). L'application de cette méthode dans le cadre de notre problème (finalement assez simple de ce point

ces conclusions émanent cependant de l'hypothèse de gaussianité de la composante turbulente du vent. Il n'est pas certain que ceci soit toujours valable en utilisant une expression plus réaliste du moment d'ordre 8 de la vitesse du vent.

de vue!) permet de retrouver exactement les mêmes résultats que ceux du chapitre précédent, obtenus dans le domaine fréquentiel.

Bien que cette méthode soit relativement générale, nous avons pu constater que les caractéristiques statistiques à calculer pouvaient être obtenues par la résolution d'un simple système d'équations algébriques. Par contre, dans le domaine fréquentiel, le calcul des mêmes grandeurs nécessitait un effort considérable, celui du calcul d'intégrales de fonctions d'une, deux ou trois variables. L'extrême efficacité de cette approche dans le domaine temporel est due à une représentation simplifiée de la sollicitation, résultant obligatoirement du filtrage d'un bruit blanc. Contrairement à l'approche dans le domaine fréquentiel, cette méthode n'est donc applicable aux sollicitations plus réalistes du domaine étudié qu'au prix de certaines hypothèses simplificatrices concernant la représentation du champ de sollicitations.

Chapitre 6

Simulations de Monte Carlo

"Statistique n'est pas probabilité. Sous le nom de statistique mathématique des auteurs, qui, je vous le dis en français n'écrivent guère dans notre langue, ont édifié une pompeuse discipline riche en hypothèses qui ne sont jamais satisfaites"

Jean-Paul Benzécri, l'Analyse Des Données, 1972

6.1 Introduction

Jusqu'à ce point, nous avons déjà présenté deux méthodes complètement différentes pour l'analyse de structures soumises à des forces résultant de l'effet de la turbulence du vent sur une structure à un seul degré de liberté. La troisième approche "rigoureuse" consiste en une analyse par simulations de Monte Carlo. Ce genre d'approche est également à considérer comme une approche temporelle puisqu'elle consiste à générer des échantillons de vitesses de vent et à les utiliser ensuite en tant que sollicitations déterministes d'une structure déterministe. Les méthodes de résolution à mettre en oeuvre sont donc des méthodes de résolution de problèmes dynamiques déterministes : les méthodes pas-à-pas.

Ce genre d'analyse par simulations de Monte Carlo dépend d'un nombre assez important de paramètres, même dans sa version la plus rudimentaire. Au niveau de la génération, il s'agit par exemple de la fréquence de discrétisation de la densité spectrale cible, de la durée des échantillons à générer ou encore de leur résolution temporelle. L'analyse dynamique pas-à-pas nécessite également de choisir un pas de temps pour la résolution ainsi que le nombre de pas étudiés (qui a priori pourraient être différents de ceux issus de la génération).

Il est important de bien cerner les limitations résultant du choix de ces paramètres. Une démarche trop peu réfléchie pourrait en effet déboucher sur une réponse de qualité médiocre dans l'un des domaines, temporel ou fréquentiel. Par contre, un choix judicieux de chacun des paramètres de la génération et de la résolution permettra d'obtenir les

précisions requises, celles que l'analyste exige et se fixe avant la résolution. Il s'agit d'un point extrêmement important sur lequel on ne saurait trop insister.

L'importance d'un choix réfléchi de tous ces paramètres peut être illustrée par le principe d'incertitude : une précision plus importante dans l'un des domaines ne peut être obtenue qu'au prix d'une résolution moindre dans le domaine dual (à condition de conserver une taille d'échantillon semblable) :

$$\Delta n . \Delta t \leq \frac{1}{N} \quad (6.1)$$

Comme corollaire, cette relation montre que s'imposer une précision trop importante dans les deux domaines simultanément n'est réalisable qu'au moyen d'échantillons de grandes tailles ($N \gg$), ce qui est peu économique. Il est donc important de pouvoir s'imposer des limites les plus strictes possibles en fonction du problème traité.

Sur base de raisonnements simples menés sur l'oscillateur à un degré de liberté, nous présenterons dans un premier temps la manière de choisir les paramètres de génération. Des critères seront établis en fonction de la résolution fréquentielle ainsi que de la fréquence maximale à représenter. Ils seront formulés de sorte à représenter correctement les caractéristiques structurelles d'une part et celles de la sollicitation d'autre part. Après avoir analysé ces deux points, ces premiers critères élaborés seront complétés de manière à prendre également en compte les caractéristiques de stabilité et de précision de l'algorithme utilisé pour la résolution pas-à-pas.

Lorsque ces développements assez généraux seront présentés, nous nous focaliserons ensuite sur l'étude de l'oscillateur simple soumis au carré d'un processus gaussien.

Avant de rentrer dans ces détails, deux remarques importantes doivent être formulées. Tout d'abord, étant donné que la méthode de génération est basée sur l'algorithme numérique de la transformée de Fourier, les fréquences utilisées pour la représentation des densités spectrales doivent obligatoirement être espacées uniformément ; ceci est assez limitatif en soi car il est généralement plus économique d'augmenter la résolution dans le voisinage des pics de résonance ou dans les zones de basses fréquences dans lesquelles la sollicitation a un contenu plus important (pour le vent turbulent).

D'autre part, il convient également de remarquer dès à présent que les caractéristiques (par exemple, le pas de temps Δt et la durée T) associées à la génération ainsi qu'à la résolution doivent être identiques. Ce n'est pas parce que ces deux étapes arrivent successivement dans le raisonnement qu'elles doivent être traitées séparément. En effet, admettons dans un premier temps que les paramètres de génération et de résolution soient choisis indépendamment l'un de l'autre. La répartition fréquentielle de l'énergie du vent est telle que les échantillons les plus intéressants sont de l'ordre de $T = 500s$ à $T = 1000s$ avec un pas de temps $\Delta t = 0.1s$. Le contenu aux hautes fréquences est moins important, si bien qu'une résolution temporelle plus fine ne permettra pas de mieux représenter le phénomène. On préfère donc générer des échantillons plus longs, avec un pas de temps plus grand. Par contre, en ce qui concerne l'analyse pas-à-pas, pour les structures étudiées dans le domaine du génie civil, les paramètres choisis sont de l'ordre de $\Delta t \simeq 0.02s$ et $T = 20s$.

On pourrait donc imaginer de ne travailler que sur les 20 premières secondes de l'échantillon de vitesse de vent et ensuite d'interpoler entre les valeurs générées afin d'obtenir une vitesse de vent toutes les $0.02s$. Cette façon de procéder revient à augmenter le

contenu en hautes fréquences de l'échantillon¹. La figure 6.1 donne un exemple d'échantillon généré (sur la droite, représenté par les carrés) et d'échantillon enrichi (représenté par les petits ronds). Cette représentation indique déjà clairement que le contenu en hautes fréquences que l'on essaie d'ajouter n'est pas correct puisque l'on affine la représentation du phénomène à l'aide de points alignés : le contenu en hautes fréquences est donc nul ! La figure inférieure trace la densité spectrale de l'échantillon généré ainsi que celle de l'échantillon enrichi. On constate que le contenu ajouté aux hautes fréquences ne représente rien de valable et certainement pas ce que cet échantillon devrait avoir dans cet intervalle de fréquences.

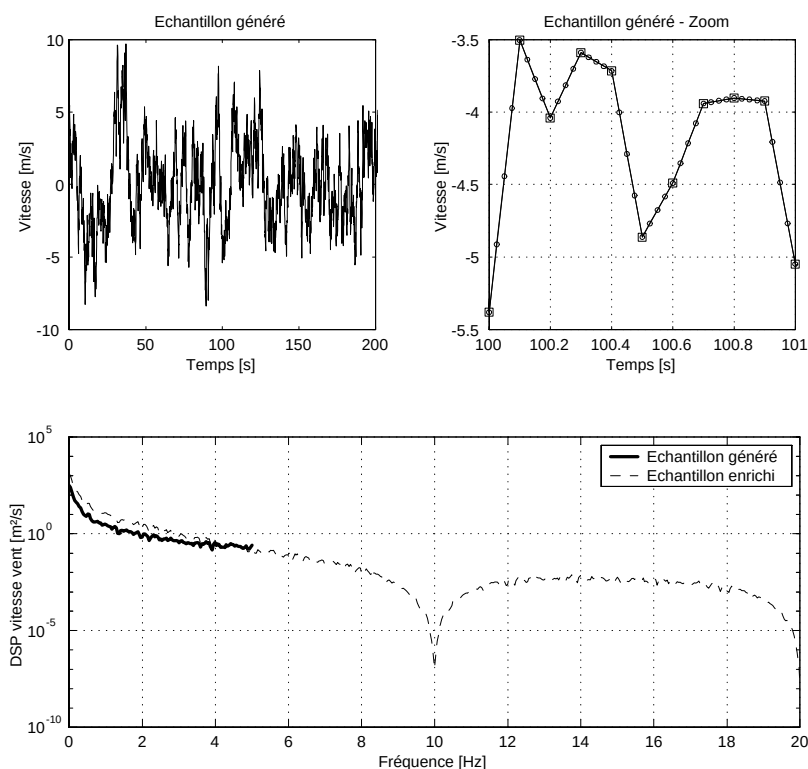


FIG. 6.1 – Enrichissement d'un échantillon par interpolation

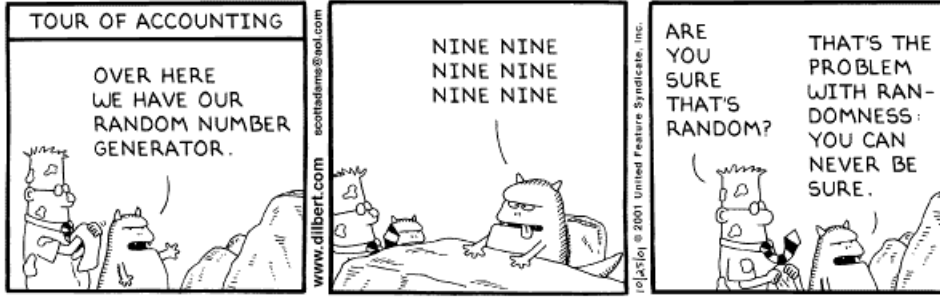
C'est pour cette raison que nous recommandons d'utiliser les mêmes paramètres pour la génération et l'analyse ; nous ne parlerons donc plus que des paramètres de génération. Dans la suite, nous ne travaillerons qu'avec ce choix personnel qui, dans certains cas, pourrait être limitatif dans le sens où il impose une taille plus importante pour les échantillons.

6.2 Génération d'échantillons de processus aléatoires

La simulation d'histoires à partir de densités spectrales trouve son intérêt aussi bien dans les problèmes linéaires (vérification) que non linéaires.

¹En vertu du principe d'incertitude, si le pas de temps Δt diminue, la fréquence maximale représentée $\frac{N\Delta f}{2}$ (d'après de le théorème de Shannon) devient plus importante.

Après un bref rappel sur le calcul numérique des densités spectrales, ce paragraphe développe deux méthodes de simulations d'histoires à partir de densités spectrales de puissance : les séries de Fourier et les filtres autorégressifs. Il présente également quelques particularités du programme *Gwind* que nous avons développé permettant la simulation d'une histoire de vent en un point de l'espace (processus unidimensionnel). Dans un second temps, une méthode de génération multidimensionnelle sera présentée ; elle explique la procédure à suivre (ainsi que son application dans le programme *Gwind3D*) pour générer un champ de vitesse dans l'espace ; ce champ doit satisfaire des densités spectrales unidimensionnelles spécifiées en chacun des points ainsi que des fonctions de cohérence entre ces points.



Copyright © 2001 United Feature Syndicate, Inc.

FIG. 6.2 – La génération de nombres aléatoires (United Feature Syndicate, Inc)

6.2.1 Le calcul numérique des densités spectrales de puissance

Nécessité de la décomposition de l'échantillon en blocs

Nous savons que, sous l'hypothèse d'ergodicité, la densité spectrale d'un processus stationnaire peut être calculée à partir d'une de ses réalisations :

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |X(\omega, T)|^2 \quad (6.2)$$

où $X(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt$ représente la transformée de Fourier tronquée de l'échantillon $x(t)$.

Sous les mêmes hypothèses, les densités spectrales croisées entre deux processus peuvent être calculées à partir d'un échantillon de chaque processus :

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |X(\omega, T) \overline{Y(\omega, T)}| \quad (6.3)$$

où $Y(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} y(t) e^{-j\omega t} dt$ représente la transformée de Fourier tronquée de l'échantillon $y(t)$.

D'un point de vue numérique, les densités de puissance ne sont néanmoins pas tout à fait calculées de la sorte. Afin de limiter l'importance des deux hypothèses formulées (stationnarité et ergodicité), on recourt habituellement à la méthode du spectrogramme moyen (méthode de Welch, [96]).

Cette méthode consiste à subdiviser en plusieurs blocs l'échantillon du processus dont on désire obtenir la densité spectrale. Pour chacun de ces blocs, une formule du type 6.2 est utilisée afin d'obtenir un spectrogramme, c'est-à-dire la densité spectrale d'un bloc. La moyenne de ces spectrogrammes donne la densité spectrale de puissance du processus. Cette méthode est illustrée aux figures 6.3 à 6.5. Sur ces figures, la densité spectrale de puissance est calculée en utilisant un seul bloc de 3000 points (Fig. 6.3), trois blocs de 1024 points, avec un recouvrement de 375 points (Fig. 6.4) et finalement huit blocs de 512 points avec un recouvrement de 160 points. La comparaison de ces trois figures illustre les bienfaits du calcul de la densité spectrale de puissance à l'aide de la méthode du spectrogramme moyen : de toute évidence, il en résulte une densité spectrale certes définie en un plus petit nombre de points mais plus lisse et donc aussi plus facilement interprétable. L'ordre de grandeur de 10 spectrogrammes peut être retenu afin d'obtenir une densité spectrale de puissance représentative. L'utilisateur est alors libre d'utiliser des blocs de plus grande taille et superposés, ou de plus petite taille et juxtaposés.

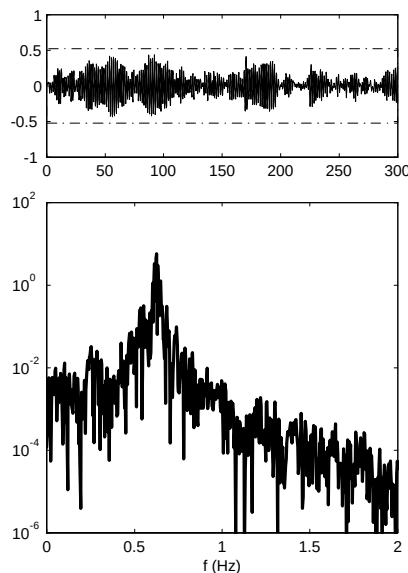


FIG. 6.3 – Calcul numérique de la densité spectrale d'un signal (1 bloc de 3000 points)

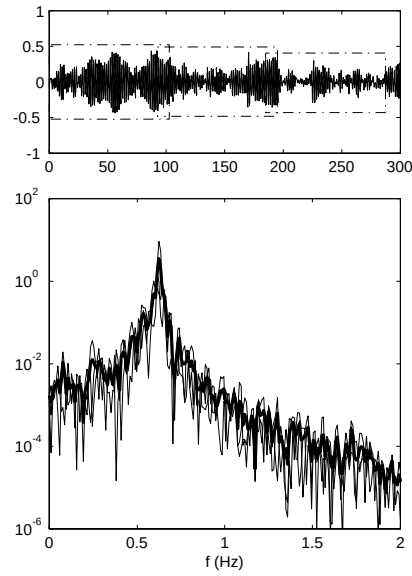


FIG. 6.4 – Calcul numérique de la densité spectrale d'un signal (3 blocs de 1024 points, recouvrement 375 points)

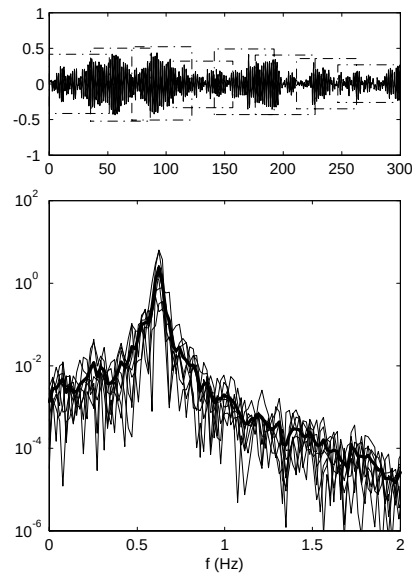


FIG. 6.5 – Calcul numérique de la densité spectrale d'un signal (8 blocs de 512 points, recouvrement 160 points)

Pour les densités spectrales croisées, la méthode est identique mais la relation 6.3 est utilisée plutôt que la relation 6.2.

Trois remarques importantes sont à formuler concernant cette méthode :

- même si la norme au carré de la transformée de Fourier de l'échantillon complet cor-

respond exactement à la densité spectrale cible (voir ci-après, méthode des séries de Fourier), la densité spectrale calculée à l'aide de cette méthode ne correspondra pas exactement à la densité spectrale cible désirée. Ceci provient de la décomposition du signal en blocs pour le calcul de sa densité spectrale ;

- si la méthode du spectrogramme moyen n'était pas utilisée, on n'obtiendrait que des signaux parfaitement cohérents lors du traitement de signaux différents. En effet,

$$\begin{aligned}\gamma(\omega) &= \frac{S_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}} = \frac{|X(\omega, T)\overline{Y(\omega, T)}|}{\sqrt{|X(\omega, T)|^2 |Y(\omega, T)|^2}} \\ &= \frac{|X(\omega, T)| |Y(\omega, T)|}{\sqrt{|X(\omega, T)|^2 |Y(\omega, T)|^2}} = 1\end{aligned}\quad (6.4)$$

alors que si la méthode de Welch est utilisée, on obtient :

$$\gamma(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}} \simeq \frac{\sum |X_i(\omega, \tilde{T})\overline{Y_i(\omega, \tilde{T})}|}{\sqrt{\sum |X_i(\omega, \tilde{T})|^2 \sum |Y_i(\omega, \tilde{T})|^2}} \neq 1 \quad (6.5)$$

où $\tilde{T}$ représente la durée de chacun des morceaux d'échantillons et où la sommation porte sur le nombre de blocs.

- comme cela est illustré assez clairement aux figures 6.3 à 6.5, une autre conséquence importante de l'utilisation de cette méthode consiste à calculer la densité spectrale avec un pas de fréquence moins fin que celui de la transformée de Fourier de l'échantillon non subdivisé mais tout en conservant la même fréquence de Nyquist (plus grande fréquence représentée). En effet, admettons que l'on désire calculer la densité spectrale d'un échantillon comprenant N valeurs espacées avec un intervalle de temps Δt . La transformée de Fourier du signal complet est caractérisée par un intervalle de fréquence Δn et une fréquence de Nyquist donnés par :

$$\Delta n = \frac{1}{N\Delta t} \quad n_{Ny} = \frac{N\Delta n}{2} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (6.6)$$

Supposons maintenant que le calcul soit réalisé sur M blocs. La durée de chacun d'eux est donc donnée par :

$$\tilde{T} = \frac{T}{M} = \frac{N\Delta t}{M} \quad (6.7)$$

Etant donné que chaque échantillon est représenté par N/M valeurs, l'intervalle de fréquence et la fréquence de Nyquist seront respectivement :

$$\widetilde{\Delta n} = \frac{1}{\tilde{T}} = \frac{M}{N\Delta t} = M\Delta n \quad \widetilde{n_{Ny}} = \frac{\frac{N}{M}\widetilde{\Delta n}}{2} = \frac{1}{2\Delta t} = n_{Ny} \quad (6.8)$$

Mise à l'échelle physique des densités spectrales numériques

La propriété fondamentale de la densité spectrale d'un processus aléatoire est que son intégration sur les fréquences correspond à la variance du processus :

$$\int_0^{+\infty} S_x(n)dn = \sigma_x^2 \quad (6.9)$$

Elle permet de relier les domaines fréquentiel et temporel par le biais d'une conservation d'énergie. L'équivalent numérique de cette relation analytique peut être obtenu en recourant par exemple à l'intégration par la méthode des trapèzes :

$$\underbrace{\left[\frac{1}{2} S_x(0) + \sum_{i=1}^{N/2} S_x(i\Delta n) + \frac{1}{2} S_x\left(\left(\frac{N}{2} + 1\right)\Delta n\right) \right] \Delta n}_{\text{domaine fréquentiel}} = \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}_{\text{domaine temporel}} \quad (6.10)$$

L'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel repose sur la multiplication de la densité spectrale de l'effort par la matrice de transfert de l'oscillateur. Lorsque cette étude est menée numériquement, cette multiplication ne peut avoir lieu que pour un nombre discret de fréquences choisies ($n_i = i\Delta n$). Le membre de gauche de la relation 6.10 peut donc ensuite être utilisé pour déterminer la variance de la réponse.

Plaçons-nous maintenant dans le contexte de la transformée de Fourier discrète ; la conservation d'énergie d'un domaine à l'autre s'exprime par le théorème de Parseval :

$$\sum_{i=0}^{N-1} |X_i|^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (6.11)$$

où X_i représente, pour la fréquence n_i , la transformée de Fourier du signal discret x_i . Lorsque le signal est réel dans le domaine temporel, cette relation se simplifie en :

$$X_0^2 + 2 \sum_{i=1}^{N/2-1} |X_i|^2 + X_{N-1}^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (6.12)$$

Pour faciliter la comparaison avec l'équation 6.10, on peut également écrire :

$$\frac{2}{N\Delta n} \left[\frac{1}{2} X_0^2 + \sum_{i=1}^{N/2-1} |X_i|^2 + \frac{1}{2} X_{N-1}^2 \right] \Delta f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (6.13)$$

La propriété fondamentale de la densité spectrale est donc vérifiée à condition de la définir, d'un point de vue numérique par :

$$S_i = \frac{2}{N\Delta n} |X_i|^2 \quad (6.14)$$

Dans le contexte d'un logiciel de calcul comme MatLab, par exemple, le signal discrétisé x dont on veut obtenir la densité spectrale est stocké sous la forme d'un vecteur. La fonction *psd* renvoie un vecteur comprenant la densité spectrale du puissance (éventuellement calculée par blocs) de ce signal. Ce calcul numérique de la densité spectrale ne nécessite pas la connaissance du pas de temps de définition du signal, ni du pas de fréquence pour la sortie de la densité spectrale numérique.

L'équation 6.10 montre que l'énergie dans le domaine temporel ne dépend pas du pas de temps choisi. Par contre, l'énergie dans le domaine fréquentiel dépend de la résolution fréquentielle choisie. Il est donc impossible que la densité spectrale calculée par le logiciel soit telle que la conservation d'énergie soit vérifiée. En réalité, le programme se contente

simplement de moyenner des spectrogrammes qui ne sont que les normes au carré des transformées de Fourier. En simplifiant les notations, le logiciel calcule simplement :

$$S_i^{(num)} = |X_i|^2 \quad (6.15)$$

Ceci peut être assez gênant à partir du moment où des résultats d'analyses dans les domaines temporel et fréquentiel doivent être comparés. Admettons par exemple que l'on désire superposer sur un même graphique une densité spectrale (numérique, dans le sens, calculée point par point) obtenue par une analyse stochastique dans le domaine fréquentiel et la densité spectrale (numérique, obtenue par exemple par application de la fonction *psd*) d'un signal discrétisé. Les deux courbes ne seront comparables qu'à condition de multiplier la seconde par le facteur $\frac{2}{N\Delta n}$ dépendant de l'analyse en cours.

Afin de pallier cet inconvénient, nous avons décidé de multiplier par $\frac{N\Delta n}{2}$ toute densité spectrale analytique qui devait être stockée numériquement. Ainsi, dès la génération des échantillons, les signaux obtenus ont des dimensions comparables à leurs expressions analytiques. Il s'agit donc d'une mise à l'échelle physique des densités spectrales.

Profitions de ces remarques sur le traitement numérique des densités spectrales pour ajouter ce commentaire : la valeur à l'origine dans la densité spectrale cible ne représente pas la moyenne de l'échantillon et n'a en réalité de signification physique que lorsque la densité spectrale est traitée de façon analytique. Numériquement, nous avons décidé de reporter le contenu fréquentiel associé à la fréquence $f = 0$ sur la fréquence de discrétisation suivante Δf . L'opération suivante est donc répétée lors de la discrétisation d'une densité spectrale de puissance : $S(\Delta f) = S(\Delta f) + \frac{S(0)}{2}$ et $S(0) = 0$.

6.2.2 Génération d'un processus unidimensionnel

Séries de Fourier

Admettons que l'on connaisse la densité spectrale de puissance du processus à générer. Dans le cas d'une histoire de vent, cette fonction peut être exprimée par exemple sous la formulation de von Karman :

$$S_u(n) = \frac{4L_u^x \sigma_u^2}{\left[1 + 70.8 \left(\frac{nL_u^x}{U}\right)^2\right]^{5/6}} \quad (6.16)$$

Nous avons vu que, sous l'hypothèse d'ergodicité, la densité spectrale de puissance d'un processus stationnaire pouvait être calculée sur base d'un seul échantillon :

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |X(\omega, T)|^2 \quad (6.17)$$

Pour un signal réel discrétisé à l'aide de N points dans le domaine temporel, c'est-à-dire à l'aide de $\frac{N}{2} + 1$ fréquences espacées entre 0 et n_{Ny} dans le domaine fréquentiel, on peut écrire :

$$S(\omega_i) = \frac{2\pi}{T} |X(\omega_i, T)|^2 \quad (6.18)$$

Ceci ne fait bien sûr qu'exprimer que la densité spectrale représente le contenu fréquentiel du processus. Il semble alors logique que la génération soit entreprise dans le

domaine fréquentiel. Il suffit en effet de choisir :

$$X(\omega_i, T) = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \sqrt{S_u(\omega_i)} e^{j\varphi_i} \quad (6.19)$$

où les φ_i représentent des déphasages choisis de manière aléatoire entre 0 et 2π avec une densité de probabilité uniforme.

En procédant de la sorte, on trouve immédiatement que :

$$S(\omega_i) = \frac{2\pi}{T} |X(\omega, T)|^2 = S_u(\omega_i) \quad (6.20)$$

ce qui exprime simplement que les densités spectrales cible et calculée (sur un seul bloc) coïncident parfaitement pour les fréquences de discrétisation choisies. La densité spectrale de puissance calculée selon la méthode de Welch ne correspond cependant pas exactement à celle du processus cible (cf remarque de la page 275).

L'échantillon dans le domaine temporel s'obtient simplement en prenant la transformée de Fourier inverse de l'échantillon généré.

Cette première méthode est donc assez précise mais nécessite évidemment un temps de calcul assez important si, comme dans la plupart des cas, l'échantillon requis l'est dans le domaine temporel (passage d'un domaine à l'autre).

Processus markoviens

La génération à l'aide de processus autorégressifs à moyenne mobile (ARMA, ou de Markov) constitue une autre méthode de génération assez intéressante qui, contrairement à la méthode présentée, a l'avantage de travailler directement dans le domaine temporel. De tels processus sont définis de manière générale par la relation de récurrence suivante :

$$y(t) + a_1 y(t - \Delta t) + \dots + a_p y(t - p\Delta t) = b_0 w(t) + b_1 w(t - \Delta t) + \dots + b_q w(t - q\Delta t) \quad (6.21)$$

En partant de certaines conditions initiales pour le processus aléatoire y , cette formule permet de créer un échantillon de ce processus y à partir d'un échantillon d'un bruit blanc w d'intensité unitaire (ou, moins souvent, d'un autre processus aléatoire).

La notion de fonction de transfert associée à un oscillateur à un degré de liberté (transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle) est supposée être acquise. Plus exactement, cette fonction de transfert est associée à la forme continue de l'équation différentielle du mouvement. De manière plus générale, une fonction de transfert peut être associée à n'importe quelle équation différentielle représentant un phénomène ; le rôle de cette fonction est de relier, dans le domaine fréquentiel, l'entrée et la sortie du système.

Dans la même idée, une fonction de transfert peut être associée à la forme discrétisée de l'équation du mouvement (par exemple, Newmark, Wilson, différence centrale...) ou même, à la forme discrétisée (et donc récursive) d'une quelconque relation différentielle. La fonction de transfert associée à la formule 6.21 s'exprime par² :

$$H_{ARMA}(\omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-i\omega\Delta t} + \dots + b_q e^{-iq\omega\Delta t}}{1 + a_1 e^{-i\omega\Delta t} + \dots + a_p e^{-ip\omega\Delta t}} \quad (6.22)$$

²En effet, la transformée de Fourier membre à membre de la relation 6.21 s'écrit :

$$(1 + a_1 e^{-i\omega\Delta t} + \dots + a_p e^{-ip\omega\Delta t}) Y(\omega) = (b_0 + b_1 e^{-i\omega\Delta t} + \dots + b_q e^{-iq\omega\Delta t}) W(\omega)$$

Le processus y est alors considéré comme l'image du processus w à travers le filtre caractérisé par la fonction de transfert $H(\omega)$. Leurs densités spectrales de puissance sont donc reliées par :

$$S_y(\omega) = H(\omega)S_w(\omega)\overline{H(\omega)}^T = |H(\omega)|^2 \quad (6.23)$$

Dans le contexte de la génération, l'idée consiste donc à trouver les coefficients $a_1, \dots, a_p$ et $b_0, \dots, b_q$ tel que $|H(\omega)|^2$ s'approche le plus possible de la densité spectrale de puissance à représenter. C'est en ce sens que nous avons annoncé qu'un processus aléatoire quelconque pouvait être approché d'aussi près que désiré par un processus autorégressif (point 3, page 264). Lorsque les paramètres $a_1, \dots, a_p$ et $b_0, \dots, b_q$ sont déterminés, il suffit d'utiliser la relation 6.21 pour obtenir un échantillon du processus aléatoire désiré.

Cette méthode est évidemment beaucoup plus rapide que la méthode de Fourier ; elle est d'autant plus efficace que l'ordre de la régression à choisir pour représenter correctement la densité spectrale cible est faible. Dans cette méthode, la consommation de temps se trouve essentiellement au niveau de la détermination de l'ordre du filtre et de ses coefficients représentatifs. Il en résulte donc que la génération d'un échantillon supplémentaire ne demande pas un surcroît de temps énorme. Cette méthode est donc préférentiellement utilisée lorsque beaucoup d'échantillons doivent être générés.

Filtres autorégressifs (AR) La détermination des coefficients $a_1, \dots, a_p$ et $b_0, \dots, b_q$ à choisir ne se présente guère comme une tâche aisée. C'est pour cette raison qu'une simplification est généralement formulée : elle consiste à supposer que $q = 0$; le processus est alors appelé processus autorégressif et est caractérisé par les relations suivantes :

$$y(t) = b_0 w(t) - \sum_{i=1}^p a_i y(t - i\Delta t) \quad (6.24)$$

$$H_{AR}(\omega) = \frac{b_0}{1 + a_1 e^{-j\omega\Delta t} + \dots + a_p e^{-jp\omega\Delta t}} \quad (6.25)$$

Généralement, l'ordre p du filtre autorégressif est choisi à l'avance si bien qu'il ne reste donc plus que les paramètres $a_1, \dots, a_p$ et b_0 à déterminer.

Il ne s'agit donc en réalité que d'un problème de minimisation d'un estimateur d'écart entre la densité spectrale désirée et la densité spectrale cible obtenue à l'aide de la fonction de transfert 6.25.

Buchholdt [[9]]³ présente une méthode un peu plus élégante que la traditionnelle approche par les moindres carrés. L'élégance manifeste provient de la particularisation de la méthode au problème traité. Il convient cependant de noter que, sous les démarches présentées dans son document, se cachent des hypothèses non mentionnées. Cette méthode consiste à multiplier la relation 6.24 par $y(t - k\Delta t)$ ($k = 1, 2, \dots, p$) et à moyenner sur l'intervalle $[0, T]$, pour ainsi obtenir l'expression de la fonction d'autocovariance en

³Dynamics of the structures, pp.292-305

$k\Delta t$:

$$\begin{aligned}
 R(k\Delta t) &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t)y(t-k\Delta t)dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[b_0 w(t) - \sum_{i=1}^p a_i y(t-i\Delta t) \right] y(t-k\Delta t)dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T b_0 w(t)y(t-k\Delta t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^p a_i y(t-i\Delta t)y(t-k\Delta t)dt
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Selon Buchholdt, en vertu de l'hypothèse de stationnarité, le premier de ces deux derniers termes s'annule, alors que le second donne :

$$R(k\Delta t) = - \sum_{i=1}^p a_i \frac{1}{T} \int_0^T y(t-i\Delta t)y(t-k\Delta t)dt = - \sum_{i=1}^p a_i R(|k-i|\Delta t) \tag{6.27}$$

Lorsque $k = 0$, la relation 6.26 donne :

$$\begin{aligned}
 R(0) &= \sigma_y^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [y(t)]^2 dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T b_0 w(t)y(t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^p a_i y(t-i\Delta t)y(t)dt
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\sigma_y^2 = b_0 \sigma_w^2 - \sum_{i=1}^p a_i R(i\Delta t) \tag{6.29}$$

A partir de la densité spectrale du processus à générer, les relations de Wiener-Khintchine permettent d'obtenir également sa fonction d'autocorrélation. Les p relations 6.27 et la relation 6.29 sont donc $p + 1$ équations dont les inconnues sont les $p + 1$ paramètres à déterminer ($a_1, \dots, a_p$ et b_0).

Cette méthode fonctionne assez bien mais, telle que présentée par l'auteur, les paramètres obtenus ne résultent pas d'une optimisation et apparaissent comme « les coefficients à choisir » pour avoir une bonne génération. Puisqu'il s'agit d'une minimisation, la méthode qui vient d'être présentée ne devrait arriver à des paramètres optima qu'à condition de formuler un critère d'optimisation. Ce critère n'intervient pas car, sous l'hypothèse de stationnarité, Buchholdt suppose en réalité que les cross-corrélations entre le bruit blanc d'entrée et le processus à générer ne sont non négligeables qu'au premier ordre ($k = 0$).

Tout en étant conscient de ceci, il convient cependant de préciser que cette méthode n'est probablement pas aussi efficace qu'une approche par les moindres carrés mais donne tout de même de bons résultats. Il est également important de noter qu'une approche par les moindres carrés ne sera efficace que si l'on attribue des poids de pondération d'autant plus importants que les ordonnées des points choisis sur le spectre cible sont importantes. Le filtre AR utilisé pour la génération représentera ainsi correctement la densité spectrale cible dans les zones où le contenu fréquentiel est le plus important. La décomposition de la variance de la réponse en ses contributions dynamique et quasi-statique montre également que la représentation de la sollicitation dans le voisinage de la pulsation propre de la structure doit être précise. Les poids de pondération devraient éventuellement inclure ce critère.

Filtres autorégressifs à moyenne mobile (ARMA) Lorsque la forme de la densité spectrale cible devient assez compliquée, il est parfois nécessaire de recourir à des filtres autorégressifs d'ordre élevé. Dans ce cas, il s'avère souvent plus intéressant de passer aux filtres autorégressifs à moyenne mobile dont la formulation a été présentée ci-dessus :

$$y(t) + a_1y(t - \Delta t) + \dots a_p y(t - p\Delta t) = b_0w(t) + b_1w(t - \Delta t) + \dots b_q w(t - q\Delta t) \quad (6.30)$$

Il est maintenant impératif d'utiliser une méthode de minimisation classique comme la méthode des moindres carrés. Cette méthode ne sera pas appliquée dans la suite. Nous recommandons une littérature spécialisée pour l'estimation de ces coefficients.

Le programme *GWind*

Les notions qui viennent d'être développées ont été appliquées à la génération d'échantillons de vitesse de vent. Le programme *GWind* consiste en la génération d'échantillons de vitesse de vent à l'aide de l'une ou l'autre des méthodes présentées ci-avant. Les caractéristiques des échantillons générés auxquelles l'utilisateur a accès sont :

- le profil moyen de vitesse, donné par une loi logarithmique, de puissance ou de l'Eurocode.
- la densité spectrale de puissance : von Karman, Harris, Davenport, ou Eurocode 1

Dans le cas de la génération d'un processus unidimensionnel, les données topographiques se limitent à l'altitude de la station considérée (afin d'obtenir la vitesse du vent au point choisi) et à l'échelle de turbulence.

Que la génération ait lieu par séries de Fourier ou par filtrage d'un processus autorégressif⁴, les données relatives à la précision de la génération se résument au nombre de points de l'échantillon à générer et à l'intervalle de fréquence utilisé. Etant donné qu'il n'y a pas de densité spectrale croisée à calculer, les densités spectrales de puissance sont systématiquement calculées sur un seul bloc. La génération est réalisée à l'aide d'un filtre AR dont l'ordre de régression est fixé par l'utilisateur.

Quelques exemples de résultats obtenus à l'aide de ce logiciel sont disponibles dans d'autres documents [[26]]. La comparaison de ces exemples nous permet de conclure à une meilleure précision pour la méthode de Fourier (puisque la génération à l'aide de filtres AR ne permet pas de représenter exactement la densité spectrale cible) mais il convient de concéder à cette méthode de génération à l'aide de filtres AR une rapidité indubitablement plus avantageuse.

6.2.3 Remarques sur les caractéristiques d'ordres supérieurs

Jusqu'à ce point, le seul objectif du générateur développé consiste en la meilleure concordance possible entre la densité spectrale cible et la densité spectrale de l'échantillon généré. Il ne faut cependant pas perdre de vue que la vitesse du vent est généralement gaussienne. Il est donc important que les échantillons générés se présentent comme des échantillons de processus aléatoires gaussiens.

Nous allons vérifier ceci pour les deux procédés de génération présentés ci-avant.

⁴dans ce cas, un bruit blanc gaussien (succession de valeurs tirées au hasard et ayant une distribution de probabilité gaussienne normale) est filtré par un filtre autorégressif (AR) dont les paramètres optima sont calculés par la méthode présentée par Buchholdt

Génération par séries de Fourier

Afin d'étudier la précision liée à la génération des échantillons par séries de Fourier, nous avons décidé de calculer l'histogramme d'un échantillon suffisamment long pour pouvoir en obtenir une très bonne représentation. Pour ce faire, nous avons accolé 1500 échantillons de 2048 points chacun de façon à former un très gros échantillon de longueur $N \simeq 3.10^6$ points (ce qui est bien sûr beaucoup plus que ce que l'on ne peut se permettre dans la pratique pour l'étude d'une structure).

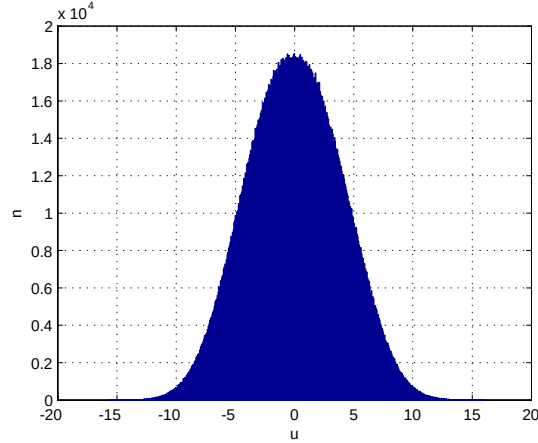


FIG. 6.6 – Histogramme de la composante turbulente du vent générée ($N \simeq 3.10^6$)

La densité spectrale cible choisie pour cet exercice est celle de Von Karman avec $\frac{L}{U} = 20s$ et $\sigma_u = 4m/s$. Elle a été discrétisée, pour chaque échantillon, avec un pas de fréquence $\Delta f = 4.39.10^{-3}Hz$, ce qui signifie que la fréquence maximale représentée est $f_{\max} = N\Delta f = 9Hz$. La figure 6.6 représente l'histogramme du long signal ainsi généré. On peut constater que la taille de ce signal est suffisamment longue pour obtenir une représentation très propre de la densité de probabilité. A première vue, cette densité de probabilité présente une allure de densité de probabilité gaussienne. Le calcul numérique des cumulants montre cependant qu'il n'en est pas tout à fait ainsi. En effet, la moyenne a été fixée égale à zéro; la variance a été ajustée de façon à rendre l'intégrale de la densité spectrale cible (discrétisée); quant aux cumulants d'ordre supérieurs, la méthode ne permet pas de pouvoir imposer quoi ce soit. Au terme de la génération, ces cumulants sont donc finalement ce qu'ils sont et il n'est a priori pas possible d'imposer leur valeur. Pour la génération que nous avons entreprise, les coefficients de dissymétrie et d'excès du signal généré valent respectivement :

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= 0.0057 \\ \gamma_e &= -0.3114\end{aligned}$$

Ceci montre donc que ce signal ne peut être considéré comme gaussien que jusqu'à l'ordre 3.

Ce problème peut également être mis en évidence en revenant à un cas d'application plus pratique. Dans ces applications, on imagine aisément ne pas pouvoir étudier

l'entière de la structure pour un nombre de pas de temps aussi important. Imaginons par exemple que l'étude de la structure soit entreprise à l'aide d'un échantillon de 2048 points. Tout en conservant la même densité spectrale cible, nous ne générons donc maintenant qu'un échantillon de 2048 points. Pour cet échantillon, les cumulants de tous ordres peuvent être calculés. Nous nous contentons essentiellement de l'écart type ainsi que des coefficients de dissymétrie et d'excès. Il est certain que, pour un échantillon aussi court que celui-là, on ne peut pas vraiment espérer obtenir des moments statistiques très représentatifs de la méthode de génération. Il serait plutôt intéressant d'obtenir une espérance des moments statistiques qui peuvent être calculés sur un échantillon de 2048 points.

Pour ce faire, nous avons repris les 1500 échantillons de 2048 points et nous avons calculé les cumulants séparément pour chacun des échantillons, ce qui a permis d'obtenir une liste de 1500 cumulants (adimensionnels pour les ordres 3 et 4). La figure 6.7 représente les histogrammes de ces valeurs (28 zones).

Etant donné que l'écart type est imposé de façon à retrouver une variance correcte, l'histogramme se résume à 1500 valeurs identiques, à la précision machine près ($\sigma_u = 3.984$). Pour le coefficient de dissymétrie, on peut observer une distribution sensiblement symétrique et surtout de moyenne nulle, ce qui a été confirmé par le calcul des cumulants sur le plus gros échantillon étudié juste avant. L'utilisation de 1500 cumulants semble suffire à une bonne représentation de la distribution du coefficient d'excès. Cette distribution semble pouvoir être approchée par une distribution de Rayleigh, avec un mode négatif et une moyenne également négative. On peut deviner la moyenne de $\gamma_e \simeq -0.3$ présentée ci-avant.

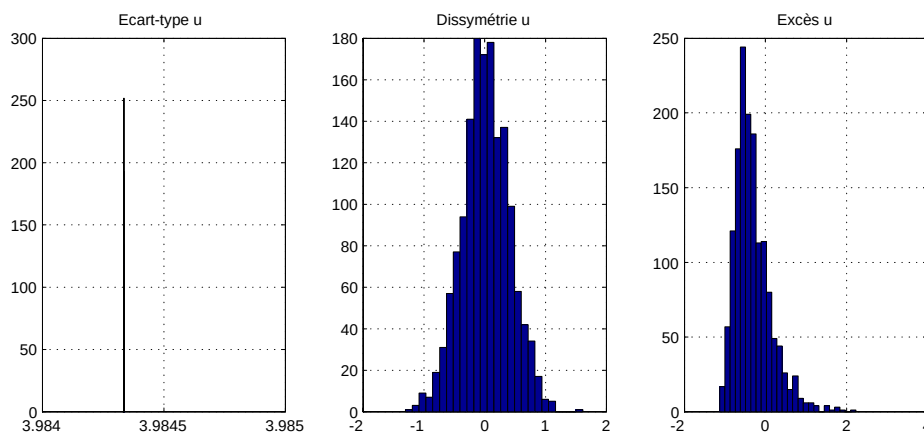


FIG. 6.7 – Distribution statistique des moments obtenus par une génération par séries de Fourier

Les résultats qui viennent d'être observés peuvent être justifiés sur base d'un exemple simple. Considérons que le signal à générer ne comporte que $N = 8$ points. Le passage du domaine fréquentiel au domaine temporel s'exprime donc par :

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^8 X_k e^{2i\pi(k-1)\frac{n-1}{N}} \quad (6.31)$$

avec $X_1 = 0$ de sorte à représenter un processus à moyenne nulle. Pour que le signal x soit réel, il faut que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$X_8 = \bar{X}_2 \quad ; \quad X_7 = \bar{X}_3 \quad ; \quad X_6 = \bar{X}_4 \quad (6.32)$$

et que X_5 soit réel. Comme lors de la génération à l'aide des séries de Fourier, nous imposons donc :

$$\begin{aligned} X_2 &= \sqrt{S_2}e^{i\theta_2} \quad ; \quad X_3 = \sqrt{S_3}e^{i\theta_3} \quad ; \quad X_4 = \sqrt{S_4}e^{i\theta_4} \\ X_5 &= \sqrt{S_5} \\ X_6 &= \sqrt{S_4}e^{-i\theta_4} \quad ; \quad X_7 = \sqrt{S_3}e^{-i\theta_3} \quad ; \quad X_8 = \sqrt{S_2}e^{-i\theta_2} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Les moments du signal⁵ ainsi généré peuvent être assez facilement calculés. Après quelques développements, on trouve :

$$m_2 = \overline{x^2} = \frac{2(S_2 + S_3 + S_4) + S_5}{N^2} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} m_3 = \overline{x^3} &= \frac{3S_2\sqrt{S_3}\cos(2\theta_2 - \theta_3) + S_3\sqrt{S_5}\cos 2\theta_3}{4N^3} \\ &+ \frac{3\sqrt{S_4}(2\sqrt{S_2S_3}\cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4) + 2\sqrt{S_2S_5}\cos(\theta_2 + \theta_4) + \sqrt{S_3S_4}\cos(\theta_3 + 2\theta_4))}{4N^3} \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} m_4 = \overline{x^4} &= \frac{1}{N^4} [6(S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) + S_5^2 + 24S_2S_3 + 24S_3S_4 + 24S_4S_2] \\ &+ \frac{1}{N^4} [12S_2S_5 + 12S_3S_5 + 12S_4S_5 + 2S_3^2\cos 4\theta_3 + 12S_2S_4\cos(2\theta_2 + 2\theta_4)] \\ &+ \frac{1}{N^4} [24S_2\sqrt{S_3S_5}\cos(2\theta_2 + \theta_3) + 24S_4\sqrt{S_3S_5}\cos(\theta_3 - 2\theta_4)] \\ &+ \frac{1}{N^4} [8S_4\sqrt{S_2S_4}\cos(\theta_2 - 3\theta_4) + 8S_2\sqrt{S_2S_4}\cos(3\theta_2 - \theta_4)] \\ &+ \frac{1}{N^4} [48\sqrt{S_2S_3S_4S_5}\cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) + 12S_3\sqrt{S_2S_4}\cos(\theta_2 + \theta_4)] \end{aligned} \quad (6.36)$$

Ces moments correspondent également aux moments centrés puisque le processus généré est à moyenne nulle. Le moment d'ordre 3 correspond donc également au cumulants d'ordre 3, par contre, le cumulants d'ordre 4 obtenu par $k_4 = m_4 - 3m_2^2$ s'exprime par :

$$\begin{aligned} k_4 &= \overline{x^4} = \frac{1}{N^4} [-6(S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) - 2S_5^2 + 48\sqrt{S_2S_3S_4S_5}\cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4)] \\ &+ \frac{1}{N^4} [2S_3^2\cos 4\theta_3 + 24S_2\sqrt{S_3S_5}\cos(2\theta_2 + \theta_3) + 8S_4\sqrt{S_2S_4}\cos(\theta_2 - 3\theta_4)] \\ &+ \frac{1}{N^4} [8S_2\sqrt{S_2S_4}\cos(3\theta_2 - \theta_4) + 24S_4\sqrt{S_3S_5}\cos(\theta_3 - 2\theta_4)] \\ &+ \frac{1}{N^4} [12S_3\sqrt{S_2S_4}\cos(\theta_2 + \theta_4) + 12S_2S_4\cos(2\theta_2 + 2\theta_4)] \end{aligned} \quad (6.37)$$

On constate que :

$$^5 \overline{x^r} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^r$$

- le cumulante d'ordre 2 est indépendant de θ_2 , θ_3 et θ_4 ce qui explique pourquoi les 1500 écart types estimés sont identiques ;
- le coefficient de dissymétrie dépend des paramètres θ_2 , θ_3 et θ_4 . Il sera donc différent pour chacun des 1500 échantillons de 2048 valeurs étant donné que les valeurs de θ_2 , θ_3 et θ_4 sont différentes pour ces 1500 échantillons. Ceci justifie donc un étalement dans la densité de probabilité. Puisque θ_2 , θ_3 et θ_4 sont distribués uniformément entre 0 et 2π , on peut vérifier assez facilement que les espérances mathématiques des expressions telles que $\cos(2\theta_2 - \theta_3)$ sont nulles et donc que la moyenne des moments centrés d'ordre 3 obtenue sur l'ensemble des échantillons est donc nulle. Ceci justifie la distribution centrée à l'origine pour le coefficient de dissymétrie ;
- le coefficient d'excès dépend également des paramètres θ_2 , θ_3 et θ_4 . L'espérance mathématique ne permet par contre cette fois que d'annuler les termes en θ_2 , θ_3 et θ_4 . Il est donc normal que la méthode de génération utilisée donne un moment d'ordre 4 moyen non nul (et négatif de surcroît).

En guise de conclusion, on peut retenir que la méthode de génération à l'aide des séries de Fourier permet de générer des échantillons qui ne peuvent être considérés comme gaussiens que jusqu'à l'ordre 3. Si les échantillons générés à l'aide de séries de Fourier sont utilisés pour des simulations de Monte Carlo, il est donc important de ne pas considérer les moments statistiques de la réponse supérieurs à l'ordre 3. Il n'est vraiment pas certain que tous les auteurs qui présentent des études par simulations de Monte Carlo aient pris ces considérations en compte. Nous recommandons de ce fait une grande prudence quant aux résultats qui pourraient être présentés.

Génération à l'aide de filtre ARMA

Les filtres ARMA sont des filtres linéaires. Ils conservent donc le caractère gaussien de l'entrée. La qualité en terme de gaussianité de l'échantillon généré dépend donc directement de la qualité du bruit blanc utilisé pour la génération. A titre d'illustration, nous avons également généré avec cette nouvelle méthode un ensemble de 1500 échantillons de 2048 points chacun. Le filtre autorégressif utilisé est un filtre ARMA d'ordre $(p, q) = (3, 2)$ et l'échantillon généré y est obtenu à partir d'un bruit blanc gaussien normé centré w par :

$$y(t) + 0.1y(t - \Delta t) + 0.2y(t - 2\Delta t) + 0.3y(t - 3\Delta t) = 0.5w(t) + 0.4w(t - \Delta t) \quad (6.38)$$

La moyenne de l'échantillon ainsi généré s'obtient en prenant l'espérance mathématique membre à membre :

$$1.6\bar{y} = 0.9\bar{w} = 0 \quad (6.39)$$

Elle est égale à zéro puisque le signal w est centré. La densité spectrale de puissance de l'échantillon généré peut être calculée grâce aux relations 6.22 et 6.23. Elle est représentée à la figure 6.8. L'écart type théorique du signal ainsi généré devrait être de 0.67.

A la figure 6.9 nous avons représenté les moments statistiques du signal d'entrée et le signal finalement généré. Pour le signal d'entrée (première ligne), on peut constater qu'il s'agit bien d'un processus normal puisque l'écart type est unitaire et que les cumulants d'ordres supérieurs sont nuls (en moyenne). Ces échantillons ont été générés à l'aide de la fonction *randn* de MatLab (Generator Version 5). On peut remarquer que la qualité de la génération est très bonne, vu le faible étalement autour des valeurs moyennes.

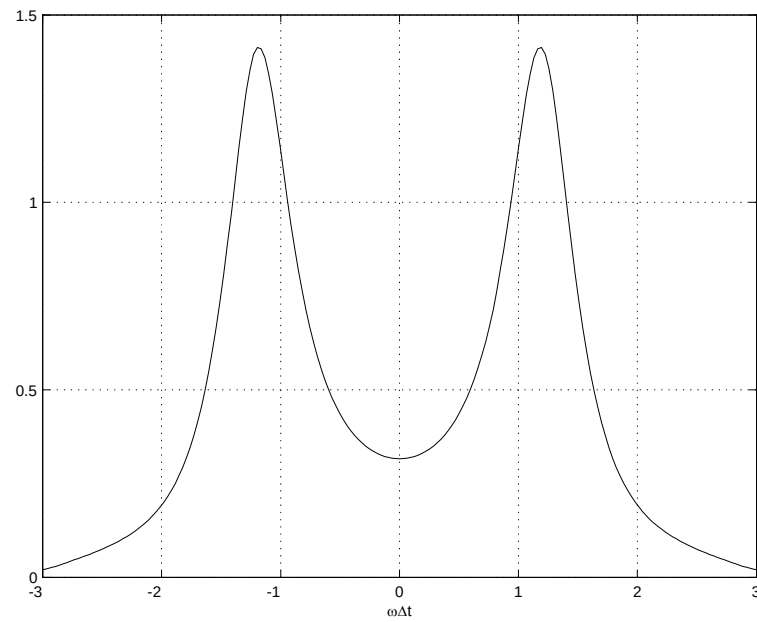


FIG. 6.8 – Densité spectrale de puissance du processus aléatoire y obtenu en sortie du filtre 6.38

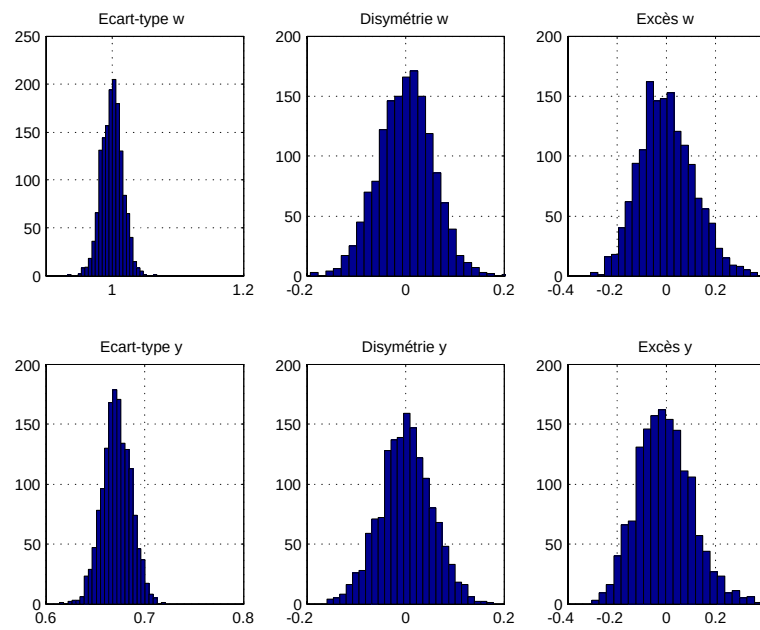


FIG. 6.9 – Distribution statistique des moments obtenus par une génération à l'aide d'un processus autorégressif

Les graphiques de la ligne inférieure représentent les moments centrés du processus généré. On peut y retrouver un écart type moyen de 0.67. Comme introduit ci-avant, on peut constater que cette méthode de génération permet de produire un échantillon gaussien. Aussi, l'étalement des coefficients de dissymétrie et d'excès reste sensiblement inchangé par rapport au signal initial w . Ceci montre que le signal initial et le signal généré présentent des qualités comparables.

De ces deux derniers paragraphes, on peut donc retenir qu'une simulation de Monte Carlo, destinée à représenter des moments d'ordres supérieurs de la réponse d'un système, doit absolument se baser sur une méthode de génération par filtres auto-régressifs et non pas sur une génération par série de Fourier qui, elle, ne permet pas d'imposer le cumulants d'ordre 4.

6.2.4 Génération de processus multidimensionnels

Admettons maintenant que l'on veuille générer non plus la vitesse en un seul point de l'espace mais plutôt un champ de vitesse complet incluant les corrélations entre différents points de l'espace.

En plus des corrélations temporelles traitées par la fonction d'autocorrélation, il est important, en cas de prise au vent distribuée sur la structure, de prendre également en compte les cohérences spatiales, c'est-à-dire les corrélations entre les vitesses du vent en différents points de l'espace.

Méthodologie

Grâce aux méthodes de génération unidimensionnelles présentées au paragraphe précédent, nous sommes maintenant en mesure de générer N histoires en N points différents de sorte que les densités spectrales de puissance des échantillons ainsi générés correspondent au mieux avec des densités spectrales imposées en chacun des points.

Il reste donc à analyser maintenant la démarche à suivre pour donner à ces échantillons la cohérence voulue.

Etant donné que ces N premiers échantillons ont été générés indépendamment les uns des autres, et pour autant que le générateur aléatoire utilisé soit à période suffisamment grande, il ne devrait en principe pas y avoir de cohérence entre eux. C'est une chose que l'on peut d'ailleurs constater en augmentant le nombre de blocs pour le calcul de la densité spectrale de puissance croisée. Admettons donc, pour simplifier les choses, que cette cohérence soit nulle. En référence avec la base modale dans laquelle les équations du mouvement sont généralement découplées, ces N premiers échantillons seront appelés « histoires modales » et leur matrice de densité spectrale est donc diagonale. Elle est notée $[S_M(\omega)]$.

Imaginons un système à N degrés de liberté dont les sollicitations sont les N histoires modales. En toute généralité, les déplacements que l'on calculerait ne sont pas indépendants ; ils sont caractérisés par une certaine cohérence. En choisissant ce système de façon adéquate, il est possible de donner aux déplacements des nœuds de la structure (« histoires nodales ») la cohérence voulue. En effet, nous savons que les densités spectrales des signaux d'entrée (efforts) et de sortie (déplacements) d'un système de fonction de transfert $[H(\omega)]$ sont reliés par :

$$[S_N(\omega)] = [H(\omega)] [S_M(\omega)] \overline{[H(\omega)]}^T \quad (6.40)$$

où $[H(\omega)]$ désigne la matrice de transfert du système à déterminer, $[S_M(\omega)]$ et $[S_N(\omega)]$ désignent respectivement les densités spectrales de puissance des histoires modales (générées, sans cohérence) et nodales (à générer, avec la cohérence voulue).

La pierre d'angle de la génération de processus multidimensionnels consiste donc en la détermination de la structure, ou plutôt de la fonction de transfert telle que la matrice de densité spectrale cible $[S_N(\omega)]$ (des histoires corrélées à générer) puisse s'exprimer par la relation 6.40.

Considérons maintenant la décomposition modale de la matrice de densité spectrale cible :

$$[S_N(\omega)] = [Z(\omega)] [V(\omega)] [Z(\omega)]^T \quad (6.41)$$

où $[Z(\omega)]$ représente la matrice des vecteurs propres et $[V(\omega)]$ est une matrice diagonale comprenant les valeurs propres associées aux vecteurs propres de $[Z(\omega)]$ et ordonnées de la même manière.

La matrice de densité spectrale cible $[S_N(\omega)]$ est différente pour chaque fréquence. Il en résulte donc que les matrices des modes propres et des valeurs propres sont également des fonctions de la pulsation.

La clé de la méthode réside finalement dans la comparaison des relations 6.40 et 6.41. Elle indique en effet que, dès que la décomposition modale ($[Z(\omega)]$, $[V(\omega)]$) de la matrice de densité spectrale cible est connue, les N histoires modales indépendantes à générer doivent satisfaire les densités spectrales données par les valeurs propres $[V(\omega)]$ et ensuite être filtrées par le système non physique dont la matrice de transfert est donnée par les modes propres $[Z(\omega)]$.

Carassalle, Solari et Di Paola présente une méthode de génération similaire. La différence essentielle consiste en ce que les développements initiaux débutent analytiquement ([10], [33]). L'auteur fournit cependant également des méthodes de génération plus appliquées, à l'aide de méthodes numériques semblables à celles qui ont été mises en oeuvre dans le cadre de notre travail.

Réduction de la taille de l'espace modal utilisé

La méthode ainsi présentée est assez consommatrice de temps dans la mesure où elle nécessite la décomposition en valeurs et modes propres de la matrice de densité spectrale cible et ce, pour un nombre important de fréquences. Afin d'accélérer la génération, il vient naturellement à l'esprit d'utiliser un nombre de modes réduit. Les conséquences liées à la réduction de l'espace modal seront commentées à l'aide de quelques exemples. Notons que les méthodes de génération multidimensionnelles présentées dans la littérature (telle celle de Di Paola) conseillent souvent, et sans justification précise, la réduction de l'espace modal de travail. Nous allons voir, au travers des exemples suivants, que cette simplification n'est pas toujours judicieuse.

Exemples

Exemple 1 Le premier exemple consiste en la génération de deux échantillons de processus dont les densités spectrales unidimensionnelles (Fig. 6.10) sont données par :

$$S_1(n) = ne^{-2n} \quad (6.42)$$

$$S_2(n) = ne^{-3n} \quad (6.43)$$

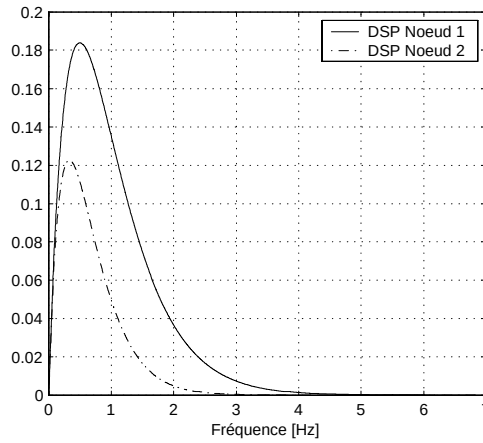


FIG. 6.10 – Densités spectrales cibles des vitesses de vent à générer

La forme analytique de ces densités spectrales cibles ne correspond pas à une densité spectrale de vent mais leurs formes sont cependant semblables à celle de la densité spectrale de Davenport. Cet exemple ne se veut de toute façon qu'académique. La fonction de cohérence entre ces deux processus est à décroissance exponentielle comme dans le cas du vent turbulent :

$$\gamma(n) = e^{-\frac{n}{2}} \quad (6.44)$$

Les caractéristiques des histoires à générer sont données au tableau 6.1.

Nombre d'histoires à générer :	2
Nombre de modes utilisés :	2
Durée des processus à générer :	600s
Nombre de valeurs :	$2^{13} = 8192$
Pas de temps :	0.0732s
Pas de fréquence :	$\frac{1}{600} = 0.00167Hz$
Fréquence de Nyquist :	6.8267Hz
Taille des blocs :	$2^8 = 256$
Nombre de blocs :	32
Pas de fréquence DSP :	$\frac{32}{600} = 0.0533Hz$

TAB. 6.1 – Exemple 1 - Caractéristiques de la génération

Les figures 6.11 et 6.12 représentent respectivement les évolutions des valeurs propres et des modes propres de la matrice de densité spectrale cible en fonction de la fréquence

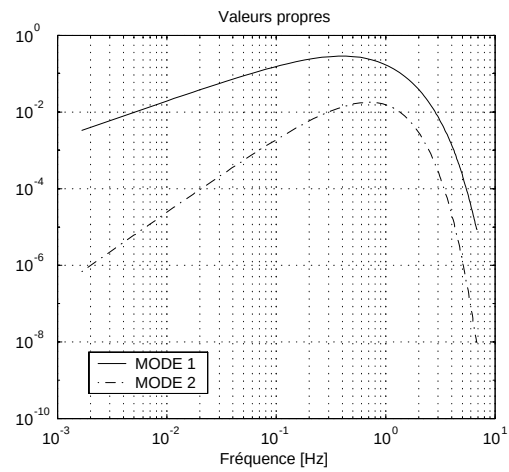


FIG. 6.11 – Densités spectrales cibles

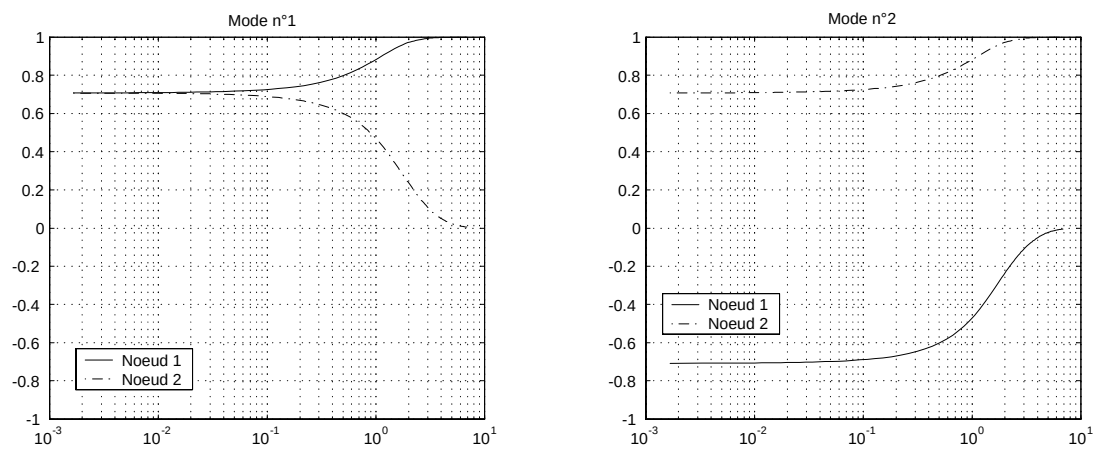


FIG. 6.12 – Coefficients de la combinaison linéaire (Modal - Nodal)

traitée. Pour des fréquences très petites, la matrice de densité spectrale est singulière :

$$[S_N(\omega \ll)] = \begin{bmatrix} S_1 & \sqrt{S_1 S_2} \\ \sqrt{S_1 S_2} & S_2 \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [V(\omega \ll)] = \begin{bmatrix} S_1 + S_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [Z(\omega \ll)] = \frac{1}{\sqrt{S_1 + S_2}} \begin{bmatrix} \sqrt{S_1} & -\sqrt{S_2} \\ \sqrt{S_2} & \sqrt{S_1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.46)$$

Dans le cas plus général d'une génération d'un plus grand nombre d'échantillons, on peut démontrer qu'aux basses fréquences, une seule valeur propre est non nulle et est égale à la somme des éléments diagonaux de la matrice de densité spectrale. Toutes les autres valeurs propres sont multiples et nulles. Ceci n'est valable que si les processus sont parfaitement cohérents aux basses fréquences, comme par exemple lorsque la cohérence est à décroissance exponentielle.

Pour les plus hautes fréquences, la matrice de densité spectrale cible devient diagonale :

$$[S_N(\omega \gg)] = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [V(\omega \gg)] = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \\ [Z(\omega \gg)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.48)$$

La matrice de densité spectrale des histoires modales coïncide donc, pour ces hautes fréquences, avec la matrice de densité spectrale cible. Les modes propres correspondent alors à deux excitations dans chacun des modes séparément. Ces constatations sont également valables pour la génération d'un nombre plus important d'échantillons, pour autant que la cohérence tende vers zéro aux plus hautes fréquences, ce que la physique des phénomènes étudiés en pratique permet de justifier.

Les valeurs propres représentées à la figure 6.11 sont également les densités spectrales modales cibles. L'observation de ce graphique montre que le premier mode est largement prépondérant, du moins pour les basses fréquences. Ceci justifie la tentation de n'utiliser qu'un nombre réduit de modes pour la génération d'échantillons de processus aléatoires cohérents.

Les graphiques de la figure 6.13 représentent les densités spectrales modales cibles et calculées, ainsi que la fonction de cohérence entre les deux échantillons modaux générés. Les deux échantillons modaux sont générés indépendamment l'un de l'autre à l'aide d'une génération en séries de Fourier. Dans la littérature, les résultats de générations sont souvent présentés dans des axes bi-logarithmiques de façon à camoufler l'écart entre les densités spectrales cible et calculée. Ici, nous avons choisi une représentation en axes cartésiens qui, certes, met en évidence une certaine discordance entre les deux courbes mais indique tout de même un comportement global acceptable.

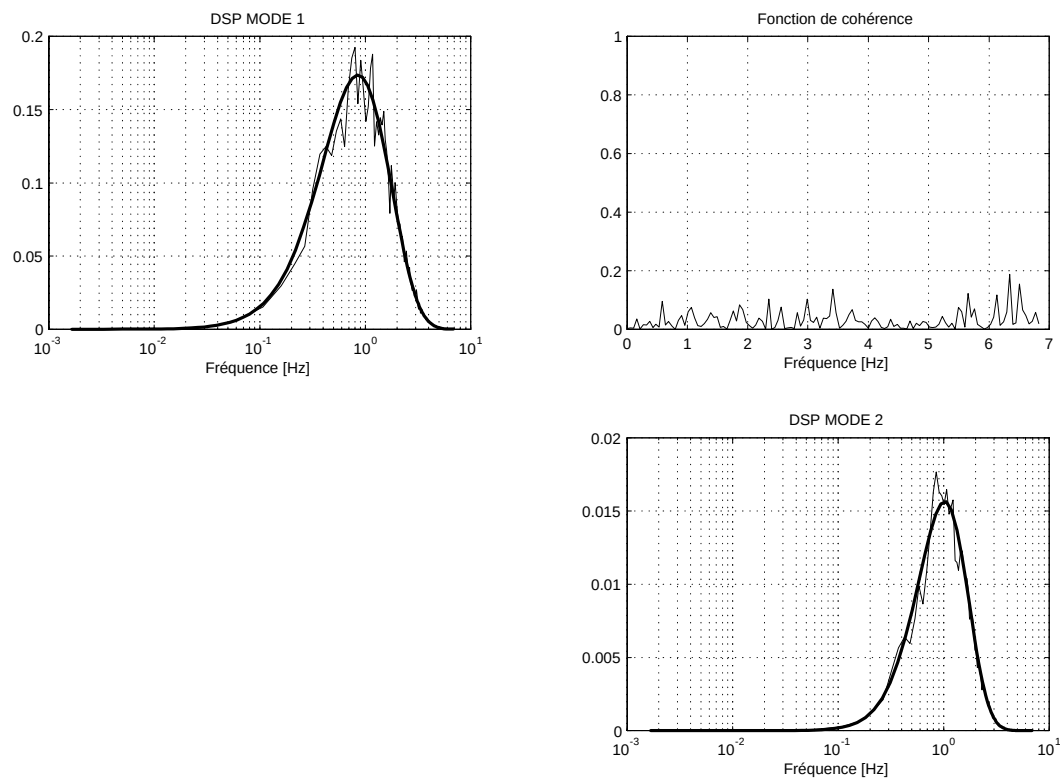


FIG. 6.13 – Densités spectrales modales des échantillons modaux générés, fonction de cohérence modale

Etant donné que les échantillons sont générés indépendamment l'un de l'autre, il ne devrait y avoir aucune cohérence entre eux. On peut effectivement constater qu'ils ne sont que très peu corrélés (moins de 10%, à l'exception de l'un ou l'autre pic). Sauf en générant des échantillons plus longs, il est évidemment difficile d'obtenir des échantillons moins cohérents que lorsqu'ils sont générés indépendamment l'un de l'autre.

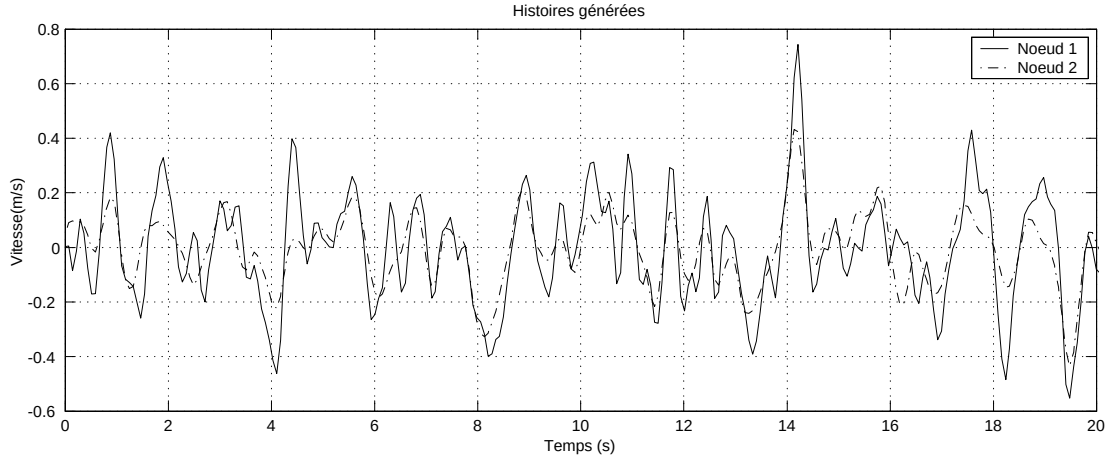


FIG. 6.14 – Echantillons générés (20 premières secondes)

La figure 6.14 représente les vingt premières seconde de chacun des échantillons générés. Conformément aux caractéristiques requises, on y constate effectivement que l'échantillon associé au noeud $n^{\circ}1$ a une variance plus importante que l'échantillon associé au noeud $n^{\circ}2$. De plus, les deux échantillons semblent être assez cohérents dans les basses fréquences, et beaucoup moins pour les fréquences plus importantes.

Les graphiques de la figure 6.15 confirment les impressions tirées de l'observation des signaux générés. La figure est composée de trois graphiques qui sont les équivalents nodaux des graphiques de la figure 6.13. Le résultat de la formation des processus nodaux (sur base des échantillons modaux générés) est déjà très bonne ; les corrections fréquentielles modale et nodale semblent donc être superflues, ou plutôt à considérer comme un must. Grâce à cette recombinaison d'échantillons modaux à l'aide de coefficients variables en fonction de la fréquence (les modes propres calculés), la cohérence obtenue entre les deux échantillons nodaux est très proche de la cohérence demandée.

Exemple 2 Cet exemple a pour but de mettre en évidence l'importance de la réduction de la taille de la base modale. Les données sont identiques à celle de l'exemple 1, exception faite que, cette fois, un seul mode sera utilisé. La décomposition modale présentée au graphique 6.12 montre en effet que, vu l'importance prépondérante du premier mode, l'utilisation d'un seul mode pourrait laisser présumer de bons résultats.

La décomposition modale est donc identique à celle de l'exemple 1, mais bien plus rapide puisqu'un seul mode est maintenant calculé. La figure 6.16 compare la seule et unique densité spectrale cible conservée avec la densité spectrale de l'échantillon modal généré. Mis à part l'un ou l'autre petit pic, l'échantillon généré semble être de bonne qualité.

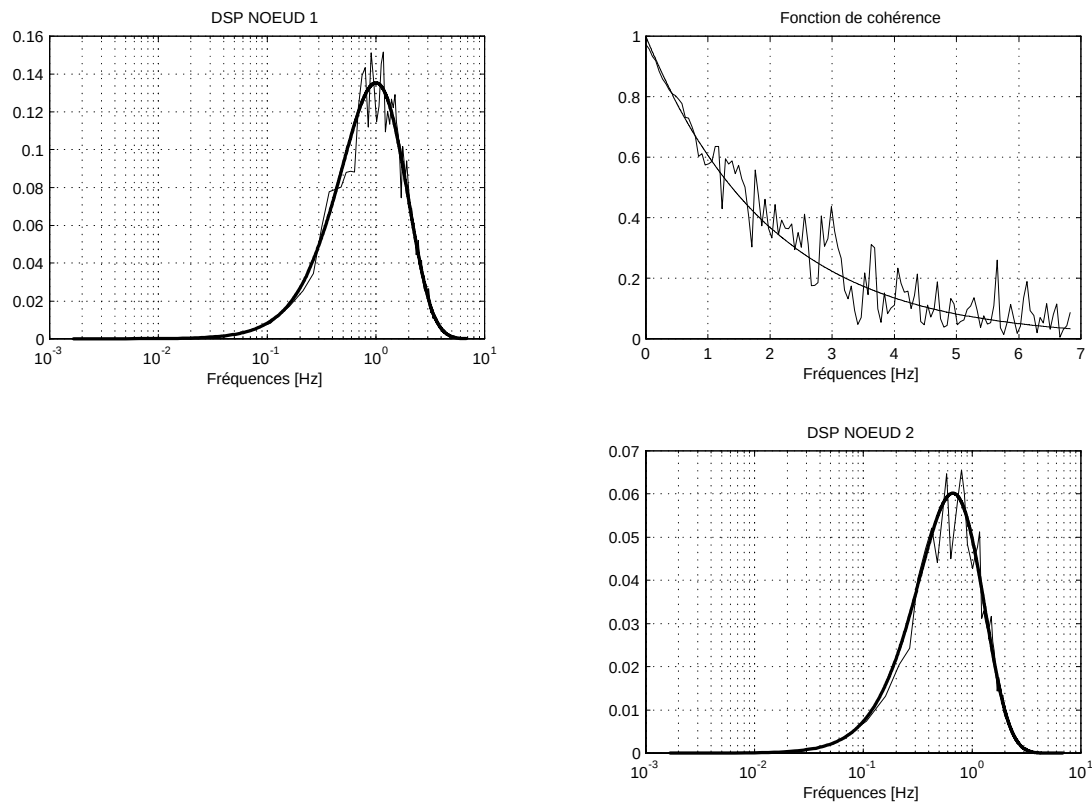


FIG. 6.15 – Densités spectrales nodales des échantillons générés, fonction de cohérence nodale

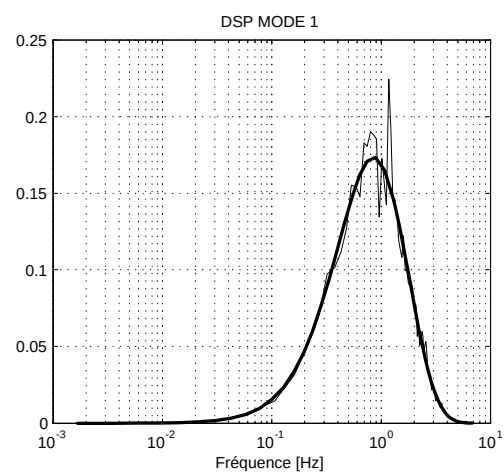


FIG. 6.16 – Densité spectrale de puissance du mode conservé

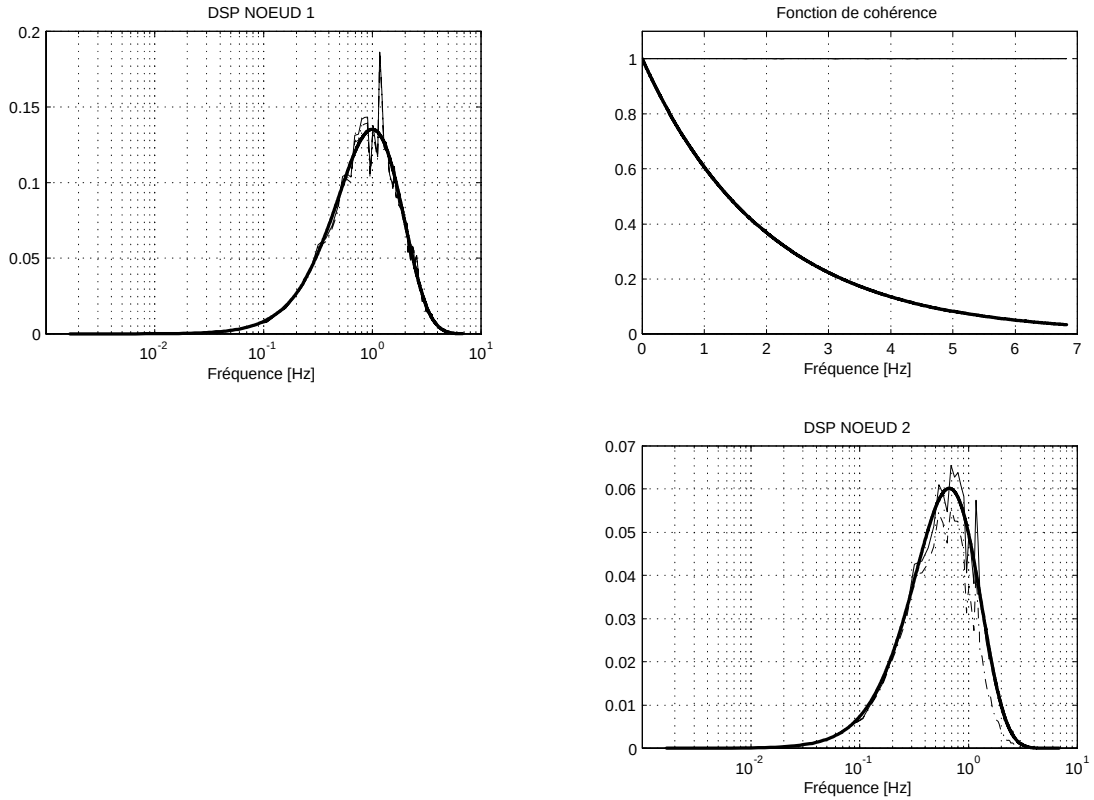


FIG. 6.17 – Densités spectrales nodales des échantillons générés, fonction de cohérence nodale

La figure 6.17 présente les résultats de la génération. L'utilisation d'un seul mode plutôt que deux fournit un résultat valable au niveau des densités spectrales. La densité spectrale au niveau du second noeud est un peu moins bien évaluée (courbe discontinue) mais une correction fréquentielle permet d'améliorer considérablement sa qualité. Quant au premier noeud, la génération brute donne déjà un très bon résultat si bien que la correction fréquentielle est pratiquement superflue. Par contre, la cohérence entre les deux échantillons ne correspond pas du tout à ce qui était désiré : on retrouve évidemment une cohérence unitaire puisque les deux signaux sont proportionnels à un même troisième. La correction fréquentielle des premiers échantillons obtenus permet d'améliorer leur densité spectrale mais ne corrige évidemment pas le contenu de la fonction de cohérence.

Cet exemple démontre clairement les rôles des modes conservés :

- Les modes à hautes valeurs propres permettent de donner aux processus nodaux leur bon contenu fréquentiel ;
- Les modes à basses valeurs propres viennent ajouter de petites modifications autour des échantillons résultant des premiers modes, afin de fournir, entre les nœuds, les cohérences désirées.

Recourir à une base modale réduite pour la génération des échantillons ne peut donc s'accompagner que d'une augmentation d'un excès de cohérence entre signaux générés.

Exemple 3 Afin de montrer que les conclusions tirées de l'exemple 2, peut-être un peu simpliste, peuvent être appliquées à d'autres cas, voici un autre exemple dans lequel 4 échantillons vont être générés au moyen de 3 modes. On ne laisse donc plus tomber que 25% des modes (1 sur 4) au lieu de 50% (1 sur 2).

Les densités spectrales cibles unidimensionnelles sont identiques à celles de l'exemple 1 :

$$S_3(n) = S_1(n) \quad \text{et} \quad S_4(n) = S_2(n) \quad (6.49)$$

Les fonctions de cohérence entre points sont toujours à décroissance exponentielle :

$$\gamma_{ij}(n) = e^{-C_{ij}n} \quad (6.50)$$

$$\text{où } C = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.5 & 1 \\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0 & 0.25 \\ 1 & 0.5 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

Le tableau 6.2 résume les caractéristiques principales de la génération.

Nombre d'histoires à générer :	4
Nombre de modes utilisés :	3
Durée des processus à générer :	600s
Nombre de valeurs :	$2^{13} = 8192$
Pas de temps :	0.0732s
Pas de fréquence :	$\frac{1}{600} = 0.00167Hz$
Fréquence de Nyquist :	6.8267Hz
Taille des blocs :	$2^8 = 256$
Nombre de blocs :	32
Pas de fréquence DSP :	$\frac{32}{600} = 0.0533Hz$

TAB. 6.2 – Exemple 3 - Caractéristiques de la génération

La figure 6.18 représente les trois premières⁶ valeurs propres de la matrice de densité spectrale cible. On peut y constater les propriétés énoncées ci-avant, à savoir une matrice de rang unitaire (une seule valeur propre non nulle) pour les basses fréquences et une matrice quasi-diagonale pour les plus hautes fréquences.

La figure 6.19 représente les évolutions, en fonction des fréquences, des trois premiers modes propres. Rien qu'en observant les graphiques des figures 6.18 et 6.19, la tentation est grande de ne pas calculer cette décomposition modale pour les 8192 fréquences de représentation du processus à générer. Nous verrons plus loin quelles solutions peuvent être apportées à ce problème.

Les graphiques de la figure 6.20 reprennent l'évolution des trois plus grandes valeurs propres de la matrice de densité spectrale cible (qui représente également les densités spectrales modales cibles). Ils indiquent également les densités spectrales des échantillons modaux générés. La concordance entre les valeurs cibles et calculées est à nouveau très bonne. On peut également noter que l'ordre de grandeur des cohérences introduites entre ces échantillons modaux reste toujours assez faible.

⁶ Contrairement à l'habitude dans les problèmes de vibrations de structures, les modes propres les plus importants dans ce cas sont les modes associés aux plus hautes valeurs propres.

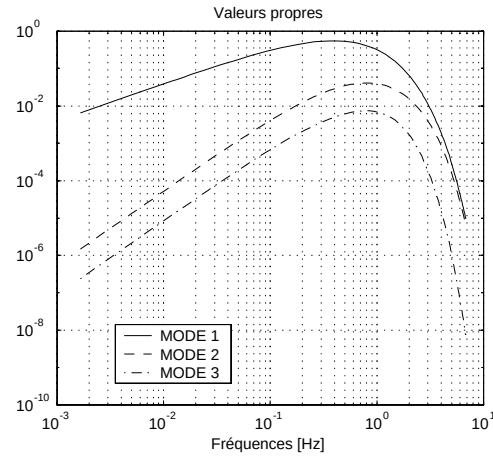


FIG. 6.18 – Densités spectrales cibles des processus modaux (indépendants)

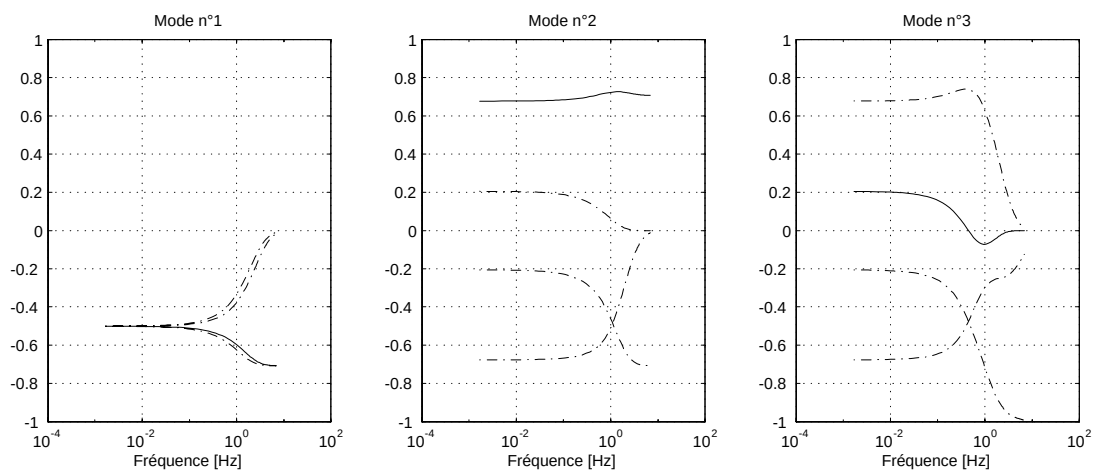


FIG. 6.19 – Coefficients de la combinaison linéaire (Modal - Nodal)

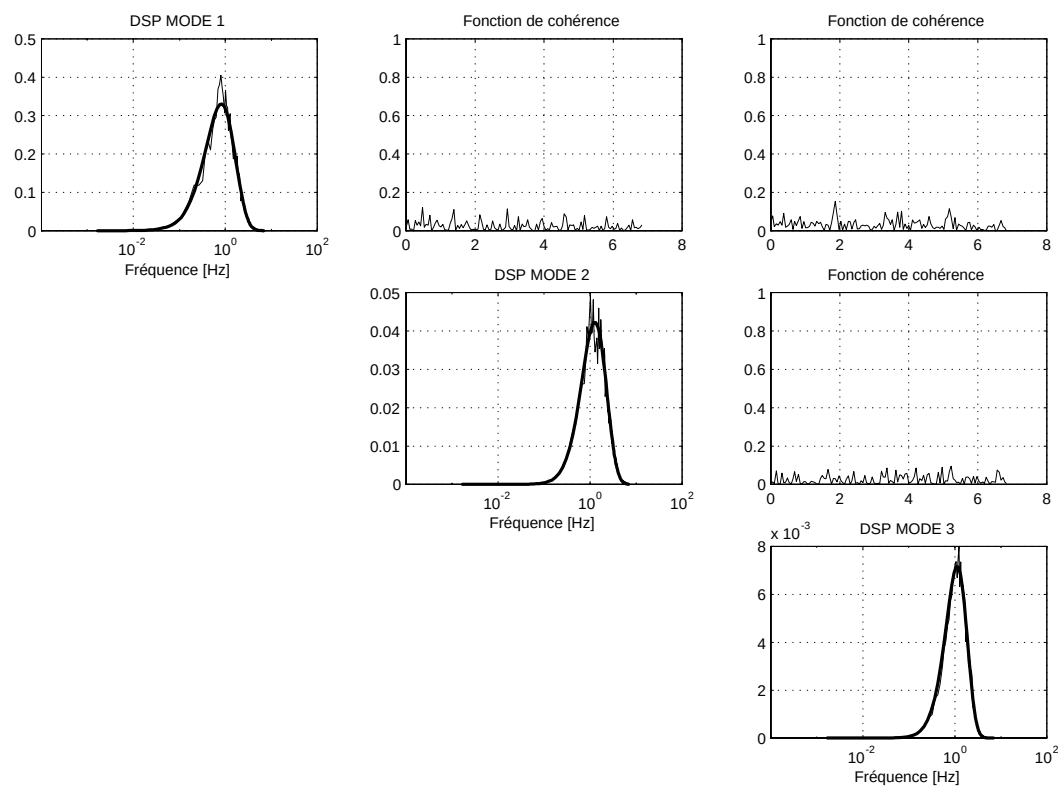


FIG. 6.20 – Densités spectrales modales des échantillons modaux générés, fonction de cohérence modale

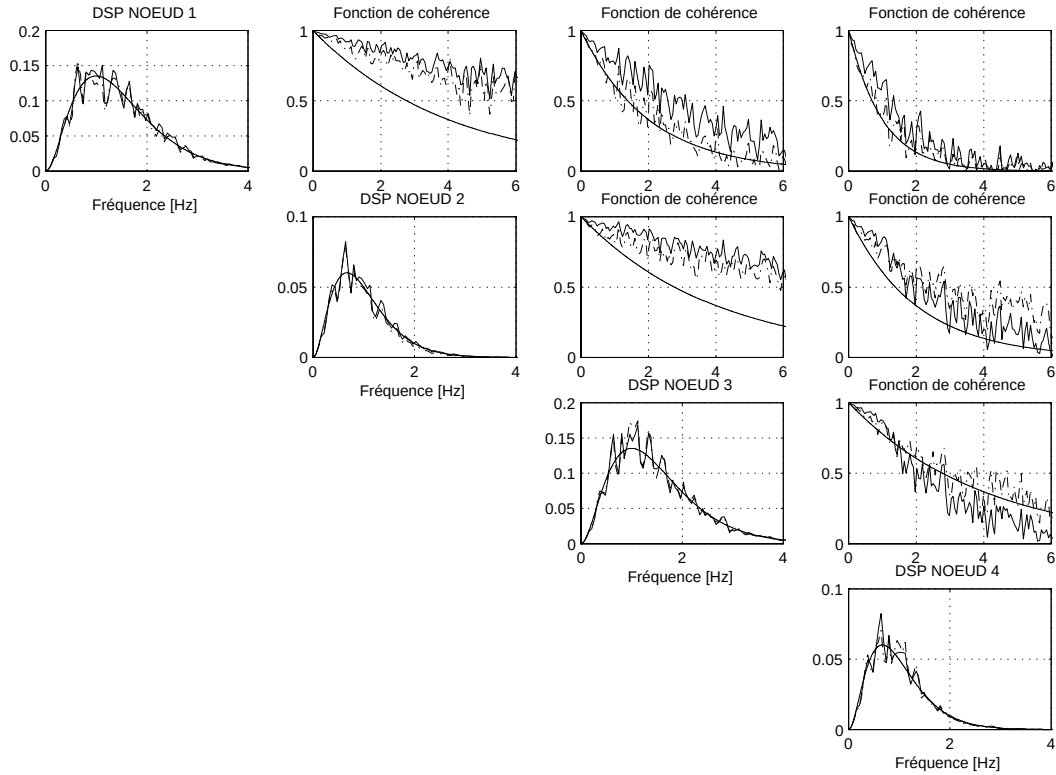


FIG. 6.21 – Densités spectrales nodales des échantillons générés, fonction de cohérence nodale

De retour dans la base nodale, les graphiques de la figure 6.21 permettent de représenter la qualité de la génération. Les conclusions tirées à l'exemple 2 restent toujours valables : les densités spectrales unidimensionnelles sont très bien représentées mais les cohérences entre échantillons ne correspondent pas tout à fait aux cohérences exigées. La discordance est cependant moins importante que pour l'exemple précédent puisque le pourcentage de modes propres laissés de côté est cette fois moins important. Ceci laisse présager des possibilités d'utilisation pour la génération de champs de vitesses plus importants.

Optimisation de l'algorithme développé

La génération d'échantillons corrélés dans le temps et cohérents dans l'espace est une opération qui requiert un nombre important d'opérations. Dans le cadre de petits exemples comme ceux qui viennent d'être présentés, la génération est presque instantanée. Il serait cependant intéressant de modifier légèrement l'algorithme utilisé afin de pouvoir également générer en un laps de temps minimum des champs de vitesses beaucoup plus grands.

Il va de soi que la majorité du temps nécessaire à la génération est consommée par le calcul des modes propres et valeurs propres. En effet, dans sa version originelle, la décomposition modale de la matrice de densité spectrale cible $[S_N(\omega)]$ a lieu pour toutes les fréquences de définition des échantillons générés. Dans les exemples présentés précédem-

ment, la décomposition modale a donc été effectuée 8192 fois ! On ne peut évidemment pas se permettre ceci lorsque la matrice à étudier est de dimension $[1000 \times 1000]$ par exemple.

Comme cela a été suggéré ci-avant, une première amélioration de l'algorithme consiste à ne calculer la décomposition modale que pour un nombre limité de fréquences (par exemple une sur dix) et à calculer par interpolation les valeurs et modes propres associés aux valeurs intermédiaires. Ceci permet déjà de réduire fortement le nombre de décompositions modales à réaliser.

Cette modification n'est pas encore suffisante car elle ne tient pas compte de la forme de la matrice de densité spectrale à décomposer. En effet, il serait intéressant de mettre au point un algorithme qui évalue les positions des fréquences de décomposition optimales en fonction du problème étudié. C'est ce qui a été réalisé.

Etant donné que les valeurs et modes propres correspondant aux fréquences non calculées sont obtenus par interpolation linéaire entre des valeurs connues, le nombre de fréquences de calcul doit être minimal lorsque ces grandeurs évoluent linéairement. La solution retenue travaille uniquement sur les évolutions des valeurs propres en fonction des fréquences. Lorsque la décomposition modale est terminée pour la fréquence f_3 , on estime, pour chaque valeur propre, l'erreur que l'on aurait commise si l'on avait estimé cette valeur par extrapolation à partir des deux valeurs précédemment obtenues ($f_1; V_1$) et ($f_2; V_2$).

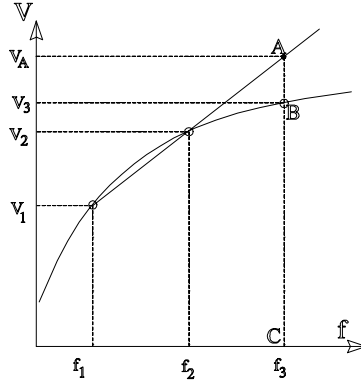


FIG. 6.22 – Illustration de l'erreur d'extrapolation introduite pour réguler la taille du pas de fréquence

Pour chacun des modes, l'erreur s'exprime par (Fig. 6.22) :

$$\varepsilon_m = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{V_1 + \frac{V_2 - V_1}{f_2 - f_1} (f_3 - f_1) - V_3}{V_3} \quad (6.52)$$

Cette définition est telle que l'erreur obtenue soit d'autant plus petite que la valeur propre est linéaire. A la fin de chaque décomposition modale, un estimateur de linéarité des valeurs propres peut donc être calculé :

$$\varepsilon = \max_m |\varepsilon_m| \quad (6.53)$$

Cette grandeur est alors utilisée pour estimer la fréquence de décomposition suivante. Si l'erreur est petite, le pas de fréquence peut être agrandi ; par contre, si cette erreur est faible, cela signifie que l'on se trouve dans une zone où la dérivée seconde d'au moins une valeur propre est importante, et donc que le pas de fréquence devrait idéalement être réduit. Le rapport entre le nouveau pas de fréquence ($f_4 - f_3$) et le pas de fréquence en cours ($f_3 - f_2$) est calculé par :

$$\frac{f_4 - f_3}{f_3 - f_2} = 1.5e^{-10\varepsilon} \quad (6.54)$$

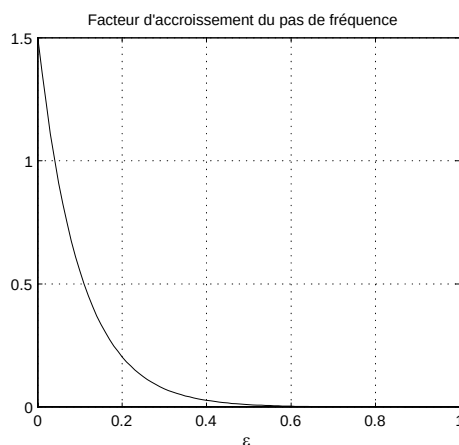


FIG. 6.23 – Facteur d'accroissement du pas de fréquence

Plusieurs raisons justifient le choix de cette relation :

- il est important que la taille du pas de fréquence diminue rapidement lorsque l'erreur augmente ; il nous semble qu'une décroissance exponentielle devrait suffire ;
- il est également important que la valeur à l'origine soit bornée, et pas trop importante de sorte que le pas de fréquence n'augmente pas de manière démesurée lorsque les valeurs propres deviennent linéaires ;
- pour ne pas que l'algorithme s'emballe trop rapidement, la relation a été imaginée afin que le pas de fréquence n'augmente que si l'erreur est inférieure à 4%

Toutes les générations réalisées jusqu'à ce jour ont montré que l'utilisation de cette relation mène à une excellente représentation de la décomposition modale. La figure 6.24 représente les trois premières valeurs propres de l'exemple 3. Chacune des croix représente une fréquence de calcul de la décomposition modale. Avec l'algorithme qui vient d'être présenté, ces courbes sont représentées par 110 fréquences, ce qui est substantiellement réduit par rapport aux 8192 décompositions modales de la méthode de base, ou même aux 820 valeurs qui seraient nécessaires si la décomposition modale était effectuée pour un fréquence sur dix.

La figure 6.25 représente la taille des pas de fréquence pour la décomposition modale de la matrice de densité spectrale cible de l'exemple 3. Le minimum des rapports entre deux valeurs successives vaut 0.87 ; il apparaît entre les pas de fréquences 41 et 42, c'est-à-dire dans la zone où la concavité (vers le haut) de la première valeur propre est la plus importante, aux environs de $1.5Hz$. L'erreur ε associée à ce rapport est de 5,5%, ce

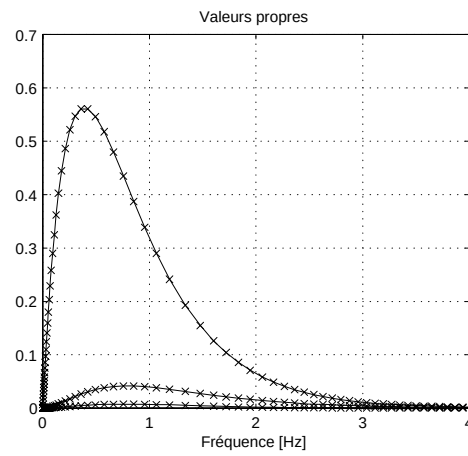


FIG. 6.24 – Représentation des valeurs propres obtenues à l'aide de l'algorithme amélioré

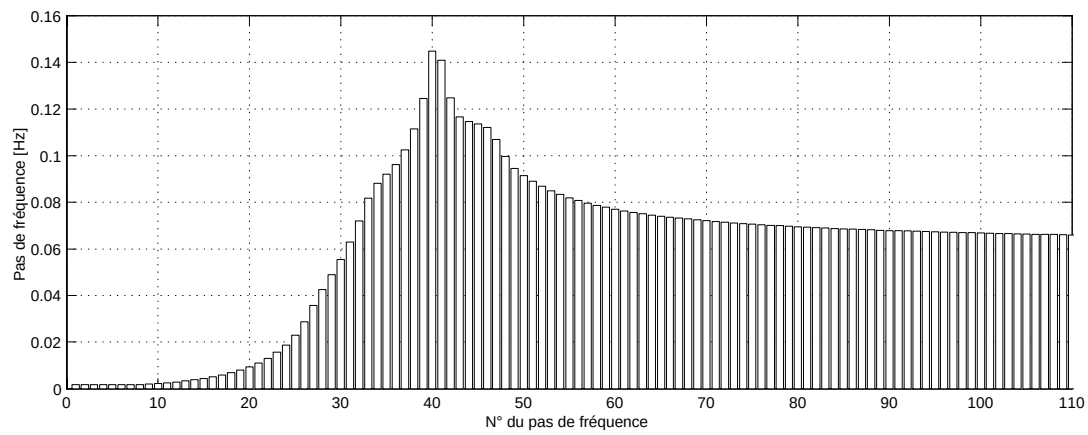


FIG. 6.25 – Taille des pas de fréquence pour la décomposition modale (exemple 3)

qui peut a priori sembler beaucoup mais il faut garder à l'esprit que ceci n'est pas une erreur commise réellement mais plutôt une erreur qui serait commise si la valeur propre du 42^{ième} pas de fréquence était obtenue par extrapolation (et même pas interpolation !) à partir des résultats des deux pas précédents.

6.3 Représentation correcte de la fonction de transfert du système

Le choix de paramètres de génération doit permettre la représentation correcte de la structure à étudier. Le raisonnement sera mené sur un oscillateur à un degré de liberté. Par représentation correcte de la structure, nous entendons celle de sa fonction de transfert. En ce qui concerne les caractéristiques d'ordres supérieurs (intrinsèquement liées aux noyaux de Volterra) nous savons qu'elles dépendent également essentiellement de la fonction de transfert. Cette étude assez rudimentaire devrait donc suffire. Il convient de choisir :

- un pas de fréquence suffisamment petit afin de représenter assez finement le pic de résonance. Ce pas sera d'autant plus petit que le pic est aigu, c'est-à-dire que la structure est peu amortie. L'équivalent dans le domaine temporel de ce critère est l'imposition d'une durée d'échantillon suffisamment longue pour pouvoir distinguer le contenu fréquentiel de la réponse d'un oscillateur soumis à un bruit blanc. La présence d'un pic de largeur non nulle dans la fonction de transfert induit un phénomène de battement dans la réponse observée. Ce premier critère revient donc à imposer une durée d'échantillon suffisamment longue pour pouvoir interpréter correctement ce battement ;
- une fréquence maximale au delà de laquelle le système ne répond plus guère.

6.3.1 Résolution fréquentielle optimale

Le plus grand pas de fréquence qui permette de représenter correctement la structure sera évalué en calculant l'erreur commise lors de l'intégration numérique (méthode du trapèze) de la norme au carré de la fonction de transfert d'un système à un degré de liberté :

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{k^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{f}{f_n}\right]^2} \quad (6.55)$$

où k , f_n et ξ représentent respectivement la raideur de l'oscillateur, sa fréquence propre et son coefficient d'amortissement relatif. Le résultat analytique de cette intégrale peut être obtenu par la méthode des résidus :

$$I_H^{(analyt)} = \int_0^\infty |H(f)|^2 dn = \frac{1}{k^2} \frac{\pi f_n}{4\xi}$$

Etant donné que nous n'avons encore aucune idée de la borne d'intégration supérieure à choisir, l'intégration numérique sera limitée à $10f_n$, ce qui semble déjà suffisant :

$$I_H^{(num)}(\Delta n) = \frac{1}{2} |H(0)|^2 \Delta n + \sum_{i=1}^{N_h} |H(i\Delta n)|^2 \Delta n \quad \text{où } \Delta n = \frac{10f_n}{N_h} \quad (6.56)$$

La figure 6.26 indique, pour différents coefficients d'amortissement, l'erreur relative commise sur l'estimation de l'intégrale :

$$erreur = \frac{I_H^{(num)}(\Delta n) - I_H^{(analyt)}}{I_H^{(analyt)}} \quad (6.57)$$

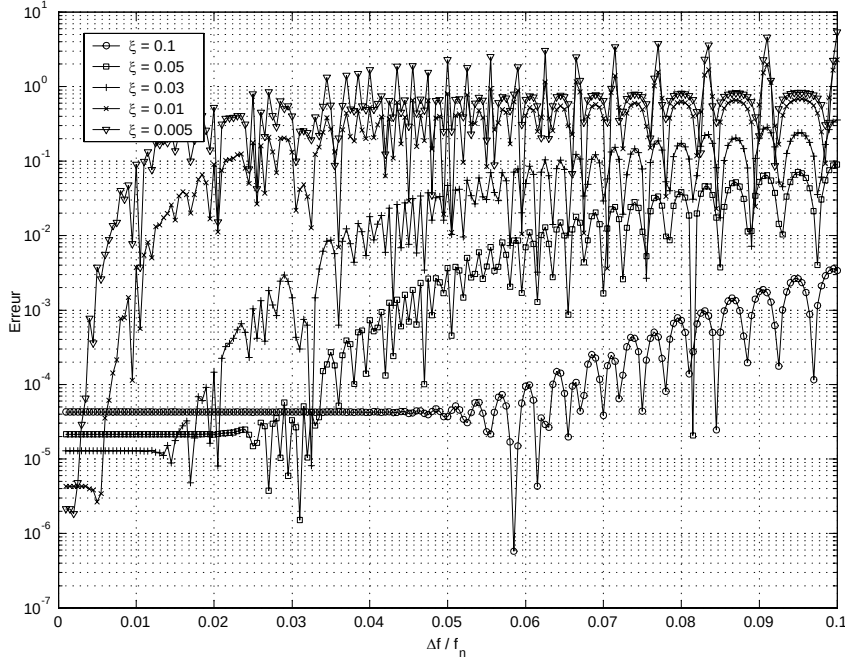


FIG. 6.26 – Estimation d'une résolution fréquentielle optimale pour la représentation d'une fonction de transfert

La forme saccadée des courbes pour les grands pas de fréquence provient du fait que la décomposition en intervalles pour le calcul numérique de l'intégrale n'est pas "progressive". On identifie clairement sur ce graphique une résolution fréquentielle à partir de laquelle la courbe devient horizontale, ce qui signifie simplement que la fonction de transfert est alors correctement représentée. L'existence d'une erreur résiduelle aux très petites résolutions fréquentielles provient de la troncature de l'intégrale.

La figure 6.26 permet de justifier la limite :

$$\frac{\Delta f}{f_n} = \frac{\xi}{2} \quad (6.58)$$

comme une limite acceptable permettant de représenter correctement ce pic de résonance. On constate par exemple que la valeur $\frac{\Delta f}{f_n} = 0.05$ identifie correctement la fin du plateau pour $\xi = 0.1$ ou encore que $\frac{\Delta f}{f_n} = 0.015$ semble bien adapté à la courbe $\xi = 0.03$.

6.3.2 Fréquence maximale à représenter

Le second paramètre important qu'il convient d'optimiser concerne bien sûr la fréquence maximale à partir de laquelle l'intégration peut être tronquée. Au paragraphe

précédent, cette valeur était limitée à $10f_n$; ceci a permis de limiter l'erreur relative de troncature à moins de 10^{-4} , voire 10^{-5} pour les structures les moins amorties. Ceci semble bien sûr un peu trop excessif comme imposition.

Nous allons étudier la limite de troncature de l'intégrale en choisissant la résolution fréquentielle conseillée par la relation 6.58. La figure 6.27 représente, pour différents taux d'amortissement, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale.

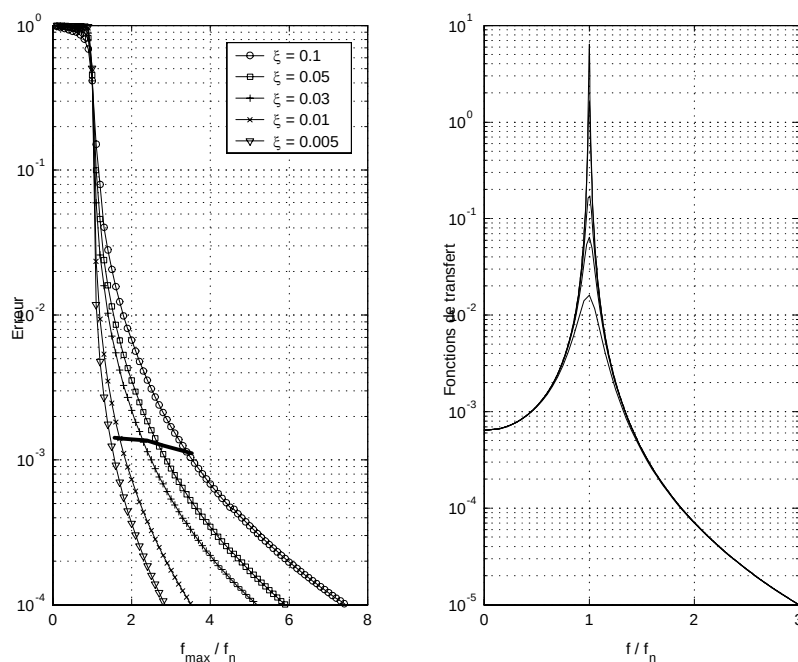


FIG. 6.27 – Estimation d'une fréquence maximale à représenter

L'examen de cette figure indique que la borne supérieure de l'intégrale doit être d'autant plus grande que le système est amorti, ce qui est logique puisque dans ce cas l'énergie est répartie sur une bande de fréquences plus large. Cette limite maximale peut être approchée par la relation :

$$\frac{f_{MAX}}{f_n} = 1 + 8\sqrt{\xi} \quad (6.59)$$

Ce choix permet d'obtenir le niveau de précision proche de 10^{-3} et est indiqué par un trait en gras sur la figure 6.27.

6.4 Représentation du contenu fréquentiel de la sollicitation

Le contenu fréquentiel de la sollicitation doit également être pris en compte pour la détermination des paramètres liés à la génération. Dans la suite, nous travaillerons

principalement avec le spectre de Davenport :

$$S(f) = \frac{\frac{2}{3}f \left(\frac{L_u^x}{U} \right)^2 \sigma_u^2}{\left[1 + \left(\frac{nL_u^x}{U} \right)^2 \right]^{4/3}} \quad (6.60)$$

Tâchons donc de déterminer d'une part le plus grand pas de fréquence qui permette de représenter correctement la dispersion fréquentielle du contenu énergétique, et d'autre part la fréquence maximale au delà de laquelle il ne reste plus que très peu d'énergie dans le processus.

6.4.1 Résolution fréquentielle optimale

Afin de conserver le plus de généralité possible, les raisonnements seront menés sur une fréquence adimensionnelle :

$$\hat{f} = \frac{fL_u^x}{U} \quad (6.61)$$

La figure 6.28 indique la fonction à représenter numériquement (à droite) ainsi que l'erreur commise sur l'intégrale en fonction de la taille du pas de fréquence (à gauche). L'erreur est calculée en comparant la réponse analytique (σ_u^2) avec le résultat de l'intégration numérique depuis $\hat{f} = 0$ jusque $\hat{f} = 200$. Une limite acceptable pour la résolution fréquentielle adimensionnelle semble être

$$\frac{\Delta f L_u^x}{U} = 0.1$$

En effet, en dessous de cette valeur, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale semble ne plus varier et est donc dans ce cas exclusivement associée à une erreur de troncature.

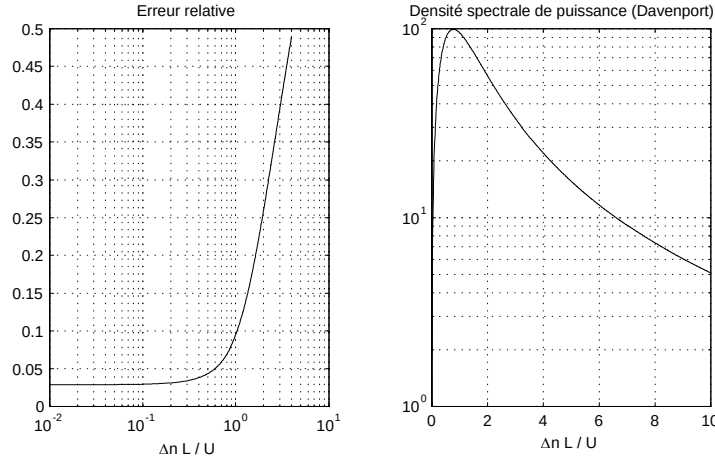


FIG. 6.28 – Estimation d'une résolution fréquentielle optimale pour la représentation de la sollicitation

6.4.2 Fréquence maximale à représenter

Lorsque la fréquence de troncature est trop faible, une partie de l'énergie associée aux hautes fréquences du processus n'est pas représentée. Par exemple, Le graphique de la figure 6.28 vient de montrer qu'une fréquence de troncature $\hat{f} = 200$ engendrait une erreur de l'ordre de 3%, ce qui est déjà assez important.

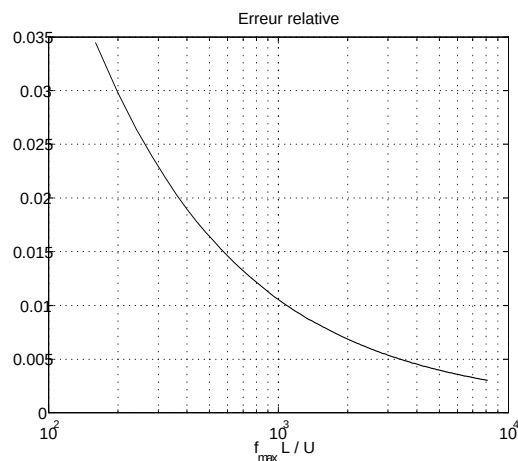


FIG. 6.29 – Estimation d'une fréquence maximale à représenter

Le graphique 6.29 indique que le choix :

$$\frac{f_{\max} L_u^x}{\bar{U}} = 10^3 \quad (6.62)$$

permet de représenter correctement 99% de l'énergie contenue dans le processus à représenter numériquement. Pratiquement, cette fréquence maximale peut, dans certains cas, être relativement importante. Ceci provient de la décroissance assez lente ($\sim f^{-5/3}$) de la densité spectrale de la vitesse de vent. Ceci justifie également la possibilité d'excitation d'une structure faiblement amortie dont les fréquences propres sont supérieures au Hertz.

A titre d'exemple, supposons que l'échelle de turbulence et la vitesse moyenne du vent soient respectivement $L_u^x = 1200m$ et $U = 30m/s$. Dans ce cas, il conviendrait de prendre en compte le contenu fréquentiel du vent jusqu'à $25Hz$, ce qui est bien sûr impossible en pratique. Cette difficulté peut être contournée assez facilement ; la solution tombe sous le sens en se posant cette question : pourquoi introduire dans les échantillons générés un contenu fréquentiel jusqu'à des fréquences qui seront de toute façon filtrées par la structure étudiée ? La méthodologie prescrite consiste donc à estimer la fréquence maximale sur base du minimum des relations 6.59 et 6.62. Le critère le plus restrictif sera généralement celui lié à la bonne représentation de la structure. Il en découle donc que chaque génération sera adaptée à la structure à étudier, mais aussi que des structures semblables d'un point de vue géométrique et aérodynamique, mais différentes d'un point de vue mécanique, nécessiteront des échantillons générés différents. Ceci provient du choix personnel d'utiliser les mêmes paramètres pour la génération et la résolution.

6.5 Caractéristiques de génération liées à la résolution pas-à-pas

6.5.1 Fréquence maximale à représenter

Lorsque les échantillons d'efforts sollicitant sont générés, la démarche à suivre consiste à analyser dans le domaine temporel la réponse de la structure sous chacune de ces sollicitations. Les méthodes les plus efficaces (et surtout les seules d'application lorsque le problème traité est non linéaire) sont les méthodes pas-à-pas.

L'algorithme que nous avons utilisé est celui de Newmark ($\alpha = 0.25; \delta = 0.5$) qui a la particularité, pour ce choix de paramètres, d'être inconditionnellement stable. Comme pour tous les algorithmes pas-à-pas, il existe un pas de temps minimal en dessous duquel certaines harmoniques ne peuvent plus être représentées correctement. Ceci est lié à la discrétisation d'un signal temporel et peut s'expliquer graphiquement par la nécessité d'avoir un certain nombre de points pour représenter correctement un signal harmonique.⁷

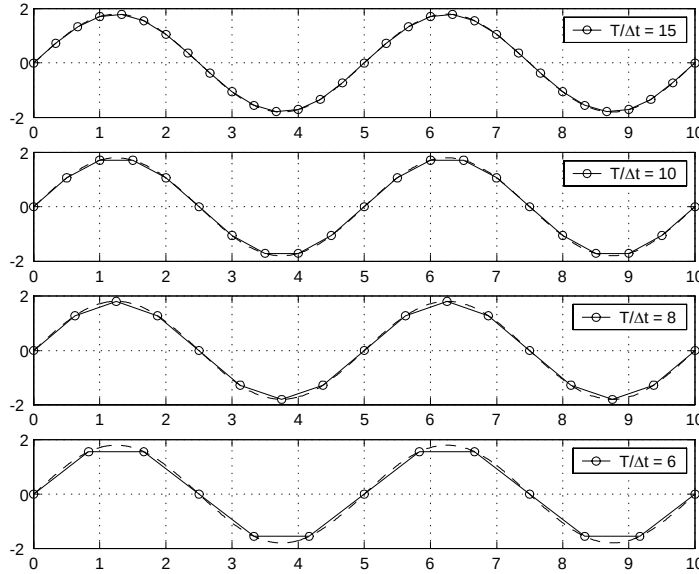


FIG. 6.30 – Représentation discrète de signaux harmoniques de période T .

La figure 6.30 montre que la valeur $\frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{10}$ semble être une limite raisonnable, ce qui signifie que 10 points devraient suffire pour la représentation correcte d'une sinusoïdale. La suite des développements sera basée sur cette valeur et nous pourrions effectivement constater dans un exemple que cette relation semble assez bien adaptée.

L'existence d'une résolution temporelle limitée peut se traduire en termes de fréquences : pour un pas de temps de résolution Δt choisi, il est impossible de représenter

⁷Le théorème de Shanon affirme que $f = \frac{1}{2\Delta t}$ est la fréquence maximale qui puisse être retirée d'un signal discrétisé avec un pas de temps Δt . Il faut donc au moins deux points pour pouvoir distinguer l'existence d'une composante harmonique dans un signal. Il est cependant évident que deux points ne suffisent pas pour représenter la composante harmonique avec une précision suffisante.

les fréquences supérieures à la limite :

$$n_{\max} = \frac{1}{T_{\min}} \simeq \frac{1}{10\Delta t} \quad (6.63)$$

6.5.2 Résolution fréquentielle maximale

Il existe une différence fondamentale entre les analyses dans le domaine fréquentiel et celles pas-à-pas dans le domaine temporel. En effet, le premier type d'analyse est conditionné par la notion de stationnarité : on ne calcule jamais les transformées de Fourier (discrètes) que de processus stationnaires ; tandis que le second type d'analyse est transitoire par nature, la meilleure preuve étant l'existence de conditions aux limites.

Il est bien connu que, dans une structure amortie, les effets d'une perturbation affligée en un instant s'amenuisent au cours du temps. Il existe donc un laps de temps T_R après lequel la perturbation ne se fait plus ressentir. En l'occurrence, ici, une période dite de mise en régime, après laquelle les conditions initiales imposées sont oubliées. Cette période peut être estimée sur base de la réponse libre d'un système amorti dont la forme analytique s'exprime par une exponentielle décroissante modulant une combinaison d'harmoniques (Equ.3.18). Exprimer que l'exponentielle devient faible (par exemple en perdant un pourcentage χ de son amplitude initiale) permet d'évaluer une période de mise en régime (T_R) :

$$\frac{T_R}{T_{nat}} = \frac{0.5 \ln \frac{1}{1-\chi}}{2\pi\xi} \quad (6.64)$$

En effet, le remplacement de la relation 6.64 dans l'expression de la réponse libre amortie permet d'obtenir :

$$e^{-2\omega_{nat}\xi T_R} = e^{-\ln \frac{1}{1-\chi}} = 1 - \chi \quad (6.65)$$

La figure 6.31 donne une idée schématique de la relation 6.64. La figure 6.32 représente la réponse d'un oscillateur à un degré de liberté ($\omega_{nat} = 5rad/s$) soumis à une charge sinusoïdale. On y retrouve la notion de période de mise en régime ; le trait gras vertical représente la période T_R calculée à l'aide de la formule 6.64 pour laquelle $\chi = 0.99$. Cette valeur choisie permet effectivement d'obtenir une période de mise en régime proche de celle qui serait choisie "à l'oeil".

Nous recommandons de travailler avec $\chi = 0.99$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{T_R}{T_{nat}} \simeq \frac{0.15}{\xi} \quad (6.66)$$

Au niveau d'une simulation de Monte Carlo, ce phénomène doit également être pris en compte dans la mesure où, puisque l'on est censé étudier un phénomène stationnaire (l'effet du vent), il est important que la phase transitoire soit suffisamment courte devant la partie stationnaire dont on essaye de calculer les caractéristiques statistiques. Deux procédures pourraient être envisagées :

- Méthode 1 : les caractéristiques statistiques de la réponse ne sont calculées que sur la partie stationnaire ; l'équation 6.66 est alors utilisée pour estimer la période de mise en régime. Les caractéristiques statistiques sont calculées sur la fin de la réponse, à partir de l'entrée dans la phase stationnaire ;

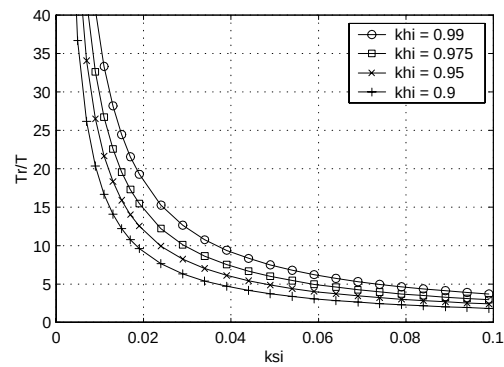


FIG. 6.31 – Estimation de la période de mise en régime

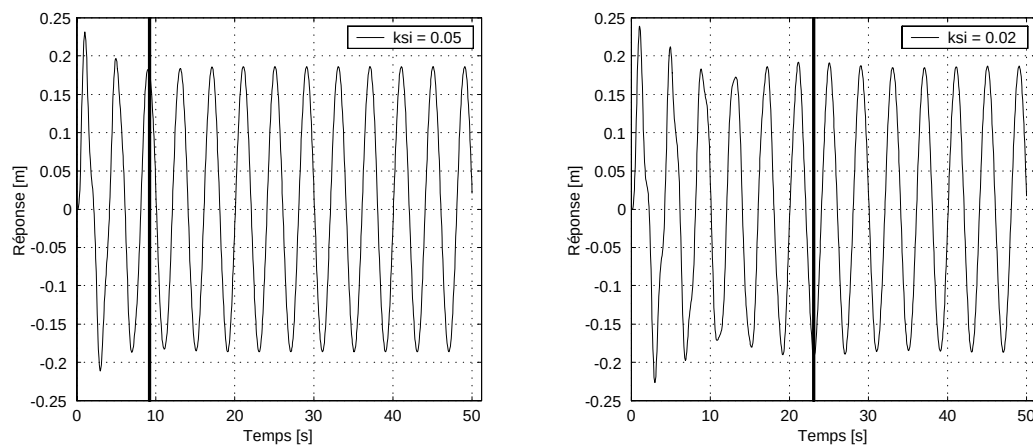


FIG. 6.32 – Exemple de périodes de mise en régime - Réponses d'un oscillateur simple

- Méthode 2 : les caractéristiques statistiques sont évaluées sur l'entière de la réponse, phase transitoire y comprise. Cette méthode semble plus simple à mettre en oeuvre. Elle n'est cependant valable que lorsque la partie transitoire est courte.

Les résultats obtenus avec ces deux méthodes ont été présentés dans un autre document. De l'étude qui y a été réalisée, on peut retenir que la seconde méthode est préférable lorsque la structure étudiée est raide (ou fort amortie) ou que la phase transitoire occupe une place importante (plus de 10% de la durée complète du signal). En guise de conclusion, nous mentionnons, argumentation à l'appui, ([26]) qu'une période de mise en régime de l'ordre de 5% de la durée totale du signal ne permet pas de dégrader la qualité de la réponse obtenue.

6.6 Représentation du contenu aux très basses fréquences

6.6.1 Principe général

Plusieurs situations peuvent faire en sorte que le contenu de la sollicitation (et donc également de la réponse) dans le domaine des très basses fréquences soit non négligeable.

La première raison est simple et directe : il s'agit du contenu aux basses fréquences dans l'expression de la densité spectrale de vitesse de vent. Depuis quelques dizaines d'années, les météorologistes tentent de caractériser au mieux le contenu fréquentiel du vent. Plusieurs formulations sont actuellement disponibles. Le point commun incontestable de ces différentes formulations concerne le comportement aux hautes fréquences. Il est régi par les lois de la turbulence isotrope et est en général admis par tous. Par contre, le contenu aux basses fréquences présente plutôt des formes très différentes. A titre d'exemple, la densité spectrale de Davenport est proportionnelle à la fréquence n dans le domaine des basses fréquences alors que la densité spectrale de Von Karman prend une valeur constante à l'origine. Cette valeur non nulle à l'origine ne signifie pas que la moyenne de la composante turbulente du vent est non nulle à l'origine puisque la moyenne d'un signal se représente, comme nous l'avons constaté lors des développements théoriques précédents, par une fonction de Dirac centrée à l'origine. Cette fonction est donc impossible à représenter numériquement.

Le contenu aux basses fréquences provient en réalité du fait que les données de vent ont été fittées de façon à reproduire correctement la densité spectrale de puissance, dans une gamme de fréquence proche des fréquences intéressantes, c'est-à-dire, des fréquences propres structurelles. Si ce contenu aux très basses fréquences présente généralement peu d'intérêt, c'est bien parce que d'un point de vue théorique, sa répartition entre les très basses fréquences et les fréquences un peu plus grandes mais toujours inférieures aux fréquences propres structurelles n'aura aucune influence sur la réponse de la structure⁸.

La seconde raison pour laquelle la sollicitation peut présenter un contenu fréquentiel aux basses fréquences provient du fait que l'effort appliqué s'exprime à partir du carré d'un processus aléatoire gaussien. Nous avons déjà rencontré ce problème à l'occasion de la discussion sur le calcul de l'autoconvolution de la densité spectrale. Nous y avons constaté que même un processus en bande étroite, après être élevé au carré, donnait autant d'énergie dans le domaine des basses fréquences que dans la gamme de fréquence

⁸puisque la fonction de transfert ainsi que les noyaux de Volterra d'ordres supérieur possèdent un comportement asymptotique aux basses fréquences.

proche du double de sa fréquence propre.

Que ce soit pour l'une ou l'autre de ces raisons, les problèmes que nous allons traiter présentent un contenu aux très basses fréquences. Si d'un point de vue théorique, la répartition exacte de cette énergie présente peu d'intérêt, puisque le système répondra de toute façon, de manière quasi-statique, d'un point de vue numérique cela peut poser davantage de problèmes.

En effet, le contenu aux très basses fréquences est à associer avec des harmoniques de très longues périodes. Etant donné qu'une simulation numérique ne peut traiter qu'un signal fini dans le temps, ces harmoniques dont les périodes sont plus grandes que la durée du signal observé ne peuvent certainement pas être correctement représentées. Ceci signifie donc qu'une partie de l'énergie aux basses fréquences n'est pas représentée correctement. Afin de palier ce problème de représentation des basses fréquences, nous allons systématiquement remonter le contenu aux très basses fréquences vers des fréquences plus hautes mais toujours largement inférieures aux fréquences propres structurales. En invoquant la tangente horizontale dans la fonction de transfert, le plan tangent au second noyau de Volterra et l'hyperplan tangent au troisième noyau de Volterra, cette modification de la sollicitation ne peut engendrer que des modifications non significatives de la réponse.

Pour donner maintenant des ordres de grandeurs, considérons par exemple que toute l'énergie de la sollicitation située en-dessous de $\frac{\varpi}{20}$ soit déplacée entre $\frac{\varpi}{20}$ et $\frac{\varpi}{10}$. Pour $\omega = \frac{\varpi}{10}$, la fonction de transfert vaut environ un pourcent de plus que sa valeur à l'origine. Ceci ne devrait donc engendrer que des modifications d'un ordre inférieur au pourcent sur la réponse structurale.

En terme de critères de génération, pour que le contenu de la plus basse fréquence soit représenté correctement, on peut considérer que la durée du signal à générer doit être plus grande qu'environ 5 fois la plus grande période, soit, avec les ordres de grandeur donnés ci-avant :

$$T > 5 \frac{2\pi}{\frac{\varpi}{20}} = 100 \frac{2\pi}{\varpi} \quad (6.67)$$

D'un autre côté, nous venons de voir également que le pas de temps à choisir pour la résolution ne peut pas être trop grand afin d'éviter des problèmes de précision et de stabilité. Le respect de ces deux critères ne peut donc que s'accompagner d'un nombre N de pas de temps tel que :

$$\left. \begin{array}{l} T = N\Delta t > 100 \frac{2\pi}{\varpi} \\ 10\Delta t < \frac{2\pi}{\varpi} \end{array} \right\} \Rightarrow N\Delta t > 100 \frac{2\pi}{\varpi} > 1000\Delta t \Rightarrow N > 1000 \quad (6.68)$$

La solution proposée pour prendre en compte correctement le contenu aux très basses fréquences semble donc pouvoir être appliquée sans trop de problèmes. De plus, nous pouvons dès à présent annoncer que la réponse d'une structure à une sollicitation stationnaire présentant un contenu fréquentiel dans les très basses fréquences ne peut se faire qu'à condition d'utiliser au moins 1000 pas de temps. On peut trouver dans la littérature un nombre assez impressionnant de référence à des simulations de Monte Carlo qui ne satisfont pas ces critères. Il nous semble pourtant que le respect de ces critères soit primordial pour obtenir des résultats significatifs.

Lors de l'étude d'une structure à plusieurs degrés de liberté, les deux critères considérés ci-dessus (Eq. 6.68) ne concernent plus le même mode. L'un des critères doit être

écrit pour la plus grande période propre alors que le second doit l'être pour la plus petite période propre significative. Le nombre de 1000 pas de temps mentionné ci-dessus doit alors être multiplié par le rapport entre la plus grande et la plus petite période propre. Pour l'étude d'une structure dont les fréquences propres des modes significatifs s'étalent entre 0.4Hz et 2Hz, on ne peut donc imaginer une étude par simulation numérique qu'à partir d'échantillons de 5000 points. Bien sûr, il faut également que les autres critères présentés aux paragraphes précédents soient également satisfaits ; ceci ne peut engendrer qu'une augmentation de la taille des échantillons à générer.

6.6.2 Shift du contenu fréquentiel

Maintenant que le principe général de la méthode a été établi, voyons comment cette énergie aux très basses fréquences peut être transférée dans une gamme de fréquence légèrement supérieure. Pour fixer les idées, considérons que l'énergie contenue dans la bande de fréquence $[0; f_1]$ doit être redistribuée dans la bande $[f_1; f_2]$.

La première idée, et certainement aussi la plus simple à mettre en oeuvre, consiste à calculer l'énergie à déplacer (l'intégrale de la densité spectrale sur $[0; f_1]$) et à la répartir uniformément sur la bande de fréquence $[f_1; f_2]$. Cette répartition d'énergie vient donc s'ajouter à l'énergie qui se trouvait dans cette bande de fréquence.

Une seconde idée vient assez logiquement à l'esprit : en choisissant $f_2 = 2f_1$ l'énergie à déplacer peut simplement être translatée vers les plus hautes fréquences.

Ces manières de procéder peuvent être assez attrayantes par la facilité d'application mais les discontinuités qu'elles créent dans la nouvelle densité spectrale de sollicitation devraient idéalement être évitées. A cette fin, nous proposons une troisième méthode qui consiste à réorganiser la répartition de l'énergie comprise dans la bande $[0; f_2]$. Pour préciser quelque peu la manière dont ceci est réalisé, nous nous sommes imposés les cinq conditions suivantes sur la forme de la nouvelle densité spectrale $\hat{S}$ telle que $\hat{S}(f) = 0$ sur $[0; f_1]$ et :

$$\hat{S}(f_1) = 0 \quad (6.69)$$

$$\frac{d}{df}\hat{S}(f_1) = 0 \quad (6.70)$$

$$\hat{S}(f_2) = S(f_2) \quad (6.71)$$

$$\frac{d}{df}\hat{S}(f_2) = \frac{d}{df}S(f_2) \quad (6.72)$$

$$\int_{f_1}^{f_2} \hat{S}(f) df = \int_0^{f_2} S(f) df \quad (6.73)$$

Notons que la fonction

$$\phi(\alpha) = \alpha [A\alpha \sin \alpha + B \sin \alpha + C\alpha] \quad (6.74)$$

présente une valeur nulle et une pente nulle à l'origine, ce qui satisfait de facto les deux premières conditions (avec le changement de variable $\alpha = k(f - f_1)$). Il reste alors trois paramètres A , B et C à fixer pour satisfaire les trois dernières conditions. Le changement de variable

$$\alpha = \pi \frac{f - f_1}{f_2 - f_1} \quad (6.75)$$

permet de passer de l'intervalle $[0; \pi]$ en α à l'intervalle $[f_1; f_2]$ en f et donc les conditions à vérifier sur f peuvent être réécrites et simplifiées en prenant α comme variable. Après écriture des conditions dans ce domaine, puis retour à la variable f , on trouve que la fonction suivante peut être un candidat intéressant :

$$\hat{S}(f) = \pi \frac{f - f_1}{f_2 - f_1} \left[A\pi \frac{f - f_1}{f_2 - f_1} \sin \left(\pi \frac{f - f_1}{f_2 - f_1} \right) + B \sin \left(\pi \frac{f - f_1}{f_2 - f_1} \right) + C\pi \frac{f - f_1}{f_2 - f_1} \right] \quad (6.76)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \frac{(f_2 - f_1) (6 + \pi^2) S(f_2) - 3(f_2 - f_1)^2 \frac{d}{df} S(f_2) - 3\pi^2 \int_0^{f_2} S(f) df}{12(f_2 - f_1) \pi} \\ B &= \frac{(f_2 - f_1) (24 - 6\pi^2 - \pi^4) S(f_2) - 3(f_2 - f_1)^2 (4 - \pi^2) \frac{d}{df} S(f_2) + 3\pi^4 \int_0^{f_2} S(f) df}{12(f_2 - f_1) \pi^2} \\ C &= \frac{S(f_2)}{\pi^2} \end{aligned}$$

L'application du shift du contenu fréquentiel ainsi que des remarques concernant les caractéristiques de génération vont être présentées sur un exemple.

6.6.3 Exemple

La structure à étudier est un oscillateur à un degré de liberté dont les caractéristiques sont :

$$m = 1kg \quad k = 4N/m \quad \xi = 0.05 \quad (6.77)$$

$$\varpi = 2rad/s \quad T = 3.14s \quad f_n = 0.3183Hz \quad (6.78)$$

Nous supposons que l'effort appliqué à cette structure est proportionnel à la vitesse du vent :

$$f(t) = \alpha u(t) \quad (6.79)$$

où $\alpha = 1Ns/m$ et $u(t)$ représente la composante turbulente de la vitesse du vent dont le contenu fréquentiel est celui proposé par Von Karman . La densité spectrale de puissance de cet effort s'exprime donc par :

$$S_f = \alpha^2 S_u = S_F(n) = \frac{\frac{4L}{U} \sigma_u^2}{\left(1 + 70.8 \left(\frac{nL}{U}\right)^2\right)^{5/6}} \quad (6.80)$$

Pour l'application numérique, nous choisissons $\frac{L}{U} = 20s$ et $\sigma_u = 4m/s$. Le tableau 6.3 résume la démarche à suivre, dans le contexte précis de notre exemple, pour un choix optimal des paramètres de génération. Les deux premières lignes appliquent les critères développés précédemment pour la bonne représentation de la structure ainsi que de la sollicitation. Assez logiquement, le pas de fréquence Δf à retenir est la plus petite des deux valeurs indiquées. En vertu de la remarque formulée au paragraphe 6.4.2, la fréquence maximale f_{MAX} à retenir pour la génération est également la plus petite des valeurs données par les deux critères.

Du pas de fréquence Δf choisi, on peut déterminer une durée minimale T de l'échantillon à générer ; de la fréquence maximale f_{MAX} à représenter, le critère de représentation discrète d'harmoniques permet d'obtenir une idée de la taille du pas de temps Δt à ne pas dépasser. Finalement, le rapport entre ces deux nouvelles valeurs permet d'obtenir un ordre de grandeur du nombre N de pas de temps.

$\frac{\Delta f}{f_n} = \frac{\xi}{2} \rightarrow \Delta f \leq 7.96.10^{-3} Hz$	$\frac{f_{MAX}}{f_n} = 1 + 8\sqrt{\xi} \rightarrow f_{MAX} \geq 0.8877 Hz$
$\frac{\Delta f L_u^x}{U} = 0.1 \rightarrow \Delta f \leq 5.10^{-3} Hz$	$\frac{f_{max} L_u^x}{U} = 10^3 \rightarrow f_{MAX} \geq 50 Hz$
↓	↓
$\Delta f = 5.10^{-3} Hz$	$f_{MAX} = 0.8877 Hz$
↓	↓
$T = \frac{1}{\Delta f} = 200s$	$\Delta t \leq \frac{1}{10f_{MAX}} = 0.11s$
↘	↙
$N \sim \frac{200s}{0.11s} = 1774$	

TAB. 6.3 – Caractéristiques de l'échantillon généré

Le nombre de pas de temps qu'il semble a priori nécessaire d'utiliser est donc $N = 1774$. La durée minimale de l'échantillon est de $200s$. Nous pouvons directement comparer cette grandeur à la période de mise en régime :

$$T_R = \frac{0.15}{\xi} T_{nat} = 9.4s \quad (6.81)$$

Cette période de mise en régime ne représente donc que 4.7% de la durée complète de l'échantillon ; cela satisfait donc le critère ($T_r/T < 10\%$) introduit ci-avant. Pour pouvoir appliquer l'algorithme de la transformée de Fourier rapide, nous allons arrondir le nombre de pas de temps à la puissance de 2 supérieure. Ceci permet d'allonger la durée de l'échantillon ou de réduire le pas de temps de calcul. La période de mise en régime est assez faible mais nous allons tout de même augmenter légèrement la durée de l'échantillon à générer de sorte à mieux représenter le contenu aux basses fréquences de la sollicitation. Finalement, l'analyse aura lieu avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} N &= 2^{11} = 2048 \\ T &= 230s \rightarrow \Delta t = 0.1123s \\ \Delta f &= 4.35.10^{-3} Hz \quad f_{max} = 8.9 Hz \end{aligned} \quad (6.82)$$

Etant donné que la densité spectrale de Von Karman présente un contenu fréquentiel assez important dans le voisinage des très basses fréquences, nous allons profiter de cet exemple pour illustrer le déplacement du contenu fréquentiel. La figure 6.33 représente en traits discontinus la densité spectrale de puissance obtenue après le shift vers les plus hautes fréquences. Cette nouvelle densité spectrale présente un contenu nul en-dessous de $15mHz$ et coïncide avec la densité spectrale rigoureuse pour les fréquences supérieures à environ $30mHz$. On peut ainsi se rendre compte de l'ordre de grandeur des fréquences que nous classons sous la dénomination de *très basse fréquence*.

Le problème de la bonne représentation de ces basses fréquences n'est en réalité important que lorsqu'elles apportent une contribution significative à la réponse de l'oscillateur.

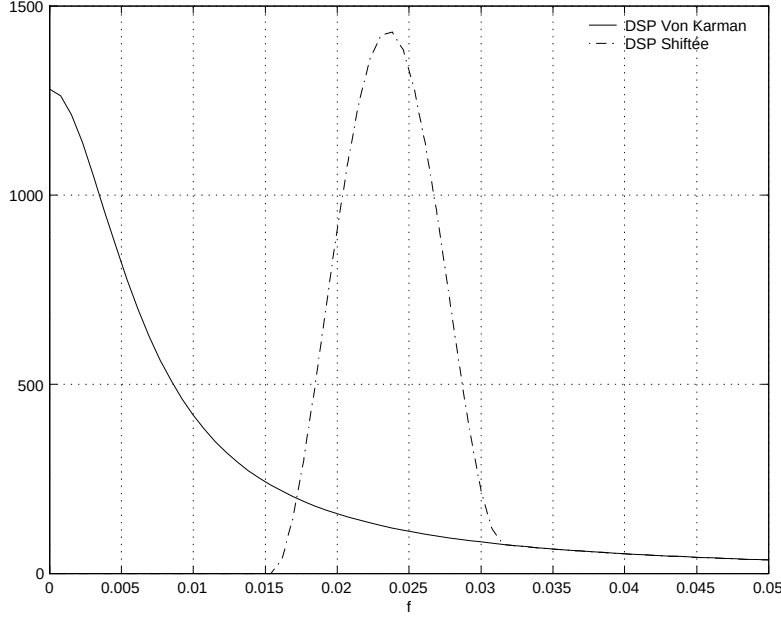


FIG. 6.33 – Illustration du shift fréquentiel sur la densité spectrale de Von Karman

Dans la philosophie de l'approximation en bruit blanc, cela signifie que la contribution dynamique doit être faible vis-à-vis de la contribution quasi-statique. Pour le problème que nous traitons maintenant, une analyse stochastique simplifiée (approximation en bruit blanc) dans le domaine fréquentiel permet d'obtenir :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{st} = 0.998m \\ \sigma_{dy} = 0.526m \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_x = 1.128m \quad (6.83)$$

soit $\sigma_{dy} = 0.53\sigma_{st}$. Lorsque nous présentons l'importance d'avoir des contributions dynamiques plus petites, il ne s'agit donc pas de contributions négligeables. Les remarques formulées dans ce contexte trouvent donc une certaine importance dans les applications pratiques pour lesquelles contributions quasi-statique et dynamique ont plus ou moins le même ordre de grandeur. Une intégration numérique (avec répartition optimale des points d'intégration) permet d'obtenir une estimation plus précise de l'écart type du déplacement :

$$\sigma_x = 1.22m \quad (6.84)$$

Ce résultat obtenu dans le domaine fréquentiel peut servir de référence lors de l'étude menée dans le domaine temporel. Dans ce domaine, deux analyses sont entreprises : l'une avec la densité spectrale exacte et l'autre avec la densité spectrale shiftée. Les paramètres de calcul et de génération qui ont été utilisés sont ceux qui viennent d'être discutés. Etant donné que cela peut paraître quelque peu heuristique de tirer des conclusions à partir d'une seule analyse pour chacune des deux configurations, nous avons de nouveau réalisé un ensemble de 1500 analyses, et ce, pour chacun des deux cas. Pour chacune de ces analyses, nous disposons donc d'un signal de 2048 points dont les moments statistiques peuvent être estimés.

Avant d'apprécier la qualité de la réponse de l'oscillateur, on peut jeter un coup d'oeil rapide aux caractéristiques statistiques des échantillons générés à l'aide des deux méthodes. La figure 6.34 représente des grandeurs identiques à celles de la figure 6.7. On peut constater que le shift ne modifie pas significativement la variance du signal général. Il a en effet été conçu dans ce but. On peut par contre remarquer une amélioration substantielle des caractéristiques à l'ordre 3. Cette amélioration provient d'un étalement moindre des cumulants d'ordre 3 des signaux générés. Cela indique donc qu'une partie de l'étalement dans la densité de probabilité des moments d'ordre 3 est à associer au contenu aux très basses fréquences. A l'ordre 4, on ne peut pas vraiment conclure à une nette amélioration mais on peut cependant affirmer que les valeurs extrêmes du coefficient d'excès sont beaucoup plus rares.

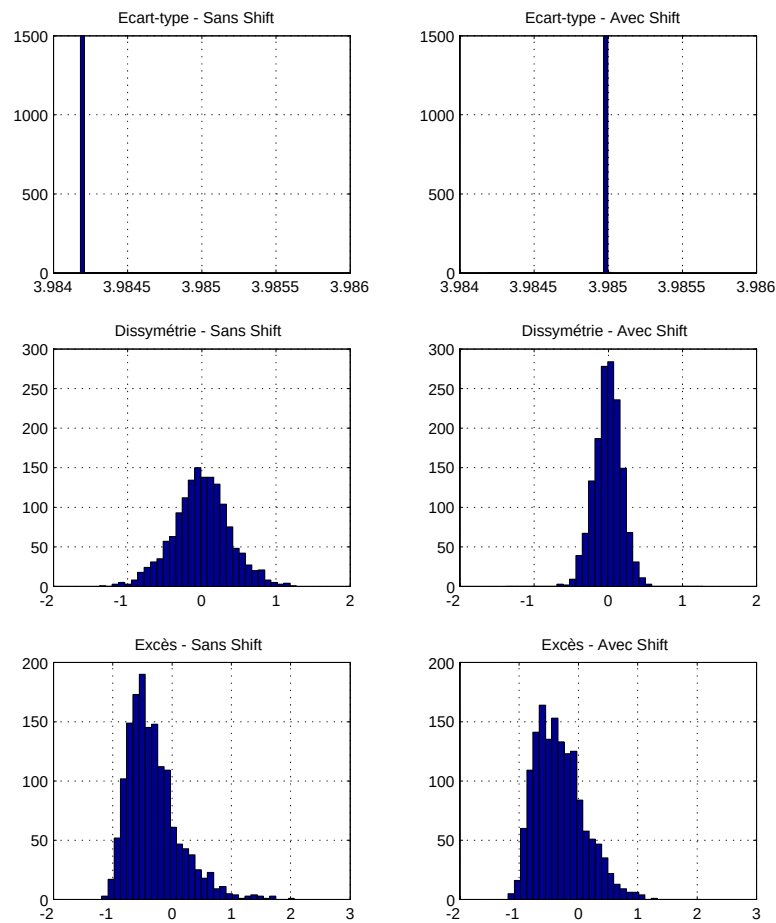


FIG. 6.34 – Moments statistiques de la vitesse de vent générée (avec ou sans shift)

L'analyse de l'oscillateur soumis à ces 1500 signaux différents permet d'obtenir deux ensembles de moments statistiques. Ces valeurs sont reprises sous la forme d'histogrammes à la figure 6.35. La colonne de gauche est réservée au calcul réalisé sur base de la densité spectrale exacte alors que la colonne de droite correspond à la densité spectrale shiftée.

L'histogramme obtenu pour la moyenne est centré sur un déplacement moyen nul. L'étalement de l'histogramme autour de cette valeur moyenne s'explique par le fait que la présence de la phase transitoire fait en sorte que le déplacement moyen n'est pas tout à fait égal à la sollicitation moyenne (rigoureusement nulle, elle) divisée par la raideur du système. Ceci est à rapprocher de la discussion sur le choix d'une des deux méthodes pour l'estimation des grandeurs statistiques de la réponse. La comparaison des deux histogrammes de la première ligne montre que le shift est pratiquement sans effet sur l'estimation du déplacement moyen.

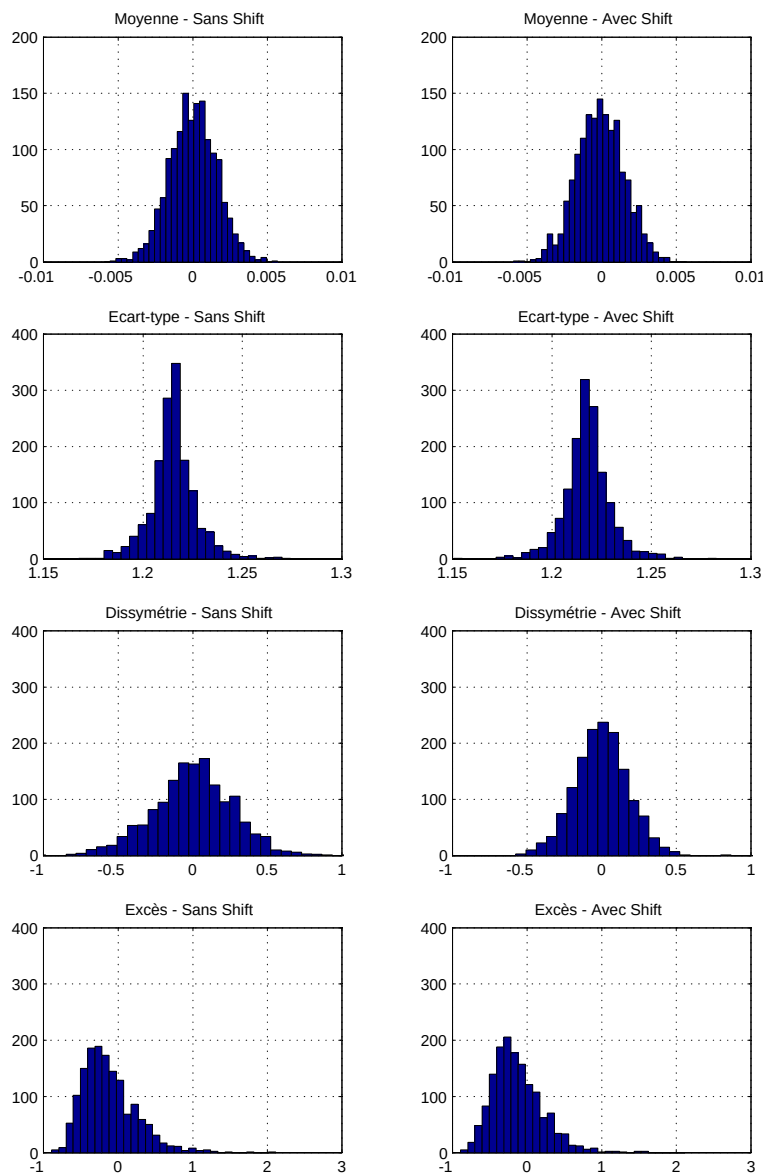


FIG. 6.35 – Moments statistiques de la réponse de l'oscillateur simple (avec ou sans shift)

Les résultats en termes d'écart type sont représentés à la deuxième ligne du graphique. Etant donné que le décalage du contenu fréquentiel dans la densité spectrale de

la sollicitation a été réalisé en conservant l'énergie totale, les écart types de la réponse avec ou sans le shift sont centrées au même endroit. L'étalement des histogrammes que nous étudions actuellement provient également de l'existence de la phase transitoire, de la non stationnarité du processus discrétisé ainsi que de la non ergodicité. Les critères que nous avons établis ci-dessus visent de manière indirecte à réduire cet étalement autour de l'écart type moyen. En effet, un non respect de ces critères mène inévitablement à des analyses de moins bonne qualité et donc à des résultats plus disparates. Par contre, le respect de ces critères a permis d'obtenir des résultats assez précis. Pour preuve, on peut constater que plus d'un tiers des analyses (soit plus de 500 sur les 1500 analyses) a donné des écart types se trouvant à moins d'un pourcent de l'écart type moyen. C'est par un raisonnement et une étude identique à celle-ci que peut être estimé le nombre strictement nécessaire d'échantillons à utiliser dans une analyse dynamique par simulations de Monte Carlo.

La troisième ligne représente les coefficients de dissymétrie obtenus avec chacune des deux méthodes. Etant donné que la structure étudiée est linéaire et que la sollicitation est symétrique, les distributions statistiques obtenues sont à moyenne nulle. L'utilisation du shift semble être bénéfique dans la mesure où la distribution en résultant est moins étalée que celle qui serait obtenue sans shift. Ceci provient bien sûr d'une meilleure représentation de la sollicitation. L'intérêt pratique de cette constatation réside dans l'avantage d'utiliser moins d'échantillons pour représenter correctement (et après moyenne) la caractéristique d'ordre 3 de la réponse.

A l'ordre 4, on peut vérifier que le coefficient d'excès moyen de la réponse n'est plus égal zéro. Ceci provient de la mauvaise représentation des caractéristiques d'ordre 4 de la sollicitation. L'utilisation du shift ne semble cette fois pas présenter d'avantage notable : les deux distributions sont plus ou moins identiques. Il est intéressant de remarquer à ce stade que l'étalement assez important des coefficients d'excès montre que cette grandeur nécessite un nombre significatif d'échantillons pour être estimée correctement.

6.7 Conclusions

L'analyse dynamique d'une structure par simulations de Monte Carlo peut être décomposée en deux étapes successives : la génération des échantillons de vitesse de vent⁹, puis l'analyse de la structure. Le bouclage sur ces deux étapes permet in fine d'obtenir une représentation statistique de la réponse du système. Cette représentation peut en effet être qualifiée de "statistique" puisque les réponses obtenues pour chacune des générations sont différentes. L'étalement de ces réponses autour de la réponse moyenne est une image de la qualité de l'étude numérique par simulations. Afin d'atteindre cette qualité, nous avons présenté quelques critères à respecter pour que l'analyse se déroule le mieux possible. Nous avons pu constater qu'il était important que ces critères portent simultanément sur les opérations de simulation et de résolution. Le respect des critères énoncés nous a permis de retrouver, à l'aide d'analyses par simulations de Monte Carlo, les résultats que nous avons pu obtenir à l'aide des deux approches précédentes.

Les densités spectrales de sollicitation rencontrées dans le domaine du génie civil ont une forme caractéristique présentant un contenu fréquentiel important aux très basses fréquences. Certaines densités spectrales (comme celle de Von Karman par exemple)

⁹ ou de sollicitation, ce qui est encore mieux pour l'étude de structures à plusieurs degrés de liberté

présentent même une valeur non nulle à l'origine. La représentation de ce contenu fréquentiel peut être relativement vicieuse. En effet, pour un échantillon de durée limitée, ces harmoniques de très longues périodes sont très mal représentées. Ceci contribue à l'augmentation de la dégradation de la qualité de l'analyse. Pour contrer ce problème, nous proposons de déplacer légèrement vers le haut (tout en restant dans une région quasi-statique) ce contenu fréquentiel malsain. Nous avons pu constater que cette méthode donne de bons résultats aux ordres 2 et 3.

Etant donné que l'étude de ce travail consiste à étudier les caractéristiques d'ordres supérieurs de la réponse d'un système, un paragraphe de ce chapitre a été consacré à l'étude des caractéristiques d'ordres supérieurs des échantillons générés selon les différentes méthodes. Il est apparu qu'une des deux méthodes de génération étudiées ne permet pas de représenter correctement les caractéristiques d'ordre 4 voulues (s'exprimant à l'aide du coefficient de kurtosis). Les résultats d'une analyse par simulations de Monte Carlo ne peuvent donc, dans ce cas, que donner des résultats erronés. Nous tenions à attirer l'attention sur ce point particulier car cette méthode de génération est souvent référencée dans la littérature.

Chapitre 7

Amortissement non linéaire - Excitation paramétrique

"Le loto, c'est un impôt sur les gens qui ne comprennent pas les statistiques"

Anonyme

7.1 Introduction

A l'introduction de cette première partie du document, nous avons justifié la nécessité d'une bonne compréhension de tous les phénomènes mis en jeu lors de l'étude des vibrations aléatoires d'un oscillateur simple. Dans le domaine de l'analyse des effets du vent turbulent sur les structures du génie civil, nous avons introduit cette forme de sollicitation :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = \frac{1}{2}\rho C_d A [\bar{U} + u(t) - \dot{x}(t)]^2 \quad (7.1)$$

Chacun des termes de chargement obtenu en développant le carré du membre de droite a une signification particulière. Les termes classiquement étudiés couvrent le chargement constant, le chargement aléatoire linéaire et le terme d'amortissement aérodynamique (cf p.16). Jusqu'à ce point, nous n'avons pris en compte qu'un seul terme original, celui du chargement aléatoire non linéaire.

Lors de notre introduction, nous avons présenté les deux termes de chargement restant (l'amortissement non linéaire et l'excitation paramétrique) comme étant autrement plus compliqués à prendre en compte et surtout nécessitant une approche sensiblement plus compliquée. A ce stade de la présentation, nous pouvons comprendre que l'analyse d'une structure incluant ces effets dynamiques non linéaires supplémentaires ne peut être envisagée qu'à l'aide du calcul différentiel stochastique d'Ito. C'est en partie en ce sens que nous annonçons une méthode d'analyse quelque peu plus compliquée. Nous allons

voir que quelques aménagements supplémentaires de la méthode de base présentée au chapitre 5 seront nécessaires.

La prise en compte de l'excitation paramétrique dans les problèmes de dynamique aléatoire a déjà été étudiée, souvent dans d'autres domaines d'application ([72]). La méthode d'analyse présentée dans ce chapitre a été adaptée de ce que l'on peut trouver dans la littérature ; il n'y a donc d'original que l'application de la méthode au problème particulier que nous étudions. L'objectif de ce chapitre consiste essentiellement à donner, à titre de connaissance générale, les caractéristiques principales des effets des deux termes de chargement particuliers. Par la présentation qui suit, nous entendons montrer que les justifications qui sont généralement formulées pour s'affranchir de ces termes sont souvent trop brèves..

7.2 Equations aux moments

Rappelons-nous que pour pouvoir écrire les équations aux moments, il est nécessaire d'écrire l'équation du mouvement dans un espace d'état. En introduisant, comme nous l'avons fait au chapitre 5, les variables $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = u$, l'équation du mouvement que nous étudions 7.1 peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\omega\xi x_2 - \omega^2 x_1 + \gamma [\bar{U} + x_3 - x_2]^2 \\ &= -2\omega\xi x_2 - \omega^2 x_1 + \gamma [\bar{U}^2 + x_3^2 + x_2^2 + 2\bar{U}x_3 - 2\bar{U}x_2 - 2x_3x_2] \\ \dot{x}_3 &= -\alpha x_3 + \sigma_u \sqrt{2\alpha} \frac{dB(t)}{dt}\end{aligned}\quad (7.2)$$

La seule différence entre ces équations et celles que nous avons pu écrire au chapitre 5 concerne le terme $[\bar{U} + x_3 - x_2]^2$. Nous allons voir que cette simple petite modification peut engendrer des complications assez significatives. Dès le début du document, nous ne nous préoccupons pas de l'amortissement aérodynamique linéaire ($-2\gamma\bar{U}x_2$) et nous supposons que ce terme est inclus, à l'aide d'un coefficient d'amortissement aérodynamique (Eq. 2.2), dans l'expression du coefficient d'amortissement total ξ . Nous continuerons avec ces notations et nous supprimons donc le terme $-2\gamma\bar{U}x_2$ des développements suivants. La forme générale d'une équation différentielle stochastique d'Ito est :

$$\{dx(t)\} = \{g(x(t), t)\} dt + [h(x(t), t)] \{dB(t)\} \quad (7.3)$$

Dans notre cas, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} x_2 \\ -2\omega\xi x_2 - \omega^2 x_1 + \gamma [\bar{U}^2 + x_3^2 + x_2^2 + 2\bar{U}x_3 - 2x_3x_2] \\ -\alpha x_3 \end{Bmatrix} dt \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u \sqrt{2\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ dB \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (7.4)$$

Etant donné que le vecteur g et la matrice h ne dépendent pas explicitement du temps, le système que nous étudions est toujours autonome. Nous conseillons au lecteur

de suivre, dans les développements suivants, les termes complémentaires du chargement. A ce stade, on peut déjà observer une différence notable. En effet, le vecteur g n'est plus linéaire en les variables x_1, x_2 : le système dynamique est non linéaire. Pour une fonction quelconque ϕ au moins deux fois dérivables par rapport aux variables x_1, x_2 et x_3 et au moins dérivable une fois par rapport au temps, la règle de différentiation d'Ito permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{dE[\phi]}{dt} = E \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] &+ E \left[x_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right] + E \left[\left(-2\omega\xi x_2 - \omega^2 x_1 + \gamma [\bar{U} + x_3 - x_2]^2 \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right] \\ &- E \left[\alpha x_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right] + E \left[\alpha \sigma_u^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x_3} \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

Choisissons

$$\phi(x(t), t) = x_1^p x_2^q x_3^r \quad (7.6)$$

Nous allons toujours utiliser la notation $m(p, q, r) = E[x_1^p x_2^q x_3^r]$ pour représenter le moment statistique (éventuellement conjoint) des variables aléatoires x_1, x_2 et x_3 . Comme nous le savons, l'utilisation de cette fonction ϕ particulière permet d'obtenir l'expression générique des équations aux moments :

$$\begin{aligned} \dot{m}(p, q, r) = & -q\omega^2 m(p+1, q-1, r) - (2q\omega\xi + \alpha r) m(p, q, r) - \mathbf{2q\gamma m(p, q, r + 1)} \\ & + \alpha \sigma_u^2 r (r-1) m(p, q, r-2) + pm(p-1, q+1, r) + \gamma q \bar{U}^2 m(p, q-1, r) \\ & + 2\gamma q \bar{U} m(p, q-1, r+1) + \gamma q m(p, q-1, r+2) + \mathbf{q\gamma m(p, q + 1, r)} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Dans cette expression, les termes en gras sont les termes ajoutés qui permettent la prise en compte des deux effets supplémentaires. Par rapport à ce que l'on a fait au chapitre 5, rien ne change en ce qui concerne la sollicitation extérieure (x_3), ce qui est logique puisque la vitesse du vent est supposée être indépendante du mouvement structurel :

$$m(0, 0, r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ est impair} \\ \frac{r!}{2^{r/2}(\frac{r}{2})!} \sigma_u^r & \text{si } r \text{ est pair} \end{cases} \quad (7.8)$$

Lors de l'étude du système linéaire, nous avons vu que des systèmes d'équations successifs distincts pouvaient être établis. Pour ce faire, nous avons commencé par écrire toutes les équations telles que $p + q = s$ soit une constante a priori fixée. Par exemple, pour $s = 1$, nous obtiendrions maintenant :

$$\dot{m}(1, 0, r) = -\alpha r m(1, 0, r) + \alpha \sigma_u^2 r (r-1) m(1, 0, r-2) + m(0, 1, r) \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{m}(0, 1, r) = & -\omega^2 m(1, 0, r) - (2\omega\xi + \alpha r) m(0, 1, r) + \alpha \sigma_u^2 r (r-1) m(0, 1, r-2) \\ & + \gamma \bar{U}^2 m(0, 0, r) + 2\gamma \bar{U} m(0, 0, r+1) + \gamma m(0, 0, r+2) - \mathbf{2\gamma m(0, 1, r + 1)} \\ & + \mathbf{\gamma m(0, 2, r)} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Sous forme matricielle, ces deux premières relations s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \dot{m}(1, 0, r) \\ \dot{m}(0, 1, r) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha r & 1 \\ -\omega^2 & -(2\omega\xi + \alpha r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m(1, 0, r) \\ m(0, 1, r) \end{Bmatrix} + \{F_1\} + \{G_1\} + \{H_1\} \quad (7.11)$$

où les termes $\{F_1\}$, $\{G_1\}$ et $\{H_1\}$ valent respectivement :

$$\{F_1\} = \alpha \sigma_u^2 r (r-1) \begin{Bmatrix} m(1, 0, r-2) \\ m(0, 1, r-2) \end{Bmatrix} \quad (7.12)$$

$$\{G_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma \bar{U}^2 m(0, 0, r) + 2\gamma \bar{U} m(0, 0, r+1) + \gamma m(0, 0, r+2) \end{Bmatrix} \quad (7.13)$$

$$\{H_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2\gamma \mathbf{m}(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{r}+1) + \gamma \mathbf{m}(\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{r}) \end{Bmatrix} \quad (7.14)$$

La seule différence entre le problème complet que nous étudions ici et le problème simplifié du chapitre 5 se traduit par l'apparition d'un vecteur $\{H_1\}$ supplémentaire. On peut maintenant se convaincre assez facilement que les moments que l'on essaie de calculer ne peuvent plus être obtenus de manière explicite. En effet, ce système que nous pouvons résoudre facilement fait maintenant intervenir des grandeurs qui ne sont pas encore déterminées.

En effet, le terme $\gamma \mathbf{m}(\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{r})$ attribuable au chargement paramétrique est un terme d'ordre $s = 2$ (qui n'a pas encore été déterminé). Même si ce terme pouvait être laissé de côté, il resterait encore le terme $-2\gamma \mathbf{m}(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{r}+1)$ qui provient de l'amortissement non linéaire. Ce terme est d'ordre $s = 1$ mais d'ordre supérieur en r . On peut donc comprendre que le système 7.11 ne peut pas être résolu sous cette forme.

Dans la suite des développements, nous allons traiter séparément les deux termes particuliers du chargement non linéaire.

7.3 Terme d'excitation paramétrique

Ecriture du système d'équation en descente infinie

Laissons tomber pour l'instant le terme d'amortissement quadratique. Nous pouvons constater que le terme d'excitation paramétrique pose un premier problème en réécrivant l'équation 7.11. Par exemple, pour $r = 0$ et sous l'hypothèse de stationnarité, on doit résoudre :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & -2\omega\xi & -2\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m(1, 0, 0) \\ m(0, 1, 0) \\ m(0, 1, 1) \end{Bmatrix} + \{F_1^{r=0}\} + \{G_1^{r=0}\} \quad (7.15)$$

qui est un système indéterminé de deux équations à trois inconnues. Nous pouvons essayer d'ajouter des équations supplémentaires à ce système pour le rendre déterminé. Il paraît assez logique d'ajouter des relations faisant intervenir $m(0, 1, 1)$ puisqu'il s'agit de l'inconnue supplémentaire. Prenons alors l'ensemble d'équations obtenues pour $r = 1$:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 & 0 \\ -\omega^2 & -(2\omega\xi + \alpha) & -2\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m(1, 0, 1) \\ m(0, 1, 1) \\ m(0, 1, 2) \end{Bmatrix} + \{F_1^{r=1}\} + \{G_1^{r=1}\} \quad (7.16)$$

En regroupant les équations obtenues pour $r = 0$ et $r = 1$, on trouve :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & -2\omega\xi & 0 & -2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & -(2\omega\xi + \alpha) & -2\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m(1,0,0) \\ m(0,1,0) \\ m(1,0,1) \\ m(0,1,1) \\ m(0,1,2) \end{Bmatrix} \\ &= - \left\{ \begin{Bmatrix} F_1^{r=0} \\ F_1^{r=1} \end{Bmatrix} \right\} - \left\{ \begin{Bmatrix} G_1^{r=0} \\ G_1^{r=1} \end{Bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (7.17)$$

c'est-à-dire un système de quatre équations à cinq inconnues, ce qui ne suffit toujours pas ! L'indétermination du système est bien attribuable au terme de chargement paramétrique puisque, si l'on ôte le terme -2γ , le système ne comporte alors plus que quatre inconnues et se simplifie de surcroît en deux systèmes de deux équations chacun. Avec un peu de perspicacité, on devine assez vite qu'ajouter des équations pour des valeurs supérieures du paramètre r ne peut pas résoudre ce problème d'indétermination. Par exemple, en regroupant les équations obtenues pour $r = 0, r = 1$ et $r = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & -2\omega\xi & 0 & -2\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & -(2\omega\xi + \alpha) & 0 & -2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & -(2\omega\xi + 2\alpha) & -2\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m(1,0,0) \\ m(0,1,0) \\ m(1,0,1) \\ m(0,1,1) \\ m(1,1,2) \\ m(0,1,2) \\ m(0,1,3) \end{Bmatrix} \\ &= - \left\{ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\alpha\sigma_u^2 m(1,0,0) \\ 2\alpha\sigma_u^2 m(0,1,0) \end{Bmatrix} \right\} - \left\{ \begin{Bmatrix} G_1^{r=0} \\ G_1^{r=1} \\ G_1^{r=2} \end{Bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (7.18)$$

En remplaçant dans le membre de gauche les termes relatifs aux $\{F_1\}$, on peut finalement obtenir un système (toujours indéterminé !) dont le second membre est connu puisqu'il ne fait intervenir que des moments d'ordres inférieurs en r :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & -2\omega\xi & 0 & -2\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & -(2\omega\xi + \alpha) & 0 & -2\gamma & 0 \\ 2\alpha\sigma_u^2 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha\sigma_u^2 & 0 & 0 & -\omega^2 & -(2\omega\xi + 2\alpha) & -2\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m(1,0,0) \\ m(0,1,0) \\ m(1,0,1) \\ m(0,1,1) \\ m(1,0,2) \\ m(0,1,2) \\ m(0,1,3) \end{Bmatrix} \\ &= - \left\{ \begin{Bmatrix} G_1^{r=0} \\ G_1^{r=1} \\ G_1^{r=2} \end{Bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Les développements que nous venons de mener jusqu'à ce point peuvent être généralisés : en regroupant les équations obtenues pour des valeurs de r allant de 0 jusqu'à

$r = r_{\max}$, on obtient toujours un système d'équations indéterminé de la forme :

$$\left[M^{(r_{\max})} \right] \begin{Bmatrix} m(1, 0, 0) \\ m(0, 1, 0) \\ \vdots \\ m(1, 0, r_{\max}) \\ m(0, 1, r_{\max}) \\ m(0, 1, r_{\max} + 1) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \{G_1^{r=0}\} \\ \vdots \\ \{G_1^{r=r_{\max}}\} \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

où la matrice $[M^{(r_{\max})}]$ de dimensions $(2r_{\max} + 2) \times (2r_{\max} + 3)$ est obtenue par la composition de différentes contributions :

- $r_{\max} + 1$ sous-matrices $\begin{bmatrix} -\alpha r & 1 \\ -\omega^2 & -(2\omega\xi + \alpha r) \end{bmatrix}$ ($r = 0, \dots, r_{\max}$) dont l'élément $(1, 1)$ est à placé en $(2r + 1, 2r + 1)$. La matrice $[M^{(r_{\max})}]$ possèdera donc au moins $2(r_{\max} + 1)$ lignes et colonnes
- $r_{\max}$ éléments -2γ placés en $(2r + 2, 2r + 4)$ avec ($r = 0, \dots, r_{\max} - 1$) ainsi qu'un ultime élément -2γ qui sera par contre placé en $(2r_{\max} + 2, 2r_{\max} + 3)$. Ce sont ces éléments qui introduisent le couplage relatif à la sollicitation paramétrique.
- les termes $\alpha\sigma_u^2 r (r - 1)$ ($r = 2, \dots, r_{\max}$) placés en $(2r + 1, 2r - 3)$ et en $(2r + 2, 2r - 2)$. Ce sont les termes de second ordre de la règle de différentiation d'Ito. Ils n'introduisent aucun couplage (puisque situés sous la diagonale).

Nous sommes donc maintenant capables d'écrire le système d'équations regroupant toutes les équations d'ordre $s = 1$ et r compris entre 0 et $r_{\max}$ mais nous ne savons toujours pas le résoudre puisqu'il y a toujours une inconnue de trop. Au terme des développements que nous venons de mener jusqu'ici, il s'avère donc être impossible de composer un système d'équations déterminé. Au paragraphe suivant, nous présentons une méthode assez répandue pour résoudre ce problème.

Cumulant neglect closure

L'idée qui vient naturellement à l'esprit est d'ajouter une équation supplémentaire, ne faisant intervenir que les variables déjà présentes. Le mieux serait évidemment que cette équation soit une équation linéaire de sorte que l'on retrouve un système linéaire de dimensions $(2r_{\max} + 3) \times (2r_{\max} + 3)$ à résoudre. Cette équation supplémentaire ne peut provenir que d'une hypothèse supplémentaire formulée. Etant donné que l'on veut reproduire correctement les premiers moments, il semble donc que l'on doive s'orienter vers une hypothèse au niveau des moments de plus grand ordre. On pourrait par exemple écrire $m(0, 1, r_{\max} + 1) = 0$ ce qui revient à négliger ce moment. Ce choix n'est probablement pas des plus judicieux puisque nous savons que les moments sont d'autant plus grands que leur ordre est important.

La méthode généralement utilisée pour fermer de tels systèmes d'équations consiste à négliger les cumulants d'ordre supérieur. On remplace alors la variable aléatoire exacte par une variable aléatoire approchée mais ayant des propriétés statistiques sensiblement identiques jusqu'à l'ordre que l'on désire. On ne peut pas vraiment affirmer qu'il s'agisse d'une hypothèse car il suffit d'imposer la correspondance de moments de plus en plus grands.

Cette méthode peut fonctionner car l'expression d'un cumulante d'ordre n ne dépend que des moments d'ordres égal ou inférieur. Cette méthode présente cependant l'inconvénient de compliquer légèrement la résolution du système car l'équation de fermeture qui est ajoutée est non linéaire. Etant donné que toutes les autres relations sont linéaires, ce système peut être résolu assez facilement, ne serait-ce qu'en procédant à une condensation statique.

Afin d'illustrer la technique, nous allons présenter son application à la détermination des moments d'ordre $s = 1$ et supposer que l'on désire déterminer les moments jusqu'à l'ordre $r = 2$ (Eq. 7.19). La condition de fermeture que nous allons écrire est donc que le cumulante $k(0, 1, 3)$ est nul. Le système d'équations que nous devons résoudre est un système d'équations non linéaire. Il sera résolu de façon itérative par une méthode numérique à pas simple dont voici les étapes principales :

- dans un premier temps, nous allons calculer les moments jusqu'à l'ordre 2 comme s'il n'y avait pas de terme d'excitation paramétrique. Le système d'équations à résoudre est celui que nous avons écrit au chapitre 5. Les expressions que nous obtenons ainsi pour les moments $m(0, 1, r)$ et $m(1, 0, r)$ avec $r = 0, 1, 2$ vont servir de point de départ pour les itérations ;
- connaissant les valeurs de ces premiers moments, on peut calculer la valeur à donner au moment $m(0, 1, 3)$ de sorte que le cumulante associé $k(0, 1, 3)$ soit nul. L'expression de ce cumulante est¹ :

$$\begin{aligned} k(0, 1, 3) = & m(0, 1, 3) - m(0, 1, 0)m(0, 0, 3) - 3m(0, 0, 1)m(0, 1, 2) \\ & + 6m(0, 1, 0)m(0, 0, 1)m(0, 0, 2) + 6[m(0, 0, 1)]^2m(0, 1, 1) \\ & - 3m(0, 1, 1)m(0, 0, 2) - 6m(0, 1, 0)[m(0, 0, 1)]^3 \end{aligned} \quad (7.21)$$

- Connaissant la valeur de $m(0, 1, 3)$, le système d'équations 7.19 peut être résolu pour ainsi obtenir une nouvelle estimation des six moments $m(0, 1, r)$ et $m(1, 0, r)$ avec $r = 0, 1, 2$.

Ces deux derniers points doivent alors être bouclés de manière itérative jusqu'à la vérification d'un critère de convergence choisi. Ceci permet donc d'estimer les moments d'ordre $s = 1$. La démarche de l'analyse doit alors continuer en calculant les moments d'ordre $s = 2$. Pour ce faire, il convient d'écrire un système d'équation identique au système 7.20 et procéder à l'analyse jusqu'à un ordre $r_{\max}$ choisi. Ceci nécessite à nouveau la formulation d'une hypothèse sur l'expression d'un cumulante conjoint. Concernant les ordres maxima en r , la méthodologie générale présentée au chapitre 5 est d'application.

Etant donné que l'objectif de la présentation est de donner une vue d'ensemble de la méthode, nous ne rentrons pas dans les détails d'application. Remarquons cependant que le problème devient vite très compliqué car la taille des systèmes étudiés augmente

¹Cette expression peut être obtenue assez facilement en considérant l'expression de la fonction caractéristique des variables aléatoires conjointes x et y :

$$M(\theta_1, \theta_2) = 1 + i\theta_1 m_{10} + i\theta_2 m_{01} - \frac{\theta_1^2}{2} m_{20} - \theta_1 \theta_2 m_{11} - \frac{\theta_2^2}{2} m_{02} + \dots$$

Les expressions des cumulants conjoints entre les variables aléatoires x et y peuvent être obtenus à partir du développement en série du logarithme népérien de cette fonction. Par exemple, la dérivée $\frac{\partial^4 (\ln[M])}{\partial x \partial y^3}$ estimée en $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ permet d'obtenir l'expression du cumulante k_{13} : $k_{13} = m_{13} - m_{03}m_{10} - 3m_{01}m_{12} + 6m_{01}m_{02}m_{10} - 6m_{01}^3m_{10} - 3m_{02}m_{11} + 6m_{01}^2m_{11}$

plus que proportionnellement avec l'ordre en s^2 . L'extension de ce genre d'analyse reste encore à l'heure actuelle limitée à l'étude de structures à deux ou trois degrés de liberté. L'état d'avancement de la recherche dans ce domaine concerne essentiellement les ordres (en r et s) à partir desquels l'hypothèse doit être formulée sur le cumulant.

Plutôt que de supposer qu'un cumulant d'ordre suffisamment grand soit égal à zéro, nous avons étudié une méthode d'analyse qui revient à supposer que ce cumulant reste inchangé vis-à-vis d'une étude où les effets de chargement paramétrique auraient été négligés. Nous sommes arrivés à cette situation car, dans le problème qui nous intéresse, le terme de chargement paramétrique occupe une place limitée; une analyse sans ce terme de chargement particulier peut donc être envisagée. Les résultats obtenus lors de ces développements ne sont pas présentés à l'occasion de ce travail.

7.4 Terme d'amortissement non linéaire

L'approche basée sur la résolution de l'équation différentielle stochastique se prête relativement bien au traitement de l'excitation paramétrique ainsi qu'au traitement de l'amortissement non linéaire. Nous venons de présenter la méthode de résolution dans le cas d'une excitation paramétrique. En repartant de l'équation 7.2, un raisonnement similaire serait également valable pour le traitement de l'amortissement non linéaire. En effet, on constate assez facilement que le système d'équations que l'on peut former est également une descente infinie et il convient de fermer ce système par une des méthodes présentées ci-avant.

Dans ce paragraphe, nous allons nous contenter de présenter une approche plus topologique du système obtenu en négligeant le terme de chargement paramétrique. L'équation du mouvement peut donc s'écrire :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\varpi\dot{x}(t) + \varpi^2x(t) = \gamma [\bar{U} + u(t)]^2 + \gamma\dot{x}^2(t) \quad (7.22)$$

où le paramètre ξ ne comprend cette fois que le terme d'amortissement structurel. Nous sommes donc en présence d'un système dynamique non linéaire sollicité par une force indépendante. Que cette sollicitation soit déterministe ou non, il est bon d'étudier dans un premier temps les vibrations libres de ce système. Nous allons donc supprimer également le terme de sollicitation propre. Il reste alors :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\varpi\dot{x}(t) + \varpi^2x(t) = \gamma\dot{x}^2(t) - 2\gamma\bar{U}\dot{x}(t) \quad (7.23)$$

Au membre de droite, on retrouve donc ainsi les deux termes d'amortissement aérodynamique : l'amortissement linéaire et l'amortissement quadratique. L'amortissement linéaire est généralement reporté au membre de gauche et ajouté à l'amortissement structurel :

$$\ddot{x}(t) + 2(\xi_s + \xi_a)\varpi\dot{x}(t) + \varpi^2x(t) = \gamma\dot{x}^2(t) \quad (7.24)$$

où $\xi_a = \frac{\gamma\bar{U}}{\varpi}$. De cette définition, on voit que le paramètre γ que nous avons en définitive peu l'habitude de manipuler, peut, outre sa définition provenant de l'aérodynamique

²Personnellement, nous avons choisi de résoudre le système identique à 7.19 mais pour les ordres supérieurs en s , par une méthode de sous-structuration. En effet, le système d'équations linéaires à résoudre est presque diagonal par blocs. Nous avons pensé que cette procédure itérative de résolution (d'un système linéaire!) permettrait de pouvoir plus facilement étendre la méthode d'analyse aux problèmes de plus grandes tailles.

($\gamma = \frac{1}{2M}\rho C_d A$), s'exprimer par $\gamma = \frac{\xi_a \varpi}{\bar{U}}$. Avec les ordres de grandeur habituels des variables ξ_a , ϖ et $\bar{U}$, on peut voir que le paramètre γ doit prendre des valeurs de l'ordre de $0.05m^{-1}$. Afin de mettre en évidence les effets de ce terme d'amortissement non linéaire, nous avons procédé à l'étude des vibrations libres de l'oscillateur simple, avec ou sans le terme d'amortissement non linéaire. La figure 7.1 représente les déplacements obtenus pour ces deux calculs. Pour cette illustration, les paramètres entrant en jeu sont $\varpi = 1rad/s$, $\xi_s + \xi_a = 1\%$ et $\gamma = 0.05m^{-1}$. Les vibrations libres sont étudiées à partir de la position initiale $x_0 = -1m$ et $\dot{x}_0 = -1m/s$. L'examen de la figure 7.1 montre que la prise en compte de l'amortissement non linéaire ne modifie pas les caractéristiques propres de l'oscillateur mais plutôt l'amplitude des vibrations libres. Partant de cette condition initiale, le terme d'amortissement non linéaire engendre un accroissement de 9% de l'amplitude maximale atteinte.

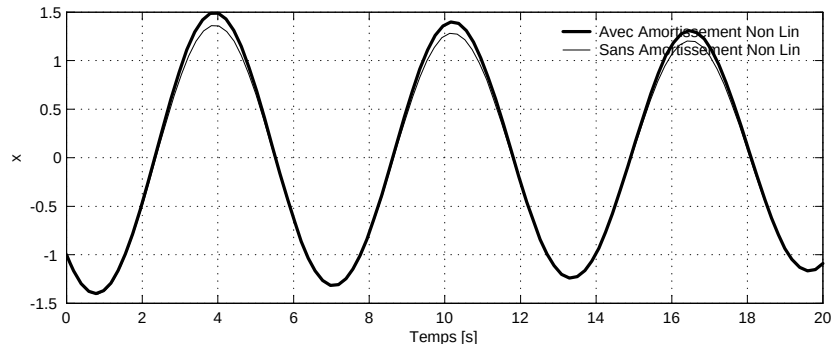


FIG. 7.1 – Vibrations libres d'un oscillateur avec ou sans le terme d'amortissement non linéaire ($\varpi = 1rad/s$, $\xi = 1\%$, $\gamma = 0.05m^{-1}$)

Une façon intéressante de caractériser un système dynamique non linéaire consiste en l'étude des vibrations libres dans le plan de phase. L'équation du mouvement s'écrit alors maintenant :

$$\dot{x} = y \quad (7.25)$$

$$\dot{y} = -2\varpi (\xi_s + \xi_a) y + \gamma y^2 - \varpi^2 x \quad (7.26)$$

Le système étudié peut alors être représenté par son diagramme d'écoulement, comme illustré à la figure 7.2 pour l'exemple que nous étudions. Quel que soit le point de départ choisi, la trajectoire dans le plan de phase doit toujours être tangente à ces flèches. Partant d'un point initial connu, les trajectoires dans le plan de phase peuvent être reconstituées en considérant la direction de la flèche tangente locale. Ceci revient à appliquer une méthode d'intégration numérique pour la résolution de l'équation différentielle³. Pour le système dépourvu d'amortissement non linéaire, les trajectoires sont des spirales qui s'enroulent autour du seul point fixe $(x, \dot{x}) = (0, 0)$. En ajoutant le terme d'amortissement non linéaire, on peut constater que les orientations des flèches ne changent pas fondamentalement et donc également que la forme de la trajectoire est sensiblement

³La méthode d'intégration qui a été utilisée ici est celle du solveur ODE45 intégré dans le logiciel MatLab. Cette méthode préprogrammée permet la résolution d'un système d'équations différentielles non linéaires tel celui qui est rencontré dans le problème présenté ici.

identique. La spirale est cependant légèrement plus aplatie et ceci résulte donc en des déplacements maxima plus importants comme indiqué à la figure 7.2.

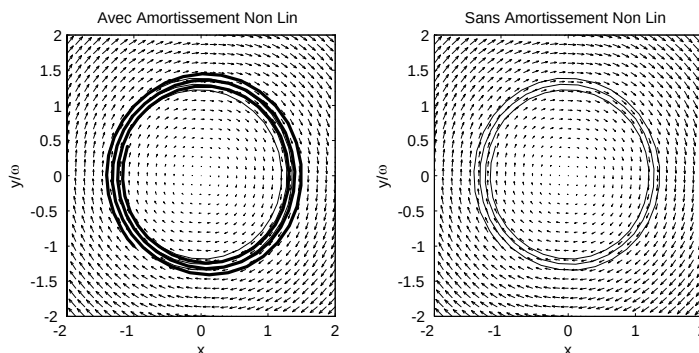


FIG. 7.2 – Etude des vibrations libres dans le plan de phase (oscillateur linéaire et non linéaire)

Lorsque le terme d'amortissement non linéaire devient plus important, le comportement de la structure est modifié de façon assez significative. Les représentations en plan de phase de la figure 7.3 concernent de nouveau le comportement de l'oscillateur simple avec et sans l'amortissement non linéaire, mais avec le paramètre γ fixé à $\gamma = 0.75m^{-1}$ cette fois.

De façon à obtenir une meilleure représentation du comportement, plusieurs trajectoires correspondant à différentes conditions initiales sont superposées. Sans le terme d'amortissement (à droite), on peut retrouver les spirales qui s'enroulent autour du point fixe. Lorsque le terme d'amortissement supplémentaire est pris en compte, les figures obtenues dans le plan de phase prennent une forme quelque peu différente. Pour autant que les vitesses et déplacements restent suffisamment faibles, les trajectoires de l'oscillateur peuvent éventuellement être comparées à celles obtenues sans le terme d'amortissement non linéaire. Les trajectoires plus énergétiques présentent une forme différente et, lorsque le déplacement initial est négatif et que la vitesse initiale est suffisamment importante, le comportement de l'oscillateur peut même devenir instable. Les conditions initiales qui correspondent à ces comportements instables sont représentées par les points noirs.

Dans le domaine du génie civil, ces situations sont très rares. Elles se rencontrent éventuellement lorsque le niveau de turbulence est très important (donc par exemple lors de cyclones), où éventuellement pour les petites structures très légères (petite masse et donc coefficient γ assez important) tels les panneaux d'indication routière. Etant donné que ce genre de structures ne nous préoccupe pas essentiellement, nous nous limiterons à ces indications sommaires sur les effets de l'amortissement quadratique ainsi que de l'excitation paramétrique.

7.5 Amortissement non linéaire et excitation paramétrique

Après avoir traité séparément chacun des deux effets particuliers, nous pouvons également présenter un exemple d'application où ces deux effets coexistent. L'outil le plus rigoureux à mettre en oeuvre pour résoudre ce problème est bien sûr la règle de différen-

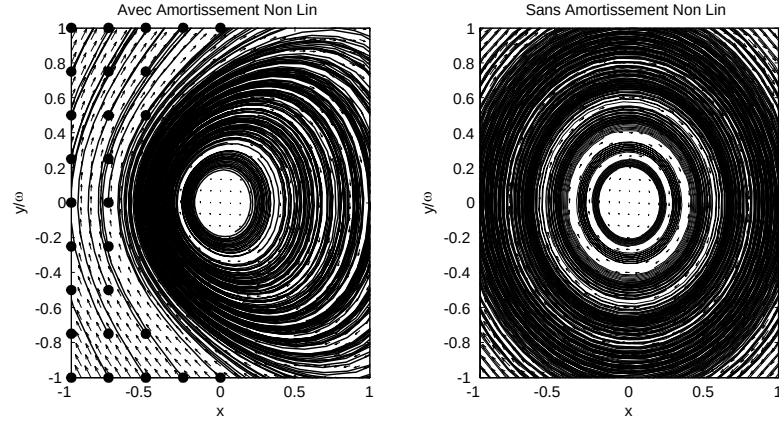


FIG. 7.3 – Etude des vibrations libres de l'oscillateur fortement non linéaire

tiation d'Ito (7.2) ainsi qu'une méthode de fermeture du système d'équations qui forme une descente infinie. Etant donné l'importance réduite que nous accordons à ce problème, nous nous limitons à illustrer le problème en dynamique déterministe, ce qui semble déjà être un premier pas avant de pouvoir comprendre le fonctionnement d'une structure soumise à ces effets en dynamique stochastique. Il convient néanmoins de remarquer que ce genre de calcul constitue une étape importante d'une simulation de Monte Carlo.

Nous résolvons donc cette fois l'équation du mouvement complète :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\varpi\dot{x}(t) + \varpi^2x(t) = \gamma [\bar{U} + u(t)]^2 + \gamma\dot{x}^2(t) - 2\gamma\bar{U}\dot{x}(t) - 2\gamma u(t)\dot{x}(t) \quad (7.27)$$

en choisissant une turbulence du vent déterministe et harmonique : $u(t) = \sqrt{2}\sigma_u \sin(\Omega t)$. Afin d'apprécier l'influence des deux termes particuliers ($\gamma\dot{x}^2(t)$ et $-2\gamma u(t)\dot{x}(t)$), nous avons résolu cette équation dans les deux situations où ces termes ne sont pas pris en compte d'une part, et où ces termes sont pris en compte simultanément, d'autre part. Dans le premier des deux cas, le problème étudié est un simple problème de dynamique linéaire. La seule particularité provient éventuellement du terme de sollicitation extérieure qui contient le carré d'une harmonique :

$$\gamma [\bar{U} + u(t)]^2 = \gamma\bar{U}^2 \left[1 + \sqrt{2}I_u \sin(\Omega t) \right]^2 = \gamma\bar{U}^2 \left[1 + 2\sqrt{2}I_u \sin(\Omega t) + 2I_u^2 \sin^2(\Omega t) \right] \quad (7.28)$$

Par contre, lorsque les deux autres termes sont pris en compte, le problème devient un problème de dynamique non linéaire et le schéma de résolution doit inclure également des itérations à l'intérieur des pas de temps. Une étude paramétrique est assez lourde à mettre en oeuvre. Nous présentons simplement le résultat d'une étude, de façon à montrer de quelle manière les deux termes qui occupent la discussion peuvent influencer la réponse obtenue. Afin de respecter l'ordre de grandeur du paramètre γ , nous allons fixer $\gamma = 0.1m^{-1}$. La pulsation de la structure est toujours $\varpi = 1rad/s$. Afin d'obtenir un amortissement aérodynamique linéaire d'un ordre de grandeur réaliste, nous sommes obligés de poser $\bar{U} = 1.5m/s$, ce qui est largement inférieur aux vitesses de calcul utilisées pour le dimensionnement des ouvrages d'art par exemple. En ceci, nous pouvons voir que ces problèmes d'amortissement quadratique et d'excitation paramétrique occupent

des problèmes d'un ordre de grandeur généralement différent de ceux rencontrés dans le génie civil à proprement parler. Aussi, afin de mettre en évidence une différence significative, nous avons choisi une intensité de turbulence $I_u = 50\%$, ce qui ne se rencontre pratiquement pas dans les vents turbulents habituels.

La figure 7.4 représente la réponse de l'oscillateur en considérant ou non les deux termes particuliers. L'effet de ces termes semble se limiter à un décalage de la réponse obtenue, ce qui résulte, lorsqu'ils sont négligés, en une réduction du déplacement maximum positif de l'ordre de 8.5% et une augmentation (en valeur absolue) du déplacement minimum négatif de l'ordre de 15%. Ce décalage de la réponse se retrouve assez clairement au niveau de la réponse dans le plan de phase où l'on peut constater que le cycle limite atteint prend approximativement la même forme mais est centré en un autre point moyen. (Fig. 7.5). A la figure 7.5, on peut également se faire une idée sur l'influence de ces deux termes particuliers sur la modification du contenu fréquentiel de la réponse. Dans l'approche linéaire, le contenu fréquentiel se limite essentiellement à la composante de la sollicitation ainsi que la composante au niveau de la fréquence propre structurale ($f_n = \frac{1}{2\pi} = 0.16Hz$). Notons également que la sollicitation présente aussi un contenu fréquentiel non négligeable dans le voisinage du double de la pulsation de sollicitation. Ce contenu provient du terme de chargement quadratique ; en raison des pulsations choisies pour cet exemple, c'est essentiellement ce pic qui sollicite la structure linéaire ($\varpi = 2\Omega$). Lorsque les termes non linéaires du chargement sont pris en compte, on peut constater l'apparition des sous-harmoniques caractéristiques à ce genre d'étude.

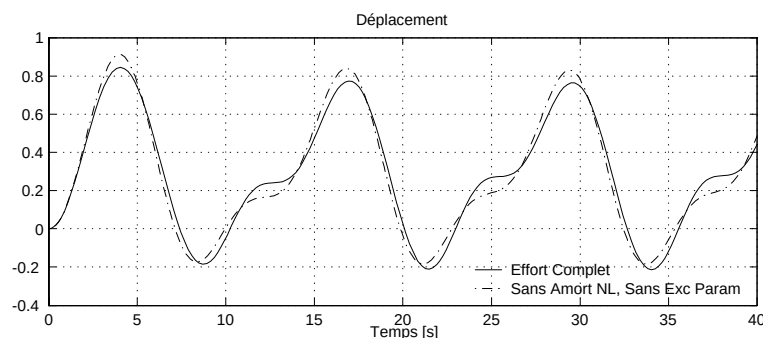


FIG. 7.4 – Réponse de l'oscillateur avec ou sans les termes d'excitation paramétrique et d'amortissement non linéaire ($\varpi = 1rad/s$)

7.6 Conclusions

Ce chapitre visait à donner une vue générale des problèmes rencontrés lors de la prise en compte des deux termes de chargement plus particuliers. Cette étude n'a pu être réalisée qu'en repartant des équations différentielles stochastiques d'Ito. De plus, lorsque les deux termes supplémentaires doivent être pris en compte, nous avons vu que la détermination des moments statistiques ne découlent plus de la résolution d'un simple système d'équations algébriques mais bien d'une descente infinie, c'est-à-dire d'un système d'équation de dimension non bornée. La résolution du problème obtenu est loin d'être évidente et doit nécessairement passer par la formulation des hypothèses dites "de

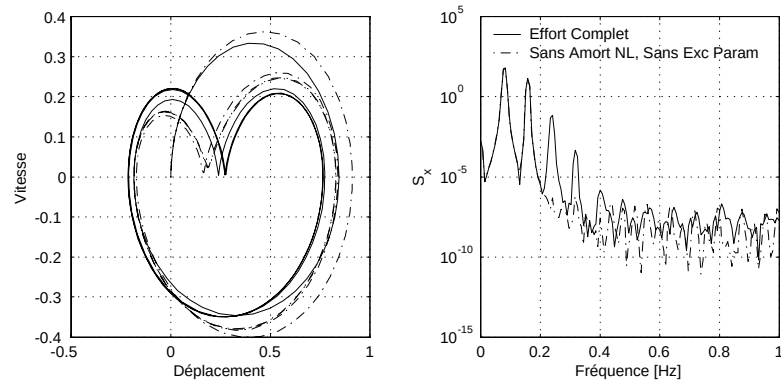


FIG. 7.5 – Réponse en plan de phase et contenu fréquentiel de la réponse de l'oscillateur étudié (Fig. 7.4)

fermeture". Plusieurs solutions existent ; nous nous sommes uniquement limités à donner une vue générale du problème.

Comme son nom l'indique, le terme d'amortissement non linéaire a pour but de rendre le comportement de la structure étudiée non linéaire. Nous avons donc également donné, à l'aide des méthodes de qualification des systèmes non linéaires, quelques indications sur le nouveau comportement structurel. Ces indications passent essentiellement par une reproduction du comportement structurel libre en plan de phase. Ces développements nous ont permis d'illustrer la façon précise dont ce terme particulier influence la réponse structurelle.

Justifier que le terme d'amortissement non linéaire peut être négligé ne peut en toute rigueur être réalisé qu'en comparant les solutions exacte (avec prise en compte du terme) et approchée (sans ce terme). Les développements que nous avons présentés à ce chapitre montrent que cela est relativement ardu et dépasse de loin la simple justification habituelle.



UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES



Application des méthodes d'analyse stochastique à l'étude des effets du vent sur les structures du génie civil

VINCENT DENOËL

Ingénieur Civil des Constructions
Aspirant du Fonds National de la Recherche Scientifique

TOME 2

Année académique 2004 – 2005

Travail présenté en vue de
l'obtention du grade de Docteur en
Sciences Appliquées

Deuxième partie

Analyse d'un système M-DDL

Chapitre 8

Introduction

La taille et la complexité des structures étudiées dans le domaine du génie civil ne permettent pas toujours de pouvoir modéliser leurs comportements à l'aide de systèmes à un seul degré de liberté. Une structure continue réaliste comme un pont ou un haut building ne possède pas une seule fréquence propre mais bien, en théorie, une infinité. De tous ces modes et fréquences propres, on peut démontrer ([16], [39], [42]) que quelques-uns suffisent à représenter la réponse de la structure étudiée lorsqu'elle est sollicitée dans une gamme de basses fréquences. Les critères de sélection de ces modes propres peuvent faire intervenir aussi bien les fréquences propres que les formes des modes propres.

Si le nombre de modes propres à utiliser pour représenter précisément le comportement de la structure étudiée peut se limiter à un seul mode, les méthodes d'analyse que nous avons vues à la première partie de ce document sont alors d'application. Si par contre plusieurs modes propres sont nécessaires, la réponse de la structure doit alors être étudiée dans ces différents modes propres, en prenant éventuellement en compte, les interactions que ces modes peuvent avoir l'un avec l'autre. Comme dans de nombreuses démarches d'ingénieur visant à se ramener à une situation déjà étudiée, l'analyse d'une structure à plusieurs degrés de liberté peut être, dans la plupart des cas, ramenée à l'étude de plusieurs oscillateurs simples. L'objectif principal de cette partie du document vise donc à présenter les notions complémentaires à celles qui ont été présentées dans la première partie, et qui permettront de coordonner les études de ces oscillateurs simples.

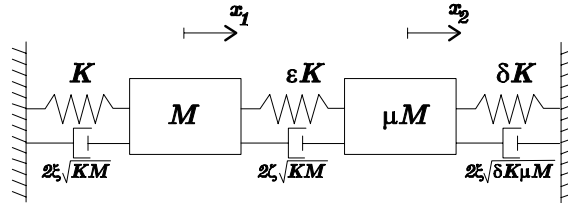


FIG. 8.1 – Système à deux degrés de liberté étudié

Le système le plus simple qui puisse être étudié est un système à deux degrés de liberté. Au cours des développements et illustrations de cette partie, nous utiliserons

souvent le système assez général caractérisé par l'équation du mouvement suivante :

$$[m] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + [c] \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + [k] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 \\ b_0 + b_1 u_2 + b_2 u_2^2 \end{Bmatrix} \quad (8.1)$$

où

$$[m] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \mu M \end{bmatrix}; [c] = 2\sqrt{KM} \begin{bmatrix} \xi + \zeta & -\zeta \\ -\zeta & \xi\sqrt{\delta\mu} + \zeta \end{bmatrix}; [k] = \begin{bmatrix} K(1 + \varepsilon) & -\varepsilon K \\ -\varepsilon K & K(\delta + \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

représentent les matrices structurelles de masse, d'amortissement et de raideur, et où les processus aléatoires u_1 et u_2 seront considérés comme des processus gaussiens. Ce système à deux degrés de liberté dont les coordonnées structurelles sont x_1 et x_2 est assez général dans la mesure où des cas particuliers assez intéressants peuvent être obtenus :

- en choisissant $\varepsilon = 0$ et $\zeta = 0$, le système d'équation est complètement découplé. Les matrices structurelles $[m]$, $[c]$ et $[k]$ sont diagonales. Le système peut être étudié en considérant séparément chacune des coordonnées structurelles. Le problème se ramène donc au problème étudié lors de la première partie du document (analyse de deux systèmes à un degré de liberté). Dans ce cas, bases modales et structurelles sont confondues ;
- en choisissant $\delta = 0$, la masse de droite ne se trouve alors plus restreinte que par le ressort et le dash-pot central. Cette configuration peut être assez intéressante pour de petites valeurs du paramètre μ et représente une structure à un degré de liberté (le DDL 1) amortie à l'aide d'un amortisseur par masse accordée ;
- tel qu'écrit ci-dessus, le système étudié est sollicité par une forme polynômiale d'un processus gaussien. Nous avons limité son expression au second degré mais il va de soi que les méthodes proposées permettent d'étudier des polynômes de plus haut degré. En choisissant $a_i = 0$ et $b_i = 0$ pour $i \geq 2$, la structure linéaire est sollicitée par un effort gaussien. La réponse est donc également gaussienne et la détermination des moments jusqu'à l'ordre 2 suffit entièrement à la caractérisation de la réponse.
- la matrice d'amortissement est telle que l'amortissement complet, écrit sous cette forme est non proportionnel. En choisissant correctement une combinaison des paramètres adimensionnels entrant en jeu, l'amortissement peut être rendu proportionnel. Ci-dessous, nous démontrons que la condition suivante est nécessaire et suffisante pour obtenir un amortissement proportionnel :

$$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{\frac{\delta}{\mu}}} \quad (8.3)$$

Comme annoncé, lorsque le système étudié est à plusieurs degrés de liberté, l'étude est entreprise dans une base modale, ce qui permet généralement d'étudier les vibrations de la structure dans des modes indépendants. Cette indépendance des modes n'est cependant pas systématique. Ci-après, nous présentons les raisons pour lesquelles des couplages entre modes peuvent apparaître.

L'étude d'une structure complexe nécessite toujours un calcul préalable de ses modes propres de vibration. Les pulsations propres ϖ_i et modes propres $\{\Phi_i\}$ s'obtiennent par

la résolution du système aux valeurs propres suivant¹ :

$$([k] - [m] \varpi_i) \{\Phi_i\} = 0 \quad (8.4)$$

Pour un système à N degrés de liberté, ce problème possède N solutions non triviales qui représentent les modes propres structuraux. Chaque degré de liberté non alimenté en masse donne lieu à un mode propre de fréquence infinie qui ne présente aucun intérêt pratique dans le domaine du génie civil où les structures étudiées sont au moins isostatiques et excitées par des sollicitations de basses fréquences.

En utilisant les notations $\psi_0 = \delta + \varepsilon - \mu - \varepsilon\mu$, $\psi_1 = \delta + \varepsilon + \mu + \varepsilon\mu$ et $\psi_2 = 4\mu(\delta + \varepsilon + \delta\varepsilon)$, les pulsations et les modes propres du système général que nous proposons d'étudier prennent la forme assez simple :

$$\varpi_1^2 = \frac{K}{M} \frac{\psi_1 - \sqrt{\psi_1^2 - \psi_2}}{2\mu} \quad (8.5)$$

$$\varpi_2^2 = \frac{K}{M} \frac{\psi_1 + \sqrt{\psi_1^2 - \psi_2}}{2\mu} \quad (8.6)$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{\psi_0 + \sqrt{\psi_1^2 - \psi_2}}{2\varepsilon} & \frac{\psi_0 + \sqrt{\psi_1^2 - \psi_2}}{2\varepsilon} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

Etant donné que les modes propres résultent de la résolution d'un problème homogène, leur définition est valable à un facteur multiplicateur près. Pour des facilités d'interprétation, ils sont souvent normés de façon à obtenir un déplacement maximum unitaire (en valeur absolue). Dans le contexte actuel, en raison du souci de généralité, nous ne pouvons pas imposer cette condition ; nous avons alors choisi de les normer de façon à obtenir une matrice de modes propres orthonormée par la masse ($[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$) :

$$[\Phi] = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} \frac{\psi_0 + \sqrt{\psi_1^2 - \psi_2}}{\sqrt{(\psi_0 + \sqrt{\psi_1^2 - \psi_2})^2 + 4\varepsilon^2\mu}} & \frac{\psi_0 - \sqrt{\psi_1^2 - \psi_2}}{\sqrt{(\psi_0 - \sqrt{\psi_1^2 - \psi_2})^2 + 4\varepsilon^2\mu}} \\ \frac{2\varepsilon}{\sqrt{(\psi_0 + \sqrt{\psi_1^2 - \psi_2})^2 + 4\varepsilon^2\mu}} & \frac{2\varepsilon}{\sqrt{(\psi_0 - \sqrt{\psi_1^2 - \psi_2})^2 + 4\varepsilon^2\mu}} \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

Dans la base des modes propres, les nouvelles matrices de masse, raideur et amortissement s'expriment par :

$$[m^*] = [\Phi]^T [m] [\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

$$[k^*] = [\Phi]^T [k] [\Phi] = \begin{bmatrix} \varpi_1^2 & 0 \\ 0 & \varpi_2^2 \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

$$[c^*] = [\Phi]^T [c] [\Phi] \quad (8.11)$$

¹Nous étudions ici les modes propres non amortis, qui contrairement aux modes propres amortis, présentent l'avantage d'être réels. La plupart des logiciels d'analyse dynamique peuvent calculer les modes propres non amortis (ou également dits classiques).

L'expression complète de $[c^*]$ est assez longue. Notons cependant que c_{12}^* représente le terme de couplage dans l'amortissement modal. Il s'exprime sous la forme d'une fraction dont le numérateur prend la forme suivante :

$$(\mu - \delta) \zeta + \varepsilon \xi \left(-\mu + \sqrt{\delta \mu} \right) \quad (8.12)$$

On peut vérifier que l'annulation de cette relation est équivalente à la condition 8.3 énoncée ci-avant. Lorsque cette condition est vérifiée, on dit que l'amortissement est proportionnel ; les matrices généralisées ($[m^*]$, $[k^*]$ et $[c^*]$) sont alors toutes les trois diagonales et le système d'équations est découplé.

Si l'on désire conserver la généralité du problème, les développements deviennent vite très lourds. Par souci de clarté dans la présentation, nous nous limiterons dans la suite à étudier l'un ou l'autre des cas particuliers présentés ci-avant. Le choix de l'un ou l'autre cas particulier dépendra du phénomène à étudier.

A la première partie du document, nous avons présenté différentes méthodes, correspondant à différents niveaux de simplification, pour réaliser l'analyse d'un oscillateur simple soumis au carré d'un processus aléatoire gaussien. La première méthode présentée, la linéarisation stochastique est également applicable dans le cadre de structures à plusieurs degrés de liberté. On peut démontrer, mais cela semble de toute façon assez logique, que l'application de la linéarisation stochastique dans le cadre d'une structure à plusieurs degrés de liberté revient de nouveau à modifier le terme de chargement quadratique en un terme de chargement constant. Cette approche est couramment utilisée en bureau d'études pour l'analyse des structures soumises au vent turbulent. Etant donné que la sollicitation et donc également la réponse sont des processus aléatoires gaussiens, seules les caractéristiques de second ordre suffisent à la détermination des caractéristiques statistiques de la réponse. L'analyse d'une structure est donc réalisée en suivant les opérations suivantes :

- détermination des densités spectrales des sollicitations appliquées en chacun des noeuds de la structure. A ce stade, il convient également d'estimer les cohérences (densités spectrales croisées) existant entre ces sollicitations ;
- projection de cette sollicitation dans la base des modes propres de façon à obtenir les densités spectrales des sollicitations modales (ou forces généralisées) ainsi que les cohérences existant entre elles. Notons que ces cohérences font parfois l'objet d'une hypothèse qui sera discutée dans la suite ;
- sur base des sollicitations appliquées dans chaque mode, c'est-à-dire appliquées à chaque oscillateur simple, la réponse dans chacun des modes (réponse modale) peut être déterminée. C'est à ce stade qu'interviennent les différentes méthodes numériques discutées à la première partie du document.
- lorsque les réponses modales sont calculées, les caractéristiques des déplacements peuvent alors être obtenues en utilisant de nouveau les modes propres. Le calcul des caractéristiques statistiques des efforts internes, réactions d'appuis et contraintes vient finalement parachever l'analyse de la structure.

Il nous semble que cette méthodologie a déjà été longuement discutée dans la littérature ([16],[80]). Nous ne présenterons donc dans la suite que quelques réflexions personnelles sur des aspects assez localisés de l'analyse d'une structure à plusieurs degrés de liberté. Ces remarques seront présentées au chapitre 9 et traitent essentiellement des différentes formes de couplage qui peuvent exister. Une bonne maîtrise de la notion de

couplage modal nous semble essentielle lorsque les structures étudiées sont complexes et de grandes dimensions. On peut comprendre que négliger les effets de couplage modal ou les prendre en compte de façon systématique constituent deux situations extrêmes. Dans le contexte qui nous concerne, il pourrait être avantageux de recourir à des approches intermédiaires permettant par exemple de prendre en compte le couplage de façon approchée, ou éventuellement entre les modes pour lesquels cela est strictement nécessaire. Après un bref exposé sur les généralités liées au couplage modal, ce sont ces approches intermédiaires qui seront discutées.

Lors de l'étude de l'oscillateur simple, nous avons vu que la prise en compte plus rigoureuse du terme de chargement quadratique pouvait engendrer des modifications assez significatives de la réponse extrême de la structure. Ceci résulte en réalité du traitement d'un processus non gaussien et non plus d'un processus aléatoire gaussien. Nous avons vu que la quantification de ce comportement pouvait passer par l'estimation des moments statistiques d'ordres 3 et 4. Au chapitre 10, nous allons présenter l'équivalent à l'ordre 3 des développements habituels menés au second ordre avec les densités spectrales. Nous préciserons donc la marche à suivre pour projeter les efforts dans la base modale, calculer les caractéristiques d'ordres supérieurs des réponses modales puis revenir ensuite dans la base structurelle.

L'analyse d'une structure dans le domaine temporel, à l'aide de la règle de différentiation d'Ito, permet de résoudre le problème étudié de façon fulgurante. Les développements menés sur le système à un degré de liberté ont montré que la méthode semblait assez difficile à généraliser dans le cadre d'une structure à plusieurs degrés de liberté. Le chapitre 11 donne quelques réflexions (basées sur les travaux de Di Paola et Muscolino [6], [7], [31], [32], [74]) qui rendent cette approche abordable. Nous y étudierons la possibilité de coupler cette approche à un code aux éléments finis de façon à rendre l'analyse systématique.

Chapitre 9

Le couplage modal

"The most important questions of life are, for the most part, really only problems of probability"

"La théorie des probabilités n'est rien d'autre que le sens commun fait calcul"

Pierre Simon De Laplace

9.1 Introduction

Sous le vocable de couplage modal se trouvent différentes sortes de phénomènes sensiblement différents et qui sont donc de ce fait malheureusement souvent confondus. Il nous paraît intéressant de reprendre le déroulement d'une analyse stochastique dans le domaine fréquentiel et d'identifier les endroits où peuvent apparaître des couplages entre modes.

La notion de couplage modal rend compte du fait que les réponses dans chacun des modes propres ne sont pas indépendantes les unes des autres. En effet, contrairement au pressentiment habituel d'indépendance des modes, certaines circonstances peuvent être telles que le couplage entre les modes ne peut pas être négligé.

Le couplage modal ne peut prendre place que lorsque la structure est étudiée dans une base réduite comme la base des modes propres. Les déplacements de la structure s'expriment donc par des combinaisons linéaires de formes simples. Les formes les plus habituelles sont les modes propres classiques mais certaines études peuvent être menées avantageusement à l'aide de vecteurs de Ritz, des modes propres amortis, des fonctions de Hermite, etc. La nouvelle base dans laquelle la structure est étudiée pourrait a priori être n'importe quelle base orthogonale. Etant donné que, dans la majorité des cas, il s'agit de la base des modes propres, nous continuerons notre raisonnement avec ce choix particulier. Aussi, nous noterons $[\Phi]$ la matrice des modes utilisés, un ensemble de M vecteurs à N composantes placés côte à côte. Les dimensions de la matrice modales

sont donc $N \times M$ où N représente le nombre de degrés de liberté de la structure et M représente le nombre de modes propres conservés pour son étude.

La première étape d'une analyse stochastique en base modale consiste en la projection des efforts appliqués sur la structure dans la nouvelle base. Pour les grandes structures du génie civil, cette opération est très coûteuse en temps de calcul ; elle nécessite un nombre d'opérations assez important pour prendre en compte la cohérence des efforts appliqués en différents points de la structure. Nous passons cependant rapidement sur ce point car il n'est aucunement lié au problème du couplage modal. A ce stade, nous obtenons donc une matrice de densité spectrale caractérisant les forces sollicitant chacun des modes :

$$[S_f^*] = [\Phi]^T [S_f] [\Phi] \quad (9.1)$$

Cette matrice est de dimensions beaucoup plus petites que la matrice $[S_f]$ caractérisant les efforts appliqués sur la structure. Il est très important de noter que la matrice des densités spectrales des efforts modaux $[S_f^*]$ n'est a priori pas diagonale. Cela signifie donc que, quel que soit le problème étudié, les forces sollicitant les modes propres ne sont pas indépendantes ; deux modes sont donc sollicités par des efforts présentant une certaine cohérence. On peut donc voir en cette constatation une prédisposition au couplage modal.

Cette matrice n'est en réalité diagonale que dans des circonstances très particulières (malheureusement rencontrées dans les exemples académiques). Pour preuve, il suffit de constater que le calcul de la matrice de densité spectrale des forces généralisées (Eq. 9.1) est une opération en tout point identique au calcul des matrices structurelles généralisées (Eqs. 8.9 à 8.11). Nous savons que les matrices des masses généralisées et des raideurs généralisées sont diagonales (puisque nous travaillons dans la base des modes propres). Donc, pour peu que la matrice des sollicitations soit homothétique à la matrice des masses, des raideurs, ou une combinaison de celles-ci, alors, la matrice $[S_f^*]$ est également diagonale et les forces généralisées sont alors indépendantes. Voici donc établie une condition suffisante mais non nécessaire pour que les sollicitations modales soient indépendantes. Le raisonnement mené ici peut encore être complété avec les discussions habituellement portées sur l'amortissement dit de Rayleigh. Pour résumer, nous pouvons retenir que les forces modales peuvent être considérées comme indépendantes lorsque la sollicitation (ainsi que sa cohérence bien sûr) est distribuée comme la masse, ou plus rarement, comme la raideur.

Que les forces modales soient corrélées ne suffit pas à engendrer un couplage modal. Gardons cependant cette propriété à l'esprit et continuons le cheminement d'une analyse stochastique habituelle. La seconde étape d'une telle analyse est celle du calcul de la matrice de densité spectrale des réponses modales :

$$[S_\eta^*] = [H^*] [S_f^*] [\bar{H}^*]^T \quad (9.2)$$

Bien que l'on réalise à nouveau une double multiplication matricielle, la signification physique de la relation 9.2 est tout à fait différente de celle de la relation 9.1. Nous ne réalisons plus cette fois un changement de repère (accompagné d'une réduction du système) mais plutôt un filtrage, c'est-à-dire le calcul de la réponse d'un système dynamique. Alors que la matrice des modes propres $[\Phi]$ est invariable et rectangulaire, nous utilisons maintenant la matrice de transfert modale $[H^*]$, carrée, de petites dimensions et surtout,

fonction de la fréquence¹. Comme nous l'avons déjà vu, cette matrice s'obtient à partir des matrices généralisées :

$$[H^*] = (-\omega^2 [M^*] + i\omega [C^*] + [K^*])^{-1} \quad (9.3)$$

Le recours aux modes propres est justifié par leur faculté de rendre les matrices des masses et raideurs généralisées diagonales. L'amortissement généralisé peut éventuellement l'être également. Etant donné les incertitudes sur les caractéristiques d'amortissement des structures étudiées, l'amortissement structural est souvent supposé être proportionnel, c'est-à-dire tel que $[C^*]$ soit diagonal. Plusieurs modèles d'amortissement structural satisfaisant cette condition peuvent être utilisés. Les plus courants d'entre eux sont l'amortissement de Rayleigh et l'amortissement par mode. Ils permettent de travailler avec une matrice de transfert modale $[H^*]$ diagonale, ce qui facilite grandement la suite des calculs.

Dans le domaine du vent, nous allons voir que le modèle physique du chargement aérodynamique engendre un amortissement supplémentaire non proportionnel. Si ces caractéristiques d'amortissement doivent être prises en compte rigoureusement, il est alors impératif de travailler avec une matrice de transfert non diagonale.

Maintenant que nous avons relié les notions d'amortissement proportionnel et de matrice de transfert diagonale, la suite du raisonnement est assez immédiate. En notation indicelle, la relation 9.2 peut également s'écrire :

$$S_{\eta_{ij}}^* = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M H_{ik}^* S_{f_{kl}}^* \bar{H}_{jl}^* \quad (9.4)$$

Si l'amortissement est proportionnel, c'est-à-dire que, si de tous les termes H_{pq}^* , il ne reste que le terme pour lequel $p = q$, alors, de la double sommation, il ne reste que :

$$S_{\eta_{ij}}^* = H_{ii}^* \bar{H}_{jj}^* S_{f_{ij}}^* \quad (9.5)$$

Plus particulièrement, les densités spectrales unilatérales des amplitudes modales, obtenues pour $i = j$ s'expriment par :

$$S_{\eta_{ii}}^* = |H_{ii}^*|^2 S_{f_{ii}}^* \quad (9.6)$$

Lorsque l'amortissement est proportionnel, la réponse dans le $i^{\text{ème}}$ mode ne dépend donc que de la sollicitation dans ce mode. C'est en ce sens que l'on affirme généralement que les modes propres permettent un découplage de la réponse. Cette formulation est assez vicieuse dans la mesure où, bien que les réponses dans chacun des modes ne dépendent que de la sollicitation dans ces modes, les réponses dans différents modes ne sont a priori pas indépendantes ! En effet, en considérant la relation 9.5, on voit que la densité spectrale croisée entre différents modes $S_{\eta_{ij}}^*$ ($i \neq j$) peut être non nulle. Cette grandeur, qui représente la cohérence entre les réponses dans les différents modes, peut être non nulle à la condition que les forces dans chacun de ces modes ne soient pas indépendantes. Dans la plupart des analyses que l'on réalise en pratique, les forces généralisées ne sont pas rigoureusement indépendantes et il en va donc de même des amplitudes modales.

¹ c'est cette dernière caractéristique qui justifie l'opération de filtrage

Et ceci est valable même si l'amortissement est proportionnel ! Il est donc important de prendre garde au vocabulaire utilisé : les réponses dans les modes propres ne sont en toute généralité pas indépendantes ; par contre, on peut dire que si l'amortissement est proportionnel, alors, la réponse dans un mode ne dépend que de la sollicitation dans ce mode.

Lorsque l'amortissement est non proportionnel, la relation 9.5 ne peut plus être écrite et la densité spectrale d'une amplitude modale s'exprime alors obligatoirement à partir de la double sommation. La réponse dans un certain mode dépend donc des forces généralisées sollicitant les autres modes. La notion d'indépendance entre réponses modales n'existe donc maintenant plus du tout, sans aucune restriction de vocabulaire. Cette sorte de couplage est appelé dans la suite le couplage provenant de l'amortissement, ou encore, le couplage aérodynamique. Quelques considérations complémentaires lui sont dédiées dans les paragraphes suivants.

Passons maintenant à la troisième étape de l'analyse stochastique. Elle consiste en le calcul des densités spectrales des déplacements de la structure :

$$[S_x] = [\Phi] [S_\eta] [\Phi]^T \quad (9.7)$$

En notation indicielle, on peut également écrire la densité spectrale unilatérale d'un déplacement en un point de la structure :

$$S_{x_{ii}} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \Phi_{ik} S_{\eta_{kl}} \Phi_{il} \quad (9.8)$$

En séparant dans la seconde sommation les termes pour lesquels $l = k$ et les termes pour lesquels $l \neq k$, on peut avantageusement faire apparaître les contributions modales et intermodales :

$$S_{x_{ii}} = \sum_{k=1}^N \Phi_{ik}^2 S_{\eta_{kk}} + \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \Phi_{ik} S_{\eta_{kl}} \Phi_{il} \quad (9.9)$$

En intégrant sur le domaine des fréquences, on obtient :

$$\sigma_{x_{ii}}^2 = \sum_{k=1}^N \Phi_{ik}^2 \sigma_{\eta_{kk}}^2 + \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \Phi_{ik} \Phi_{il} \rho_{\eta_{kl}} \sigma_{\eta_{kk}} \sigma_{\eta_{ll}} \quad (9.10)$$

où $\sigma_{\eta_{kk}}$ et $\rho_{\eta_{kl}}$ représentent respectivement l'écart type de la réponse dans le $k^{\text{ième}}$ mode et la corrélation entre les amplitudes dans les modes k et l . Partant de cette relation, il est extrêmement tentant de négliger la double sommation et ainsi donc d'exprimer l'écart type du déplacement en un point de la structure par la moyenne quadratique des déplacements correspondants dans chacun des modes.

En toute rigueur, la double sommation ne peut cependant pas être négligée et l'on peut alors parler d'effet de couplage modal. En effet, cette seconde sommation ne regroupe que les termes de couplage modal, c'est-à-dire les termes qui permettent de rendre compte que les amplitudes dans des modes différents ne sont, somme toute, pas vraiment indépendantes.

Ces termes de couplage modal, dénommés ci-après contributions intermodales, sont rigoureusement nuls lorsque les réponses modales sont décorréées, c'est-à-dire, dans le

contexte d'un amortissement proportionnel, lorsque les sollicitations sont indépendantes. En reprenant les considérations établies ci-avant, nous pouvons donc par exemple affirmer qu'une sollicitation distribuée de manière homothétique à la masse et/ou la raideur ne donne donc pas lieu à un couplage modal par contributions intermodales.

Après avoir localisé les étapes de l'analyse auxquelles interviennent les deux types de couplages modaux, nous allons maintenant reprendre plus en détails la façon dont ils peuvent être traités.

9.2 Contributions intermodales

9.2.1 Considérations d'ordre général

Les contributions intermodales concernent la double sommation intervenant lors du calcul des déplacements structurels (Eq. 9.9). Dans le domaine du génie civil, de nombreux ouvrages de référence conseillent de ne travailler qu'avec les contributions mode-mode, c'est-à-dire, le seul résultat de la simple sommation. Il serait cependant intéressant de s'inquiéter de l'importance des contributions intermodales, de déterminer dans quelles circonstances elles peuvent devenir non négligeables.

Etant des produits dérivés de la cohérence entre les réponses dans différents modes, les contributions intermodales ne peuvent être importantes que si les densités spectrales croisées entre différents modes $S_{\eta_{kl}}$ sont importantes. Plaçons-nous uniquement dans l'hypothèse d'un amortissement proportionnel. Nous savons que même ce type d'amortissement permet d'obtenir des amplitudes modales cohérentes et s'exprimant par :

$$S_{\eta_{ij}}^* = H_{ii}^* \bar{H}_{jj}^* S_{f_{ij}}^* \quad (9.11)$$

De nouveau, la condition nécessaire et suffisante pour que cette réponse croisée soit importante est que le produit $H_{ii}^* \bar{H}_{jj}^*$ soit important *et* que $S_{f_{ij}}^*$ soit également important, c'est-à-dire que les forces sollicitant ces deux modes soient fortement corrélées. En guise de conclusion, on peut donc affirmer que la contribution intermodale $S_{\eta_{ij}}^*$ entre les modes i et j sera faible à condition :

- que les forces dans les modes i et j soient faiblement corrélées *ou*
- que le produit $H_{ii}^* \bar{H}_{jj}^*$ soit assez faible

La première de ces deux conditions est assez difficilement appréciable. Au moins, nous savons que si la sollicitation est distribuée plus ou moins comme la masse ou la raideur, alors les forces ne peuvent pas être fortement corrélées. Cela ne suffit malheureusement pas lors de l'analyse d'une structure. A la question :

- Quand faut-il prendre en compte les contributions intermodales ?

on peut répondre que si le coefficient de corrélation des forces modales et la densité spectrale des forces modales au droit des fréquences propres des modes i et j sont faibles, alors les contributions intermodales entre les modes i et j ne sont guère importantes. Dans le déroulement d'une analyse stochastique, au moment de décider si les contributions intermodales doivent être prises en compte ou non, les forces modales ont déjà été calculées. Cette première condition nécessaire peut donc être également utilisée comme critère.

La seconde des conditions présentées ci-dessus concerne davantage les caractéristiques structurelles puisqu'il s'agit du produit des fonctions de transfert dans chacun des modes.

Nous savons qu'une fonction de transfert engendre une composante quasi-statique ainsi qu'une composante dynamique. Par extension, nous pouvons affirmer que le produit de deux fonctions de transfert donne donc lieu à une composante quasi-statique ainsi que deux composantes dynamiques. Ces deux composantes dynamiques s'obtiennent respectivement par le produit de la hauteur du pic dans une fonction de transfert par la valeur prise par l'autre fonction de transfert en ce point, et inversement. Ces deux composantes ne seront donc réellement importantes que si les positions des pics sont proches, voire coïncident. La seconde condition nécessaire pour avoir un couplage modal est donc que les fréquences propres des modes étudiés soient proches. Dans la perspective de l'établissement d'un critère, il importe également de prendre en compte le taux d'amortissement dans chacun des modes puisqu'il conditionne la largeur des pics.

9.2.2 Illustration numérique

Nous allons illustrer les développements généraux, valables pour les systèmes à plusieurs degrés de libertés, sur un système simple à deux degrés de liberté. Afin de simplifier les développements analytiques, nous allons repartir du système général présenté dans l'introduction et imposer $\mu = 1$, soit que les deux masses sont identiques, et que $\delta = 1$. Par simplicité d'interprétation et aussi afin de pouvoir travailler avec un amortissement structural proportionnel et différent dans chacun des modes, nous imposerons simplement les taux d'amortissement dans chacun des modes. Les matrices structurelles s'expriment finalement par :

$$[m] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} ; \quad [k] = \begin{bmatrix} K(1+\varepsilon) & -\varepsilon K \\ -\varepsilon K & K(1+\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

Les caractéristiques modales de ce système se déduisent des relations 8.8 à 8.11. Les modes propres prennent la forme très simple suivante :

$$[\Phi] = \frac{1}{\sqrt{2M}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

Ce sont donc des modes où les masses vibrent en phase ou en opposition de phase. Quant aux pulsations propres, elles s'obtiennent par :

$$\varpi_1 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \text{et} \quad \varpi_2 = \sqrt{\frac{K}{M}(1+2\varepsilon)} \quad (9.14)$$

Le paramètre ε peut donc être interprété comme un indicateur d'espacement entre fréquences propres. L'écart relatif entre les fréquences propre vaut :

$$\varepsilon_r = \frac{\varpi_2 - \varpi_1}{\frac{\varpi_2 + \varpi_1}{2}} = 2 \frac{\sqrt{1+2\varepsilon} - 1}{\sqrt{1+2\varepsilon} + 1} = 2 \frac{1 + \varepsilon - \sqrt{1+2\varepsilon}}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\varepsilon_r}{\left(1 - \frac{\varepsilon_r}{2}\right)^2} \quad (9.15)$$

Les matrices structurelles généralisées valent :

$$[m^*] = [\Phi]^T [m] [\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

$$[k^*] = [\Phi]^T [k] [\Phi] = \frac{K}{M} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (9.17)$$

$$[c^*] = [\Phi]^T [c] [\Phi] = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2\sqrt{1+2\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (9.18)$$

Donnons une forme assez générale à la sollicitation de cette structure. Pour simplifier les développements, nous supposons cependant que les deux degrés de liberté sont sollicités par des bruits blancs. La matrice de densité spectrale de puissance de la sollicitation s'exprime par :

$$[S_f] = \begin{bmatrix} S_1 & \gamma\sqrt{S_1 S_2} \\ \gamma\sqrt{S_1 S_2} & S_2 \end{bmatrix} \quad (9.19)$$

La matrice de densité spectrale des forces généralisées s'obtient en projetant cette matrice dans la base des modes propres :

$$[S_f^*] = [\Phi]^T [S_f] [\Phi] = \frac{1}{2M} \begin{bmatrix} S_1 + 2\gamma\sqrt{S_1 S_2} + S_2 & S_2 - S_1 \\ S_2 - S_1 & S_1 - 2\gamma\sqrt{S_1 S_2} + S_2 \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

On peut constater que les forces modales sont indépendantes à condition que $S_2 = S_1$. Dans ce cas, la sollicitation est distribuée de la même manière que la masse ; ceci rejoint le raisonnement général mené ci-avant.

Connaissant les expressions des matrices structurelles généralisées, la matrice de transfert modale peut être estimée :

$$\begin{aligned} [H^*] &= \begin{bmatrix} -\omega^2 + 2i\xi_1\omega\varpi_1 + \varpi_1^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 + 2i\xi_2\omega\varpi_2 + \varpi_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\varpi_1^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\varpi_1}\right)^2 + \frac{2i\omega\xi_1}{\varpi_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varpi_2^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\varpi_2}\right)^2 + \frac{2i\omega\xi_2}{\varpi_2}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.21)$$

où ξ_1 et ξ_2 sont les taux d'amortissement imposés dans chacun des modes propres. Etant donné que l'amortissement a été choisi par mode, c'est-à-dire de façon à produire un amortissement proportionnel, les densités spectrales des amplitudes modales s'expriment assez facilement. Nous ne reprenons ici que l'expression de la matrice de covariance des amplitudes modales qui est obtenue par intégration des densités spectrales :

$$[\sigma_\eta^2] = \begin{bmatrix} \sigma_{\eta_{11}}^2 & \sigma_{\eta_1\eta_2} \\ \sigma_{\eta_1\eta_2} & \sigma_{\eta_{22}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{\eta_{11}}^2 = \frac{1}{2M} \left(S_1 + 2\gamma\sqrt{S_1 S_2} + S_2 \right) \frac{\pi}{2\xi_1\varpi_1^3} \quad (9.22)$$

$$\sigma_{\eta_1\eta_2} = \frac{1}{2M} \frac{4\pi (S_2 - S_1) (\xi_1\varpi_1 + \xi_2\varpi_2)}{\varpi_1^4 + \varpi_2^4 + 4\xi_1\xi_2\varpi_1\varpi_2 (\varpi_1^2 + \varpi_2^2) - 2(1 - 2\xi_1^2 - 2\xi_2^2) \varpi_1^2\varpi_2^2} \quad (9.23)$$

$$\sigma_{\eta_{22}}^2 = \frac{1}{2M} \left(S_1 - 2\gamma\sqrt{S_1 S_2} + S_2 \right) \frac{\pi}{2\xi_2\varpi_2^3} \quad (9.24)$$

Aux relations 9.22 et 9.24, on peut reconnaître la réponse d'un oscillateur soumis à un bruit blanc. La covariance entre les amplitudes modales $\sigma_{\eta_1\eta_2}$ permet d'estimer la corrélation existant entre les réponse dans chacun des modes. C'est ce terme même qui est supposé être nul lorsque les contributions intermodales sont négligées.

La matrice de covariance des déplacements s'exprime par :

$$\begin{aligned} [\sigma_x^2] &= [\Phi] [\sigma_\eta^2] [\Phi]^T \\ &= \frac{1}{2M} \begin{bmatrix} \sigma_{\eta_{11}}^2 - 2\sigma_{\eta_1\eta_2} + \sigma_{\eta_{22}}^2 & \sigma_{\eta_{11}}^2 - \sigma_{\eta_{22}}^2 \\ \sigma_{\eta_{11}}^2 - \sigma_{\eta_{22}}^2 & \sigma_{\eta_{11}}^2 + 2\sigma_{\eta_1\eta_2} + \sigma_{\eta_{22}}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.25)$$

On peut donc constater que les effets des contributions intermodales se font ressentir dans les expressions des variances en chacun des deux noeuds par des contributions de signes opposés ($-2\sigma_{\eta_1\eta_2}$ et $+2\sigma_{\eta_1\eta_2}$). Cela signifie donc que l'énergie totale (la trace de la matrice de covariance des déplacements) obtenue en sommant les variances les déplacements en chacun des noeuds est identique, que les contributions intermodales soient prises en compte ou non. Cet argument peut être fourni pour justifier l'annulation des contributions intermodales.

Les variances obtenues en négligeant les contributions intermodales sont d'autant mieux estimées que le rapport suivant est petit :

$$\frac{2\sigma_{\eta_1\eta_2}}{\sigma_{\eta_{11}}^2 + \sigma_{\eta_{22}}^2} = \frac{(S_2 - S_1) \frac{8\pi(\xi_1\varpi_1 + \xi_2\varpi_2)}{\varpi_1^4 + \varpi_2^4 + 4\xi_1\xi_2\varpi_1\varpi_2(\varpi_1^2 + \varpi_2^2) - 2(1 - 2\xi_1^2 - 2\xi_2^2)\varpi_1^2\varpi_2^2}}{(S_1 + 2\gamma\sqrt{S_1S_2} + S_2) \frac{\pi}{2\xi_1\varpi_1^3} + (S_1 - 2\gamma\sqrt{S_1S_2} + S_2) \frac{\pi}{2\xi_2\varpi_2^3}} \quad (9.26)$$

Ce rapport peut être décomposé en le produit de deux facteurs, l'un regroupant essentiellement les termes de chargement, l'autre ne conservant que des termes de caractéristiques structurelles :

$$\phi_1 = \frac{(S_2 - S_1) (\xi_2\varpi_2^3 + \xi_1\varpi_1^3)}{(S_1 + 2\gamma\sqrt{S_1S_2} + S_2) \xi_2\varpi_2^3 + (S_1 - 2\gamma\sqrt{S_1S_2} + S_2) \xi_1\varpi_1^3} \quad (9.27)$$

$$\phi_2 = \frac{16(\xi_1\varpi_1 + \xi_2\varpi_2)}{\xi_2\varpi_2^3 + \xi_1\varpi_1^3} \frac{\xi_1\xi_2\varpi_1^3\varpi_2^3}{(\varpi_2^2 - \varpi_1^2)^2 + 4\xi_1\xi_2\varpi_1\varpi_2(\varpi_1^2 + \varpi_2^2) + 4(\xi_1^2 + \xi_2^2)\varpi_1^2\varpi_2^2} \quad (9.28)$$

En posant

$$\alpha = \frac{\varpi_2 - \varpi_1}{\xi_1\varpi_1 + \xi_2\varpi_2} \quad (9.29)$$

Les expressions de ϕ_1 et ϕ_2 deviennent assez intéressantes car elles font alors intervenir une variable de moins :

$$\phi_1 = \frac{\frac{S_2 - S_1}{S_1 + S_2}}{1 + 2\gamma \frac{\sqrt{S_1S_2}}{S_1 + S_2} \frac{\xi_2(1 + \alpha\xi_1)^3 - \xi_1(1 - \alpha\xi_2)^3}{\xi_2(1 + \alpha\xi_1)^3 + \xi_1(1 - \alpha\xi_2)^3}} \quad (9.30)$$

$$\phi_2 = \frac{4\xi_1\xi_2}{(\xi_1 + \xi_2)^2} \frac{(1 + \alpha\xi_1)^3 (1 - \alpha\xi_2)^3}{(1 + 3\alpha^2\xi_1\xi_2 + \alpha^3\xi_1\xi_2(\xi_1 - \xi_2))} \frac{1}{\left(1 + 2\alpha(\xi_1 - \xi_2) + \alpha^2(1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - 3\xi_1\xi_2) - \alpha^3(\xi_1 - \xi_2) + \frac{\alpha^4}{4}(\xi_1 - \xi_2)^2\right)} \quad (9.31)$$

L'examen de cette dernière relation montre que le produit ne peut prendre des valeurs significatives que si le paramètre α est faible. [ϕ_2 se comporte en $\frac{1}{\alpha^4}$]. Supposons donc pour continuer que le paramètre α est assez faible ($\alpha\xi_1 \ll 1$, $\alpha\xi_2 \ll 1$, $\alpha^2\xi_1\xi_2 \ll 1$). On peut encore écrire :

$$\phi_1 = \frac{\frac{S_2 - S_1}{S_1 + S_2}}{1 + 2\gamma \frac{\sqrt{S_1 S_2}}{S_1 + S_2} \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 + \xi_1}} \simeq \frac{S_2 - S_1}{S_1 + S_2} \quad (9.32)$$

$$\phi_2 = \frac{\left(\frac{\sqrt{\xi_1 \xi_2}}{\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}} \right)^2}{1 + \alpha^2} \quad (9.33)$$

Etant donné que S_1 et S_2 représentent des intensités de densités spectrales et sont donc toujours positives, on peut se convaincre assez facilement que le coefficient ϕ_1 appartient à l'intervalle $[-1; 1]$.

De plus, par le théorème des moyennes, on sait que le rapport $\sqrt{\xi_1 \xi_2} / \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$ de la moyenne géométrique à la moyenne arithmétique de ξ_1 et ξ_2 est inférieur à l'unité. Le coefficient ϕ_2 appartient donc à l'intervalle $[0; 1]$.

Le produit des deux grandeurs adimensionnelles (ϕ_1 et ϕ_2) représente le rapport entre la contribution intermodale et les contributions mode-mode. Nous venons de constater que ce rapport est en valeur absolue inférieur à l'unité, ce qui est bien en accord avec le théorème de Cauchy-Schwartz.

Les relations 9.32 et 9.33 expriment mathématiquement les deux conditions nécessaires pour la prise en compte des contributions intermodales que nous avons dégagées ci-avant par un raisonnement plus général. Pour que ces contributions puissent être négligées, il suffit :

- que les forces généralisées soient non cohérentes, c'est-à-dire dans notre cas que la différence $S_2 - S_1$ soit aussi petite que possible par rapport à $S_1 + S_2$ ou ;
- que les fréquences propres des modes soient éloignées, ce qui se traduit par une valeur élevée du paramètre α .

Si l'une des deux conditions est satisfaite (à des restrictions près que chacun peut fixer à sa convenance), l'effet de contributions intermodales peut être négligé.

Lorsque l'on pose $\xi_1 = \xi_2$ et $S_2 = 0$, on retrouve un résultat qui est présenté dans la littérature ([80]) pour illustrer les effets du couplage modal :

$$\phi_1 = 1 \quad (9.34)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{1 + \alpha^2} \quad (9.35)$$

Par rapport à ce résultat assez simple, les développements menés ici permettent d'apprécier les situations où les différents modes intervenant présentent des taux d'amortissement relatifs différents.

Aussi, les développements qui ont été menés permettent d'illustrer mathématiquement l'importance de la sollicitation à travers le coefficient ϕ_1 . Considérons une structure où trois modes présentent des fréquences propres proches et supposons que les modes 1 et 3 interagissent alors que les contributions intermodales des modes 1 et 2 et des modes 2 et 3 sont faibles. L'existence d'une telle situation pourrait paraître étrange sous l'examen du seul coefficient ϕ_2 ; les considérations menées sur les efforts et l'établissement du coefficient ϕ_1 permettent cependant de justifier cette situation.

9.2.3 Discussion sur la conservation de l'énergie

Dans l'exemple numérique qui vient d'être présenté, nous avons pu constater que l'énergie totale, c'est-à-dire la somme des variances des déplacements en chacun des noeuds, était identique, que les contributions intermodales soient prises en compte ou non. Il pourrait être intéressant de vérifier les conditions d'applicabilité de cette propriété.

Pour ce faire, nous repartons sur un raisonnement général, valable pour un système à plusieurs degrés de liberté. La matrice de densité spectrale des déplacements s'obtient par la relation suivante :

$$[S_x] = [\Phi] [S_\eta] [\Phi]^T \quad (9.36)$$

Cette relation est celle à appliquer si l'on désire prendre en compte les couplages entre les modes propres. Dans le cas contraire, il suffit d'appliquer la même relation, avec une matrice $[S_\eta]$ modifiée, obtenue en supprimant les termes hors diagonale. Nous allons donc réécrire ainsi cette relation :

$$[S_x] = \underbrace{[\Phi] [S_\eta^d] [\Phi]^T}_{[S_x^d]} + \underbrace{[\Phi] [S_\eta^h] [\Phi]^T}_{[S_x^h]} \quad (9.37)$$

où $[S_\eta^d]$ est une matrice reprenant uniquement les termes diagonaux de $[S_\eta]$ et $[S_\eta^h]$ une matrice comprenant uniquement ses termes non diagonaux. On fait ainsi apparaître d'une part $[S_x^d]$ la matrice de densité spectrale des déplacements nodaux qui serait obtenue si l'on ne prenait pas en compte les termes de couplage et d'autre part la matrice $[S_x^h]$ qui est le complément à lui ajouter pour obtenir la solution avec couplage.

Nous allons entamer la discussion sur la conservation de l'énergie totale. Pour ce faire, nous calculons la somme des éléments diagonaux de la matrice $[S_x^h]$, qui représentera, après intégration sur les fréquences, la somme des compléments de variances à apporter au résultat global sans couplage.

$$\begin{aligned} \sum_i S_{x_{ii}}^h &= \sum_i \sum_j \sum_k \Phi_{ij} S_{\eta_{jk}}^h \Phi_{ik} \\ &= \sum_j \sum_k S_{\eta_{jk}}^h \sum_i \Phi_{ij} \Phi_{ik} \end{aligned} \quad (9.38)$$

A condition que les modes propres soient orthonormés, c'est-à-dire si $\sum_i \Phi_{ij} \Phi_{ik} = \delta_{jk}$, on peut alors écrire :

$$\sum_i S_{x_{ii}}^h = \sum_j \sum_k S_{\eta_{jk}}^h \delta_{jk} = \sum_j S_{\eta_{jj}}^h = 0 \quad (9.39)$$

puisque S_η^h a été choisie de sorte à avoir des éléments diagonaux nuls. En conclusion, on peut voir que, sous la condition de travailler avec des modes propres orthonormés, ne pas prendre en compte les termes de couplage mène à des augmentations et diminutions des variances des déplacements en différents points, ces variations étant telles que la somme de ces compléments de variance soit nulle. Ceci ne fait que traduire la conservation de l'énergie.

La condition de travailler avec des modes propres orthonormés n'est pas une condition que l'on impose. C'est une propriété que les modes propres peuvent éventuellement

présenter, mais certainement pas en toute généralité. Les modes propres de vibration calculés sur base des matrices de masse et de raideur présentent les propriétés suivantes :

$$\{\Phi_i\}^T [m] \{\Phi_j\} = 0 \text{ si } i \neq j \quad (9.40)$$

$$\{\Phi_i\}^T [k] \{\Phi_j\} = 0 \text{ si } i \neq j \quad (9.41)$$

La condition $\{\Phi_i\}^T \{\Phi_j\} = \delta_{ij}$ ne peut donc être remplie que si la matrice identité peut s'écrire comme combinaison des matrices de masse et de raideur. Il va de soi que cette condition ne peut se présenter que dans des exemples académiques. On ne peut donc pas conclure à une conservation de l'énergie totale de façon universelle.

9.2.4 L'approximation en bruit blanc et le couplage modal

Si l'amortissement de la structure étudiée est de type proportionnel, la réponse dans le mode i ne dépend que de la sollicitation dans ce mode (9.11). Aussi nous savons que les caractéristiques particulières des structures étudiées dans le génie civil, essentiellement leur faible taux d'amortissement, sont telles que l'approximation en bruit blanc est souvent appliquée. Cette approximation intervient au niveau du calcul des variances des amplitudes modales. En raison du découplage modal, ces termes s'expriment par :

$$\sigma_{\eta_{ii}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{ii}(\omega)|^2 S_{\eta_{ii}}(\omega) d\omega \quad (9.42)$$

et l'application de l'approximation en bruit blanc donne :

$$\sigma_{\eta_{ii}}^2 \simeq S_{\eta_{ii}}(\varpi) \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{ii}(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{k_i^{*2}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta_{ii}}(\omega) d\omega \quad (9.43)$$

Lorsque les contributions intermodales peuvent être négligées, l'application de cette méthode est particulièrement propice étant donné que les variances des déplacements peuvent être obtenues uniquement à partir des variances (et non pas des covariances) des amplitudes modales, ces dernières étant calculées très facilement et très rapidement par cette approximation en bruit blanc.

Lorsque les contributions intermodales doivent être prises en compte, il importe de pouvoir également calculer les covariances entre réponses modales. Toujours sous l'hypothèse d'un amortissement proportionnel, la densité spectrale croisée de la réponse dans les modes i et j ne dépend que de la densité spectrale croisée de sollicitation entre les forces généralisées dans ces modes (9.11). Il semble alors qu'il pourrait être avantageux de mettre en oeuvre une méthode similaire à l'approximation en bruit blanc, qui permettrait d'éviter l'intégration des densités spectrales croisées sur les fréquences. La covariance entre les réponses dans les modes i et j s'exprime² par :

$$\sigma_{\eta_{ij}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{ii}(\omega) \bar{H}_{jj}(\omega) S_{F_{ij}}^*(\omega) d\omega \quad (9.44)$$

L'adaptation la plus simple de l'approximation en bruit blanc nous pousse à décomposer cette intégrale en deux termes :

²à condition de ne pas être en présence de couplage par amortissement non proportionnel

$$\sigma_{\eta_{ij}}^2 \simeq \frac{1}{K_i^* K_j^*} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{F_{ij}}^*(\omega) d\omega + \frac{S_{F_{ij}}^*(\varpi_i) + S_{F_{ij}}^*(\varpi_j)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{ii}(\omega) \bar{H}_{jj}(\omega) d\omega \quad (9.45)$$

Le premier terme est un terme quasi-statique; il est obtenu en supposant que les fonctions de transfert $H_{ii}(\omega)$ et $\bar{H}_{jj}(\omega)$ sont constantes et égales à leurs valeurs pour une fréquence nulle. Le second terme correspond à la composante dynamique de la réponse; il est obtenu en remplaçant la densité spectrale croisée de sollicitation modale par une densité spectrale constante. Cette constante a été choisie comme étant la moyenne arithmétique des densités spectrales croisées calculées pour les deux pulsations propres ϖ_i et ϖ_j .

En notant que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} H_{ii}(\omega) \bar{H}_{jj}(\omega) d\omega \\ &= \frac{4\pi (\xi_i \varpi_i + \xi_j \varpi_j)}{\varpi_i^4 + 4\xi_i \xi_j \varpi_i^3 \varpi_j + 2(-1 + 2\xi_i^2 + 2\xi_j^2) \varpi_i^2 \varpi_j^2 + 4\xi_i \xi_j \varpi_i \varpi_j^3 + \varpi_j^4} \\ &= \frac{4\pi (\xi_i \varpi_i + \xi_j \varpi_j)}{(\varpi_i^2 - \varpi_j^2)^2 + 4\varpi_i \varpi_j (\xi_i \varpi_i + \xi_j \varpi_j) (\xi_j \varpi_i + \xi_i \varpi_j)} \end{aligned} \quad (9.46)$$

L'expression de l'approximation en bruit blanc pour le calcul de la covariance entre deux modes propres s'exprime par :

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta_{ij}} &= \rho_{F_{ij}}^* \frac{\sigma_{F_{ii}}^*}{k_i^*} \frac{\sigma_{F_{jj}}^*}{k_j^*} + \frac{S_{F_{ij}}^*(\varpi_i) + S_{F_{ij}}^*(\varpi_j)}{2} \\ & \quad \frac{4\pi (\xi_i \varpi_i + \xi_j \varpi_j)}{(\varpi_i^2 - \varpi_j^2)^2 + 4\varpi_i \varpi_j (\xi_i \varpi_i + \xi_j \varpi_j) (\xi_j \varpi_i + \xi_i \varpi_j)} \end{aligned} \quad (9.47)$$

Notons que si $i = j$, cette relation dégénère en $\sigma_{\eta_{ij}} = \frac{\sigma_{F_{ii}}^2}{k_i^{*2}} + S_{F_{ii}}^*(\varpi_i) \frac{\pi}{2\xi_i \varpi_i^3}$ qui n'est rien d'autre que l'approximation en bruit blanc utilisée habituellement. La principale critique qui pourrait être formulée à l'encontre de cette adaptation de l'approximation en bruit blanc concerne le remplacement de la densité spectrale croisée par une densité spectrale constante. La valeur que nous avons choisie est la moyenne des grandeurs $S_{F_{ij}}^*(\varpi_i)$ et $S_{F_{ij}}^*(\varpi_j)$ qui peuvent être significativement différentes, et même d'ordres de grandeur différents. Cette hypothèse peut paraître un peu excessive mais nous tenons à rappeler que les covariances ne doivent en réalité être bien estimées que lorsque les fréquences propres sont proches. Donc, en appliquant la relation 9.47, nous commettons certes une erreur substantielle lorsque les pulsations ϖ_i et ϖ_j sont écartées, mais la covariance est tellement faible vis-à-vis des variances que cette erreur ne peut guère porter à conséquence sur l'estimation des déplacements.

Par contre, lorsque les pulsations propres sont assez proches l'une de l'autre, les valeurs des densités spectrales croisées $S_{F_{ij}}^*(\varpi_i)$ et $S_{F_{ij}}^*(\varpi_j)$ prennent un ordre de grandeur

semblable, voire à la limite des valeurs identiques, et le remplacement de la densité spectrale croisée réelle par une densité spectrale constante devient licite. L'approximation que nous proposons devrait donc donner de bons résultats lorsque les fréquences propres sont proches, c'est-à-dire justement lorsque les effets de couplage doivent être pris en compte.

Pour illustrer ceci, nous avons réalisé une étude paramétrique de la précision que cette méthode peut fournir. La structure étudiée est un système à deux degrés de liberté comme celui du paragraphe 9.2.2 ($\mu = 1$, $\delta = 1$). Les paramètres structuraux qui ont été choisis sont $M = 1kg$, $K = 25.26N/m$ et $\xi = 0.01$. Afin d'étudier des modes propres dont les fréquences sont suffisamment proches, nous avons commencé par le choix $\varepsilon_r = 0.05$, soit $\varepsilon = 0.0526$. Cela signifie donc que l'écart relatif entre les pulsations propres est de 5% (Eq. 9.15). Les relations présentées au paragraphe 9.2.2 montrent que les fréquences propres de la structure étudiée sont :

$$f_1 = 0.8Hz \quad (9.48)$$

$$f_2 = 0.841Hz \quad (9.49)$$

La structure est chargée par un chargement aérodynamique. Les densités spectrales d'effort unilatérales en chacun des deux noeuds de la structure ont la forme proposée par Davenport avec $\bar{U} = 20m/s$. Les développements préalables nous ont appris qu'il ne pouvait pas y avoir de couplage pour cette structure si les densités spectrales unilatérales en chacun des noeuds de la structure étaient identiques. Nous avons donc respectivement choisi pour les écarts-types des efforts appliqués aux noeuds 1 et 2 :

$$\sigma_{F_1} = 2N \quad (9.50)$$

$$\sigma_{F_2} = 2\sqrt{2}N = 2.83N \quad (9.51)$$

La cohérence entre les sollicitations appliquées aux deux noeuds est de type exponentielle, comme celle qui est généralement utilisée dans le domaine du vent :

$$\gamma(f) = e^{\frac{-CfL}{2U}} \quad (9.52)$$

où $C = 5$ représente le coefficient de cohérence³ et $L = 150m$ représente la distance entre les deux points chargés.

La première analyse que nous avons réalisée est une analyse numérique dans le domaine fréquentiel. Les moments spectraux ont été déterminés par intégration numérique des densités spectrales. Pour l'application de cette méthode, nous avons utilisé la méthode présentée à la première partie du document pour disposer les fréquences de calcul de façon optimale. La figure 9.1 donne une idée de la représentation de la sollicitation à l'aide des fréquences de calcul obtenues. L'algorithme de détermination des fréquences de calcul nous donne 164 points répartis de façon optimale. On peut voir (figure en haut, à droite) que ces fréquences sont essentiellement réparties dans les voisinages de l'origine et des pics de résonance de façon à représenter correctement la sollicitation et la structure. La figure 9.1 donne également une représentation de la densité spectrale de sollicitation au noeud 1 et de la fonction de cohérence entre les sollicitations aux noeuds 1 et 2.

La figure 9.2 représente les densités spectrales des amplitudes modales. On peut reconnaître sur ce graphique les densités spectrales unilatérales qui présentent un pic

³qu'il faudrait en réalité plutôt appeler le coefficient d'incohérence car les signaux sont d'autant plus cohérents que C est petit.

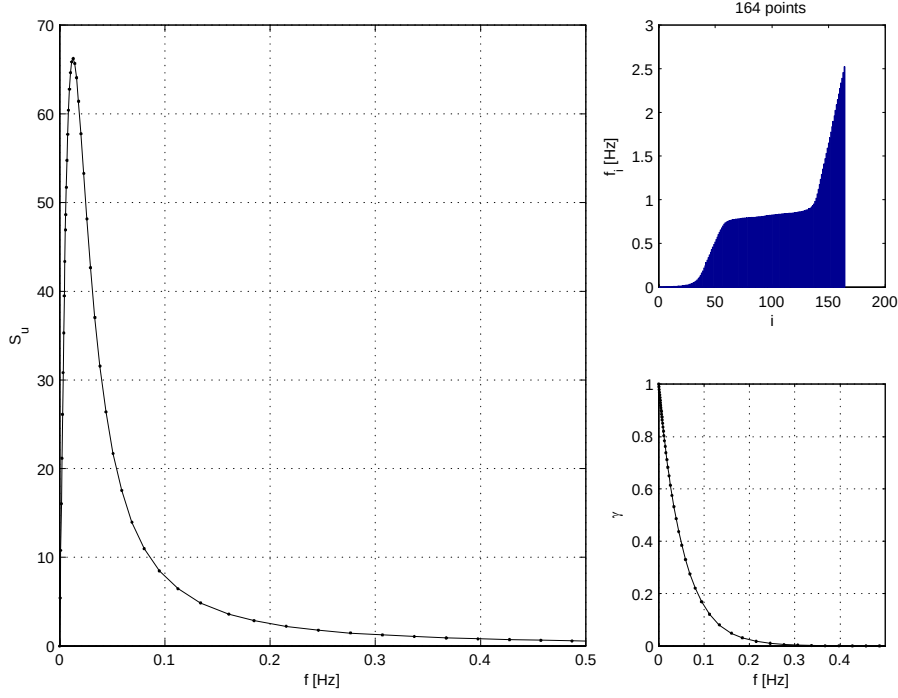


FIG. 9.1 – Fréquence de calcul, représentation de la densité spectrale unilatérale et de la fonction de cohérence pour l'exemple étudié

unique au droit des fréquences propres ainsi que la densité spectrale croisée qui présente un pic au droit de chaque fréquence propre.

Les intégrations sur les fréquences de ces relations permettent d'obtenir les valeurs des variances et covariances :

$$\sigma_{\eta_{11}}^2 = 0.0499 \quad (9.53)$$

$$\sigma_{\eta_{22}}^2 = 0.0338 \quad (9.54)$$

$$\rho_{\eta_{12}} \sigma_{\eta_{11}} \sigma_{\eta_{22}} = 0.0042 \quad (9.55)$$

L'application de la méthode d'approximation en bruit blanc et de son extension telle qu'elle a été présentée permet d'obtenir ;

$$\sigma_{\eta_{11}}^2 = 0.0503 \quad (9.56)$$

$$\sigma_{\eta_{22}}^2 = 0.0342 \quad (9.57)$$

$$\rho_{\eta_{12}} \sigma_{\eta_{11}} \sigma_{\eta_{22}} = 0.0044 \quad (9.58)$$

Que l'approximation en bruit blanc donne des résultats valables dans le cadre de l'estimation des variances des amplitudes modales n'est pas étonnant car c'est un phénomène que nous avons déjà étudié au paragraphe précédent. Nous voyons par contre que l'extension de l'approximation en bruit blanc telle que nous la présentons ici permet d'obtenir des résultats convaincants pour les expressions des covariances.

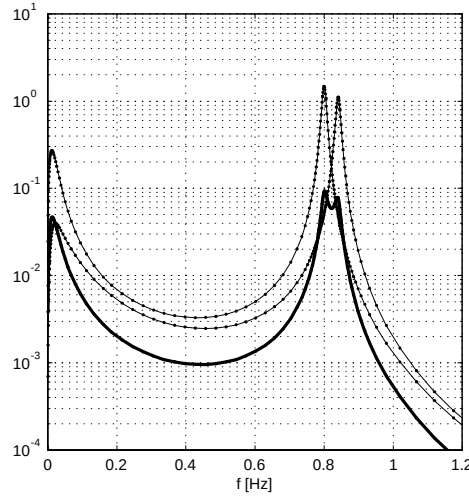


FIG. 9.2 – Représentation des densités spectrales (unilatérales et croisée) des amplitudes modales

Une étude paramétrique des aptitudes du nouvel algorithme permet de mieux apprécier ses limitations. La figure 9.3 résume le résultat de l'étude paramétrique réalisée en faisant varier, par rapport au problème étudié jusqu'ici, l'écart relatif ε_r entre les pulsations propres ainsi que le taux d'amortissement ξ (identique) dans chacun des modes propres.

Le premier graphique de cette figure représente l'importance de la contribution intermodale vis-à-vis des contributions mode-mode. Par exemple, pour $\xi = 0.01$, on peut imaginer que la contribution intermodale ne présente plus une importance limitée que lorsque $\varepsilon_r > 0.05$. Cela signifie donc que l'erreur associée à l'application de l'approximation en bruit blanc pour les valeurs de ε_r supérieures à 0.05 ne doit être étudiée qu'avec un intérêt limité. Le graphique placé en haut et à droite représente l'erreur commise sur la covariance entre modes propres en appliquant l'approximation en bruit blanc ($\frac{\sigma_{\eta_{12}BB} - \sigma_{\eta_{12}}}{\sigma_{\eta_{12}}}$). Le comportement des courbes de ce graphique est assez caractéristique. On peut constater que les courbes diffèrent sensiblement pour les faibles écarts relatifs ε_r entre fréquences propres et qu'elles semblent présenter un comportement unifié lorsque les fréquences propres sont plus éloignées. Ceci traduit en réalité le fait que lorsque les fréquences propres sont plus écartées, la contribution dynamique devient moins significative et donc que l'erreur réalisée sur la covariance correspond presque exclusivement à l'erreur commise sur la partie quasi-statique de la covariance. Etant donné que cette erreur est indépendante du taux d'amortissement, il paraît assez logique de retrouver ce comportement intrinsèque. Aux graphiques inférieurs, on peut par contre observer le comportement présenté à la première partie de ce document, à savoir une erreur sur l'estimation de la variance d'autant plus grande que le taux d'amortissement est important. La faible dépendance vis-à-vis de l'écart relatif ε_r entre fréquences propres montre effectivement qu'il s'agit d'un problème qui peut être ramené à l'étude d'un oscillateur simple.

Cet exemple montre que, dans le contexte qui nous concerne plus particulièrement,

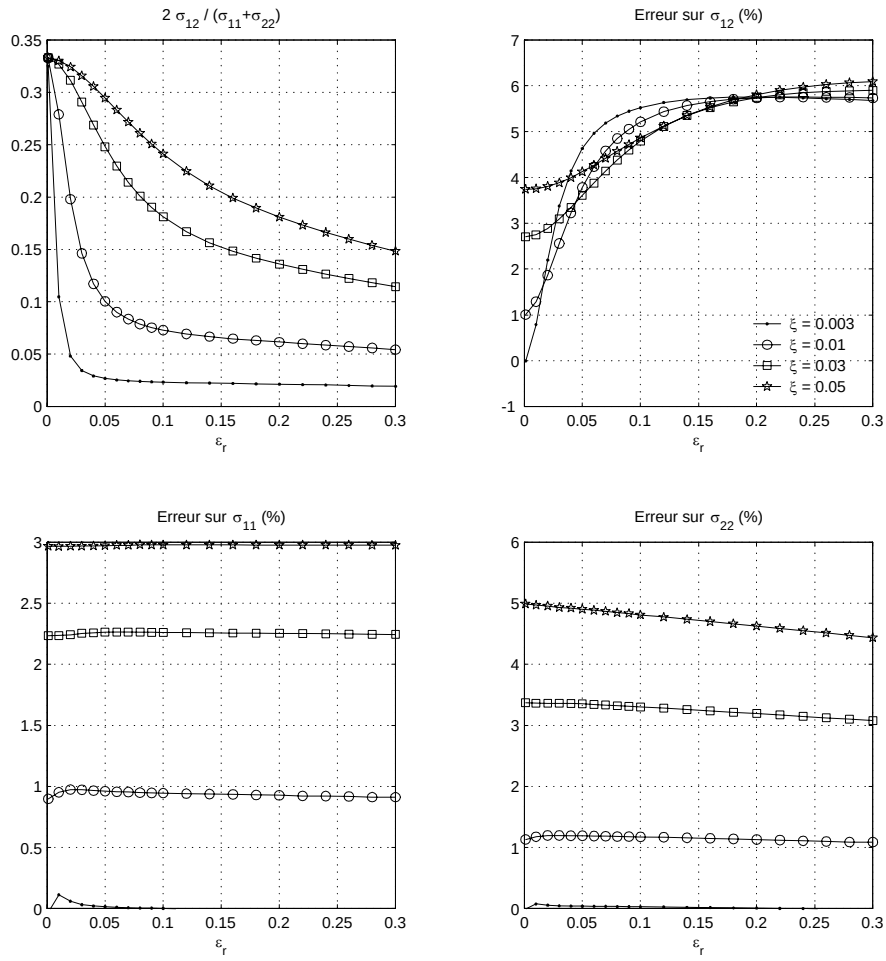


FIG. 9.3 – Etude paramétrique de la précision liée à l'adaptation de l'approximation en bruit blanc pour le calcul des covariances entre modes

l'extension de la méthode d'approximation en bruit blanc au calcul des covariances entre modes propres semble être applicable avec une précision suffisante.

9.2.5 Couplage modal en présence d'amortisseur par masse accordée

Etant donné que la première illustration numérique semblait être un peu trop particulière en raison de la conservation d'énergie, nous allons présenter brièvement un autre exemple. Il s'agit de l'étude d'une structure à un seul degré de liberté à laquelle un amortisseur par masse accordée a été ajouté.

Les équations du mouvement de ce système peuvent à nouveau être dérivées de l'expression générale en posant $\delta = 0$, c'est-à-dire en libérant la masse de droite de sa restriction à la fondation. Nous verrons dans la suite que l'étude du système ainsi obtenu peut poser des problèmes d'amortissement non proportionnel. A ce stade, nous allons cependant nous limiter à supposer que l'amortissement est proportionnel et donc imposer que $\zeta = \varepsilon\xi^4$. Le principe de l'amortisseur par masse accordée réside en l'ajout à la structure initiale d'une masse beaucoup plus petite et libre, dont la période propre s'approche de la période propre de la structure initiale. Pour simplifier les développements, nous supposons que ces deux périodes propres sont exactement égales et donc nous choisissons $\varepsilon = \mu$.

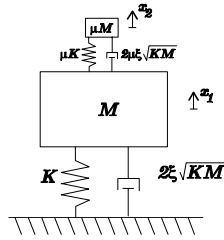


FIG. 9.4 – Représentation schématique d'une structure amortie par un amortisseur par masse accordée

Les matrices structurelles s'expriment donc par :

$$[m] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \mu M \end{bmatrix} ; \quad [c] = 2\xi\sqrt{KM} \begin{bmatrix} 1 + \mu & -\mu \\ -\mu & \mu \end{bmatrix} ; \quad [k] = K \begin{bmatrix} 1 + \mu & -\mu \\ -\mu & \mu \end{bmatrix} \quad (9.59)$$

On peut noter que, dans ces relations, la proportionnalité de l'amortissement apparaît de manière évidente en comparant les expressions des matrices d'amortissement et de raideur. L'effet de l'ajout d'une masse est de dédoubler la pulsation propre de la structure initiale $\sqrt{K/M}$ en deux autres pulsations situées de part et d'autre :

$$\omega_1^2 = \frac{K}{M} + \frac{K}{M} \frac{\mu - \sqrt{4\mu + \mu^2}}{2} \quad (9.60)$$

$$\omega_2^2 = \frac{K}{M} - \frac{K}{M} \frac{\mu - \sqrt{4\mu + \mu^2}}{2} \quad (9.61)$$

⁴Cette condition montre qu'un amortissement proportionnel est pratiquement impossible dans le cadre d'une structure amortie par un amortisseur par masse accordée puisque ε doit être du même ordre de grandeur que μ , le rapport entre la masse accordée et la masse de la structure à amortir.

L'expression générale des modes propres (8.8) est assez lourde et n'est pas reprise ici. Ils permettent de calculer les matrices structurelles modales ; leurs expressions pour de petites valeurs du paramètre μ sont :

$$[m^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.62)$$

$$[k^*] \simeq \frac{K}{M} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{\mu} + \frac{\mu}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{\mu} + \frac{\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (9.63)$$

$$[c^*] \simeq \frac{2\xi\sqrt{KM}}{M} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{\mu} + \frac{\mu}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{\mu} + \frac{\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (9.64)$$

La petite masse (μM) ajoutée à la structure initiale fait office d'amortisseur et n'est généralement pas sollicitée. Nous supposons ici que seule la structure initiale, le système à un degré de liberté, est chargée. Par simplicité, la sollicitation sera à nouveau considérée comme un bruit blanc d'intensité S_1 . La matrice de densité spectrale de la sollicitation s'exprime donc par :

$$[S_f] = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.65)$$

La projection de ces efforts dans la base des modes propres donne les forces généralisées. L'expression exacte de ces forces généralisées est aussi lourde que celle des modes propres, nous ne donnons à nouveau que les développements en série pour de petites valeurs de la variable μ :

$$[S_f^*] = [\Phi]^T [S_f] [\Phi] \simeq \frac{S_1}{2M} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\sqrt{\mu}}{2} & -1 + \frac{\mu}{8} \\ -1 + \frac{\mu}{8} & 1 + \frac{\sqrt{\mu}}{2} \end{bmatrix}$$

dont on peut dès à présent constater que la cohérence est pratiquement unitaire puisque μ est petit. Il s'agit d'une caractéristique générale des structures présentant des amortisseurs par masses accordées.

Etant donné que l'amortissement a été choisi proportionnel, la matrice de transfert est de nouveau diagonale et prend la même forme que celle de l'illustration numérique précédente (Eq. 9.21). Les variances et la covariance des amplitudes modales s'expriment sous une forme assez semblable :

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta_{11}}^2 &\simeq \frac{S_1}{2M} \left(1 - \frac{\sqrt{\mu}}{2}\right) \frac{\pi}{2\xi_1 \varpi_1^3} \\ \sigma_{\eta_1 \eta_2} &\simeq \frac{S_1}{2M} \left(-1 + \frac{\mu}{8}\right) \frac{4\pi (\xi_1 \varpi_1 + \xi_2 \varpi_2)}{\varpi_1^4 + \varpi_2^4 + 4\xi_1 \xi_2 \varpi_1 \varpi_2 (\varpi_1^2 + \varpi_2^2) - 2(1 - 2\xi_1^2 - 2\xi_2^2) \varpi_1^2 \varpi_2^2} \\ \sigma_{\eta_{22}}^2 &\simeq \frac{S_1}{2M} \left(1 + \frac{\sqrt{\mu}}{2}\right) \frac{\pi}{2\xi_2 \varpi_2^3} \end{aligned} \quad (9.66)$$

Bien que le problème étudié soit encore assez simple, la matrice des modes propres ne prend cette fois plus une forme aussi particulière qu'au problème précédent. Ceci se fait également ressentir au niveau de la matrice de covariance des déplacements. Son développement en série pour de petites valeurs du paramètre μ est :

$$[\sigma_x^2] \simeq \frac{1}{2M} \quad (9.67)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\eta_{11}}^2 - 2\sigma_{\eta_1\eta_2} + \sigma_{\eta_{22}}^2 + \frac{\sigma_{\eta_{22}}^2 - \sigma_{\eta_{11}}^2}{2}\sqrt{\mu} + \frac{\sigma_{\eta_1\eta_2}}{4}\mu & \frac{\sigma_{\eta_{11}}^2 - \sigma_{\eta_{22}}^2}{\sqrt{\mu}} - \sigma_{\eta_1\eta_2} + \frac{\sigma_{\eta_{22}}^2 - \sigma_{\eta_{11}}^2}{8}\sqrt{\mu} \\ \frac{\sigma_{\eta_{11}}^2 - \sigma_{\eta_{22}}^2}{\sqrt{\mu}} - \sigma_{\eta_1\eta_2} + \frac{\sigma_{\eta_{22}}^2 - \sigma_{\eta_{11}}^2}{8}\sqrt{\mu} & \frac{\sigma_{\eta_{11}}^2 + 2\sigma_{\eta_1\eta_2} + \sigma_{\eta_{22}}^2}{\mu} - \frac{\sigma_{\eta_{22}}^2 - \sigma_{\eta_{11}}^2}{2\sqrt{\mu}} - \frac{\sigma_{\eta_1\eta_2}}{4} \end{bmatrix}$$

On peut constater cette fois que l'énergie totale n'est plus conservée. En effet, si la covariance entre amplitudes modales était négligée, on trouverait :

$$\sigma_{x_{11}}^2 + \sigma_{x_{22}}^2 = \left(\sigma_{\eta_{11}}^2 + \sigma_{\eta_{22}}^2 \right) \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\sigma_{\eta_{22}}^2 - \sigma_{\eta_{11}}^2}{2} \sqrt{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \quad (9.68)$$

alors qu'en prenant en compte les contributions intermodales, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{x_{11}}^2 + \sigma_{x_{22}}^2 &= \left(\sigma_{\eta_{11}}^2 + \sigma_{\eta_{22}}^2 \right) \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\sigma_{\eta_{22}}^2 - \sigma_{\eta_{11}}^2}{2} \sqrt{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \\ &\quad - 2\sigma_{\eta_1\eta_2} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\sigma_{\eta_1\eta_2}}{4} \mu \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \end{aligned} \quad (9.69)$$

Il pourrait être intéressant d'estimer l'erreur qui serait commise sur le déplacement de la structure si les contributions intermodales étaient négligées. Cette erreur dépend directement du rapport entre la contribution intermodale et la réponse obtenue en négligeant cette contribution. De nouveau, elle peut s'écrire comme le produit de deux facteurs adimensionnels :

$$\frac{-2\sigma_{\eta_1\eta_2} + \frac{\sigma_{\eta_1\eta_2}}{4}\mu}{\sigma_{\eta_{11}}^2 + \sigma_{\eta_{22}}^2 + \frac{\sigma_{\eta_{22}}^2 - \sigma_{\eta_{11}}^2}{2}\sqrt{\mu}} = \underbrace{\frac{(-1 + \frac{\mu}{8})^2 (\xi_2 \varpi_2^3 + \xi_1 \varpi_1^3)}{\left(1 - \frac{\sqrt{\mu}}{2}\right)^2 \xi_2 \varpi_2^3 + \left(1 + \frac{\sqrt{\mu}}{2}\right)^2 \xi_1 \varpi_1^3}}_{\phi_1} \phi_2 \quad (9.70)$$

où le facteur ϕ_2 est identique à celui qui a été obtenu précédemment (Equ. 9.28). En introduisant de nouveau un paramètre adimensionnel d'espacement fréquentiel α , en négligeant les termes $\alpha\xi_1$ et $\alpha\xi_2$ devant l'unité et supposant à nouveau que la masse accordée est faible comparativement à la masse de la structure, on trouve :

$$\phi_1 \simeq \frac{(1 - \frac{\mu}{4})(\xi_2 + \xi_1)}{\left(1 - \frac{\sqrt{\mu}}{2}\right)^2 \xi_2 + \left(1 + \frac{\sqrt{\mu}}{2}\right)^2 \xi_1} = \frac{1}{1 + \frac{\frac{\mu}{2}}{1 - \frac{\mu}{4}} + \frac{\frac{\sqrt{\mu}}{1 - \frac{\mu}{4}} \xi_1 - \xi_2}{\xi_2 + \xi_1}} \quad (9.71)$$

Pour de petites valeurs du paramètre μ , ce rapport tend vers l'unité. Ceci rejoint les constatations préalables sur l'importance de la cohérence entre forces généralisées. Le fait que le paramètre ϕ_1 soit proche de l'unité montre que le système à deux degrés de liberté tel qu'il est sollicité est susceptible de présenter une contribution intermodale significative. La seconde condition nécessaire découle de l'examen du paramètre ϕ_2 . Son expression est identique à celle qui avait été obtenue précédemment. Il est donc d'autant plus élevé que l'espacement réduit α entre les fréquences propres est petit, ce qui est le cas ici (voir Eqs 9.60 et 9.61).

Nous venons donc de démontrer, dans un contexte assez général, que la contribution intermodale ne peut pas être négligée pour le calcul des déplacements d’une structure présentant un amortisseur par masse accordée. Un raisonnement tout à fait similaire permettrait de justifier également la nécessité de prendre en compte cette contribution intermodale pour le calcul de la réponse de la masse accordée. On peut de toute façon se convaincre assez facilement de ceci en observant la forme particulière des éléments diagonaux de la matrice de covariance des déplacements (Eq. 9.67).

9.2.6 Conclusions

Nous venons de mettre clairement en évidence, d’abord sur base d’un raisonnement général, valable pour une structure à plusieurs degrés de liberté et ensuite à l’aide de deux exemples simples, les deux conditions nécessaires pour que les contributions intermodales soient importantes :

- des forces généralisées fortement cohérentes
- des fréquences propres proches ; cette notion de proximité inclut également les caractéristiques d’amortissement (cf. paramètre α)

Pour les structures habituelles du génie civil, ces deux conditions sont rarement remplies simultanément et c’est pour cette raison que les références en la matière ne se préoccupent pas de ce problème. Il arrive cependant de rencontrer des structures exceptionnelles présentant un nombre important de fréquences propres dans une gamme de fréquence étroite, ou des structures amorties à l’aide d’amortisseurs par masse accordée. Dans ces cas, les contributions intermodales ne peuvent pas être oubliées.

9.3 Le couplage aérodynamique

9.3.1 Introduction

Nous venons de présenter quelques réflexions d’ordre assez général concernant les contributions intermodales. Ce type de couplage modal est en réalité le second à prendre place dans une analyse stochastique. En effet, nous savons, puisque cela a été introduit, qu’il existe également un couplage modal provenant des termes de couplage aérodynamique. Nous nous sommes réservé les discussions relatives à ce second type de couplage pour la suite car ce problème est sensiblement plus compliqué à comprendre.

En effet, alors que le couplage intermodal résulte d’un simple changement de variable (statique) :

$$[S_x] = [\Phi] [S_\eta] [\Phi]^T \quad (9.72)$$

le problème du couplage dans l’amortissement intervient à l’étape précédente, celle du calcul d’une réponse dynamique :

$$[S_\eta^*] = [H^*] [S_f^*] [\bar{H}^*]^T \quad (9.73)$$

Une autre distinction entre ces deux différents couplages concerne la position des matrices concernées. La discussion sur le couplage intermodal intéressait les termes diagonaux de la matrice intérieure $[S_\eta]$ alors que la présente discussion concerne les termes diagonaux de la matrice extérieure $[H^*]$.

A l'introduction de ce chapitre, nous avons vu que, si l'amortissement était proportionnel, c'est-à-dire si la matrice $[H^*]$ était diagonale, alors la réponse dans un mode pouvait s'exprimer à l'aide de la sollicitation dans ce mode uniquement :

$$S_{\eta_{ij}}^* = H_{ii}^* \bar{H}_{jj}^* S_{f_{ij}}^* \quad (9.74)$$

Rappelons également que, dans le cas contraire, le calcul des DSP d'amplitudes modales nécessite une double sommation :

$$S_{\eta_{ij}}^* = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M H_{ik}^* S_{f_{kl}}^* \bar{H}_{jl}^* \quad (9.75)$$

que nous avons noté en séparant entre les termes de simple sommation et de double sommation :

$$S_{\eta_{ij}}^* = \sum_{k=1}^M H_{ik}^* S_{f_{kk}}^* \bar{H}_{jk}^* + \sum_{k=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M H_{ik}^* S_{f_{kl}}^* \bar{H}_{jl}^* \quad (9.76)$$

9.3.2 La matrice d'amortissement généralisé

Les développements menés ci-avant montrent que la résolution de l'équation du mouvement en base modale peut être très rapide, à condition que la matrice d'amortissement généralisé $[C^*]$ soit diagonale. Afin de discuter cette propriété, considérons les différentes contributions intervenant dans l'élaboration de la matrice d'amortissement complète d'une structure. Dans le cadre des structures du génie civil, l'amortissement peut provenir essentiellement de trois origines dont les contributions sont additives :

$$[C] = [C_s] + [C_c] + [C_a] \quad (9.77)$$

ou, après projection dans la base des modes propres :

$$[C^*] = [C_s^*] + [C_c^*] + [C_a^*] \quad (9.78)$$

1. $[C_s]$ représente la matrice d'amortissement structurel. Ce type d'amortissement regroupe les dissipations structurelles provenant par exemple des forces de frottement internes au matériau, des frottements dans les assemblages, etc. En regroupant tous ces types d'amortissement ensemble dans un seul terme, on fait donc l'hypothèse d'un amortissement visqueux et additif pour toutes ces composantes structurelles d'amortissement. Cette démarche n'est en réalité rien d'autre qu'une simplification mathématique ; en effet, il est bien connu que certains frottements sont mieux représentés à l'aide d'autres lois de comportement (comme la loi de Coulomb, par exemple) plus compliquées à traiter mathématiquement. Des équivalences en énergies dissipées permettent d'établir des correspondances entre la loi d'amortissement visqueux et d'autres lois d'amortissements plus réalistes.

Les simplifications concernant l'amortissement structurel ne s'arrêtent pas là ; étant donné le peu d'information dont on dispose généralement sur les niveaux d'amortissement, et étant donné la simplification au niveau de la loi de comportement, les solutions les plus fréquemment retenues proposent que :

- la matrice d'amortissement structurel soit écrite comme une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur⁵ :

$$[C_s] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (9.79)$$

étant donné que les matrices des masses et des raideurs généralisées sont diagonales, il est en également de même de l'amortissement structurel. Il est donc proportionnel. Pour plus de renseignements sur le choix des paramètres α et β , voir [16] ;

- étant donné que l'objectif visé consiste à obtenir une matrice d'amortissement généralisé diagonale, on peut également choisir directement la forme de la matrice d'amortissement généralisé :

$$C_{s_{ij}}^* = 2\xi_i \sqrt{K_{ii}^* M_{ii}^*} \delta_{ij} \quad (9.80)$$

Cette formulation offre une plus grande liberté à l'utilisateur puisqu'il dispose maintenant d'autant de paramètres (ξ_i) que de modes propres pour représenter l'amortissement structurel. Dans de nombreuses applications, l'amortissement structurel est le seul amortissement présent et la matrice de transfert modale est donc excessivement simple à estimer :

$$H_{mm}^*(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 M_{mm}^* + i\omega C_{s_{mm}}^* + K_{mm}^*} = \frac{1}{K_{mm}^*} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 + 2i\xi_{sm} \frac{\omega}{\omega_m}} \quad (9.81)$$

2. $[C_c]$ représente la matrice d'amortissement concentré. Ce type d'amortissement provient des dash-pots éventuellement présents dans le modèle numérique de la structure étudiée. Dans le domaine du génie civil, les cas d'application les plus fréquents sont ceux d'amortisseurs passifs (utilisés notamment pour amortir des mouvements stationnaires) placés par exemple dans les contreventements de buildings multi étages, ceux de structures isolées en base, c'est-à-dire reposant sur des appuis viscoélastiques permettant de limiter la quantité d'énergie provenant du sol et transmise à la structure. On peut également trouver des dash-pots en cas d'amortisseurs par masses accordées, ou également lorsque l'interaction d'une structure avec le sol doit être prise en compte. Pour de tels modèles, l'interaction est modélisée à l'aide d'amortisseurs (visqueux pour plus de facilité) à l'interface entre la fondation et le sol.

Chaque dash-pot du modèle numérique est traité comme un élément habituel. A partir d'un champ de déplacement supposé, une matrice d'amortissement élémentaire peut être calculée. La matrice d'amortissement concentré $[C_c]$ s'obtient alors en assemblant (après rotation et localisation) les matrices d'amortissement élémentaires. Après projection dans la base des modes propres, on obtient la matrice d'amortissement concentré généralisé :

$$[C_c^*] = [\Phi]^T [C_c] [\Phi] \quad (9.82)$$

il n'y a bien sûr aucune raison que cette nouvelle matrice soit diagonale. Sauf exception, dès que des amortisseurs sont présents dans la structure, l'amortissement ne peut donc plus être considéré comme proportionnel.

3. Aux chapitres précédents, nous avons vu que le modèle de chargement aérodynamique d'une structure engendrait un amortissement supplémentaire, provenant du fait que la

⁵ou éventuellement d'autres matrices bien choisies et qui permettent de conserver dans la suite le caractère proportionnel de l'amortissement.

sollicitation s'exprime en réalité à partir de la vitesse relative du vent par rapport à la structure et non pas à partir de la vitesse absolue du vent. Pour un oscillateur simple, l'amortissement aérodynamique est mis en évidence en écrivant :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{1}{2}\rho C_d A (\bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{x}) \quad (9.83)$$

et en ramenant le terme $2\bar{U}\dot{x}$ au membre de gauche, soit $c_a = \rho C_d A \bar{U}$. Pour une structure à plusieurs degrés de liberté, un raisonnement identique peut être mené indépendamment pour chacun des degrés de liberté. On obtient alors une matrice d'amortissement aérodynamique (diagonale dans la base structurelle) dont chacun des éléments dépend des quantités locales correspondantes :

$$D_{a_{ii}} = \rho C_{d_i} A_i \bar{U}_i \quad (9.84)$$

Tout comme pour l'amortissement concentré, cette matrice peut être projetée dans la base des modes propres pour obtenir la matrice d'amortissement aérodynamique généralisé. Dans la majorité des applications numériques, il n'y a pas de raison que cette nouvelle matrice soit diagonale ; ce type d'amortissement est donc également non proportionnel⁶.

Bien que les matrices d'amortissement généralisé ne soient pas diagonales, il est important de remarquer qu'elles sont toujours définies positives, c'est-à-dire que les termes diagonaux sont plus importants que les termes non diagonaux. L'inégalité suivante est donc toujours respectée, quelque soit le couple (j, k) considéré :

$$-1 \leq \frac{C_{jk}^*}{\sqrt{C_{jj}^* C_{kk}^*}} \leq 1 \quad (9.85)$$

Pour faciliter les discussions suivantes, nous pourrions définir le niveau de couplage par :

$$r = \max_{j,k} \frac{|C_{jk}^*|}{\sqrt{C_{jj}^* C_{kk}^*}} \quad (9.86)$$

Bien que ce rapport maximal ne suffise a priori pas nécessairement pour représenter l'entière des effets des termes non diagonaux, on peut cependant imaginer qu'il peut donner une idée significative des modifications apportées par ces termes non diagonaux. Un niveau de couplage égal à zéro signifie que l'amortissement est proportionnel ; la résolution est donc menée selon la démarche habituelle. A l'autre extrême, le niveau de couplage maximum correspondant à $r = 1$ doit nécessairement inclure les effets des termes non diagonaux pour donner des résultats représentatifs.

Dans le domaine du génie civil, les niveaux de couplage rencontrés sont assez faibles. La matrice d'amortissement généralisé présente donc une forme "quasi-diagonale", c'est-à-dire que les termes principaux restent toujours les termes diagonaux. La figure 9.5 donne une représentation schématique d'une telle matrice.

⁶Dans le cadre de l'étude des réponses de passerelles soumises à des passages de piétons, on a récemment introduit un amortissement provenant de la sollicitation imposée par le piéton. Ce type d'amortissement est tout à fait similaire à l'amortissement aérodynamique.

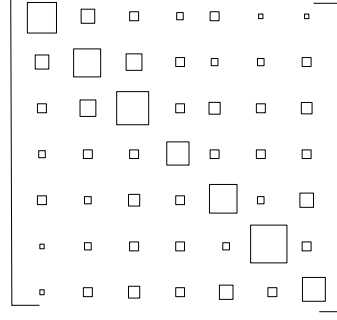


FIG. 9.5 – Illustration d'une matrice d'amortissement généralisée (incluant tous les effets d'amortissement) - La taille des carrés représente l'importance en valeur absolue des éléments de cette matrice

9.3.3 Prise en compte de l'amortissement non proportionnel

Plusieurs solutions sont généralement proposées pour prendre en compte l'amortissement non proportionnel. Le choix de l'une ou l'autre méthode doit dépendre de la forme de la matrice d'amortissement généralisée, et essentiellement de l'importance des termes non diagonaux mais aussi de la précision requise et de la taille du problème étudié. Nous présentons brièvement ci-dessous trois solutions qui sont généralement proposées, puis, plus en détails, une quatrième alternative de composition plus originale.

Inversion de la matrice pleine

La première manière de prendre en compte l'amortissement non proportionnel est assez évidente. Elle consiste à calculer, comme cela a été présenté dans la démarche rigoureuse, la matrice des densités spectrales des amplitudes modales par :

$$[S_\eta^*] = [H^*] [S_f^*] [\bar{H}^*]^T \quad (9.87)$$

où la matrice de transfert modale $[H^*]$ est obtenue, pour chacune des fréquences de calcul, par l'inversion d'une matrice pleine :

$$[H^*] = (-[M^*]\omega^2 + i\omega[C^*] + [K^*])^{-1} \quad (9.88)$$

Ceci ne constitue donc en réalité rien d'autre que l'approche habituelle d'une analyse stochastique linéaire. Etant donné sa simplicité d'interprétation et généralement aussi d'adaptation à un code de calcul existant, il s'agit certainement de la méthode la plus appropriée lorsque la précision requise est stricte et que le nombre de modes propres est restreint ($M \leq 30$). Etant donné que l'opération d'inversion d'une matrice pleine doit être répétée un grand nombre de fois (pour chaque fréquence de calcul), d'autres méthodes conviennent certainement mieux lorsque le nombre de modes est important.

Conservation des termes diagonaux uniquement

Dans de nombreuses applications du génie civil, le niveau de couplage est généralement assez faible. Cela est par exemple le cas lorsque les amortissements non proportionnels

sont plus ou moins du même ordre de grandeur, voire inférieurs, à l'amortissement structural. Aussi, dans de nombreuses situations, l'amortissement aérodynamique est sensiblement distribué comme la masse, c'est-à-dire que la matrice de masse est essentiellement diagonale et que les valeurs relatives prises par ses éléments s'approchent des valeurs respectives dans la matrice d'amortissement aérodynamique. Dans ce cas, l'amortissement aérodynamique présente un faible niveau de couplage.

Dans ces conditions, la solution de l'ingénieur consiste à négliger purement et simplement les termes non diagonaux. De la matrice d'amortissement aérodynamique généralisée, seuls les termes diagonaux sont donc calculés et les amortissements non proportionnels entrant en jeu sont donc remplacés par des amortissements proportionnels. Au terme de ces approximations, l'ingénieur est content : les équations modales sont découplées ; la réponse dans un mode ne dépend plus que de la sollicitation dans ce mode.

Bien sûr, cette procédure est une méthode approchée et ne doit être appliquée que lorsque le niveau de couplage est suffisamment faible. A titre d'ordre de grandeur, il serait prudent de ne plus utiliser cette méthode à partir de $r = 0.1$.

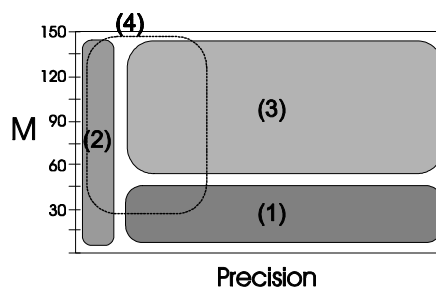


FIG. 9.6 – Domaines d'application des différentes méthodes : (1) Inversion de la matrice complète ; (2) Négliger les termes non diagonaux ; (3) Calcul et utilisation des modes propres complexes ; (4) Méthode originale basée sur un développement en série de Taylor

Utilisation des modes propres complexes

Dans d'autres applications, il est vraiment impératif de travailler avec des équations découplées. Dans ce cas, on recourt à la solution du mathématicien qui préconise l'utilisation des modes propres complexes, dits également modes propres amortis car ils intègrent les caractéristiques d'amortissement de la structure. Contrairement aux modes propres classiques (ou non amortis) qui sont estimés à partir des matrices de masse et de raideur uniquement (Eq. 8.4), les modes propres amortis se calculent par :

$$[k] \{\phi_m\} - \varpi_m^2 [m] \{\phi_m\} = i\varpi_m [c] \{\phi_m\} \quad (9.89)$$

Cette définition mène à des modes propres et des fréquences propres complexes. Ces grandeurs sont certainement plus difficiles à utiliser dans des applications pratiques, ne serait-ce que pour leur donner une interprétation physique. Au lieu de projeter les équations du mouvement dans la base modale classique, ces équations sont plutôt projetées dans la nouvelle base complexe dans laquelle les équations sont alors découplées.

La suite du déroulement se passe alors comme si l'amortissement était proportionnel dans une étude habituelle. Cette démarche est tout à fait rigoureuse et donne donc les

mêmes résultats qu'en utilisant les modes propres classiques et en recourant à l'inversion de matrices pleines. Elle peut donc être utilisée lorsque le niveau de couplage est important et que la réponse doit être estimée précisément. Dans le domaine du génie civil, cette méthode peut par exemple être appliquée à l'analyse de structures où l'interaction sol-structure doit être prise en compte.

Comme la démarche habituelle nécessitant, ici, l'inversion de matrices pleines est plus systématique à appliquer, le recours aux modes propres complexes ne devrait être envisagé que lorsque le nombre de modes propres à retenir dans l'analyse est important.

Lorsque la non proportionnalité de l'amortissement provient de l'amortissement aérodynamique, l'amortissement généralisé dépend des caractéristiques de vent. Il en va donc de même des modes propres complexes. Cela signifie donc également que les modes propres complexes devront être recalculés pour chaque vitesse de vent moyen par exemple, même si la structure étudiée reste inchangée. Ce désavantage fait généralement porter le choix des analystes vers l'une des deux premières méthodes. Plus généralement, c'est même vers la méthode proposant de négliger complètement les termes non diagonaux que l'on se dirige habituellement.

Méthode approchée basée sur un développement en série de la matrice

Lorsque le nombre de modes propres à conserver est important, la mise en oeuvre de la démarche habituelle (qui recourt à l'inversion d'un nombre assez important de matrices pleines) requiert un effort de calcul considérable pour l'estimation des fonctions de transfert. Il pourrait être intéressant de remarquer que, dans de nombreuses applications du génie civil, le calcul rigoureux de cette fonction de transfert consiste en l'inversion d'une matrice dont les éléments diagonaux sont souvent beaucoup plus importants que les termes non diagonaux.

Cette information importante devrait être prise en compte pour mettre au point une méthode d'inversion, certes approchée mais qui serait beaucoup plus rapide que l'inversion d'une matrice pleine. La méthode que nous proposons peut être vue comme un compromis entre la méthode rigoureuse assez lourde en temps de calcul d'une part et la méthode parfois trop imprécise consistant à négliger les termes non diagonaux d'autre part. La figure 9.6 illustre les domaines d'application des trois méthodes rencontrées habituellement ainsi que cette nouvelle méthode basée sur un développement en série de Taylor.

Pour simplifier les notations, introduisons la matrice d'impédance modale dont l'inverse correspond à la matrice de transfert en base modale :

$$[G] = -\omega^2 [m^*] + i\omega [c^*] + [k^*] \quad (9.90)$$

Cette matrice est composée de termes diagonaux importants si le niveau de couplage r est faible. Elle peut être réécrite en séparant les éléments diagonaux des éléments non diagonaux :

$$[G] = [G_d] + [G_o] \quad (9.91)$$

où $[G_d]$ est la matrice d'impédance modale que l'on obtiendrait si les termes non diagonaux de l'amortissement généralisé étaient purement et simplement négligés et $[G_o]$ regroupe le complément d'impédance à ajouter pour prendre en compte le couplage dans l'amortissement.

La matrice $[G_d]$ est une matrice inversible et son inverse correspond bien sûr à la fonction de transfert modale obtenue en négligeant le couplage dans l'amortissement. On peut donc écrire :

$$[G] = [G_d] \left([I] + [G_d]^{-1} [G_o] \right) \quad (9.92)$$

soit encore :

$$[H^*] = [G]^{-1} = \left([I] + [G_d]^{-1} [G_o] \right)^{-1} [G_d]^{-1} \quad (9.93)$$

La fonction de transfert exacte $[H^*]$, incluant le couplage provenant de l'amortissement, est désormais bien plus ardue à estimer puisqu'elle ne résulte plus de la simple inversion d'une matrice diagonale ($[H_d^*] = [G_d]^{-1}$) comme dans le cas d'un système modal découplé mais nécessite cette fois l'inversion d'une matrice a priori pleine $\left([I] + [G_d]^{-1} [G_o] \right)^{-1}$.

Pour autant que les termes de la matrice $[G_d]^{-1} [G_o]$ soit petit vis-à-vis de l'unité, l'inverse de cette matrice peut être obtenue par un développement en série de Taylor autour de l'inverse de la matrice identité. En effet, de la même manière que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (9.94)$$

on peut également obtenir, dans une formulation matricielle⁷ :

$$\left([I] + [G_d]^{-1} [G_o] \right)^{-1} = [I] - [G_d]^{-1} [G_o] + [G_d]^{-1} [G_o] [G_d]^{-1} [G_o] - \dots \quad (9.95)$$

La fonction de transfert en base modale s'exprime donc par :

$$\begin{aligned} [H^*] &= \left([I] - [G_d]^{-1} [G_o] + [G_d]^{-1} [G_o] [G_d]^{-1} [G_o] - \dots \right) [G_d]^{-1} \\ &= [G_d]^{-1} - [G_d]^{-1} [G_o] [G_d]^{-1} + [G_d]^{-1} [G_o] [G_d]^{-1} [G_o] [G_d]^{-1} - \dots \\ &= [H_d^*] + \sum_i [\Delta H_i^*] \end{aligned} \quad (9.96)$$

où $[\Delta H_i^*] = (-1)^i [H_d] ([G_o] [H_d])^i$. L'inverse de la matrice de transfert complète peut donc s'obtenir en corrigeant la matrice de transfert du problème rendu diagonal par une série de corrections de plus en plus petites. Le point important de la méthode réside dans le fait que ces corrections successives ne font intervenir comme inverse de matrice, que l'inverse d'une matrice diagonale.

Si l'on ne conserve aucun terme correctif, la méthode qui vient d'être présentée revient à négliger les termes non diagonaux, méthode habituellement utilisée dans le cas des structures du génie civil soumises au vent turbulent. A l'autre extrême, conserver un

⁷ Soit $[Y] = [I] + [X]$, on peut calculer :

$$[I] - [Y]^{-1} = ([I] [Y] - [I]) [Y]^{-1} = ([I] ([I] + [X]) - [I]) [Y]^{-1} = [X] [Y]^{-1}$$

ce qui revient donc à dire que $[Y]^{-1} = [I] - [X] [Y]^{-1}$. On peut alors utiliser cette relation de manière récurrente pour obtenir successivement :

$$\begin{aligned} [Y]^{-1} &= [I] - [X] ([I] - [X] [Y]^{-1}) = [I] - [X] + [X] [X] [Y]^{-1} \\ [Y]^{-1} &= [I] - [X] + [X] [X] ([I] - [X] [Y]^{-1}) = [I] - [X] + [X] [X] - [X] [X] [X] [Y]^{-1} \\ &\dots \end{aligned}$$

nombre infini de termes revient à calcul la réponse exacte prenant en compte de manière rigoureuse les effets de couplage aérodynamique. Comme annoncé, la nouvelle méthode peut donc être vue comme une solution intermédiaire entre ces deux extrêmes.

Le nombre de termes à conserver dans le développement en série pour obtenir une approximation honnête de la matrice de transfert exacte dépend du niveau de couplage. Bien que ne nécessitant plus aucune inversion de matrice, on imagine cependant aisément que cette méthode ne devrait pas être appliquée si elle requiert trop de corrections. Elle trouve en réalité son plus grand intérêt lorsqu'un seul terme correctif suffit à donner une bonne approximation de la matrice de transfert exacte, soit pour des niveaux de couplage faibles. Des ordres de grandeurs de limites d'application seront donnés dans la suite.

Pour pouvoir appliquer cette technique d'inversion d'une matrice quasi-diagonale, la matrice d'impédance modale $[G]$ a dû être décomposée en deux contributions $[G] = [G_d] + [G_o]$. En réalité, les développements que nous avons menés sont valables quelle que soit la répartition de $[G]$ entre $[G_d]$ et $[G_o]$, pour autant que $[G_d]$ soit non singulière. On comprend cependant aisément que les meilleurs résultats seront certainement obtenus en choisissant les éléments de $[G_d]$ aussi grands que possible, c'est-à-dire en prenant les éléments diagonaux de $[G_0]$ égaux à 0 comme cela a été fait. Une démonstration rigoureuse de cette propriété peut être établie; elle rejoint le fait que la série géométrique converge d'autant plus vite que x est petit (Eq. 9.94).

On peut également mentionner à ce stade que les approximations réalisées dans ce chapitre concernent les éléments de la matrice d'amortissement généralisé. Quant aux caractéristiques d'inertie et de raideur, elles sont toujours bien estimées puisque les matrices généralisées correspondantes sont diagonales. Cela signifie également que les réponses aux basses fréquences, dans la gamme quasi-statique, et aux hautes fréquences dans la gamme inertielle seront toujours bien représentées. Par rapport à la solution exacte, l'approximation basée sur le développement en série de Taylor ne doit donc juste différer que dans le voisinage des pics de résonance. Lorsque le système étudié est sollicité en basses fréquences comme dans le domaine que nous étudions, on peut donc s'attendre à ce que cette méthode approchée donne les moins bons résultats pour une structure peu amortie (de sorte que la contribution dynamique soit non négligeable) et évidemment aussi lorsque le niveau de couplage est important.

Maintenant que nous venons de mettre au point une méthode adaptée au calcul des matrices de transfert, la procédure peut alors continuer comme si la matrice avait été inversée normalement. La matrice des densités spectrales des amplitudes modales peut donc être estimée :

$$[S_\eta^*] = [H^*] [S_f^*] [\bar{H}^*]^T \quad (9.97)$$

et puis les calculs des déplacements, efforts, contraintes et réactions peuvent alors suivre comme dans la méthodologie habituelle. Si l'on ne conserve qu'une seule correction dans la fonction de transfert, on obtient :

$$\begin{aligned} [S_\eta^*] &= ([H_d^*] + [\Delta H_1^*]) [S_f^*] ([\bar{H}_d^*] + [\Delta \bar{H}_1^*])^T \\ &= [H_d^*] [S_f^*] [\bar{H}_d^*]^T + \underbrace{[H_d^*] [S_f^*] [\Delta \bar{H}_1^*]^T + [\Delta H_1^*] [S_f^*] [\bar{H}_d^*]^T}_{[\Delta S_{\eta_1}^*]} \\ &\quad + \underbrace{[\Delta H_1^*] [S_f^*] [\Delta \bar{H}_1^*]^T}_{[\Delta S_{\eta_2}^*]} \end{aligned} \quad (9.98)$$

Ceci montre donc que la matrice de densité spectrale des amplitudes modales peut être obtenue en corrigeant, par des termes d'ordres 1 et 2, la matrice de densité spectrale qui serait obtenue avec une matrice de transfert diagonale.

9.3.4 Exemple

Bien que la méthode trouve son intérêt principal lorsque le nombre de modes propres à prendre en compte est important, une application sur un petit système à deux degrés de liberté devrait pouvoir permettre de mieux comprendre sa mise en oeuvre. On peut trouver dans la référence [25] des exemples d'application où la méthode présentée ici fonctionne assez bien.

Nous avons préféré présenter dans cet ouvrage une limitation assez importante de la méthode. L'exemple concerne une structure à deux degrés de liberté dont l'un représente un oscillateur simple (non amorti) et l'autre une masse accordée destinée à amortir les vibrations de la structure de base. Les équations du mouvement sont donc identiques à celles du paragraphe précédent, exception faite que cette fois, la structure de base est non amortie et donc que le seul amortissement provient du mouvement relatif de la masse ajoutée par rapport à la structure :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \mu M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + 2\mu\xi\sqrt{KM} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K(1+\mu) & -\mu K \\ -\mu K & K\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad (9.99)$$

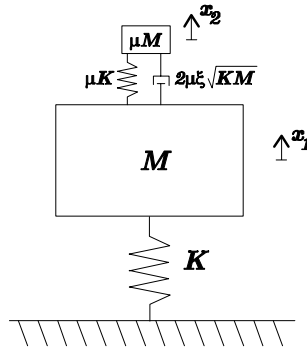


FIG. 9.7 – Exemple 1 : analyse d'un oscillateur simple amorti par un amortisseur par masse accordée

A nouveau, nous nous contentons de n'étudier que le cas où la fréquence naturelle de la masse accordée a été ajustée sur la fréquence propre de la structure. L'effet de l'amortisseur est donc de remplacer la pulsation propre de la structure $\varpi = \sqrt{\frac{K}{M}}$ par deux autres pulsations situées de part et d'autre : $\omega_1 = \frac{K}{M} \left(1 + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\mu + \mu^2}\right) < \varpi$ et $\omega_2 = \frac{K}{M} \left(1 + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\mu + \mu^2}\right) > \varpi$. Par souci de simplicité, nous n'utiliserons pas cette fois les modes propres normés par rapport à la masse. Ceci nous permet de mener à bien

les calculs sans devoir supposer que le paramètre μ est petit. :

$$\Phi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mu + \sqrt{4\mu + \mu^2} & -\mu - \sqrt{4\mu + \mu^2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (9.100)$$

Cette expression de la matrice des modes propres permet de calculer les matrices structurelles généralisées. On peut constater, après calcul, que la matrice d'amortissement généralisé est caractérisée par un niveau de couplage $r = 1$. Ceci signifie donc que les termes non diagonaux sont les plus importants qu'ils peuvent !

Tout comme précédemment, le système à deux degrés de liberté est supposé être chargé par un bruit blanc d'intensité unitaire au premier degré de liberté :

$$[S_F(\omega)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \forall \omega \quad (9.101)$$

Afin de simplifier au maximum les développements analytiques et de ne pas nous disperser dans l'étude réalisée, nous avons choisi d'imposer $M = 1$ et $K = 1$. Ceci nous permet de nous concentrer sur l'étude de l'oscillateur amorti en fonction des caractéristiques de la masse ajoutée uniquement : μ le pourcentage de masse ajoutée et ξ le taux d'amortissement associé à cette masse ajoutée.

La première étape de l'analyse en base modale consiste à calculer la matrice de transfert généralisée. Les expressions 9.96 et 9.88 permettent d'obtenir différents résultats, selon la méthode utilisée. La figure 9.8 représente les éléments de la matrice de transfert pour ces différentes méthodes. Nous avons repris sur cette figure les résultats de la méthode exacte (inversion d'une matrice complète, qui est assez rapide dans ce cas d'application assez simple), de la méthode simplifiée (généralement appliquée dans le domaine du génie civil) qui consiste à négliger les termes non diagonaux, et de la méthode basée sur le développement en série de Taylor de l'inverse de la matrice. Pour cette dernière méthode, nous avons représenté la matrice de transfert obtenue en ajoutant une ou deux corrections.

Les deux premiers graphiques de cette figure représentent les éléments diagonaux de la matrice de transfert, c'est-à-dire les fonctions de transfert associées à chaque mode. On peut constater que l'effet des termes non diagonaux de l'amortissement généralisé est très faible. On pourrait éventuellement considérer que les fonctions de transfert obtenues en négligeant cet effet de couplage permettent d'obtenir une représentation suffisamment précise. On peut également constater que la première des corrections que nous conseillons d'ajouter ne modifie pas la fonction de transfert obtenue⁸. Si l'on désire avoir une représentation plus précise des fonctions de transfert, le second terme correctif peut être ajouté. Les deux premiers graphiques de la figure 9.8 montrent que la représentation obtenue est alors très bonne.

Le troisième graphique de cette figure représente le terme non diagonal de la fonction de transfert. Si l'amortissement avait été proportionnel, ce terme aurait été strictement nul. La méthode consistant à négliger les termes non diagonaux (courbes marquées par des "x") donne donc une expression strictement nulle de ce terme de couplage entre amplitudes modales. Le second effet de l'amortissement non proportionnel consiste en l'existence de ce terme non diagonal non nul dans la matrice de transfert généralisée. On

⁸ on peut démontrer facilement que ceci est valable quel que soit le type de chargement et tant que le système étudié comporte deux degrés de liberté.

peut constater que la première correction que nous proposons d'ajouter permet déjà de représenter l'allure globale de ce terme de couplage. On peut démontrer assez facilement que la seconde correction n'apporte aucune modification dans le cadre de l'étude d'un système à deux degrés de liberté. Une troisième correction aurait par contre permis d'approcher de beaucoup plus près la fonction de transfert croisée exacte. L'objectif de la méthode que nous proposons n'est cependant pas d'obtenir une représentation précise mais bien une réponse facile à calculer. Nous ne recommandons donc certainement pas le calcul du troisième ordre de correction.

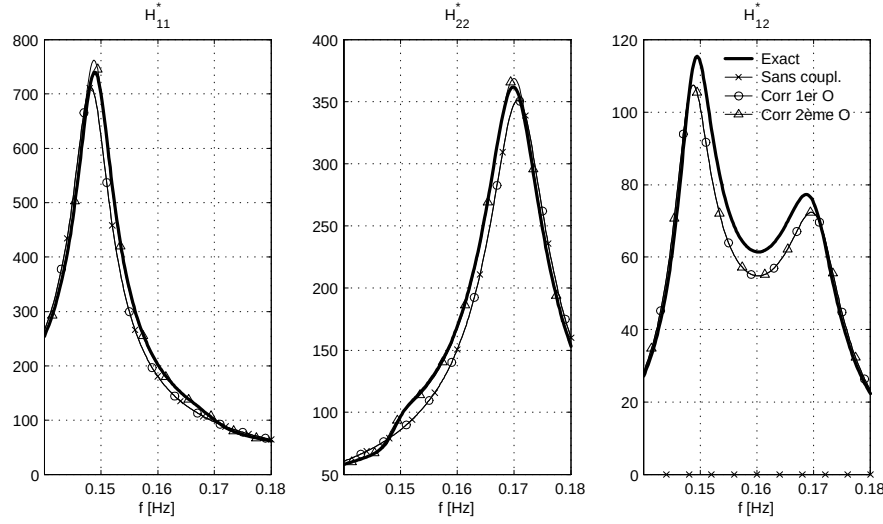


FIG. 9.8 – Représentation de la matrice de transfert généralisée obtenue selon différentes méthodes ($\mu = 0.02$; $\xi = 0.05$)

L'examen de la figure 9.8 montre que les deux effets des termes non proportionnels de chargement, à savoir les effets sur les éléments diagonaux de la matrice de transfert généralisée d'une part et sur les éléments non diagonaux d'autre part, sont d'un ordre de grandeur différent. Nous profitons de cette réflexion pour annoncer que la méthode développée semble présenter une efficacité maximale lorsqu'un seul terme correctif est conservé. Dans ce cas, les éléments diagonaux ne sont pas mieux approchés que lorsque la non proportionnalité de l'amortissement n'est pas prise en compte mais nous savons que, de toute façon, ce résultat est déjà assez bon. Par contre, l'utilisation d'un seul terme correctif permet déjà d'obtenir une allure intéressante du terme non diagonal de la fonction de transfert. L'approche que nous pouvons donner de ce terme croisé est de toute façon bien meilleure que ce que donne l'analyse qui supprime purement et simplement le couplage aérodynamique.

Lorsque la matrice de transfert est établie, la démarche habituelle consiste à calculer la matrice des densités spectrales des amplitudes modales :

$$[S_\eta^*] = [H^*] [S_F^*] [\bar{H}^*] = [H^*] [\Phi]^T [S_F] [\Phi] [\bar{H}^*] \quad (9.102)$$

La figure 9.9 représente les éléments de cette matrice. L'effet du couplage apparaît de façon assez évidente. En effet, là où l'on s'attendrait à trouver une fonction présentant

un seul pic au droit de la fréquence propre du mode étudié (courbe marquée de croix, approche négligeant le couplage), on obtient une courbe sensiblement différente présentant également un pic dans le voisinage de l'autre fréquence propre.

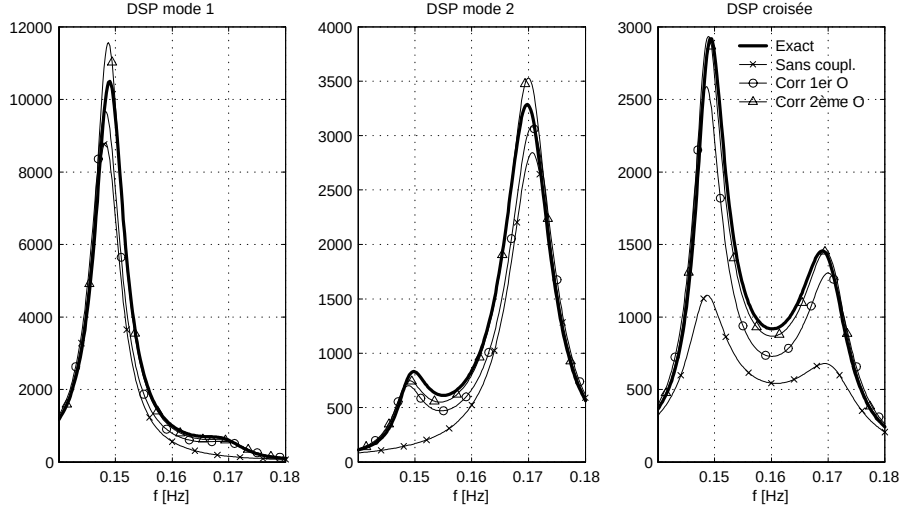


FIG. 9.9 – Représentation des densités spectrales d'amplitudes modales ($\mu = 0.02$; $\xi = 0.05$)

Plutôt que d'étudier la réponse structurale à partir de la matrice des densités spectrales des amplitudes modales, nous avons préféré, pour la clarté des développements, utiliser la matrice de transfert structurale :

$$[H] = [\Phi] [H^*] [\Phi]^T \quad (9.103)$$

Les éléments de cette matrice sont représentés à la figure 9.10. L'interprétation physique que l'on peut avoir de ces éléments est assez habituelle. Par exemple, le premier élément représente l'amplitude du déplacement au premier degré de liberté lorsque la structure est sollicitée par un chargement harmonique d'intensité unitaire appliqué en ce point. Etant donné que la notion de mode propre a été utilisée pour obtenir ces graphiques, il devient assez difficile de justifier de façon tout à fait générale le comportement des courbes obtenues. A nouveau, il nous semble qu'un seul terme correctif permette de représenter relativement bien les fonctions de transfert exactes. En ce qui concerne le terme croisé représentant l'amplitude du déplacement au premier noeud lorsque le second noeud est chargé ou inversement, on peut constater que l'ajout d'un terme correctif ne permet pas d'améliorer l'estimation obtenue. En effet, la forme assez particulière du problème étudié est telle que la matrice des modes propres s'écrit :

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.104)$$

où x est sensiblement égal à $-y$. Dans ce cas, on peut assez facilement se rendre compte que le terme de couplage dans la fonction de transfert structurale provient essentiellement des éléments diagonaux de la fonction de transfert généralisée. Or nous

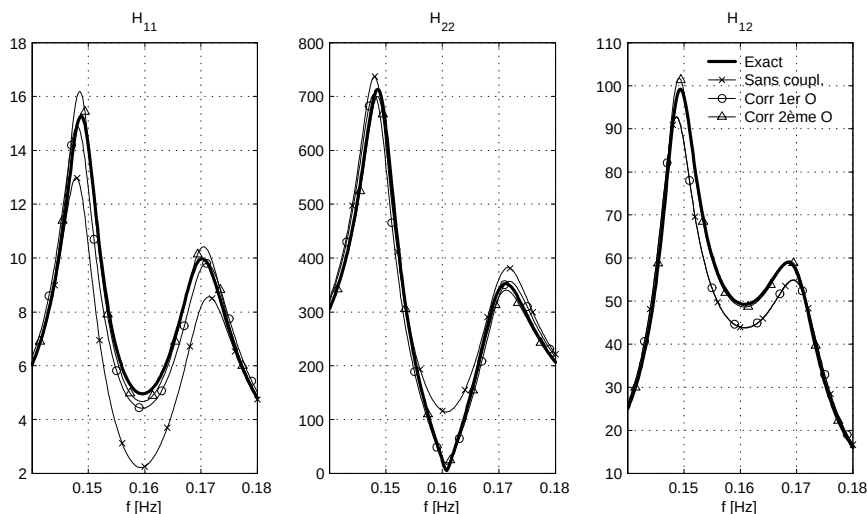


FIG. 9.10 – Représentation de la matrice de transfert structurale obtenue selon différentes méthodes ($\mu = 0.02$; $\xi = 0.05$)

avons vu que, pour ces termes, l'ajout de la première correction ne permettait pas nécessairement d'améliorer la qualité du résultat obtenu. Ceci explique donc pourquoi le terme de couplage entre les deux degrés de liberté n'est pas spécialement mieux interprété en ajoutant une seule correction.

Etant donné que le chargement de cette structure est assez particulier, la forme de densités spectrales des déplacements aux noeuds de la structure s'obtient assez facilement à partir des fonctions de transfert structurales :

$$[S_x] = [H] [S_F] [\bar{H}] = \begin{bmatrix} \frac{|H_{11}|^2}{H_{11}^* H_{12}} & H_{11} \bar{H}_{12} \\ \frac{H_{12}^* H_{11}}{|H_{12}|^2} & |H_{12}|^2 \end{bmatrix} \quad (9.105)$$

Les deux premiers graphiques de la figure 9.11 s'obtiennent donc en élevant respectivement au carré le premier et le troisième graphique de la figure 9.10. Les commentaires qui ont été donnés à l'occasion de la matrice de transfert structurale sont donc à nouveau valables. On peut ajouter qu'il paraît assez logique, au vu de la relation 9.105 que le troisième graphique présente un comportement intermédiaire.

Les densités spectrales des déplacements ont été tracées à partir de leurs expressions analytiques pour chacune des méthodes. A titre indicatif, le tableau 9.1 reprend les expressions des densités spectrales du déplacement au premier degré de liberté (la structure qui a été amortie) pour les différentes méthodes mises en oeuvre. On peut à nouveau constater que l'utilisation de l'une ou l'autre méthode ne diffère qu'en la manifestation de l'amortissement (c'est-à-dire les termes en $\frac{\omega^2}{\omega_2^2}$). L'application de l'une ou l'autre méthode ne doit donc modifier la forme des fonctions de transfert obtenues que dans le voisinage des pics de résonance.

Pour l'application que nous venons d'étudier ($\mu = 0.02$ et $\xi = 0.05$), les variances du déplacement de la structure et du déplacement de la masse accordée ont été calculées. Elles sont reprises au tableau 9.2.

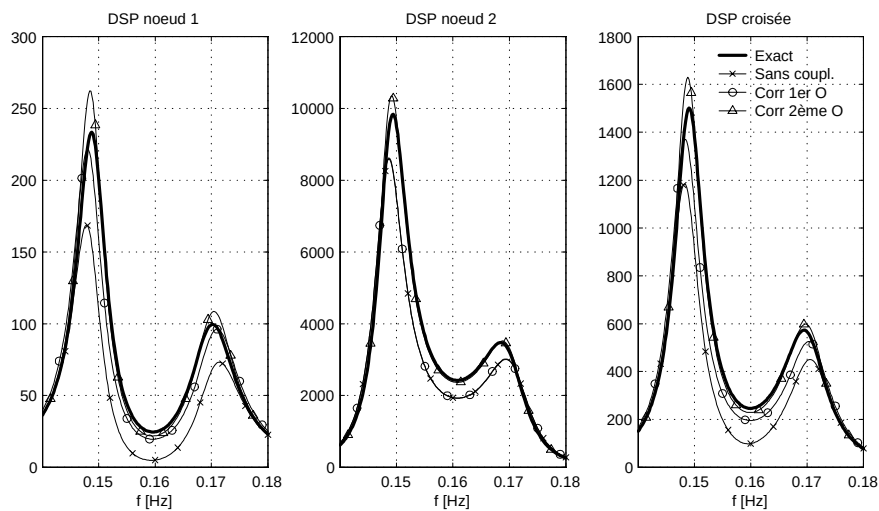


FIG. 9.11 – Représentation de la matrice des densités spectrales des déplacements obtenue selon différentes méthodes ($\mu = 0.02$; $\xi = 0.05$)

Exacte	$\frac{1}{K^2} \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega^2}}{\left(1 - (2+\mu) \frac{\omega^2}{\omega^2} + \frac{\omega^4}{\omega^4}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega^2} \left(1 - (1+\mu) \frac{\omega^2}{\omega^2}\right)^2}$
Sans couplage	$\frac{1}{K^2} \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\left(\frac{2+\mu}{4+\mu}\right)^2 \xi^2 \frac{\omega^2}{\omega^2}}{\left(1 - \left(2+\mu + \frac{4\xi^2}{4+\mu}\right) \frac{\omega^2}{\omega^2} + \frac{\omega^4}{\omega^4}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega^2} \left(1 - (1+\mu) \frac{\omega^2}{\omega^2}\right)}$
Correction 1 ^{er} ordre	$\frac{1}{K^2} \frac{\left(\frac{4\xi}{4+\mu} \frac{\omega}{\omega} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2}\right)\right)^2 + 4\left(\frac{2+\mu}{4+\mu}\right)^2 \xi^2 \frac{\omega^2}{\omega^2}}{\left(1 - \left(2+\mu + \frac{4\xi^2}{4+\mu}\right) \frac{\omega^2}{\omega^2} + \frac{\omega^4}{\omega^4}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega^2} \left(1 - (1+\mu) \frac{\omega^2}{\omega^2}\right)^2}$

TAB. 9.1 – Densité spectrale du déplacement de l'oscillateur amorti

	$\sigma_{x_{11}}^2$		$\sigma_{x_{22}}^2$	
		Erreur		Erreur
Exacte	23.96	0%	840.8	0%
Sans couplage	17.71	-26.1%	744.8	-11.4%
Correction 1 ^{er} ordre	23.02	-3.9%	747.9	-11.0%
Correction 2 ^{ème} ordre	24.65	2.9%	847.6	0.8%

TAB. 9.2 – Variances du déplacement de l'oscillateur amorti

Comme cela a déjà été discuté, on peut constater que la correction de premier ordre permet de retrouver une bonne estimation de la réponse de la structure mais pas de l'amortisseur. Ceci provient essentiellement du fait que l'amortisseur est une partie moins chargée de la structure.

Pour différentes valeurs des paramètres μ et ξ , la figure 9.12 représente les erreurs commises sur l'écart type du déplacement de l'oscillateur simple (au-dessus) et sur celui de la masse accordée (en-dessous). Les graphiques de gauche ont été obtenus en négligeant les termes de couplage dans l'amortissement tandis que les graphiques de droite ont été obtenus en appliquant la méthode proposée. On peut à nouveau constater que la correction de premier ordre permet d'améliorer substantiellement la qualité de la réponse structurale. Par contre, pour l'amortisseur, une seconde correction est absolument nécessaire. On peut également constater que l'ajout de cette seconde correction (courbe en traits discontinus) est très efficace.

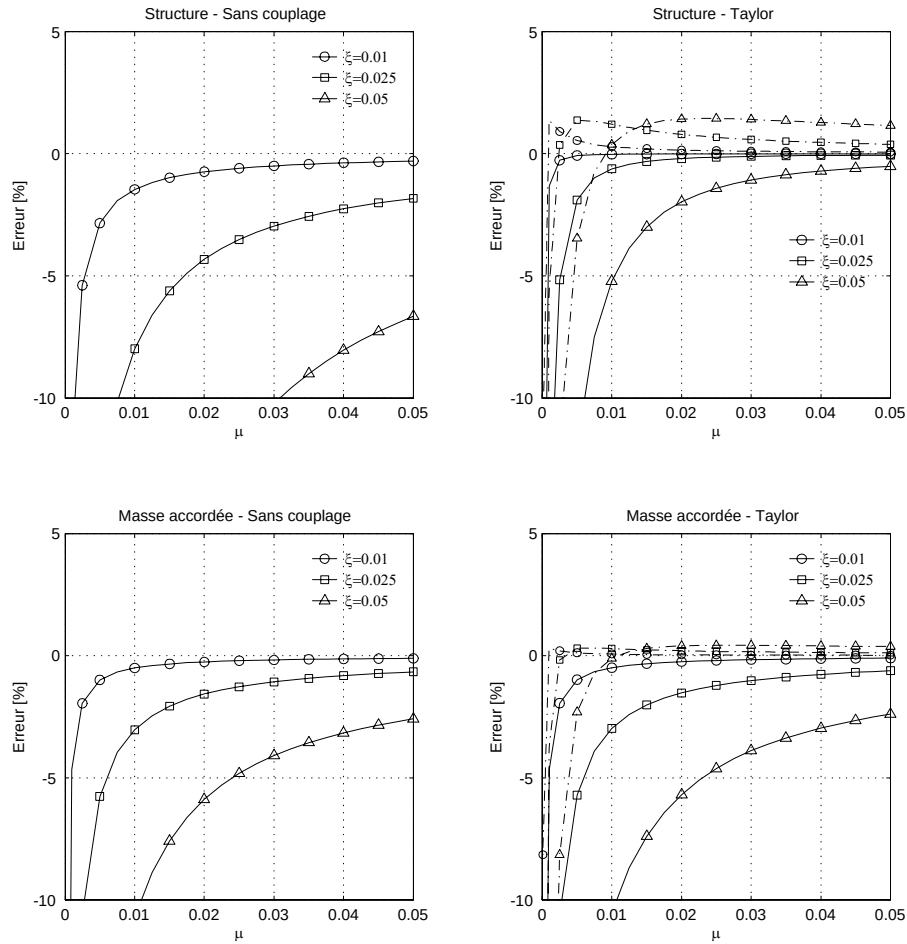


FIG. 9.12 – Etude paramétrique de l'erreur commise sur l'estimation des écarts-types des déplacements. A gauche : sans couplage ; à droite : développement en série (lignes continues : 1^{er} o., lignes discontinues 2^{ème} o.)

Avant de conclure la présentation de cet exemple, nous tenons à préciser que le

calcul du déplacement d'une masse accordée est le seul exemple que nous ayons étudié jusqu'ici et qui présente la nécessité d'ajouter une seconde correction. Nous avons présenté l'application de cette méthode ([25]) pour des structures également très simples mais plus uniformément chargées et montré que l'utilisation d'un seul terme était suffisante. Dans [27], nous présentons également l'analyse d'une poutre sur appuis multiples pour laquelle les fréquences propres sont très proches les unes des autres. Dans cet exemple, le type de chargement est un chargement aérodynamique. L'utilisation d'une correction plutôt que la méthode sans couplage permet de réduire significativement l'erreur commise sur les déplacements dans chaque travée (environ depuis 10% jusque 1.5%).

9.3.5 Prise en compte du couplage au niveau de la sollicitation

Développements

La méthode que nous avons présentée pour la prise en compte des termes de couplage dans l'amortissement permet de donner une interprétation physique assez simple du phénomène. Les développements que nous avons menés restent certes fort mathématiques mais nous allons voir dans ce paragraphe que ces développements vont nous permettre de mettre au point une approche "ingénieur" pour la prise en compte du couplage.

Dans cette partie, nous nous basons toujours sur une décomposition en série de Taylor pour le calcul de la fonction de transfert mais, cette fois, les corrections successives seront portées sur la sollicitation extérieure plutôt que sur la fonction de transfert comme nous venons de le voir. Les difficultés sont donc reportées au niveau du chargement et non pas du comportement structurel; c'est en ce sens que nous qualifions cette méthode d'approche "ingénieur".

Au paragraphe 9.3.3 nous avons vu que la fonction de transfert pouvait s'écrire :

$$[H^*] = [H_d^*] + \sum_i [\Delta H_i^*] \quad (9.106)$$

où $\Delta H_i = (-1)^i [H_d] ([G_o] [H_d])^i$. A ce stade, nous savons également que cette méthode ne peut vraiment être efficace que si l'on ne conserve qu'une seule⁹ correction. Nous continuerons donc dans cette direction et supposons que l'on peut écrire :

$$[H^*] = [H_d^*] + \Delta H_1 \quad (9.107)$$

Connaissant l'expression de la fonction de transfert, l'étape suivante dans l'analyse stochastique consiste à estimer les densités spectrales des amplitudes modales :

$$[S_\eta^*] = [H^*] [S_f^*] [\bar{H}^*]^T \quad (9.108)$$

En injectant dans cette relation l'expression approchée de la fonction de transfert, on trouve :

$$[S_\eta^*] = ([H_d^*] - [H_d^*] [G_o] [H_d^*]) [S_f^*] ([\bar{H}_d^*] - [\bar{H}_d^*] [\bar{G}_o] [\bar{H}_d^*])^T \quad (9.109)$$

$$= [H_d^*] \underbrace{([I] - [G_o] [H_d^*]) [S_f^*] ([I] - [\bar{G}_o] [\bar{H}_d^*])^T}_{[S_{fMOD}^*]} [\bar{H}_d^*]^T \quad (9.110)$$

⁹voire deux, mais nous conseillons tout de même d'inverser la matrice complète si deux corrections sont vraiment nécessaires

On voit donc ainsi que la réponse du système couplé peut être approchée (au premier ordre en r , le niveau de couplage) en modifiant simplement la densité spectrale de la sollicitation. Comme annoncé, ceci présente l'avantage de travailler avec des modes propres découplés comme dans les applications habituelles.

La densité spectrale de sollicitation modifiée peut être développée davantage :

$$[S_{f_{MOD}}^*] = ([I] - [G_o] [H_d^*]) [S_f^*] ([I] - [\bar{G}_o] [\bar{H}_d^*])^T \quad (9.111)$$

$$= [S_f^*] - \underbrace{[G_o] [H_d^*] [S_f^*] - [S_f^*] [\bar{H}_d^*]^T [\bar{G}_o]^T}_{[\Delta S_{f_1}^*]} + \underbrace{[G_o] [H_d^*] [S_f^*] [\bar{H}_d^*]^T [\bar{G}_o]^T}_{[\Delta S_{f_2}^*]} \quad (9.112)$$

On peut donc distinguer une correction de premier ordre $[\Delta S_{f_1}^*]$ et une correction de second ordre $[\Delta S_{f_2}^*]$. Ces deux corrections sont à rapprocher des corrections de premier et second ordre de la densité spectrale des amplitudes modales (9.98).

Illustration de la méthode

Donnons une illustration assez simple de la méthode. Pour ce faire, nous ne repartons plus de l'exemple générique du système à 2 DDL mais plutôt d'une forme tout à fait générale des équations en base modale :

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & r\sqrt{C_1 C_2} \\ r\sqrt{C_1 C_2} & C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (9.113)$$

Toutes les grandeurs intervenant dans cette relation sont des grandeurs généralisées. Pour simplifier les notations, nous avons exceptionnellement omis l'astérisque dans leur notation. La matrice de transfert modale exacte s'écrit :

$$[H^*] = \left(\begin{bmatrix} -M_1\omega^2 + i\omega C_1 + K_1 & i\omega r\sqrt{C_1 C_2} \\ i\omega r\sqrt{C_1 C_2} & -M_2\omega^2 + i\omega C_2 + K_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (9.114)$$

$$= \frac{1}{G_1 G_2 - G^2} \begin{bmatrix} G_2 & G \\ G & G_1 \end{bmatrix} \quad (9.115)$$

où nous avons introduit $G_1 = -M_1\omega^2 + i\omega C_1 + K_1$, $G_2 = -M_2\omega^2 + i\omega C_2 + K_2$ et $G = -i\omega r\sqrt{C_1 C_2}$. Avec les notations que nous avons utilisées pour la présentation de la méthode, la décomposition idéale de la matrice à inverser est :

$$[G_d] = \begin{bmatrix} -M_1\omega^2 + i\omega C_1 + K_1 & 0 \\ 0 & -M_2\omega^2 + i\omega C_2 + K_2 \end{bmatrix} \quad (9.116)$$

$$[G_o] = \begin{bmatrix} 0 & i\omega r\sqrt{C_1 C_2} \\ i\omega r\sqrt{C_1 C_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.117)$$

Avec ce choix de répartition entre les matrices $[G_o]$ et $[G_d]$, les compléments de sollicitation s'écrivent :

$$\begin{aligned} [\Delta S_{f_1}^*] &= -[G_o][H_d^*][S_f^*] - [S_f^*][\bar{H}_d^*]^T[\bar{G}_o]^T \\ &= -\omega r \sqrt{C_1 C_2} \begin{bmatrix} \frac{2 \operatorname{Im}[G_2] \gamma \sqrt{S_{F_1} S_{F_2}}}{|G_2|^2} & i \left(\frac{S_{F_2}}{G_2} - \frac{S_{F_1}}{G_1} \right) \\ i \left(\frac{S_{F_1}}{G_1} - \frac{S_{F_2}}{G_2} \right) & \frac{2 \operatorname{Im}[G_1] \gamma \sqrt{S_{F_1} S_{F_2}}}{|G_1|^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.118)$$

et

$$\begin{aligned} [\Delta S_{f_2}^*] &= [G_o][H_d^*][S_f^*][\bar{H}_d^*]^T[\bar{G}_o]^T \\ &= -\omega^2 r^2 C_1 C_2 \begin{bmatrix} \frac{S_{F_2}}{G_2 G_2} & \frac{\gamma \sqrt{S_{F_1} S_{F_2}}}{G_1 G_2} \\ \frac{\gamma \sqrt{S_{F_1} S_{F_2}}}{G_1 G_2} & \frac{S_{F_1}}{G_1 G_1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.119)$$

Ces expressions montrent que la sollicitation modifiée dans le premier mode dépend de la sollicitation dans le second mode et réciproquement. Ceci rejoint les remarques formulées lors de l'introduction et concernant le fait qu'en présence de couplage par amortissement, les réponses dans un mode donné dépendent a priori des sollicitations dans l'ensemble de tous les modes propres retenus pour le calcul.

La nécessité de recourir à une prise en compte du couplage dans l'amortissement peut être appréciée en comparant les variances des amplitudes modales obtenues lorsque le chargement est simplifié au maximum (hypothèse de matrice de transfert diagonale) et les variances des amplitudes modales obtenues en ajoutant les corrections de sollicitations que nous venons d'établir. Etant donné que les modes étudiés sont maintenant découplés, nous pouvons reprendre l'approche en différentes contributions pour estimer les variances des amplitudes modales.

Partie dynamique La contribution dynamique dépend de la valeur de la densité spectrale de la sollicitation au droit de la fréquence naturelle du premier mode. Nous allons étudier directement les compléments de sollicitation de premier et de second ordre :

$$\Delta S_{f_{111}}^*(\varpi_1) + \Delta S_{f_{211}}^*(\varpi_1) = \frac{-2r\varpi_1^2 C_2 \sqrt{C_1 C_2} \gamma \sqrt{S_{F_1}(\varpi_1) S_{F_2}(\varpi_1)} - \varpi_1^2 r^2 C_1 C_2 S_{F_2}(\varpi_1)}{(K_2 - M_2 \varpi_1^2)^2 + \varpi_1^2 C_2^2} \quad (9.120)$$

En rapportant cette grandeur à la densité spectrale de sollicitation que l'on aurait obtenue en négligeant les termes de couplage dans l'amortissement ($S_{F_1}(\varpi_1)$), on obtient un facteur d'importance des compléments de sollicitation :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S_{f_{111}}^*(\varpi_1) + \Delta S_{f_{211}}^*(\varpi_1)}{S_{F_1}(\varpi_1)} &= -r \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_2}} \frac{4\xi_2^2 \frac{\varpi_1}{\varpi_2} \sqrt{\frac{\varpi_1}{\varpi_2}}}{\left(1 - \frac{\varpi_1^2}{\varpi_2^2}\right)^2 + 4\xi_2^2 \frac{\varpi_1^2}{\varpi_2^2}} \\ &\quad \left(2\gamma \sqrt{\frac{S_{F_2}(\varpi_1)}{S_{F_1}(\varpi_1)}} - r \sqrt{C_1/C_2} \frac{S_{F_2}(\varpi_1)}{S_{F_1}(\varpi_1)} \right) \end{aligned} \quad (9.121)$$

La relation obtenue est le produit de plusieurs facteurs. Il faut que tous ces facteurs soient simultanément non négligeables pour que l'effet du couplage par amortissement soit non négligeable sur la contribution dynamique de la réponse. Les conditions suivantes doivent être remplies :

- il faut que le niveau de couplage (r) soit non nul et assez important ;
- il faut que les pulsations propres des deux modes soient suffisamment proches. En effet, le facteur

$$\frac{4\xi_2^2 \frac{\varpi_1}{\varpi_2} \sqrt{\frac{\varpi_1}{\varpi_2}}}{\left(1 - \frac{\varpi_1^2}{\varpi_2^2}\right)^2 + 4\xi_2^2 \frac{\varpi_1^2}{\varpi_2^2}} \quad (9.122)$$

présente une valeur maximale de l'ordre de l'unité pour $\varpi_1 = \varpi_2$ et décroît très rapidement lorsque les pulsations propres ϖ_1 et ϖ_2 s'éloignent l'une de l'autre.

- il faut également que le dernier terme soit important, ce qui arrive lorsque le second mode propre est plus chargé que le premier (et pour autant que les sollicitations soient suffisamment cohérentes ou que le niveau de couplage soit assez important).

Ces conditions sont assez rarement satisfaites simultanément, du moins pour les structures académiques étudiées dans le cadre de recherches élémentaires. Il convient cependant de ne pas perdre de vue que ces conditions pourraient être rencontrées dans l'étude d'une structure plus complexe où beaucoup de fréquences propres seraient concentrées dans une gamme de fréquences limitée.

Partie quasi-statique Pour être complet, il convient également d'étudier les conditions sous lesquelles la partie quasi-statique des compléments de sollicitation peuvent également donner des modifications significatives de la réponse modale. Ceci devrait nous permettre d'établir un second ensemble de conditions simultanément nécessaires.

La contribution quasi-statique de la réponse dépend de la variance de la sollicitation. Aux compléments de sollicitation calculés, on peut associer un complément de variance :

$$\Delta\sigma_{f_{111}}^{2*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta S_{f_{111}}^* (\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2r\omega^2 C_2 \sqrt{C_1 C_2} \gamma \sqrt{S_{F_1} S_{F_2}}}{(K_2 - M_2 \omega^2)^2 + \omega^2 C_2^2} d\omega \quad (9.123)$$

$$\Delta\sigma_{f_{211}}^{2*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta S_{f_{211}}^* (\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\omega^2 r^2 C_1 C_2 S_{F_2}}{(K_2 - M_2 \omega^2)^2 + \omega^2 C_2^2} d\omega \quad (9.124)$$

Le calcul de ces intégrales revient à calculer la vitesse de l'oscillateur caractérisé par les grandeurs modales du second mode (K_2 , M_2 , C_2) et sollicité par une sollicitation adéquate. Dans ce cas, nous savons que nous pouvons appliquer l'approximation en bruit blanc (pour autant que le mode 2 ne soit pas trop amorti) en ne conservant que la contribution dynamique. Le complément de variance de la sollicitation s'exprime donc par :

$$\Delta\sigma_{f_{111}}^{2*} + \Delta\sigma_{f_{211}}^{2*} = \frac{-r\pi}{2\xi_2} \left(2\sqrt{C_1/C_2} \gamma(\varpi_2) \sqrt{\frac{S_{F_2}(\varpi_2)}{S_{F_1}(\varpi_2)}} + \frac{rC_1}{C_2} \frac{S_{F_2}(\varpi_2)}{S_{F_1}(\varpi_2)} \right) \varpi_2 S_{F_1}(\varpi_2) \quad (9.125)$$

Ce complément de sollicitation est à comparer avec la variance de la densité spectrale

de la sollicitation (obtenue par la méthode simplifiée) dans le premier mode :

$$\frac{\Delta\sigma_{f_{11}}^{2*} + \Delta\sigma_{f_{21}}^{2*}}{\sigma_{F_1}^2} = -r \left(2\sqrt{C_1/C_2}\gamma(\varpi_2) \sqrt{\frac{S_{F_2}(\varpi_2)}{S_{F_1}(\varpi_2)}} + \frac{rC_1}{C_2} \frac{S_{F_2}(\varpi_2)}{S_{F_1}(\varpi_2)} \right) \frac{\pi}{2\xi_2} \frac{\varpi_2 S_{F_1}(\varpi_2)}{\sigma_{F_1}^2} \quad (9.126)$$

Ce rapport est assez difficile à discuter de manière générale car il est fortement tributaire de la forme de la densité spectrale. Une chose est certaine, c'est que la proximité des fréquences propres n'intervient plus !

Application Afin d'illustrer les développements qui viennent d'être présentés, nous avons repris l'exemple de la structure amortie par la masse accordée. La figure 9.13 représente les éléments de la matrice de densité spectrale des sollicitations modales. Sur cette figure, on peut retrouver les densités spectrales de sollicitation rigoureuses qui sont constantes puisque la sollicitation extérieure est un bruit blanc. La première correction de la fonction de transfert nous a permis d'établir deux corrections d'ordres différents en r . Dans le cadre de cet exemple, ces deux corrections prennent le même ordre d'importance car $r = 1$.

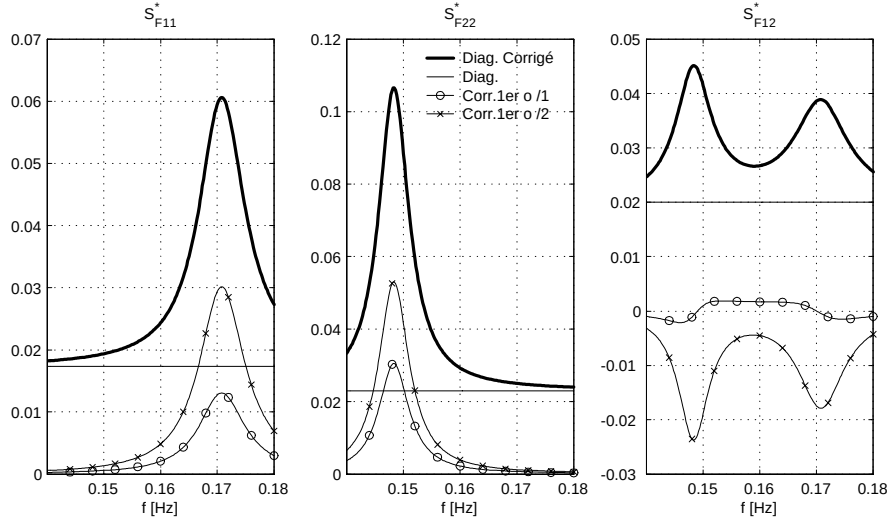


FIG. 9.13 – Densités spectrale de sollicitation en base modale : valeurs initiales et compléments de sollicitation

Les courbes en trait gras représentent les densités spectrales modifiées qui permettent de prendre en compte de façon approchée les effets de couplage. Cette figure illustre assez bien les commentaires généraux qui viennent d'être donnés concernant le complément de sollicitation. Par exemple, on peut voir que le complément de sollicitation dans le premier mode présente une valeur maximale dans le voisinage de la fréquence propre du second mode. Cette forme est tout à fait logique au vu de la relation 9.123. Dans cet exemple, les compléments de sollicitation présentent donc un complément de sollicitation quasi-statique assez important.

En utilisant les densités spectrales de sollicitation modale corrigées (traits gras) ainsi que la matrice de transfert diagonale obtenue en rendant le problème découplé, on obtient

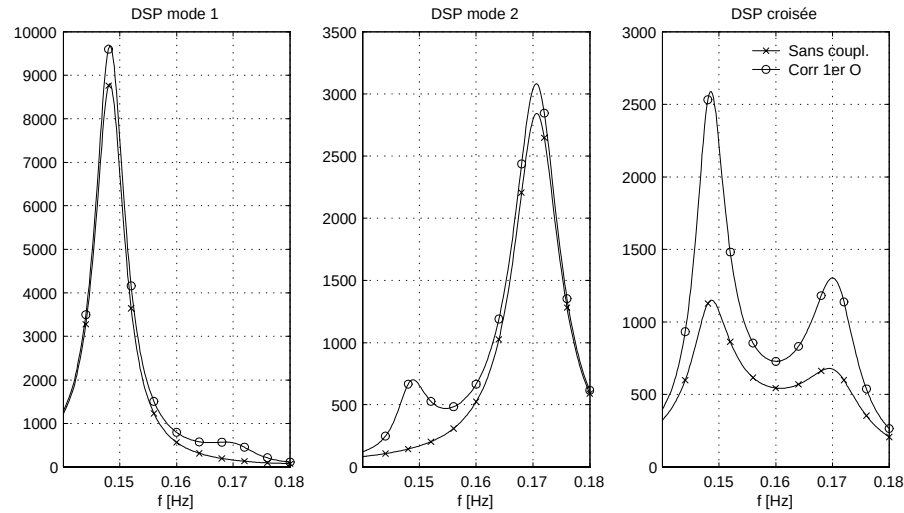


FIG. 9.14 – Représentation des amplitudes modales obtenues en négligeant le couplage ou en le prenant en compte à l’aide d’un chargement équivalent ($\mu = 0.02$; $\xi = 0.05$)

les densités spectrales des amplitudes modales représentées à la figure 9.14. Les courbes de cette figure sont exactement identiques aux courbes de la figure 9.9. Ceci résulte bien sûr de l’équivalence choisie pour définir les compléments de sollicitation.

9.4 Conclusions

Nous venons de traiter de manière assez complète les deux types de couplage qui peuvent prendre place lors de l’étude de systèmes à plusieurs degrés de liberté. Le problème du couplage est assez basique en soi et, dans de nombreux domaines, les termes de couplage sont systématiquement pris en compte. Dans le domaine du génie civil, ces termes ne sont par contre que rarement intégrés dans les calculs. La raison principale consiste en la taille de la structure étudiée, le nombre de cas de charges à étudier ainsi que les délais généralement trop courts. La présentation que nous avons faite de ce problème élémentaire ne nous paraît donc pas dépourvue de sens.

Aussi la démarche approchée présentée pour estimer les effets du couplage dans l’amortissement nous a permis d’aboutir à une solution assez élégante pour la prise en compte de cet effet de couplage. Cette solution consiste à ajouter à la sollicitation réelle des compléments de sollicitation et à travailler avec un système découplé mécaniquement.

Cette proposition permet maintenant de regrouper les raisonnements menés séparément sur les deux types d’amortissement. En effet, le comportement d’une structure pour laquelle les deux types de couplage doivent être pris en compte peut être assez facilement compris. Il suffit en effet d’opérer la modification de chargement présentée à l’occasion du second type de couplage, de sorte à obtenir une structure où seul le premier couplage prend place. Il reste alors à reprendre les considérations que nous avons menées à l’occasion de la discussion sur ce couplage modal.

Chapitre 10

Approche fréquentielle exacte

"It is not easy to state what probability theory is. It is not even clear in what sense it is a theory... To me probability theory is not just a branch of mathematics and certainly not just an organized collections of axioms and theorems... To me personally, probability theory is a way of thinking".

Marc Kac

10.1 Introduction

A la première partie du document, nous avons présenté une méthode d'analyse dans le domaine fréquentiel permettant d'évaluer les moments statistiques d'ordres supérieurs de la réponse d'un oscillateur simple lorsque le chargement appliqué est non gaussien. La détermination de ces moments d'ordres supérieurs peut également se poser dans le cadre de l'analyse d'une structure à plusieurs degrés de liberté. Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthodologie à adopter pour déterminer ces moments. Etant donné que les structures que nous sommes susceptibles d'étudier peuvent être modélisées par un nombre important de degrés de liberté, nous insistons sur la nécessité de développer une méthode d'analyse en base réduite. Nous choisirons la base modale pour les développements suivants.

La méthode que nous proposons est décalquée en tout point sur la démarche suivie lors d'une analyse au second ordre. La démarche habituelle (consistant à déterminer successivement les densités spectrales des forces nodales puis des forces modales, ensuite des amplitudes modales et finalement des déplacements nodaux et efforts internes) va être réécrite pour le troisième ordre. Nous allons donc présenter les estimations successives des bispectres des sollicitations, des forces généralisées, des amplitudes modales et finalement des réponses structurelles. Ces quatre étapes font l'objet de quelques précisions dans les paragraphes suivants.

Pour simplifier les développements, nous nous limitons ici simplement à des expressions quadratiques de processus gaussiens. Ainsi, nous supposons que la sollicitation f_i en chacun des noeuds du modèle peut s'exprimer à partir d'un processus aléatoire gaussien u_i par :

$$f_i = a_i + b_i u_i + c_i u_i^2 \quad (10.1)$$

où les a_i , b_i et c_i sont trois paramètres déterminés, éventuellement différents d'un noeud à l'autre de la structure. L'utilisation de ces trois paramètres est plus générale que la formulation aérodynamique du chargement que nous avons étudiée à la première partie du document (Eq. 2.2). Cette formulation peut être retrouvée en imposant :

$$\begin{aligned} a_i &= \gamma_i \bar{U}_i^2 \\ b_i &= 2\gamma_i \bar{U}_i \\ c_i &= \gamma_i \end{aligned} \quad (10.2)$$

où γ_i et $\bar{U}_i$ sont caractéristiques du noeud i de la structure. En plus des densités spectrales unilatérales $S_{u_i}(\omega)$ caractérisant la densité spectrale de la composante de la turbulence au noeud i , l'étude d'une structure à plusieurs degrés de liberté nécessite également, comme donnée au problème, l'expression du champ de cohérence permettant d'exprimer les densités spectrales croisées $S_{u_i u_j}(\omega)$ entre les composantes de la turbulence en différents points de l'espace.

10.2 Caractéristiques des sollicitations nodales

La première étape d'une analyse dans le domaine fréquentiel consiste en l'établissement de la matrice des densités spectrales des sollicitations. Lorsque les termes non linéaires de chargement sont conservés, l'expression de cette matrice est légèrement différente. Dans un souci de généralité, nous allons donc reprendre l'expression rigoureuse de la matrice des densités spectrales. Dans le cadre des structures du génie civil et des sollicitations éoliennes que l'on peut rencontrer, nous avons cependant vu que les corrections des densités spectrales de sollicitations (une autoconvolution de la densité spectrale à la première partie) étaient presque négligeables. Nous verrons donc ensuite en quoi la formulation complète peut être simplifiée.

Après cette caractérisation de la sollicitation au second ordre, nous présenterons la méthodologie de calcul de la matrice des bispectres des sollicitations nodales. Cette notion de matrice des bispectres n'a pas encore été introduite, nous verrons comment son interprétation peut être obtenue à partir d'une généralisation de la matrice des densités spectrales.

10.2.1 Densités spectrales

Le premier problème rencontré consiste donc en l'établissement des densités spectrales de forces appliquées aux noeuds de la structure ainsi que les cohérence qui peuvent exister entre elles. Cette opération est supposée être bien connue. Nous allons la présenter assez rapidement en indiquant en quoi les termes de chargement non linéaire modifient l'approche qui est habituellement suivie. Pour simplifier les développements, nous présentons successivement l'établissement des éléments diagonaux (densités spectrales unilatérales) puis non diagonaux (densités spectrales croisées).

Eléments diagonaux

Tous les développements suivants se basent sur la relation 10.1 entre la force appliquée au noeud i de la structure et la vitesse de vent qui y est observée. De manière tout à fait générale, nous savons que la densité spectrale d'une somme est la somme des densités spectrales unilatérales de chacun des termes à laquelle doivent être ajoutées toutes les densités spectrales croisées. Nous aurons donc ici :

$$\begin{aligned}
 S_{f_i}(\omega) = & a_i^2 \delta(\omega) + b_i^2 S_{u_i}(\omega) + c_i^2 S_{u_i^2}(\omega) \\
 & + a_i b_i (S_{cst, u_i}(\omega) + S_{u_i, cst}(\omega)) \\
 & + a_i c_i (S_{cst, u_i^2}(\omega) + S_{u_i^2, cst}(\omega)) \\
 & + b_i c_i (S_{u_i, u_i^2}(\omega) + S_{u_i^2, u_i}(\omega))
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

Des développements réalisés pour l'oscillateur simple, nous pouvons voir que¹ $S_{cst, u_i}(\omega) = S_{u_i, cst}(\omega) = 0$ et que $S_{u_i, u_i^2}(\omega) = S_{u_i^2, u_i}(\omega) = 0$. Nous avons également vu que $S_{cst, u_i^2}(\omega) = S_{u_i^2, cst}(\omega) = \sigma_{u_i}^2 \delta(\omega)$. Obtenir une fonction de Dirac pour cette densité spectrale croisée n'est pas étonnant puisque la densité spectrale de la fonction constante s'exprime elle-même à l'aide d'une fonction de Dirac. La seule façon de ne pas violer l'inégalité de Cauchy-Schwartz est d'avoir une densité spectrale croisée qui est également une fonction de Dirac.

La densité spectrale de la force au noeud i s'exprime donc par :

$$S_{f_i}(\omega) = (a_i + c_i \sigma_{u_i}^2)^2 \delta(\omega) + b_i^2 S_{u_i}(\omega) + 2c_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i}(\omega_1) S_{u_i}(\omega - \omega_1) d\omega_1 \tag{10.4}$$

Cette relation a en réalité déjà été développée à la première partie (4.118, p.133) puisqu'il s'agit également de la sollicitation d'un oscillateur simple. Etant donné que nous sommes maintenant familiers avec les caractéristiques fréquentielles de carrés de processus aléatoires, nous nous sommes permis de mener un raisonnement bien plus court que celui qui a mené à l'établissement de la relation 4.118. On peut vérifier que cette relation peut être retrouvée en choisissant les paramètres a_i , b_i et c_i des relations 10.2.

Dans le souci de ne plus travailler qu'avec des densités spectrales dont l'intégration sur les pulsations permet d'obtenir un moment centré (le cumulatif d'ordre 2, la variance), nous décidons de nouveau de supprimer le terme faisant intervenir la fonction de Dirac :

$$S_{f_i}(\omega) = b_i^2 S_{u_i}(\omega) + 2c_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i}(\omega_1) S_{u_i}(\omega - \omega_1) d\omega_1 \tag{10.5}$$

Lorsque les densités spectrales caractérisant la turbulence sont monotonément et rapidement décroissantes, nous avons vu que le terme d'autoconvolution pouvait généralement être négligé (erreur de l'ordre de 1% à 4%, Figs 4.18 à 4.23)².

¹ S'il était question de travailler avec des formes polynômiales d'ordre supérieur à 2, on peut affirmer que $S_{u_i^p, u_i^q}(\omega) = S_{u_i^q, u_i^p}(\omega) = 0$ si $p + q$ est impair.

² cela dépend également maintenant des valeurs relatives de b_i et c_i !

Elements non diagonaux

Puisque les forces appliquées aux noeuds de la structure s'expriment par des sommes (Eq. 10.1), les densités spectrales croisées entre ces forces peuvent être assez facilement obtenues. Il suffit en effet d'ajouter les densités spectrales croisées entre les termes de chaque sommation, les termes à croiser étant pris dans les sommations distinctes. Considérons par exemple que les sollicitations aux noeuds i et j s'expriment par des expressions quadratiques de la vitesse du vent. Dans ce cas, la densité spectrale croisée entre les forces aux deux noeuds s'exprime par :

$$\begin{aligned} S_{f_i f_j}(\omega) = & a_i a_j \delta(\omega) + b_i b_j S_{u_i, u_j}(\omega) + c_i c_j S_{u_i^2, u_j^2}(\omega) \\ & + a_i b_j S_{cst, u_j}(\omega) + a_j b_i S_{cst, u_i}(\omega) + a_i c_j S_{cst, u_j^2}(\omega) + a_j c_i S_{cst, u_i^2}(\omega) \\ & + b_i c_j S_{u_i, u_j^2}(\omega) + b_j c_i S_{u_i^2, u_j}(\omega) \end{aligned} \quad (10.6)$$

La généralisation du raisonnement mené sur l'établissement des termes diagonaux est assez immédiate. On peut écrire :

$$\begin{aligned} S_{f_i f_j}(\omega) = & a_i a_j \delta(\omega) + a_i c_j \sigma_{u_j}^2 \delta(\omega) + a_j c_i \sigma_{u_i}^2 \delta(\omega) + b_i b_j S_{u_i u_j}(\omega) \\ & + c_i c_j \left(\sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \delta(\omega) + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{u_i u_j}(\omega - \omega_1) d\omega_1 \right) \\ = & (a_i + c_i \sigma_{u_i}^2) (a_j + c_j \sigma_{u_j}^2) \delta(\omega) + b_i b_j S_{u_i u_j}(\omega) \\ & + 2 c_i c_j \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{u_i u_j}(\omega - \omega_1) d\omega_1 \end{aligned} \quad (10.7)$$

Afin de travailler avec des grandeurs statistiques centrées, on utilisera plutôt :

$$S_{f_i f_j}(\omega) = b_i b_j S_{u_i u_j}(\omega) + 2 c_i c_j \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{u_i u_j}(\omega - \omega_1) d\omega_1 \quad (10.8)$$

qui a l'avantage de rendre, après intégration, la covariance et non pas la corrélation.

Dans une analyse linéaire avec chargement linéaire ($c_i = 0, \forall i$), cette relation montre que l'on peut se contenter de ne stocker qu'un seul vecteur b contenant une composante par noeud chargé et indiquant les caractéristiques aérodynamiques de la section chargée. Si l'on désire réaliser une étude d'ordre plus élevé, il suffit d'ajouter un vecteur supplémentaire c regroupant les caractéristiques d'ordres supérieurs.

Les relations 10.5 et 10.8 permettent d'établir la forme de la matrice de densité spectrale des forces nodales. Au second ordre, le calcul continue, comme d'habitude, avec la projection dans la base des modes propres de sorte à obtenir l'expression de la matrice de densité spectrale des forces généralisées.

Dans le contexte tout à fait général de processus aléatoires réels, nous savons que les densités spectrales $S_{u_i u_j}$ et $S_{u_j u_i}$ sont deux grandeurs conjuguées. Dans le domaine du vent uniquement, ces deux grandeurs présentent la propriété supplémentaire d'être égales. En effet, et ce généralement faute de mesures sur site, les fonctions de cohérences entre vitesses de vent en différents points de l'espace sont supposées être réelles. En permutant les indices i et j , on peut donc se rendre compte que la matrice des densités spectrales des forces sollicitantes est symétrique. Ceci est valable que les termes non linéaires du chargement soient pris en compte ou non, même jusqu'à un ordre supérieur à 2. Avoir

une matrice de densité spectrale symétrique présente deux avantages : une réduction de l'espace de stockage nécessaire (puisque un peu plus de la moitié de la matrice seulement doit être stockée) et une limitation du temps de calcul puisque la même proportion de la matrice seulement doit être évaluée.

Ces aspects ont été pris en compte lors de la rédaction de notre code de calcul.

10.2.2 Bispectres

Tout comme à l'ordre 2, il était nécessaire de pouvoir calculer la densité spectrale d'une combinaison linéaire (Eq. 3.46), il importe maintenant de pouvoir calculer le bispectre d'une combinaison linéaire de processus aléatoires. Comme cette opération est certainement moins évidente à se représenter physiquement et surtout que nous en aurons besoin à de multiples reprises dans la suite, il nous semble intéressant de lui consacrer une attention plus particulière.

Caractéristiques de combinaisons linéaires de processus aléatoires Avant d'aborder le calcul des sollicitations aux noeuds, raisonnons d'abord dans le contexte d'une combinaison linéaire tout à fait générale :

$$f^* = Z_1 f_1 + Z_2 f_2 + Z_3 f_3 \quad (10.9)$$

où Z_1 , Z_2 et Z_3 sont trois constantes scalaires et f_1 , f_2 et f_3 représentent trois processus aléatoires³. Presque par habitude maintenant, nous savons que le calcul du bispectre de f^* peut être réalisé à partir d'un raisonnement dans le domaine temporel. Nous allons donc, dans un premier temps, calculer la fonction de bicorrélation du processus aléatoire f^* :

$$\begin{aligned} E[f^*(t_1) f^*(t_2) f^*(t_3)] \\ = E[(Z_1 f_1(t_1) + Z_2 f_2(t_1) + Z_3 f_3(t_1))(Z_1 f_1(t_2) + Z_2 f_2(t_2) + Z_3 f_3(t_2)) \\ (Z_1 f_1(t_3) + Z_2 f_2(t_3) + Z_3 f_3(t_3))] \end{aligned} \quad (10.10)$$

En développant ce produit de trois facteurs de n termes chacun ($n = 3$ pour notre exemple), on obtient les n^3 termes suivants :

$$\begin{aligned} E[f^*(t_1) f^*(t_2) f^*(t_3)] \\ = E[Z_1^3 f_1(t_1) f_1(t_2) f_1(t_3) + Z_2^3 f_2(t_1) f_2(t_2) f_2(t_3) + Z_3^3 f_3(t_1) f_3(t_2) f_3(t_3) \\ + Z_1^2 Z_2 (f_1(t_1) f_1(t_2) f_2(t_3) + f_1(t_1) f_2(t_2) f_1(t_3) + f_2(t_1) f_1(t_2) f_1(t_3)) \\ + Z_1^2 Z_3 (f_1(t_1) f_1(t_2) f_3(t_3) + f_1(t_1) f_3(t_2) f_1(t_3) + f_3(t_1) f_1(t_2) f_1(t_3)) \\ + Z_2^2 Z_1 (f_1(t_1) f_2(t_2) f_2(t_3) + f_2(t_1) f_1(t_2) f_2(t_3) + f_2(t_1) f_2(t_2) f_1(t_3)) \\ + Z_2^2 Z_3 (f_3(t_1) f_2(t_2) f_2(t_3) + f_2(t_1) f_3(t_2) f_2(t_3) + f_2(t_1) f_2(t_2) f_3(t_3)) \end{aligned}$$

³Pour simplifier les notations, nous limitons la combinaison linéaire étudiée à $n = 3$ termes, ce qui est le minimum requis pour ne pas perdre de généralité au développement. Un développement similaire au développement suivant reste valable pour $n > 3$.

$$\begin{aligned}
& + Z_3^2 Z_1 (f_1(t_1) f_3(t_2) f_3(t_3) + f_3(t_1) f_1(t_2) f_3(t_3) + f_3(t_1) f_3(t_2) f_1(t_3)) \\
& + Z_3^2 Z_2 (f_2(t_1) f_3(t_2) f_3(t_3) + f_3(t_1) f_2(t_2) f_3(t_3) + f_3(t_1) f_3(t_2) f_2(t_3)) \\
& + Z_1 Z_2 Z_3 (f_1(t_1) f_2(t_2) f_3(t_3) + f_1(t_1) f_3(t_2) f_2(t_3) + f_2(t_1) f_1(t_2) f_3(t_3)) \\
& + Z_1 Z_2 Z_3 (f_2(t_1) f_3(t_2) f_1(t_3) + f_3(t_1) f_1(t_2) f_2(t_3) + f_3(t_1) f_2(t_2) f_1(t_3))]
\end{aligned} \tag{10.11}$$

La fonction de bicorrélation de la combinaison linéaire $f^*(t)$ s'obtient donc en pondérant et additionnant les n^3 fonctions de bicorrélation qui relient les n processus aléatoires f_1 , f_2 et f_3 . La transformée de Fourier double membre à membre de la relation 10.11 permet d'établir l'expression du bispectre de la combinaison linéaire $f^*(t)$. Etant donné que la transformée de Fourier d'une somme correspond également à la somme des transformées de Fourier, le bispectre de la combinaison linéaire s'exprime donc par la somme (pondérée) des n^3 bispectres croisés entre les n processus aléatoires de base considérés. Voici donc établie la démonstration d'une chose qui finalement peut paraître assez évidente.

Ceci n'est en réalité qu'une simple génération de ce qui est fait à l'ordre 2, c'est-à-dire, en termes de densités spectrales. En effet, à l'ordre 2, la densité spectrale d'une combinaison de n processus aléatoires (prenons par exemple 10.9) est obtenue par :

$$\begin{aligned}
S_{f^*}(\omega) &= \langle Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \rangle \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} \\
&= Z_1^2 S_{11} + Z_2^2 S_{22} + Z_3^2 S_{33} + \\
&\quad + Z_1 Z_2 (S_{21} + S_{12}) + Z_1 Z_3 (S_{31} + S_{13}) + Z_2 Z_3 (S_{32} + S_{23}) \tag{10.12}
\end{aligned}$$

où S_{ij} représente la densité spectrale croisée entre les processus f_i et f_j . La densité spectrale de la combinaison linéaire s'exprime donc par la somme de n^2 termes.

Passons maintenant au stade suivant. Nous allons voir qu'il est également nécessaire de pouvoir estimer les fonctions de bicorrélation croisées entre plusieurs processus aléatoires qui sont eux-mêmes définis par des combinaisons linéaires de processus aléatoires élémentaires. Travaillons par exemple avec des combinaisons de m termes ($m = 3$) :

$$\begin{aligned}
f_1^* &= Z_{11} f_1 + Z_{21} f_2 + Z_{31} f_3 \\
f_2^* &= Z_{12} f_1 + Z_{22} f_2 + Z_{32} f_3 \\
f_3^* &= Z_{13} f_1 + Z_{23} f_2 + Z_{33} f_3
\end{aligned} \tag{10.13}$$

Un développement similaire au développement mené ci-avant permet d'exprimer la fonction de bicorrélation croisée entre ces trois combinaisons linéaires $E[f^*(t_1) f^*(t_2) f^*(t_3)]$ en fonction des m^3 fonctions de bicorrélation croisées entre les termes des combinaisons linéaires (f_1 , f_2 et f_3). En généralisant le développement qui a mené à la relation 10.11, on peut voir que n'importe quel bispectre croisé s'exprime par une somme pondérée des m^3 bispectres croisés des processus de base.

La caractérisation statistique complète des propriétés croisées entre les trois processus f_1^* , f_2^* et f_3^* nécessite l'estimation de plusieurs fonctions de bicorrélation (ou de plusieurs

bispectres croisés). En effet, la caractérisation complète de ces propriétés requiert la connaissance des fonctions de bicorrélation comme :

$$\begin{aligned} E[f_1^*(t) f_2^*(t + \tau_1) f_3^*(t + \tau_2)] , E[f_2^*(t) f_1^*(t + \tau_1) f_3^*(t + \tau_2)] , \quad (10.14) \\ E[f_3^*(t) f_1^*(t + \tau_1) f_2^*(t + \tau_2)] \end{aligned}$$

qui ne sont pas nécessairement égales. A l'ordre 2, ce problème ne se posait pas car on ne peut écrire que deux fonctions d'autocorrélation :

$$E[f_1^*(t) f_2^*(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(t) f_2^*(t + \tau) dt \quad (10.15)$$

$$E[f_1^*(t + \tau) f_2^*(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(t + \tau) f_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(t) f_2^*(t - \tau) dt \quad (10.16)$$

pour lesquelles on vérifie que la relation bien connue $R_{f_1^* f_2^*}(\tau) = R_{f_2^* f_1^*}(-\tau)$ est satisfaite.

En considérant également dans la liste 10.14 les termes qui font intervenir plusieurs fois le même processus (comme $E[f_1^*(t) f_1^*(t + \tau_1) f_3^*(t + \tau_2)]$), on peut constater qu'il existe 27 fonctions de bicorrélation différentes pour caractériser la structure statistique croisée de troisième ordre entre les processus aléatoires f_1^* , f_2^* et f_3^* . Par extension, on peut affirmer que la structure statistique croisée de troisième ordre entre n processus aléatoires nécessite la connaissance de n^3 fonctions de bicorrélation. A ces n^3 fonctions de bicorrélation sont associés n^3 bispectres.

De la même façon que les caractéristiques croisées entre deux processus aléatoires peuvent être regroupées dans la matrice des densités spectrales à l'ordre 2 ($n \times n$), nous pouvons, à l'ordre 3, regrouper tous les bispectres impliqués dans la matrice tridimensionnelle des bispectres ($n \times n \times n$).

Nous pouvons maintenant commencer à comprendre pourquoi l'utilisation d'une base modale est nécessaire. Pour les structures importantes étudiées en pratique, il n'est déjà généralement pas possible d'estimer l'entière de la matrice des densités spectrales des déplacements structurels (par exemple). Il est alors impensable de réaliser une étude en base nodale à l'ordre trois lorsque le nombre de degrés de liberté atteint un ordre de grandeur de 10^3 .

Revenons maintenant au problème de l'étude des caractéristiques statistiques croisées entre des processus définis par combinaisons linéaires d'autres processus aléatoires. Nous pouvons donc maintenant comprendre que l'établissement de la matrice des bispectres complète nécessite l'estimation d'une relation identique à 10.11 pour chacun de ses éléments. Ceci demande un effort de calcul assez important, mais avant tout une organisation bien réfléchie du problème.

Application numérique Tout comme il était intéressant à l'ordre 2 d'établir la matrice des densités spectrale de dimensions $m \times m$, nous devons maintenant exprimer la matrice des bispectres des combinaisons, de dimensions $m \times m \times m$. Cette matrice s'exprime par une projection de la matrice des bispectres des processus de base (f_i) dans la nouvelle base définie par les Z_{ij} . A l'ordre 2, en terme de densités spectrales de puissance, cette projection matricielle pouvait être écrite sous la forme d'un produit matriciel :

$$[S_f^*] = [Z]^T [S_f] [Z] \quad (10.17)$$

On pouvait également écrire, pour chaque couple (i, j) de directions de Z_{ij} :

$$S_{f_{ij}}^* = \{Z_i\}^T [S_f] \{Z_j\} \quad (10.18)$$

où $\{Z_i\}$ représente la $i^{\text{ème}}$ direction, soit la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de changement de base Z . Le produit matriciel classique qui est utilisé dans ces relations ne permet pas d'écrire une telle relation pour la matrice des bispectres. Nous avons donc décidé de définir un nouveau produit matriciel qui permet d'écrire :

$$D_{f_{ijk}}^* = \Pi_{3D}([D_f], \{Z_i\}, \{Z_j\}, \{Z_k\}) \quad (10.19)$$

et qui est une généralisation du produit matriciel à deux dimensions que l'on note alors :

$$S_{f_{ij}}^* = \{Z_i\}^T [S_f] \{Z_j\} = \Pi_{2D}([S_f], \{Z_i\}, \{Z_j\}) \quad (10.20)$$

La relation 10.19 permet de calculer la projection de la matrice des bispectres $[D_f]$ dans les directions $\{Z_i\}$, $\{Z_j\}$ et $\{Z_k\}$. Il suffit de répéter cette opération pour chaque triplet de directions et ainsi obtenir la matrice des bispectres projetée $[D_{f^*}]$.

On peut se convaincre assez facilement que le produit matriciel Π_{3D} que nous avons défini est bel et bien une généralisation du produit matriciel classique Π_{2D} . En effet, il suffit de considérer que le produit matriciel classique n'est pas obtenu par la somme des produits des éléments des lignes et colonnes comme habituellement mais plutôt en procédant au produit terme à terme des deux matrices :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} Z_i^2 & Z_i Z_j \\ Z_i Z_j & Z_j^2 \end{bmatrix} \quad (10.21)$$

puis en sommant les quatre termes alors obtenus. En réalisant cette opération, on obtient une expression de l'élément $S_{f_{ij}}^*$ de la matrice des densités spectrales $[S_f^*]$:

$$\begin{aligned} S_{f_{ij}}^* &= \{Z_i\}^T [S_f] \{Z_j\} = \Pi_{2D}([S_f], \{Z_i\}, \{Z_j\}) \\ &= Z_i^2 S_{11} + Z_i Z_j (S_{12} + S_{21}) + Z_j^2 S_{22} \end{aligned} \quad (10.22)$$

En répétant cette opération pour les différents couples (i, j) , tous les éléments de la matrice $[S_f^*]$ peuvent être calculés.

Le produit matriciel tridimensionnel est une généralisation à trois dimensions du produit tel qu'il vient d'être présenté. La figure 10.1 illustre (en-dessous) graphiquement le calcul de la projection de la matrice des bispectres $[D]$ de dimensions $3 \times 3 \times 3$ selon les directions $\{Z_i\}$, $\{Z_j\}$ et $\{Z_k\}$:

$$D_{f_{ijk}}^* = \Pi_{3D}([D_f], \{Z_i\}, \{Z_j\}, \{Z_k\}) \quad (10.23)$$

Le produit consiste donc dans un premier temps à former la matrice cubique (représentée à droite) obtenue à partir des éléments de Z_i , Z_j et Z_k . Lorsque cette matrice est établie, il reste à réaliser le produit terme à terme avec les éléments de $[D]$ (représentée à gauche).

Pour donner une illustration plus simple, nous avons également représenté le calcul de la projection de la matrice $[D]$ de dimensions 2×2 caractérisant les processus aléatoires

f_1 et f_2 dans la nouvelle base définie par :

$$\begin{aligned} f_1^* &= Z_{11}f_1 + Z_{21}f_2 \\ f_2^* &= Z_{12}f_1 + Z_{22}f_2 \\ f_3^* &= Z_{13}f_1 + Z_{23}f_2 \end{aligned} \quad (10.24)$$

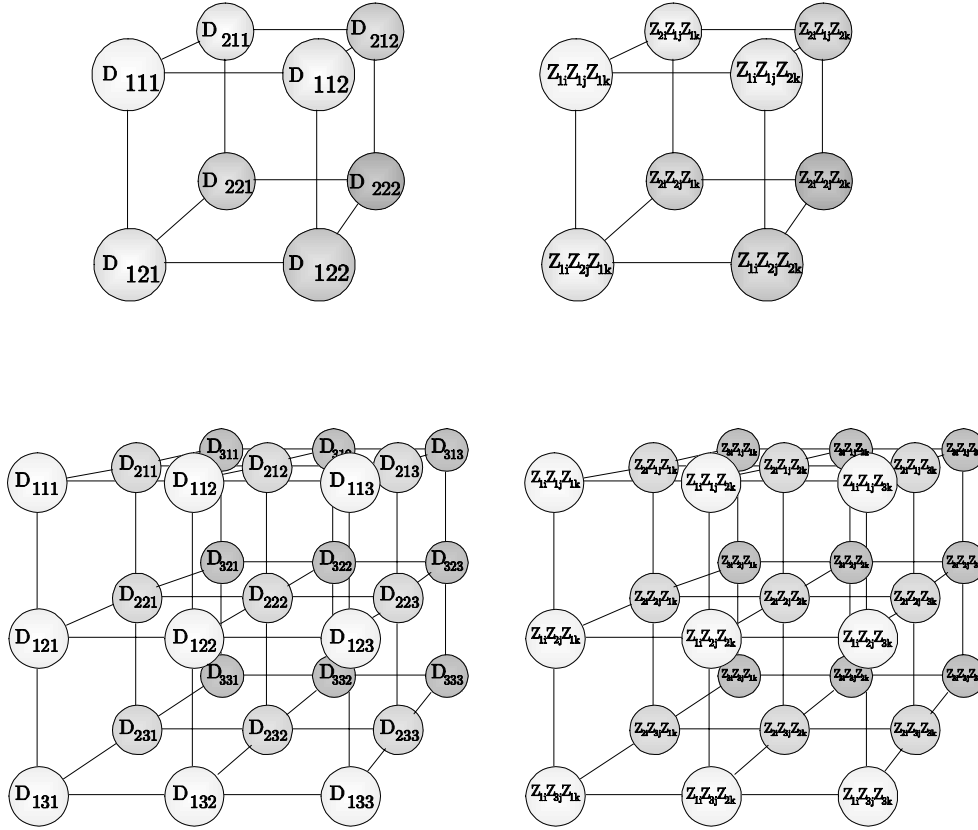


FIG. 10.1 – Illustration du fonctionnement du produit matriciel Π_{3D}

La matrice des bispectres caractérisant les statistiques conjointes des processus aléatoires f_1^* , f_2^* et f_3^* peut être obtenue en répétant l'opération pour tous les triplets (i, j, k) possibles.

Calcul des sollicitations Après ces premières réflexions sur les notions de matrice des bispectres et le changement de base, revenons maintenant à l'expression des caractéristiques des sollicitations aux noeuds. Etant donné que la sollicitation appliquée en un noeud de la structure s'exprime par une somme de terme :

$$f_i = a_i + b_i u_i + c_i u_i^2 \quad (10.25)$$

les développements que nous venons d'introduire vont nous aider à établir l'expression de la matrice des bispectres des sollicitations nodales. Au vu des développements que nous venons de mener, nous comprenons maintenant que les bispectres (éventuellement

croisés) des forces appliquées aux noeuds du modèle s'expriment chacun par la somme de 27 termes, chacun de ces termes étant associé à un bispectre croisé entre une puissance (de 0 à 2) de la vitesse de la turbulence existant en un noeud (de 1 à 3).

Pour présenter une dernière fois les choses de manière précise, nous pouvons reprendre le raisonnement complet. Concentrons-nous dans un premier temps sur l'expression des termes diagonaux de la matrice des bispectres des forces aux noeuds. Comme toujours, nous allons débiter dans le domaine temporel ; la fonction de bicorrélation de la sollicitation au noeud i s'exprime par :

$$B_{f_i}(t_1, t_2) = E \left[(a_i + b_i u_i(t) + c_i u_i^2(t)) (a_i + b_i u_i(t + t_1) + c_i u_i^2(t + t_1)) \right. \\ \left. (a_i + b_i u_i(t + t_2) + c_i u_i^2(t + t_2)) \right] \quad (10.26)$$

Sous cette notation, on peut retrouver les 27 termes annoncés.

Le triple produit de cette relation peut être développé et nous pouvons ensuite calculer séparément chacun des termes ainsi obtenus. Etant donné que le processus aléatoire $u_i(t)$ est un processus gaussien, nous savons que les fonctions moments d'ordre impair sont nulles. Il ne reste donc :

$$B_{f_i}(t_1, t_2) = a_i^3 + c_i^3 E[u_i^2(t) u_i^2(t + t_1) u_i^2(t + t_2)] + 3a_i^2 c_i \sigma_{u_i}^2 \\ + b_i^2 c_i E[u_i(t) u_i(t + t_1) u_i^2(t + t_2) + u_i(t) u_i^2(t + t_1) u_i(t + t_2)] \\ + b_i^2 c_i E[u_i^2(t) u_i(t + t_1) u_i(t + t_2)] \\ + b_i^2 a_i E[u_i(t) u_i(t + t_1) + u_i(t) u_i(t + t_2) + u_i(t + t_1) u_i(t + t_2)] \\ + c_i^2 a_i E[u_i^2(t + t_1) u_i^2(t + t_2) + u_i^2(t) u_i^2(t + t_1) + u_i^2(t) u_i^2(t + t_2)] \quad (10.27)$$

Les moments qui restent à évaluer dans cette expression sont des fonctions moments d'ordre supérieur à l'ordre 2. Etant donné que le processus u_i est un processus gaussien, ces fonctions moments peuvent s'exprimer en fonction de l'autocorrélation uniquement. Nous avons vu, lors de l'étude du système à un degré de liberté, comment obtenir ces expressions. Nous ne revenons plus maintenant sur ce point et passons donc directement au résultat :

$$B_{f_i}(t_1, t_2) = (a_i + c_i \sigma_{u_i}^2)^3 + b_i^2 (a_i + c_i \sigma_{u_i}^2) (R_{u_1}(t_1) + R_{u_1}(t_1) + R_{u_1}(t_1 - t_2)) \\ + 2b_i^2 c_i (R_{u_1}(t_1) R_{u_1}(t_2) + R_{u_1}(t_1) R_{u_1}(t_1 - t_2) + R_{u_1}(t_2) R_{u_1}(t_1 - t_2)) \\ + 2c_i^2 (a_i + c_i \sigma_{u_i}^2) (R_{u_1}^2(t_1) + R_{u_1}^2(t_1) + R_{u_1}^2(t_1 - t_2)) \\ + 8c_i^3 R_{u_1}(t_1) R_{u_1}(t_2) R_{u_1}(t_1 - t_2) \quad (10.28)$$

On peut vérifier assez facilement qu'en posant $a_i = \gamma \bar{U}^2$, $b = 2\gamma \bar{U}$ et $c = \gamma$, cette relation dégénère en l'expression du trispectre de sollicitation qui a été établie lors de l'étude de l'oscillateur simple (Eq. 4.210, p.171).

On peut également vérifier que le moment centré d'ordre 3 est identique à celui qui avait été obtenu lors de l'étude de l'oscillateur simple. En effet, les trois premiers moments

totaux s'expriment par :

$$\begin{aligned} m_1 &= a_i + c_i \sigma_{u_i}^2 \\ m_2 &= a_i^2 + (2a_i c_i + b_i^2) \sigma_{u_i}^2 + 3c_i^2 \sigma_{u_i}^4 \end{aligned} \quad (10.29)$$

$$m_3 = B_{f_i}(0, 0) \quad (10.30)$$

$$\begin{aligned} &= (a_i + c_i \sigma_{u_i}^2)^3 + 3b_i^2 (a_i + c_i \sigma_{u_i}^2) \sigma_{u_i}^2 + 6b_i^2 c_i \sigma_{u_i}^4 + 6c_i^2 (a_i + c_i \sigma_{u_i}^2) \sigma_{u_i}^4 \\ &\quad + 8c_i^3 \sigma_{u_i}^6 + (6c_i^2 a_i + 6c_i^2 c_i \sigma_{u_i}^2) \sigma_{u_i}^4 \\ &= 15c_i^3 \sigma_{u_i}^6 + 9c_i (a_i c_i + b_i^2) \sigma_{u_i}^4 + 3a_i (a_i c_i + b_i^2) \sigma_{u_i}^2 + a_i^3 \end{aligned} \quad (10.31)$$

et donc

$$\tilde{m}_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 = 2\sigma_{u_i}^4 c_i (3b_i^2 + 4c_i^2 \sigma_{u_i}^2)$$

Le moment centré d'ordre 3 est donc nul si les termes d'ordre 2 ou plus du chargement sont nuls ($c_i = 0$). La sollicitation est alors gaussienne. Ceci rejoint des réflexions déjà formulées.

Dans le cadre d'une analyse au vent turbulent, ce sont essentiellement les caractéristiques dans le domaine fréquentiel qui sont intéressantes. Les éléments diagonaux de la matrice des bispectres de sollicitation sont obtenus en prenant la transformée de Fourier double des éléments correspondant de la matrice des fonctions de bicorrélation :

$$\begin{aligned} D_{f_i}(\omega_1, \omega_2) &= (a_i + c_i \sigma_{u_i}^2)^3 \delta(\omega_1) \delta(\omega_2) + \\ &\quad + (a_i + c_i \sigma_{u_i}^2) \left(b_i^2 S_{u_i}(\omega_2) + 2c_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i}(\omega) S_{u_i}(\omega_2 - \omega) d\omega \right) \delta(\omega_1) \\ &\quad + (a_i + c_i \sigma_{u_i}^2) \left(b_i^2 S_{u_i}(\omega_1) + 2c_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i}(\omega) S_{u_i}(\omega_1 - \omega) d\omega \right) \delta(\omega_2) \\ &\quad + (a_i + c_i \sigma_{u_i}^2) \left(b_i^2 S_{u_i}(\omega_1) + 2c_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i}(\omega) S_{u_i}(\omega_2 - \omega) d\omega \right) \delta(\omega_1 + \omega_2) \\ &\quad + 2b_i^2 c_i (S_{u_i}(\omega_1) S_{u_i}(\omega_2) + S_{u_i}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_i}(\omega_2) + S_{u_i}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_i}(\omega_1)) \\ &\quad + 8c_i^3 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i}(\omega + \omega_1) S_{u_i}(\omega_2 - \omega) S_{u_i}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (10.32)$$

De nouveau, en posant $a_i = \gamma \bar{U}^2$, $b_i = 2\gamma \bar{U}$ et $c_i = \gamma$, on peut très facilement retrouver les expressions qui ont été données dans le cadre de l'étude de l'oscillateur simple (Eq. 4.221). Aussi, si on laisse de côté les termes présentant des fonctions de Dirac, il ne reste que le bispectre centré, c'est-à-dire tel que l'on retrouve le moment centré d'ordre 3 après intégration sur le domaine bidimensionnel des pulsations. Ceci présente également l'avantage de faciliter la représentation numérique du bispectre. Dans la suite, lorsque nous parlerons de bispectre, nous ne considérerons donc que :

$$\begin{aligned} D_{f_i}(\omega_1, \omega_2) &= 2b_i^2 c_i (S_{u_i}(\omega_1) S_{u_i}(\omega_2) + S_{u_i}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_i}(\omega_2) + S_{u_i}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_i}(\omega_1)) \\ &\quad + 8c_i^3 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i}(\omega + \omega_1) S_{u_i}(\omega_2 - \omega) S_{u_i}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (10.33)$$

dont on peut vérifier assez facilement que la double intégration donne bien le moment centré d'ordre 3 ($2\sigma_{u_i}^4 c_i (3b_i^2 + 4c_i^2 \sigma_{u_i}^2)$). Le coefficient de dissymétrie de la sollicitation appliquée au noeud i de la structure peut donc être obtenu assez facilement par :

$$\gamma_{3f_i} = \frac{\sigma_{u_i}^4 (6c_i b_i^2 + 8c_i^3 \sigma_{u_i}^2)}{(\sigma_{u_i}^2 (b_i^2 + 2c_i^2 \sigma_{u_i}^2))^{3/2}} = \frac{2c_i \sigma_{u_i}}{b_i} \frac{\left(3 + \frac{4c_i^2 \sigma_{u_i}^2}{b_i^2}\right)}{\left(1 + \frac{2c_i^2 \sigma_{u_i}^2}{b_i^2}\right)^{3/2}} \simeq \frac{6c_i \sigma_{u_i}}{b_i} \quad (10.34)$$

où la dernière approximation n'est valable que si $\frac{c_i \sigma_{u_i}}{b_i}$ est petit vis-à-vis de l'unité⁴. Si l'on se replace dans le contexte du chargement aérodynamique étudié depuis le début de ce document, cette hypothèse est licite et l'on retrouve la relation que nous avons déjà obtenue : $\gamma_{3f_i} \simeq 3I_{u_i}$.

Nous venons de voir comment calculer, dans le cadre de l'analyse d'une structure à plusieurs degrés de liberté, les éléments diagonaux de la matrice (cubique) des bispectres des sollicitations nodales. Jusqu'à ce stade, nous n'avons encore rien ajouté par rapport aux développements menés sur la structure à un degré de liberté.

L'estimation des éléments non diagonaux de cette matrice relève d'une démarche similaire, plus générale et donc fatalement plus lourde à développer. Nous commençons toujours le raisonnement dans le domaine temporel, par l'estimation de la fonction de bicorrélation croisée entre les forces nodales agissant en trois points distincts de la structure. Afin d'alléger les développements, nous ne reprenons plus dans la suite les fonctions moments d'ordre impair que nous savons égales à zéro pour des processus aléatoires conjointement gaussiens⁵ :

$$B_{f_i f_j f_k}(t_1, t_2) = E \left[(a_i + b_i u_i(t) + c_i u_i^2(t)) (a_j + b_j u_j(t + t_1) + c_j u_j^2(t + t_1)) (a_k + b_k u_k(t + t_2) + c_k u_k^2(t + t_2)) \right] \quad (10.35)$$

⁴Cette simplification pourrait ne pas être valable. Nous verrons dans la dernière partie de ce document que les paramètres a_i , b_i et c_i peuvent être différents de ce qui a été utilisé depuis le début de ce document. En d'autres termes, les non linéarités du chargement peuvent venir d'ailleurs que du terme $\gamma u^2(t)$.

⁵Nous n'avons en réalité pas encore démontré cette propriété pour ces processus conjoints. Pour des raisons de simplicité, nous ne rentrons pas vraiment dans ces détails. Au paragraphe 4.3 nous avons démontré cette propriété sur base d'un seul processus aléatoire. En adaptant le raisonnement en utilisant cette fois :

$$p_x(x, y; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2(t_1, t_2)}} e^{-\frac{x^2 - 2\rho(t_1, t_2)xy + y^2}{2\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2(t_1, t_2))}}$$

où $\rho(t_1, t_2)$ représente la fonction de cross-corrélation entre les processus aléatoires x et y , la propriété que nous utilisons peut être établie. Nous laissons le soin au lecteur de terminer le raisonnement. La démonstration complète et rigoureuse peut avantageusement se baser sur le calcul de la fonction caractéristique croisée :

$$M(\theta_1, \theta_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} p_x(x, y; t_1, t_2) e^{i\theta_1 x} e^{i\theta_2 y} dx dy = e^{-\left(\frac{\sigma_x^2 \theta_1^2}{2} + \rho(t_1, t_2) \sigma_x \sigma_y \theta_1 \theta_2 + \frac{\sigma_y^2 \theta_2^2}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}
B_{f_i f_j f_k}(t_1, t_2) = & E[a_i a_j a_k + a_i b_j b_k u_k(t+t_2) u_j(t+t_1) + b_i a_j b_k u_i(t) u_k(t+t_2) \\
& + b_i b_j a_k u_i(t) u_j(t+t_1) + c_i a_j a_k u_i^2(t) + a_i c_j a_k u_j^2(t+t_1) \\
& + a_i a_j c_k u_k^2(t+t_2) + a_i c_j c_k u_k^2(t+t_2) u_j^2(t+t_1) \\
& + c_i a_j c_k u_i^2(t) u_k^2(t+t_2) + c_i c_j a_k u_i^2(t) u_j^2(t+t_1) \\
& + c_i b_j b_k u_i^2(t) u_j(t+t_1) u_k(t+t_2) + b_i c_j b_k u_i(t) u_k(t+t_2) u_j^2(t+t_1) \\
& + b_i b_j c_k u_i(t) u_k^2(t+t_2) u_j(t+t_1) + c_i c_j c_k u_i^2(t) u_k^2(t+t_2) u_j^2(t+t_1)] \\
\end{aligned} \tag{10.36}$$

Le calcul de l'espérance mathématique intervenant dans cette relation fait intervenir les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
E[u_k(t+t_2) u_j(t+t_1)] &= R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) \\
E[u_k^2(t+t_2) u_j^2(t+t_1)] &= \sigma_{u_k}^2 \sigma_{u_j}^2 + 2R_{u_k u_j}^2(t_1 - t_2) \\
E[u_i^2(t) u_j(t+t_1) u_k(t+t_2)] &= 2R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) + \sigma_{u_i}^2 R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) \\
E[u_i^2(t) u_j^2(t+t_1) u_k^2(t+t_2)] &= \sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \sigma_{u_k}^2 + 8R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) \\
&+ 2\sigma_{u_i}^2 R_{u_j u_k}^2(t_1 - t_2) + 2\sigma_{u_j}^2 R_{u_i u_k}^2(t_2) + 2\sigma_{u_k}^2 R_{u_i u_j}^2(t_1)
\end{aligned}$$

ainsi que les variations cycliques que l'on peut obtenir. Ces relations sont identiques à celles qui ont été utilisées et peuvent être obtenues sur base de raisonnements identiques à ceux qui ont été menés au paragraphe 4.3. La fonction de bicorrélation croisée entre les trois forces s'exprime donc finalement en terme des fonctions d'autocorrélation de la composante turbulente uniquement :

$$\begin{aligned}
B_{f_i f_j f_k}(t_1, t_2) = & a_i a_j a_k + a_i b_j b_k R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) + b_i a_j b_k R_{u_i u_k}(t_2) + b_i b_j a_k R_{u_i u_j}(t_1) \\
& + c_i a_j a_k \sigma_{u_i}^2 + a_i c_j a_k \sigma_{u_j}^2 + a_i a_j c_k \sigma_{u_k}^2 \\
& + a_i c_j c_k \left(\sigma_{u_k}^2 \sigma_{u_j}^2 + 2R_{u_k u_j}^2(t_1 - t_2) \right) \\
& + c_i a_j c_k \left(\sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_k}^2 + 2R_{u_i u_k}^2(t_2) \right) + c_i c_j a_k \left(\sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_j}^2 + 2R_{u_i u_j}^2(t_1) \right) \\
& + c_i b_j b_k \left(2R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) + \sigma_{u_i}^2 R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) \right) \\
& + b_i c_j b_k \left(2R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) + \sigma_{u_j}^2 R_{u_i u_k}(t_2) \right) \\
& + b_i b_j c_k \left(2R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) + \sigma_{u_k}^2 R_{u_i u_j}(t_1) \right) \\
& + c_i c_j c_k \left(\sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \sigma_{u_k}^2 + 8R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) \right) \\
& + c_i c_j c_k \left(2\sigma_{u_i}^2 R_{u_j u_k}^2(t_1 - t_2) + 2\sigma_{u_j}^2 R_{u_i u_k}^2(t_2) + 2\sigma_{u_k}^2 R_{u_i u_j}^2(t_1) \right)
\end{aligned} \tag{10.37}$$

Après l'application de la transformée de Fourier à cette expression, nous obtiendrons l'expression du bispectre croisé entre les sollicitations en différents noeuds. De cette expression, nous retirerons tous les termes faisant intervenir une fonction de Dirac, de sorte à obtenir un bispectre qui permette de retrouver le cumulants et non pas le moment après

intégration. Nous prenons donc l'avant et retirons dès à présent de l'expression de la fonction de bicorrélation croisée les termes qui seront supprimés :

$$\begin{aligned} B_{f_i f_j f_k}(t_1, t_2) = & 2c_i b_j b_k R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) + 2b_i c_j b_k R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) \\ & + 2b_i b_j c_k R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) \\ & + 8c_i c_j c_k R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (10.38)$$

La transformée de Fourier double de cette relation permet finalement d'obtenir l'expression centrée du bispectre croisé entre les forces nodales :

$$\begin{aligned} D_{f_i f_j f_k}(\omega_1, \omega_2) = & 2c_i b_j b_k S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{u_i u_k}(\omega_2) + 2b_i c_j b_k S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{u_j u_k}(\omega_1 + \omega_2) \\ & + 2b_i b_j c_k S_{u_i u_k}(\omega_2) S_{u_j u_k}(\omega_1 + \omega_2) \\ & + 8c_i c_j c_k \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) S_{u_j u_k}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (10.39)$$

dont l'intégrale numérique sur le domaine des pulsations permet de retrouver le moment centré d'ordre 3 des processus aléatoires f_i , f_j et f_k . Notons également que si $i = j = k$ cette relation dégénère en la formulation établie pour les éléments diagonaux de la matrice des bispectres. C'est en ce sens que cette relation peut être vue comme une généralisation de l'équation 10.33.

Puisqu'il s'exprime à partir des densités spectrales croisées des processus u_i , u_j et u_k le bispectre croisé entre les trois forces nodales devrait en toute rigueur être une grandeur complexe. Dans le cas particulier des vitesses de vent en différents points de l'espace, nous avons déjà vu que les densités spectrales croisées étaient réelles. Nous ne travaillons donc exclusivement qu'avec des bispectres de sollicitation, même croisés, réels.

Contrairement à la matrice des densités spectrales de sollicitation qui présente une symétrie ($S_{xy}(\omega) = \bar{S}_{yx}(\omega)$), la matrice des bispectres ne présente pas de symétrie, même cyclique vis-à-vis des indices i , j et k . On est donc a priori contraint de calculer et de stocker l'entière de la matrice (cubique) des bispectres, et ce, pour toutes les paires de fréquences (ω_1, ω_2) . Nous verrons dans la suite comment contourner cette difficulté.

La double intégration sur le domaine des pulsations de la relation 10.39 permet d'obtenir la matrice (cubique) des moments centrés d'ordre 3. Il s'agit d'une nouvelle grandeur mais dont on perçoit assez facilement la signification. Les éléments de cette matrice s'expriment par :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{3f_i f_j f_k} = & 2c_i b_j b_k \rho_{u_i u_j} \rho_{u_i u_k} \sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_j} \sigma_{u_k} + 2b_i c_j b_k \rho_{u_i u_j} \rho_{u_j u_k} \sigma_{u_i} \sigma_{u_j}^2 \sigma_{u_k} \\ & + 2b_i b_j c_k \rho_{u_i u_k} \rho_{u_j u_k} \sigma_{u_i} \sigma_{u_j} \sigma_{u_k}^2 + 8c_i c_j c_k \rho_{u_i u_j} \rho_{u_i u_k} \rho_{u_j u_k} \sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \sigma_{u_k}^2 \\ = & \rho_{u_i u_j} \rho_{u_i u_k} \rho_{u_j u_k} \sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \sigma_{u_k}^2 \\ & \left(\frac{2c_i b_j b_k}{\rho_{u_j u_k} \sigma_{u_j} \sigma_{u_k}} + \frac{2b_i c_j b_k}{\rho_{u_i u_k} \sigma_{u_i} \sigma_{u_k}} + \frac{2b_i b_j c_k}{\rho_{u_i u_j} \sigma_{u_i} \sigma_{u_j}} + 8c_i c_j c_k \right) \end{aligned} \quad (10.40)$$

Cette matrice possède quant à elle des propriétés de symétrie puisque qu'elle reste inchangée pour n'importe quelle inversion de deux indices, soit par exemple :

$$\tilde{m}_{3f_i f_j f_k} = \tilde{m}_{3f_j f_i f_k} \quad (10.41)$$

On comprend assez facilement que ces propriétés de symétrie sont valables pour toutes les matrices des moments d'ordre 3. Grâce à ces propriétés de symétrie, et contrairement à la description de la matrice des bispectres, nous pouvons nous limiter à ne représenter qu'une partie de la matrice des moments. La représentation complète de la matrice de dimensions (N, N, N) demande le calcul et le stockage de N^3 éléments. La propriété de symétrie qui vient d'être énoncée montre que deux moments sont identiques s'ils font intervenir les mêmes indices dans un ordre différent. Le nombre de moments a priori différents ne doit donc pas être obtenu en considérant le nombre de tirages de trois valeurs parmi N , avec remise et *avec* égard à l'ordre de sortie des résultats (soit N^3 le nombre total d'éléments de la matrice), mais plutôt le nombre de tirages de trois valeurs parmi N , avec remise et *sans* égard à l'ordre de sortie des résultats, soit $\frac{N(N+1)(N+2)}{6}$. Pour les grandes valeurs du nombre de processus croisés, on constate donc que prendre en compte la symétrie de la matrice des moments permet de réduire la taille nécessaire de stockage par six. La figure 10.2 illustre le raisonnement pour $N = 5$. Au lieu de devoir calculer et stocker $N^3 = 125$ valeurs (partie droite), seules $\frac{N(N+1)(N+2)}{6} = 35$ valeurs suffisent à représenter l'entièreté de la matrice.

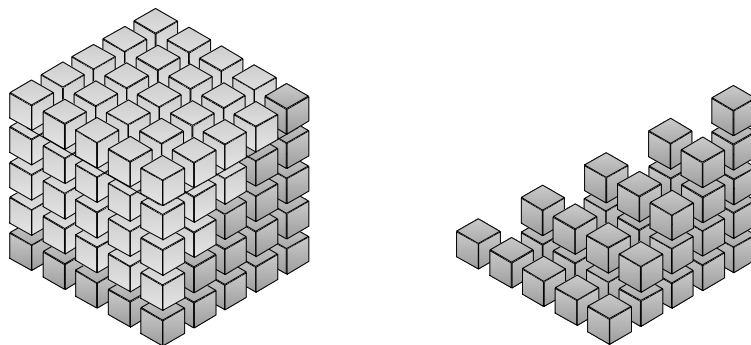


FIG. 10.2 – Représentation de la symétrie dans une matrice des moments d'ordre 3

D'un point de vue pratique, la partie utile de la matrice des moments centrés d'ordre 3 est stockée, dans notre code, sous la forme d'un vecteur. Une correspondance d'indices permet de passer du triplet (i, j, k) localisant un élément dans la matrice cubique à la coordonnée T de l'élément correspondant du vecteur. Il nous paraît relativement superflu de rentrer dans les descriptions de cette algorithmique assez particulière.

10.3 Caractéristiques des sollicitations modales

10.3.1 Densités spectrales

Afin de conserver toute généralité, menons un raisonnement assez large sur un système à plusieurs degrés de liberté. La matrice de densité spectrale des forces généralisées s'exprime à partir de celle des forces appliquées par :

$$[S_f^*] = [\Phi]^T [S_f] [\Phi] \quad (10.42)$$

Cette relation est tout à fait générale et est valable que les termes non linéaires du chargement soient pris en compte ou non. L'utilisation de cette relation est bien connue et

même largement appliquée. En ce qui concerne les réponses en base modale à l'ordre 2 et les réponses structurelles, la suite des développements est tout à fait classique. Les effets des termes non linéaires du chargement affectent donc simplement les densités spectrales des forces nodales. Etant donné que cette méthode d'analyse est bien connue, nous nous contenterons de présenter les développements à l'ordre 3.

Les conclusions tirées à la première partie pourraient être étendues à l'étude d'une structure à plusieurs degrés de liberté : pour les faibles intensités de turbulence rencontrées en pratique, les termes non linéaires de chargement ne permettent pas d'engendrer de modification significative des variances des déplacements.

10.3.2 Bispectres

Nous savons que les forces généralisées sont en réalité des combinaisons linéaires des forces appliquées aux noeuds de la structure. Grâce aux développements du paragraphe 10.2.2, nous sommes maintenant en mesure de projeter la matrice des bispectres de sollicitations dans une nouvelle base pour ainsi obtenir la matrice des bispectres des forces généralisées.

Pratiquement, nous calculons la matrice des bispectres en considérant successivement toutes les combinaisons possibles de trois modes. Pour chacune de ces trois combinaisons, nous devons calculer le produit matriciel (3D) suivant :

$$D_{f_{ijk}}^* = \Pi_{3D}([D_f], \{Z_i\}, \{Z_j\}, \{Z_k\}) \quad (10.43)$$

Etant donné que la matrice des bispectres des sollicitations est exclusivement réelle (particularité du chargement éolien), et que les modes propres sont également réels, la matrice des bispectres des forces généralisées est donc également réelle. Tout comme pour les sollicitations nodales, chacun de ses m^3 termes (où m représente le nombre de modes propres), est a priori différent et la matrice cubique complète doit donc être stockée. Par contre, après intégration sur le domaine bidimensionnel des pulsations, la matrice obtenue, la matrice des moments centrés des forces généralisées, possède la même symétrie que la matrice des moments d'ordre 3 des sollicitations nodales. Le même système de stockage peut donc être utilisé.

10.4 Réponses modales

Au vu des développements précédents, on conçoit donc aisément que la caractérisation complète de la réponse modale doive se faire également à l'aide d'une matrice cubique, chacun des éléments servant à caractériser les caractéristiques statistiques (éventuellement croisées) entre différents modes ainsi que la répartition de ces grandeurs dans l'espace bidimensionnel des fréquences.

10.4.1 Eléments diagonaux

Les éléments diagonaux de la matrice des bispectres des amplitudes modales sont les bispectres unilatéraux des amplitudes modales. De même qu'à l'ordre 2, la réponse dans un mode ne dépend que de la sollicitation dans ce mode à condition que l'amortissement

soit proportionnel⁶. La réponse dans le mode i s'exprime par la convolution suivante :

$$\eta_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_i^*(t - \tau) f_i^*(\tau) d\tau \quad (10.44)$$

qui est précisément la même relation que celle qui a été utilisée pour calculer la réponse de l'oscillateur simple. Les développements qui ont été menés à cette occasion restent donc valables pour estimer la réponse en base modale. Le bispectre unilatéral de la réponse dans le mode i s'exprime donc par :

$$D_{\eta_i}(\omega_1, \omega_2) = D_{f_i^*}(\omega_1, \omega_2) \bar{H}_i^*(\omega_1) \bar{H}_i^*(\omega_2) H_i^*(\omega_1 + \omega_2) \quad (10.45)$$

où $H_i^*(\omega)$ représente la fonction de transfert (modale) associée au mode i .

10.4.2 Eléments non diagonaux

Lors du calcul des caractéristiques d'ordre 2 de la réponse structurale, nous avons vu que certaines conditions pouvaient rendre les effets des cohérences entre amplitudes modales non négligeables. En effet, nous savons maintenant que si des modes présentent des fréquences propres proches et que les sollicitations dans ces modes sont fortement cohérentes, le calcul des densités spectrales croisées entre amplitudes modales doit nécessairement être entrepris, sous peine de compromettre de façon importante la précision sur les réponses structurales.

Les effets de ces termes croisés entre amplitudes modales peuvent également présenter une certaine importance à l'ordre 3. Il convient donc d'étudier également les bispectres croisés entre amplitudes dans des modes différents. Pour ce faire, nous repartons toujours d'une démarche dans le domaine temporel. On note que :

$$\begin{aligned} \eta_i(t_1) \eta_j(t_2) \eta_k(t_3) &= \int_0^{+\infty} h_i^*(\tau_1) f_i^*(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \int_0^{+\infty} h_j^*(\tau_2) f_j^*(t_2 - \tau_2) d\tau_2 \\ &\quad \int_0^{+\infty} h_k^*(\tau_3) f_k^*(t_3 - \tau_3) d\tau_3 \end{aligned} \quad (10.46)$$

$$\begin{aligned} &= \iiint_0^{+\infty} f_i^*(t_1 - \tau_1) f_j^*(t_2 - \tau_2) f_k^*(t_3 - \tau_3) \\ &\quad h_i^*(\tau_1) h_j^*(\tau_2) h_k^*(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (10.47)$$

La fonction de bicorrélation croisée est obtenue en prenant les espérances mathématiques membre à membre :

$$\begin{aligned} B_{\eta_i \eta_j \eta_k}(t_1, t_2, t_3) &= E [\eta_i(t_1) \eta_j(t_2) \eta_k(t_3)] \\ &= \iiint_0^{+\infty} h_i^*(\tau_1) h_j^*(\tau_2) h_k^*(\tau_3) B_{f_i^* f_j^* f_k^*}(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2, t_3 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (10.48)$$

⁶De toute façon, nous savons que s'il n'en était pas ainsi, les caractéristiques de la sollicitation pourraient être modifiées de sorte à prendre cette non proportionnalité en compte.

Tout au long de ce travail, nous ne nous intéressons qu'aux effets stationnaires, que ce soit en réponse ou en sollicitation. Nous considérons donc le cas où la fonction de bicorrélation croisée de la réponse peut s'exprimer en fonction des deux laps de temps $\Delta t_1 = t_2 - t_1$ et $\Delta t_2 = t_3 - t_1$. Tout comme lors des développements menés lors de l'étude de l'oscillateur simple, lorsque la bi-corrélation sera notée avec deux arguments, cela signifiera donc implicitement que le processus étudié est stationnaire :

$$B_{\eta_i \eta_j \eta_k}(\Delta t_1, \Delta t_2) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h_i^*(\tau_1) h_j^*(\tau_2) h_k^*(\tau_3) B_{f_i^* f_j^* f_k^*}(\Delta t_1 + \tau_1 - \tau_2, \Delta t_2 + \tau_1 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (10.49)$$

Lorsque le processus étudié est stationnaire, le bispectre de la grandeur étudiée présente ses caractéristiques statistiques de façon équivalente. Cette fonction est obtenue à partir de la transformée de Fourier double de la fonction de bicorrélation :

$$\begin{aligned} D_{\eta_i \eta_j \eta_k}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\eta_i \eta_j \eta_k}(\Delta t_1, \Delta t_2) e^{-i\omega_1 \Delta t_1} e^{-i\omega_2 \Delta t_2} d\Delta t_1 d\Delta t_2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h_i^*(\tau_1) h_j^*(\tau_2) h_k^*(\tau_3) B_{f_i^* f_j^* f_k^*}(\Delta t_1 + \tau_1 - \tau_2, \Delta t_2 + \tau_1 - \tau_3) \\ &\quad e^{-i\omega_1 \Delta t_1} e^{-i\omega_2 \Delta t_2} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\Delta t_1 d\Delta t_2 \end{aligned} \quad (10.50)$$

Le changement de variables

$$\Delta t_1 \rightarrow \theta_1 = \Delta t_1 + \tau_1 - \tau_2 \quad (10.51)$$

$$\Delta t_2 \rightarrow \theta_2 = \Delta t_2 + \tau_1 - \tau_3 \quad (10.52)$$

permet de simplifier le calcul de cette intégrale puisque l'on obtient alors un découplage des intégrales :

$$\begin{aligned} D_{\eta_i \eta_j \eta_k}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_1 \theta_1} e^{-i\omega_2 \theta_2} B_{f_i^* f_j^* f_k^*}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\ &\quad \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h_i^*(\tau_1) e^{i\tau_1(\omega_1 + \omega_2)} h_j^*(\tau_2) e^{-i\omega_1 \tau_2} h_k^*(\tau_3) e^{-i\omega_2 \tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (10.53)$$

et finalement l'expression du bispectre croisé entre les réponses dans les modes i , j et k s'exprime par :

$$D_{\eta_i \eta_j \eta_k}(\omega_1, \omega_2) = D_{f_i^* f_j^* f_k^*}(\omega_1, \omega_2) H_j^*(\omega_1) H_k^*(\omega_2) \bar{H}_i^*(\omega_1 + \omega_2) \quad (10.54)$$

Cette relation est applicable tant que le système étudié présente un amortissement proportionnel. Bien que le bispectre croisé de la sollicitation généralisée $D_{f_i^* f_j^* f_k^*}(\omega_1, \omega_2)$ soit une fonction réelle, on peut constater que le bispectre croisé entre réponses dans

différents modes est une grandeur complexe. Cependant, puisque les fonctions de transfert modales bénéficient de la propriété $H_i^*(-\omega) = \bar{H}_i^*(\omega)$, l'intégrale complète sur le domaine des couples de fréquences donne un résultat réel⁷. Il s'agit du moment centré croisé d'ordre 3 des amplitudes modales considérées ; il va donc de soi que cette grandeur soit réelle. Lors d'une application numérique, cela signifie également que la partie imaginaire des bispectres croisés des amplitudes modales ne doit être ni calculée, ni stockée. Aussi, dans le cadre d'une application numérique, le domaine d'intégration peut se limiter à un demi-espace.

De même que pour les matrices des bispectres rencontrées jusqu'ici, la matrice des bispectres des amplitudes modales possède des éléments qui sont tous différents. Aussi, la matrice des moments centrés, obtenue par intégration sur le domaine des fréquences, possède la même symétrie que les autres matrices des moments. Nous pouvons donc retenir jusqu'à ce point que les matrices des bispectres doivent être stockées intégralement mais qu'environ un sixième des matrices des moments suffit à leur caractérisation complète.

10.4.3 Le couplage modal à l'ordre 3

Nous venons de voir comment les caractéristiques statistiques croisées entre les réponses dans différents modes pouvaient être calculées. A ce stade, nous sommes inévitablement soumis à la même tentation que celle qui a poussé Davenport à établir la méthode simplifiée : est-il vraiment nécessaire que ces contributions croisées soient estimées ? Quel impact ont-elles sur le calcul des déplacements de la structure étudiée, du modèle élément fini ?

Aussi, si nous avons conclu à l'ordre 2 que les deux modes intervenant devaient avoir des fréquences propres proches pour que le couplage soit pris en compte, doit-on également conclure que les trois modes doivent avoir des fréquences propres proches à l'ordre 3 ? Nous ne verrons qu'au paragraphe suivant la démarche permettant d'obtenir les caractéristiques statistiques des déplacements. On imagine cependant dès à présent que les contributions croisées occuperont d'autant plus d'importance qu'elles sont non négligeables vis-à-vis des éléments diagonaux de la matrice des bispectres.

Admettons que l'on étudie un système à trois degrés de liberté dont les caractéristiques en base modale sont les suivantes :

$$[m^*] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} ; \quad [k^*] = \begin{bmatrix} \alpha^2 K & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 K & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 K \end{bmatrix} ; \quad [c^*] = 2\xi\sqrt{KM} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

Ce système est assez simple car il présente les mêmes masses⁸ et taux d'amortissement dans chacun des modes. Il va nous permettre d'étudier l'influence des espacements entre fréquences propres sur les caractéristiques d'ordre 3 des réponses modales. Les pulsations propres de ce système sont :

$$\varpi_1 = \alpha\sqrt{K/M} ; \quad \varpi_2 = \beta\sqrt{K/M} ; \quad \varpi_3 = \gamma\sqrt{K/M} \quad (10.55)$$

⁷La démonstration rigoureuse de ceci a été réalisée pour le bispectre de la réponse de l'oscillateur simple lors de la première partie (p. 165)

⁸Choisir des masses modales identiques n'enlève aucune généralité aux conclusions. Il ne s'agit que d'une simplification de notations

L'expérience que nous avons du couplage à l'ordre 2 nous laisse pressentir l'existence d'un critère mêlant à la fois des conditions sur la sollicitation et sur les caractéristiques structurelles. Afin de ne juger que l'importance de la proximité des fréquences propres, nous supposons que tous les éléments de la matrice des bispectres des sollicitations généralisées sont égaux à l'unité. Les éléments de la matrice des bispectres des amplitudes modales s'expriment donc assez facilement par :

$$D_{\eta_i \eta_j \eta_k}(\omega_1, \omega_2) = H_j^*(\omega_1) H_k^*(\omega_2) \bar{H}_i^*(\omega_1 + \omega_2) \quad (10.56)$$

Les moments centrés d'ordre 3 (éventuellement croisés) des amplitudes modales, s'obtiennent par double intégration sur le domaine des pulsations. Par exemple, les éléments diagonaux de la matrice des moments centrés d'ordre 3 s'expriment par (Eq. 4.204, p. 170) :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{3\eta_1 \eta_1 \eta_1} &= \frac{8\pi^2}{3K^3} \frac{K}{M} \frac{1}{\alpha^4} \frac{1}{1+8\xi^2} \\ \tilde{m}_{3\eta_2 \eta_2 \eta_2} &= \frac{8\pi^2}{3K^3} \frac{K}{M} \frac{1}{\beta^4} \frac{1}{1+8\xi^2} \\ \tilde{m}_{3\eta_3 \eta_3 \eta_3} &= \frac{8\pi^2}{3K^3} \frac{K}{M} \frac{1}{\gamma^4} \frac{1}{1+8\xi^2} \end{aligned} \quad (10.57)$$

Le moment d'ordre 3 croisé entre les trois amplitudes modales s'exprime par

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{3\eta_1 \eta_2 \eta_3} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_2^*(\omega_1) H_3^*(\omega_2) \bar{H}_1^*(\omega_1 + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \frac{8\pi^2}{K^3} \frac{K}{M} \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} \frac{N_{\eta_1 \eta_2 \eta_3}(\alpha, \beta)}{D_{\eta_1 \eta_2 \eta_3}(\alpha, \beta)} \end{aligned} \quad (10.58)$$

où

$$\begin{aligned} N_{\eta_1 \eta_2 \eta_3}(\alpha, \beta) &= (-1 + 4\xi^2) (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) \\ &\quad + (1 + 8\xi^4) [(\alpha + \beta) \gamma^2 + \alpha^2 (\beta + \gamma) + \beta^2 (\alpha + \gamma)] + 2\alpha\beta\gamma (-1 + 2\xi^2 + 8\xi^4) \\ D_{\eta_1 \eta_2 \eta_3}(\alpha, \beta) &= \left((\alpha + \beta - \gamma)^2 + 4\xi^2 (\alpha + \beta) \gamma \right) \left((\beta + \gamma - \alpha)^2 + 4\xi^2 (\beta + \gamma) \alpha \right) \\ &\quad \left((\gamma + \alpha - \beta)^2 + 4\xi^2 (\gamma + \alpha) \beta \right) \end{aligned}$$

En posant $\alpha = \beta = \gamma$ dans cette relation, on peut retrouver l'expression du moment centré unilatéral (10.57). Bien que le bispectre croisé des amplitudes modales dans les trois modes ne soit pas symétrique par rapport aux paramètres α , β et γ , ces paramètres jouent un rôle identique dans l'expression du moment obtenu après la double intégration. Ceci rejoint la réflexion sur les symétries des matrices des moments et des matrices des bispectres.

Tout comme cela est fait à l'ordre 2, l'importance du terme non diagonal peut être jugée de façon assez intéressante en le rapportant à la moyenne géométrique des éléments diagonaux correspondants. Nous étudions donc la fonction :

$$\frac{3(1 + 8\xi^2) (\alpha^4 \beta^4 \gamma^4)^{1/3} N_{\eta_1 \eta_2 \eta_3}(\alpha, \beta)}{\alpha + \beta + \gamma} \frac{1}{D_{\eta_1 \eta_2 \eta_3}(\alpha, \beta)} \quad (10.59)$$

L'étude de cette fonction montre assez facilement que, pour des structures faiblement amorties, le dénominateur prend de faibles valeurs lorsque :

$$\begin{aligned} & \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \text{ou} & \quad \beta + \gamma - \alpha = 0 \\ \text{ou} & \quad \gamma + \alpha - \beta = 0 \end{aligned}$$

Au second ordre, nous avons pu conclure que le couplage modal ne devait être pris en compte que lorsque deux modes présentaient des fréquences propres proches. Au troisième ordre, le phénomène est différent. Ces relations montrent que le couplage entre trois modes doit être pris en compte lorsque la plus grande fréquence peut s'exprimer comme la somme des deux autres.

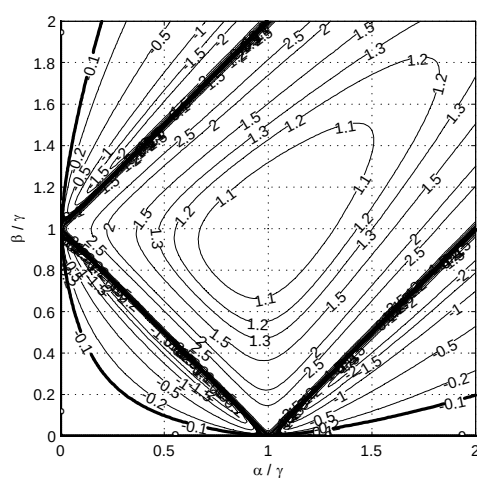


FIG. 10.3 – Importance des moments croisés d'ordre 3 ($\xi = 0.02$)

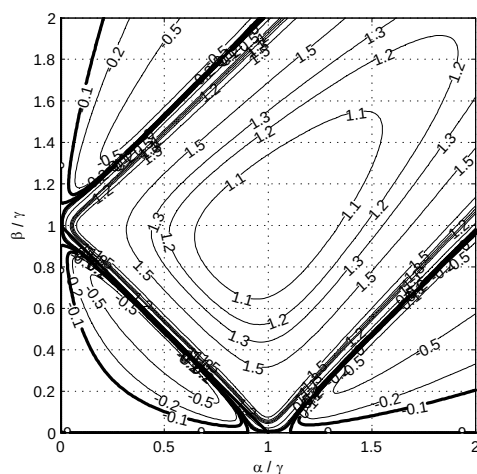


FIG. 10.4 – Importance des moments croisés d'ordre 3 ($\xi = 0.05$)

Afin de préciser les domaines dans lesquels l'interaction doit être considérée, la fonction étudiée est représentée en courbes de niveaux et en fonction des rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$ aux figures 10.3 et 10.4. On y retrouve clairement les trois axes particuliers le long desquels les termes de couplage ne peuvent pas être négligés. Ils peuvent même être plus importants que les éléments diagonaux. Ceci est tout à fait particulier à l'ordre trois. En effet, les études similaires qui ont été entreprises à l'ordre 2 ont montré que les moments centrés associés aux termes non diagonaux (covariances) étaient nécessairement plus petits que la moyenne géométrique des moments centrés provenant des termes diagonaux (variances)⁹.

Dans la zone des petites valeurs de $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$, la fonction étudiée présente de faibles valeurs; les termes de couplage sont plus petits que les éléments diagonaux correspondants et pourraient donc éventuellement être négligés. On peut constater que la zone où cette simplification est licite est fortement restreinte. En pratique, lors de l'étude d'une structure plus complexe, nous ne pourrions pas formuler la simplification consistant à négliger les termes de couplage d'ordre 3 entre différents modes propres.

Pour conclure, on peut également étudier le cas particulier d'une structure à deux degrés de liberté. Ce cas dégénéré peut être obtenu en posant $\alpha = \beta$. Contrairement à l'étude au second ordre pour laquelle le couplage est maximal lorsque les deux pulsations propres sont presque identiques, au troisième ordre, les termes de couplage entre les modes propres occupent une importance maximale lorsque les fréquences propres sont dans un rapport de simple à double.

10.5 Réponses structurelles

Les réponses en chacun des noeuds de la structure sont obtenues par combinaison linéaire des amplitudes modales :

$$\{x\} = [\Phi] \{\eta\} \quad (10.60)$$

La matrice des bispectre des réponses structurelles (que ce soit en déplacement ou en effort) peut donc être obtenue à partir de la matrice des bispectres des amplitudes modales sur base du raisonnement développé précédemment. Ainsi, le bispectre unilatéral du déplacement en un noeud s'exprime par :

$$\begin{aligned} D_{x_{iii}} &= \Pi_{3D} ([D_\eta], \{\Phi_j^T\}, \{\Phi_k^T\}, \{\Phi_l^T\}) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \Phi_{ij} \Phi_{ik} \Phi_{il} D_{\eta_{jkl}} \end{aligned} \quad (10.61)$$

L'estimation du bispectre unilatéral d'un déplacement requiert donc la connaissance de tous les bispectres croisés entre amplitudes modales. Puisque tous les éléments des matrices des bispectres sont a priori différents, cela nécessite donc le calcul et le stockage de matrices complètes.

L'objectif principal des applications numériques qui nous intéressent concerne essentiellement le calcul des moments centrés d'ordre 3 des réponses structurelles. C'est d'ailleurs également l'objectif que devrait atteindre l'ingénieur de projet chargé d'estimer les effets d'ordres supérieurs du chargement.

⁹Conséquence du théorème de Cauchy-Schwartz

Fixons-nous donc maintenant dans le contexte où seuls les moments centrés des réponses structurelles doivent être estimés et où les bispectres de ces réponses ne présentent pas d'intérêt. Etant donné que la relation 10.61 est une relation statique, la double intégration permettant d'obtenir les moments peut être reportée sur les bispectres des amplitudes modales. Tout comme à l'ordre 2, la matrice des moments centrés des déplacements structurels peut donc être obtenue en projetant la matrice des moments centrés des amplitudes modales :

$$\tilde{m}_{3x_{iii}} = \Pi_{3D}([\tilde{m}_{3\eta}], \{\Phi_j^T\}, \{\Phi_k^T\}, \{\Phi_l^T\}) \quad (10.62)$$

Nous savons que la matrice $[\tilde{m}_{3\eta}]$ présente des propriétés de symétrie et qu'environ un sixième de ses éléments seulement peut être calculé et stocké. A condition de travailler avec un amortissement aérodynamique proportionnel, chacun des moments de la matrice des moments centrés des amplitudes modales provient d'un bispectre de la matrice des bispectres des sollicitations généralisées (Eq 10.54). Etant donné que nous n'avons besoin que d'une partie de la matrice des moments centrés, il en va donc de même pour la matrice des bispectres des sollicitations généralisées.

Nous sommes donc ainsi remontés jusqu'au début du calcul. Avec plus de recul, on voit donc que seule une partie de la matrice des bispectres des forces généralisées peut être calculée et stockée pour autant que l'on ne s'intéresse qu'aux moments des réponses structurelles. Le code de calcul que nous avons mis au point offre deux possibilités :

- les bispectres de certains déplacements structurels doivent être calculés. Dans ce cas, l'entière de la matrice des bispectres généralisés est calculée et stockée ;
- seuls les moments d'ordre 3 des déplacements structurels doivent être calculés. Dans ce cas, la symétrie des matrices tridimensionnelles utilisées est prise en compte depuis le calcul de la matrice des bispectres des forces généralisées.

Aussi, nous avons conservé la possibilité de calculer les moments d'ordre 3 des déplacements structurels en conservant les contributions intermodales :

$$\tilde{m}_{3x_{iii}} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \Phi_{ij} \Phi_{ik} \Phi_{il} \tilde{m}_{3\eta_{jkl}} \quad (10.63)$$

ou en les négligeant :

$$\tilde{m}_{3x_{iii}} = \sum_{j=1}^m \Phi_{ij}^3 \tilde{m}_{3\eta_{jjj}} \quad (10.64)$$

Nous avons vu au paragraphe précédent que les conditions (structurelles) sous lesquelles les termes de couplage pouvaient être négligés étaient très étroites. Pratiquement, on ne peut espérer pouvoir négliger les termes de couplage que si les modes propres sont sollicités par des sollicitations faiblement corrélées à l'ordre 3.

10.6 Exemple de calcul

10.6.1 Structure étudiée

Pour cet exemple, nous allons repartir du système général à deux degrés de liberté qui a été présenté au début de cette partie. Cette structure générale est particularisée comme au paragraphe 9.2.2 ; nous limiterons donc notre étude en imposant que $\mu = 1$,

$\delta = 1$ et $M = 1$. Ce choix de paramètres permet de simplifier de manière draconienne l'expression de la matrice des modes propres qui se limite alors à :

$$[\Phi] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.65)$$

Rappelons également que le paramètre ε est un indicateur de l'espacement entre les pulsations propres ($\varpi_1^2 = K$ et $\varpi_2^2 = K(1 + 2\varepsilon)$). Afin de raccourcir au maximum les notations, nous garderons cependant ϖ_1 et ϖ_2 comme paramètres dans la suite. Avec le choix $\mu = 1$, $\delta = 1$, l'amortissement est obligatoirement proportionnel puisque la matrice d'amortissement généralisé s'écrit :

$$[c^*] = [\Phi]^T [c] [\Phi] = \sqrt{K} \begin{bmatrix} 2\xi & 0 \\ 0 & 2\xi + 4\zeta \end{bmatrix} \quad (10.66)$$

Les coefficients d'amortissement modaux valent alors :

$$\xi_1 = \frac{2\xi\sqrt{K}}{2\sqrt{K}} = \xi \quad (10.67)$$

$$\xi_2 = \frac{2(\xi + 2\zeta)\sqrt{K}}{2\sqrt{K}\sqrt{1 + 2\varepsilon}} = \frac{\xi + 2\zeta}{\sqrt{1 + 2\varepsilon}} \quad (10.68)$$

Nous supposons dans la suite que ζ est tel que les deux amortissements modaux sont identiques $\xi_1 = \xi_2 = \xi$. Le chargement qui a été choisi est une sollicitation en chacun des deux noeuds. La structure que nous étudions est supposée être de petites dimensions vis-à-vis de l'échelle de turbulence du champ de vitesse dans lequel elle est plongée si bien que les sollicitations sont supposées être parfaitement cohérentes :

$$F_1 = \gamma (\bar{U} + u_1)^2 \quad (10.69)$$

$$F_2 = 2\gamma (\bar{U} + u_1)^2 = 2F_1 \quad (10.70)$$

La sollicitation est une forme polynômiale d'un processus aléatoire gaussien. Les développements des paragraphes précédents sont donc d'application avec :

$$a_1 = \gamma \bar{U}^2 ; \quad a_2 = 2\gamma \bar{U}^2 = 2a_1 \quad (10.71)$$

$$b_1 = 2\gamma \bar{U} ; \quad b_2 = 4\gamma \bar{U} = 2b_1 \quad (10.72)$$

$$c_1 = \gamma ; \quad c_2 = 2\gamma = 2c_1 \quad (10.73)$$

La vitesse du vent en chacun des deux noeuds est identique et est caractérisée par une densité spectrale de puissance à corrélation exponentiellement décroissante :

$$S_{u_1}(\omega) = S_{u_2}(\omega) = \frac{\alpha \sigma_u^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \quad (10.74)$$

L'ensemble des données que nous venons d'établir pour cet exemple simple sont les données dont dispose le concepteur de projet au moment de réaliser l'analyse stochastique de la structure. Ces données suffisent aux calculs aux second et troisième ordres. Pour la structure qui vient d'être présentée, nous allons réaliser une étude selon trois approches différentes :

- une approche analytique ;
- une approche numérique dans le domaine fréquentiel ;
- une approche numérique dans le domaine temporel, à l'aide de simulations de Monte Carlo

La comparaison des résultats obtenus à l'aide de ces trois méthodes devrait permettre de valider le code qui a été écrit et qui permet la prise en compte des termes quadratiques du chargement.

Afin de nous familiariser avec l'analyse en base modale, les approches analytique et numérique dans le domaine fréquentiel seront entreprises dans la base des modes propres. Pour une structure à deux degrés de liberté, l'utilisation de la base modale (surtout en conservant les deux modes propres) n'est certainement pas intéressante. Nous insistons sur le fait que cette solution a été choisie à titre d'illustration et de validation.

10.6.2 Approche analytique

Analyse au second ordre

Nous savons que les termes quadratiques du chargement modifient la réponse au second ordre de façon relativement modérée, avec une importance dépendant essentiellement de l'intensité de turbulence. Le seul effet des termes non linéaires est d'ajouter un complément de densité spectrale de sollicitation qu'il convient de prendre en compte de la même façon que la sollicitation habituelle. Dès que ce complément de sollicitation est obtenu, le calcul des variances des réponses structurelles ne présente aucun problème particulier. Nous ne présenterons donc que rapidement les résultats obtenus au second ordre.

Moyennant les relations développées précédemment (Eqs. 10.5 et 10.8), les densités spectrales des forces nodales peuvent être obtenues assez facilement :

$$\begin{aligned}
 S_{f_1} &= b_1^2 \frac{\alpha \sigma_u^2}{\pi (\alpha^2 + \omega^2)} + 2c_1^2 \frac{2\alpha \sigma_u^4}{\pi (4\alpha^2 + \omega^2)} = \frac{4\gamma^2 \bar{U}^2 \alpha \sigma_u^2}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{I_u^2}{4\alpha^2 + \omega^2} \right) \\
 S_{f_1 f_2} &= b_1 b_2 \frac{\alpha \sigma_u^2}{\pi (\alpha^2 + \omega^2)} + 2c_1 c_2 \frac{2\alpha \sigma_u^4}{\pi (4\alpha^2 + \omega^2)} = \frac{8\gamma^2 \bar{U}^2 \alpha \sigma_u^2}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{I_u^2}{4\alpha^2 + \omega^2} \right) \\
 S_{f_2} &= b_2^2 \frac{\alpha \sigma_u^2}{\pi (\alpha^2 + \omega^2)} + 2c_2^2 \frac{2\alpha \sigma_u^4}{\pi (4\alpha^2 + \omega^2)} = \frac{16\gamma^2 \bar{U}^2 \alpha \sigma_u^2}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{I_u^2}{4\alpha^2 + \omega^2} \right)
 \end{aligned}$$

On peut effectivement constater que, par rapport à une analyse avec sollicitations linéarisées ($c_1 = 0$, $c_2 = 0$), la densité spectrale de sollicitation s'obtient, comme pour l'analyse de l'oscillateur simple, en ajoutant un complément de sollicitation proportionnel au carré de l'intensité de turbulence. Tous les commentaires fournis à ce sujet lors de l'analyse de l'oscillateur simple sont donc également d'actualité.

La projection dans la base des modes propres des forces nodales permet d'obtenir les densités spectrales des forces généralisées :

$$[S_f^*] = \frac{2\gamma^2 \bar{U}^2 \alpha \sigma_u^2}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{I_u^2}{4\alpha^2 + \omega^2} \right) \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.75)$$

Ceci montre donc que les forces généralisées dans les deux modes sont parfaitement cohérentes sur tout le domaine des fréquences ($3 = \sqrt{9.1}$). La matrice de transfert en base

modale est une matrice diagonale puisque l'amortissement est proportionnel. Les expressions complètes des densités spectrales des amplitudes modales sont assez lourdes. C'est pour cette raison que nous ne donnons ici que l'expression de la matrice des covariances des amplitudes modales, obtenues en intégrant les densités spectrales correspondantes. Les expressions des variances des amplitudes modales prennent assez logiquement une forme semblable :

$$\sigma_{\eta_{11}}^2 = \frac{9\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 M_{\eta_{11}}}{\xi \varpi_1^3 (\alpha^2 + 2\xi\alpha\varpi_1 + \varpi_1^2) (4\alpha^2 + 4\xi\alpha\varpi_1 + \varpi_1^2)} \quad (10.76)$$

$$\sigma_{\eta_{22}}^2 = \frac{\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 M_{\eta_{22}}}{\xi \varpi_2^3 (\alpha^2 + 2\xi\alpha\varpi_2 + \varpi_2^2) (4\alpha^2 + 4\xi\alpha\varpi_2 + \varpi_2^2)} \quad (10.77)$$

où

$$\begin{aligned} M_{\eta_{11}} &= (4 + I_u^2) \alpha^3 + 3\xi (4 + I_u^2) \alpha^2 \varpi_1 + \alpha (1 + 8\xi^2 + I_u^2 (1 + 2\xi^2)) \varpi_1^2 + \xi (2 + I_u^2) \varpi_1^3 \\ M_{\eta_{22}} &= (4 + I_u^2) \alpha^3 + 3\xi (4 + I_u^2) \alpha^2 \varpi_2 + \alpha (1 + 8\xi^2 + I_u^2 (1 + 2\xi^2)) \varpi_2^2 + \xi (2 + I_u^2) \varpi_2^3 \end{aligned}$$

Quant à la covariance entre les amplitudes modales, elle présente une forme quelque peu plus compliquée :

$$\sigma_{\eta_{12}} = 3\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2 \frac{M_{\eta_{12}}}{D_{\eta_{12}}} \quad (10.78)$$

où

$$\begin{aligned} D_{\eta_{12}} &= (\varpi_1 + \varpi_2) (\alpha^2 + 2\alpha\xi\varpi_1 + \varpi_1^2) (\alpha^2 + 2\alpha\xi\varpi_2 + \varpi_2^2) (4\alpha^2 + 4\alpha\xi\varpi_1 + \varpi_1^2) \\ &\quad (4\alpha^2 + 4\alpha\xi\varpi_2 + \varpi_2^2) \left((\varpi_1 - \varpi_2)^2 + 4\xi^2 \varpi_1 \varpi_2 \right) \end{aligned} \quad (10.79)$$

$$\begin{aligned} M_{\eta_{12}} &= 32\xi (4 + I_u^2) \alpha^7 + 96\xi^2 (4 + I_u^2) \alpha^6 (\varpi_1 + \varpi_2) \\ &\quad + 8\xi\alpha^5 [(4 + I_u^2) (5 + 8\xi^2) (\varpi_1^2 + \varpi_2^2) + (-16 - I_u^2 + 36 (4 + I_u^2) \xi^2) \varpi_1 \varpi_2] \\ &\quad + \alpha^4 (\varpi_1 + \varpi_2) [(32 + I_u^2 + 48 (4 + I_u^2) \xi^2) (\varpi_1^2 + \varpi_2^2) \\ &\quad + 2 (-32 - I_u^2 + 2 (8 + 13I_u^2) \xi^2 + 96 (4 + I_u^2) \xi^4) \varpi_1 \varpi_2] \\ &\quad + 2\xi\alpha^3 [2 (2 + 11I_u^2 + 4 (16 + 7I_u^2) \xi^2 + 32 (4 + I_u^2) \xi^4) \varpi_1^2 \varpi_2^2 \\ &\quad + (32 + 5I_u^2) (\varpi_1^4 + \varpi_2^4) + 4 (-4 + 56\xi^2 + I_u^2 (-1 + 17\xi^2)) (\varpi_1^3 \varpi_2 + \varpi_1 \varpi_2^3)] \\ &\quad + \alpha^2 (\varpi_1 + \varpi_2) [2 (8 + I_u^2 + 4 (-10 + I_u^2) \xi^2 + 8 (16 + 5I_u^2) \xi^4) \varpi_1^2 \varpi_2^2 \\ &\quad + (8 + I_u^2) (\varpi_1^4 + \varpi_2^4) + 2 (-8 - I_u^2 + 12 (4 + I_u^2) \xi^2) (\varpi_1^3 \varpi_2 + \varpi_1 \varpi_2^3)] \\ &\quad + 2\xi\alpha\varpi_1 \varpi_2 [(4 + I_u^2) (\varpi_1^4 + \varpi_2^4) + 4 (1 + I_u^2 + (4 + I_u^2) \xi^2) (\varpi_1^3 \varpi_2 + \varpi_1 \varpi_2^3) \\ &\quad + 6 (2 + I_u^2) (-1 + 4\xi^2) \varpi_1^2 \varpi_2^2] \\ &\quad + (2 + I_u^2) \varpi_1^2 \varpi_2^2 (\varpi_1 + \varpi_2) \left((\varpi_1 - \varpi_2)^2 + 4\xi^2 \varpi_1 \varpi_2 \right) \end{aligned} \quad (10.80)$$

Bien que le système étudié soit un des systèmes à deux degrés de liberté les plus simples que l'on puisse imaginer, on voit que les développements analytiques se compliquent assez rapidement. Les expressions ci-dessus présentent en réalité fort peu d'intérêt, si ce n'est la possibilité d'une étude paramétrique du système étudié. Voici quelques constatations intéressantes qui peuvent cependant être tirées de l'observation des relations obtenues :

- lors de la discussion sur l'importance du couplage entre modes propres différents (à l'ordre 2), nous avons insisté sur l'importance des taux d'amortissement dans chacun des deux modes. Nous avons annoncé qu'un faible taux d'amortissement engendrait des fonctions de transfert plus pointues et donc diminuait les risques de couplage entre modes (puisque chaque mode est alors plus localisé). Les formulations analytiques que nous obtenons ici mettent assez bien ce phénomène en évidence. Il suffit en effet de remarquer que le taux d'amortissement ξ apparaît au dénominateur des variances $\sigma_{\eta_{11}}^2$ et $\sigma_{\eta_{22}}^2$ mais pas de la covariance $\sigma_{\eta_{12}}$. Ceci signifie donc que plus l'amortissement est faible, plus les termes diagonaux auront d'importance vis-à-vis des termes non diagonaux et donc par conséquent que le couplage se fera moins sentir.
- au dénominateur de la covariance $\sigma_{\eta_{12}}$, on peut retrouver le facteur $(\varpi_1 - \varpi_2)^2 + 4\xi^2 \varpi_1 \varpi_2$ qui joue un rôle d'autant plus important que les pulsations ϖ_1 et ϖ_2 sont proches. Ceci illustre la règle générale qui stipule que les effets de couplage sont d'autant plus importants, au second ordre, que les modes possèdent des fréquences propres proches.
- on peut se convaincre assez facilement que le complément de chargement provenant des termes de chargement non linéaire (identifiables par le I_u^2 dans les relations ci-dessus) occupe une place très réduite pour les faibles intensités de turbulence rencontrées en pratique.

Partant de la matrice de covariance des amplitudes modales, les grandeurs statistiques équivalentes pour les déplacements peuvent être obtenues. Compte tenu de la forme très simple de la matrice des modes propres, on a :

$$\sigma_{x_{11}}^2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_{\eta_{11}}^2 - 2\sigma_{\eta_{12}} + \sigma_{\eta_{22}}^2 \right) \quad (10.81)$$

$$\sigma_{x_{22}}^2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_{\eta_{11}}^2 + 2\sigma_{\eta_{12}} + \sigma_{\eta_{22}}^2 \right) \quad (10.82)$$

La forme analytique complète peut être obtenue en portant dans ces équations les expressions des relations 10.76, 10.77 et 10.78. Le résultat obtenu est assez lourd et ne présente guère d'intérêt. Si les termes de couplage entre modes n'étaient pas pris en compte ($\sigma_{\eta_{12}} = 0$), on aurait eu une autre estimation des variances des déplacements, cependant telle que l'énergie totale $\sigma_{x_{11}}^2 + \sigma_{x_{22}}^2$ soit bien estimée. Pour rappel, ceci est dû au fait que la matrice des modes propres est orthonormée :

$$[\Phi][\Phi]^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.83)$$

Lorsque la présentation des trois méthodes sera terminée, nous réaliserons une étude comparative des résultats obtenus avec les différentes méthodes. Nous y utiliserons donc les relations analytiques qui viennent d'être développées.

Analyse au troisième ordre

L'application de la relation 10.39 permet d'obtenir les expressions des bispectres des sollicitations nodales :

$$\begin{aligned}
 D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{8\alpha^2 \gamma^3 \bar{U}^2 \sigma_u^4}{\pi^2} \left[\frac{3\alpha^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2}{(\alpha^2 + \omega_1^2)(\alpha^2 + \omega_2^2)(\alpha^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)} \right. \\
 &\quad \left. + I_u^2 \frac{2(12\alpha^2 + \omega_1^2 + \omega_1\omega_2 + \omega_2^2)}{(4\alpha^2 + \omega_1^2)(4\alpha^2 + \omega_2^2)(4\alpha^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)} \right] \\
 D_{f_1 f_1 f_2}(\omega_1, \omega_2) &= 2D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2) \\
 D_{f_1 f_2 f_1}(\omega_1, \omega_2) &= 2D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2) \\
 D_{f_1 f_2 f_2}(\omega_1, \omega_2) &= 4D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2) \\
 D_{f_2 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2) &= 2D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2) \\
 D_{f_2 f_1 f_2}(\omega_1, \omega_2) &= 4D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2) \\
 D_{f_2 f_2 f_1}(\omega_1, \omega_2) &= 4D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2) \\
 D_{f_2 f_2 f_2}(\omega_1, \omega_2) &= 8D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2)
 \end{aligned} \tag{10.84}$$

Ces huit fonctions ne sont en réalité rien d'autre que les huit éléments de la matrice des bispectres des sollicitations nodales. Etant donné que les densités spectrales de la composante turbulente sont identiques aux deux noeuds de la structure, cette matrice des bispectres présente la même symétrie que la matrice des moments centrés d'ordre 3. Quatre éléments ($D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2)$, $D_{f_1 f_1 f_2}(\omega_1, \omega_2)$, $D_{f_1 f_2 f_2}(\omega_1, \omega_2)$, $D_{f_2 f_2 f_2}(\omega_1, \omega_2)$) suffisent alors à la représentation complète de la matrice des bispectres. Ceci est tout à fait particulier au problème que nous étudions ici.

De même que les termes de chargement quadratique engendraient des complément de chargement d'un ordre supérieur en I_u^2 dans l'expression des densités spectrales de sollicitation, on peut constater assez logiquement que le terme issu de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) S_{u_j u_k}(\omega) d\omega \tag{10.85}$$

donne lieu à une contribution proportionnelle à I_u^2 . Afin de simplifier les développements, ce terme sera laissé de côté dans l'approche analytique et nous montrerons a posteriori, lors de l'approche numérique, que cette simplification ne porte pas à conséquence. Les développements continuent donc en supposant que :

$$D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2) = \frac{8\alpha^2 \gamma^3 \bar{U}^2 \sigma_u^4}{\pi^2} \frac{3\alpha^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2}{(\alpha^2 + \omega_1^2)(\alpha^2 + \omega_2^2)(\alpha^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)} \tag{10.86}$$

Le moment d'ordre 3 associé à cette fonction vaut $\tilde{m}_{3f_1 f_1 f_1} = 24\gamma^3 \bar{U}^2 \sigma_u^4$.

Les bispectres des forces généralisées peuvent être obtenus à l'aide d'une triple sommation, ce qui revient à appliquer la règle de la multiplication matricielle (3D). Nous

laissons au lecteur le soin de vérifier que l'application de la relation 10.43 permet d'obtenir :

$$D_{f_1^* f_1^* f_1^*}(\omega_1, \omega_2) = \frac{27}{2\sqrt{2}} D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2) \quad (10.87)$$

$$D_{f_1^* f_1^* f_2^*}(\omega_1, \omega_2) = \frac{9}{2\sqrt{2}} D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2) \quad (10.88)$$

$$D_{f_1^* f_2^* f_2^*}(\omega_1, \omega_2) = \frac{3}{2\sqrt{2}} D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2) \quad (10.89)$$

$$D_{f_2^* f_2^* f_2^*}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} D_{f_1 f_1 f_1}(\omega_1, \omega_2) \quad (10.90)$$

On peut également vérifier que ces quatre bispectres suffisent à caractériser complètement la matrice des bispectres des sollicitations généralisées : cette matrice présente également la même symétrie que la matrice des bispectres des forces nodales. Nous pouvons nous intéresser au caractère non gaussien des sollicitations modales en calculant les moments centrés d'ordre 3 associés à ces bispectres. Par exemple, pour la force généralisée appliquée dans le premier mode :

$$\tilde{m}_{3f_1^* f_1^* f_1^*}(\omega_1, \omega_2) = \frac{27}{2\sqrt{2}} 24\gamma^3 \bar{U}^2 \sigma_u^4 \quad (10.91)$$

En rapportant cette grandeur au moment centré de second ordre (obtenu par intégration de 10.75 sur les pulsations), on peut obtenir le coefficient de dissymétrie de la force généralisée dans le premier mode :

$$\gamma_{3f_1^* f_1^* f_1^*}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\frac{27}{2\sqrt{2}} 24\gamma^3 \bar{U}^2 \sigma_u^4}{(18\gamma^2 \bar{U}^2 \sigma_u^2)^{3/2}} = 3I_u \quad (10.92)$$

Ce coefficient de dissymétrie était attendu en raison du chargement choisi et de la forme très simple des modes propres. On peut vérifier que la sollicitation généralisée dans le second mode présente également le même coefficient de dissymétrie.

La relation tout à fait générale

$$D_{\eta_i \eta_j \eta_k}(\omega_1, \omega_2) = D_{f_i^* f_j^* f_k^*}(\omega_1, \omega_2) H_j^*(\omega_1) H_k^*(\omega_2) \bar{H}_i^*(\omega_1 + \omega_2) \quad (10.93)$$

permet ensuite d'établir les huit bispectres des amplitudes modales qui, quant à eux, sont tous différents. Après intégration sur le domaine des fréquences, on peut obtenir les moments centrés d'ordre 3 des réponses modales. Les expressions analytiques des moments centrés croisés d'ordre 3 sont très lourdes. Nous ne reprenons ici que l'expression du moment d'ordre 3 (unilatéral) caractérisant l'amplitude dans le premier mode propre :

$$\tilde{m}_{3\eta_1 \eta_1 \eta_1} = 54\sqrt{2}\gamma^3 \bar{U}^2 \sigma_u^4 \frac{M_{\eta_{111}}}{D_{\eta_{111}}} \quad (10.94)$$

où

$$D_{\eta_{111}} = \frac{(1 + 8\xi^2) \varpi_1^4 (\alpha + 2\xi\varpi_1) (\alpha^2 + 2\xi\alpha\varpi_1 + \varpi_1^2)^2 (4\alpha^2 + 4\xi\alpha\varpi_1 + \varpi_1^2)}{(\alpha^2 + 4\xi\alpha\varpi_1 + 4\varpi_1^2)} \quad (10.95)$$

$$(10.96)$$

$$\begin{aligned}
M_{\eta_{111}} = & 32\alpha^7 + 352\xi\alpha^6\varpi_1 + 8(17 + 184\xi^2)\alpha^5\varpi_1^2 + 16\xi(53 + 184\xi^2)\alpha^4\varpi_1^3 \\
& + (131 + 2040\xi^2 + 2816\xi^4)\alpha^3\varpi_1^4 + 2\xi(197 + 1128\xi^2 + 512\xi^4)\alpha^2\varpi_1^5 \\
& + 12(3 + 10\xi^2)(1 + 8\xi^2)\alpha\varpi_1^6 + 24\xi(1 + 8\xi^2)\varpi_1^7
\end{aligned} \quad (10.97)$$

Contrairement aux moments unilatéraux d'ordre 2 (les variances des amplitudes modales), ce moment ainsi que les autres moments d'ordre 3 ne présentent pas un dénominateur proportionnel au taux d'amortissement ξ . Ceci signifie donc que des structures possédant des taux d'amortissement de plus en plus faibles auront des variances de déplacement de plus en plus importantes, tout en gardant un moment d'ordre 3 constant. Ainsi, l'étude de structures de moins en moins amorties débouchera finalement sur une réponse gaussienne. Ceci a déjà pu être observé sur l'étude de l'oscillateur à un degré de liberté.

A ce stade du calcul, nous pouvons calculer les coefficients de dissymétrie des amplitudes modales :

$$\gamma_{3\eta_i} = \frac{\tilde{m}_{3\eta_i\eta_i\eta_i}}{\sigma_{\eta_i}^3} \quad (10.98)$$

Ces expressions sont assez lourdes et n'apportent guère d'information supplémentaire étant donné qu'elles sont identiques à celles qui ont pu être établies lors de l'étude de l'oscillateur simple. Les coefficients de dissymétrie des amplitudes modales sont donc (approximativement) compris entre 0 et $3I_u$.

L'étude analytique peut ensuite continuer avec le calcul des moments centrés d'ordre 3 des déplacements structurels. Pour ce faire, nous avons courageusement appliqué la multiplication matricielle généralisée à la matrice des moments centrés (déjà lourde) des amplitudes modales. Une formule similaire à la relation 10.98 permet finalement d'obtenir les coefficients de dissymétrie exacts des déplacements. Les formules obtenues ne sont pas reprises ici car elles sont un peu trop lourdes et l'interprétation que l'on peut donner de cette formule analytique est très limitée.

Nous disposons donc maintenant d'une formulation assez générale permettant par exemple de réaliser une étude paramétrique des coefficients de dissymétrie des déplacements de la structure. Nous donnerons quelques applications numériques dans la suite.

10.6.3 Approche numérique dans le domaine temporel

La structure que nous venons d'étudier analytiquement a également été étudiée à l'aide de simulations Monte Carlo. Pour cette étude, nous avons dû inévitablement donner des valeurs numériques aux paramètres de l'étude. Ceci est un des inconvénients majeurs des simulations de Monte Carlo : on n'étudie finalement jamais qu'une seule configuration ! Les caractéristiques structurelles que nous avons choisies sont :

$$\begin{aligned}
\xi &= 0.01 \quad ; \quad \varpi_1 = 4 \text{ rad/s} \quad ; \quad \varpi_2 = 3 \text{ rad/s} \\
f_{n_1} &= \frac{\varpi_1}{2\pi} = 0.637 \text{ Hz} \quad ; \quad f_{n_2} = \frac{\varpi_2}{2\pi} = 0.477 \text{ Hz}
\end{aligned}$$

Le chargement de la structure est un chargement aérodynamique (Eq. 10.2) dont les caractéristiques sont :

$$\begin{aligned}
\gamma &= 10^{-3}m^{-1} \\
\bar{U} &= 10m/s \\
\sigma_u &= 2m/s \\
\alpha &= 0.2rad/s
\end{aligned}$$

Pour rappel, les sollicitations aux deux noeuds de la structure sont parfaitement cohérentes. Nous nous limiterons donc à ne générer qu'une seule composante de la turbulence du vent. Les paramètres utilisés pour la génération et pour l'analyse dynamique pas-à-pas sont ceux qui ont été présentés à l'occasion de la première partie du document (Chapitre 6). Dans la référence [26], nous présentons plus en détail l'extension des critères qui ont été donnés pour l'analyse d'un système à un degré de liberté à l'analyse de structures à plusieurs degrés de liberté. Nous ne rentrons plus dans ces détails et nous nous contentons donc de résumer la démarche menée au tableau 10.1. On peut comprendre assez facilement qu'il ne s'agit que d'une extension de la démarche à mener pour l'étude d'un oscillateur simple.

MODE 1 : $\frac{\Delta f}{f_n} \leq \frac{\xi}{2} \rightarrow \Delta f \leq 3.18.10^{-3}Hz$	$\frac{f_{MAX}}{f_n} \geq 1 + 8\sqrt{\xi} \rightarrow f_{MAX} \geq \mathbf{1.15Hz}$
MODE 2 : $\frac{\Delta f}{f_n} \leq \frac{\xi}{2} \rightarrow \Delta f \leq \mathbf{2.39.10^{-3}Hz}$	$\frac{f_{MAX}}{f_n} \geq 1 + 8\sqrt{\xi} \rightarrow f_{MAX} \geq 0.859Hz$
SOLL. : $2\pi\Delta f \leq \frac{\alpha}{10} \rightarrow \Delta f \leq 3.18.10^{-3}Hz$	$2\pi f_{max} \geq 50\alpha \rightarrow f_{MAX} \geq 1.59Hz$
↓	↓
$\Delta f = 2.39.10^{-3}Hz$	$f_{MAX} = 1.15Hz$
↓	↓
$T = \frac{1}{\Delta f} = 420s$	$\Delta t \leq \frac{1}{10f_{MAX}} = 0.087s$
↘	↙
$N \sim \frac{420s}{0.087s} = 4800$	

TAB. 10.1 – Caractéristiques de l'échantillon généré

Les grandeurs qui sont données dans ce tableau peuvent éventuellement être remises en cause. Par exemple, afin d'obtenir une bonne représentation des densités de probabilité de la réponse, et ce au moins jusqu'à l'ordre 3, nous avons décidé d'utiliser des échantillons de 20000 points. Etant donné que la sollicitation appliquée est à contenu fréquentiel monotonément décroissant, le critère sur la fréquence maximale représentée peut être revu. Nous avons décidé d'utiliser pour cette partie un pas de temps de calcul $\Delta t = 0.1s$. Nous travaillons donc avec des échantillons de 2000s.

Nous savons également qu'un seul échantillon (aussi court) ne peut certainement donner qu'une idée assez floue des grandeurs statistiques que nous allons dériver de cette simulation de Monte Carlo. Nous avons donc décidé de répéter la simulation 30 fois de la même manière. Nous allons présenter brièvement la démarche que nous avons suivie pour l'étude d'une de ces simulations.

L'échantillon de vitesse qui doit être généré doit être caractérisé par une densité spectrale d'Ornstein-Uhlenbeck. Cette densité spectrale cible se prête assez bien à une génération par filtrage d'un bruit blanc gaussien puisqu'il s'agit d'un processus aléatoire de Markov simple. La génération consiste donc dans un premier temps à générer une série de 20000 points tirés de façon aléatoire en respectant une loi de distribution gaussienne de

moyenne nulle et d'écart type $\sqrt{\Delta t}$. Ensuite, nous imposons $u(1) = 0$ et puis les valeurs suivantes de l'échantillon généré peuvent être obtenues grâce à la loi récursive du filtre autorégressif choisi¹⁰.

Lorsque l'échantillon de vitesse de vent est établi, les évolutions des forces appliquées en chacun des deux noeuds de la structure peuvent être calculées. Pour rappel :

$$F_1 = \gamma (\bar{U} + u_1)^2 \quad (10.99)$$

$$F_2 = 2\gamma (\bar{U} + u_1)^2 = 2F_1 \quad (10.100)$$

L'analyse pas-à-pas de la structure peut alors débiter. L'algorithme retenu est celui de Newmark ($\alpha = 1/4$; $\delta = 1/2$). Ceci permet donc d'obtenir les évolutions des déplacements aux deux noeuds de la structure. La figure 10.5 représente les évolutions des déplacements que nous avons obtenues. La taille assez importante de l'échantillon nous permet d'obtenir une représentation assez propre des densités de probabilité des déplacements aux deux noeuds. Les histogrammes calculés avec 140 zones sont repris à la figure 10.6

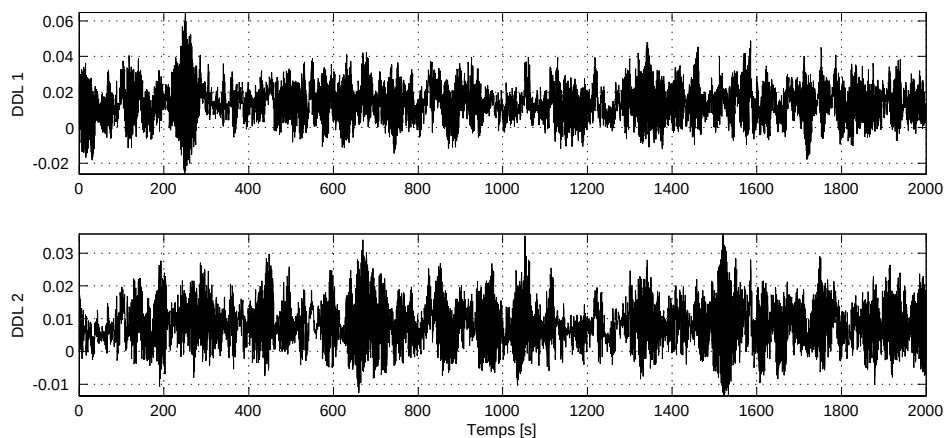


FIG. 10.5 – Evolution des déplacements aux deux degrés de liberté de la structure pour une simulation de Monte Carlo (20000 points, $\Delta t = 0.1s$)

A l'observation de cette figure, on devine une dissymétrie de la densité de probabilité, ce qui peut être confirmé par le calcul des moments statistiques des échantillons :

	DDL 1	DDL 2
Ecart-type	$7.4 \cdot 10^{-3}m$	$9.3 \cdot 10^{-3}m$
Coef.Dissym	0.0553	0.2217
Coef.Excès	0.256	0.118

¹⁰Voici les quelques lignes de code qui permettent de générer un échantillon de vitesse de vent gaussien :

```
N=20000; x = randn(N,1); x=x/sqrt(DT);
u(1)=0;
for n=2 :N
u(n)= u(n-1) - DT *alpha * u(n-1) + DT*signu*sqrt(2*alpha)*x(n-1);
end
u=u-mean(u);
```

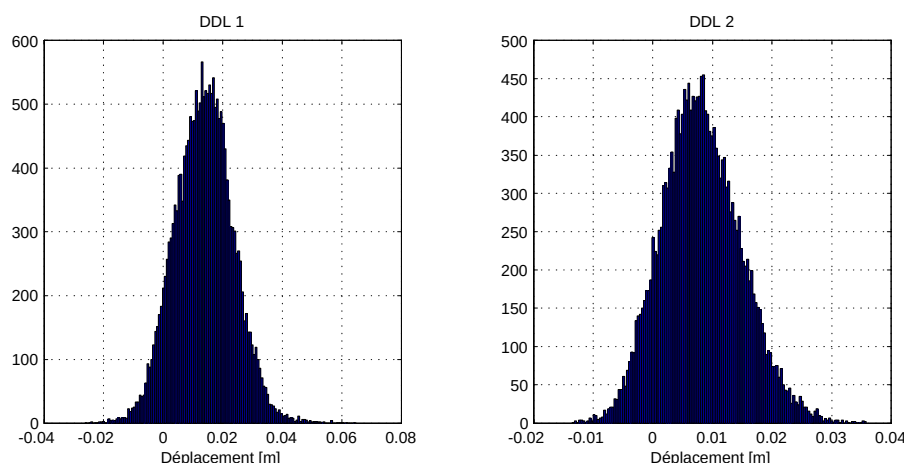


FIG. 10.6 – Histogramme des déplacements aux deux noeuds de la structure (140 zones)

Nous savons que la non gaussianité de la réponse peut engendrer une modification significative du facteur de pointe du déplacement. A titre illustratif, nous pouvons calculer les facteurs de pointes des signaux représentés à la figure 10.5 :

$$g = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \quad (10.101)$$

L'application de cette relation donne des facteurs de pointe $g = 5.16$ et $g = 4.14$ pour les deux degrés de liberté. Ces valeurs sont effectivement plus grandes que les facteurs de pointe qui peuvent être attendus lorsqu'on travaille avec des processus aléatoires gaussiens. Par exemple, le facteur de pointe de la vitesse du vent u_1 qui a été utilisée pour cette génération est $g = 3.91$.

Etant donné que la taille de l'échantillon de sollicitation utilisé est assez faible, les moments statistiques que nous avons pu calculer sur cet exemple sont tachés d'une certaine imperfection. Pour obtenir des résultats moyennés sur plusieurs échantillons, nous avons réalisé l'opération de génération-analyse décrite ci-avant 30 fois. Pour chacune de ces simulations, nous pouvons calculer les mêmes grandeurs que celles que nous avons étudiées sur le seul échantillon précédent. Etant donné que 30 simulations sont trop peu nombreuses pour pouvoir représenter un histogramme précis, nous avons représenté l'ensemble des coefficients de dissymétrie et d'excès ainsi que les facteurs de pointe pour les deux degrés de liberté et pour chacune des simulations (Fig. 10.7).

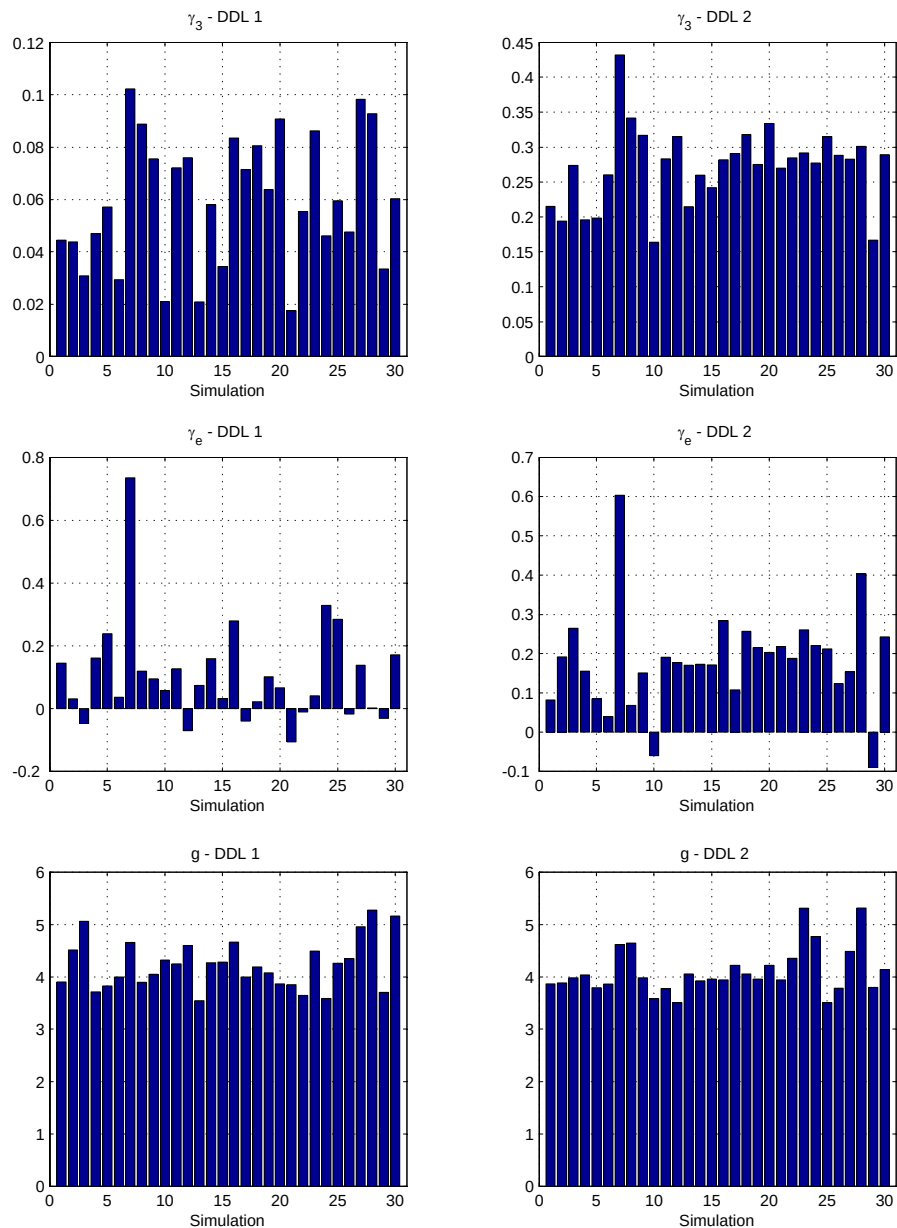


FIG. 10.7 – Caractéristiques statistiques des réponses aux deux degrés de liberté pour 30 simulations.

Sur cette figure, on peut remarquer une dispersion assez importante du coefficient d'excès au premier degré de liberté mais une dispersion moindre pour le second degré de liberté qui, lui, présente un coefficient de dissymétrie plus important. On peut aussi constater une certaine corrélation entre les coefficients de dissymétrie obtenus au premier degré de liberté et au second degré de liberté. Les graphiques de la ligne suivante montre que le nombre de simulation retenu ne suffit certainement pas à représenter correctement les moments d'ordre 4. On peut de nouveau constater une certaine corrélation entre les moments au premier degré de liberté et les moments au second degré de liberté. La

dernière ligne représente les facteurs de pointe calculés aux deux degrés de liberté. On peut deviner une dispersion moins importante. Les facteurs de pointe moyens et leurs dispersions sont respectivement, pour les deux degrés de liberté :

$$g_1 = 4.23 \quad \delta = 11.1\% \quad (10.102)$$

$$g_2 = 4.11 \quad \delta = 10.9\% \quad (10.103)$$

L'exemple que nous venons de présenter montre à nouveau que la méthode de Monte Carlo est un outil remarquable car il permet, en utilisant de simples algorithmes de résolution pas-à-pas (Newmark ici), d'analyser le comportement stochastique d'une structure. Au rang des inconvénients, mis à part le fait qu'une seule structure ne peut être étudiée à la fois, cette méthode présente une limitation d'interprétation assez importante. Par exemple, à ce stade, la corrélation qui existe entre les coefficients de dissymétrie et d'excès obtenus aux deux noeuds de la structure ne peut pas encore être clairement associable à un comportement quasi-statique ou dynamique. Nous allons voir que ce genre d'interprétation ressort de façon assez évidente de l'analyse dans le domaine fréquentiel.

10.6.4 Approche numérique dans le domaine fréquentiel

Un aspect assez intéressant et particulier de l'approche dans le domaine fréquentiel consiste en la séparation des études au second et au troisième ordre. Ces deux analyses vont donc être présentées successivement. La méthodologie de l'analyse d'une structure à plusieurs degrés de liberté a déjà été présentée lors de l'approche analytique. Nous nous contenterons donc essentiellement d'insister sur les aspects particuliers de l'application numérique. Les résultats que nous allons présenter concernent l'étude de la même structure que celle qui vient d'être étudiée par simulations de Monte Carlo.

Analyse au second ordre

La première étape d'une analyse stochastique consiste à choisir les fréquences de calcul. L'application de l'algorithme qui a été présenté à la première partie du document nécessite la connaissance des fréquences propres et des coefficients d'amortissement de chacun des modes propres ainsi que le nombre de fréquences à utiliser pour représenter la sollicitation. La figure 10.8 représente la liste des fréquences de calcul utilisées. On peut y retrouver les deux fréquences propres de la structure ($0.477Hz$ et $0.637Hz$). Grâce à la méthodologie automatique de mise en commun des séries de fréquence, une économie de 25.1% sur le nombre de fréquence de calcul a été réalisée. Le calcul sera réalisé à l'aide de 191 fréquences de calcul.

La figure 10.9 représente les densités spectrales des amplitudes modales. Dans cet exemple, il n'y a pas de couplage dans l'amortissement. Les densités spectrales unidimensionnelles présentent donc une forme habituelle avec deux composantes. On peut d'ailleurs estimer les composantes quasi-statique et dynamique qui seraient obtenues en appliquant l'approximation en bruit blanc. Ces résultats sont repris au tableau 10.2. La comparaison des deux dernières lignes de ce tableau (écart type obtenu par la méthode d'approximation en bruit blanc et par intégration numérique de la densité spectrale avec les fréquences de calcul choisies) montre que l'approximation en bruit blanc permet d'obtenir une très bonne précision. Ceci est dû au faible coefficient d'amortissement ($\xi = 0.01$).

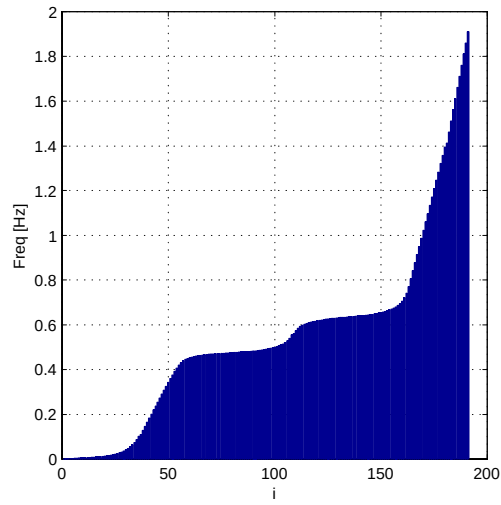


FIG. 10.8 – Fréquences de calcul pour la structure à deux degrés de liberté étudiée.

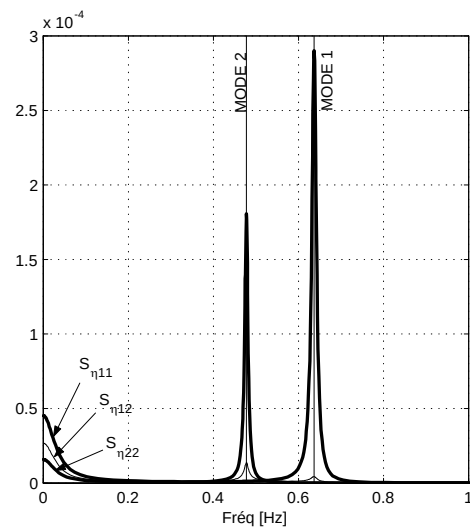


FIG. 10.9 – Densités spectrales des amplitudes modales

	MODE 1	MODE 2
Composante. QS :	$5.33.10^{-3}$	$3.16.10^{-3}$
Composante. DY :	$8.54.10^{-3}$	$5.84.10^{-3}$
$\sqrt{\sigma_{QS}^2 + \sigma_{DY}^2}$:	$10.07.10^{-3}$	$6.637.10^{-3}$
σ_{η_i} :	$10.08.10^{-3}$	$6.644.10^{-3}$

TAB. 10.2 – Estimation de l'écart-type des amplitudes modales

Bien que les forces généralisées dans les deux modes soient parfaitement cohérentes, les réponses dans chacun des modes ne sont pas parfaitement corrélées. Après intégration numérique de la densité spectrale croisée, on peut obtenir un coefficient de corrélation $\rho = 0.256$ entre les amplitudes modales dans les deux modes. Ceci peut être interprété facilement en observant la figure 10.9. On peut en effet constater¹¹ :

- que les amplitudes modales sont parfaitement cohérentes dans le domaine des basses fréquences :

$$S_{\eta_{12}}(\omega) \simeq \sqrt{S_{\eta_{11}}(\omega) S_{\eta_{22}}(\omega)} \quad (10.104)$$

ce qui est logique puisque les forces généralisées dans cette zone sont parfaitement cohérentes ;

- que les amplitudes modales sont faiblement corrélées dans le voisinage des pics de résonance, ce qui s'explique par l'écart important entre les fréquences propres.

Les densités spectrales des déplacements sont représentées à la figure 10.10. Lorsque les contributions intermodales ne sont pas prises en compte (partie droite), les densités spectrales des déplacements sont identiques :

$$S_{x_1}(\omega) = S_{x_2}(\omega) = S_{\eta_{11}}(\omega) + S_{\eta_{22}}(\omega) \quad (10.105)$$

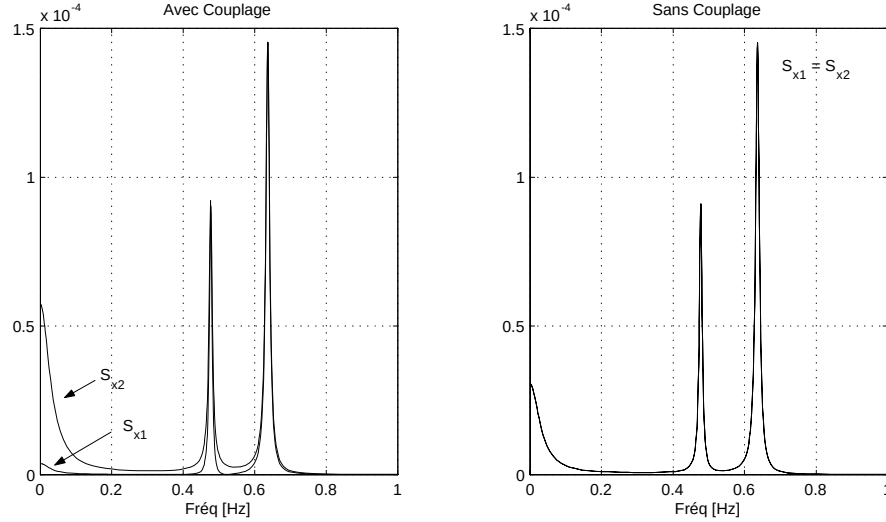


FIG. 10.10 – Densités spectrales des déplacements

La forme obtenue est assez logique, au vu de la figure 10.9. Lorsque les contributions intermodales sont prises en compte, les densités spectrales des déplacements sont alors différentes (partie gauche) :

$$S_{x_1}(\omega) = S_{\eta_{11}}(\omega) + S_{\eta_{22}}(\omega) + 2S_{\eta_{12}}(\omega) \quad (10.106)$$

$$S_{x_2}(\omega) = S_{\eta_{11}}(\omega) + S_{\eta_{22}}(\omega) - 2S_{\eta_{12}}(\omega) \quad (10.107)$$

¹¹Ce raisonnement basé sur une séparation entre contribution quasi-statique et dynamique permet également de justifier la double condition pour laquelle les contributions intermodales doivent être considérées (forces fortement cohérentes et fréquences propres proches)

	MODE 1	MODE 2
σ_{x_i} (AVEC)	$7.47.10^{-3}m$	$9.49.10^{-3}m$
σ_{x_i} (SANS)	$8.54.10^{-3}m$	$8.54.10^{-3}m$

TAB. 10.3 – Estimation des écart-types des déplacements

Etant donné la forme assez particulière de la densité spectrale croisée entre amplitudes modales, on peut comprendre que seul le comportement quasi-statique soit modifié lors de la prise en compte des contributions intermodales. Bien que les fréquences propres des deux modes soient éloignées, il existe cependant un couplage modal que l'on pourrait qualifier de couplage en basses fréquences.

Le tableau 10.3 reprend les écart types des déplacements aux deux noeuds de la structure obtenus en considérant ou non les contributions intermodales. On peut vérifier que ces résultats coïncident assez bien avec les résultats de l'étude par simulations de Monte Carlo (p. 416).

Etant donné que le second mode propre présente un contenu dans les basses fréquences substantiellement plus élevé que celui du premier mode, on peut s'attendre à ce que l'amplitude modale dans le second mode soit plus dissymétrique que l'amplitude modale dans le premier mode. L'analyse au troisième ordre va nous confirmer ceci.

Analyse au troisième ordre

A l'occasion de l'étude de l'oscillateur simple, nous avons proposé de tenir compte de la symétrie dans la fonction à intégrer. C'est pour cette raison que nous n'intégrions que sur un domaine triangulaire, soit un quart de l'espace bidimensionnel des pulsations. En passant à l'étude d'un système à plusieurs degrés de liberté, nous devons nécessairement traiter des bispectres croisés entre amplitudes modales. On vérifie assez facilement que ces bispectres ne possèdent plus les mêmes propriétés de symétrie. Les bispectres croisés ne possèdent qu'un centre de symétrie $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ et non plus également un axe de symétrie. L'intégration numérique devra donc être réalisée sur un demi-espace des fréquences.

Pour l'étude de systèmes à plusieurs degrés de liberté, nous avons donc décidé d'adapter légèrement la procédure de maillage qui a été proposée à l'occasion de l'étude d'un système à un degré de liberté (§ 4.6, p. 197). La démarche fondamentale qui nous avait mené à l'élaboration de la procédure retenue est toujours valable dans le cadre de l'étude d'un système à plusieurs degrés de liberté. Nous conservons donc un algorithme basé sur ces trois étapes qui peuvent éventuellement être bouclées : maillage initial, nécessité de subdivision et puis finalement subdivision.

Il nous paraît superflu de rentrer dans les détails des modifications. Notons simplement que, vu la forme du domaine qui doit maintenant être étudié, nous pouvons nous contenter de mailler l'espace des fréquences à l'aide de carrés uniquement. Afin d'éviter des problèmes de taille de maillage démesurée lorsque la structure étudiée présente des fréquences propres d'ordres de grandeur différents¹², le critère de subdivision a dû être sérieusement revu. L'algorithme obtenu a finalement été testé pour plusieurs configurations. Il s'est avéré présenter une robustesse honorable vis-à-vis de l'étude de structures

¹²ce qui arrivera lors de notre étude paramétrique ci-après

très peu amorties (certes, le nombre de domaines d'intégration devient important, mais les fonctions étudiées sont très bien représentées), de structures présentant des modes propres très proches, ou très éloignés et de structures présentant des taux d'amortissement fortement différents d'un mode à l'autre.

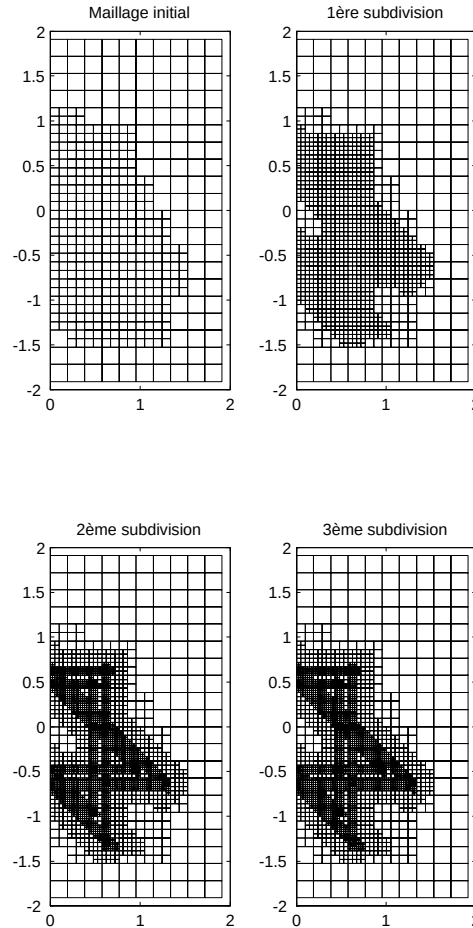


FIG. 10.11 – Etapes successives du raffinement du maillage pour le problème étudié

Pour le problème que nous étudions, la figure 10.11 illustre les étapes successives du maillage. Il a été réalisé en quatre étapes qui ont mené finalement à l'obtention d'un maillage de 3313 carrés à l'aide de 5290 couples de fréquences. Nous insistons à nouveau sur le fait que le maillage qui a été établi est relativement économique car un maillage en damier comportant le même nombre de points d'intégration serait de dimensions 72×72 , ce qui est bien sûr trop lâche.

Pour obtenir une bonne représentation de la sollicitation, le maillage que nous avons obtenu a également été densifié dans le voisinage de l'origine. Après densification, nous travaillons avec un maillage de 6522 couples de fréquences.

La figure 10.12 représente le bispectre de l'amplitude dans le premier mode. Etant donné que l'amortissement est proportionnel, cette fonction ressemble au bispectre de la réponse d'un oscillateur simple. Quant à la figure 10.13, elle représente le bispectre croisé

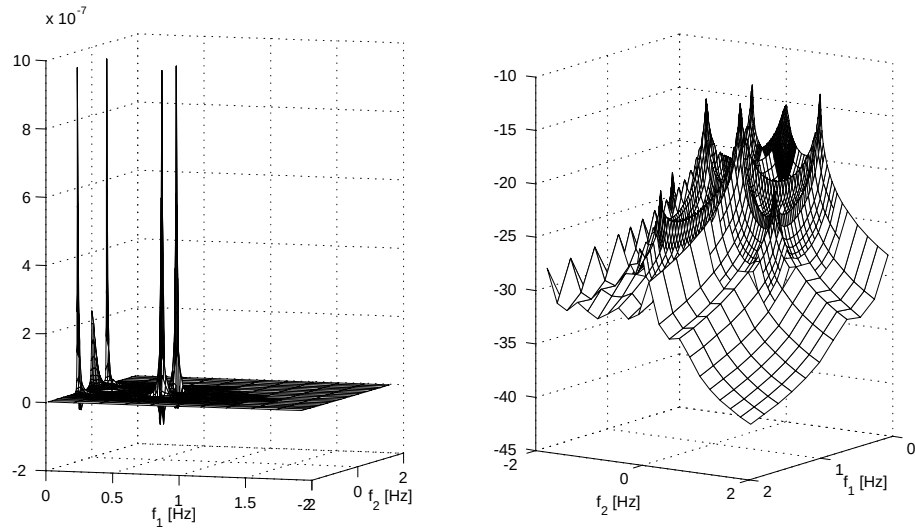


FIG. 10.12 – Représentation du bispectre de l'amplitude dans le premier mode en axes cartésiens (gauche) et en axes logarithmiques (droite)

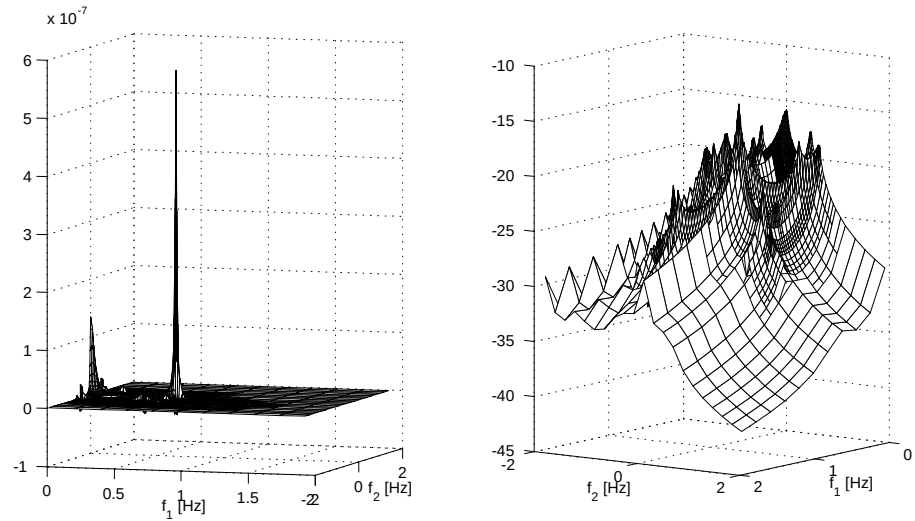


FIG. 10.13 – Représentation du bispectre croisé $B_{\eta_1\eta_1\eta_2}$ entre amplitudes modales en axes cartésiens (gauche) et en axes logarithmiques (droite)

entre deux amplitudes modales. En observant cette figure, on peut constater la perte de symétrie qui a rendu nécessaire l'extension du domaine d'intégration à un demi-espace des pulsations.

La représentation en axes cartésiens a l'avantage de ne représenter que les contributions importantes de la réponse. On pourrait de nouveau revenir sur la discussion que nous avons menée à propos de l'extension à l'ordre 3 de l'approximation en bruit blanc. L'oeil attentif remarquera la partie du bispectre en zones négatives de la figure 10.12 qui rend cette extension assez compliquée.

Sur cette représentation en axes cartésiens, on peut également apprécier l'acuité importante de la fonction étudiée, bien que le coefficient d'amortissement modal ($\xi = 0.01$) soit encore plus important que le coefficient d'amortissement minimal que l'on puisse rencontrer dans le domaine du génie civil ($\xi \simeq 0.003$).

La représentation en axes logarithmiques (de la valeur absolue de la partie réelle du bispectre) présente l'avantage de représenter tous les pics du bispectre provenant du second noyau de Volterra. On peut assez facilement identifier par exemple deux pics hauts et deux demi pics hauts, ce qui nous fait un total de trois pics représentés, soit la moitié des six pics hauts puisque l'on ne représente la fonction que sur un demi-espace.

Le calcul des moments centrés d'ordre 3 associés aux bispectres des amplitudes modales sont :

$$\tilde{m}_{3_{\eta 111}} = 0.2309.10^{-6} \quad (10.108)$$

$$\tilde{m}_{3_{\eta 112}} = 0.0869.10^{-6} \quad (10.109)$$

$$\tilde{m}_{3_{\eta 122}} = 0.0522.10^{-6} \quad (10.110)$$

$$\tilde{m}_{3_{\eta 222}} = 0.0511.10^{-6} \quad (10.111)$$

Ce sont les quatre valeurs différentes qui interviennent dans la matrice des moments centrés de troisième ordre. Les ordres de grandeurs obtenus confirment bien que les moments d'ordre 3 croisés ne peuvent pas être négligés.

Les coefficients de dissymétrie des amplitudes dans les deux modes propres peuvent être obtenus en rapportant les moments centrés d'ordre 3 à la puissance adéquate du moment centré de second ordre¹³ :

$$\gamma_{3_{\eta 1}} = 0.225 \quad (10.112)$$

$$\gamma_{3_{\eta 2}} = 0.174 \quad (10.113)$$

Le retour dans la base structurelle permet d'obtenir les caractéristiques des déplacements aux deux noeuds de la structure. La combinaison avec prise en compte obligatoire du couplage entre réponses modales permet d'obtenir les bispectres des déplacements :

¹³ ces grandeurs sont toutes obtenues par intégration numérique, avec les schémas d'intégration présentés

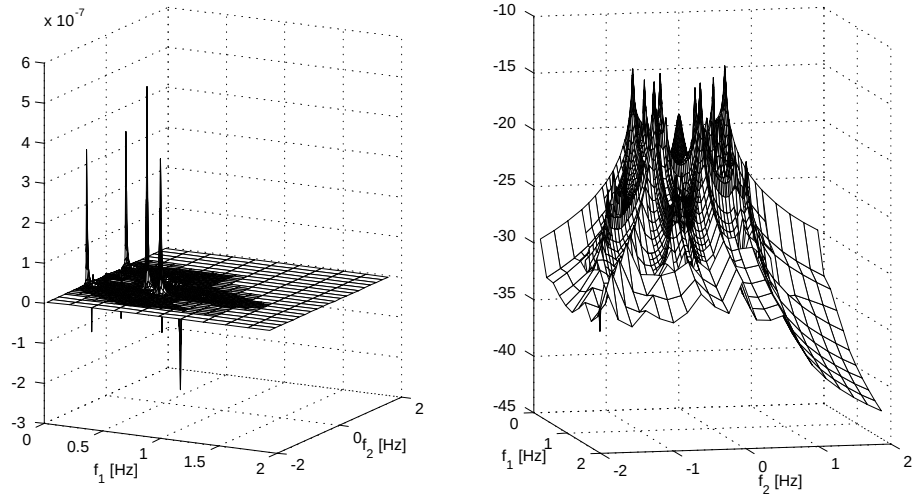


FIG. 10.14 – Représentation du bispectre du déplacement au degré de liberté 1 en axes cartésiens (gauche) et logarithmiques (droite)

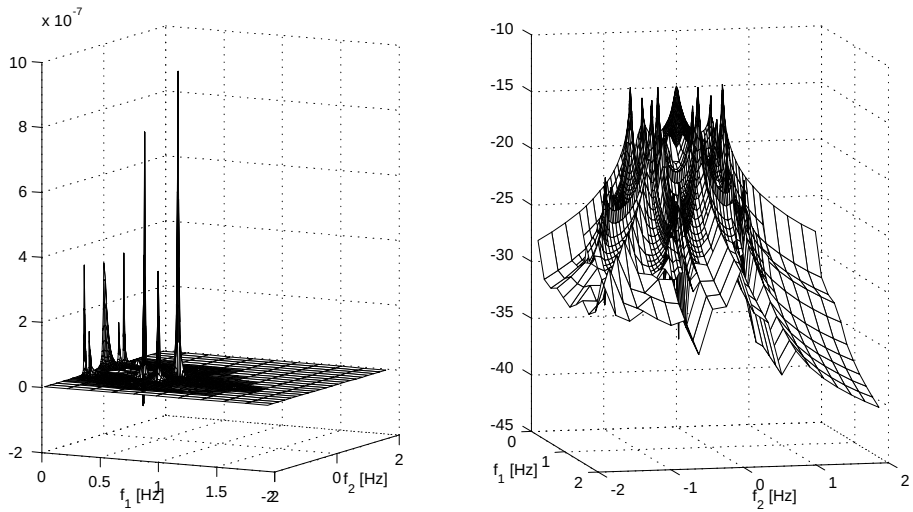


FIG. 10.15 – Représentation du bispectre du déplacement au degré de liberté 2 en axes cartésiens (gauche) et logarithmiques (droite)

	NOEUD 1	NOEUD 2
Moment centré	0.02670.10 ⁻⁶	0.2472.10 ⁻⁶
Coefficient de dissymétrie	0.0641	0.2893

TAB. 10.4 – Caractéristiques statistiques d'ordre 3 des déplacements structurels

$$D_{3x_{111}} = \frac{D_{3\eta_{111}} - 3D_{3\eta_{112}} + 3D_{3\eta_{122}} - D_{3\eta_{222}}}{2\sqrt{2}} \quad (10.114)$$

$$D_{3x_{112}} = \frac{D_{3\eta_{111}} - D_{3\eta_{112}} - D_{3\eta_{122}} + D_{3\eta_{222}}}{2\sqrt{2}} \quad (10.115)$$

$$D_{3x_{122}} = \frac{D_{3\eta_{111}} + D_{3\eta_{112}} - D_{3\eta_{122}} - D_{3\eta_{222}}}{2\sqrt{2}} \quad (10.116)$$

$$D_{3x_{222}} = \frac{D_{3\eta_{111}} + 3D_{3\eta_{112}} + 3D_{3\eta_{122}} + D_{3\eta_{222}}}{2\sqrt{2}} \quad (10.117)$$

Ces fonctions sont représentées (en partie réelle) aux figures 10.14 et 10.15. Les formes des bispectres aux deux noeuds sont sensiblement différentes. Au premier noeud, on peut observer que le pic de contribution quasi-statique a presque disparu. Il est presque invisible sur la représentation en axes cartésiens et on peut constater, sur la représentation en axes logarithmiques que le niveau du pic est sensiblement plus bas. Par contre, pour le second degré de liberté, la hauteur du pic reste substantielle et, étant de section plus importante que les pics associés aux composantes dynamiques, il s'avère que la contribution quasi-statique soit prépondérante pour ce degré de liberté.

Ces deux bispectres diffèrent également sur les pics provenant du second noyau de Volterra : le bispectre du premier degré de liberté présente des pics d'amplitude négative non négligeables. Etant donné que ces pics ne se retrouvent pas avec autant d'importance dans le bispectre du déplacement au second degré de liberté, on peut conclure que cette distinction fondamentale est attribuable à l'importance des bispectres croisés entre amplitudes modales vis-à-vis des bispectres unilatéraux.

Même si cela n'est pas tout à fait évident avec les vues données des fonctions de bicorrélation représentées aux figures 10.14 et 10.15, on peut vérifier que les bispectres des déplacements présentent la symétrie habituelle des bispectres unilatéraux.

L'intégration sur le domaine des pulsations de ces bispectres permet d'obtenir les moments centrés de troisième ordre des déplacements aux deux noeuds de la structure. Ces valeurs permettent ensuite d'estimer les coefficients de dissymétrie. Les grandeurs obtenues sont reprise au tableau 10.4. Les valeurs que nous obtenons lors de cette étude dans le domaine fréquentiel sont assez proches des coefficients de dissymétrie obtenus à l'aide des simulations de Monte Carlo. (p. 416).

10.6.5 Etude paramétrique

Afin de valider notre modèle dans des conditions plus générales que celles d'une seule application numérique, nous avons décidé de réaliser plusieurs analyses en faisant varier la pulsation du second mode. Les données de chargement seront identiques au chargement utilisé précédemment. Quant à la structure, elle sera caractérisée par :

$$\xi = 0.01 \quad ; \quad \varpi_1 = 4 \text{ rad/s} \quad ; \quad \varpi_2 = n\varpi_1 \text{ (variable)}$$

Rappelons que la structure étudiée est le système à deux degrés de liberté présenté à l'introduction de cette partie. On peut vérifier que :

- la situation limite pour laquelle $n = 1$ correspond à $\varepsilon = 0$ et donc que la raideur du ressort intermédiaire tend vers zéro ;
- la situation limite pour laquelle n est très grand correspond à ε très grand ; les deux masses sont donc reliées par un lien rigide et se déplacent donc simultanément. Dans ce cas, elles présentent les mêmes caractéristiques statistiques de réponse.

On peut également vérifier que la situation $n < 1$ devrait correspondre à une raideur ε négative, ce qui n'est pas vraiment physique. Les développements analytiques et numériques peuvent cependant être entrepris pour de telles situations. Bien que l'interprétation physique des résultats obtenus dans ce cas soit assez nébuleuse, nous réaliserons néanmoins de telles analyses afin de comparer les résultats des différentes méthodes dans toute la gamme des rapports de fréquences propres.

Les premières grandeurs que nous pouvons étudier sont les caractéristiques d'ordre deux des déplacements aux noeuds de la structure. La figure 10.16 représente les écarts-types de ces déplacements en prenant en compte le couplage intermodal ou non. Comme annoncé, si le terme de couplage est négligé, les écart types des déplacements aux deux noeuds de la structure sont identiques et tels que la variance ainsi obtenue soit égale à la variance moyenne des déplacements aux noeuds obtenue en prenant en compte le terme de couplage.

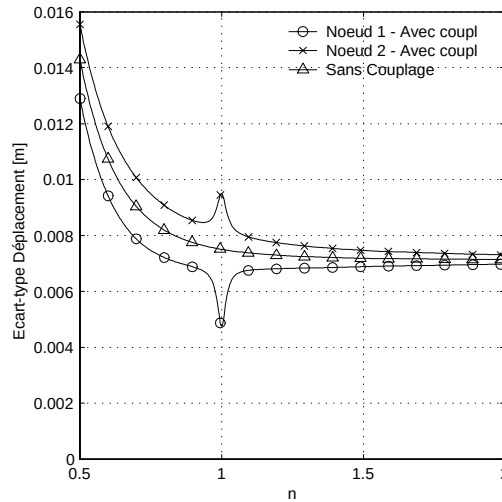


FIG. 10.16 – Etude paramétrique - Représentation des écarts-types des déplacements aux noeuds de la structure en fonction du rapport entre fréquences propres (avec ou sans couplage intermodal)

Etant donné que les forces généralisées dans les deux modes propres sont parfaitement cohérentes, le couplage modal se manifeste même lorsque les deux modes propres ont des fréquences propres fortement différentes (couplage quasi-statique). L'étude des effets

du couplage en fonction de l'espacement entre fréquences propres nous a appris que la covariance entre amplitudes modales pouvait être importante si

$$\alpha = \frac{1}{\xi} \frac{\varpi_2 - \varpi_1}{\varpi_1 + \varpi_2} = \frac{1}{\xi} \frac{n - \varpi_1}{n + \varpi_2} \quad (10.118)$$

est de l'ordre de 2 à 3¹⁴. L'effet du couplage commence donc à se faire ressentir lorsque

$$n = \frac{1 + \xi\alpha}{1 - \xi\alpha} \quad (10.119)$$

est de l'ordre de 1.04 à 1.06. Cette valeur peut être retrouvée assez facilement sur le graphique 10.16.

Etant donné que le code de calcul que nous avons développé au second ordre a déjà été validé à l'occasion d'un travail préalable ([26]), nous avons décidé de concentrer essentiellement nos efforts sur les caractéristiques de troisième ordre. Rappelons cependant que nous avons réalisé à l'occasion de ce travail une étude paramétrique au second ordre dans le domaine fréquentiel (avec intégration numérique des densités spectrales) et dans le domaine temporel par simulations de Monte Carlo. La structure étudiée était une structure à plusieurs degrés de liberté et nous avons réalisé une étude comparative des résultats obtenus dans les deux domaines, pour différentes valeurs du coefficient de cohérence caractérisant la turbulence du vent. Tout en étudiant les effets de la cohérence du vent, nous avons donc ainsi montré que les résultats obtenus dans les deux domaines pouvaient coïncider assez précisément pour autant que certains critères soient satisfaits (comme par exemple les critères de générations qui ont été rappelés dans ce document).

De notre étude paramétrique au troisième ordre, nous allons simplement nous contenter de représenter l'évolution des coefficients de dissymétrie des déplacements aux deux noeuds de la structure en fonction de l'espacement entre les fréquences propres. La figure 10.17 représente les résultats obtenus à l'aide des trois méthodes.

Les courbes lisses en traits continus représentent les résultats obtenus à l'aide de l'approche analytique (en base modale). Les croix représentent les résultats obtenus à l'aide de la méthode de Monte Carlo, appliquées dans les mêmes conditions que celles présentées au paragraphe précédent (30 échantillons de 20000 points). Cette analyse a été réalisée sans projeter les équations du mouvement dans la base modale. Les carrés représentent les résultats obtenus par l'approche numérique dans le domaine fréquentiel et dans la base modale¹⁵. Ces points sont donc obtenus en maillant l'espace des fréquences de façon adéquate puis en intégrant numériquement les bispectres des déplacements.

La très bonne concordance entre le résultat analytique et le résultat de l'intégration numérique dans le domaine fréquentiel indique que la méthode qui a été développée pour l'analyse dans le domaine fréquentiel permet d'obtenir de très bons résultats. Quant à l'approche par simulations de Monte Carlo, nous aurions tendance à affirmer que le nombre de simulations n'est pas encore suffisant pour permettre une bonne représentation

¹⁴La relation 9.33 se limite à $\frac{1}{1+\alpha^2}$ lorsque les deux modes propres sont amortis de façon identique. Pour $\alpha = 3$, la covariance ne vaut plus que $\frac{1}{1+\alpha^2} = \frac{1}{10}$ de la variance moyenne.

¹⁵Pour rappel, cette projection en base modale est inutile pour un système à deux degrés de liberté. Il faut comprendre que nous avons réalisé ceci pour valider le code de calcul qui permet de travailler avec une structure possédant un nombre N quelconque de degrés de liberté et en conservant un nombre M quelconque de modes propres.

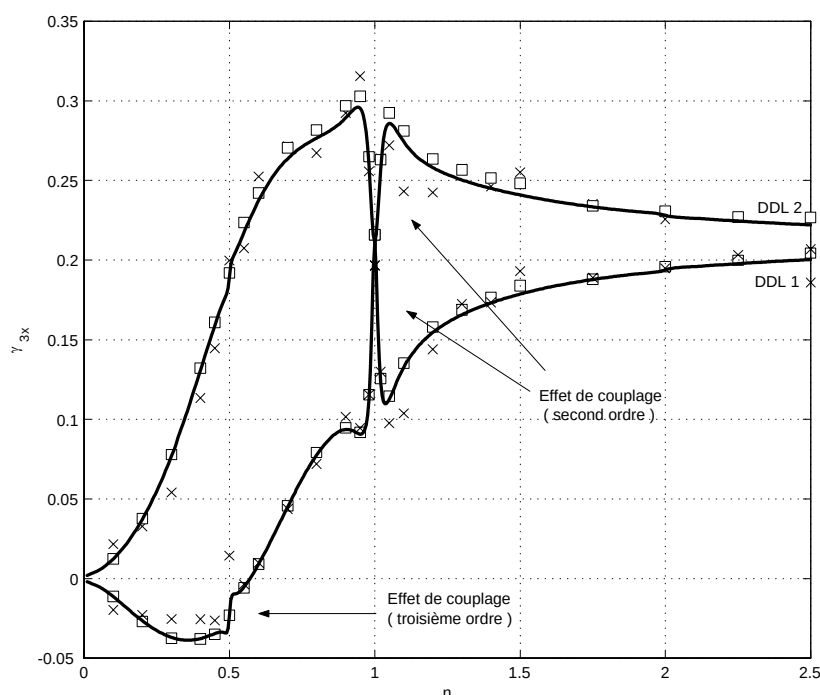


FIG. 10.17 – Etude paramétrique - Représentation des coefficients de dissymétrie des déplacements aux noeuds de la structure en fonction du rapport entre fréquences propres

des moments d'ordre 3. La bonne concordance entre les résultats obtenus est d'autant plus surprenante que les méthodes utilisées sont complètement différentes !

La forme de l'évolution des coefficients de symétrie en fonction de l'espacement entre fréquences propres est assez difficile à interpréter. On peut cependant remarquer que :

- lorsque $n = 1$, les deux masses sont découplées. Les déplacements des deux degrés de liberté sont donc parfaitement cohérents et dans le rapport 1 à 2 (puisque'il en est ainsi des deux sollicitations). Etant donné que l'amplitude du mouvement se simplifie dans l'expression du coefficient de dissymétrie, il n'est donc pas étonnant de retrouver un coefficient identique pour les déplacements aux deux noeuds ($\gamma_3 = 0.211$). Cette valeur est comprise entre 0 et le coefficient de dissymétrie de la sollicitation ($\gamma_F = 3I_u = 0.6$)¹⁶.
- pour les grandes valeurs du paramètre n , les deux masses sont reliées par un lien rigide. Elles se déplacent en bloc. L'étude réalisée dans ce cas revient donc à analyser un oscillateur simple dont la masse est la somme des deux masses et sollicité par la somme des deux sollicitations. Il n'est donc pas étonnant de retrouver un coefficient de dissymétrie identique pour les deux degrés de liberté ($\gamma_3 = 0.211$).
- la forme des courbes représentées à la figure 10.17 pourrait être lissée à l'oeil de sorte à gommer la discontinuité en $n = 0.5$ et les deux pics (plus ondulations) en $n = 1$. En comparant ce "comportement moyen" avec la courbe réelle, on comprend

¹⁶ Etant donné que la contribution dynamique de la réponse est un peu plus grande que la contribution quasi-statique, il n'est donc pas étonnant d'obtenir, pour les déplacements, un coefficient de dissymétrie inférieur à la moitié du coefficient caractérisant la sollicitation.

aisément que le double pic dans le voisinage de $n = 1$ est une manifestation du couplage entre modes au second ordre et que la variation brusque en $n = 0.5$ ¹⁷ est une manifestation du couplage au troisième ordre. En effet, nous avons vu que le couplage au troisième ordre présentait d'autant plus d'importance que la somme de deux fréquences propres s'approche de la troisième fréquence propre.

- l'interprétation physique de la partie des courbes comprise entre $n = 0$ et $n = 1$ est délicate. Nous avons vu que cette partie de la courbe ne correspond pas à des situations physique. Il n'est donc pas étonnant, par exemple, de pouvoir y retrouver un coefficient de dissymétrie négatif alors que la dissymétrie de la sollicitation est de signe contraire. L'étude de cette partie de graphique présente cependant l'avantage de montrer que la méthode d'intégration numérique donne des résultats corrects, même dans des conditions extrêmes.
- la différence entre la courbe continue et la courbe marquée de carrés provient des termes d'ordres supérieurs en I_u (non pris en compte pour la courbe continue) montre que ces termes ont une importance limitée.

10.7 Conclusions

L'analyse stochastique au troisième ordre d'une structure à plusieurs degré de liberté peut être entreprise de façon similaire à ce qui est réalisé à l'ordre 2. Cette étude nécessite donc la projection des efforts dans la base des modes propres, le calcul des réponses modales et finalement le retour en base structurelle.

Nous avons limité les développements présentés ici à une forme quadratique de la sollicitation. Dans ce contexte, nous avons vu que la matrice des densités spectrales des forces appliquées aux noeuds peut s'exprimer par la somme de deux termes d'ordres différents en l'intensité de turbulence I_u . Cette constatation est également valable pour la matrice des bispectres des forces nodales. Dans le cadre des densités spectrales rencontrées dans le domaine du vent, nous avons vu que ce terme d'ordre supérieur en I_u pouvait être négligé.

A notre connaissance, la méthode d'analyse au troisième ordre et en base modale est originale. On peut trouver, dans la littérature, un calcul d'une structure en base nodale ([54]). Il va de soi que cette approche est actuellement impossible dans le cadre des applications que nous visons, et avec les moyens informatiques d'aujourd'hui.

Un des points particuliers que nous avons pu mettre en évidence lors d'une analyse au troisième ordre est l'importance des termes de couplages entre amplitudes modales. Lors du calcul des matrices des bispectres des déplacements nodaux, nous avons mis en évidence la nécessité de travailler avec les contributions intermodales à l'ordre 3. Aussi, contrairement à l'ordre 2 où les contributions intermodales sont d'autant plus importantes que les fréquences propres sont proches, nous avons montré qu'à l'ordre 3, les contributions croisées entre modes sont d'autant plus importantes que la somme de deux fréquences propres s'approche d'une troisième.

¹⁷un agrandissement dans le voisinage de $n = 2$ montre également une variation brusque localisée de la fonction représentée

Chapitre 11

Approche temporelle

"Il existe une théorie statistique qui prétend que si vous donniez à un million de singes des machines à écrire et les mettiez au travail, ils finiraient par vous sortir les oeuvres complètes de Shakespeare. Grâce à internet, nous savons désormais que ce n'est pas vrai."

IAN HART

11.1 Introduction

Lors de l'étude de l'oscillateur simple, nous avons vu qu'il existait une méthode d'analyse dans le domaine temporel qui permettait l'étude de problèmes relativement diversifiés. Les développements que nous avons donnés à l'occasion de cette première présentation semblent montrer que cette analyse doit être appliquée au cas par cas. En effet, les systèmes d'équations à résoudre ont dû être écrits en particulierisant une équation générale, ce qui défie assurément la systématisation.

Souvenons-nous que l'étude de l'oscillateur simple a été entreprise dans un espace d'état. Dans cet espace particulier, l'équation du mouvement de l'oscillateur simple prend déjà une forme multidimensionnelle. La méthodologie que nous avons présentée s'adapte donc parfaitement et sans modification à l'étude de structures présentant plus de degrés de liberté. La seule complication supplémentaire consiste en l'écriture des équations à résoudre qui deviennent alors bien plus longues.

Pour éviter une redondance de la présentation donnée à l'occasion de l'oscillateur simple (puisque la démarche est en tout point identique), nous suivrons le conseil qui avait alors été formulé : afin de travailler avec des systèmes d'équations de plus petites dimensions, nous utiliserons cette fois une séparation des caractérisations de la structure d'une part et de la sollicitation d'autre part. Cette méthodologie est également celle qui est suivie par Muscolino ([73], [74]) et Di Paola ([32]). Sur base des mathématiques particulières de l'algèbre de Kronecker, cet auteur présente une méthodologie d'analyse qui

permet de systématiser l'approche, ce qui pourrait nous permettre de l'intégrer facilement dans un code aux éléments finis. La présentation théorique que nous donnons est issue, à l'une ou l'autre correction près, des ses travaux. L'originalité de la présentation consiste donc à nouveau en l'application de la méthode.

Les résultats que nous allons obtenir dans ce chapitre seront comparés, pour validation bilatérale, avec les résultats issus d'analyse dans le domaine fréquentiel.

11.2 Présentation sur un système à deux degrés de liberté

11.2.1 Ecriture du système d'équations à résoudre

Afin d'illustrer l'application de la méthode d'analyse dans le domaine temporel sur une structure à plusieurs degrés de liberté, nous allons repartir de l'exemple générique à deux degrés de liberté.8.1 et supposer, pour simplifier les notations, que $M = 1$, $K = 1$, $\mu = 1$, $\delta = 1$ et $\xi = 0$. Le système d'équations que nous allons étudier prend donc la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \zeta & -\zeta \\ -\zeta & \zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 + \varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + b_1 u_1 + c_1 u_1^2 \\ a_2 + b_2 u_2 + c_2 u_2^2 \end{Bmatrix} \quad (11.1)$$

Ce problème ne peut être résolu à l'aide de la règle de différentiation d'Ito que s'il peut être écrit sous la forme d'une équation différentielle stochastique d'Ito :

$$\{dx(t)\} = \{g(x(t), t)\} dt + [h(x(t), t)] \{dB(t)\} \quad (11.2)$$

Pour ce faire, nous supposons que les processus aléatoires u_1 et u_2 intervenant dans l'expression des efforts appliqués sur cette structure sont des processus aléatoires gaussiens markoviens. Nous supposons la forme la plus simple pour ceux-ci :

$$\dot{u}_1 = -\alpha_1 u_1 + \sigma_u \sqrt{2\alpha_1} \frac{dB_1}{dt} \quad (11.3)$$

$$\dot{u}_2 = -\alpha_2 u_2 + \sigma_u \sqrt{2\alpha_2} \frac{dB_2}{dt} \quad (11.4)$$

où dB_1 et dB_2 représentent les processus aléatoires de mouvements browniens dont la matrice de corrélation est :CHECK CHECK :

$$b = E [dB dB^T] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} dt \quad (11.5)$$

On peut donc ainsi comprendre que les processus aléatoires u_1 et u_2 sont des processus aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck conjoints dont la matrice des densités spectrales s'exprime par :

$$[S_u(\omega)] = \frac{\sigma_u^2}{\pi} \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \omega^2} & \frac{\gamma \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_1 \alpha_2 + \omega^2 + i(\alpha_1 - \alpha_2)\omega} \\ \frac{\gamma \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_1 \alpha_2 + \omega^2 - i(\alpha_1 - \alpha_2)\omega} & \frac{\alpha_2}{\alpha_2^2 + \omega^2} \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

11.2.2 Transformation au formalisme d'Ito

L'équation du mouvement de la structure étudiée doit être réécrite dans un espace d'état de sorte à ne plus faire intervenir qu'une seule dérivation :

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(1+\varepsilon) & \varepsilon & -2\zeta & 2\zeta \\ \varepsilon & -(1+\varepsilon) & 2\zeta & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (11.7)$$

où $f_1 = a_1 + b_1 u_1 + c_1 u_1^2$ et $f_2 = a_2 + b_2 u_2 + c_2 u_2^2$. Lors de l'étude de l'oscillateur simple, nous avons écrit l'équation du mouvement dans un espace d'état en ajoutant également la composante turbulente de la vitesse du vent comme variable. Les développements qui ont suivi ont montré que ce choix était intéressant car les moments d'ordres supérieurs de la réponse dépendent des moments croisés entre déplacement, vitesse et cette composante de la turbulence. En ajoutant ce dernier processus aux variables du problème dans l'espace d'état, nous avons donc inévitablement obtenu les expressions de ces moments croisés.

En suivant maintenant la même logique, le système d'équation que nous devons résoudre s'exprime par :

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\dot{x}_1 \\ d\dot{x}_2 \\ du_1 \\ du_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ -(1+\varepsilon)x_1 + \varepsilon x_2 - 2\zeta\dot{x}_1 + 2\zeta\dot{x}_2 + a_1 + b_1 u_1 + c_1 u_1^2 \\ \varepsilon x_1 - (1+\varepsilon)x_2 + 2\zeta\dot{x}_1 - 2\zeta\dot{x}_2 + a_2 + b_2 u_2 + c_2 u_2^2 \\ -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sigma_u \sqrt{2\alpha_1} & 0 \\ 0 & \sigma_u \sqrt{2\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{Bmatrix} \quad (11.8)$$

Le premier terme du membre de droite ne peut plus être écrit comme un produit matriciel à cause des termes non linéaires du chargement extérieur. L'observation de ce système d'équation peut mener à la même constatation que celle qui avait été formulée à l'occasion de l'étude de l'oscillateur simple ; la matrice intervenant dans cette expression montre qu'il semble exister deux ensembles de variables $(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ et (u_1, u_2) qui jouent des rôles complètement différents. D'un point de vue physique, on comprend de toute façon que le premier de ces ensembles correspond au comportement structurel et que le second correspond à la sollicitation appliquée.

Etant donné que le problème que nous étudions est assez particulier dans la mesure où les interactions entre la sollicitation et la structure sont assez limitées, il peut être assez avantageux de traiter ces variables séparément. De plus, lors de l'étude d'une structure à plus de degrés de liberté et plongée dans un champs de turbulence plus réaliste¹, cette

¹ dans ce cas, le champ de turbulence doit être représenté par un processus markovien d'ordre plus élevé. Plus d'équations sont alors nécessaires pour représenter la sollicitation.

séparation permet d'obtenir deux systèmes d'équations de taille relativement importante plutôt qu'un seul système de grandes dimensions.

Nous allons donc essayer de résoudre le problème en étudiant successivement les caractéristiques de la sollicitation, de la structure et les caractéristiques statistiques croisées entre les deux groupes de variables.

Nous repartirons donc de la relation 11.7 pour le comportement structurel² et de

$$\begin{Bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha_1 u_1 \\ -\alpha_2 u_2 \end{Bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_u \sqrt{2\alpha_1} & 0 \\ 0 & \sigma_u \sqrt{2\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{Bmatrix} \quad (11.9)$$

pour la caractérisation du champ de vitesse.

La démarche que nous avons présentée lors de l'étude de l'oscillateur simple a montré que les caractéristiques de la composante turbulente pouvaient être déterminées dans une première phase indépendante de l'analyse (nous avons choisi pour commencer $p = 0$, $q = 0$). Après cette première étape, nous verrons comment déterminer les caractéristiques structurelles.

11.2.3 Caractéristiques du champ de turbulence

Les caractéristiques statistiques du champ de turbulence peuvent être établies en appliquant la règle de différentiation d'Ito à l'équation 11.9 :

$$\frac{dE[\phi]}{dt} = E\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right] + \sum_{i=1}^N E\left[g_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E\left[(hbh^T)_{ij} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\right] \quad (11.10)$$

La matrice hbh^T intervenant cette relation peut être obtenue à partir de la matrice de corrélation des processus aléatoires B_1 et B_2 (Eq. 11.5) :

$$hbh^T = 2\sigma_u^2 \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma\sqrt{\alpha_1\alpha_2} \\ \gamma\sqrt{\alpha_1\alpha_2} & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

La règle de différentiation permet d'écrire les équations différentielles classiques (équations aux moments) qui régissent les évolutions des moments statistiques conjoints des variables aléatoires u_1 et u_2 . En choisissant $\phi = u_1^p u_2^q$ et en supposant que l'on ne désire établir que la caractéristique stationnaire de la turbulence, on peut écrire :

$$0 = -\alpha_1 E\left[u_1 \frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right] - \alpha_2 E\left[u_2 \frac{\partial\phi}{\partial u_2}\right] + \sigma_u^2 \left(\alpha_1 E\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 u_1}\right] + 2\gamma\sqrt{\alpha_1\alpha_2} E\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial u_1 \partial u_2}\right] + \alpha_2 E\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 u_2}\right] \right) \quad (11.12)$$

En écrivant toutes les équations qu'il est possible d'écrire pour $p + q = cst$, on peut former des systèmes contenant autant d'inconnues que d'équations. Ceci permet de déterminer les moments croisés entre les deux composantes de la turbulence. Par exemple, pour les moments d'ordre 1, en choisissant successivement $\phi = u_1$ et $\phi = u_2$ on obtient :

$$0 = \begin{Bmatrix} -\alpha_1 E[u_1] \\ -\alpha_2 E[u_2] \end{Bmatrix} \quad (11.13)$$

²Pour plus de généralités, cette expression pourrait se mettre sous la forme $\dot{X} = DX + Ef$

ce qui indique que la partie stationnaire des processus u_1 et u_2 est à moyenne nulle. Les expressions pour les moments d'ordre 2 peuvent être obtenues en choisissant successivement $\phi = u_1^2$, $\phi = u_1 u_2$ et $\phi = u_2^2$:

$$0 = \begin{Bmatrix} -2\alpha_1 E[u_1^2] \\ -\alpha_1 E[u_1 u_2] - \alpha_2 E[u_1 u_2] \\ -2\alpha_2 E[u_2^2] \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2\sigma_u^2 \alpha_1 \\ 2\sigma_u^2 \gamma \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \\ 2\sigma_u^2 \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (11.14)$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{Bmatrix} E[u_1^2] \\ E[u_1 u_2] \\ E[u_2^2] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_u^2 \\ \gamma \sigma_u^2 \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ \sigma_u^2 \end{Bmatrix} \quad (11.15)$$

Remarquons que ces valeurs auraient pu être obtenues en intégrant la matrice des densités spectrales des composantes de la turbulence (11.6) sur les pulsations.

Les moments d'ordre 3 peuvent être obtenus en choisissant $\phi = u_1^3$, $\phi = u_1^2 u_2$, $\phi = u_1 u_2^2$ et $\phi = u_2^3$. Les expressions qui sont obtenues dépendent des moments de premier ordre. Après simplifications, on trouve que ces moments d'ordre 3 sont nuls. Ceci rejoint les développements théoriques sur les moments que nous avons présentés à la partie précédente. Les moments d'ordre 4 peuvent également être obtenus de la même manière. Après simplification, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} E[u_1^4] \\ E[u_1^3 u_2] \\ E[u_1^2 u_2^2] \\ E[u_1 u_2^3] \\ E[u_2^4] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3\sigma_u^4 \\ \frac{6\sigma_u^4 \gamma \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ \sigma_u^4 \left(1 + \frac{8\gamma^2 \alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \right) \\ \frac{6\sigma_u^4 \gamma \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ 3\sigma_u^4 \end{Bmatrix} \quad (11.16)$$

Ces relations ont une forme qui est déjà maintenant presque habituelle. Elles auraient également pu être obtenues à partir de l'intégration de la densité de probabilité conjointe entre deux processus aléatoires gaussiens.

11.2.4 Caractéristiques des forces appliquées

Connaissant les moments statistiques des composantes de la turbulence, on peut obtenir assez facilement les moments des forces appliquées puisqu'elles s'expriment par une transformation statique de ces composantes. Au premier ordre, on trouve :

$$\begin{Bmatrix} E[f_1] \\ E[f_2] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + b_1 E[u_1] + c_1 E[u_1^2] \\ a_2 + b_2 E[u_2] + c_2 E[u_2^2] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + c_1 \sigma_u^2 \\ a_2 + c_2 \sigma_u^2 \end{Bmatrix} \quad (11.17)$$

Au second ordre, on trouve :

$$\begin{Bmatrix} E[f_1^2] \\ E[f_1 f_2] \\ E[f_2^2] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1^2 + (b_1^2 + 2a_1 c_1) \sigma_u^2 + 3c_1^2 \sigma_u^4 \\ a_1 a_2 + \left(a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_1 b_2 \gamma \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) \sigma_u^2 + c_1 c_2 \left(1 + \frac{8\gamma^2 \alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \right) \sigma_u^4 \\ a_2^2 + (b_2^2 + 2a_2 c_2) \sigma_u^2 + 3c_2^2 \sigma_u^4 \end{Bmatrix} \quad (11.18)$$

Les caractéristiques d'ordres 3 et 4 des forces appliquées à la structure étudiée peuvent également être calculées de la même façon. Afin d'alléger la présentation, toutes ces expressions ne sont pas présentées. Remarquons cependant que les moments d'ordre 3 des forces nodales dépendent des moments conjoints d'ordre 6 des composantes turbulentes. De même, les moments d'ordre 4 des forces appliquées dépendent des moments conjoints d'ordre 8 des composantes turbulentes. Ceci rejoint les réflexions qui ont déjà été données lors de la première partie.

11.2.5 Caractéristiques des coordonnées structurelles

La relation 11.7 est celle qui gouverne le comportement de la structure étudiée. Elle doit nous permettre d'estimer les moments statistiques de la réponse en fonction des moments statistiques des sollicitations appliquées. Pour ce faire, nous allons réécrire la relation 11.7 sous la forme d'une équation différentielle stochastique d'Ito :

$$\{dx(t)\} = \{g(x(t), t)\} dt + [h(x(t), t)] \{dB(t)\} \quad (11.19)$$

soit,

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\dot{x}_1 \\ d\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ -(1+\varepsilon)x_1 + \varepsilon x_2 - 2\zeta\dot{x}_1 + 2\zeta\dot{x}_2 + f_1 \\ \varepsilon x_1 - (1+\varepsilon)x_2 + 2\zeta\dot{x}_1 - 2\zeta\dot{x}_2 + f_2 \end{pmatrix} dt \quad (11.20)$$

La relation que l'on obtient ainsi est en réalité une équation différentielle stochastique classique (et non pas d'Ito) puisque la sollicitation appliquée (f_1, f_2) est déjà colorée : le terme de chargement par le bruit blanc a disparu. La règle de différentiation classique peut donc suffire à l'obtention des moments statistiques. En effet, si l'on désire appliquer la méthode présentée jusqu'à ce point à la relation 11.20, de la règle de différentiation d'Ito :

$$\frac{dE[\phi]}{dt} = E\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right] + \sum_{i=1}^N E\left[g_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E\left[(hbh^T)_{ij} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\right] \quad (11.21)$$

il ne reste que :

$$\frac{dE[\phi]}{dt} = E\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right] + \sum_{i=1}^N E\left[g_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right] \quad (11.22)$$

qui n'est finalement rien d'autre que la règle de différentiation classique. Lorsque le problème étudié est stationnaire et que les fonctions ϕ choisies ne font pas intervenir explicitement le temps, il reste :

$$\sum_{i=1}^N E\left[g_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right] = 0 \quad (11.23)$$

Avec les éléments du vecteur g que nous avons obtenus à la relation 11.20, dans le cadre précis du problème à deux degrés de liberté que nous étudions, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 = & E \left[\dot{x}_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right] + E \left[(- (1 + \varepsilon) x_1 + \varepsilon x_2 - 2\zeta \dot{x}_1 + 2\zeta \dot{x}_2 + f_1) \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}_1} \right] \\ & + E \left[\dot{x}_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right] + E \left[(\varepsilon x_1 - (1 + \varepsilon) x_2 + 2\zeta \dot{x}_1 - 2\zeta \dot{x}_2 + f_2) \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}_2} \right] \end{aligned} \quad (11.24)$$

Cette règle de différentiation peut être appliquée pour déterminer les moments de premier ordre de la réponse ; il suffit de choisir $\phi = x_1$, $\phi = x_2$, $\phi = \dot{x}_1$ et $\phi = \dot{x}_2$:

$$\left\{ \begin{array}{c} E[\dot{x}_1] \\ E[\dot{x}_2] \\ - (1 + \varepsilon) E[x_1] + \varepsilon E[x_2] - 2\zeta E[\dot{x}_1] + 2\zeta E[\dot{x}_2] + E[f_1] \\ \varepsilon E[x_1] - (1 + \varepsilon) E[x_2] + 2\zeta E[\dot{x}_1] - 2\zeta E[\dot{x}_2] + E[f_2] \end{array} \right\} = 0 \quad (11.25)$$

La résolution de ce système permet de trouver :

$$\left\{ \begin{array}{c} E[x_1] \\ E[x_2] \\ E[\dot{x}_1] \\ E[\dot{x}_2] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(\varepsilon+1)E[f_1] + \varepsilon E[f_2]}{2\varepsilon+1} \\ \frac{\varepsilon E[f_1] + (\varepsilon+1)E[f_2]}{2\varepsilon+1} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(\varepsilon+1)(a_1+c_1\sigma_u^2) + \varepsilon(a_2+c_2\sigma_u^2)}{2\varepsilon+1} \\ \frac{\varepsilon(a_1+c_1\sigma_u^2) + (\varepsilon+1)(a_2+c_2\sigma_u^2)}{2\varepsilon+1} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (11.26)$$

Ce résultat est assez simple et immédiat. Il aurait pu être obtenu plus facilement en prenant l'espérance mathématique membre à membre de l'équation du mouvement. En continuant les développements, nous allons voir que les caractéristiques statistiques de la réponse sont plus difficiles à obtenir pour les ordres plus élevés. Par exemple, pour pouvoir obtenir les caractéristiques à l'ordre 2, nous devons écrire la règle de différentiation pour $\phi = x_1^2$, $\phi = x_1 x_2$, $\phi = x_1 \dot{x}_1$, $\phi = x_1 \dot{x}_2$, $\phi = x_2^2$, $\phi = x_2 \dot{x}_1$, $\phi = x_2 \dot{x}_2$, $\phi = \dot{x}_1^2$, $\phi = \dot{x}_1 \dot{x}_2$ et $\phi = \dot{x}_2^2$. Pour chacune de ces dix fonctions, on obtient alors une équation faisant intervenir les moments d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} x_1^2 &\rightarrow 2E[x_1 \dot{x}_1] = 0 \\ x_1 x_2 &\rightarrow E[x_2 \dot{x}_1] + E[x_1 \dot{x}_2] = 0 \\ x_1 \dot{x}_1 &\rightarrow E[\dot{x}_1^2] - (1 + \varepsilon) E[x_1^2] + \varepsilon E[x_1 x_2] - 2\zeta E[x_1 \dot{x}_1] + 2\zeta E[x_1 \dot{x}_2] + E[x_1 f_1] = 0 \\ x_1 \dot{x}_2 &\rightarrow E[\dot{x}_1 \dot{x}_2] + \varepsilon E[x_1^2] - (1 + \varepsilon) E[x_1 x_2] + 2\zeta E[x_1 \dot{x}_1] - 2\zeta E[x_1 \dot{x}_2] + E[x_1 f_2] = 0 \\ x_2^2 &\rightarrow 2E[x_2 \dot{x}_2] = 0 \\ x_2 \dot{x}_1 &\rightarrow E[\dot{x}_1 \dot{x}_2] - (1 + \varepsilon) E[x_1 x_2] + \varepsilon E[x_2^2] - 2\zeta E[x_2 \dot{x}_1] + 2\zeta E[x_2 \dot{x}_2] + E[x_2 f_1] = 0 \\ x_2 \dot{x}_2 &\rightarrow E[\dot{x}_2^2] + \varepsilon E[x_1 x_2] - (1 + \varepsilon) E[x_2^2] + 2\zeta E[x_2 \dot{x}_1] - 2\zeta E[x_2 \dot{x}_2] + E[x_2 f_2] = 0 \\ \dot{x}_1^2 &\rightarrow -2(1 + \varepsilon) E[x_1 \dot{x}_1] + 2\varepsilon E[x_2 \dot{x}_1] - 4\zeta E[\dot{x}_1^2] + 4\zeta E[\dot{x}_1 \dot{x}_2] + 2E[\dot{x}_1 f_1] = 0 \\ \dot{x}_1 \dot{x}_2 &\rightarrow -(1 + \varepsilon) E[x_1 \dot{x}_2] + \varepsilon E[x_2 \dot{x}_2] - 2\zeta E[\dot{x}_1 \dot{x}_2] + 2\zeta E[\dot{x}_2^2] + E[\dot{x}_2 f_1] + \\ &\quad \varepsilon E[x_1 \dot{x}_1] - (1 + \varepsilon) E[x_2 \dot{x}_1] + 2\zeta E[\dot{x}_1^2] - 2\zeta E[\dot{x}_1 \dot{x}_2] + E[\dot{x}_1 f_2] = 0 \\ \dot{x}_2^2 &\rightarrow 2\varepsilon E[x_1 \dot{x}_2] - 2(1 + \varepsilon) E[x_2 \dot{x}_2] + 4\zeta E[\dot{x}_1 \dot{x}_2] - 4\zeta E[\dot{x}_2^2] + E[\dot{x}_2 f_2] = 0 \end{aligned} \quad (11.27)$$

La première raison pour laquelle nous annonçons une augmentation substantielle de difficulté concerne le nombre d'équations obtenues. Nous ne sommes qu'au second ordre et nous devons déjà écrire 10 équations ! On peut voir assez facilement que le nombre d'équations à écrire est le nombre de façon de choisir deux valeurs parmi n , soit $\frac{n(n+1)}{2}$.

De plus, le système d'équations que nous venons d'écrire ne peut pas être résolu tel quel puisqu'il fait intervenir des moments croisés entre sollicitation et réponse structurelle (des moments du type $E[x_1 f_1]$) qui sont encore indéterminés. En nous souvenant des étapes de la stratégie de calcul qui a dû être établie pour l'étude de l'oscillateur simple, nous aurions pu nous attendre à devoir estimer ces moments croisés pour pouvoir obtenir les expressions des moments statistiques structurels.

Les moments croisés entre réponse structurelle et sollicitation qui interviennent dans les relations 11.27 sont au nombre de huit. Chacun de ces moments peut être calculé en remplaçant f_1 (ou f_2) par son expression en fonction des composantes de la turbulence. Par exemple :

$$\begin{aligned} E[x_1 f_1] &= E[x_1 (a_1 + b_1 u_1 + c_1 u_1^2)] \\ &= a_1 E[x_1] + b_1 E[x_1 u_1] + c_1 E[x_1 u_1^2] \end{aligned} \quad (11.28)$$

Nous obtenons ainsi une expression des moments recherchés en fonction des moments statistiques croisés entre la réponse structurelle et les composantes de la turbulence. De nouveau, tous ces moments croisés doivent être considérés successivement. Par exemple, l'estimation de $E[x_1 u_1^2]$ peut être obtenue à partir de la différentielle :

$$\begin{aligned} d(x_1 u_1^2) &= dx_1 u_1^2 + x_1 d(u_1^2) \\ &= dx_1 u_1^2 + 2x_1 u_1 du_1 \end{aligned} \quad (11.29)$$

où le du_1 peut être estimé à partir de la définition de la turbulence (Eq. 11.9) :

$$d(x_1 u_1^2) = dx_1 u_1^2 - 2\alpha_1 x_1 u_1^2 dt + 2\sigma_u \sqrt{2\alpha_1} x_1 u_1 dB_1 \quad (11.30)$$

En prenant l'espérance mathématique membre à membre, puis en divisant par dt et finalement en considérant que les processus étudiés sont stationnaires, il reste³ :

$$0 = E[\dot{x}_1 u_1^2] - 2\alpha_1 E[x_1 u_1^2] \quad (11.31)$$

En considérant de la même manière tous les moments du type $E[s_1 s_2]$ où s_1 représente $x_1, x_2, \dot{x}_1$ ou $\dot{x}_2$ et s_2 représente u_1, u_2, u_1^2 ou u_2^2 , nous pouvons former un ensemble d'équations permettant de déterminer tous ces moments croisés entre les déplacements structurels et les composantes de la turbulence.

Nous pouvons donc revenir à l'étape précédente et calculer ainsi tous les moments croisés entre les déplacements structurels et les forces appliquées aux noeuds (équations comme 11.28).

Ensuite, connaissant les expressions de tous ces moments croisés, les moments statistiques d'ordre 2 des déplacements structurels peuvent être calculés grâce aux relations 11.27.

On peut donc maintenant comprendre mieux pourquoi la procédure peut devenir rapidement très compliquée. Et ce ne sont que les moments d'ordre 2!

³Le résultat obtenu ici est encore assez simple. On aurait pu ne pas repasser par la définition de du_1 . Nous verrons dans la suite que cette démarche complète est cependant nécessaire pour l'estimation des moments statistiques faisant intervenir des puissances plus élevées des composantes de la turbulence.

Notons que toutes les péripéties que nous rencontrons sont essentiellement dues au choix de travailler avec deux systèmes d'équations dissociés, l'un pour la structure et l'autre pour la sollicitation. Nous aurions pu étudier un seul système beaucoup plus grand⁴ en regroupant, dans le même vecteur des variables d'état, toutes les variables structurelles et toutes les variables caractérisant la turbulence du vent.

Les développements que nous limiterons ici au second ordre peuvent continuer de la même manière avec le calcul des moments croisés d'ordres supérieurs des déplacements structurels.

11.3 Systématisation de la méthode

11.3.1 Objectifs

La résolution de l'équation différentielle stochastique d'Ito à l'aide de la règle de différentiation d'Ito est assez générale dans le type de problème qu'elle peut traiter : sollicitations non gaussiennes, voire également stationnaires, structures non linéaires, etc. L'exemple, en définitive assez simple, qui vient d'être présenté montre que l'application de cette méthode semble assez fastidieuse. Le véritable problème provient essentiellement de la nécessité de particulariser les équations au système étudié.

Di Paola ([32]) et Muscolino ([73], [74]) présentent une méthode d'analyse basée sur l'algèbre de Kronecker qui permet de systématiser la démarche. Nous allons la présenter ci-après dans le contexte de l'étude d'un système discrétisé. Les démarches présentées par les auteurs (bien que légèrement différentes l'une de l'autre) consistent à réaliser séparément l'étude de la structure et celle de la sollicitation, tout en reconnectant ces deux études aux endroits nécessaires comme nous venons de le présenter. Nous avons choisi de présenter la méthode proposée par Di Paola.

Admettons que l'on étudie le système discret dont l'équation du mouvement s'écrit par :

$$[M] \{\ddot{x}\} + \{f(x, \dot{x}, t)\} = 0 \quad (11.32)$$

Ce système discret peut être obtenu à partir d'une modélisation d'une structure continue par la méthode des éléments finis par exemple, ou par la projection dans une base modale du comportement d'une structure continue. Cette relation montre que le comportement de la structure peut éventuellement être non linéaire. De façon à pouvoir séparer les études de la structure et de la sollicitation, nous allons cependant restreindre notre analyse à celle d'une structure linéaire chargée par une forme polynômiale d'un processus aléatoire gaussien :

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{f\} \quad (11.33)$$

Pour pouvoir appliquer la règle de différentiation d'Ito, ce système d'équations doit être réécrit dans un espace d'état. A condition que la matrice de masse ne soit pas

⁴Au second ordre par exemple, nous aurions eu $\frac{6.7}{2} = 21$ moments croisés au lieu de $\frac{4.5}{2} = 10$; au troisième ordre, nous aurions eu $\frac{6.7.8}{6} = 56$ moments au lieu de $\frac{4.5.6}{6} = 20$ moments ; au quatrième ordre, nous aurions eu $\frac{6.7.8.9}{24} = 126$ moments au lieu de $\frac{4.5.6.7}{24} = 35$ moments. Le système étudié ici ne comporte que deux degrés de liberté. L'augmentation du nombre de moments croisés est d'autant plus importante que la taille du système est grande (et que la représentation du contenu fréquentiel du vent est compliquée).

singulière⁵, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \{0\} \\ [M]^{-1}\{f(x, \dot{x}, t)\} \end{pmatrix} \quad (11.34)$$

Les développements présentés par Di Paola permettent de réaliser l'étude d'un système dynamique dont le comportement dans l'espace d'état s'exprime par :

$$\dot{X} = DX + Ef \quad (11.35)$$

Ses développements peuvent donc être appliqués dans le cadre du problème que nous étudions puisque la modélisation du système discret que nous étudions peut s'écrire sous cette forme en posant :

$$X = \begin{pmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1} \end{bmatrix} \quad (11.36)$$

Puisque nous sommes au stade d'une généralisation, ajoutons qu'il pourrait être intéressant d'analyser des structures chargées par des sollicitations tout à fait quelconques. Nous allons cependant nous limiter au cas où les forces peuvent être exprimées par des formes polynômiales de processus aléatoires gaussiens markoviens :

$$\{f\} = \{F(U)\} \quad (11.37)$$

où $U = \{u\}$ représente une chaîne de Markov⁶ et F une fonction vectorielle polynômiale. Etant donné la restriction que nous imposons sur le processus aléatoire vectoriel U , regroupant pour nous les composantes de la turbulence, on peut écrire :

$$\{dU\} = [\Gamma] \{U\} dt + [\Lambda] \{dB\} \quad (11.38)$$

où les matrices Γ et Λ sont les matrices de transition qui permettent de donner aux composantes de la turbulence leurs densités spectrales unilatérales ainsi que les cohérences entre elles. Le processus vectoriel $\{dB\}$ est un processus de Wiener, dont la dérivée donne un bruit blanc vectoriel, comme ceux que nous avons utilisés ci-avant.

Les relations 11.35 et 11.38 sont les généralisations des relations que nous avons écrites ci-avant pour la structure à deux degrés de liberté. L'objectif de l'analyse consiste en la détermination des moments statistiques d'ordre $r_{\max}$ des coordonnées structurelles. Si $r_{\max}$ était égal à 1, le problème serait assez simple puisqu'il suffirait de déterminer l'espérance mathématique du processus aléatoire vectoriel X :

$$E[\{X\}] = ? \quad (11.39)$$

Si l'ordre maximal $r_{\max}$ était égal à 2, l'objectif consisterait en la détermination des moments statistiques du type $E[X_1^2]$ ou $E[X_1 X_3]$. Ces moments pourraient donc être estimés à partir du produit matriciel :

$$E[\{X\}^T \{X\}] = ? \quad (11.40)$$

⁵ ce qui est de toute façon le cas lors de l'étude d'une structure en base modale ; les matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$ représentent alors des matrices généralisées.

⁶ un processus d'Ornstein-Uhlenbeck par exemple, ou un processus d'ordre plus élevé qui pourrait mieux représenter les densités spectrales de vent réalistes

En effet, le produit $\{X\}^T \{X\}$ regroupe toutes les combinaisons possibles de deux éléments de $\{X\}$. A l'ordre 3 et plus, cette notation à l'aide du produit matriciel classique n'est plus réalisable. Nous allons voir qu'il est alors nécessaire de recourir à une algèbre généralement peu connue et qui permet de prendre en compte ces combinaisons d'ordres supérieurs. Il s'agit de l'algèbre de Kronecker. Selon les règles et définitions de cette algèbre particulière, la troisième puissance d'un vecteur comprend tous les produits croisés qu'il peut exister entre les éléments du vecteur de base. Nous pouvons donc dès à présent comprendre que ces règles de calcul peuvent nous être utiles. L'objectif de l'analyse va donc consister à calculer l'espérance mathématique de la puissance $r_{\max}$ du vecteur $\{X\}$.

C'est l'objectif que Di Paola et Muscolino visent à atteindre. Avant de présenter la démarche qu'ils ont suivie pour arriver à cet objectif, nous présentons d'abord quelques caractéristiques de l'algèbre de Kronecker.

11.3.2 L'algèbre de Kronecker

Le produit de Kronecker de deux matrices M et N de dimensions respectives (p, q) et (r, s) est une matrice de dimensions (pr, qs) définie par :

$$M \otimes N = \begin{bmatrix} M_{11}N & M_{12}N & \cdots & M_{1q}N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{p1}N & M_{p2}N & \cdots & M_{pq}N \end{bmatrix} \quad (11.41)$$

Les propriétés principales du produit de Kronecker sont les suivantes :

$$M \otimes (N \otimes P) = (M \otimes N) \otimes P \quad (11.42)$$

$$(M + N) \otimes (P + Q) = M \otimes P + M \otimes Q + N \otimes P + N \otimes Q \quad (11.43)$$

$$(M \otimes N) (P \otimes Q) = (MP) \otimes (NQ) \quad (11.44)$$

$$(M \otimes N)^T = M^T \otimes N^T \quad (11.45)$$

$$(M \otimes N)^{-1} = M^{-1} \otimes N^{-1} \quad (11.46)$$

Dans le cadre de l'algèbre de Kronecker, on introduit également des matrices de permutation $E_{i,j}$ qui sont l'assemblage de plusieurs matrices élémentaires E^{kl} ($k \leq j, l \leq i$). Chacune de ces matrices élémentaires est de dimensions (j, i) et contient une seule valeur non nulle placée à la position (k, l) . L'assemblage de ces matrices élémentaires se fait par juxtaposition en i lignes et j colonnes. Par exemple, pour $i = 3$ et $j = 2$, on obtient :

$$E_{3,2} = \begin{bmatrix} E^{11} & E^{21} \\ E^{12} & E^{22} \\ E^{13} & E^{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (11.47)$$

De la définition donnée pour ces matrices de permutation, il découle que ces matrices sont composées de ij "1" et le reste de zéros, tous les "1" étant localisés de sorte qu'il n'y en ait qu'un seul par ligne et un seul par colonne. Ces matrices occupent un rôle important

dans l'algèbre de Kronecker car elles permettent d'exprimer, à l'aide du produit matriciel classique, la commutativité du produit de Kronecker :

$$\underbrace{(N \otimes M)}_{pr \times qs} = \underbrace{E_{p,r}}_{pr \times pr} \underbrace{(M \otimes N)}_{pr \times qs} \underbrace{E_{s,q}}_{qs \times qs} \quad (11.48)$$

Dans le cadre de l'algèbre de Kronecker, l'opération de différentiation d'un vecteur Z de dimension n est régie par les relations suivantes où l'opérateur de dérivation ∇_Z est introduit :

$$\nabla_Z^T = \left\langle \frac{\partial}{\partial Z_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial Z_n} \right\rangle \quad (11.49)$$

$$\nabla_Z^T \otimes Z = I_n \quad (11.50)$$

$$\underbrace{\nabla_Z^T}_{1 \times n} \otimes \underbrace{Z^{[k]}}_{n^k \times 1} = \underbrace{Q_k^n}_{n^k \times n^k} \left(\underbrace{I_n}_{n \times n} \otimes \underbrace{Z^{[k-1]}}_{n^{k-1} \times 1} \right) \quad (11.51)$$

Tout comme les matrices de permutation occupent un rôle important pour la propriété de commutativité, les matrices Q_k^n introduites ci-dessus occupent une place importante pour l'opération de dérivation. On peut montrer qu'elles s'expriment par :

$$Q_k^n = \sum_{j=0}^{k-1} E_{n^{k-j}, n^j} \quad (11.52)$$

11.3.3 Application à l'étude des structures soumises au vent turbulent

Il semble illusoire à l'heure actuelle de vouloir déterminer l'expression complète de la probabilité conjointe entre position et vitesse. Nous nous contenterons donc de calculer l'espérance mathématique de la $r^{ième}$ puissance (de Kronecker) du vecteur X :

$$X^{[r]} = X \otimes X \otimes X \cdots \otimes X \quad (11.53)$$

Notons n_X et n_U les dimensions respectives des vecteurs X et U qui caractérisent séparément la structure et le champ de turbulence. Notons que la $r^{ième}$ puissance (de Kronecker) du vecteur X est un vecteur de dimensions n_X^r dont plusieurs éléments sont identiques. Par exemple :

$$\begin{aligned} X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} &\rightarrow X^{[2]} = \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_1 X_2 \\ X_1 X_2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \\ &\rightarrow X^{[3]} = \begin{Bmatrix} X_1^3 \\ X_1^2 X_2 \\ X_1^2 X_2 \\ X_1 X_2^2 \\ X_1^2 X_2 \\ X_1 X_2^2 \\ X_1 X_2^2 \\ X_2^3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (11.54)$$

Ceci représente à notre avis un inconvénient majeur de la méthode que nous allons présenter : cette méthode nécessite de travailler avec des systèmes de tailles excessivement grandes par rapport à ce qui serait strictement nécessaire si les développements étaient réalisés au cas par cas. Admettons pour fixer les idées que nous réalisons l'étude d'une structure, dans la base des modes propres réduite à 10 modes, jusqu'à l'ordre 4. Dans ce cas, la taille du vecteur $X^{[r]}$ est 10^4 alors qu'en réalité, seulement $\frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{24} = 715$ termes de ce vecteur sont différents.

La différentiation de l'expression 11.53 permet d'écrire :

$$dX^{[r]} = \left(\nabla_X^T \otimes X^{[r]} \right) dX = Q_r^N \left(I_{n_X} \otimes X^{[r-1]} \right) dX \quad (11.55)$$

L'expression de dX peut également être remplacée de façon à introduire les caractéristiques structurelles, soit, en vertu de $\dot{X} = DX + Ef$:

$$\begin{aligned} dX^{[r]} &= Q_r^N \left(I_{n_X} \otimes X^{[r-1]} \right) (DX + Ef) dt \\ &= Q_r^N \left(I_{n_X} \otimes X^{[r-1]} \right) DX dt + Q_r^N \left(I \otimes X^{[r-1]} \right) Ef dt \end{aligned} \quad (11.56)$$

L'algèbre de Kronecker permet de démontrer que

$$Q_r^N \left(I_{n_X} \otimes X^{[r-1]} \right) DX = \underbrace{Q_r^N \left(I_{n_X}^{[r-1]} \otimes D \right)}_{D_r^*} X^{[r]} = \underbrace{\left(D \otimes I_{n_X}^{[r-1]} + I_{n_X} \otimes D_{r-1} \right)}_{D_r} X^{[r]} \quad (11.57)$$

où les matrices D_r et D_r^* de dimensions (n_x^r, n_x^r) sont différentes mais telles que les résultats de la multiplication à droite de chacune des deux matrices par $X^{[r]}$ soient identiques. Dans la suite, nous travaillerons exclusivement avec la matrice D_r qui, par rapport à D_r^* sa cousine, a l'avantage d'être non singulière.

De même, on peut également montrer que :

$$Q_r^N \left(I_{n_X} \otimes X^{[r-1]} \right) Ef = \underbrace{Q_r^N \left(I_{n_X}^{[r-1]} \otimes E \right)}_{E_r} \left(X^{[r-1]} \otimes f \right) \quad (11.58)$$

mais, cette fois, la relation de récurrence qui permettait d'exprimer les matrices D_r de façon à avoir une matrice non singulière n'est plus d'application :

$$\underbrace{Q_r^N \left(I_{n_X}^{[r-1]} \otimes E \right)}_{E_r} \left(X^{[r-1]} \otimes f \right) \neq \left(E \otimes I_{n_X}^{[r-1]} + I_{n_X} \otimes E_{r-1} \right) \left(X^{[r-1]} \otimes f \right) \quad !!! \quad (11.59)$$

En utilisant ces deux propriétés, la relation 11.56 peut également s'écrire :

$$dX^{[r]} = D_r X^{[r]} dt + E_r \left(X^{[r-1]} \otimes f \right) dt \quad (11.60)$$

Cette relation est tout à fait générale et ne fait intervenir comme hypothèse que la linéarité du comportement structurel. Elle est l'équivalent à l'ordre r quelconque, et pour des structures présentant un nombre quelconque de degrés de liberté, de la relation 11.20 que nous avons écrite dans ce cadre particulier d'une structure à deux degrés de liberté.

Une expression générale de l'espérance mathématique de la réponse structurelle peut dès lors être obtenue assez facilement :

$$\dot{E} \left[X^{[r]} \right] = D_r E \left[X^{[r]} \right] + E_r E \left[X^{[r-1]} \otimes f \right] \quad (11.61)$$

Cette relation nous montre, comme nous avons pu le constater dans notre exemple, que les moments statistiques de la réponse dépendent des moments croisés entre les efforts appliqués et la réponse de la structure.

Nous avons annoncé que nous limitons notre étude à des forces extérieures qui peuvent s'exprimer par une forme polynômiale de p processus aléatoires gaussiens markoviens :

$$f = \sum_{l=0}^L A_l U^{[l]} \quad (11.62)$$

Le vecteur U , de dimension p , regroupe tous les processus aléatoires u_i éventuellement corrélés. $U^{[l]}$ est donc de dimensions p^l et regroupe tous les termes croisés de puissance l entre les composantes de la turbulence aux différents noeuds de la structure. Chacune des matrices A_l est de dimension $n \times p^l$ et permet de représenter l'effet de chacune des composantes de la turbulence (et des termes croisés, éventuellement) sur les efforts appliqués aux n noeuds de la structure. De manière générale, les processus aléatoires u_i sont définis par la relation suivante :

$$dU = \Gamma U dt + \Lambda dL \quad (11.63)$$

où dL représente un processus aléatoire vectoriel de Lévy (de dimension q a priori différente de p). Pour simplifier l'exposé, nous supposons que les processus u_i sont des processus gaussiens et nous pouvons donc remplacer dL par le processus dB de Wiener qui en est un cas particulier. Pour des processus gaussiens, ces processus aléatoires sont entièrement caractérisés par le vecteur q_2 :

$$q_2(t) dt = E \left[dL^{[2]}(t) \right]$$

Les moments croisés entre la sollicitation et les différentes puissances de la réponse de la structure s'expriment par :

$$E \left[X^{[r-1]} \otimes f \right] = E \left[X^{[r-1]} \otimes \sum_{l=0}^L A_l U^{[l]} \right] = \sum_{l=0}^L \left(I_N^{[r-1]} \otimes A_l \right) E \left[X^{[r-1]} \otimes U^{[l]} \right] \quad (11.64)$$

Il reste maintenant à estimer les moments croisés entre les différentes puissances de la réponse et des processus aléatoires simples $U^{[l]}$. Remarquons que la démarche que nous présentons maintenant est strictement la même que celle qui a été introduite lors de l'exemple précédent. Ces moments croisés peuvent être estimés à partir de la forme différentielle du produit :

$$d \left(X^{[r-1]} \otimes U^{[l]} \right) = d \left(X^{[r-1]} \right) \otimes U^{[l]} + X^{[r-1]} \otimes \Delta \left(U^{[l]} \right) \quad (11.65)$$

Ci-dessus (Eq. 11.60), nous avons vu que $dX^{[r-1]} = D_{r-1} X^{[r-1]} dt + E_{r-1} \left(X^{[r-2]} \otimes f \right) dt$. Il reste donc à évaluer $\Delta \left(U^{[l]} \right)$ qui prend une forme assez particulière car le processus

aléatoire vectoriel U est obtenu par le filtrage d'un bruit blanc :

$$\Delta(U^{[l]}) = d(U^{[l]}) + \sum_{k=2}^l \frac{1}{k!} d^k(U^{[l]}) \quad (11.66)$$

où

$$\begin{aligned} d(U^{[l]}) &= Q_l^p(U^{[l-1]} \otimes I_p) dU = Q_l^p(U^{[l-1]} \otimes I_p) (\Gamma U dt + \Lambda dL) \\ d^k(U^{[l]}) &= Q_l^p(Q_{l-1}^p \otimes I_p) \cdots (Q_{l-k+1}^p \otimes I_p^{[k-1]}) (U^{[l-k]} \otimes I_p^{[k]}) \Lambda^{[k]}(dL)^{[k]} \end{aligned} \quad (11.67)$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \Delta(U^{[l]}) &= Q_l^p(U^{[l-1]} \otimes I_p) (\Gamma U dt + \Lambda dL) \\ &\quad + \sum_{k=2}^l \frac{1}{k!} \underbrace{Q_l^p(Q_{l-1}^p \otimes I_p) \cdots (Q_{l-k+1}^p \otimes I_p^{[k-1]})}_{\Lambda_{lk}} (U^{[l-k]} \otimes I_p^{[k]}) \Lambda^{[k]}(dL)^{[k]} \\ &= Q_l^p(U^{[l-1]} \otimes I_p) \Gamma U dt + Q_l^p(U^{[l-1]} \otimes I_p) \Lambda dL \\ &\quad + \sum_{k=2}^l \Lambda_{lk} (U^{[l-k]} \otimes I_p^{[k]}) \Lambda^{[k]}(dL)^{[k]} \end{aligned} \quad (11.69)$$

Tout comme nous avons pu écrire 11.57 et 11.58, on peut écrire ici :

$$Q_l^p(U^{[l-1]} \otimes I_p) \Gamma U = \underbrace{(\Gamma \otimes I_p^{[l-1]} + I_p \otimes \Gamma_{l-1})}_{\Gamma_l} U^{[l]} \quad (11.70)$$

$$Q_l^p(U^{[l-1]} \otimes I_p) \Lambda dL = \underbrace{Q_l^p(I_p^{[l-1]} \otimes \Lambda)}_{\Lambda_l^{(0)}} (U^{[l-1]} \otimes dL) \quad (11.71)$$

où Γ_l (avec $\Gamma_1 = \Gamma$) est défini de la même façon que D_r et $\Lambda_l^{(0)}$ (avec $\Lambda_1^{(0)} = \Lambda$) est défini de la même façon que E_r . Ces deux relations permettent de simplifier 11.69 en :

$$\Delta(U^{[l]}) = \Gamma_l U^{[l]} dt + \Lambda_l^{(0)} (U^{[l-1]} \otimes dL) + \sum_{k=2}^l \Lambda_{lk} (U^{[l-k]} \otimes I_p^{[k]}) \Lambda^{[k]}(dL)^{[k]} \quad (11.72)$$

Si l'on suppose que l'on travaille avec des bruits blancs gaussiens, ce qui est généralement le cas pour nous, $(dL)^{[k]}$ est non nul pour $k = 2$ uniquement. Il ne reste donc qu'un seul terme de la sommation et cette relation peut encore être simplifiée en :

$$\Delta(U^{[l]}) = \Gamma_l U^{[l]} dt + \Lambda_l^{(0)} (U^{[l-1]} \otimes dL) + \Lambda_l (U^{[l-2]} \otimes I_p^{[2]}) \Lambda^{[2]}(dL)^{[2]} \quad (11.73)$$

où

$$\Gamma_l = \Gamma \otimes I_p^{[l-1]} + I_p \otimes \Gamma_{l-1} \quad (11.74)$$

$$\Lambda_l = \Lambda_{l2} = \frac{1}{2} Q_l^p (Q_{l-1}^p \otimes I_p) \quad (11.75)$$

Nous pouvons donc maintenant revenir à l'expression de la différentielle des moments croisés entre les déplacements structuraux et les composantes de la turbulence (Eq. 11.65) :

$$\begin{aligned} d \left(X^{[r-1]} \otimes U^{[l]} \right) &= \left[\left(D_{r-1} X^{[r-1]} \right) dt + E_{r-1} \left(X^{[r-2]} \otimes f \right) dt \right] \otimes U^{[l]} \\ &\quad + X^{[r-1]} \otimes \left[\Gamma_l U^{[l]} dt + \Lambda_l^{(0)} \left(U^{[l-1]} \otimes dL \right) + \Lambda_l \left(U^{[l-2]} \otimes I_p^{[2]} \right) \Lambda^{[2]} (dL)^{[2]} \right] \\ &= D_{r-1} X^{[r-1]} \otimes U^{[l]} dt + \left(E_{r-1} \left(X^{[r-2]} \otimes f \right) \right) \otimes U^{[l]} dt \\ &\quad + X^{[r-1]} \otimes \left(\Gamma_l U^{[l]} \right) dt + X^{[r-1]} \otimes \left(\Lambda_l^{(0)} \left(U^{[l-1]} \otimes dL \right) \right) \\ &\quad + X^{[r-1]} \otimes \left(\Lambda_l \left(U^{[l-2]} \otimes I_p^{[2]} \right) \Lambda^{[2]} (dL)^{[2]} \right) \end{aligned} \quad (11.76)$$

En prenant l'espérance mathématique de cette expression membre à membre puis en divisant par dt , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E \left[X^{[r-1]} \otimes U^{[l]} \right] &= E \left[\left(D_{r-1} X^{[r-1]} \right) \otimes U^{[l]} \right] + E \left[E_{r-1} \left(X^{[r-2]} \otimes f \right) \otimes U^{[l]} \right] \\ &\quad + E \left[X^{[r-1]} \otimes \left(\Gamma_l U^{[l]} \right) \right] + E \left[X^{[r-1]} \otimes \left(\Lambda_l \left(U^{[l-2]} \otimes I_p^{[2]} \right) \Lambda^{[2]} (dL)^{[2]} \right) / dt \right] \end{aligned} \quad (11.77)$$

Grâce à la règle des produits (11.44), on peut écrire

$$\begin{aligned} E \left[\left(D_{r-1} X^{[r-1]} \right) \otimes U^{[l]} \right] &= E \left[D_{r-1} X^{[r-1]} \otimes I_p^{[l]} U^{[l]} \right] \\ &= E \left[\left(D_r \otimes I_p^{[l]} \right) \left(X^{[r-1]} \otimes U^{[l]} \right) \right] \\ &= \left(D_r \otimes I_p^{[l]} \right) E \left[X^{[r-1]} \otimes U^{[l]} \right] \end{aligned} \quad (11.78)$$

$$\begin{aligned} E \left[X^{[r-1]} \otimes \left(\Gamma_l U^{[l]} dt \right) \right] &= E \left[I_N^{[r-1]} X^{[r-1]} \otimes \Gamma_l U^{[l]} dt \right] \\ &= E \left[\left(I_N^{[r-1]} \otimes \Gamma_l \right) \left(X^{[r-1]} \otimes U^{[l]} \right) \right] \\ &= \left(I_N^{[r-1]} \otimes \Gamma_l \right) E \left[X^{[r-1]} \otimes U^{[l]} \right] \end{aligned} \quad (11.79)$$

$$\begin{aligned}
& E \left[E_{r-1} \left(X^{[r-2]} \otimes f \right) \otimes U^{[l]} \right] \\
&= \left(E_{r-1} \otimes I_p^{[l]} \right) E \left[\left(X^{[r-2]} \otimes f \right) \otimes U^{[l]} \right] \\
&= \left(E_{r-1} \otimes I_p^{[l]} \right) \sum_{h=0}^L E \left[\left(X^{[r-2]} \otimes A_h U^{[h]} \right) \otimes U^{[l]} \right] \\
&= \left(E_{r-1} \otimes I_p^{[l]} \right) \sum_{h=0}^L \left\{ \left(I_N^{[r-2]} \otimes A_h \right) \otimes I_p^{[l]} \right\} E \left[X^{[r-2]} \otimes U^{[h]} \otimes U^{[l]} \right] \\
&= \left(E_{r-1} \otimes I_p^{[l]} \right) \sum_{h=0}^L \left\{ \left(I_N^{[r-2]} \otimes A_h \right) \otimes I_p^{[l]} \right\} E \left[X^{[r-2]} \otimes U^{[l+h]} \right] \quad (11.80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E \left[X^{[r-1]} \otimes \left(\Lambda_l \left(U^{[l-2]} \otimes I_p^{[2]} \right) \Lambda^{[2]}(dL)^{[2]} \right) / dt \right] \\
&= E \left[I_N^{[r-1]} X^{[r-1]} \otimes \Lambda_l \left(U^{[l-2]} \otimes I_p^{[2]} \right) \Lambda^{[2]}(dL)^{[2]} / dt \right] \\
&= E \left[\left(I_N^{[r-1]} \otimes \Lambda_l \right) \left(X^{[r-1]} \otimes \left(\left(U^{[l-2]} \otimes I_p^{[2]} \right) \Lambda^{[2]}(dL)^{[2]} \right) \right) / dt \right] \\
&= \left(I_N^{[r-1]} \otimes \Lambda_l \right) E \left[X^{[r-1]} \otimes \left(\left(U^{[l-2]} \otimes I_p^{[2]} \right) \Lambda^{[2]} q_2 \right) \right] \\
&= \left(I_N^{[r-1]} \otimes \Lambda_l \right) E \left[X^{[r-1]} . 1 \otimes \left(\left(U^{[l-2]} \otimes I_p^{[2]} \right) \Lambda^{[2]} q_2 \right) \right] \\
&= \left(I_N^{[r-1]} \otimes \Lambda_l \right) E \left[X^{[r-1]} \otimes \left(U^{[l-2]} \otimes I_p^{[2]} \right) \right] \Lambda^{[2]} q_2 \\
&= \left(I_N^{[r-1]} \otimes \Lambda_l \right) \left(E \left[X^{[r-1]} \otimes U^{[l-2]} \right] \otimes I_p^{[2]} \right) \Lambda^{[2]} q_2 \quad (11.81)
\end{aligned}$$

En introduisant dans l'expression 11.77 (de l'évolution du moment croisé entre les déplacements structurels et les composantes de la turbulence) les quatre relations que nous venons d'obtenir, on arrive à une formulation assez simple pour l'expression des moments croisés recherchés :

$$\begin{aligned}
& \dot{E} \left[X^{[r-1]} \otimes U^{[l]} \right] \\
&= M_{r-1,l} E \left[X^{[r-1]} \otimes U^{[l]} \right] + \left(I_N^{[r-1]} \otimes \Lambda_l \right) \left(E \left[X^{[r-1]} \otimes U^{[l-2]} \right] \otimes I_p^{[2]} \right) \Lambda^{[2]} q_2(t) \\
&+ \left(E_{r-1} \otimes I_p^{[l]} \right) \left\{ \sum_{h=0}^L \left\{ \left(I_N^{[r-2]} \otimes A_h \right) \otimes I_p^{[l]} \right\} E \left[X^{[r-2]} \otimes U^{[h+l]} \right] \right\} \quad (11.82)
\end{aligned}$$

où $M_{r,l} = D_r \otimes I_p^{[l]} + I_N^{[r]} \otimes \Gamma_l$.

L'introduction de cette relation dans l'expression 11.64 permet d'obtenir les expressions des moments croisés entre les déplacements des noeuds de la structure et les efforts appliqués. Finalement, ces grandeurs peuvent être utilisées dans la relation 11.61 pour obtenir les expressions des moments des déplacements des noeuds de la structure.

11.3.4 Explication de la programmation de la méthode

Limitations

La méthode d'analyse qui vient d'être présentée a été programmée dans un code de calcul indépendant. Les limitations du code sont celles qui ont été présentées ci-avant. Nous sommes donc en mesure de déterminer les moments statistiques jusqu'à l'ordre $r_{\max}$ (paramétré) d'une structure définie par ses matrices de masse, amortissement et raideur et sollicitée par des formes polynômiales (d'ordre maximal quelconque L paramétrable) de processus aléatoires gaussiens markoviens. Ces processus, les vitesses de vent, sont donc définis à partir du filtrage d'un bruit blanc vectoriel par la relation 11.38. Les dernières données nécessaires pour réaliser l'analyse sont donc les matrices de transition Γ et Λ .

Les principales limitations pratiques du code qui a été écrit sont donc :

- la taille du problème étudié ; nous avons déjà expliqué que la taille du système à résoudre pour l'étude jusqu'à l'ordre $r_{\max}$ est $n^{r_{\max}}$. La taille maximale de la matrice $M_{r,l}$ intervenant dans la relation 11.82 est donc $n^{r_{\max}} \times n^{r_{\max}}$. Pour $r_{\max} = 4$, elle comporte donc un nombre maximum de n^8 éléments⁷, ce qui limite l'étude au quatrième ordre à $n = 6$ voire $n = 7$. C'est pour cette raison qu'à l'introduction de cette méthode, nous la présentons comme une méthode d'analyse en base modale⁸.
- la forme des densités spectrales des vitesses de vent qui doivent être des processus aléatoires markoviens, et donc de ce fait doivent pouvoir s'exprimer sous la forme d'une fraction rationnelle de la pulsation ω ;

Programmation

Pratiquement, l'analyse stochastique de la structure à plusieurs degrés de liberté est réalisée en deux étapes successives.

La première étape consiste en l'établissement de la stratégie de calcul. Cette première phase est une extension de ce qui a été présenté lors de l'étude de l'oscillateur à un degré de liberté. L'objectif est d'établir la liste des moments éventuellement croisés à calculer (et dans quel ordre) pour parvenir à l'objectif fixé. La stratégie de calcul dépend de l'ordre maximal $r_{\max}$ des moments statistiques des déplacements des noeuds de la structure ainsi que du degré maximal L du polynôme permettant d'exprimer les efforts à partir des vitesses de vent.

L'établissement de la stratégie de calcul aurait pu être réalisé de façon générale, comme cela a été présenté au paragraphe 5.3.3 (p.264) pour l'oscillateur à un degré de liberté. Nous avons cependant choisi de rétablir la stratégie de calcul de façon itérative au début de chaque analyse. L'établissement des étapes successives consiste, à partir de l'objectif fixé, à établir la liste des moments (éventuellement croisés) qui sont nécessaires à l'établissement de cet objectif. Ensuite, la liste des moments nécessaires à l'établissement de ces moments sont ajoutés, et cette opération se répète jusqu'à ce que l'on n'ajoute que les moments statistiques des composantes de la turbulence. La liste ainsi établie constitue

⁷Cette matrice ne possède pas vraiment de forme particulière (tridiagonale, bande ...) mais on peut affirmer que le nombre d'éléments non nuls dans cette matrice est assez restreint. Nous avons débuté une étude de stockage de cette matrice au format "éparpillé". Ces développements ne sont pas encore aboutis et nécessiteraient d'être continués pour pouvoir réaliser l'étude de structures plus importantes.

⁸Dans ce cas, le recours au stockage au format "éparpillé" est d'autant plus intéressant !

STEP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Type</i>	2	2	2	3	1	2	4	2	4	3
<i>Param1</i>	1	0	2	0	1	3	1	4	1	1
<i>Param2</i>							1		2	
STEP	...	...	...	...	...	25	26	27	28	29
<i>Type</i>	...	...	...	...	...	1	4	4	3	1
<i>Param1</i>	...	...	...	...	...	3	3	3	3	4
<i>Param2</i>	...	...	...	...	...		1	2		

TAB. 11.1 – Extrait d’une stratégie de calcul (L=2)

la stratégie de calcul lorsqu’elle est relue depuis la fin. Le tableau 11.1 donne un exemple de résultat obtenu.

Pratiquement, nous distinguons quatre types de moments à calculer :

- $Type = 1$: calcul des moments de la $r^{ième}$ puissance de Kronecker des déplacements structurels. Au tableau 11.1, r est repris dans la ligne *Param1*. Par exemple, on peut constater que la cinquième étape du calcul consiste à déterminer les moments $E[X]$, ou que la dernière étape du calcul consiste à calculer les moments $E[X^{[4]}]$.
- $Type = 2$: calcul des moments de la $l^{ième}$ puissance de Kronecker des composantes de la turbulence. Au tableau 11.1, l est repris dans la ligne *Param1*. Assez logiquement, le calcul doit commencer par l’estimation de ces moments. On peut constater que les trois premières étapes consistent à estimer les moments $E[U^{[1]}]$, $E[U^{[0]}]$ et $E[U^{[2]}]$;
- $Type = 3$: calcul des moments croisés du produit de Kronecker de la $r^{ième}$ puissance (de Kronecker) des déplacements structurels et des forces nodales. Au tableau 11.1, r est repris dans la ligne *Param1*. On peut, par exemple, constater qu’au terme des trois premières étapes du calcul, les moments croisés $E[X^{[0]}f]$ peuvent être calculés (Step 4).
- $Type = 4$: calcul des moments croisés du produit de Kronecker de la $r^{ième}$ puissance (de Kronecker) des déplacements structurels et de la $l^{ième}$ puissance (de Kronecker) des composantes du vent. Au tableau 11.1, r est repris dans la ligne *Param1* et l est repris dans la ligne *Param2*. La neuvième étape du calcul consistera par exemple en l’établissement des moments $E[X^{[1]}U^{[2]}]$.

Lorsque la stratégie de calcul est établie, la seconde étape peut alors démarrer. Elle consiste à parcourir la liste des étapes établies et à appliquer les relations 11.61, 11.82 ou 11.64 selon le type de moment à calculer.

Contrairement à ce que l’on pourrait penser, la programmation relative à cette partie est loin d’être évidente si l’on désire conserver les grandeurs $r_{\max}$ et L comme paramètres. Le principal problème réside dans le stockage des moments calculés lors des étapes précédentes. Nous ne rentrons pas ici dans les subtilités nécessaires à la gestion de ce stockage et à la récupération des données pour les calculs des moments suivants.

Exemple d’application

Nous allons présenter brièvement un exemple d’application de la méthode d’analyse. La structure étudiée est identique à celle qui a été étudiée au chapitre précédent (§

		γ_3	γ_e
DDL 1	Analytique	0.0624	$\times$
	Monte Carlo	0.0553	0.256
	Fréquentiel	0.0641	$\times$
	Ito	0.0631	0.128
DDL 2	Analytique	0.271	$\times$
	Monte Carlo	0.2217	0.118
	Fréquentiel	0.2893	$\times$
	Ito	0.275	0.200

TAB. 11.2 – Résumé des cumulants adimensionnels d'ordres 3 et 4 obtenus selon différentes méthodes

10.6.3, p.414). Les sollicitations qui s'appliquent sur cette structure simple s'expriment en fonction d'une seule composante de vitesse. Pour rappel, cette composante est modélisée à l'aide d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour lequel :

$$p = 1 ; \quad \Gamma = -\alpha = -0.2rad/s ; \quad \Lambda = \sigma_u \sqrt{\alpha} = 1.265 \quad (11.83)$$

Les forces appliquées s'expriment par :

$$f = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} u + \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} u^2 \quad (11.84)$$

Avec les notations de ce chapitre, nous pouvons donc écrire :

$$A_0 = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma \bar{U}^2 \\ 2\gamma \bar{U}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{Bmatrix} \quad (11.85)$$

$$A_1 = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\gamma \bar{U} \\ 4\gamma \bar{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{Bmatrix} \quad (11.86)$$

$$A_2 = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma \\ 2\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.001 \\ 0.002 \end{Bmatrix} \quad (11.87)$$

Finalement, les matrices structurelles sont identiques aux matrices qui ont été utilisées au chapitre précédent (notre exemple générique à 2 DDL où $M = 1$, $\delta = 1$, $\mu = 1$ et $K = 16$). Nous avons déjà présenté quelques caractéristiques statistiques de la réponse lorsque les deux modes propres sont de pulsations $\varpi_1 = 4rad/s$ et $\varpi_2 = 4rad/s$. Le tableau 11.2 résume les résultats obtenus en appliquant les différentes méthodes présentées jusqu'ici.

Les résultats des approches analytiques, par Monte Carlo et dans le domaine fréquentiel ont déjà été présentés. Nous ajoutons cette fois le résultat de l'approche stochastique dans le domaine temporel. Les résultats que nous obtenons sont très proches des résultats analytiques. La petite différence provient du fait que nous avons négligé les termes de chargement (au second ordre comme au troisième) en I_u^2 . Si ces termes avaient été conservés, nous aurions obtenu exactement le même résultat à l'aide de l'approche analytique. Aussi, nous pouvons maintenant affirmer avec certitude que les moments d'ordre 4 n'ont pas été bien estimés lors de l'étude par simulations de Monte Carlo, ce que nous avons déjà introduit lors des commentaires de ces résultats.

Il convient de remarquer que l'application de la méthode d'analyse dans le domaine temporel est très rapide (moins d'une demi seconde sur un processeur Pentium 4[®], 2GHz, 256 RAM). L'extrême rapidité de ce genre de calcul permet de reproduire facilement l'étude paramétrique que nous avons menée au chapitre précédent. Pour rappel, nous avons décidé de faire varier l'espacement entre les fréquences propres du système étudié ($n = \frac{\omega_2}{\omega_1}$).

La figure 11.1 est identique à la figure 10.17. Nous y avons simplement ajouté des ronds pour représenter le résultat de l'étude stochastique dans le domaine temporel (approche Ito et résolution des équations aux moments). Les points obtenus doivent être considérés comme la solution exacte ; la faible différence par rapport à l'approche analytique provient des termes de chargement qui n'ont pas été pris en compte lors de cette étude préalable.

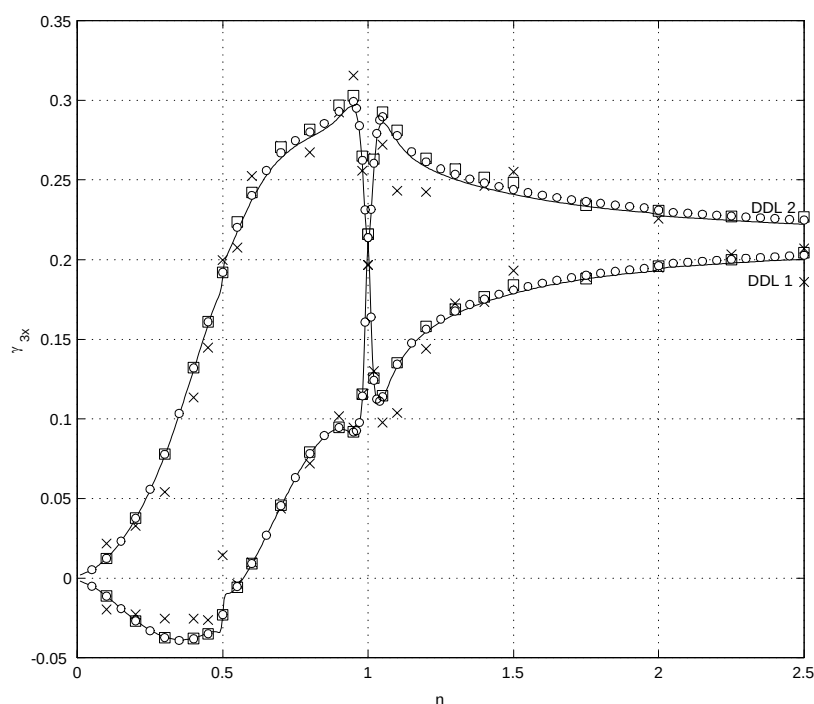


FIG. 11.1 – Comparaison des coefficients de dissymétrie obtenus à l'aide de trois méthodes d'analyse différentes : analytique (traits continus), numérique dans le domaine fréquentiel (croix), dans le domaine temporel (ronds)

Etant donné que l'analyse dans le domaine temporel est très rapide à appliquer, elle est particulièrement bien adaptée aux études paramétriques. Nous avons donc décidé de comparer les résultats d'une analyse exacte et d'une analyse qui serait menée en négligeant les termes de chargement non linéaires. La structure étudiée est identique ; la seule différence concerne la matrice A_2 (Eq. 11.87) qui est choisie égale à zéro dans la seconde analyse.

La figure 11.2 résume les caractéristiques des déplacements aux deux degrés de liberté pour les quatre premiers ordres. Comme annoncé lors de l'étude de l'oscillateur simple, négliger les termes de chargement quadratique revient à sous-estimer les déplacements moyens ainsi que leurs écarts-types. Aussi, lorsque les termes de chargement sont négli-

gés, nous savons que les réponses de la structure étudiée sont gaussiennes. Le code de calcul rédigé fournit donc assez logiquement des moments statistiques nuls (à la précision machine) pour les cumulants d'ordres 3 et 4.

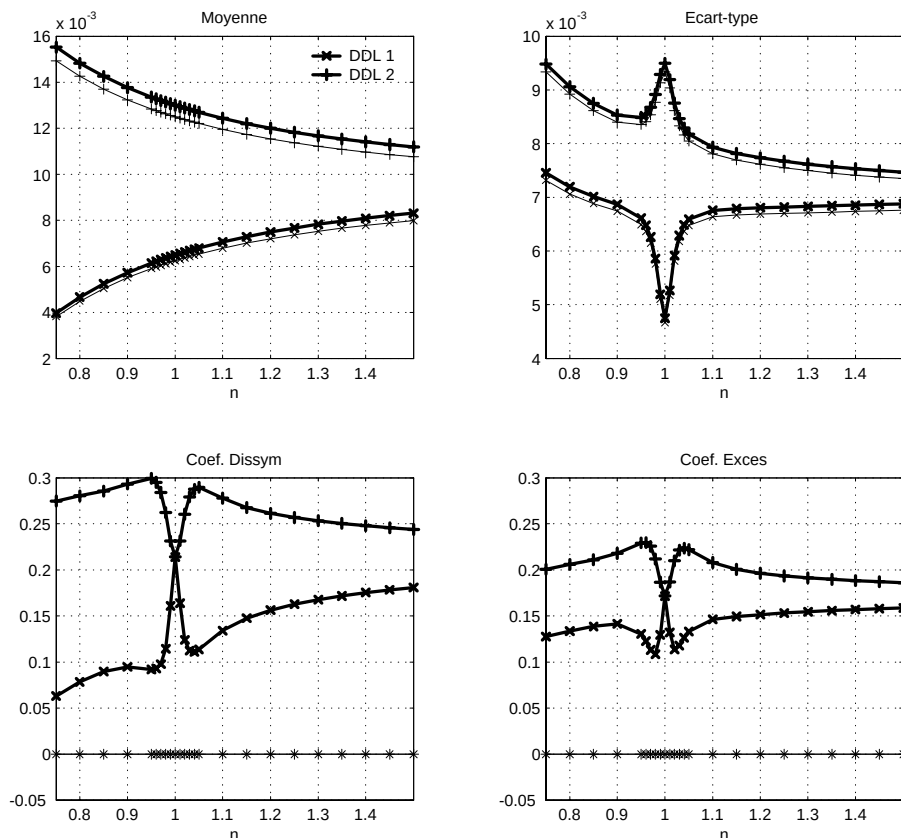


FIG. 11.2 – Caractéristiques statistiques au quatre premiers ordres pour les déplacements aux deux noeuds de la structure, avec ou sans les termes de chargement quadratique

L'examen de cette figure permet également d'avoir une idée des coefficients d'excès des déplacements de la structure. Nous pouvons nous attendre à des valeurs légèrement plus faibles étant donné que la sollicitation elle-même présente un coefficient d'excès ($12I_u^2 = 0.48$) plus faible que le coefficient de dissymétrie ($3I_u = 0.6$) et que les coefficients d'amplification dynamique aux troisième et quatrième ordres présentent la même allure⁹.

Afin de compléter notre étude, il serait intéressant de comparer les grandeurs extrêmes. Pour chaque simulation, les écarts-types de la vitesse et du déplacement (en un noeud) permettent d'obtenir une fréquence de passage par zéro du processus aléatoire non gaussien étudié. Les relations développées à l'occasion de la présentation des valeurs extrêmes permettent alors d'estimer une valeur du facteur de pointe du déplacement étudié. La figure 11.3 représente les facteurs de pointe obtenus lorsque les termes quadratiques de chargement sont pris en compte ou non.

Bien que nous ayons déjà annoncé que la précision des résultats de l'étude par si-

⁹fonctions dérivées de M_1 , M_2 , N_1 , N_2 introduites lors de l'étude de l'oscillateur simple

mulation de Monte Carlo ne soit pas suffisante, notons tout de même que l'ordre de grandeur des facteurs de pointe qui y ont été observés $g_1 = 4.23 (\pm 11.1\%)$ et $g_2 = 4.11 (\pm \delta = 10.9\%)$ pour $n = 0.75$ sont d'un ordre de grandeur comparable à ceux qui sont obtenus par le modèle de facteur de pointe d'un processus non gaussien.

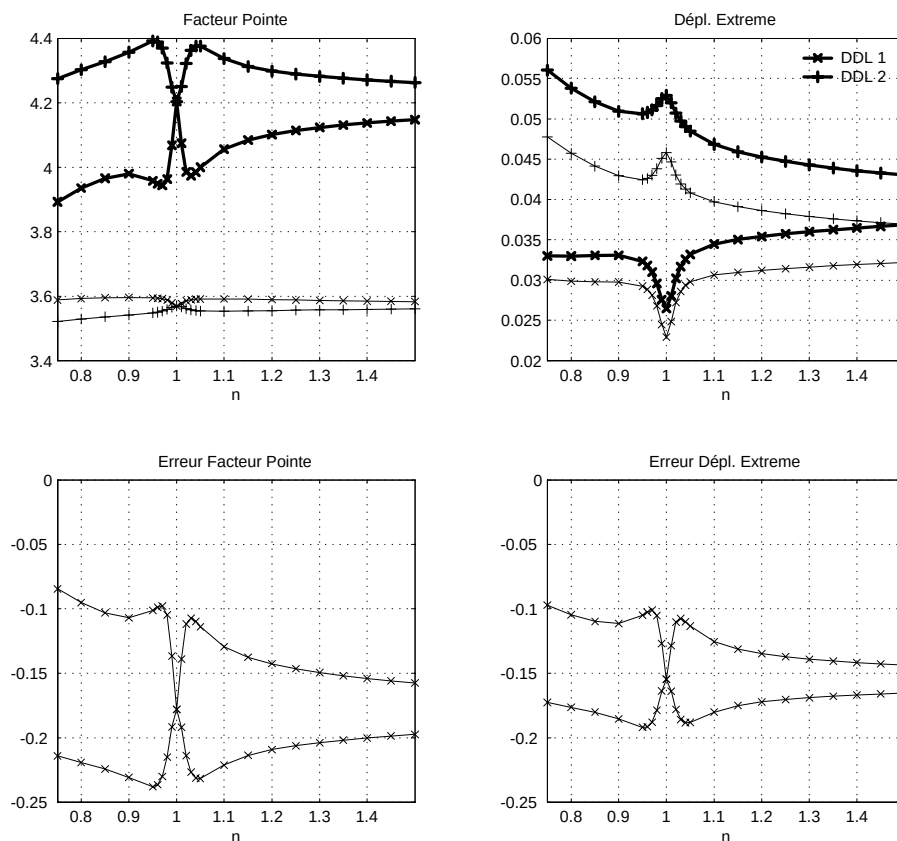


FIG. 11.3 – Comparaison des grandeurs extrêmes obtenues en conservant ou en négligeant les termes de chargement aérodynamique

Connaissant les expressions des facteurs de pointe, les déplacements extrêmes de la structure peuvent être déterminés, de nouveau, en conservant ou non les termes de chargement quadratique. Etant donné que le déplacement extrême s'exprime par :

$$x_{ext} = \bar{x} + g\sigma_x \quad (11.88)$$

l'erreur commise sur le déplacement extrême est plus petite que l'erreur commise sur le facteur de pointe (puisque le déplacement moyen $\bar{x}$ est relativement bien estimé). L'exemple que nous venons d'étudier montre que l'erreur qui peut être commise en négligeant les termes de chargement quadratique peut être de l'ordre de 15% à 20% sur cet exemple simple. Il convient de remarquer que cette différence provient essentiellement de l'erreur commise sur le facteur de pointe. Notons également que l'intensité de turbulence choisie pour cet exemple est légèrement plus grande que ce que l'on rencontre en moyenne ($I_u \in [10\%, 20\%]$).

On ne peut donc en aucune manière affirmer que les termes de chargement non linéaire n'ont pas d'impact lorsqu'ils modifient peu la moyenne et l'écart type d'un déplacement. Des coefficients de dissymétrie et d'excès, même faibles, peuvent modifier de façon assez remarquable les résultats obtenus en termes de grandeurs extrêmes.

11.4 Conclusions

Nous venons de présenter l'application, dans le cadre de l'étude des effets du vent turbulent sur les structures du génie civil, d'une méthode d'analyse stochastique dans le domaine temporel. La méthode présentée se base sur l'application de la règle de différentiation d'Ito qui permet d'écrire les équations aux moments. L'écriture systématique de ces équations aux moments est assez compliquée et nécessite l'utilisation d'une algèbre assez peu usuelle, l'algèbre de Kronecker. Les applications que nous avons présentées se basent sur les récents développements théoriques de Muscolino et Di Paola.

Il convient de préciser que cette méthode d'analyse dans le domaine temporel est, une fois programmée, très rapide d'application mais se limite pour l'instant à l'étude de structures qui sont chargées par des formes polynômiales de processus aléatoires markoviens uniquement et dont le nombre de degrés de liberté est faible (au maximum une dizaine). Quelques développements supplémentaires (comme la représentation des densités spectrales de vent par des processus markoviens) devraient cependant permettre d'appliquer cette méthode de façon assez commode aux problèmes plus réalistes rencontrés dans le domaine du génie civil.

L'application de cette méthode d'analyse dans le domaine temporel nous a permis de valider de nouveau l'approche dans le domaine fréquentiel que nous avons présenté au chapitre précédent. Aussi, nous avons poussé l'analyse d'une structure à plusieurs degrés de liberté jusqu'au calcul des grandeurs extrêmes. Les écarts qui peuvent être obtenus vis-à-vis d'une analyse qui négligerait les termes de chargement non linéaires sont assez significatifs (de l'ordre de 15% à 20% et insécuritaire lorsque les termes de chargement non linéaire sont négligés). Ils sont d'autant plus inquiétants que la simple observation des erreurs commises sur la moyenne et l'écart type ne permettent pas, pour une personne inhabituée à l'étude de processus non gaussiens, de suspecter un tel écart sur les grandeurs extrêmes !

Troisième partie

Applications propres au domaine du vent

Chapitre 12

Introduction

Au terme de ces deux premières parties, nous ne pouvons pas réellement affirmer avoir travaillé sur l'étude approfondie d'une structure soumise au vent turbulent, ou du moins que nous avons rencontré tous les détails pratiques qui peuvent se présenter lors du dimensionnement plus réaliste d'une structure. Pour cause, le chargement aérodynamique choisi (Equ 2.1) présente une forme bien plus simple que les chargements qui sont considérés en pratique.

D'un autre côté, il était nécessaire de travailler sur des systèmes simples dans la première partie du document de façon à pouvoir comprendre comment fonctionnent les différentes méthodes d'analyse. Finalement, l'oscillateur simple et le type de chargement très simple que nous avons étudiés n'étaient rien d'autre qu'un prétexte pour réaliser l'apprentissage de la prise en compte des phénomènes dynamiques non gaussiens. Jusqu'à ce stade, la seule origine de non gaussianité considérée concerne le terme de chargement turbulent quadratique. Dans cette partie, nous allons montrer que l'étude plus réaliste d'une structure soumise au vent turbulent peut présenter, pour d'autres raisons, des termes de chargement non linéaires.

Au chapitre 13, nous donnons quelques informations générales se trouvant dans les ouvrages spécialisés ([17], [18], [35], [56], [67], [85]) concernant l'expression plus réaliste du chargement aérodynamique. Etant essentiellement une collection d'éléments de références bibliographiques, ce chapitre peut être considéré comme un chapitre de rappels théoriques.

Après ces quelques rappels et définitions, nous affinerons la forme du chargement aérodynamique considéré. Au chapitre 14, nous donnerons un modèle de chargement relativement complet permettant de représenter le chargement tridimensionnel qui pourrait se présenter lors de l'étude d'une structure complète. Ce modèle de chargement permet de prendre en compte les deux composantes de la turbulence perpendiculaires à la section étudiée. Nous utiliserons donc ce modèle pour réaliser l'étude de structures planes plongées dans un écoulement turbulent bidimensionnel (chapitre 15). Nous aurons l'occasion de constater que la prise en compte de la composante transversale introduit une non linéarité de chargement provenant de la non linéarité des coefficients aérodynamiques.

Lorsque la structure étudiée n'est pas plane, une approche rigoureuse de l'analyse doit nécessairement prendre en compte le caractère tridimensionnel de la turbulence. En suivant la logique de l'étude dans le domaine fréquentiel que nous suivons depuis le début de ce travail, nous avons écrit les expressions des sollicitations s'appliquant sur une

structure tridimensionnelle plongée dans un champ de turbulence tridimensionnel. Les développements que nous avons entrepris permettent la prise en compte des termes d'ordres supérieurs de la turbulence (un terme quadratique par composante de la turbulence plus les termes croisés) ainsi que les non linéarités des coefficients aérodynamiques vis-à-vis de l'incidence du vent. La présentation de ce travail se referme finalement sur les développements que nous avons introduits dans le code de calcul *FineLg* et qui permettent de réaliser ce type de calcul.

Chapitre 13

Météorologie - Aérodynamique

Il utilise les statistiques comme l'ivrogne les lampadaires : pour s'appuyer plutôt que pour s'éclairer

(Andrew Lang)

13.1 Introduction

L'aérodynamique et l'aéroélasticité sont deux théories assez vastes et complexes qui ne peuvent être évitées lorsque le dimensionnement d'un ouvrage d'art doit être entrepris. Une bonne compréhension du dimensionnement au vent d'un pont doit nécessairement passer par une bonne maîtrise de ces deux théories. Originellement établies dans le contexte de l'étude des ailes d'avions, elles permettent, par exemple, d'optimiser les sections de tablier des ponts souples à grandes portées, de déterminer pour une section choisie les zones de décollement, les fréquences des détachements tourbillonnaires, etc.

Dans le cadre de ce travail, l'utilisation que nous ferons de ces deux théories sera assez limitée. Nous nous contenterons de présenter les relations essentielles qui permettent d'estimer les efforts appliqués sur un obstacle situé dans un écoulement uniforme.

Afin de pouvoir appliquer ces relations à l'étude d'une structure, il est également nécessaire d'avoir les notions de climatologie relatives à l'estimation des caractéristiques du vent. Il s'agit à nouveau d'une théorie assez vaste et complexe dont quelques fondements seulement nous intéressent. D'ailleurs, du point de vue pratique de l'ingénieur, cette théorie se trouve cachée derrière des formules très simples reprises dans bon nombre de codes nationaux et internationaux. Nous ne commenterons brièvement que les grandeurs nécessaires à la caractérisation d'un vent.

13.2 L'écoulement des fluides autour des corps

La présence d'un corps dans un écoulement laminaire à vitesse uniforme modifie localement le comportement du fluide. Il en résulte des modifications locales de pressions dont les résultantes intéressent l'ingénieur. Ces efforts dépendent essentiellement de la forme de l'obstacle ainsi que d'un nombre adimensionnel, le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{UB}{\nu} \quad (13.1)$$

où U , B et ν représentent respectivement la vitesse du fluide à l'infini amont, une dimension caractéristique de l'objet étudié (dans le sens de l'écoulement) et la viscosité cinématique du fluide.

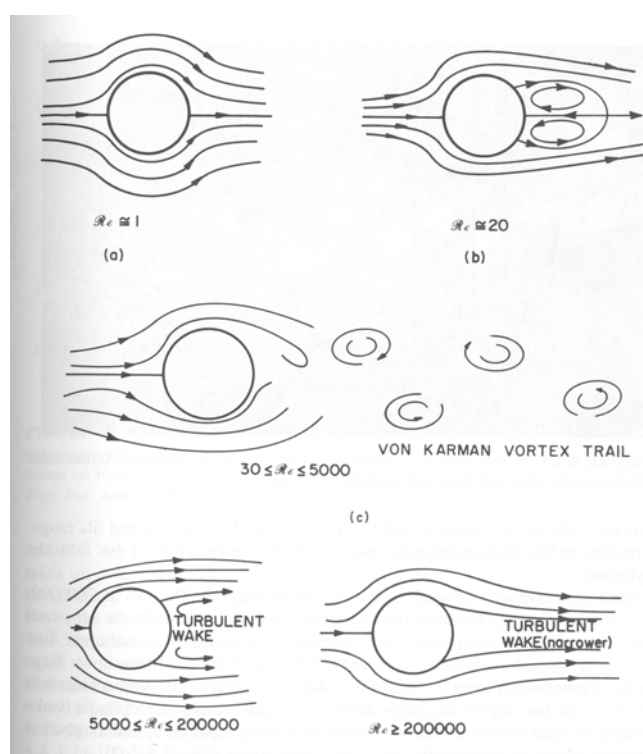


FIG. 13.1 – Écoulement autour d'un cylindre pour différents nombres de Reynolds (Wind effects on structures, Simiu, Scanlan)

Par exemple, lorsque l'obstacle étudié est un cylindre dont l'axe est perpendiculaire à la direction de l'écoulement, la figure 13.1 montre l'évolution des schémas d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds. A chacun de ces écoulements correspondent des répartitions de pressions différentes sur la paroi du cylindre. Ces pressions peuvent être exprimées à l'aide de coefficients de pression adimensionnels :

$$C_p = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (13.2)$$

Pour quelques nombres de Reynolds, la figure 13.2 indique l'évolution de ce coefficient de pression en fonction de l'écart angulaire par rapport au point de stagnation. Cette

dépendance des pressions par rapport au nombre de Reynolds se traduit également en terme de résultantes. Pour un écoulement plan, trois efforts sont généralement définis :

- l'effort de traînée F_D qui est la projection de la résultante des pressions dans le sens de l'écoulement du fluide non perturbé ;
- l'effort de portance F_L qui est la projection de la résultante dans le sens transversal à l'écoulement non perturbé ;
- le moment M qui est la résultante des couples élémentaires engendrés par les pressions sur l'obstacle.

Ces efforts sont également représentés à l'aide de coefficients adimensionnels : le coefficient de traînée C_D , le coefficient de portance C_L et le coefficient de moment C_M :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} \quad (13.3)$$

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} \quad (13.4)$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho U^2 B^2} \quad (13.5)$$

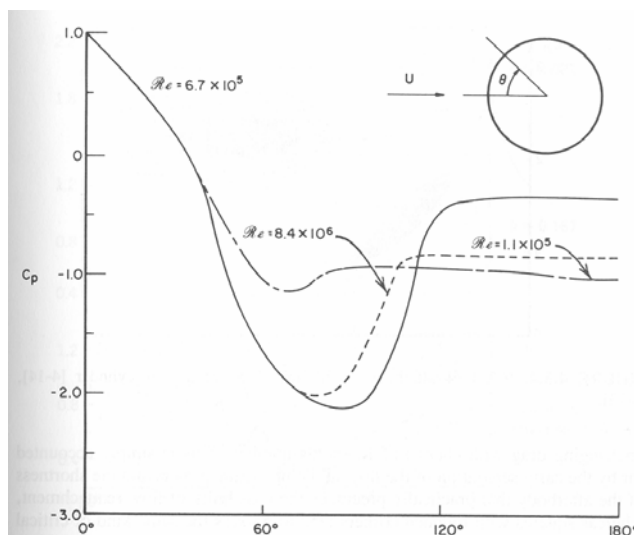


FIG. 13.2 – Evolution des pressions le long de la paroi du cylindre (Wind effects on structures, Simiu, Scanlan)

La figure 13.3 indique, en fonction du nombre de Reynolds, l'évolution du coefficient de traînée pour une section circulaire.

Les nombres de Reynolds qui caractérisent les écoulements lors d'études de structures souples sont assez élevés ($Re \sim 10^7$). Lorsque le nombre de Reynolds est si important, l'écoulement du fluide autour du corps est caractérisé par des effets non linéaires importants, favorisant l'apparition de la turbulence. Selon les conditions d'écoulement, on peut alors assister, dans des zones où la géométrie de l'obstacle est variable, à des décollements de couche limite. Lorsque l'obstacle étudié présente des arêtes vives, ces décollements se produisent préférentiellement en ces discontinuités. L'instabilité des nappes

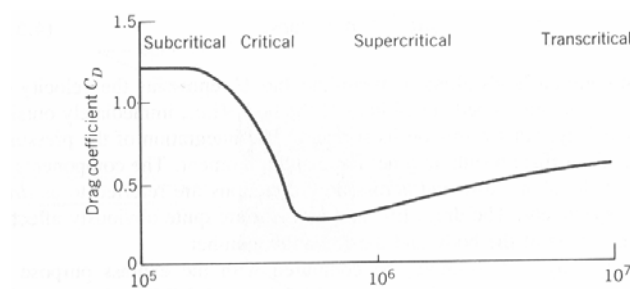


FIG. 13.3 – Coefficient de traînée d’une section circulaire en fonction du nombre de Reynolds (Wind effects on structures, Simiu, Scanlan)

décollées peut mener, sous l’effet de petites perturbations dans l’écoulement, à des détachements de tourbillons. Par exemple, pour une section cylindrique, ces détachements tourbillonnaires se produisent de manière alternée, ce qui conduit à la formation d’une allée tourbillonnaire, dite de Von Karman, dans le sillage de l’obstacle.

Ces détachements de tourbillons affectent donc un caractère oscillatoire aux coefficients aérodynamiques C_D , C_L et C_M , bien que l’écoulement du fluide en amont soit stationnaire. Les caractéristiques fréquentielles de ces détachements tourbillonnaires sont quantifiées à l’aide du nombre de Strouhal :

$$St = \frac{nD}{U} \quad (13.6)$$

où D représente une longueur caractéristique de l’obstacle dans le sens perpendiculaire à l’écoulement (épaisseur de tablier) et n représente la fréquence du mouvement étudié.

Les coefficients aérodynamiques, tels qu’ils viennent d’être commentés, sont déterminés à l’aide d’essais en soufflerie sur les obstacles fixes.

Lorsque les obstacles étudiés sont susceptibles de se déplacer sous l’effet de l’écoulement du fluide, leurs mouvements perturbent l’écoulement du fluide. Les caractéristiques de que l’on obtiendrait si la structure était immobile sont alors modifiées par des effets instationnaires ; il y a une réelle interaction entre le fluide et la structure étudiée.

Lorsque les fréquences étudiées sont suffisamment faibles, l’hypothèse d’écoulement quasi-permanent est souvent formulée. Elle suppose que le temps de passage d’une particule du fluide le long de l’obstacle (c’est-à-dire, la largeur du tablier) est suffisamment court par rapport aux périodes de vibration de la structure pour que l’écoulement puisse s’adapter instantanément à chaque nouvelle position de l’obstacle. Cette hypothèse justifie donc l’utilisation des relations 13.3 à 13.5 pour estimer les efforts appliqués à la structure : ce sont les forces aérodynamiques¹.

Les grandeurs utilisées lors du dimensionnement de l’ouvrage d’art sont les coefficients aérodynamiques moyens. Le coefficient de portance utilisé est donc nul pour un corps symétrique placé symétriquement dans l’écoulement. On peut trouver dans la littérature des valeurs de coefficients aérodynamiques pour de nombreuses sections habituellement

¹Lorsque l’hypothèse d’écoulement quasi-permanent n’est pas formulée, les forces résultant de l’écoulement du fluide sont définies à l’aide des coefficients de Scanlan (qui dépendent de la fréquence étudiée). Ces coefficients permettent de rendre compte du contenu fréquentiel de l’interaction entre le fluide et la structure. L’utilisation de ces coefficients mène aux expressions *aéroélastiques* des efforts.

utilisées en génie civil : le tube rond, le tube carré, les poutres en I , les cornières, ...([85]). Lorsque la section étudiée est une nouvelle section de tablier, des essais en soufflerie sont généralement réalisés afin de déterminer ses coefficients aérodynamiques moyens. Dans le domaine des nombres de Reynolds rencontrés en pratique, on considère généralement que ces coefficients ne dépendent pas de la vitesse du fluide : si sa vitesse est doublée, les efforts aérodynamiques sont donc multipliés par 4 de manière à conserver les mêmes coefficients aérodynamiques.

13.3 Caractérisation du vent

Les concepts généraux de dynamique des fluides qui viennent d'être rappelés s'avèrent être utiles pour l'analyse dynamique des structures soumises au vent turbulent. En effet, le vent est un phénomène naturel qui consiste en l'écoulement d'un fluide, l'air ($\nu = 0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$), à une certaine vitesse, appelée, par raccourci de langage, la vitesse du vent.

Etant donné que les structures étudiées se trouvent dans la couche limite terrestre, l'écoulement de l'air est essentiellement turbulent. La vitesse du vent est donc variable au cours du temps ; il est assez commode de l'exprimer dans un repère lié à la direction moyenne du vent, par la somme d'une composante moyenne et de fluctuations dans les directions longitudinale, transversale et verticale :

$$U(t) = \begin{Bmatrix} \overline{U} + u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{Bmatrix} \quad (13.7)$$

13.3.1 Composante moyenne

Le contenu fréquentiel du vent est constitué de deux bandes de fréquences² $[10^{-7}; 10^{-4}] \text{ Hz}$ et $[10^{-3}; 10^{-1}] \text{ Hz}$. Vu son niveau de fréquences assez bas, le premier intervalle présente peu d'intérêt dans l'analyse dynamique des structures ; il représente les variations du vent à l'échelle macroscopique. La coupure entre ces deux bandes de fréquences est assez intéressante car elle permet de justifier l'utilisation d'une période de 10 minutes pour estimer ses caractéristiques moyennes.

Notre expérience intuitive du vent laisse supposer que sa vitesse moyenne $\overline{U}$ dépend principalement de la cause qui lui a donné naissance : les conditions climatologiques. Dans le cadre du dimensionnement d'un ouvrage d'art, il importe de pouvoir estimer des valeurs extrémales de la vitesse moyenne du vent. Ces grandeurs résultent de mesures de vitesses en plusieurs sites. Les grandeurs utiles au dimensionnement sont résumées dans des codes spécifiques à chaque région. Ces codes fournissent généralement la vitesse du vent moyen (sur une période de 10 minutes) qui correspond à une probabilité de dépassement de 0.02 sur une période d'observation d'un an.

Dans la couche limite terrestre, le profil de la vitesse moyenne du vent³ n'est pas constant. Les vitesses de référence données dans les codes correspondent généralement à une altitude de 10 mètres au-dessus du niveau du sol.

²cf spectre de van der Hoven ([35])

³Evolution de la vitesse moyenne du vent avec l'altitude

Plusieurs loi permettent de prendre en compte la variation de la vitesse moyenne en fonction de l'altitude. Les plus courantes sont le profil logarithmique :

$$\overline{U}(z) = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{z}{z_0} \quad (13.8)$$

et le profil en loi de puissance :

$$\overline{U}(z) = \left(\frac{z}{z_{ref}} \right)^\alpha \quad (13.9)$$

Les paramètres intervenant dans ces relations sont particuliers à chaque norme ; ce sont eux qui permettent de rendre compte des caractéristiques de la topographie locale (rugosité de terrain, inclinaison du terrain, présence de collines, influence de hauts bâtiments, déplacement de couches limite, ...)

13.3.2 Caractérisation de la turbulence

Les composantes fluctuantes de la vitesse du vent ($u(t)$, $v(t)$ et $w(t)$) peuvent être représentées à l'aide de processus aléatoires à moyenne nulle. Sur des périodes de l'ordre de 10 minutes comme celles étudiées en pratique, ces contributions à la turbulence peuvent être considérées comme stationnaires. En outre, ces processus sont généralement supposés être gaussiens. Leur caractérisation complète est donc réalisée à l'aide de densités spectrales.

La caractéristique principale d'un processus aléatoire à moyenne nulle est sa variance. Les trois composantes de la turbulence sont donc d'abord caractérisées par leur écart type :

$$\sigma_u ; \quad \sigma_v \simeq 0.75\sigma_u ; \quad \sigma_w \simeq 0.5\sigma_u \quad (13.10)$$

Contrairement à la vitesse moyenne du vent, on peut généralement supposer qu'elles sont indépendantes de l'altitude. Le rapport entre ces grandeurs et la vitesse moyenne définit des intensités de turbulence que nous avons largement utilisées depuis le début de ce document :

$$I_u = \frac{\sigma_u}{\overline{U}} \quad I_v = \frac{\sigma_v}{\overline{U}} \quad I_w = \frac{\sigma_w}{\overline{U}} \quad (13.11)$$

Bien que variables avec l'altitude, ces grandeurs adimensionnelles permettent de mieux représenter l'importance de la turbulence. Nous verrons dans la suite, mais cela semble dès à présent assez logique, que les non linéarités du chargement éolien sont d'autant plus importantes que les intensités de turbulence sont grandes. Ce paramètre sera donc un des paramètres primordiaux pour l'analyse dynamique non linéaire dans le domaine temporel.

Pour une des trois composantes de la turbulence, la fonction d'intercorrélacion permet de quantifier les relations entre les vitesses du vent en deux points différents (P_1 et P_2) et en des instants différents :

$$R_u(P_1, P_2, \Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(P_1, t) u(P_2, t + \Delta t) dt \quad (13.12)$$

Lorsque les points P_1 et P_2 sont confondus, cette fonction dégénère en la fonction d'autocorrélacion qui, sur base de l'hypothèse d'ergodicité peut s'exprimer à partir d'un

échantillon du processus aléatoire :

$$R_u(P, \Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(P, t) u(P, t + \Delta t) dt \quad (13.13)$$

La fonction d'autocorrélation permet de définir une échelle de temps :

$$T_u = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_0^\infty R_u(P, \Delta t) d\Delta t \quad (13.14)$$

qui représente un ordre de grandeur du temps de mémoire des vitesses de vent pour une direction de turbulence donnée. On suppose généralement qu'elle est indépendante du point de l'espace P choisi. La fonction d'autocorrélation estimée pour un déphasage nul représente la corrélation entre les vitesses du vent en deux points distincts de l'espace. Elle permet de définir des échelles de turbulence :

$$L_u^R = \frac{1}{\sigma_u(P_1)\sigma_u(P_2)} \int_0^\infty R_u(P_1, P_2, 0) dr \quad (13.15)$$

où r représente la distance entre les points P_1 et P_2 choisis sur un axe R fixé. En se limitant aux trois axes principaux et aux trois directions de turbulence, neuf échelles de turbulence peuvent donc être définies. Elles représentent un ordre de grandeur des tailles des tourbillons moyens dans les trois directions choisies et pour chacune des composantes de turbulence. On suppose généralement que l'échelle de turbulence est indépendante des points P_1 et P_2 choisis ; on suppose aussi parfois que la fonction d'autocorrélation peut s'exprimer sous une forme exponentielle :

$$R_u(P_1, P_2, 0) = \sigma_u(P_1)\sigma_u(P_2)e^{-\frac{|P_1-P_2|}{L_u^R}} \quad (13.16)$$

Etant donné que l'analyse au vent turbulent se pratique habituellement dans le domaine fréquentiel, il est habituel de quantifier également les turbulences du vent à l'aide de densités spectrales. En toute rigueur, celles-ci devraient être obtenues à partir de la fonction d'autocorrélation (Wiener-Khintchine) mais d'autres formes de densités spectrales sont en général utilisées. Il y a donc là une incohérence sur laquelle nous reviendrons également plus tard.

Dans les chapitres précédents, nous avons travaillé avec les densités spectrales de Von Karman et Davenport⁴. Le tableau 13.1 donne également d'autres formes de densités spectrales qui peuvent être rencontrées en pratique.

Dans le domaine fréquentiel, la densité spectrale de puissance ne suffit pas à caractériser complètement le processus aléatoire. Il faut également ajouter la notion de cohérence entre les turbulences en des points distincts de l'espace. Rigoureusement, cette cohérence peut être obtenue à partir de la fonction d'intercorrélation définie ci-avant (par transformée de Fourier), mais d'autres relations sont généralement utilisées. La plus courante consiste à choisir une fonction de cohérence à décroissance exponentielle :

$$\psi^u(r_y, r_z, n) = e^{-\frac{n}{U} \sqrt{(C_y^u r_y)^2 + (C_z^u r_z)^2}} \quad (13.17)$$

⁴Les densités spectrales utilisées en pratique pour l'analyse au vent turbulent diffèrent par un facteur multiplicateur 4π de celles que nous avons utilisées dans les deux premières parties de ce document. Le lien entre ces deux grandeurs peut être établi en exprimant que la caractéristique principale des "nouvelles" densités spectrales est que leur intégrale sur les fréquences (et non plus les pulsations) depuis 0 jusque $+\infty$ (et non plus de $-\infty$ à $+\infty$) est égale à la variance du processus.

von Karman (1948) :	$S_u(z, n) = \frac{4 \frac{L_u^x}{U} \sigma_u^2}{\left(1 + 70.7 \left(\frac{n L_u^x}{U}\right)^2\right)^{5/6}}$
Harris (1970) :	$S_u(z, n) = \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{1800}{U}\right)^2 \sigma_u^2}{\left(2 + \left(\frac{1800n}{U}\right)^2\right)^{5/6}}$
Davenport (1967) :	$S_u(z, n) = \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{1200}{U}\right)^2 n \sigma_u^2}{\left(1 + \left(\frac{1200n}{U}\right)^2\right)^{4/3}}$
Simiu / Scanlan (1986) :	$S_u(z, n) = \frac{\frac{2}{3} \lambda \frac{z}{U} \sigma_u^2}{\left(1 + \lambda \frac{n z}{U}\right)^{5/3}} \quad ; \quad \lambda = 50$
	$S_v(z, n) = \frac{53 \frac{z}{U} \sigma_v^2}{\left(1 + 9.5 \frac{n z}{U}\right)^{5/3}}$
	$S_w(z, n) = \frac{5.25 \frac{z}{U} \sigma_w^2}{1 + 10 \frac{n z}{U}^{5/3}}$

TAB. 13.1 – Exemples de densités spectrales de vent (Source : DYRBYE C., HANSEN S., Wind loads on structures)

où apparaissent les coefficients de cohérence⁵ C_y^u et C_z^u .

Afin de donner un ordre de grandeur de chacun de ces paramètres, le tableau 13.2 présente les valeurs utilisées lors d'une étude pratique (viaduc de Millau).

Vitesse moyenne :	32.4m/s (au niveau du tablier)		
Ecart-types :	$\sigma_u = 5.85m/s$	$\Rightarrow I_u = 18\%$	
	$\sigma_v = 5.85m/s$	$\Rightarrow I_v = 18\%$	
	$\sigma_w = 4.5m/s$	$\Rightarrow I_w = 14\%$	
Echelles de turbulence :	$L_u^x = 250m$	$L_u^y = 130m$	$L_u^z = 90m$
	$L_v^x = 70m$	$L_v^y = 100m$	$L_v^z = 100m$
	$L_w^x = 30m$	$L_w^y = 80m$	$L_w^z = 40m$
Coefficients de cohérence :	$C_y^u = 9$	$C_z^u = 12$	
	$C_y^v = 9$	$C_z^v = 12$	
	$C_y^w = 7$	$C_z^w = 9$	
Spectre :	propre au site		

TAB. 13.2 – Exemples de paramètres de caractérisation d'un vent turbulent (Millau)

13.4 Expression des forces aérodynamiques

Aux paragraphes 13.2 et 13.3, nous avons présenté les expressions des forces aérodynamiques agissant sur un obstacle (le tablier de pont) immergé dans un écoulement

⁵La dénomination est un peu malheureuse car ces coefficients sont d'autant plus petits que la cohérence est importante...

uniforme, ainsi que les caractéristiques de la turbulence du vent. L'expression des forces appliquées sur le tablier de pont lorsque l'écoulement est turbulent peut être obtenue en combinant ces deux développements.

Pour exprimer ces efforts, choisissons un système de référence lié à la direction de la vitesse moyenne du vent ; la vitesse du vent en un point (x, y, z) de l'espace s'exprime par :

$$\{V(x, y, z, t)\} = \begin{Bmatrix} \bar{U}(x, y, z) + u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} \quad (13.18)$$

Pour simplifier les choses, nous pouvons, dans un premier temps, étudier une structure filaire (un tablier de pont) dont l'axe longitudinal est perpendiculaire à la direction moyenne du vent. Supposons également pour démarrer que l'incidence moyenne du vent soit nulle. Dans ce cas, la vitesse du vent en un point du tablier s'exprime par :

$$\{V(y, t)\} = \begin{Bmatrix} \bar{U}(y) + u(y, t) \\ w(y, t) \end{Bmatrix} \quad (13.19)$$

Les forces aérodynamiques qui naissent de cet écoulement engendrent des déplacements de la structure étudiée. Avec les conventions de signes de la figure 13.4, le mouvement du tablier peut être décrit par ses mouvements de flexion $[h(y, t)]$, de tangage $[\alpha(y, t)]$ et de balancement $[p(y, t)]$.

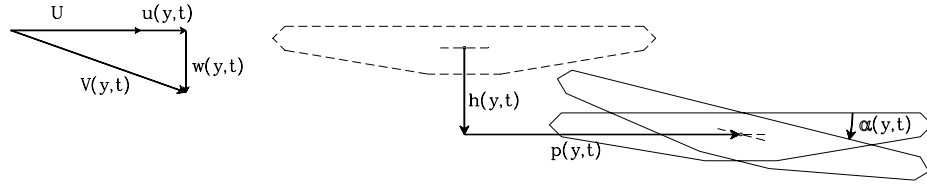


FIG. 13.4 – Déplacements structuraux : conventions de signes

Sous l'hypothèse d'écoulement quasi-permanent, les efforts peuvent, comme annoncé, être estimés à l'aide des coefficients aérodynamiques déterminés en soufflerie :

$$\begin{aligned} F_L(\bar{U}, i) &= \frac{1}{2} \rho C_L(i) B V^2 \\ F_D(\bar{U}, i) &= \frac{1}{2} \rho C_D(i) B V^2 \\ F_M(\bar{U}, i) &= \frac{1}{2} \rho C_M(i) B^2 V^2 \end{aligned} \quad (13.20)$$

Ces relations permettent donc d'estimer l'évolution au cours du temps des efforts induits par le vent sur le pont. Il suffit en effet d'exprimer avec les notations du problème, la norme de la vitesse du vent ainsi que son incidence :

$$\begin{aligned} F_L(y, t) &= \frac{1}{2} \rho C_L(i_{app}(y, t)) B |V_{app}(y, t)|^2 \\ F_D(y, t) &= \frac{1}{2} \rho C_D(i_{app}(y, t)) B |V_{app}(y, t)|^2 \\ F_M(y, t) &= \frac{1}{2} \rho C_M(i_{app}(y, t)) B^2 |V_{app}(y, t)|^2 \end{aligned} \quad (13.21)$$

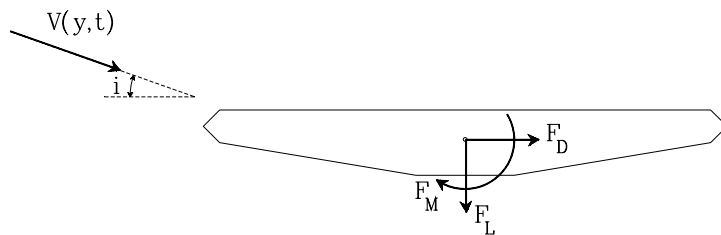


FIG. 13.5 – Efforts aérodynamiques : conventions de signes

où $i_{app}(y, t)$ et $V_{app}(y, t)$ représentent respectivement les évolutions au cours du temps, au point d'abscisse y , de l'angle d'incidence apparent et de la vitesse apparente du vent. Voici donc établies les relations principales qui permettent d'exprimer en terme des pressions les effets du fluide sur la structure. Ce sont ces relations plus précises qui peuvent permettre l'étude d'une structure plus complexe en champ de turbulence bidimensionnel. Ces relations vont maintenant remplacer l'expression de la sollicitation (Eq. 2.1) que nous avons utilisée au début de ce travail.

13.5 Conclusions

Après quelques rappels sur les notions générales d'aérodynamique et sur les caractérisations du vent turbulent utilisées en pratique, nous avons finalement présenté l'expression plus réaliste du chargement aérodynamique que nous utiliserons dans la fin du document (Equ. 13.21).

Chapitre 14

La sollicitation aérodynamique

“La mathématique existentielle, qui n’existe pas, poserait à peu près cette équation : la valeur d’un hasard est égale à son degré d’improbabilité”

Milan Kundera

14.1 Introduction

Nous venons de présenter les expressions des forces aérodynamiques (*lift, drag, moment*) s’exerçant sur la structure sous l’hypothèse d’un régime quasi-permanent. Les développements que nous avons menés depuis le début de ce document nous ont appris qu’il était assez intéressant de pouvoir linéariser ces expressions.

Nous ne revenons plus sur les raisons pour lesquelles cette linéarisation est particulièrement intéressante. Rappelons simplement que, si la sollicitation peut être exprimée comme une forme linéaire des composantes de la turbulence, les réponses aux différents points de la structure sont alors gaussiennes et leur caractérisation complète est assez simple.

La démarche consistant à linéariser les sollicitations aérodynamiques (proche de la linéarisation stochastique) est présentée dans une très large majorité des ouvrages de référence. Il n’existe même probablement pas, à l’heure actuelle, de bureau d’études qui prenne en compte les termes quadratiques de chargement. Nous allons donc présenter brièvement (puisque ces développements sont essentiellement repris de [17]) la façon dont les expressions 13.21 peuvent être linéarisées. Même si les expressions qui seront alors obtenues ne seront guère utilisées dans la suite du document, il nous paraît important de présenter ces expressions linéarisées car elles débouchent sur une formulation simplissime des forces aérodynamiques et permettent déjà de comprendre bon nombre de phénomènes.

Aux chapitres précédents, nous avons montré qu’il pouvait s’avérer être important de considérer les termes d’ordres supérieurs du chargement. Aussi, nous avons présenté quelques méthodes qui permettent de prendre en compte la non linéarité du chargement

pour autant qu'elle puisse s'exprimer à partir d'une forme polynômiale des composantes de la turbulence. Dans la seconde moitié de ce chapitre, nous nous concentrerons donc essentiellement sur l'établissement d'une telle forme pour le chargement.

14.2 Linéarisation des forces aérodynamiques

La démarche choisie pour linéariser les expressions 13.21 commence par la linéarisation de chacun des facteurs du produit à savoir la norme de la vitesse apparente du vent, puis les coefficients aérodynamiques.

14.2.1 Norme de la vitesse

La vitesse qui doit être prise en compte est la vitesse relative du vent incident par rapport à la structure :

$$\{V_{app}(y, t)\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{U} + u(y, t) \\ w(y, t) \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \dot{p}(y, t) \\ \dot{h}(y, t) + rB\dot{\alpha}(y, t) \end{array} \right\} \quad (14.1)$$

où r est un coefficient dépendant de la forme de la section.

La norme au carré de la vitesse apparente s'exprime donc par :

$$\begin{aligned} |V_{app}(y, t)|^2 = & \bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{p} + \\ & u^2 + \dot{p}^2 - 2u\dot{p} + w^2 + \dot{h}^2 + (rB\dot{\alpha})^2 - 2w\dot{h} - 2wrB\dot{\alpha} + 2\dot{h}rB\dot{\alpha} \end{aligned} \quad (14.2)$$

L'équation 14.2 peut être rendue linéaire en négligeant les termes de la seconde ligne, ce qui pourrait être licite, à condition que les composantes de la turbulence du vent ainsi que les vitesses structurelles soient faibles devant la vitesse moyenne du vent.

L'importance de cette hypothèse concerne principalement les zones à forte turbulence comme les zones urbaines ou les zones latérales des vallées pour lesquelles des intensités de turbulence de 10 à 20% peuvent être atteintes. En considérant un facteur de pointe de 3 pour la turbulence du vent, il n'est donc pas impossible d'obtenir des vitesses fluctuantes de l'ordre de la moitié de la vitesse moyenne du vent.

14.2.2 Incidence du vent

Selon les notations de la figure 13.4, l'inclinaison de la vitesse du vent résultante par rapport à l'horizontale s'exprime par :

$$\tan(i_{vent}(y, t)) = \frac{w(y, t) - \dot{h}(y, t) - rB\dot{\alpha}(y, t)}{\bar{U} + u(y, t) - \dot{p}(y, t)} \quad (14.3)$$

L'incidence du vent par rapport au tablier dans sa position déformée est donc donnée par :

$$i_{app}(y, t) = \arctan \left[\frac{w(y, t) - \dot{h}(y, t) - rB\dot{\alpha}(y, t)}{\bar{U} + u(y, t) - \dot{p}(y, t)} \right] - \alpha(y, t) \quad (14.4)$$

Il s'agit à nouveau d'une relation non linéaire qu'il convient d'adapter quelque peu pour obtenir une formulation linéaire :

$$i_{app}(y, t) \simeq \frac{w(y, t) - \dot{h}(y, t) - rB\dot{\alpha}(y, t)}{\bar{U}} - \alpha(y, t) \quad (14.5)$$

Ceci permet donc à nouveau d'introduire un processus aléatoire (l'incidence apparente du vent) qui s'exprime à l'aide d'une combinaison linéaire d'autres processus aléatoires.

Cette approximation trouve à nouveau son éventuelle justification dans l'importance mineure de la turbulence et des vitesses structurelles vis-à-vis de la vitesse moyenne du vent : remplacer la tangente par son argument donne une erreur relative inférieure à 5% pour des angles de moins de 20°. Il faut donc trouver la majeure partie de l'approximation dans la modification du dénominateur. A titre d'ordre de grandeur, notons simplement qu'avec une intensité de turbulence de 15% et un facteur de pointe de 3 pour les composantes de la turbulence, l'angle d'incidence peut atteindre des valeurs extrémales de l'ordre de :

$$i_{\max} = \arctan \left[\frac{3.0, 15. \bar{U}}{\bar{U}} \right] \simeq 24^\circ \quad (14.6)$$

Au paragraphe 14.5 nous étudierons plus précisément les statistiques de l'angle d'incidence.

14.2.3 Coefficients aérodynamiques

Connaissant l'expression de la norme de la vitesse apparente du vent ainsi que de son incidence apparente, il ne reste donc plus qu'à les introduire dans les relations donnant les forces aérodynamiques :

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{2} \rho C_L \left(\frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} - \alpha \right) B [\bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{p}] \\ F_D &= \frac{1}{2} \rho C_D \left(\frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} - \alpha \right) B [\bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{p}] \\ F_M &= \frac{1}{2} \rho C_M \left(\frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} - \alpha \right) B^2 [\bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{p}] \end{aligned} \quad (14.7)$$

La figure 14.1 montre quelques exemples de coefficients aérodynamiques (C_D , C_L et C_M). Bien que leur allure générale soit non linéaire, la démarche habituelle consiste à linéariser ces coefficients. De manière assez logique, ceci est réalisé autour de l'angle d'incidence du vent moyen qui est supposé nul dans ce paragraphe.

Les coefficients aérodynamiques linéarisés¹ sont représentés par les lignes en traits discontinus. Nous venons de voir qu'il n'est pas rare que l'angle d'incidence du vent atteigne les 10° à 15°. On peut constater par exemple pour le pont Vasco de Gama que la loi exacte, résultant d'essais en soufflerie, s'éloigne alors assez bien de la loi linéaire approchée. Dans ce cas, l'approche dynamique non linéaire devrait donc mettre en évidence des différences assez importantes.

¹Nous discuterons également au paragraphe 14.5 des différentes possibilités de linéarisation des coefficients aérodynamiques.

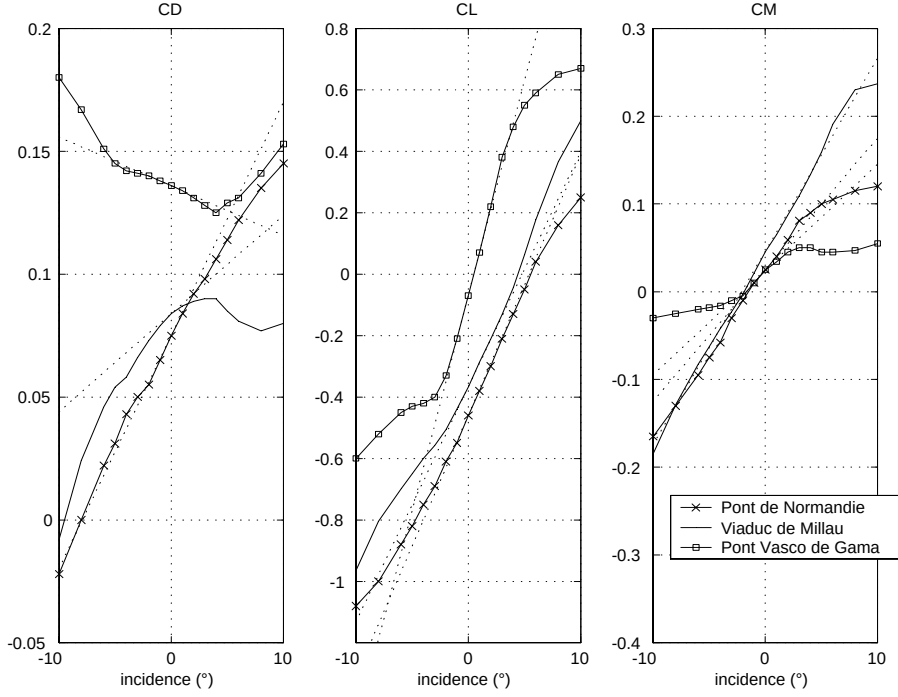


FIG. 14.1 – Exemples de coefficients aérodynamiques de tabliers de ponts célèbres

Une fois ces coefficients linéarisés, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 F_L &= \frac{1}{2}\rho \left[c_l + c'_l \left(\frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} - \alpha \right) \right] B [\bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{p}] \\
 F_D &= \frac{1}{2}\rho \left[c_d + c'_d \left(\frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} - \alpha \right) \right] B [\bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{p}] \\
 F_M &= \frac{1}{2}\rho \left[c_m + c'_m \left(\frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} - \alpha \right) \right] B^2 [\bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{p}]
 \end{aligned} \tag{14.8}$$

où $c_l = C_L(0)$, $c_d = C_D(0)$, $c_m = C_M(0)$, $c'_l = \left. \frac{dC_L}{di} \right|_{i=0}$, $c'_d = \left. \frac{dC_D}{di} \right|_{i=0}$ et $c'_m = \left. \frac{dC_M}{di} \right|_{i=0}$.

Dans l'expression des forces aérodynamiques, bien que chacun des facteurs soit linéaire en les processus aléatoires, il reste néanmoins des termes quadratiques croisés entre les différents facteurs. Des simplifications supplémentaires sont donc nécessaires afin d'obtenir une expression linéaire de ces forces. Nous profitons de ces simplifications supplémentaires pour présenter une série d'hypothèses qui sont généralement formulées et qui pourraient par exemple permettre l'étude analytique d'une structure assez simple.

14.2.4 Hypothèse de petites rotations

L'incidence apparente du vent moyen ne provient presque exclusivement que de la turbulence du vent et non pas de l'angle de torsion du tablier. Il paraît donc licite de supprimer le terme en α apparaissant dans l'expression des efforts :

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2 \left[c_l + c'_l \frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} \right] \left[1 + 2\frac{u}{\bar{U}} - 2\frac{\dot{p}}{\bar{U}} \right] \\ F_D &= \frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2 \left[c_d + c'_d \frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} \right] \left[1 + 2\frac{u}{\bar{U}} - 2\frac{\dot{p}}{\bar{U}} \right] \\ F_M &= \frac{1}{2}\rho B^2 \bar{U}^2 \left[c_m + c'_m \frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} \right] \left[1 + 2\frac{u}{\bar{U}} - 2\frac{\dot{p}}{\bar{U}} \right] \end{aligned} \quad (14.9)$$

14.2.5 Découplage selon le type de mouvement

Afin d'éviter des termes croisés entre mouvements de flexion, de tangage et de balancement, certains termes sont encore éliminés des expressions. Ainsi, pour les efforts de portance n'interviennent plus que les déplacements verticaux, pour les efforts de traînée, que les déplacements horizontaux et pour les moments de torsion, que les angles de torsion du tablier :

$$F_L = \frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2 \left[c_l + c'_l \frac{w - \dot{h}}{\bar{U}} \right] \left[1 + 2\frac{u}{\bar{U}} \right] \quad (14.10)$$

$$F_D = \frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2 \left[c_d + c'_d \frac{w}{\bar{U}} \right] \left[1 + 2\frac{u}{\bar{U}} - 2\frac{\dot{p}}{\bar{U}} \right] \quad (14.11)$$

$$F_M = \frac{1}{2}\rho B^2 \bar{U}^2 \left[c_m + c'_m \frac{w - rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} \right] \left[1 + 2\frac{u}{\bar{U}} \right] \quad (14.12)$$

Cette simplification peut trouver sa justification dans le fait que, par exemple, les mouvements de flexion et de tangage vont en principe se produire indépendamment l'un de l'autre et à des fréquences différentes (fréquences de flexion dans les plans verticaux et horizontaux). Ceci n'est plus vrai lorsque ces fréquences propres sont justement proches l'une de l'autre ou lorsque la structure étudiée présente des modes de vibration hybrides mêlant flexion dans les deux plans simultanément. Dans ces cas, cette hypothèse peut être remise en question.

14.2.6 Turbulence et vitesse structurale d'ordre 2

Finalement, la dernière hypothèse à formuler, afin de linéariser complètement les expressions des efforts consiste à considérer à nouveau que la vitesse moyenne du vent est d'un ordre supérieur à la turbulence et aux vitesses structurales. On obtient ainsi la formulation la plus simple pour exprimer les efforts aérodynamiques sur la structure :

$$\begin{aligned}
F_L &= \frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2 c_l + \frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2 \left[2c_l \frac{u}{\bar{U}} + c_l' \frac{w}{\bar{U}} \right] - \frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2 c_l' \frac{\dot{h}}{\bar{U}} \\
F_D &= \frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2 c_d + \frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2 \left[2c_d \frac{u}{\bar{U}} + c_d' \frac{w}{\bar{U}} \right] - \frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2 c_d' 2 \frac{\dot{p}}{\bar{U}} \\
F_M &= \frac{1}{2}\rho B^2 \bar{U}^2 c_m + \frac{1}{2}\rho B^2 \bar{U}^2 \left[2c_m \frac{u}{\bar{U}} + c_m' \frac{w}{\bar{U}} \right] - \frac{1}{2}\rho B^2 \bar{U}^2 c_m' \frac{r B \dot{\alpha}}{\bar{U}}
\end{aligned} \tag{14.13}$$

Toutes les hypothèses formulées permettent d'arriver à ces expressions les plus simples des forces aérodynamiques : elles sont linéaires en les processus aléatoires représentant le phénomène, à savoir les composantes de la turbulence (u et w) et les vitesses structurales ($\dot{h}$, $\dot{p}$ et $\dot{\alpha}$). Chacune des trois expressions ci-dessus comporte trois termes :

- un terme constant : il s'agit de l'effet moyen du vent qui est responsable de la partie statique de la réponse ;
- un terme proportionnel à la turbulence : il s'agit des effets turbulents introduits par les fluctuations de vitesse autour de leur moyenne ;
- un terme proportionnel à une vitesse structurale : ce sont les effets instationnaires caractérisant l'interaction entre le vent et la structure. Ils proviennent du fait que les efforts induits par le vent sur la structure dépendent de la vitesse et de l'incidence apparentes. Les sollicitations de vent ajoutent donc une contribution à l'amortissement structurel existant. On peut également noter que, grâce à l'hypothèse des petites rotations, le chargement aérodynamique n'engendre aucune modification de raideur (termes en α).

Les relations 14.13 constituent les expressions les plus simples qui soient pour exprimer l'effet du fluide sur la structure. On peut vérifier assez facilement que les interprétations que nous venons de donner dans un cadre assez général se retrouvent dans le chargement unidimensionnel élémentaire que nous avons considéré au début de ce document (Eq. 2.1).

En aboutissant à cette somme de trois effets, la série d'hypothèses formulées permet une meilleure compréhension du phénomène de chargement aérodynamique. De plus, n'oublions pas que les relations 14.13 présentent également l'avantage d'être linéaires en les processus aléatoires. Cette formulation sera donc utilisée pour l'analyse (limitée au second ordre) des structures dans le domaine fréquentiel.

14.3 Termes d'ordres supérieurs du chargement aérodynamique

Dans les développements suivants, nous allons présenter une méthode (originale) permettant d'obtenir une expression polynômiale des forces aérodynamiques s'appliquant sur une structure plongée dans un écoulement turbulent bidimensionnel. Pour rappel, l'expression non linéaire des efforts dont nous partons s'exprime par :

$$\begin{aligned}
F_L(y, t) &= \frac{1}{2}\rho C_L(i(y, t)) B |V_{app}(y, t)|^2 \\
F_D(y, t) &= \frac{1}{2}\rho C_D(i(y, t)) B |V_{app}(y, t)|^2 \\
F_M(y, t) &= \frac{1}{2}\rho C_M(i(y, t)) B^2 |V_{app}(y, t)|^2
\end{aligned} \tag{14.14}$$

Tout comme pour l'opération de linéarisation des forces aérodynamique, la démarche que nous allons suivre consiste à travailler successivement sur chacun des facteurs de cette expression.

14.3.1 Norme de la vitesse

La norme au carré de la vitesse apparente s'exprime par (14.2) :

$$|V_{app}(y, t)|^2 = \bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{p} + u^2 + \dot{p}^2 - 2u\dot{p} + w^2 + \dot{h}^2 + (rB\dot{\alpha})^2 - 2w\dot{h} - 2wrB\dot{\alpha} + 2\dot{h}rB\dot{\alpha} \quad (14.15)$$

Dans la présente approche, nous ne supprimons plus que les termes d'excitation paramétrique (termes faisant intervenir une composante de la vitesse structurale et une composante de la turbulence) et d'amortissement non linéaire (termes quadratiques d'une composante structurale).

L'expression utilisée pour la norme au carré de la vitesse apparente est donc :

$$|V_{app}(y, t)|^2 = \bar{U}^2 + 2\bar{U}u(y, t) - 2\bar{U}\dot{p}(y, t) + u(y, t)^2 + w(y, t)^2 \quad (14.16)$$

14.3.2 Incidence du vent

L'incidence du vent par rapport au tablier dans sa position déformée est donnée rigoureusement par :

$$i_{app}(y, t) = \arctan \left[\frac{w(y, t) - \dot{h}(y, t) - rB\dot{\alpha}(y, t)}{\bar{U} + u(y, t) - \dot{p}(y, t)} \right] - \alpha(y, t) \quad (14.17)$$

Pour transformer cette relation non linéaire en une relation polynômiale, nous allons nous aider des développements en série suivants² :

$$\arctan [x] = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} x^k \simeq x - \frac{x^3}{3} + o(x^5) \quad (14.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^p} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_k^{p+k-1} x^k \\ &= 1 - px + \frac{p(p+1)}{2} x^2 - \frac{p(p+1)(p+2)}{6} x^3 + o(x^4) \end{aligned} \quad (14.19)$$

En supposant que les composantes de turbulence et les vitesses structurales sont petites vis-à-vis de la vitesse moyenne du vent, on peut écrire :

$${}^2 C_k^{p+k-1} = \binom{p+k-1}{k} = \frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!}$$

D_{kl}	$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$	$k = 7$
$l = 0$	1	$-1/3$	$1/5$	$-1/7$
$l = 1$	-1	1	-1	1
$l = 2$	1	-2	3	-4
$l = 3$	-1	$10/3$	-7	12
$l = 4$	1	-5	14	-30
$l = 5$	-1	7	$-126/5$	66

TAB. 14.1 – Coefficients intervenant dans le développement en série de l'angle d'incidence apparent

$$\begin{aligned}
i_{app}(y, t) &= \arctan \left[\frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{\bar{U} + u - \dot{p}} \right] - \alpha \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \left(\frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{\bar{U} + u - \dot{p}} \right)^k - \alpha \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \left(\frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} \right)^k \frac{1}{\left(1 + \frac{u - \dot{p}}{\bar{U}}\right)^k} - \alpha \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \left(\frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} \right)^k \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l C_l^{k+l-1} \left(\frac{u - \dot{p}}{\bar{U}} \right)^l - \alpha
\end{aligned} \tag{14.20}$$

En reportant les deux sommations en début d'expression, nous pouvons également écrire la relation générale :

$$i_{app}(y, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} D_{kl} \frac{(w - \dot{h} - rB\dot{\alpha})^k (u - \dot{p})^l}{\bar{U}^{k+l}} - \alpha \tag{14.21}$$

où $D_{kl} = \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} (-1)^l C_l^{k+l-1}}{k}$. Les quelques premières valeurs des paramètres D_{kl} sont données à titre indicatif dans le tableau 14.1.

Dans ce travail, nous nous limitons aux non linéarités inhérentes au chargement. Nous ne prenons donc en compte ni les termes d'amortissement structurel non linéaire ni les termes d'excitation paramétrique. Cela revient à négliger toutes les puissances des vitesses structurelles ainsi que les produits de ces vitesses avec les composantes de la turbulence. Nous supposons donc que :

$$(u - \dot{p})^l \simeq \begin{cases} 1 & \text{si } l = 0 \\ u - \dot{p} & \text{si } l = 1 \\ u^l & \text{si } l > 1 \end{cases} \tag{14.22}$$

et

$$(w - \dot{h} - rB\dot{\alpha})^k = \begin{cases} w - \dot{h} - rB\dot{\alpha} & \text{si } k = 1 \\ w^k & \text{si } k > 1 \end{cases} \quad (14.23)$$

En continuant avec les mêmes hypothèses, nous pouvons donc également écrire le produit de ces deux grandeurs :

$$(w - \dot{h} - rB\dot{\alpha})^k (u - \dot{p})^l = \begin{cases} w - \dot{h} - rB\dot{\alpha} & \text{si } k = 1 \text{ et } l = 0 \\ wu^l & \text{sinon} \end{cases} \quad (14.24)$$

De l'expression complète de l'incidence apparente du vent, il ne reste donc que :

$$i_{app} = -\alpha - \frac{\dot{h} + rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} D_{kl} \frac{w^k u^l}{\bar{U}^{k+l}} \quad (14.25)$$

Cette relation est à comparer avec l'équation 14.5 qui était l'expression linéarisé de l'angle d'incidence apparent du vent. Par rapport à une formulation complètement linéaire, on peut donc constater que l'objectif de cette étude consiste en la prise en compte des termes $w^k u^l$ ($l > 1$).

14.3.3 Coefficients aérodynamiques

Les expressions des efforts (14.14) montrent que le développement en série de l'angle d'incidence du vent ne suffit pas. Admettons que nous connaissions également un développement en série de Taylor des coefficients aérodynamiques³ (autour d'une incidence moyenne nulle). Par souci de généralité, nous noterons :

$$C(i) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{m!} i^m = c_0 + i c_1 + \frac{c_2}{2!} i^2 + \frac{c_3}{3!} i^3 + \dots \quad (14.26)$$

où $C(i)$ représente un des coefficients aérodynamiques $C_L(i)$, $C_D(i)$ ou $C_M(i)$.

En introduisant dans ces relations la forme obtenue pour i_{app} et en négligeant de nouveau les termes d'amortissement non linéaire ou de sollicitation paramétrique, on trouve :

$$\begin{aligned} C(i_{app}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{m!} \left(-\alpha - \frac{\dot{h} + rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} D_{kl} \frac{w^k u^l}{\bar{U}^{k+l}} \right)^m \\ &= c_0 - c_1 \left(\alpha + \frac{\dot{h} + rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{m!} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} D_{kl} \frac{w^k u^l}{\bar{U}^{k+l}} \right)^m \end{aligned} \quad (14.27)$$

Le dernier terme de cette expression peut également être mis sous la forme d'une somme de puissance des composantes de la turbulence u et w :

$$C(i_{app}) = c_0 - c_1 \left(\alpha + \frac{\dot{h} + rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} \right) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{kl} \frac{w^k u^l}{\bar{U}^{k+l}} \quad (14.28)$$

L_{kl}	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$l = 0$	c_1	$\frac{c_2}{2}$	$-\frac{c_1}{3} + \frac{c_3}{6}$	$-\frac{c_2}{3} + \frac{c_4}{24}$
$l = 1$	$-c_1$	$-c_2$	$c_1 - \frac{c_3}{2}$	$\frac{4c_2}{3} - \frac{c_4}{6}$
$l = 2$	c_1	$\frac{3c_2}{2}$	$-2c_1 - c_3$	$-\frac{10c_2}{3} + \frac{5c_4}{12}$
$l = 3$	$-c_1$	$-2c_2$	$\frac{10c_1}{3} - \frac{5c_3}{3}$	$\frac{20c_2}{3} - \frac{5c_4}{6}$
$l = 4$	c_1	$\frac{5c_2}{2}$	$-5c_1 + \frac{5c_3}{2}$	$-\frac{35c_2}{3} + \frac{35c_4}{24}$

TAB. 14.2 – Coefficients intervenant dans l’expression du développement d’un coefficient aérodynamique

Les quelques premières valeurs des paramètres L_{kl} sont données au tableau 14.2. On peut voir dans ce tableau qu’un coefficient c_i ne peut intervenir qu’à partir de la colonne $k = i$. Cela signifie donc que la prise en compte des termes d’ordre supérieur dans la forme des coefficients aérodynamique ne peut influencer que les caractéristiques d’ordres supérieurs (à partir de 2) du chargement.

14.3.4 Expression des efforts

Maintenant que nous avons obtenu des formes polynômiales pour les expressions de la norme de la vitesse relative d’une part, ainsi que pour les coefficients aérodynamiques d’autre part, nous pouvons obtenir également une forme polynômiale pour l’expression de l’effort appliqué. De façon à rester générique, nous noterons $F(y, t)$ pour représenter l’effort de portance, de traînée ou le couple. Les développements sont identiques pour chacune de ces trois sollicitations⁴ :

$$\frac{F(y, t)}{\frac{1}{2}\rho B} = \left(c_0 - c_1 \left(\alpha + \frac{\dot{h} + rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} \right) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{kl} \frac{w^k u^l}{\bar{U}^{k+l}} \right) (\bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{p} + u^2 + w^2) \quad (14.29)$$

Nous allons supprimer une dernière fois les termes qui contribuent à une excitation paramétrique ou à un comportement structurel non linéaire. Il reste donc :

$$\begin{aligned} \frac{F(y, t)}{\frac{1}{2}\rho B} &= c_0 (\bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{p} + u^2 + w^2) - c_1 \left(\alpha + \frac{\dot{h} + rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} \right) \bar{U}^2 \\ &+ \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{kl} \frac{w^k u^l}{\bar{U}^{k+l}} \right) (\bar{U}^2 + 2\bar{U}u + u^2 + w^2) \end{aligned} \quad (14.30)$$

ou, sous forme adimensionnelle :

$$\begin{aligned} \frac{F(y, t)}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2} &= c_0 \left(1 + 2\frac{u}{\bar{U}} + \frac{u^2}{\bar{U}^2} + \frac{w^2}{\bar{U}^2} \right) - c_1 \left(\alpha + \frac{\dot{h} + rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} \right) - 2c_0 \frac{\dot{p}}{\bar{U}} \\ &+ \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{kl} \frac{w^k u^l}{\bar{U}^{k+l}} \right) \left(1 + 2\frac{u}{\bar{U}} + \frac{u^2}{\bar{U}^2} + \frac{w^2}{\bar{U}^2} \right) \end{aligned} \quad (14.31)$$

³Nous clarifierons ceci au paragraphe suivant

⁴Pour le couple de tangage, il convient cependant de remplacer B par B^2 .

F_{kl}	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$l = 0$	c_0	c_1	$c_0 + \frac{c_2}{2}$	$\frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{6}c_3$	$\frac{1}{6}c_2 + \frac{1}{24}c_4$
$l = 1$	$2c_0$	c_1	0	$-\frac{2}{3}c_1 - \frac{1}{6}c_3$	$-\frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{12}c_4$
$l = 2$	c_0	0	0	$\frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{6}c_3$	$\frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{8}c_4$
$l = 3$	0	0	0	$-\frac{2}{3}c_1 - \frac{1}{6}c_3$	$-\frac{2}{3}c_2 + \frac{1}{6}c_4$
$l = 4$	0	0	0	$\frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{6}c_3$	$\frac{5}{6}c_2 + \frac{5}{24}c_4$

TAB. 14.3 – Coefficients intervenant dans l'expression du développement d'une force aérodynamique

$$\begin{aligned}
\frac{F(y, t)}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2} = & c_0 \left(1 + 2\frac{u}{\bar{U}} + \frac{u^2}{\bar{U}^2} + \frac{w^2}{\bar{U}^2} \right) - c_1 \left(\alpha + \frac{\dot{h} + rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} \right) - 2c_0 \frac{\dot{p}}{\bar{U}} \\
& + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{kl} \frac{w^k u^l}{\bar{U}^{k+l}} + 2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{kl} \frac{w^k u^{l+1}}{\bar{U}^{k+l+1}} \\
& + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{kl} \frac{w^k u^{l+2}}{\bar{U}^{k+l+2}} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{kl} \frac{w^{k+2} u^l}{\bar{U}^{k+l+2}}
\end{aligned} \tag{14.32}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}
\frac{F(y, t)}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2} = & c_0 \left(1 + 2\frac{u}{\bar{U}} + \frac{u^2}{\bar{U}^2} + \frac{w^2}{\bar{U}^2} \right) - c_1 \left(\alpha + \frac{\dot{h} + rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} \right) - 2c_0 \frac{\dot{p}}{\bar{U}} \\
& + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{kl} \frac{w^k u^l}{\bar{U}^{k+l}} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{k(l-1)} \frac{w^k u^l}{\bar{U}^{k+l}} \\
& + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{k(l-2)} \frac{w^k u^l}{\bar{U}^{k+l}} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=3}^{\infty} L_{(k-2)l} \frac{w^k u^l}{\bar{U}^{k+l}}
\end{aligned} \tag{14.33}$$

Cette dernière expression peut encore être écrite sous une forme plus compacte :

$$\frac{F(y, t)}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2} = -c_1 \alpha - \left(c_1 \frac{\dot{h} + rB\dot{\alpha}}{\bar{U}} + 2c_0 \frac{\dot{p}}{\bar{U}} \right) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} F_{kl} \frac{w^k u^l}{\bar{U}^{k+l}} \tag{14.34}$$

où les quelques premières valeurs des coefficients F_{kl} sont reprises au tableau 14.3. Cette expression est une généralisation des relations 14.13 qui ont été obtenues en linéarisant les expressions exactes des forces aérodynamiques.

Réaliser une analyse avec des expressions linéarisées des efforts revient à supposer nuls tous les coefficients F_{kl} autres que F_{00} , F_{10} et F_{01} . On peut d'ailleurs vérifier que l'expression ainsi obtenue correspond bien à la relation 14.13. Lorsque l'on réalise une étude prenant en compte les termes quadratiques du chargement, on peut constater que le second terme du développement en série du coefficient aérodynamique c_2 joue un rôle non négligeable. Son influence sur la réponse structurelle peut être significatif lorsque la composante transversale de la turbulence w est importante (terme en w^2).

L'examen des coefficients repris au tableau 14.3 montre également que la prise en compte des termes d'ordre 2 du chargement ne concerne que la composante transversale de la turbulence. Les non linéarités dans les expressions des coefficients aérodynamiques se font essentiellement sentir au niveau du chargement à travers la composante transversale de la turbulence. Ceci se comprend aisément puisque les coefficients aérodynamiques agissent sur les expressions des efforts à travers l'incidence du vent qui est essentiellement conditionnée par la composante transversale de la turbulence (on peut également remarquer que son ordre en w est plus élevé que son ordre en u).

Aussi, on peut d'ores et déjà annoncer que les non linéarités des coefficients aérodynamiques ne porteront à conséquence que si c_2 est au moins de l'ordre de c_0 et/ou si c_3 est de l'ordre de c_1 . Dans le cas contraire, on n'observera pas de modification jusqu'aux ordres 2 et 3.

La relation 14.34 montre qu'en négligeant les termes d'excitation paramétrique et d'amortissement non linéaire, l'expression des forces aérodynamiques présente trois termes :

- un terme proportionnel à α . Ce terme peut passer au membre de gauche de l'équation du mouvement. Il agit toujours dans le sens d'une augmentation de la raideur torsionnelle et a donc pour effet de remonter légèrement les fréquences propres en torsion. Les ordres de grandeurs intervenant dans les problèmes rencontrés en pratique montrent cependant que ce terme a très peu d'impact ;
- un terme faisant intervenir les vitesses structurelles. Ce terme peut également passer au membre de gauche ; il contribue à une augmentation de l'amortissement du système étudié. Ce terme n'est rien d'autre que le terme d'amortissement aérodynamique que nous avons déjà introduit et dont nous avons déjà longuement discuté. Nous rappelons simplement que la principale caractéristique de cet amortissement est d'être non proportionnel ;
- la double sommation représente l'action qui peut alors être considérée comme extérieure et indépendante de la structure.

Les expressions que nous venons de développer vont nous permettre de réaliser l'étude d'une structure en champ de turbulence bidimensionnel, en conservant les termes de chargement d'ordres supérieurs. Nous pourrions par exemple juger l'importance des non linéarités des coefficients aérodynamiques.

14.4 Analyse de quelques coefficients aérodynamiques

Afin de juger de l'importance des termes non linéaires des coefficients aérodynamiques, nous allons étudier les approximations polynômiales des coefficients aérodynamiques de quelques ouvrages célèbres. A l'heure actuelle, ces coefficients sont généralement obtenus par des mesures expérimentales en soufflerie. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux provenant d'études numériques simulant l'écoulement du fluide autour de la section.

En ce qui nous concerne, nous partons d'une représentation discrète des coefficients aérodynamiques. Chacun des trois coefficients est caractérisé par 17 valeurs correspondant à des angles compris entre -10° et $+10^\circ$. L'objectif consiste à déterminer un développement polynômial de ces fonctions discrètes.

La première question que l'on peut se poser intervient au niveau d'une analyse linéaire. En effet, même pour cette analyse la plus simple, il convient également de linéariser les coefficients aérodynamiques d'une manière ou d'une autre. Ci-avant, nous avons présenté,

par simplicité, une décomposition en série de Taylor. Pratiquement, cette méthode ne présente guère d'intérêt car la forme analytique correcte des coefficients aérodynamiques est généralement inconnue et nous savons que la décomposition en série de Taylor nécessite l'expression analytique de la fonction à approcher.

Etant donné que les coefficients aérodynamiques sont des fonctions discrétisées, nous devons inévitablement recourir à une méthode numérique. Les méthodes numériques habituelles consistent par exemple à utiliser un ajustement par les moindres carrés. Étudions par exemple la linéarisation du coefficient de traînée du Viaduc de Millau à l'aide d'une méthode par les moindres carrés. Nous essayons donc de trouver les coefficients c_{d_0} et c_{d_1} qui satisfont au mieux les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} i_1 & 1 \\ i_2 & 1 \\ i_3 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ i_{17} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{d_1} \\ c_{d_0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{d_1} \\ C_{d_2} \\ C_{d_3} \\ \vdots \\ C_{d_{17}} \end{Bmatrix} \quad (14.35)$$

où $i_1, \dots, i_{17}$ et $C_{d_1}, \dots, C_{d_{17}}$ représentent les couples d'angles d'incidences et les coefficients aérodynamiques qui représentent la courbe discrétisée. Pour simplifier les notations, écrivons cette relation :

$$[A] \begin{Bmatrix} c_{d_1} \\ c_{d_0} \end{Bmatrix} = \{b\} \quad (14.36)$$

Bien sûr, ce système d'équation possède plus d'équations que d'inconnues ; il est donc surdéterminé et nécessite une méthode d'optimisation pour sa résolution. La méthode d'optimisation par les moindres carrés propose de trouver le compromis en projetant le système pour former les équations dites normales :

$$[B] [A] \begin{Bmatrix} c_{d_1} \\ c_{d_0} \end{Bmatrix} = [B] \{b\} \quad (14.37)$$

La méthode de base, consistant à associer une importance égale à chacun des points définissant la courbe impose le choix de $[B] = [A]^T$. Le système ainsi obtenu est un système 2×2 qui permet d'obtenir les paramètres c_{d_0} et c_{d_1} . Le résultat de cette linéarisation est représenté sur la gauche de la figure 14.2. On peut remarquer que la courbe ainsi obtenue représente un bon compromis sur l'ensemble du domaine.

La précision et la rigueur associables à cette méthode peuvent être remis en cause dans la mesure où l'incidence du vent, disons nulle en moyenne, varie plus souvent dans le voisinage de l'angle $i = 0^\circ$ que pour les plus hautes valeurs. On imagine donc aisément que la linéarisation devrait idéalement être réalisée en attribuant un poids à chaque point définissant la courbe à fitter. Pour de faibles intensités de turbulence, on peut montrer que la densité de probabilité de l'angle d'incidence du vent est approximativement gaussienne (voir ci-après). Nous recommandons alors de choisir une distribution des poids de pondération homothétique à la densité de probabilité, ce qui permet effectivement d'attribuer plus d'importance à l'incidence moyenne du vent. Ceci peut être réalisé assez facilement pour la méthode d'approximation par les moindres carrés. Il suffit de remplacer la matrice de projection dans les équations normales $[B]$ par

$$[B] = [A]^T [\Pi] \quad (14.38)$$

où $[\Pi]$ est une matrice diagonale de dimensions 17×17 regroupant dans l'ordre les poids associés à chaque point. Les résultats que l'on obtient ainsi sont représentés, pour le coefficient de traînée du Viaduc de Millau, à la figure 14.2. On peut constater que le choix des poids de pondération permet d'obtenir une représentation sensiblement différente. Au paragraphe suivant, nous verrons comment estimer la densité de probabilité de l'angle d'incidence. On conçoit aisément que cette grandeur peut être déterminée a priori et peut permettre la linéarisation des coefficients aérodynamiques telle qu'elle vient d'être présentée.

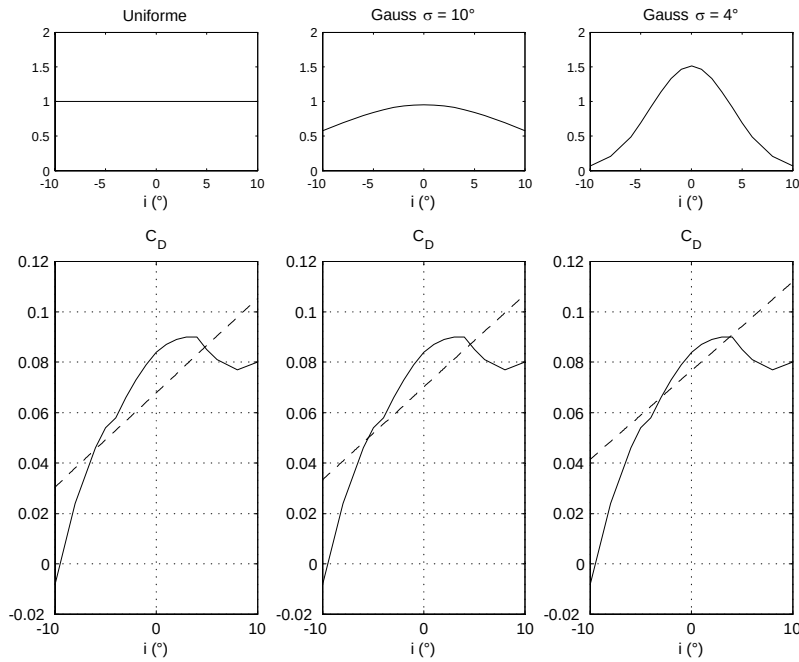


FIG. 14.2 – Illustration de la linéarisation du coefficient de traînée du Viaduc de Millau

Avant de conclure sur la méthode d'estimation des coefficients aérodynamiques linéaires, il convient encore de replacer le développement en série de Taylor par rapport à l'approche présentée. En observant la figure 14.2, on conçoit assez facilement que le développement en série de Taylor aurait donné un coefficient aérodynamique linéarisé tangent à la courbe expérimentale pour $i = i_{moyen} = 0^\circ$. Cela revient à choisir une loi de pondération avec un écart type infiniment petit, ce qui se traduit, au niveau du développement en série de Taylor par le fait que la pente de la fonction linéarisée est évaluée en i_{moyen} . On comprend ainsi que le développement en série de Taylor a été utilisé ci-avant pour simplifier la présentation. En pratique, il est impératif de recourir à une approche plus statistique telle celle qui vient d'être présentée.

L'objectif de la présente approche consiste à trouver une représentation quadratique des coefficients aérodynamiques. Une démarche tout à fait similaire, basée sur la méthode d'optimisation par les moindres carrés et la formation des équations normales, peut être mise en oeuvre pour ce problème (Fig. 14.3 et 14.4). Grâce à sa forme particulièrement profilée, le viaduc de Millau présente des coefficients de portance et de moment pratiquement linéaires. Le principal problème de l'optimisation concerne donc essentiellement

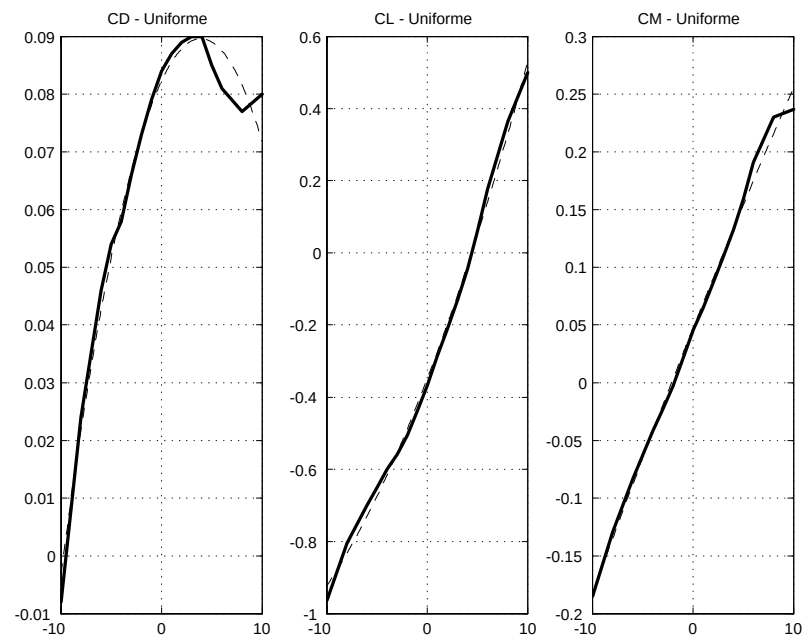


FIG. 14.3 – Illustration de l'approche du coefficient de traînée du Viaduc de Millau par une forme quadratique (pondération uniforme)

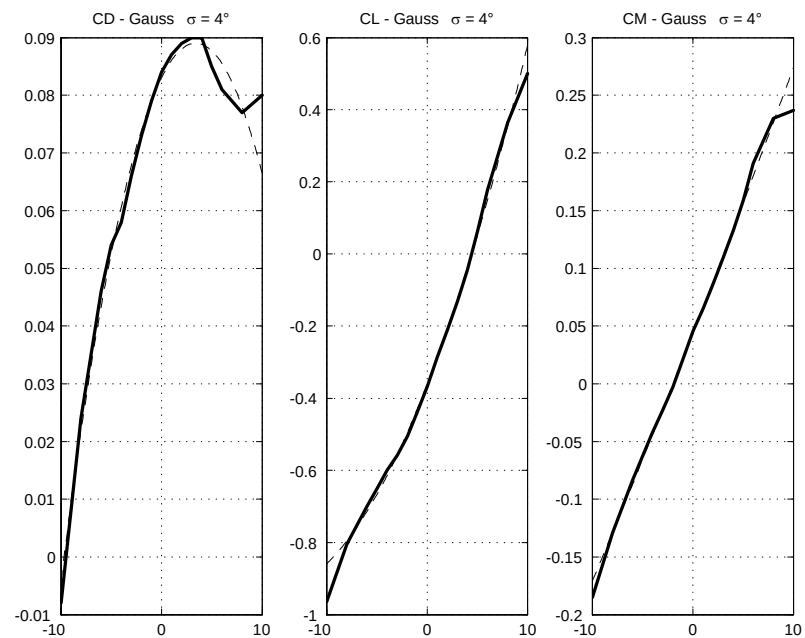


FIG. 14.4 – Illustration de l'approche du coefficient de traînée du Viaduc de Millau par une forme quadratique (pondération selon une loi gaussienne)

	Répartition uniforme			Gauss (sigma = 4 degrés)		
	DRAG	LIFT	MOMENT	DRAG	LIFT	MOMENT
c_0	0.0823	-0.3488	0.0474	0.0830	-0.3620	0.0438
c_1	0.2145	4.1633	1.2544	0.2020	4.1227	1.2729
c_2	-3.1443	9.9964	-0.7137	-3.3999	14.5994	0.5099

TAB. 14.4 – Approche polynômiale des coefficients aérodynamiques du Viaduc de Millau

	Pont de Normandie		
	DRAG	LIFT	MOMENT
c_0	0.0748	-0.4585	0.0263
c_1	0.4757	4.3574	0.9728
c_2	-0.6644	5.0495	-3.4965
c_2/c_0	-8.882	-11.014	-132.90
	Viaduc de Millau		
	DRAG	LIFT	MOMENT
c_0	0.0830	-0.3620	0.0438
c_1	0.2020	4.1227	1.2729
c_2	-3.3999	14.5994	0.5099
c_2/c_0	-40.96	-40.33	11.64
	Vasco de Gama		
	DRAG	LIFT	MOMENT
c_0	0.1337	-0.0486	0.0215
c_1	-0.1032	5.6538	0.3976
c_2	1.5434	16.86	-1.316
c_2/c_0	11.54	-346.8	-61.2

TAB. 14.5 – Comparaison des représentations polynômiales de différents coefficients aérodynamiques

la représentation du coefficient de traînée. Dans la même philosophie que celle qui a été présentée ci-avant, nous avons réalisé deux calculs : le premier considère une répartition uniforme des poids d'intégration et le second considère une répartition homothétique à une distribution gaussienne de 4° d'écart type. Les coefficients obtenus pour chacune des deux méthodes sont reportés dans le tableau 14.4.

Le tableau 14.5 présente une comparaison des coefficients c_0 , c_1 et c_2 fittés pour plusieurs coefficients aérodynamiques. La poids de pondération qui a été choisi est une répartition gaussienne avec un écart type de 4°. Ce tableau montre que les coefficients aérodynamiques du Viaduc de Millau possèdent une composante quadratique plus élevée que ceux du pont de Normandie, par exemple. Il semble donc que le Viaduc de Millau soit plus susceptible aux effets d'ordres supérieurs du chargement aérodynamique.

14.5 Statistiques de l'angle d'incidence

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu qu'il pouvait être intéressant de préciser quelque peu les caractéristiques statistiques de l'angle d'incidence. Jusqu'à ce

point, nous avons déjà donné un ordre de grandeur des angles d'incidence extrêmes qui peuvent être rencontrés; nous avons aussi évoqué une distribution de probabilité gaussienne pour représenter cette variable aléatoire. Nous allons préciser ces affirmations dans les paragraphes suivants.

L'angle d'incidence du vent s'exprime en fonction des composantes de la turbulence par :

$$i = \arctan \frac{w}{\bar{U} + u} \quad (14.39)$$

Etant donné que les densités de probabilité de ces composantes sont connues, la variable aléatoire i définie par cette relation peut donc être caractérisée statistiquement. En injectant cette relation dans la définition de la densité de probabilité de l'angle d'incidence, on obtient :

$$\begin{aligned} p_i(\alpha) &= \lim_{d\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{d\alpha} \text{prob}(i \in [\alpha; \alpha + d\alpha]) \\ p_i(\alpha) &= \lim_{d\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{d\alpha} \text{prob}\left(\frac{w}{\bar{U} + u} \in [\tan \alpha; \tan(\alpha + d\alpha)]\right) \end{aligned} \quad (14.40)$$

La zone de l'espace (u, w) qui vérifie la condition $\frac{w}{\bar{U} + u} \in [\tan \alpha; \tan(\alpha + d\alpha)]$ est représentée par la zone grisée de la figure 14.5.

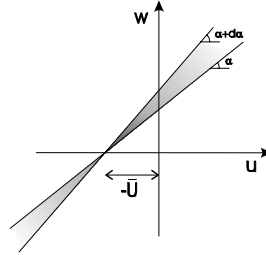


FIG. 14.5 – Représentation du domaine sur lequel il faut intégrer la densité de probabilité croisée entre u et w

La densité de probabilité de l'angle d'incidence du vent peut donc être obtenue en intégrant sur cette zone :

$$\begin{aligned} p_i(\alpha) &= \lim_{d\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{d\alpha} \left[\int_{-\infty}^{-\bar{U}} \int_{(\bar{U}+u) \tan(\alpha+d\alpha)}^{(\bar{U}+u) \tan \alpha} p_{uw}(u, w) dw du \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\bar{U}}^{+\infty} \int_{(\bar{U}+u) \tan \alpha}^{(\bar{U}+u) \tan(\alpha+d\alpha)} p_{uw}(u, w) dw du \right] \end{aligned} \quad (14.41)$$

Le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'écrire :

$$\lim_{dy \rightarrow 0} \frac{1}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+dy)} f(t) dt = \lim_{dy \rightarrow 0} f[\varphi(y)] \frac{\varphi(y+dy) - \varphi(y)}{dy} = f[\varphi(y)] \frac{d\varphi}{dy} \quad (14.42)$$

L'équation 14.41 peut donc s'écrire :

$$p_i(\alpha) = \int_{-\bar{U}}^{+\infty} p_{uw}(u, (\bar{U} + u) \tan \alpha) \frac{\bar{U} + u}{\cos^2 \alpha} du - \int_{-\infty}^{-\bar{U}} p_{uw}(u, (\bar{U} + u) \tan \alpha) \frac{\bar{U} + u}{\cos^2 \alpha} du \quad (14.43)$$

Etant donné que les composantes u et w de la turbulence sont généralement considérées comme des processus aléatoires gaussiens, la densité de probabilité conjointe entre ces deux grandeurs peut s'écrire :

$$p_{uw}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_w\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{u^2}{\sigma_u^2} - \frac{2\rho uv}{\sigma_u\sigma_w} + \frac{v^2}{\sigma_w^2}\right)} \quad (14.44)$$

La densité de probabilité de l'angle d'incidence peut alors être obtenue en introduisant cette relation dans l'équation 14.43. Le calcul de $p_i(\alpha)$ pour un niveau de corrélation ρ quelconque est assez fastidieux. On se limitera donc à calculer la densité de probabilité de l'angle d'incidence en supposant que les composantes de la turbulence sont non corrélées ($\rho = 0$), hypothèse qui de toute façon est généralement formulée en pratique.

En rebaptisant α par i puis en introduisant les intensités de turbulence plutôt que les écarts-types des composantes, la relation 14.43 devient alors :

$$p_i(i) = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_w\cos^2 i} \left[\int_{-\bar{U}}^{+\infty} (\bar{U} + u) e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{u^2}{\sigma_u^2} + \frac{(\bar{U}+u)^2 \tan^2 i}{\sigma_w^2}\right)} du - \int_{-\infty}^{-\bar{U}} (\bar{U} + u) e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{u^2}{\sigma_u^2} + \frac{(\bar{U}+u)^2 \tan^2 i}{\sigma_w^2}\right)} du \right] \quad (14.45)$$

Après un calcul assez fastidieux, on trouve finalement :

$$p_i(i) = \frac{I_w^2 e^{\frac{-1}{2} \frac{\tan^2 i}{I_w^2 + I_u^2 \tan^2 i}} \operatorname{erf} \left[\frac{I_w}{I_u} \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{I_w^2 + I_u^2 \tan^2 i}} \right]}{\sqrt{2\pi} \cos^2 i (I_w^2 + I_u^2 \tan^2 i)^{3/2}} + \frac{I_u I_w e^{\frac{-1}{2I_u^2}}}{\pi \cos^2 i (I_w^2 + I_u^2 \tan^2 i)} \quad (14.46)$$

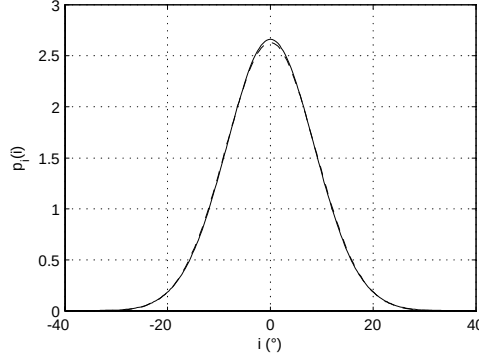
Cette relation analytique est assez peu parlante. Elle est représentée pour $I_u = I_w = 15\%$ à la figure 14.6. Sur cette figure, nous avons également reproduit la densité de probabilité gaussienne de même variance. On peut donc constater que, pour ces valeurs précises des intensités de turbulence, la densité de probabilité de l'angle d'incidence s'approche d'une répartition gaussienne.

Bien que la formulation analytique soit assez complexe, elle présente cependant l'avantage de montrer que :

- la densité de probabilité de l'angle d'incidence du vent n'est pas gaussienne. On peut également vérifier que la relation 14.46 représente bien une densité de probabilité puisqu'elle vérifie le premier axiome de Kolmogorov : $\int_{-\infty}^{+\infty} p_i(i) di = 1$;
- la densité de probabilité obtenue est une fonction paire : $p_i(i) = p_i(-i)$. Tous les moments statistiques d'ordre impair du genre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i^{2n+1} p_i(i) di \quad (14.47)$$

sont donc nuls. En particulier, la densité de probabilité est symétrique et à moyenne nulle. On pressent naturellement qu'il pourrait difficilement en être autrement.

FIG. 14.6 – Densité de probabilité de l'angle d'incidence du vent pour $I_u = I_w = 15\%$.

Au paragraphe précédent, nous avons utilisé une pondération à distribution gaussienne pour réaliser le fitting des coefficients aérodynamiques. Nous pouvons maintenant affirmer que cette distribution n'était pas tout à fait rigoureuse et aurait dû être remplacée par la relation 14.46. Même si la répartition gaussienne n'est pas vraiment stricte, il n'est resté pas moins qu'elle est très simple à appliquer et qu'elle donne des résultats avec une précision comparable à la précision sur les mesures des coefficients aérodynamiques et aux erreurs liées à leur discrétisation. Ces raisons nous ont poussé à continuer de travailler avec la répartition gaussienne.

Afin de parfaire l'équivalence entre la distribution gaussienne approchée et la distribution exacte, nous pouvons imposer un écart type identique. L'écart type de l'angle d'incidence s'obtient à partir de la relation :

$$\sigma_i^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_w^2 e^{\frac{-1}{2} \frac{\tan^2 i}{I_w^2 + I_u^2 \tan^2 i}} \operatorname{erf} \left[\frac{I_w}{I_u} \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{I_w^2 + I_u^2 \tan^2 i}} \right]}{\sqrt{2\pi} \cos^2 i (I_w^2 + I_u^2 \tan^2 i)^{3/2}} i^2 + \frac{I_u I_w e^{\frac{-1}{2I_u^2}}}{\pi \cos^2 i (I_w^2 + I_u^2 \tan^2 i)} i^2 di \quad (14.48)$$

Le calcul de cette intégrale peut être simplifié par le changement de variables :

$$x = \frac{\tan^2 i}{I_w^2 + I_u^2 \tan^2 i} \Rightarrow \frac{di}{\cos^2 i} = \frac{I_w dx}{2\sqrt{x} (1 - I_u^2 x)^{3/2}} \quad (14.49)$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\sigma_i^2 = 2 \int_0^{1/I_u^2} \left(\frac{e^{\frac{-x}{2}} \operatorname{erf} \left[\frac{\sqrt{1-I_u^2 x}}{\sqrt{2} I_u} \right]}{2\sqrt{2\pi} \sqrt{x}} + \frac{I_u e^{\frac{-1}{2I_u^2}}}{2\pi \sqrt{1 - I_u^2 x} \sqrt{x}} \right) \arctan^2 \sqrt{\frac{I_w^2 x}{1 - I_u^2 x}} dx \quad (14.50)$$

Dans cette relation, l'intégrand est encore assez compliqué, mais pour les faibles niveaux de turbulence rencontrés en pratique, on peut réaliser un développement en séries de l'arctan et négliger le second terme de la parenthèse vis-à-vis du premier :

$$\sigma_i^2 = \frac{I_w^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1/I_u^2} \sqrt{x} e^{\frac{-x}{2}} \operatorname{erf} \left[\frac{\sqrt{1 - I_u^2 x}}{\sqrt{2} I_u} \right] dx \quad (14.51)$$

Cette expression peut encore être simplifiée car la fonction erf présente une asymptote horizontale unitaire pour les grandes valeurs de son argument :

$$\sigma_i^2 = \frac{I_w^2}{\sqrt{2\pi}} 2 \int_0^{1/I_u^2} \sqrt{x} e^{-\frac{x}{2}} dx \simeq I_w^2 \quad (14.52)$$

Nous venons ainsi d'établir que l'écart type de l'angle d'incidence (en radians) correspond à l'intensité de la turbulence transversale⁵ :

$$\sigma_i = I_w \quad (14.53)$$

Cette relation peut paraître assez simpliste et éventuellement trop approchée étant donné les simplifications que nous venons de formuler. Afin d'apprécier les limites de validité de cette relation, nous avons tout de même réalisé le calcul rigoureux de l'intégrale donnant l'écart type de l'intensité de turbulence (14.48). Cette intégrale ne peut être évaluée que numériquement. Elle a été évaluée pour 200 couples d'intensités (I_u, I_w) . La figure 14.7 représente l'écart type de l'angle d'incidence ainsi obtenu. On peut constater que l'approximation $\sigma_i = I_w$ donne des résultats assez précis.

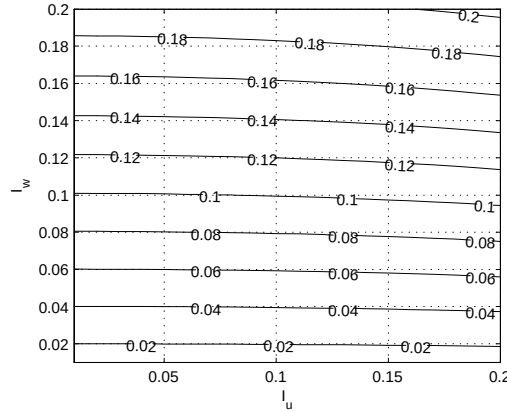


FIG. 14.7 – Ecart-type de l'angle d'incidence du vent (en radians) pour différentes intensités de turbulence

Nous pouvons également profiter de la procédure qui a servi à établir ce graphique pour calculer l'écart type de l'angle d'incidence du vent lorsque les composantes de la turbulence présentent une corrélation non nulle. Ces résultats sont présentés à la figure 14.8.

14.6 Conclusions

Ce chapitre était exclusivement dédié à l'étude de la sollicitation aérodynamique. En partant des expressions rigoureuses du chargement aérodynamique (et sous l'hypo-

⁵En remplaçant i^2 par i^4 dans la relation 14.48 et en développant alors la quatrième puissance de l'arctan, on peut établir de façon similaire que le moment d'ordre 4 peut être approché, sous les mêmes conditions, par : $m_4 \simeq 3I_w^4$. Puisque les moments d'ordre 1 et 3 sont nuls, le moment total et le moment centré d'ordre 4 correspondent ; le coefficient de kurtosis est donc approximativement égal à 3. On peut donc constater que la densité de probabilité de l'angle d'incidence est à peu près gaussienne pour les faibles angles d'incidence.

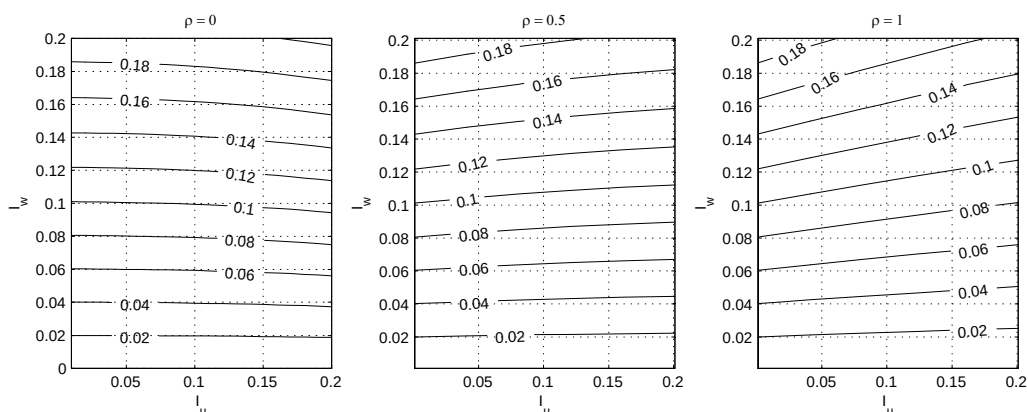


FIG. 14.8 – Ecart-type de l'angle d'incidence du vent pour différents niveaux de corrélation entre les deux composantes de la turbulence

thèse d'écoulement quasi permanent) nous avons successivement présenté les expressions rendues linéaires puis quadratiques de ce chargement. La première d'entre elles est généralement adoptée pour l'étude des structures du génie civil. Quant à la seconde, nous avons procédé à son établissement car nous possédons maintenant un code de calcul qui peut prendre en compte les termes quadratiques du chargement. Dans la suite, la comparaison des résultats obtenus à l'aide de ces deux formulations nous permettra d'estimer les effets sur la réponse structurelle des termes quadratiques de la turbulence et de la non linéarité du coefficient aérodynamique.

Si l'expression de la sollicitation est rendue quadratique, nous avons vu comment intégrer la courbure du coefficient aérodynamique pour la représentation de son comportement non linéaire. Nous avons également présenté une procédure automatique qui permet d'approcher les formes réalistes des coefficients aérodynamiques par des expressions polynômiales. La méthode utilisée est une méthode par les moindres carrés avec une répartition des poids de pondération homothétique à la densité de probabilité. Pour réaliser ceci, nous avons donc dû étudier les statistiques de l'angle d'incidence du vent. A titre de conclusions, nous pouvons retenir, à ce sujet, que l'écart type de l'angle d'incidence (exprimé en radians) peut s'exprimer en très bonne approximation par l'intensité de la composante turbulente du vent.

Chapitre 15

Calcul d'une structure en champ bidimensionnel

"I read that there is about one chance in one million that someone will board an airplane carrying a bomb, and I started carrying a bomb with me on every flight I take. The way I figure it, the odds against two people having a bomb on the same plane are 1 in a trillion"

Anonymous

15.1 Introduction

Les expressions des forces aérodynamiques qui viennent d'être établies concernent l'étude d'une structure dans un champ de turbulence bidimensionnel. Dans la partie précédente, nous avons présenté la méthode générale (à appliquer dans un contexte éléments finis) permettant de calculer les densités spectrales de forces à partir des caractéristiques aérodynamiques locales. Pour rappel, nous avons considéré que l'effort prenait une forme quadratique de la composante turbulente :

$$f_i = a_i + b_i u_i + c_i u_i^2 \quad (15.1)$$

Les coefficients du tableau 14.3 montrent qu'en cas de sollicitation aérodynamique dans un champ unidimensionnel ($k = 0$) cette expression est tout à fait générale puisque les coefficients F_{kl} pour $l > 2$ sont strictement nuls.

Dans un champ bidimensionnel, nous voyons que l'expression de la force prend la forme suivante :

$$\frac{f_i}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}_i^2} = c_{0_i} + \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}} u_i + \frac{c_{0_i}}{\bar{U}^2} u_i^2 + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}} w_i + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} u_i w_i + \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2} \right) w_i^2 \quad (15.2)$$

où les processus aléatoires u_i et w_i sont supposés être conjointement gaussiens. Cela signifie donc que les développements que nous avons présentés précédemment ne sont pas encore assez généraux. Dans ce chapitre, nous allons donc présenter, sur base de développements identiques aux développements que nous avons menés jusqu'ici, la façon de prendre en compte les efforts s'exprimant en fonction de deux composantes aléatoires.

Par rapport aux développements précédents, la seule différence concerne l'établissement des densités spectrales et des bispectres de sollicitations. Lorsque ces grandeurs seront établies, le calcul pourra continuer selon la démarche qui devrait maintenant être assimilée.

Nous ne reviendrons donc plus sur les détails de la mise en pratique. Nous profiterons des développements réalisés pour présenter une simulation assez simple qui pourrait être réalisée pour n'importe quel coefficient aérodynamique de façon à caractériser l'importance de sa composante quadratique.

15.2 Calcul des sollicitations

Dans ce paragraphe, nous allons donner les quelques lignes principales des développements que nous avons menés pour permettre la prise en compte des efforts s'exprimant en fonction de deux processus aléatoires. Nous respectons la même démarche que celle qui a été suivie depuis le début du document, à savoir la caractérisation de second ordre, puis de troisième ordre.

15.2.1 Densités spectrales des forces nodales

Nous savons maintenant que les caractéristiques croisées de second ordre entre des forces appliquées en deux noeuds différents de la structure peuvent être obtenues à partir du produit des expressions de ces deux forces :

$$\frac{f_i}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}_i^2} = c_{0i} + \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} u_i + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} u_i^2 + \frac{c_{1i}}{\bar{U}} w_i + \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} u_i w_i + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) w_i^2 \quad (15.3)$$

$$\frac{f_j}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}_j^2} = c_{0j} + \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} u_j + \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} u_j^2 + \frac{c_{1j}}{\bar{U}} w_j + \frac{c_{1j}}{\bar{U}^2} u_j w_j + \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) w_j^2 \quad (15.4)$$

En suivant le raisonnement qui devrait maintenant devenir habituel, nous pouvons estimer dans un premier temps la fonction de cross-corrélation entre ces deux efforts :

$$\frac{R_{f_i f_j}(\Delta t)}{\left(\frac{1}{2}\rho B \right)^2 \bar{U}_i^2 \bar{U}_j^2} = E \left[\frac{f_i(t) f_j(t + \Delta t)}{\left(\frac{1}{2}\rho B \right)^2 \bar{U}_i^2 \bar{U}_j^2} \right] \quad (15.5)$$

En introduisant les expressions des efforts 15.3 et 15.4 dans cette relation, puis en développant le produit, nous pouvons obtenir une expression de la fonction de cross-corrélation qui s'écrit par une somme de 36 termes (après avoir supprimé tous les moments d'ordre impair). Cette expression n'est pas reprise ici. En prenant en compte les moyennes suivantes

$$\begin{aligned}
E[u_k(t+t_2)u_j(t+t_1)] &= R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) \\
E[u_k^2(t+t_2)u_j^2(t+t_1)] &= \sigma_{u_k}^2 \sigma_{u_j}^2 + 2R_{u_k u_j}^2(t_1 - t_2) \\
E[u_i^2(t)u_j(t+t_1)u_k(t+t_2)] &= 2R_{u_i u_j}(t_1)R_{u_i u_k}(t_2) + \sigma_{u_i}^2 R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) \\
E[u_i^2(t)u_j^2(t+t_1)u_k^2(t+t_2)] &= \sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \sigma_{u_k}^2 + 8R_{u_i u_j}(t_1)R_{u_i u_k}(t_2)R_{u_j u_k}(t_1 - t_2) \\
&\quad + 2\sigma_{u_i}^2 R_{u_j u_k}^2(t_1 - t_2) + 2\sigma_{u_j}^2 R_{u_i u_k}^2(t_2) + 2\sigma_{u_k}^2 R_{u_i u_j}^2(t_1) \\
E[u_i(t)u_j(t+t_1)u_k(t+t_2)u_l(t+t_3)] &= R_{u_i u_j}(t_1)R_{u_k u_l}(t_3 - t_2) \\
&\quad + R_{u_i u_k}(t_2)R_{u_j u_l}(t_3 - t_1) + R_{u_i u_l}(t_3)R_{u_j u_k}(t_2 - t_1)
\end{aligned}$$

cette fonction de cross-corrélation peut s'exprimer à partir des fonctions d'autocorrélation des composantes de la turbulence et à partir de la fonction de corrélation croisée entre ces deux composantes. L'expression obtenue est assez lourde mais peut être simplifiée car nous savons par exemple que tous les termes constants ne contribuent pas à l'expression de la variance¹.

$$\begin{aligned}
\frac{R_{f_i f_j}(\Delta t)}{(\frac{1}{2}\rho B)^2 \bar{U}_i^2 \bar{U}_j^2} &= \frac{4c_{0_i} c_{0_j}}{\bar{U}^2} R_{u_i u_j}(\Delta t) + \frac{c_{1_i} c_{1_j}}{\bar{U}^2} R_{w_i w_j}(\Delta t) + \frac{c_{1_i} c_{0_j}}{\bar{U}^2} R_{u_i w_i}(\Delta t) \\
&\quad + \frac{2c_{0_i} c_{1_j}}{\bar{U}^2} R_{u_i w_j}(\Delta t) + \frac{2c_{1_i} c_{0_j}}{\bar{U}^2} R_{w_i u_j}(\Delta t) + \frac{c_{0_i} c_{1_j}}{\bar{U}^2} R_{u_j w_j}(\Delta t) \\
&\quad + \frac{2c_{0_i} c_{0_j}}{\bar{U}^4} R_{u_i u_j}^2(\Delta t) + 2 \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0_j} + c_{2_j}}{2\bar{U}^2} \right) R_{w_i w_j}^2(\Delta t) \\
&\quad + \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{2c_{0_j}}{\bar{U}^2} R_{w_i u_j}^2(\Delta t) + \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0_j} + c_{2_j}}{2\bar{U}^2} \right) R_{u_i w_j}^2(\Delta t) \\
&\quad + \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} (2R_{w_i u_j}(\Delta t) R_{w_i w_j}(\Delta t)) \\
&\quad + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0_j} + c_{2_j}}{2\bar{U}^2} \right) (2R_{w_j u_i}(\Delta t) R_{w_j w_i}(\Delta t)) \\
&\quad + \frac{c_{1_i} c_{0_j}}{\bar{U}^4} (2R_{u_j u_i}(\Delta t) R_{u_j w_i}(\Delta t)) + \frac{c_{0_i} c_{1_j}}{\bar{U}^4} (2R_{u_i u_j}(\Delta t) R_{u_i w_j}(\Delta t)) \\
&\quad + \frac{c_{1_i} c_{1_j}}{\bar{U}^4} (R_{u_i u_j}(\Delta t) R_{w_i w_j}(\Delta t) + R_{u_i w_j}(\Delta t) R_{w_i u_j}(\Delta t)) \quad (15.6)
\end{aligned}$$

La transformée de Fourier membre à membre de cette expression permet finalement d'obtenir l'expression de la densité spectrale croisée entre les sollicitations nodales appliquées aux noeuds i et j . Le nombre de termes de l'expression ainsi obtenue est identique à celui de la relation ci-dessus.

Pour faciliter les simplifications dans l'application de la méthode, les composantes u et w sont généralement supposées être statistiquement indépendantes. Si aucune donnée concernant cette corrélation n'est disponible, cette hypothèse est généralement formulée. Dans ce cas, la densité spectrale croisée entre les sollicitations aux noeuds i et j de la structure s'exprime par :

¹ Ces termes donneraient des fonctions de Dirac dans le domaine fréquentiel.

$$\begin{aligned}
\frac{S_{f_i f_j}(\omega)}{\left(\frac{1}{2}\rho B\right)^2 \bar{U}_i^2 \bar{U}_j^2} &= \frac{4c_{0i}c_{0j}}{\bar{U}^2} S_{u_i u_j}(\omega) + \frac{2c_{0i}c_{0j}}{\bar{U}^4} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{u_i u_j}(\omega - \omega_1) d\omega_1 \\
&+ \frac{c_{1i}c_{1j}}{\bar{U}^2} S_{w_i w_j}(\omega) + \frac{c_{1i}c_{1j}}{\bar{U}^4} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{w_i w_j}(\omega - \omega_1) d\omega_1 \quad (15.7) \\
&+ \frac{2c_{0i}c_{0j}}{\bar{U}^4} \left(1 + \frac{c_{2i}}{2c_{0i}}\right) \left(1 + \frac{c_{2j}}{2c_{0j}}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_i w_j}(\omega_1) S_{w_i w_j}(\omega - \omega_1) d\omega_1
\end{aligned}$$

On peut constater que cette expression dégénère en la relation que nous avons établie pour le champ de turbulence unidimensionnel (Eq. 10.8, p. 388) lorsque $S_{w_i w_j}(\omega)$ est supposé égal à zéro.

Cette relation est assez intéressante car elle montre que la courbure du coefficient aérodynamique (c_2) intervient comme coefficient multiplicateur d'une intégrale de convolution, c'est-à-dire d'un terme de chargement d'ordre supérieur en l'intensité de turbulence. Dans le cadre de l'analyse de l'oscillateur simple placé dans un champ de turbulence unidimensionnel, nous avons affirmé que ces termes d'ordres supérieurs pouvaient ne pas être pris en compte au vu de la forme particulière des densités spectrales de vent.

Le problème devrait maintenant être reconsidéré dans la mesure où le rapport $\frac{c_{2i}}{2c_{0i}}$ peut être substantiellement plus grand que l'unité (cf. Tab 14.5, p. 486). Contentons-nous, pour illustrer nos propos, de calculer la variance de la sollicitation appliquée en un noeud i . Cette grandeur est obtenue en intégrant la relation 15.7 sur les pulsations et en posant $i = j$:

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{m}_{2f_i}(\omega)}{\left(\frac{1}{2}\rho B\right)^2 \bar{U}_i^4} &= 4 \frac{c_{0i}^2}{\bar{U}^2} \sigma_{u_i}^2 + \frac{2c_{0i}^2}{\bar{U}^2} \frac{\sigma_{u_i}^4}{\bar{U}^2} + \frac{c_{1i}^2}{\bar{U}^2} \sigma_{w_i}^2 + \frac{c_{1i}^2}{\bar{U}^2} \frac{\sigma_{u_i}^2 \sigma_{w_i}^2}{\bar{U}^2} + \frac{2c_{0i}^2}{\bar{U}^4} \sigma_{w_i}^4 \\
&+ \frac{2c_{0i}^2}{\bar{U}^4} \left(\frac{c_{2i}}{c_{0i}} + \left(\frac{c_{2i}}{2c_{0i}} \right)^2 \right) \sigma_{w_i}^4 \quad (15.8)
\end{aligned}$$

Le rapport entre cette expression et celle qui serait obtenue en posant $c_{2i} = 0$ dans cette relation permet d'estimer l'erreur qui est commise sur l'estimation de la variance de la sollicitation lorsque le coefficient aérodynamique est linéarisé :

$$\frac{\sigma_{f_i}^2}{\sigma_{f_i \text{ lin}}^2} = 1 + \frac{1}{\bar{U}^2} \frac{\frac{c_{2i}}{2} (4c_{0i} + c_{2i}) \sigma_{w_i}^4}{4c_{0i}^2 \sigma_{u_i}^2 + 2c_{0i}^2 \frac{\sigma_{u_i}^4}{\bar{U}^2} + c_{1i}^2 \sigma_{w_i}^2 + c_{1i}^2 \frac{\sigma_{u_i}^2 \sigma_{w_i}^2}{\bar{U}^2} + \frac{2c_{0i}^2}{\bar{U}^2} \sigma_{w_i}^4} \quad (15.9)$$

Le dénominateur de cette relation peut être simplifié en supposant que l'intensité de turbulence est petite. Quant au numérateur, nous pouvons également le simplifier en supposant que c_{0i} est petit vis-à-vis de c_{2i} , ce qui est justifiable, du moins pour les coefficients aérodynamiques que nous avons présentés jusqu'ici. Avec ces simplifications, nous pouvons écrire :

$$\frac{\sigma_{f_i}^2}{\sigma_{f_i \text{ lin}}^2} \simeq 1 + \frac{1}{2\bar{U}^2} \frac{c_{2i}^2 \sigma_{w_i}^4}{4c_{0i}^2 \sigma_{u_i}^2 + c_{1i}^2 \sigma_{w_i}^2} = 1 + \frac{c_{2i}^2 I_w^2}{2 \left(\frac{4\sigma_u^2}{\sigma_w^2} c_0^2 + c_1^2 \right)} \quad (15.10)$$

Cette relation montre à nouveau que la non linéarité des coefficients aérodynamiques ne doit essentiellement être prise en compte que lorsque la structure étudiée est plongée dans un champ de turbulence bidimensionnel ($I_w \neq 0$).

A titre illustratif, pour le coefficient de traînée du viaduc de Millau, nous pouvons estimer, avec les valeurs de c_0 , c_1 et c_2 présentées au tableau 14.5 :

$$\frac{c_2^2}{2(4c_0^2 + c_1^2)} = 81.6 \quad (15.11)$$

Lorsque les intensités de turbulence longitudinale et transversale sont identiques ($\sigma_u^2 = \sigma_v^2$), l'erreur commise sur la variance de la sollicitation s'exprime donc par $81.6I_w^2$. On peut donc constater que, même lorsque l'intensité de turbulence est faible (disons $I_w = 10\%$), l'effet de courbure du coefficient de traînée est significatif (écart de 81.6%!).

Par extension des développements présentés ci-avant, l'expression 15.10 représente également l'erreur commise sur l'estimation des déplacements quasi-statiques d'un oscillateur simple. Elle pourrait donc être utilisée pour estimer l'erreur commise en linéarisant les coefficients aérodynamiques lorsque la structure étudiée est très raide ou fortement amortie. Nous préciserons ce raisonnement à l'occasion de l'étude de la réponse de la structure.

15.2.2 Bispectres des forces nodales

Les bispectres croisés entre forces appliquées en des noeuds éventuellement différents peuvent être obtenus à partir des transformées de Fourier doubles des fonctions de bicorrélation correspondantes. Ces fonctions de bicorrélation s'expriment par l'espérance mathématique du produit des trois sollicitations appliquées aux trois noeuds i , j et k de la structure :

$$\frac{f_i}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}_i^2} = c_{0i} + \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} u_i + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} u_i^2 + \frac{c_{1i}}{\bar{U}} w_i + \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} u_i w_i + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) w_i^2 \quad (15.12)$$

$$\frac{f_j}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}_j^2} = c_{0j} + \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} u_j + \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} u_j^2 + \frac{c_{1j}}{\bar{U}} w_j + \frac{c_{1j}}{\bar{U}^2} u_j w_j + \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) w_j^2 \quad (15.13)$$

$$\frac{f_k}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}_k^2} = c_{0k} + \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} u_k + \frac{c_{0k}}{\bar{U}^2} u_k^2 + \frac{c_{1k}}{\bar{U}} w_k + \frac{c_{1k}}{\bar{U}^2} u_k w_k + \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) w_k^2 \quad (15.14)$$

soit,

$$\frac{B_{f_i f_j}(\Delta t_1 \Delta t_2)}{(\frac{1}{2}\rho B)^2 \bar{U}_i^2 \bar{U}_j^2} = E \left[\frac{f_i(t) f_j(t + \Delta t_1) f_k(t + \Delta t_2)}{(\frac{1}{2}\rho B)^3 \bar{U}_i^3 \bar{U}_j^3} \right] \quad (15.15)$$

Les développements qui permettent de simplifier cette expression sont assez longs. Comme pour toutes les étapes précédentes, nous invoquons, pour cette simplification, la propriété qui établit que les moments d'ordre impair de processus aléatoires gaussiens sont nuls. Aussi, dès le début des développements, nous nous sommes permis de supprimer toutes les contributions au bispectre qui s'expriment par des fonctions de Dirac de façon à ainsi obtenir une expression du bispectre croisé qui représente un moment centré et non pas un moment total.

Les développements sont repris de façon exhaustive à l'annexe F. Tous calculs faits, et après simplifications, le bispectre croisé entre les forces s'appliquant aux noeuds i , j et k de la structure s'exprime par :

$$\begin{aligned}
& D_{f_i f_j f_k}(\omega_1, \omega_2) \\
= & \frac{2c_{1_i} c_{0_j} c_{1_k}}{\bar{U}^4} (S_{u_j u_k}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_1 + \omega_2) + S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2)) \\
& + \frac{2c_{0_i} c_{1_j} c_{1_k}}{\bar{U}^4} (S_{u_i u_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_1) + S_{u_i u_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_2)) \\
& + \frac{2c_{1_i} c_{1_j} c_{0_k}}{\bar{U}^4} (S_{u_j u_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1 + \omega_2) + S_{u_i u_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1)) \\
& + \frac{8c_{0_i} c_{0_j} c_{0_k}}{\bar{U}^4} (S_{u_i u_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_j u_k}(\omega_1) + S_{u_i u_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_j u_k}(\omega_2) + S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{u_i u_k}(\omega_2)) \\
& + \frac{c_{1_i} c_{1_j} (2c_{0_k} + c_{2_k})}{\bar{U}^4} S_{w_i w_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_1) \\
& + \frac{(2c_{0_i} + c_{2_i}) c_{1_j} c_{1_k}}{\bar{U}^4} S_{w_i w_j}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2) + \frac{c_{1_i} (2c_{0_j} + c_{2_j}) c_{1_k}}{\bar{U}^4} S_{w_i w_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_2) \\
& + \frac{2c_{1_i} c_{1_j} c_{0_k}}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) S_{u_j u_k}(\omega) S_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) d\omega \\
& + \frac{2c_{1_i} c_{0_j} c_{1_k}}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) S_{u_j u_k}(\omega) S_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) d\omega \\
& + \frac{2c_{0_i} c_{1_j} c_{1_k}}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) S_{w_j w_k}(\omega) d\omega \\
& + \frac{(2c_{0_i} + c_{2_i}) c_{1_j} c_{1_k}}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) S_{u_j u_k}(\omega) d\omega \\
& + \frac{c_{1_i} (2c_{0_j} + c_{2_j}) c_{1_k}}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) S_{w_j w_k}(\omega) S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) d\omega \\
& + \frac{c_{1_i} c_{1_j} (2c_{0_k} + c_{2_k})}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) S_{w_j w_k}(\omega) S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) d\omega \\
& + \frac{8c_{0_i} c_{0_j} c_{0_k}}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) S_{u_j u_k}(\omega) S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) d\omega \\
& + \frac{(2c_{0_i} + c_{2_i}) (2c_{0_j} + c_{2_j}) (2c_{0_k} + c_{2_k})}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) S_{w_j w_k}(\omega) S_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) d\omega \quad (15.16)
\end{aligned}$$

Dans cette relation interviennent des termes de chargement d'ordre différents en les intensités de turbulence. La raisonnement que nous venons de mener dans le cadre de l'étude des densités spectrales nous a montré que ces termes occupent désormais une

place importante. Un raisonnement identique (mais un peu plus long) montrerait que ces termes ne peuvent plus être négligés.

De cette relation assez générale, nous pouvons tirer les expressions des bispectres unidimensionnels des forces appliquées en chacun des noeuds. Pour ce faire, il suffit de poser $i = j = k$. On peut vérifier assez facilement que si la composante transversale w est nulle, l'expression alors obtenue se réduit également à l'expression qui a été présentée au chapitre précédent, lors de l'étude des sollicitations dans un champ de turbulence unidimensionnel. (Eq. 10.33, p. 395).

Il pourrait être assez intéressant de calculer le moment statistique centré d'ordre 3 de la sollicitation qui s'applique en un noeud de la structure plongée dans un champ de turbulence bidimensionnel. Pour ce faire, il suffit d'intégrer le bispectre de la sollicitation ($i = j = k$) sur le domaine des pulsations. Cette intégration est relativement simple et permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{m}_{3f_i}}{\left(\frac{1}{2}\rho B\right)^3 \bar{U}_i^6} \\ &= \frac{2c_{0i}c_{1i}^2}{\bar{U}^4} \left(6\sigma_{u_i}^2\sigma_{w_i}^2 + \frac{3\sigma_{u_i}^4\sigma_{w_i}^2}{\bar{U}^2}\right) + \frac{8c_{0i}^3}{\bar{U}^4} \left(3\sigma_{u_i}^4 + \frac{\sigma_{u_i}^6}{\bar{U}^2}\right) \\ &+ \frac{c_{1i}^2(2c_{0i} + c_{2i})}{\bar{U}^4} \left(3\sigma_{w_i}^4 + \frac{3\sigma_{u_i}^2\sigma_{w_i}^4}{\bar{U}^2}\right) + \frac{(2c_{0i} + c_{2i})^3}{\bar{U}^6} \sigma_{w_i}^6 \end{aligned} \quad (15.17)$$

En rapportant cette expression à celle du moment centré de second ordre (Eq. 15.8), nous pouvons finalement obtenir une expression du coefficient de dissymétrie de la sollicitation appliquée au noeud i de la structure étudiée :

$$\begin{aligned} \gamma_{3f_i} &= \frac{\frac{\tilde{m}_{3f_i}}{\left(\frac{1}{2}\rho B\right)^3 \bar{U}_i^6}}{\left(\frac{\tilde{m}_{2f_i}(\omega)}{\left(\frac{1}{2}\rho B\right)^2 \bar{U}_i^4}\right)^{3/2}} \quad (15.18) \\ &= \frac{\frac{2c_{0i}c_{1i}^2}{\bar{U}^4} \left(6\sigma_{u_i}^2\sigma_{w_i}^2 + \frac{3\sigma_{u_i}^4\sigma_{w_i}^2}{\bar{U}^2}\right) + \frac{8c_{0i}^3}{\bar{U}^4} \left(3\sigma_{u_i}^4 + \frac{\sigma_{u_i}^6}{\bar{U}^2}\right)}{\left[\frac{2c_{0i}^2}{\bar{U}^2} \left(2\sigma_{u_i}^2 + \frac{\sigma_{u_i}^4}{\bar{U}^2}\right) + \frac{c_{1i}^2}{\bar{U}^2} \left(\sigma_{w_i}^2 + \frac{\sigma_{u_i}^2\sigma_{w_i}^2}{\bar{U}^2}\right) + \frac{2c_{0i}^2}{\bar{U}^4} \left(1 + \frac{c_{2i}}{2c_{0i}}\right)^2 \sigma_{w_i}^4\right]^{3/2}} \\ &+ \frac{\frac{c_{1i}^2(2c_{0i} + c_{2i})}{\bar{U}^4} \left(3\sigma_{w_i}^4 + \frac{3\sigma_{u_i}^2\sigma_{w_i}^4}{\bar{U}^2}\right) + \frac{(2c_{0i} + c_{2i})^3}{\bar{U}^6} \sigma_{w_i}^6}{\left[\frac{2c_{0i}^2}{\bar{U}^2} \left(2\sigma_{u_i}^2 + \frac{\sigma_{u_i}^4}{\bar{U}^2}\right) + \frac{c_{1i}^2}{\bar{U}^2} \left(\sigma_{w_i}^2 + \frac{\sigma_{u_i}^2\sigma_{w_i}^2}{\bar{U}^2}\right) + \frac{2c_{0i}^2}{\bar{U}^4} \left(1 + \frac{c_{2i}}{2c_{0i}}\right)^2 \sigma_{w_i}^4\right]^{3/2}} \\ &= 3I_{u_i} \frac{1 + \frac{I_{u_i}^2}{3} + \frac{c_{1i}^2}{4c_{0i}^2} \frac{I_{w_i}^2}{I_{u_i}^2} (2 + I_{u_i}^2) + \frac{c_{1i}^2}{4c_{0i}^2} \left(1 + \frac{c_{2i}}{2c_{0i}}\right) \frac{I_{w_i}^4}{I_{u_i}^4} (1 + I_{u_i}^2) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{c_{2i}}{2c_{0i}}\right)^3 \frac{I_{w_i}^6}{I_{u_i}^6}}{\left[1 + \frac{I_{u_i}^2}{2} + \frac{c_{1i}^2}{4c_{0i}^2} \frac{I_{w_i}^2}{I_{u_i}^2} (1 + I_{u_i}^2) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c_{2i}}{2c_{0i}}\right)^2 \frac{I_{w_i}^4}{I_{u_i}^4}\right]^{3/2}} \end{aligned}$$

De nouveau, si la composante transversale de la turbulence w est nulle, nous pouvons retrouver l'expression du coefficient de symétrie obtenu précédemment ($\gamma_{3f_i} \simeq 3I_{u_i}$). Cette relation est assez importante car nous savons que les coefficients de dissymétrie des

déplacements (et donc également aussi des efforts internes) de la structure sont limités par les coefficients de dissymétrie des sollicitations. Connaître ces caractéristiques de la sollicitation permet donc d'obtenir le comportement limite (en dissymétrie) que la structure pourrait présenter. Nous savons maintenant que ce comportement limite peut se présenter lorsque la structure est très raide ou fortement amortie.

La relation 15.18 montre que la composante transversale de la turbulence peut modifier assez significativement le coefficient de dissymétrie de la sollicitation appliquée. Les effets de chacun des paramètres intervenant dans cette relation sont difficilement interprétables mais il est sûr que, pour les faibles intensités de turbulence, si le rapport $\frac{c_{2i}}{c_{0i}}$ est négatif, le coefficient de dissymétrie de la sollicitation se trouve alors inévitablement diminué lorsque le champ de sollicitation est bidimensionnel.

Les valeurs des coefficients c_0 , c_1 et c_2 que nous avons données au tableau 14.5 pour les différents coefficients aérodynamiques de plusieurs ponts peuvent être utilisées pour estimer les effets de la courbure de ces coefficients (en fonction de l'angle d'incidence). L'estimation des rapports $\frac{c_{2i}}{c_{0i}}$ pour chacun de ces neuf coefficients aérodynamiques montre que seuls le coefficient de moment du Viaduc de Millau et le coefficient de traînée du pont Vasco de Gama semblent pouvoir engendrer des coefficients de dissymétrie plus importants en présence d'un champ de turbulence bidimensionnel. Ceci peut être constaté à la figure 15.1 qui représente les coefficients de dissymétrie que l'on peut associer à différents coefficients aérodynamiques.

L'interprétation des graphiques de la figure 15.1 peut débiter en considérant l'axe $I_w = 0$ sur chacun de ces graphiques. Cet axe correspond à un champ de turbulence unidimensionnel et l'on peut donc retrouver la relation² $\gamma_{3f_i} \simeq 3I_u$.

Lorsque l'intensité de turbulence transversale est faible, les coefficients sont légèrement modifiés. Cela peut se justifier par le fait que les courbes de niveaux rencontrent perpendiculairement l'axe $I_w = 0$. Pour des intensités de turbulence transversale plus importantes mais aussi plus réalistes, nous pouvons constater que le coefficient de dissymétrie de la sollicitation dépend fortement de la forme du coefficient aérodynamique.

Les formes caractéristiques obtenues pour le coefficient de moment du Viaduc de Millau et pour le coefficient de traînée du pont Vasco de Gama sont assez typiques. Cette cambrure des courbes de niveaux vers le bas peut s'expliquer par le fait que le rapport $\frac{c_{2i}}{c_{0i}}$ est négatif.

L'examen de ces courbes de niveaux doit aussi inévitablement passer l'observation de la courbe de niveau nul (en gras). Cette courbe passe par l'origine des axes car nous savons que si la structure se trouve plongée dans un écoulement sans turbulence, la réponse est alors gaussienne. Cette courbe de niveau sépare l'espace des couples (I_u, I_w) en deux parties : dans l'une, les sollicitations présentent des coefficients de dissymétrie positifs et les grandeurs extrémales sont donc plus grandes que si le processus était gaussien ; dans l'autre, les sollicitations sont asymétriques avec une tendance à l'étalement vers le bas. Ce dernier cas est bien sûr favorable pour l'étude des grandeurs extrêmes.

L'observation des courbes de niveaux relatives au tablier du pont de Normandie montrent que ce design est assez attractif car, pour les situations réalistes où les intensités de turbulence longitudinale et transversale sont du même ordre de grandeur, les sollicitations peuvent plus ou moins être considérées comme gaussiennes (à l'ordre 3).

²Cette relation est approximative car nous avons pris en compte les termes de second ordre en I_u dans le chargement.

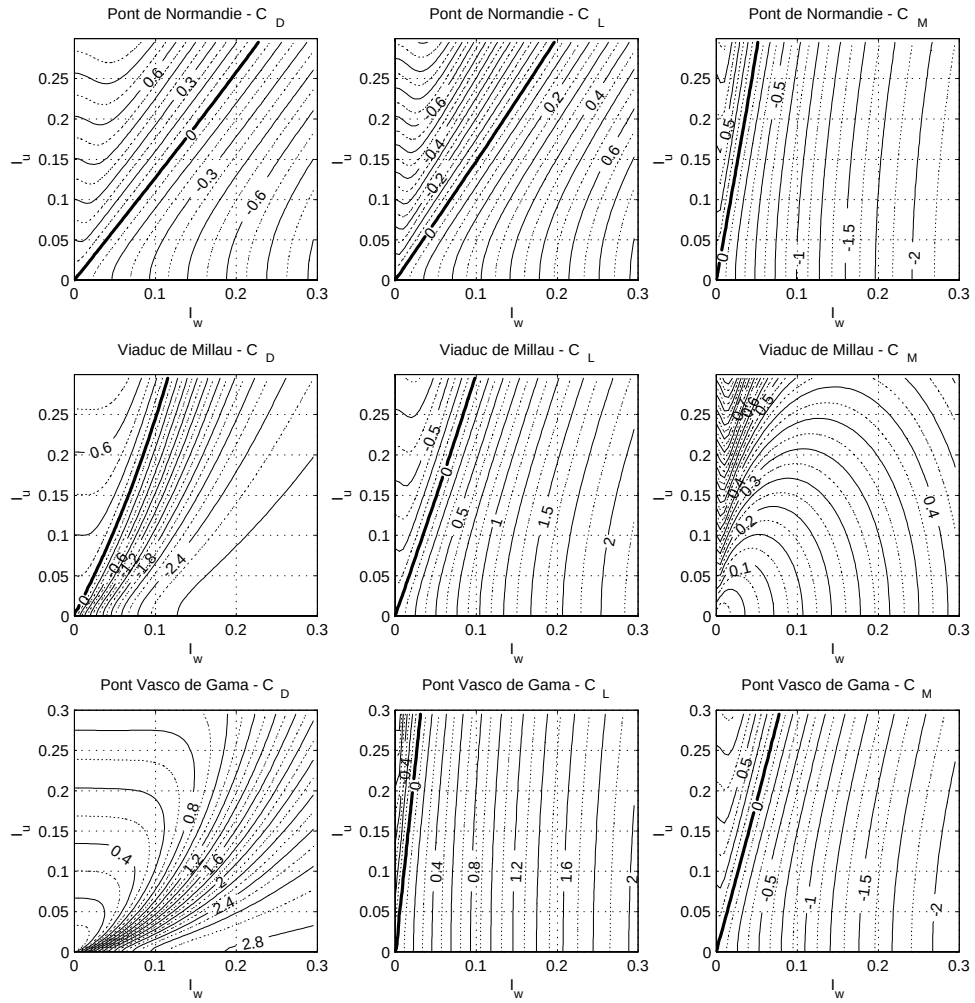


FIG. 15.1 – Coefficients de dissymétrie de la sollicitation aérodynamique pour différents coefficients aérodynamique et différentes intensités de turbulence

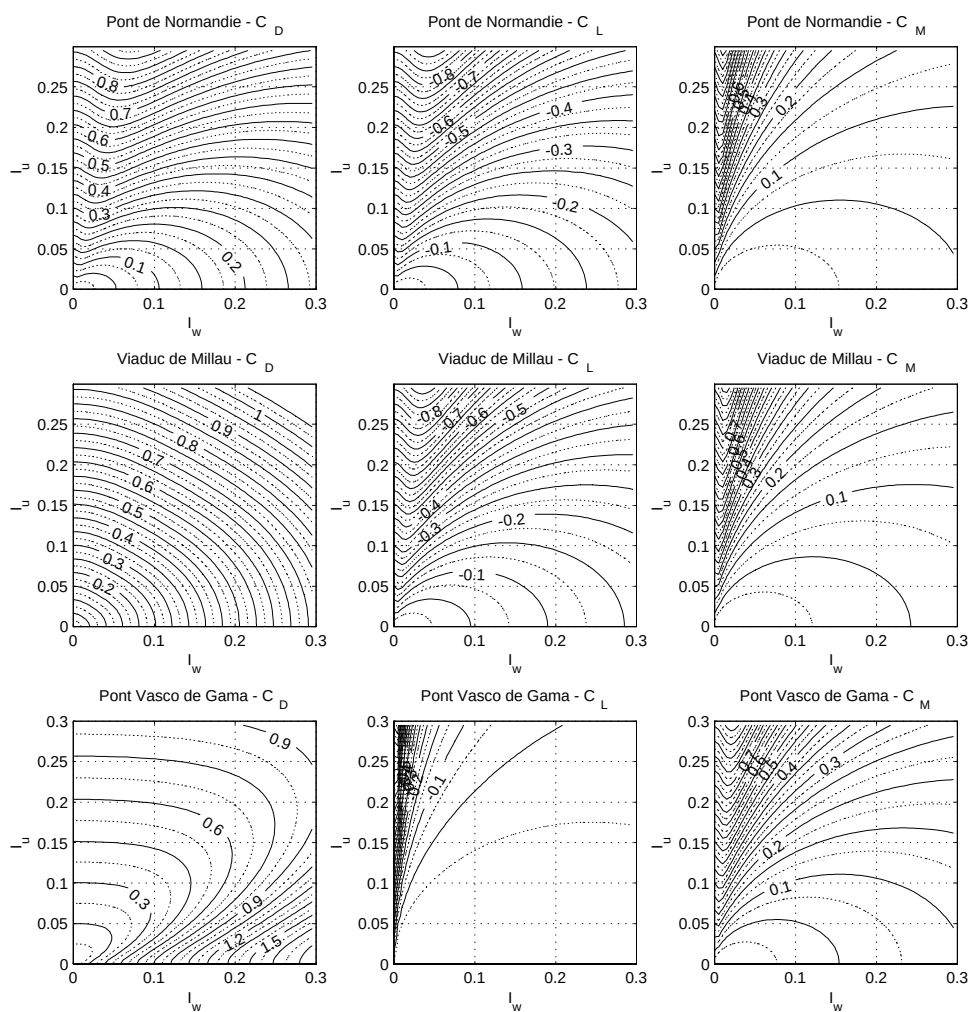


FIG. 15.2 – Coefficients de dissymétrie de la sollicitation aérodynamique pour différents coefficients aérodynamiques linéarisés ($c_2 = 0$) et différentes intensités de turbulence

Cela signifie donc également que l'étude de la structure peut se limiter à une étude au second ordre.

Le design du viaduc de Millau peut aussi être attractif dans la mesure où, pour la traînée, la bissectrice $I_u = I_w$ se trouve dans une zone à dissymétrie négative ; or nous savons que cet aspect peut être intéressant en termes de grandeurs extrémales. Une analyse au troisième ordre est cependant nécessaire pour prendre en compte ces effets bénéfiques.

La figure 15.2 représente les mêmes grandeurs que celles de la figure 15.1 à la différence près que cette nouvelle figure a été tracée en imposant $c_2 = 0$. La dissemblance évidente entre ces deux figures montrent que les non linéarités des coefficients aérodynamiques modifient fortement les coefficients de dissymétrie des sollicitations appliquées à la structure.

Dans le paragraphe suivant, nous proposons une méthodologie qui devrait permettre d'estimer les effets des non linéarités des coefficients aérodynamiques sur la réponse de la structure dans un champ de turbulence bidimensionnel.

15.3 Analyse d'un oscillateur simple

Dans ce paragraphe, nous allons procéder à l'estimation des effets, sur la réponse d'une structure, des non linéarités du chargement aérodynamique. Dans le cadre du dimensionnement d'une nouvelle structure, l'exemple simple que nous allons présenter (sous forme d'une étude paramétrique) devrait être répété pour les nouveaux coefficients aérodynamiques. Ce genre d'analyse devrait permettre d'avoir une idée des effets de la non linéarité du chargement sur la réponse de la structure.

La structure que nous étudions est un oscillateur à un degré de liberté plongé dans un champ de turbulence bidimensionnel. Deux sollicitations sont successivement considérées pour cette structure. La première consiste en la sollicitation aérodynamique non linéaire exacte jusqu'au terme de second ordre dans les coefficients aérodynamiques :

$$\frac{f}{\frac{1}{2}\rho B\bar{U}^2} = c_0 + \frac{2c_0}{\bar{U}}u + \frac{c_0}{\bar{U}^2}u^2 + \frac{c_1}{\bar{U}}w + \frac{c_1}{\bar{U}^2}uw + \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2}\right)w^2 \quad (15.19)$$

Afin d'étudier l'effet de la non linéarité du coefficient aérodynamique, le second chargement considéré est :

$$\frac{f}{\frac{1}{2}\rho B\bar{U}^2} = c_0 + \frac{2c_0}{\bar{U}}u + \frac{c_0}{\bar{U}^2}u^2 + \frac{c_1}{\bar{U}}w + \frac{c_1}{\bar{U}^2}uw + \frac{c_0}{\bar{U}^2}w^2 \quad (15.20)$$

Les composantes u et w de la turbulence sont supposées être des processus aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck avec $\alpha = 0.2rad/s$. La vitesse moyenne du vent $\bar{U}$ est fixée à $10m/s$. Les intensités de turbulence dans les deux directions seront supposées être identiques et variables entre $I_u = I_w = 0$ et $I_u = I_w = 20\%$.

Pour chacun de ces deux chargements³, nous allons réaliser l'étude de la réponse de l'oscillateur simple dans le domaine fréquentiel au second et au troisième ordres. Cette

³Notons que la différence entre ces deux chargements est identique à celle entre les deux figures 15.1 et 15.2.

étude est réalisée à l'aide des méthodes présentées aux chapitres précédents : distribution optimale des points d'intégration au second ordre, méthode de maillage de l'espace bidimensionnel des pulsations⁴ ...

Nous avons choisi de procéder à l'analyse du coefficient de traînée du viaduc de Millau. Pour rappel, les coefficients c_0 , c_1 et c_2 que nous avons pu identifier sur le coefficient aérodynamique sont :

$$c_0 = 0.0830 \quad ; \quad c_1 = 0.2020 \quad ; \quad c_2 = -3.3999 \quad (15.21)$$

Une première analyse assez simpliste de ces coefficients nous a montré que l'allure non linéaire de ce coefficient aérodynamique semble porter à conséquences. Au second ordre et en ce qui concerne la sollicitation, nous avons montré que la courbure du coefficient aérodynamique pouvait augmenter sensiblement la variance de la sollicitation (Equ. 15.10). Quant à l'étude au troisième ordre, nous savons que la force aérodynamique devrait présenter une forte dissymétrie négative (Fig. 15.1).

15.3.1 Réponse de la structure au second ordre

En termes des déplacements structuraux, il n'y a aucune raison que ces premières observations, qui certes peuvent éventuellement être mitigées, ne soient plus valables. Les graphiques de la figure 15.3 représentent, pour différents taux d'amortissement structuraux et pour différentes pulsations propres, le rapport entre les variances du déplacement structural obtenues en conservant ou en négligeant le terme de chargement en c_2 . Sur ces graphiques, les courbes en traits pointillés représentent l'erreur qui serait commise si la réponse était purement quasi-statique, c'est-à-dire l'erreur commise sur la sollicitation (Eq. 15.10).

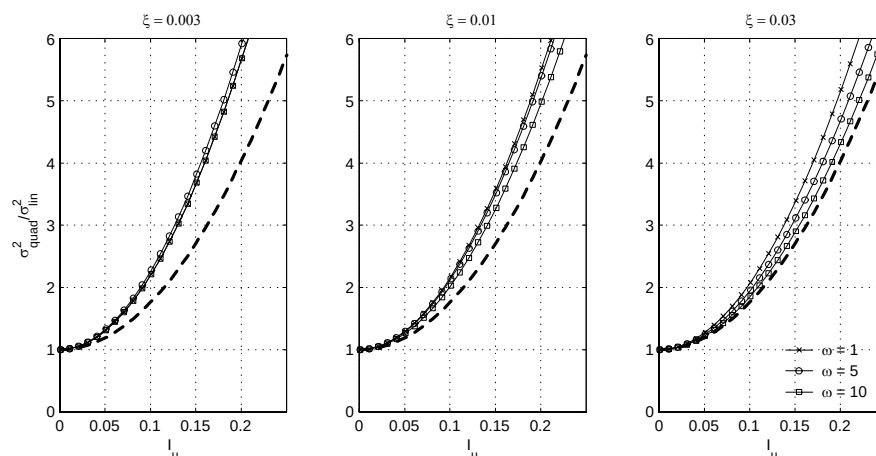


FIG. 15.3 – Rapport entre la variance du déplacement calculée pour un coefficient aérodynamique non linéaire et la variance calculée pour un coefficient linéarisé

Sur ce graphique, on peut constater que l'erreur commise sur la réponse quasi-statique est une borne inférieure de l'erreur commise sur la réponse complète. Les résultats de

⁴Le calcul a été réalisé à l'aide du code de calcul le plus général qui permet l'étude de structures à plusieurs degrés de liberté. Le maillage de l'espace des fréquences a donc eu lieu sur un demi-espace.

cette figure peuvent sembler inquiétants car ils montrent que la variance obtenue en linéarisant le coefficient aérodynamique peut sous-estimer d'un facteur 3 à 4 la variance qui serait obtenue en conservant le terme de chargement en c_2 .

Ceci peut également être observé sur les formes des densités spectrales de puissance. La figure 15.4 représente les densités spectrales des déplacements obtenus pour les deux chargements et pour un des oscillateurs étudiés. On peut retrouver, sur cette figure, l'erreur commise dans le domaine des basses fréquences et provenant de la sollicitation directement, ainsi que l'erreur commise dans le voisinage du pic de résonance où la sollicitation est plus faible lorsque le terme de chargement en c_2 est négligé.

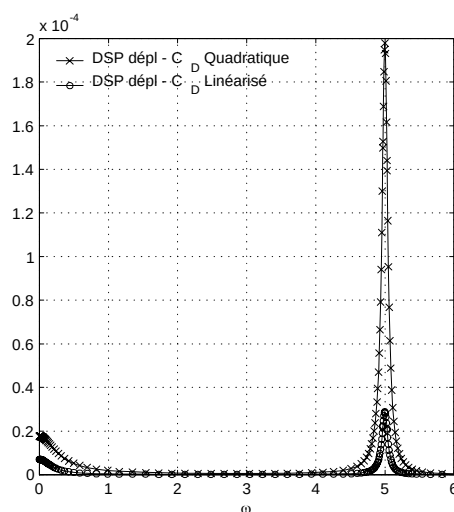


FIG. 15.4 – Densités spectrales de déplacements de l'oscillateur ($\varpi = 5 \text{ rad/s}$, $\xi = 0.01$) pour les deux chargements étudiés

Les relations analytiques que nous avons développées ci-avant (Eq. 15.10) montrent que négliger ce terme de chargement ne peut engendrer qu'une sous-estimation de la contribution quasi-statique, que le coefficient c_2 soit positif ou négatif; nous venons de voir également que l'écart sur le déplacement de l'oscillateur est encore plus important. Il pourrait a priori sembler illogique d'obtenir une telle différence entre les réponses incluant ou non la non linéarité du coefficient aérodynamique. Cet écart provient de l'hypothèse d'incohérence entre les deux composantes u et w de la turbulence. En corollaire, si la cohérence entre les deux composantes u et w était prise en compte de façon plus réaliste, les effets de la non linéarité du coefficient aérodynamique seraient certainement moins marqués. A l'heure actuelle, il est rare que la cohérence entre ces composantes soit prise en compte.

15.3.2 Réponse de la structure au troisième ordre

L'étude paramétrique que nous venons de mener au second ordre peut également être entreprise au troisième ordre. Pour le coefficient aérodynamique de traînée du viaduc de Millau, et pour plusieurs structures caractérisées par des taux d'amortissement et des pulsations propres différents, nous avons réalisé, pour différentes intensités de turbulence,

le calcul des coefficients de dissymétrie de la réponse.

Tout comme à l'ordre 2, l'étude a été limitée aux champs de turbulence présentant les mêmes intensités dans les deux directions. Afin de mieux de représenter les caractéristiques de dissymétrie de la sollicitation, nous avons réalisé une coupe des graphiques adéquats des figures 15.1 et 15.2 selon la bissectrice $I_w^2 = I_u^2$. Les courbes obtenues sont représentées à la figure 15.5. On peut éventuellement mieux se rendre compte de l'importance du terme non linéaire c_2 de l'expression du coefficient aérodynamique.

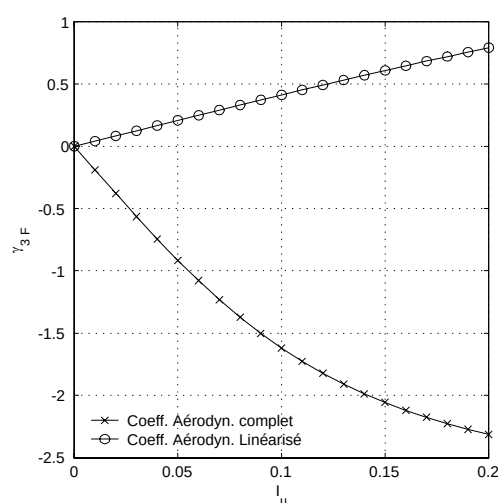


FIG. 15.5 – Coefficients de dissymétrie de la sollicitation pour des intensités de turbulence identiques, avec ou sans le terme non linéaire du coefficient aérodynamique (C_D Millau)

Les graphiques de la figure 15.6 représentent les résultats de l'étude paramétrique sur les coefficients de dissymétrie de la réponse de l'oscillateur simple. Assez logiquement, on peut retrouver un comportement asymptotique vers les coefficients de dissymétrie de la sollicitation, pour les structures très raides ou fortement amorties. Les graphiques de cette figure permettent de mettre en évidence la transition de la réponse depuis un comportement gaussien (structure souple, non amortie, ou intensité de turbulence faible) vers un comportement non gaussien identique à la sollicitation.

A titre d'illustration, les figures 15.7 et 15.8 représentent les bispectres des déplacements de l'oscillateur simple pour les deux types de chargement. Sur ces graphiques, on peut identifier les contributions au bispectre provenant de la sollicitation. La comparaison des figures obtenues montre de nouveau que la sollicitation est complètement différente lorsque le coefficient aérodynamique est linéarisé.

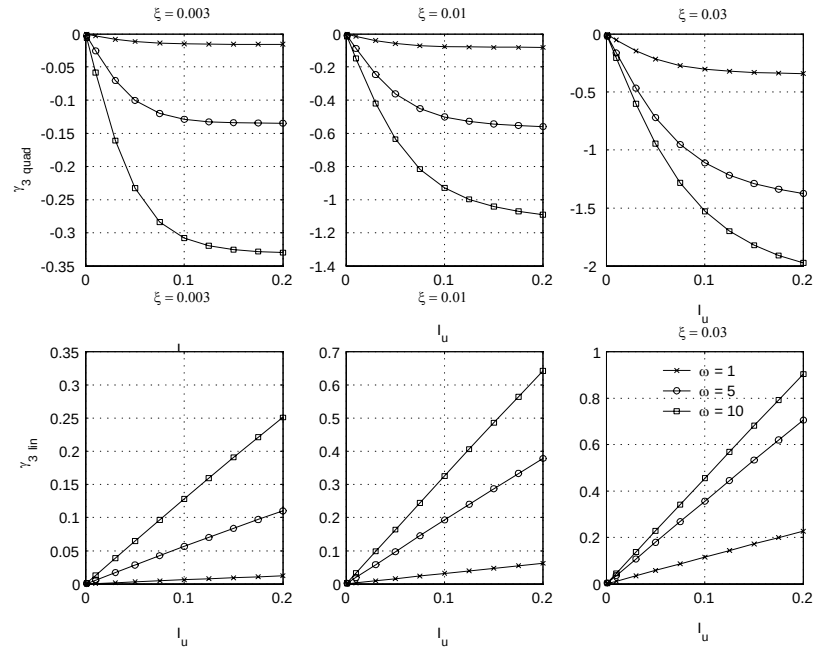


FIG. 15.6 – Etude paramétrique des coefficients de dissymétrie de la réponse de l'oscillateur. Ligne supérieure : expression quadratique du coefficient aérodynamique ; ligne inférieure : coefficient aérodynamique linéarisé.

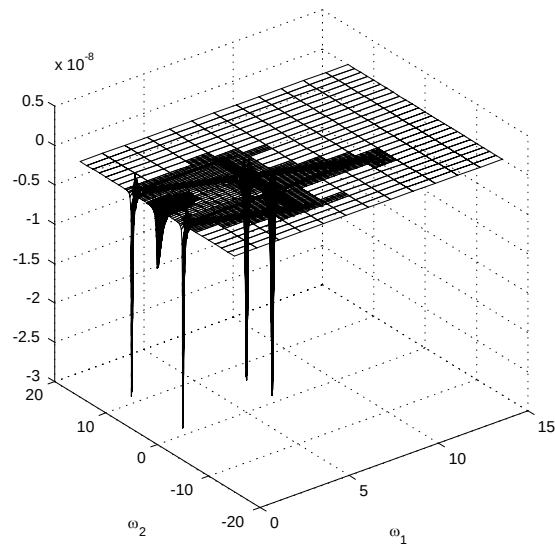


FIG. 15.7 – Bispectre du déplacement de l'oscillateur simple ($\varpi = 5 \text{ rad/s}$; $\xi = 0.01$) obtenu en conservant la forme quadratique du chargement

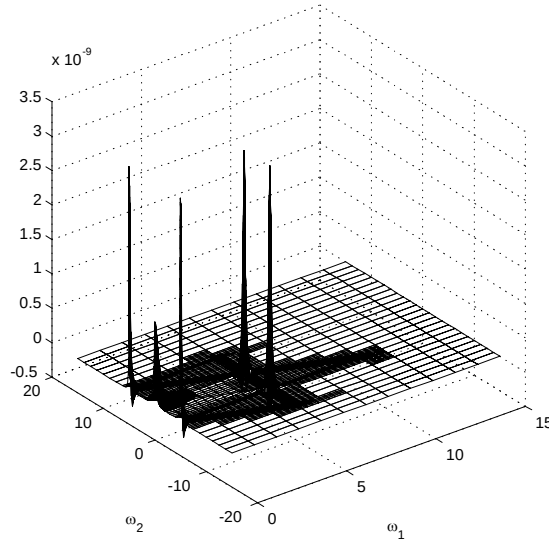


FIG. 15.8 – Bispectre du déplacement de l'oscillateur simple ($\varpi = 5 \text{ rad/s}$; $\xi = 0.01$) obtenu en linéarisant le coefficient aérodynamique

15.3.3 Validation à l'aide d'une étude par simulations de Monte Carlo

Afin de valider les développements précédents, nous avons réalisé une étude par simulations de Monte Carlo, toujours en conservant les deux chargements différents ($c_2 \neq 0$ et $c_2 = 0$). Etant donné que cette méthode d'analyse demande un temps de calcul substantiellement plus élevé, l'entière de l'étude paramétrique n'a pas été reproduite par simulations de Monte Carlo. Nous nous contentons d'étudier l'oscillateur dont les caractéristiques sont :

$$\varpi = 5 \text{ rad/s} \quad ; \quad \xi = 0.01 \quad (15.22)$$

et plongé dans un champ de turbulence bidimensionnel dont les intensités de turbulence sont $I_u = I_w = 10\%$.

Etant donné que les deux composantes de la turbulence u et w sont indépendantes, ces deux signaux peuvent être générés séparément avant d'être regroupés pour former l'évolution au cours du temps de la sollicitation de l'oscillateur. L'application des critères présentés au chapitre 6 nous a permis de choisir des échantillons de 20000 pas de temps de $\Delta t = 0.0838 \text{ s}$.

A la figure 15.9, nous avons représenté trois échantillons de sollicitations obtenus selon les différentes méthodes que nous étudions :

- le premier correspond à l'échantillon de force obtenu en conservant une expression quadratique pour le coefficient aérodynamique (Equ. 15.19) ;
- le second représente l'échantillon de sollicitation obtenu en linéarisant le coefficient aérodynamique (de traînée du viaduc de Millau) (Equ. 15.20) ;
- le troisième échantillon représente la sollicitation que l'on aurait obtenue en négligeant les termes non linéaire du chargement. Cela signifie donc que nous sommes partis de la relation 15.20 et que nous avons supprimé les termes non linéaires de sorte à garder $\frac{f}{\frac{1}{2}\rho B U^2} = c_0 + \frac{2c_0}{U}u + \frac{c_1}{U}w$.

La comparaison (visuelle) de ces trois signaux montre que les seuls effets des termes non linéaires du chargement concernent la non linéarité du coefficient aérodynamique étudié. Dans la suite de la présentation, nous ne continuerons donc qu'avec les deux signaux de forces qui correspondent aux sollicitations utilisées jusqu'ici.

Sur ces graphiques, on peut également retrouver les pics vers le bas dans le premier signal qui témoignent d'un coefficient de dissymétrie négatif. Pour les deux autres signaux, on devine des pointes vers le haut, ce qui indique une dissymétrie positive.

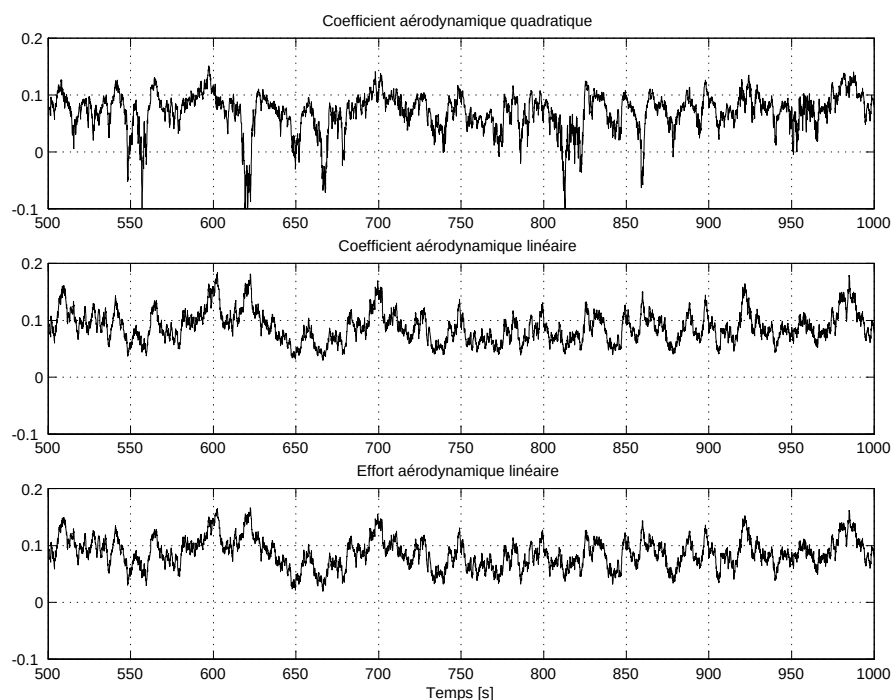


FIG. 15.9 – Représentation des échantillons de sollicitation générés

Avant de nous pencher plus précisément sur les caractéristiques statistiques des échantillons de forces et des réponses associées, nous présentons à la figure 15.10 une illustration des réponses de l'oscillateur sous les chargements représentés à la figure 15.9. On peut observer, une répartition de l'énergie entre une composante quasi-statique (faible) et une composante dynamique plus importante.

La figure 15.11 représente, à la partie supérieure, les densités de probabilité des échantillons de force générés. L'utilisation de signaux de 20000 points nous a permis de tracer ces "histogrammes" pour 100 intervalles. La représentation de ces densités de probabilité est assez bonne, du moins pour pouvoir constater à l'oeil nu que ce ne sont pas des distributions gaussiennes. Sur ce graphique, la dissymétrie négative de la sollicitation générée en conservant le terme quadratique du coefficient aérodynamique est flagrante.

Le tracé des densités de probabilité des déplacements associés à ces sollicitations montre également des lois de probabilité à dissymétrie de signes contraires, avec une plus forte dissymétrie (en valeur absolue) lorsque le terme quadratique de chargement supplémentaire est conservé.

Afin de quantifier plus précisément les grandeurs statistiques qui pourraient résulter

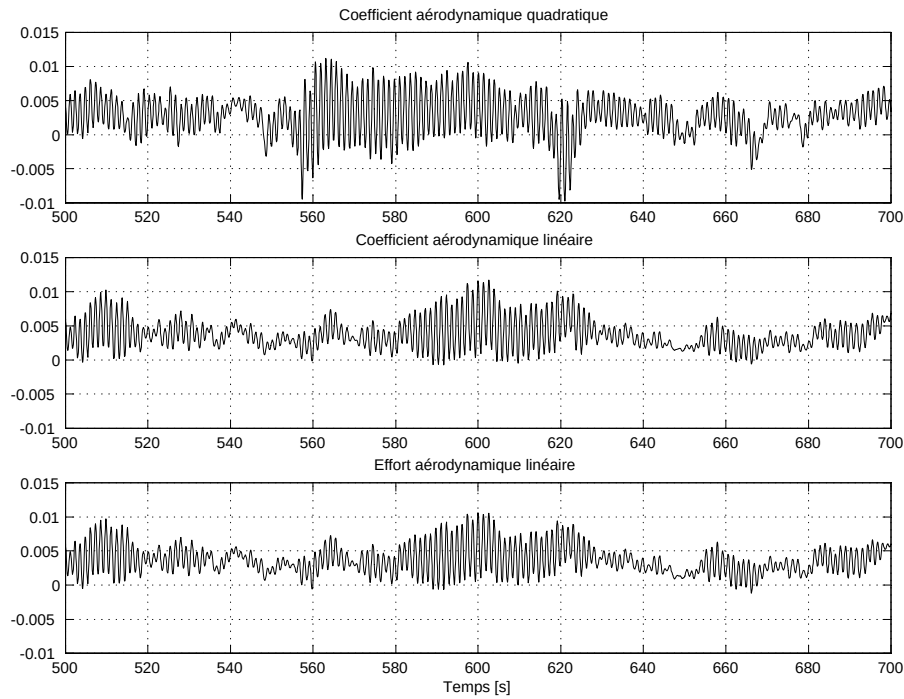


FIG. 15.10 – Evolution des déplacements de l'oscillateur simple soumis à différents types de chargement

	Coefficient quadratique	Coefficient linéaire
σ_F	0.0346	0.0261
γ_{3_F}	-1.650	0.427
σ_X	$2.73 \cdot 10^{-3}$	$1.820 \cdot 10^{-3}$
γ_{3_X}	-0.500	0.193

TAB. 15.1 – Valeurs numériques des moments statistiques obtenus pour la sollicitation et la réponse - Approche fréquentielle

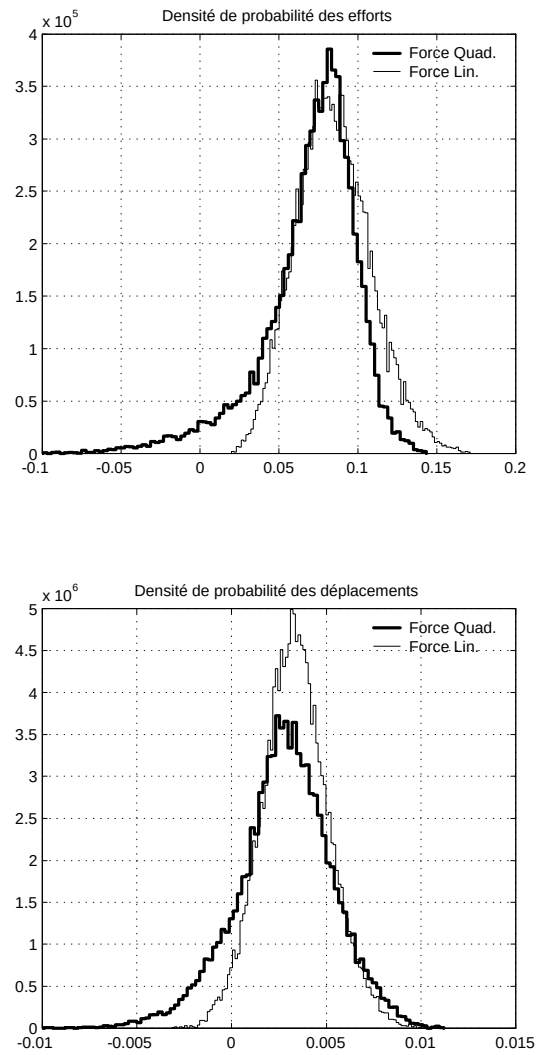


FIG. 15.11 – Densité de probabilité des forces générés (avec ou sans le terme quadratique du coefficient aérodynamique) et des déplacements associés - Calculé sur 20000 points

	Coefficient quadratique			Coefficient linéaire		
	Moyenne	Dispersion	Ecart	Moyenne	Dispersion	Ecart
σ_F	0.0349	7.32%	+0.9%	0.0260	4.13%	-0.5%
γ_{3_F}	-1.69	25.3%	+2.5%	0.396	28.4%	-7.4%
σ_X	$2.75 \cdot 10^{-3}$	10.92%	+0.7%	$1.82 \cdot 10^{-3}$	7.72%	+0.3%
γ_{3_X}	-0.512	35.0%	+2.2%	0.159	44.6%	17.3%

TAB. 15.2 – Valeurs numériques des moments statistiques obtenus pour la sollicitation et la réponse - Simulation de Monte Carlo

d'une approche par simulation de Monte Carlo, nous avons reproduit 30 fois l'opération que nous venons de présenter jusqu'ici. Les moyennes des moments statistiques et cumulants calculés pour chacune de ces 30 simulations devraient nous permettre d'obtenir des estimations assez précises des statistiques de la réponse.

Nous allons comparer les résultats obtenus à ceux que nous avons présentés ci-avant, provenant de l'analyse dans le domaine fréquentiel. Les valeurs numériques que nous avons obtenues lors de cette étude sont reprises au tableau 15.1. Ces grandeurs peuvent se retrouver sur les graphiques présentés ci-dessus.

Au tableau 15.2, nous présentons, dans la colonne intitulée "Moyenne", les valeurs des cumulants statistiques qui ressortent de l'analyse par simulation de Monte Carlo. En réalité, cette moyenne calculée sur les 30 simulations ne suffit pas pour se faire une idée de la fiabilité que l'on doit porter à ce résultat. C'est pour cette raison que nous avons également ajouté la dispersion des valeurs calculées autour de cette moyenne.

Conformément aux résultats que nous présentons depuis le début de ce document, on peut constater une dispersion plus importante pour les grandeurs statistiques d'ordres plus élevés. Ceci montre donc à nouveau que le nombre d'échantillons nécessaire à la bonne reproduction des statistiques de troisième (voire quatrième) ordre est assez élevé.

Au tableau 15.2, nous avons également ajouté l'écart entre les résultats obtenus par l'approche numérique dans le domaine fréquentiel et par l'approche par simulations de Monte Carlo. La bonne concordance entre les résultats, obtenus à l'aide de deux méthodes d'analyse complètement différentes mais considérant les mêmes hypothèses, est assez encourageante. Notons cependant un écart plus important pour l'estimation du coefficient de dissymétrie ; ceci est à relier à la dispersion que nous avons obtenue sur cette grandeur statistique lors des simulations de Monte Carlo.

15.3.4 Effet de la cohérence entre les composantes de la turbulence

Avant de conclure les développements relatifs aux effets de la non linéarité des coefficients aérodynamiques, il nous paraît intéressant de revenir sur une proposition que nous avons formulée ci-avant. Lorsque nous avons étudié les caractéristiques de second ordre de la sollicitation, nous avons insisté sur le fait que la prise en compte de la non linéarité du coefficient aérodynamique ne pouvait qu'engendrer une augmentation de la variance de la vitesse ; nous avons également annoncé que ceci était inhérent à l'hypothèse de non cohérence entre les deux composantes de la turbulence.

Afin d'illustrer nos propos, nous avons réalisé la même étude par simulation de Monte Carlo que ci-dessus mais en imposant que les deux composantes de la turbulence soient

	Coefficient quadratique		Coefficient linéaire	
	Moyenne	Dispersion	Moyenne	Dispersion
σ_F	0.0413	5.22%	0.0373	3.37%
γ_{3_F}	-1.76	19.9%	0.587	23.0%
σ_X	$3.04 \cdot 10^{-3}$	9.87%	$2.58 \cdot 10^{-3}$	7.63%
γ_{3_X}	-0.603	17.1%	0.251	31.5%

TAB. 15.3 – Valeurs numériques des moments statistiques obtenus pour la sollicitation et la réponse -Composantes de vent parfaitement cohérentes

égales ($w = u$) de sorte à obtenir une cohérence parfaite. Les moments statistiques que nous avons obtenus sont repris au tableau 15.3.

L'effet de la non linéarité du coefficient aérodynamique peut être appréciée en comparant les écart types de la sollicitation lorsque le coefficient est considéré comme quadratique ou comme linéaire. Lorsque les composantes de la turbulence étaient non cohérentes, ce rapport valait :

$$\frac{0.0349}{0.0260} = 1.34 \quad (15.23)$$

C'est cette grandeur qui avait suscité notre réflexion ci-avant. Maintenant que les composantes de la turbulence sont parfaitement cohérentes, ce rapport tombe à

$$\frac{0.0413}{0.0373} = 1.11 \quad (15.24)$$

ce qui est déjà bien moins important comme différence. Ceci illustre donc les propos que nous annonçons ci-avant et qui visaient à mitiger la discréditation que l'on pourrait porter sur une analyse avec coefficients aérodynamiques linéarisés.

L'étude que nous venons de réaliser pourrait également s'avérer intéressante en comparant chacune des grandeurs statistiques du tableau 15.3 avec les grandeurs correspondantes du tableau 15.2. Nous pouvons constater que l'effet de la cohérence entre les différentes composantes de la turbulence est non négligeable. Cette remarque pourrait de nouveau laisser place à une réflexion sur la nécessité de déterminer plus précisément les cohérences (au moins locales) entre les différentes composantes de la turbulence. Il nous semble que le dimensionnement sensé d'une structure complexe passe nécessairement par ce stade de l'estimation correcte de la cohérence entre différentes composantes de la turbulence⁵.

15.4 Analyse d'une structure continue

Dans ce paragraphe, nous allons présenter l'analyse d'une structure continue simple : une poutre isostatique sur deux appuis. L'étude de cette structure sera réalisée au second ordre et puis au troisième ordre, analytiquement et numériquement à l'aide d'un modèle éléments finis et du code de calcul que nous avons développé. L'objectif des développements analytiques est double. D'un part, il permet de fournir une formulation simple

⁵Dans la référence [26], nous avons également montré, pour les problèmes spatiaux, l'influence du coefficient de cohérence qui représente les statistiques croisées entre deux points différents de l'espace. Il est important que cette grandeur soit également estimée avec précision avant de débiter l'analyse plus précise de la structure.

permettant par exemple le prédimensionnement d'un ouvrage, ou permettant d'obtenir une estimation de la réponse d'une structure légèrement différente et placée dans un champ de turbulence légèrement différent de ce que nous allons étudier. D'autre part, l'approche analytique devrait pouvoir servir à une validation de l'approche numérique à l'aide du modèle aux éléments finis.

Grâce à la projection en base modale, l'étude d'une structure continue peut se ramener à celle d'une structure discrète, chacun des degrés de liberté correspondant alors à un mode propre. La marche à suivre pour étudier une structure à plusieurs degrés de liberté a déjà été présentée : au second ordre ([26]) et au troisième ordre (Chap. 10). Nous nous contenterons donc dans ce paragraphe de ne présenter qu'une application suffisamment simple pour pouvoir obtenir une formulation analytique utilisable.

La structure que nous allons étudier est une poutre sur deux appuis plongée dans un champ de turbulence bidimensionnel. Les densités spectrales unilatérales des composantes de la turbulence sont supposées être les mêmes, mais aussi identiques en chacun des points de la poutre. Cette hypothèse est une simplification par rapport à une étude réaliste où les deux composantes possèdent généralement un contenu fréquentiel légèrement différent (cf. Tab. 13.1) et où les densités spectrales unilatérales sont différentes d'un point à l'autre de l'ouvrage étudié. Par exemple, pour un tablier de pont dans une vallée encaissée, les normes prévoient trois zones de turbulence différentes (une zone centrale, et deux zones à plus forte turbulence proches des flancs).

Nous supposons également que les caractéristiques de masse et de raideur sont constantes le long de la structure que nous étudions et que les axes principaux d'inertie de la section sont vertical et horizontal. Dans ce cas, nous savons que cette structure possède des modes propres distincts dans les deux directions (verticale et horizontale), ainsi qu'en torsion. Afin de simplifier la présentation, nous n'étudierons pour cet exemple que les vibrations dans une direction de l'espace (les déplacements horizontaux associés aux efforts de traînée, par exemple).

15.4.1 Approche analytique

Second ordre

La densité spectrale croisée entre les sollicitations aérodynamiques appliquées aux sections d'abscisses s_1 et s_2 peut s'exprimer à partir de la relation que nous avons établie dans le cadre d'une formulation discrète (Eq. 15.7). Etant donné que les densités spectrales des composantes sont identiques pour les deux directions de turbulence ($S_u = S_w = S$), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{S_f(\omega, s_1, s_2)}{(\frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2)^2} &= (4c_0^2 + c_1^2) \frac{S(\omega, s_1, s_2)}{\bar{U}^2} \\ &+ (2c_0^2 + c_1^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\omega_1, s_1, s_2) S(\omega - \omega_1, s_1, s_2)}{\bar{U}^4} d\omega_1 \\ &+ 2c_0^2 \left(1 + \frac{c_2}{2c_0}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\omega_1, s_1, s_2) S(\omega - \omega_1, s_1, s_2)}{\bar{U}^4} d\omega_1 \end{aligned} \quad (15.25)$$

Comme dans la majorité des applications dans le domaine du vent turbulent, nous allons supposer que le champ de cohérence des composantes turbulentes est caractérisé

dans le domaine fréquentiel, par une exponentielle décroissante :

$$S(\omega, s_1, s_2) = S(\omega) e^{-C|\omega||s_1-s_3|} \quad (15.26)$$

où C représente un coefficient de cohérence⁶. Il est supposé être identique pour les deux composantes de la turbulence. L'expression de la densité spectrale croisée entre les pressions de vent appliquées aux points d'abscisses s_1 et s_2 s'exprime donc par :

$$\begin{aligned} \frac{S_f(\omega, s_1, s_2)}{(\frac{1}{2}\rho B\bar{U}^2)^2} &= (4c_0^2 + c_1^2) \frac{S(\omega) e^{-C|\omega||s_1-s_3|}}{\bar{U}^2} \\ &+ (2c_0^2 + c_1^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\omega_1) S(\omega - \omega_1) e^{-C|\omega_1||s_1-s_3|} e^{-C|\omega-\omega_1||s_1-s_3|}}{\bar{U}^4} d\omega_1 \\ &+ 2c_0^2 \left(1 + \frac{c_2}{2c_0}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\omega_1) S(\omega - \omega_1) e^{-C|\omega_1||s_1-s_3|} e^{-C|\omega-\omega_1||s_1-s_3|}}{\bar{U}^4} d\omega_1 \end{aligned} \quad (15.27)$$

La projection dans la base des modes propres de ces efforts appliqués sur la structure permet d'obtenir les forces généralisées sollicitant chacun des modes. L'expression de la densité spectrale de force croisée entre les modes i et j vaut⁷ :

$$S_{f_{ij}}^*(\omega, s_1, s_2) = \int_0^L \int_0^L S_f(\omega, s_1, s_2) \phi_i(s_1) \phi_j(s_2) ds_1 ds_2 \quad (15.28)$$

où $\phi_i(s) = \sin \frac{i\pi s}{L}$ et $\phi_j(s) = \sin \frac{j\pi s}{L}$ représentent les modes propres i et j de la poutre sur deux appuis simples.

Si la sollicitation appliquée sur la poutre que nous étudions avait été linéarisée, de l'expression complète de la sollicitation, il ne resterait que :

$$\frac{S_f(\omega, s_1, s_2)}{(\frac{1}{2}\rho B\bar{U}^2)^2} = (4c_0^2 + c_1^2) \frac{S(\omega) e^{-C|\omega||s_1-s_3|}}{\bar{U}^2} \quad (15.29)$$

Les forces généralisées associées à cette partie s'expriment par :

$$\frac{S_{f_{ij}}^*(\omega, s_1, s_2)}{(\frac{1}{2}\rho B\bar{U}^2)^2} = (4c_0^2 + c_1^2) \frac{S(\omega)}{\bar{U}^2} L^2 \underbrace{\frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \phi_i(s_1) \phi_j(s_2) e^{-C|\omega||s_1-s_3|} ds_1 ds_2}_{\Psi_{ij}(C\omega L) = \text{Admittance mécanique}} \quad (15.30)$$

où le résultat de la double intégration, une fonction adimensionnelle de la pulsation ω , représente l'admittance mécanique de la structure étudiée, pour les modes i et j . Cette

⁶le coefficient de cohérence que nous utilisons n'est pas tout à fait identique au coefficient de cohérence utilisé généralement dans le domaine du vent (Equ. 13.17).

⁷Pour une structure continue filaire (de longueur L), la projection des sollicitations dans la base modale s'exprime par :

$$f_i^*(t) = \int_0^L f(s, t) \phi_i(s) ds$$

fonction permet d'exprimer la réduction de la sollicitation dans un mode propre lorsque le champ de turbulence étudié présente une certaine cohérence. Dans la référence [26], nous avons déjà discuté assez longuement cette expression qui est également présentée dans d'autres ouvrages de référence plus spécialisés ([43]).

Lorsque les formes modales sont harmoniques, l'admittance mécanique peut s'exprimer en fonction de la pulsation adimensionnelle $C\omega L$:

$$\begin{aligned}\Psi_{ij}(C\omega L) &= \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \sin\left(\frac{i\pi s_1}{L}\right) \sin\left(\frac{j\pi s_2}{L}\right) e^{-C|\omega||x_1-x_2|} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{ij\pi^2 [1 + (-1)^{i+j} - e^{-C|\omega|L} ((-1)^i + (-1)^j)]}{[(C\omega L)^2 + (i\pi)^2] [(C\omega L)^2 + (j\pi)^2]}\end{aligned}\quad (15.31)$$

Cette fonction est représentée à la figure 15.12 pour quelques couples de modes (i, j) . Sur cette figure, on peut constater que c'est la projection des forces dans le premier mode qui donne la plus grande composante quasi-statique. Aussi, on peut constater, et cela est d'ailleurs assez évident ([26] pour plus de commentaires), que la composante quasi-statique de la sollicitation dans les modes pairs, présentant donc un nombre pair de lobes, est nulle. Bien que la sollicitation dans la base structurelle soit à contenu fréquentiel monotonément décroissant, il n'est donc pas impossible de retrouver, dans la densité spectrale de la sollicitation modale⁸, des pics (fort aplatis) dont le maximum ne correspond pas aux fréquences propres structurelles.

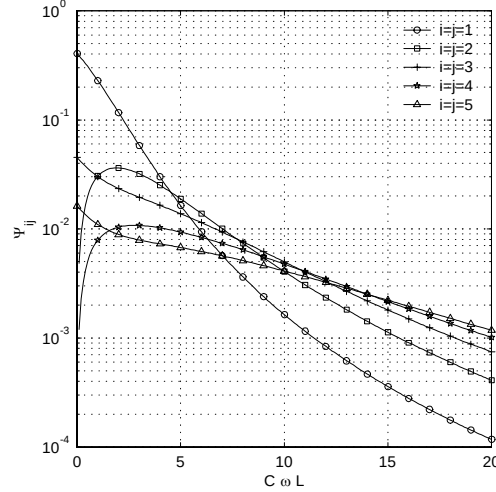


FIG. 15.12 – Admittance mécanique pour les quelques premières formes harmoniques

L'étude de l'oscillateur simple nous a appris que la détermination des coefficients de dissymétrie et d'excès de la sollicitation peut donner des bornes significatives des mêmes grandeurs mais estimées pour la réponse de l'oscillateur. Il pourrait donc également être intéressant de procéder au calcul du coefficient de dissymétrie de la sollicitation

⁸ et donc également dans les densités spectrales des amplitudes modales et des déplacements des noeuds de la structure

généralisée, de façon à avoir une idée de la dissymétrie qui peut prendre place dans le mode étudié. En pensant moins loin, il peut également être intéressant de déterminer la variance de la sollicitation généralisée de façon à avoir une idée de la composante quasi-statique de la réponse modale. Bien que le problème étudié soit simplifié au maximum, le calcul de ces moments des sollicitations généralisées ne peut pas être entrepris analytiquement. En effet, le calcul de la variance de la sollicitation s'exprime par l'une de ces deux intégrales :

$$\begin{aligned}\sigma_{f_{ij}}^{2*} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{f_{ij}}^*(\omega, s_1, s_2)}{(\frac{1}{2}\rho B\bar{U}^2)^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} (4c_0^2 + c_1^2) \frac{S(\omega)}{\bar{U}^2} \Psi_{ij}(C\omega L) d\omega = ??? \\ &= \frac{(4c_0^2 + c_1^2)}{\bar{U}^2} \int_0^L \int_0^L \phi_i(s_1) \phi_j(s_2) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{-C|\omega||s_1-s_2|} d\omega \right) ds_1 ds_2 = ???\end{aligned}$$

dont il n'existe aucune expression analytique simple.

De l'expression complète de la densité spectrale croisée entre les pressions de vent appliquées en des sections différentes (15.27), nous savons que, dans les problèmes qui nous intéressent, l'intégrale de la première ligne peut être négligée vis-à-vis du premier terme dont nous venons de discuter. Nous allons donc procéder à cette simplification qui, pour rappel, est valable pour les densités spectrales monotonément décroissantes et les faibles intensités de turbulence que nous étudions en pratique.

Le terme de la dernière ligne de la relation 15.27 permet de prendre en compte la non linéarité du coefficient aérodynamique. La projection de ce terme dans la base des modes propres fournit un complément de densité spectrale de force généralisée à ajouter à l'expression 15.30 pour prendre en compte la non linéarité du chargement :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S_{f_{ij}}^*(\omega, s_1, s_2)}{(\frac{1}{2}\rho B\bar{U}^2)^2} &= 2c_0^2 \left(1 + \frac{c_2}{2c_0}\right)^2 L^2 \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \phi_i(s_1) \phi_j(s_2) \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\omega_1) S(\omega - \omega_1) e^{-C|\omega_1||s_1-s_2|} e^{-C|\omega-\omega_1||s_1-s_2|}}{\bar{U}^4} d\omega_1 ds_1 ds_2 \\ &= 2c_0^2 \left(1 + \frac{c_2}{2c_0}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\omega_1) S(\omega - \omega_1)}{\bar{U}^4} \frac{1}{L^2} \\ &\quad \int_0^L \int_0^L \phi_i(s_1) \phi_j(s_2) e^{-C(|\omega_1|+|\omega-\omega_1|)|s_1-s_2|} ds_1 ds_2 d\omega_1\end{aligned}\quad (15.32)$$

De nouveau, nous pouvons exprimer une admittance mécanique (associée cette fois à l'autoconvolution de la densité spectrale de vent et non plus à la densité spectrale elle-même) en rapportant l'expression complète de la sollicitation projetée à l'autoconvolution de la densité spectrale de vent :

$$\Psi_{ij}^*(S(\omega), CL, \omega) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\omega_1) S(\omega - \omega_1)}{\bar{U}^4} \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \phi_i(s_1) \phi_j(s_2) e^{-C(|\omega_1|+|\omega-\omega_1|)|s_1-s_2|} ds_1 ds_2 d\omega_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\omega_1) S(\omega - \omega_1)}{\bar{U}^4} d\omega_1}\quad (15.33)$$

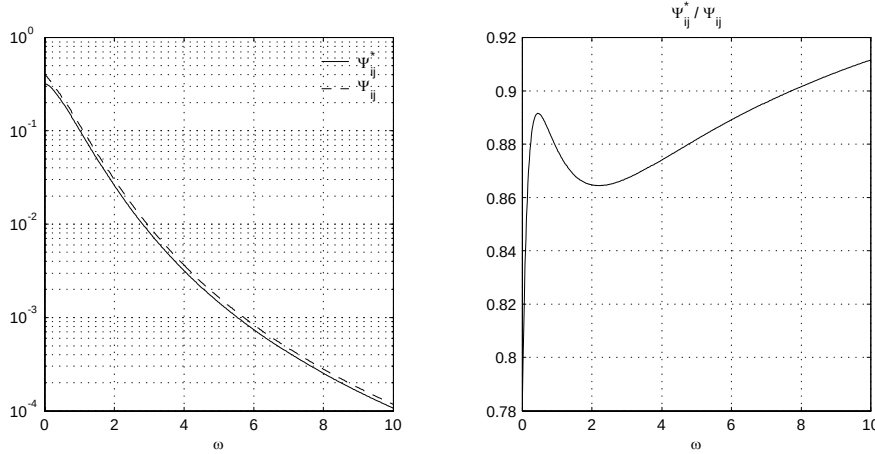


FIG. 15.13 – Comparaison entre les admittances mécaniques associées à la densité spectrale de vent et à son autoconvolution ($\alpha = 0.2 \text{ rad/s}$, $CL = 2s$, $i = 1$, $j = 1$)

Nous venons donc ainsi de définir une admittance mécanique associable au terme de chargement non linéaire. Comparément à l'admittance mécanique habituelle, nous pouvons voir que cette expression dépend maintenant de la densité spectrale de la composante turbulente du vent. Ceci rejoint la remarque formulée ci-avant sur la complexité des développements analytiques sur cette structure simple ; on peut maintenant comprendre que les interprétations que l'on peut tirer des développements analytiques sont très limitées. Sur la partie gauche de la figure 15.13, nous avons représenté les deux admittances mécaniques définies Ψ_{ij} et Ψ_{ij}^* lorsque la densité spectrale de la composante turbulente est un processus à corrélation exponentielle ($\alpha = 0.2 \text{ rad/s}$) et que la cohérence du champ de turbulence est caractérisée par $CL = 2s$. Le graphique de droite représente le rapport entre ces deux admittances. On peut constater sur cette figure que l'admittance mécanique sur l'autoconvolution Ψ_{ij}^* est plus petite que l'admittance mécanique Ψ_{ij} .

Les commentaires que nous avons formulés lors de l'étude d'une structure sans dimensions (quant à la nécessité de prendre en compte la non linéarité du coefficient aérodynamique) peuvent être mitigés dans le rapport Ψ_{ij}^*/Ψ_{ij} . Dans le cadre du champ de turbulence choisi pour le tracé de la figure 15.13, nous pouvons donc constater que la non linéarité du chargement présente, au second ordre, légèrement moins d'intérêt lorsque la structure étudiée est de dimensions comparables à l'échelle de turbulence que lorsque la structure est de très petites dimensions.

Troisième ordre

De la même façon qu'au second ordre nous avons pu établir une expression de la densité spectrale croisée entre les sollicitations appliquées en des sections s_1 et s_2 (éventuellement différentes), à l'ordre 3, nous pouvons établir les bispectres croisés entre les sollicitations appliquées en trois sections éventuellement différentes. L'expression la plus générale de cette fonction $D_{f_i f_j f_k}(\omega_1, \omega_2, s_1, s_2, s_3)$ est assez longue car elle dépend, à travers ces cinq paramètres, du champ de turbulence dans lequel la structure est plongée. Une formulation tout à fait générale devrait permettre de prendre en compte les

éléments suivants : les formes quelconques des densités spectrales unilatérales des deux composantes de la turbulence, la cohérence entre elles, la variabilité spatiale des densités spectrales unilatérales, l'évolution des caractéristiques de prise au vent dans l'espace. Cette formulation générale peut être obtenue en suivant le même raisonnement que celui qui a été mené au paragraphe 15.2.2 pour l'étude d'un champ de sollicitation discret.

Afin de simplifier la présentation, nous allons nous limiter, comme ci-avant, à la présentation d'une structure dont les caractéristiques de prise au vent sont constantes et qui est plongée dans un champ de turbulence dont les deux composantes (incohérentes) présentent la même densité spectrale unilatérale. Dans ce cas, le bispectre croisé (continu) entre les sollicitations appliquées s'exprime simplement par :

$$\begin{aligned}
& \frac{D_{f_i f_j f_k}(\omega_1, \omega_2, s_1, s_2, s_3)}{\left(\frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2\right)^3} \\
&= \frac{2c_0}{\bar{U}^4} \left(3c_1^2 + 4c_0^2 + c_1^2 \frac{c_2}{2c_0}\right) S(\omega_1) S(\omega_2) e^{-C|\omega_1||s_1-s_2|} e^{-C|\omega_2||s_1-s_3|} \\
&+ \frac{2c_0}{\bar{U}^4} \left(3c_1^2 + 4c_0^2 + c_1^2 \frac{c_2}{2c_0}\right) S(\omega_1 + \omega_2) S(\omega_1) e^{-C|\omega_1+\omega_2||s_1-s_3|} e^{-C|\omega_1||s_2-s_3|} \\
&+ \frac{2c_0}{\bar{U}^4} \left(3c_1^2 + 4c_0^2 + c_1^2 \frac{c_2}{2c_0}\right) S(\omega_2) S(\omega_1 + \omega_2) e^{-C|\omega_1+\omega_2||s_1-s_2|} e^{-C|\omega_2||s_2-s_3|} \\
&+ \frac{1}{\bar{U}^6} \left(3(2c_0 + c_2)c_1^2 + 8c_0^3 + (2c_0 + c_2)^3\right) \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega + \omega_1) S(\omega_2 - \omega) S(\omega) e^{-C|\omega+\omega_1||s_1-s_2|} e^{-C|\omega_2-\omega||s_1-s_3|} e^{-C|\omega||s_2-s_3|} d\omega
\end{aligned} \tag{15.34}$$

La projection dans la base des modes propres de cette expression des sollicitations permet d'obtenir le bispectre des forces généralisées. Pour la structure simple que nous étudions, les formes modales sont harmoniques et cette expression se limite à :

$$D_{f_i^* f_j^* f_k^*}(\omega_1, \omega_2) = \iiint_0^L \sin \frac{i\pi s_1}{L} \sin \frac{j\pi s_2}{L} \sin \frac{k\pi s_3}{L} D_{fff}(\omega_1, \omega_2, s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3 \tag{15.35}$$

La projection dans la base des modes propres des trois premières contributions au bispectre des forces appliquées (Equ. 15.34) relève sensiblement de la même démarche. Continuons la présentation en ne conservant que le premier de ces termes. La projection de cet effort dans la base des modes propres donne :

$$\begin{aligned}
D_{f_i^* f_j^* f_k^*}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{2c_0}{U^4} \left(3c_1^2 + 4c_0^2 + c_1^2 \frac{c_2}{2c_0} \right) \\
&\quad \int_0^L \int_0^L \int_0^L \sin \frac{i\pi s_1}{L} \sin \frac{j\pi s_2}{L} \sin \frac{k\pi s_3}{L} S(\omega_1) S(\omega_2) e^{-C|\omega_1||s_1-s_2|} e^{-C|\omega_2||s_1-s_3|} ds_1 ds_2 ds_3 \\
&= \frac{2c_0}{U^4} \left(3c_1^2 + 4c_0^2 + c_1^2 \frac{c_2}{2c_0} \right) S(\omega_1) S(\omega_2) L^3 \\
&\quad \underbrace{\frac{1}{L^3} \int_0^L \int_0^L \int_0^L \sin \frac{i\pi s_1}{L} \sin \frac{j\pi s_2}{L} \sin \frac{k\pi s_3}{L} e^{-C|\omega_1||s_1-s_2|} e^{-C|\omega_2||s_1-s_3|} ds_1 ds_2 ds_3}_{\Psi_{ijk}(C\omega_1 L, C\omega_2 L)}
\end{aligned}$$

Dans cette dernière relation, le résultat de la triple intégration est l'admittance mécanique d'ordre 3. Cette grandeur est l'équivalent de l'admittance que nous venons d'introduire et commenter à l'ordre 2. Elle permet donc de représenter la réduction de sollicitation modale ($\Psi_{ijk} \leq 1$), à l'ordre 3 cette fois, due à l'existence d'une certaine cohérence dans le champ de turbulence.

La figure 15.14 représente les quelques premières admittances mécaniques d'ordre 3 pour $i = j = k$. Les admittances mécaniques (unilatérales) d'ordres pairs ne sont pas représentées car elles sont identiquement nulles. Cette constatation est relativement importante car cela signifie donc que les sollicitations et donc également les réponses dans les modes pairs sont des processus aléatoires gaussiens (à l'ordre 3), quelle que soit la loi de distribution des sollicitations appliquées sur la structure.

La figure 15.14 montre également que les bispectres des forces généralisées dans les modes 3 et 5 présentent une zone à plus forte contribution, selon le coefficient de cohérence du champ de turbulence. Ce phénomène est en tout point identique à celui que nous avons présenté au second ordre.

On peut également ajouter que les ordres de grandeur des ordonnées des fonctions d'admittance laissent supposer que le premier mode, essentiellement, présentera une réponse non gaussienne, du moins en ce qui concerne le comportement quasi-statique. Nous aurions également pu formuler cette réflexion au second ordre pour lequel on constate effectivement aussi que l'admittance mécanique est la plus importante pour le premier mode. Ceci provient du fait que la structure entière (possédant des caractéristiques aérodynamiques identiques sur toute sa longueur) est plongée dans l'écoulement fluide. On pressent évidemment que c'est dans le premier mode que les tourbillons de basses fréquences donneront la plus grande contribution⁹.

Dans le cadre d'une analyse au troisième ordre, nous savons que les termes de couplage entre modes présentent une importance non négligeable. La figure 15.15 représente quelques exemples d'admittance croisées entre les trois premiers modes. L'importance des termes de couplage se présente à nouveau de façon assez évidente. En effet, à l'ordre

⁹Pour le lecteur plus familier à l'étude des structures soumises à des chargements sismiques, la notion d'admittance mécanique correspond à celle de participation modale utilisée dans le vocabulaire du domaine sismique. L'admittance mécanique présente cependant l'avantage de donner la répartition fréquentielle liée à la projection des efforts.

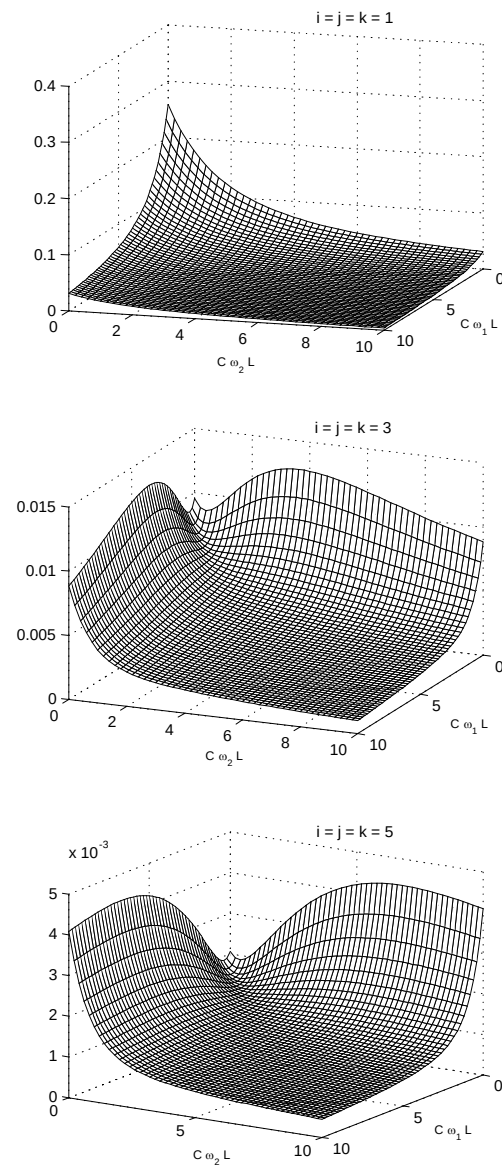


FIG. 15.14 – Admittance mécanique au troisième ordre

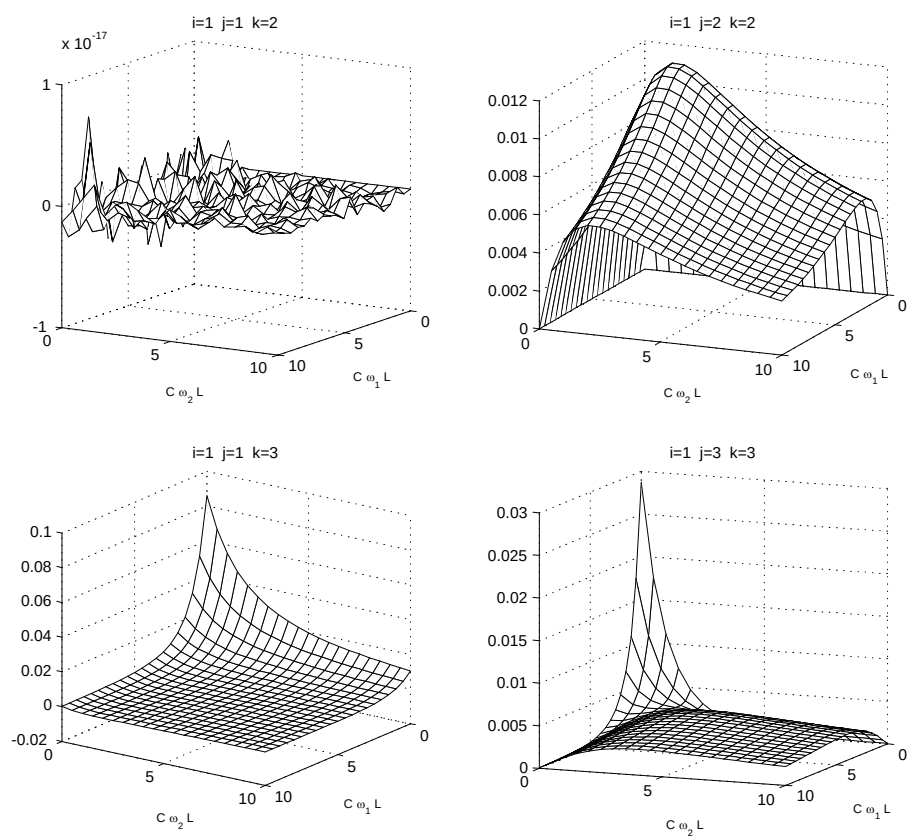


FIG. 15.15 – Exemples d'admittances mécaniques croisées entre les modes 1, 2 et 3.

3, le théorème de Schwartz ne peut plus être écrit ; on constate par exemple que Ψ_{122} est non nul alors que Ψ_{222} est strictement égal à zéro¹⁰.

Lorsque le coefficient aérodynamique qui caractérise la prise au vent de la structure étudiée présente une courbure non négligeable, le dernier terme de chargement de la relation 15.34 doit être pris en compte. Pour ce terme, nous pourrions également (et tout comme à l'ordre 2) définir une admittance mécanique :

$$\Psi_{ijk}^* = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega + \omega_1) S(\omega_2 - \omega) S(\omega) A(\omega_1, \omega_2, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega + \omega_1) S(\omega_2 - \omega) S(\omega) d\omega} \quad (15.36)$$

où

$$A(\omega_1, \omega_2, \omega) = \int_0^L \int_0^L \int_0^L \sin \frac{i\pi s_1}{L} \sin \frac{j\pi s_2}{L} \sin \frac{k\pi s_3}{L} e^{-C|\omega_1 + \omega_2||s_1 - s_2|} e^{-C|\omega_2 - \omega||s_1 - s_3|} e^{-C|\omega||s_2 - s_3|} ds_1 ds_2 ds_3.$$

La définition que nous donnons de cette admittance mécanique montre donc qu'elle dépend de la densité spectrale unilatérale de la composante turbulente du vent. Le calcul analytique de cette intégrale n'est pas évident, même pour des formes simples de densités spectrales $S(\omega)$. L'étude plus approfondie de ce coefficient ne peut être réalisée que numériquement.

Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter les résultats de l'analyse numérique de la structure étudiée ici. La confrontation de ces résultats avec ceux issus de l'approche analytique devraient à nouveau valider le code de calcul permettant l'analyse jusqu'à l'ordre 3 de structures souples soumises à des sollicitations aléatoires non gaussiennes.

15.4.2 Approche numérique

Présentation des éléments finis

Les éléments finis choisis pour la résolution de ce problème sont ceux qui ont été présentés à l'occasion de notre travail intermédiaire de DEA. La présentation que nous allons en faire sera donc assez sommaire dans la mesure où, dans ce travail, nous préconiserons plutôt l'utilisation d'éléments finis bien plus performants : ceux du code de calcul FineLg. Nous les présentons au paragraphe suivant.

Les éléments finis que nous allons utiliser sont des éléments de type déplacement. Ce sont des éléments à deux nœuds et à cinq degrés de liberté par nœud : deux translations (verticale et horizontale), deux rotations (autour des axes vertical et horizontal), un degré de liberté en torsion. Les champs de déplacement sont cubiques pour les déplacements transversaux et linéaire pour l'angle de torsion.

Cette formulation mène aux matrices de rigidité utilisées en pratique. Les matrices de masse élémentaires sont consistantes, c'est-à-dire obtenues avec les mêmes fonctions d'interpolation et une masse uniformément répartie le long de l'élément.

¹⁰ Au second ordre, la relation $|\Psi_{ij}|^2 \leq \Psi_{ii} \Psi_{jj}$ ne peut pas être violée.



FIG. 15.16 – Numérotation des degrés de liberté de l'élément fini

Afin d'éviter les opérations de rotation, les seules structures que ce petit code permet de traiter sont filaires, composées de N_{el} éléments et donc de $N_{el} + 1$ nœuds, soit $5(N_{el} + 1)$ degrés de liberté. Afin de simuler différentes conditions d'appuis (ou un nombre différent de travées), chacun des degrés de liberté peut être fixé. Étant donné que la démarche de l'analyse devrait maintenant être assez usuelle, nous ne présenterons que les particularités du chargement stochastique.

En un point de l'espace, la contribution des pressions aérodynamiques qui peut être classée sous l'excitation extérieure s'exprime par :

$$\begin{Bmatrix} F_L(y, t) \\ F_D(y, t) \\ F_M(y, t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \begin{bmatrix} 2c_{l0} & c_{l1} & c_{l0} & c_{l1} & \frac{2c_{l0} + c_{l2}}{2} \\ 2c_{d1} & c_{d1} & c_{d0} & c_{d1} & \frac{2c_{d0} + c_{d2}}{2} \\ 2Bc_{m0} & Bc_{m1} & Bc_{m0} & Bc_{m1} & \frac{B(2c_{m0} + c_{m2})}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{u(y, t)}{\bar{U}} \\ \frac{w(y, t)}{\bar{U}} \\ \frac{u^2(y, t)}{\bar{U}^2} \\ \frac{w^2(y, t)}{\bar{U}^2} \\ \frac{u(y, t)w(y, t)}{\bar{U}^2} \end{Bmatrix} \quad (15.37)$$

où nous avons laissé de côté le terme de chargement constant qui est étudié dans une analyse statique séparée. Pour simplifier la présentation, les développements suivants seront présentés sans prendre en compte les termes de chargement quadratique. Le phénomène que nous voulons mettre en évidence est bien plus fondamental. Nous travaillerons donc simplement avec :

$$\begin{Bmatrix} F_L(y, t) \\ F_D(y, t) \\ F_M(y, t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2c_{l0} & c_{l1} \\ 2c_{d1} & c_{d1} \\ 2Bc_{m0} & Bc_{m1} \end{bmatrix}}_{[C_P]} \begin{Bmatrix} \frac{u(y, t)}{\bar{U}} \\ \frac{w(y, t)}{\bar{U}} \end{Bmatrix} \quad (15.38)$$

La logique éléments finis veut que l'état de déformation de la structure puisse être représenté à l'aide d'un nombre fini de connecteurs, généralement choisis comme étant les déplacements nodaux. Nous allons donc travailler dans la suite avec l'expression des pressions et des vitesses de vent en chaque nœud de la structure discrétisée :

$$\begin{Bmatrix} F_{L_j}(t) \\ F_{D_j}(t) \\ F_{M_j}(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \rho B \bar{U}_j^2 [C_{P_j}] \begin{Bmatrix} \frac{u_j(y, t)}{\bar{U}_j} \\ \frac{w_j(y, t)}{\bar{U}_j} \end{Bmatrix} \quad (15.39)$$

Ces pressions en chaque nœud de la structure peuvent être regroupées de sorte à introduire un vecteur des pressions nodales $\{F_N\}$ ainsi qu'un vecteur des vitesses de vent aux nœuds de la structure $\{u\}$:

$$\underbrace{\{F_N\}}_{3Nnod \times 1} = \underbrace{[Q_1]}_{3Nnod \times 2Nnod} \{u\} \quad (15.40)$$

Ces vecteurs sont simplement obtenus en plaçant l'une en dessous de l'autre, les $Nnod$ relations 15.39 pour chacun des noeuds de la structure. La matrice $[Q_1]$ est donc diagonale par blocs, chacun de ses "éléments" étant donné par $\frac{1}{2}\rho B \bar{U}_j^2 [C_{P_j}]$.

La relation 15.40 introduit des pressions de vent (des forces par unité de longueur de pont) en chacun des noeuds de la structure. Elles doivent être traduites, conformément à la formulation éléments finis, en forces nodales (instantanées) énergétiquement équivalentes. Pour un élément, on peut s'inspirer de la figure 15.17 pour obtenir une expression de ces forces nodales. Nous allons supposer que les pressions de vent sont uniformes (et égales à la valeur nodale) sur une demi-longueur d'élément.

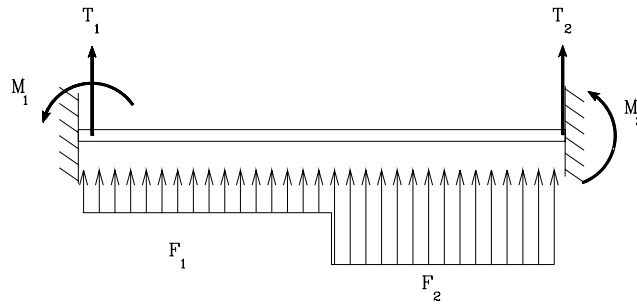


FIG. 15.17 – Hypothèse sur la distribution des pressions de vent sur un élément

Pour la traînée par exemple, les forces nodales énergétiquement équivalentes s'expriment alors par :

$$T_1 = -\frac{L}{32} (13F_{D_1} + 3F_{D_2}) \quad (15.41)$$

$$T_2 = -\frac{L}{32} (3F_{D_1} + 13F_{D_2}) \quad (15.42)$$

$$M_1 = -\frac{L^2}{192} (11F_{D_1} + 5F_{D_2}) \quad (15.43)$$

$$M_2 = \frac{L^2}{192} (5F_{D_1} + 11F_{D_2}) \quad (15.44)$$

De telles expressions sont également valables pour les forces de portance et de torsion. Pour chaque élément fini, un vecteur à dix composantes peut donc être établi :

$$\underbrace{\{F_{\text{élé}_k}\}}_{10 \times 1} = \underbrace{[Q_{\text{élé}_k}]}_{10 \times 6} \underbrace{[L_k]}_{6 \times 3Nnod} \underbrace{\{F_N\}}_{3Nnod \times 1} \quad (15.45)$$

$[L_k]$ est une matrice de localisation qui permet d'aller rechercher dans la liste des pressions nodales $\{F_N\}$, les pressions aux extrémités de l'élément considéré. $[Q_{\text{élé}_k}]$ est une matrice comprenant les coefficients permettant de passer des pressions nodales aux

efforts énergétiques (comme dans les relations 15.41 à 15.44). Une boucle sur tous les éléments chargés permet, après rotation (inutile ici car la structure est filaire) et localisation, d'obtenir l'expression du vecteur des charges nodales en fonction des vitesses de vent nodales :

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\{F\}}_{NDOF \times 1} &= \sum_k \underbrace{[L_{2k}]}_{NDOF \times 10} \underbrace{\{F_{\text{élé}m_k}\}}_{10 \times 1} = \sum_k [L_{2k}] [Q_{\text{élé}m}] [L_k] \{F_N\} = [Q_2] \{F_N\} \\
 &= \underbrace{[Q_2]}_{NDOF \times 3Nnod} \underbrace{[Q_1]}_{3Nnod \times 2Nnod} \{u\} = [Q] \{u\}
 \end{aligned} \tag{15.46}$$

Puisqu'il existe une relation linéaire entre les forces nodales et les vitesses de vent aux noeuds de la structure, leurs matrices de densité spectrale respectives sont reliées par :

$$[S_F] = [Q] [S_u] [Q]^T \tag{15.47}$$

ce qui permet donc d'exprimer la matrice de densité spectrale des forces nodales.

Comparaison entre modèles continu et discret

Dans la référence [26], nous présentons une comparaison exhaustive entre les résultats de l'approche analytique et de l'approche numérique pour l'analyse de la réponse d'une poutre sur deux appuis soumise à des pressions aérodynamiques. Nous nous contentons simplement ici de présenter un résultat intéressant, et probablement même peu connu car il laisse encore certains points d'interrogation dans des articles publiés dans la littérature de haut niveau ([1]).

La structure qui a été étudiée pour la validation de ce code de calcul est une poutre isostatique de 350m de long, modélisée à l'aide de 7 éléments de 50m. Les caractéristiques structurelles de cette poutre sont reprises au tableau 15.4.

Longueur de la poutre (L) :	350m
Nombre d'éléments ($N_{\text{él}}$) :	7 éléments de 50m
Nombre de noeuds :	8 noeuds
Nombre de DDL ($NDOF$) :	40DDL dont 6 bloqués
Module de Young (E) :	210000MPa
Inertie en flexion verticale (I_V) :	3m ⁴
Inertie en flexion horizontale (I_H) :	80m ⁴
Inertie torsionnelle (I_T) :	6m ⁴
Section (A) :	1,35m ²
Masse Volumique (r) :	7850kg/m ³
Masse linéique (m) :	10,6to/m
Coefficients aérodynamiques	Millau
Largeur du tablier (B) :	30m

TAB. 15.4 – Caractéristiques de la structure étudiée

Dans chacune des deux analyses, la structure est étudiée dans une base modale (limitée à 9 modes propres). Elle est sollicitée par un vent turbulent bidimensionnel dont les caractéristiques sont données au tableau 15.5.

Vitesse moyenne :	$20m/s$
Ecart-types :	$\sigma_u = 5m/s \Rightarrow I_u = 25\%$ $\sigma_w = 5m/s \Rightarrow I_w = 25\%$
Echelles de turbulence :	$L_u^y = 200m$ $L_w^y = 200m$
Coefficients de cohérence :	$C_y^u = 8$ $C_y^w = 8$
Densité spectrale :	Davenport

TAB. 15.5 – Modèle de vent choisi pour les applications numériques

La figure 15.18 trace, pour le premier mode de flexion verticale, la force généralisée estimée de manière analytique et celle calculée à l'aide du modèle à 7 éléments. Un modèle plus raffiné de la même structure (40 éléments) a également été réalisé. On constate que la densité spectrale calculée à l'aide de ce modèle s'approche bien plus de la densité spectrale de puissance analytique. La mauvaise estimation de la sollicitation pour la structure à maillage lâche se fait évidemment également ressentir au niveau des réponses modales.

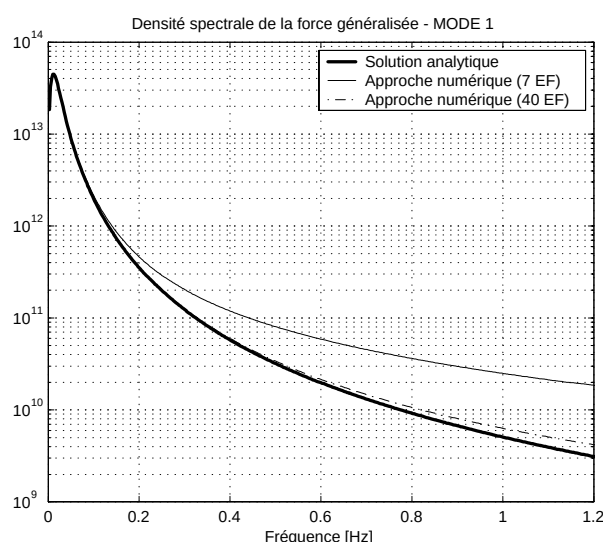


FIG. 15.18 – Influence de la finesse du maillage

L'erreur commise provient de l'hypothèse que les forces nodales peuvent être évaluées à partir des vitesses nodales uniquement (Fig. 15.17) : supposer les vitesses de vent constantes sur une demi longueur d'élément contribue à l'augmentation de la cohérence des pressions. Pour les basses fréquences, les tourbillons sont de grandes tailles, la pression est plus ou moins uniforme sur la longueur de l'élément et l'on constate effectivement que cette approche semble valable. Cependant, pour les plus hautes fréquences (tourbillons de plus petites tailles), les pressions ne sont plus cohérentes sur la demi longueur d'élément et la méthode employée est à remettre en cause.

Un modèle un peu plus complet doit alors être mis en œuvre si l'on ne désire pas augmenter inutilement le nombre d'éléments finis nécessaires à la bonne représentation de

la sollicitation. Les paragraphes qui suivent présentent successivement plusieurs solutions qui permettent de corriger ce problème de mieux en mieux.

Correction adéquate des forces nodales calculées

Première approche : cohérence sur l'élément Cette première approche consiste à adopter, au niveau de l'élément, une méthode un peu plus élaborée que l'hypothèse d'une répartition de pression bi-rectangulaire. (Fig. 15.17). La méthode présentée ci-avant se base uniquement sur les vitesses de vent (et donc les pressions aérodynamiques) aux nœuds de la structure et émet l'hypothèse qu'elles sont constantes sur une demi-longueur d'élément. Ceci est assez réducteur mais surtout peut être évité car, en réalité, les pressions de vent entre les nœuds sont également connues ; à travers des lois, probabilistes certes, mais connues tout de même. Ces lois peuvent être utilisées pour estimer plus précisément les forces nodales.

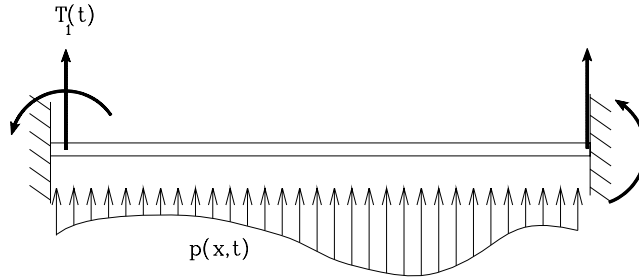


FIG. 15.19 – Distribution plus réaliste des pressions de vent appliquées sur l'élément

Illustrons notre raisonnement sur l'effort tranchant à gauche, dont nous avons supposé qu'il s'exprime uniquement en fonction des forces aérodynamiques aux extrémités de l'élément (Equ. 15.41) :

$$T = \frac{-l}{32} (13F_{L_1} + 3F_{L_2}) \quad (15.48)$$

Sur base de cette hypothèse, la densité spectrale de l'effort s'obtient par :

$$S_T(f) = \left(\frac{l}{32} \right)^2 (169S_{P_1}(f) + 9S_{P_2}(f) + 39S_{P_1P_2}(f) + 39S_{P_2P_1}(f)) \quad (15.49)$$

Etant donné que les forces nodales appliquées aux extrémités de l'élément peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires des vitesses de vent (Equ. 15.39), il s'en suit que :

$$S_P(x_1, x_2, f) = A_u^2 S_u(x_1, x_2, f) + A_w^2 S_w(x_1, x_2, f) \quad (15.50)$$

où $S_P(x_1, x_2, f)$ est la densité spectrale croisée entre les pressions de vent appliquées sur l'élément. Sous les hypothèses de turbulence à cohérence spatiale exponentielle d'une part et de non cohérence entre les composantes u et w d'autre part, nous pouvons donc

également écrire :

$$\begin{aligned} S_T(f) &= \left(\frac{l}{32}\right)^2 \left(178A_u^2 S_u(f) + 178A_w^2 S_w(f) + 78A_u^2 S_u(f)e^{-\frac{Cfl}{2U}} + 78A_w^2 S_w(f)e^{-\frac{Cfl}{2U}}\right) \\ &= S_P(f)l^2 \left(\frac{178 + 78e^{-\frac{Cfl}{2U}}}{1024}\right) = S_P(f)l^2 \hat{\kappa}_T \left(\frac{Cfl}{2U}\right) \end{aligned} \quad (15.51)$$

où $S_P(f) = A_u^2 S_u(f) + A_w^2 S_w(f)$ représente la densité spectrale ponctuelle de pression.

En toute rigueur, l'effort tranchant à gauche ne devrait pas s'exprimer par 15.48 mais plutôt par :

$$T_1(t) = \int_0^L L_T(x)p(x,t)dx \quad (15.52)$$

où $L_T(x) = 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1$ représente la ligne d'influence de la réaction d'appui à gauche d'une poutre biencastée et $p(x,t)$ représente les pressions de vent (traînée, portance, moment) distribuées sur la longueur de l'élément. La densité spectrale de cet effort est donc donnée par :

$$S_T(f) = \int_0^L \int_0^L L_T(x_1)L_T(x_2)S_P(x_1, x_2, f)dx_1dx_2 \quad (15.53)$$

Sous les mêmes hypothèses que ci avant, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} S_T(f) &= A_u^2 S_u(f) \int_0^L \int_0^L L_T(x_1)L_T(x_2)e^{-\frac{C_u^y f |x_1 - x_2|}{2U}} dx_1 dx_2 \\ &\quad + A_w^2 S_w(f) \int_0^L \int_0^L L_T(x_1)L_T(x_2)e^{-\frac{C_w^y f |x_1 - x_2|}{2U}} dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (15.54)$$

Pour simplifier les développements, nous supposons dans la suite que les turbulences dans les directions longitudinale et verticale sont caractérisées par les mêmes coefficients de cohérence ($C_u^y = C_w^y = C$). La densité spectrale de l'effort tranchant à gauche s'exprime donc finalement par :

$$S_T(f) = S_P(f) \int_0^L \int_0^L L_T(x_1)L_T(x_2)e^{-\frac{Cf |x_1 - x_2|}{2U}} dx_1 dx_2 \quad (15.55)$$

Le résultat de la double intégrale peut se mettre sous la forme d'une somme d'un polynôme de degré 8 et du produit d'un autre polynôme de degré 8 par une exponentielle décroissante :

$$S_T(f) = S_P(f)l^2 \left[\sum_{i=1}^8 F_{T_i} \left(\frac{Cfl}{2U}\right)^{-i} + e^{-\frac{Cfl}{2U}} \sum_{i=1}^8 G_{T_i} \left(\frac{Cfl}{2U}\right)^{-i} \right] = S_P(f)l^2 \kappa_T \left(\frac{Cfl}{2U}\right) \quad (15.56)$$

Les coefficients intervenant dans cette expression sont donnés à l'annexe H. La fonction $\kappa_T \left(\frac{Cfl}{2U} \right)$ est la fonction permettant de tenir compte de la réduction de l'effort tranchant nodal lorsque la fréquence des tourbillons considérés augmente. Cette fonction est de toute évidence différente de la fonction $\hat{\kappa}_T \left(\frac{Cfl}{2U} \right)$ que nous proposons initialement d'utiliser.

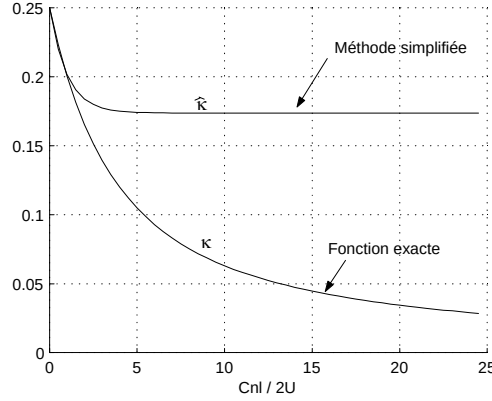


FIG. 15.20 – Représentation de la fonction adimensionnelle permettant de prendre en compte la cohérence sur l'élément

La figure 15.20 reprend l'évolution des deux fonctions adimensionnelles introduites (κ_T et $\hat{\kappa}_T$). Elle montre clairement que la méthode simplifiée fonctionne effectivement bien pour les basses fréquences, mais surestime grossièrement la cohérence pour les hautes fréquences.

De la comparaison des relations 15.56 et 15.51, il apparaît que les effets de la cohérence entre les pressions de vent sur l'élément peuvent être pris en compte en utilisant la méthode de base mais pour laquelle les densités spectrales des pressions de vent seraient corrigées par le facteur :

$$\chi_T(f) = \frac{\kappa_T \left(\frac{Cfl}{2U} \right)}{\hat{\kappa}_T \left(\frac{Cfl}{2U} \right)} = \frac{\sum_{i=1}^8 F_{T_i} \left(\frac{Cfl}{2U} \right)^{-i} + e^{-\frac{Cfl}{2U}} \sum_{i=1}^8 G_{T_i} \left(\frac{Cfl}{2U} \right)^{-i}}{\frac{178+78e^{-\frac{Cfl}{2U}}}{1024}} \quad (15.57)$$

Pour la poutre biencastrée considérée, le moment d'encastrement est caractérisé par une autre ligne d'influence et donc également par d'autres coefficients dans les polynômes de degré 8, ce qui donne lieu à une autre fonction de correction :

$$\chi_M(f) = \frac{\kappa_M \left(\frac{Cfl}{2U} \right)}{\hat{\kappa}_M \left(\frac{Cfl}{2U} \right)} = \frac{\sum_{i=1}^8 F_{M_i} \left(\frac{Cfl}{2U} \right)^{-i} + e^{-\frac{Cfl}{2U}} \sum_{i=1}^8 G_{M_i} \left(\frac{Cfl}{2U} \right)^{-i}}{\frac{146+110e^{-\frac{Cfl}{2U}}}{36864}} \quad (15.58)$$

Les corrections que nous venons d'introduire sont des fonctions de correction, qui varient en fonction de la fréquence f . De plus, ces corrections permettent de prendre en compte la cohérence des pressions de vent sur l'ouvrage. De telles corrections portent souvent le nom d'admittance. Afin de les distinguer des autres types d'admittance, les

fonctions de correction introduites ici pourraient par exemple être appelées des *admittances numériques*, dans la mesure où n'elles n'ont de sens que dans un modèle éléments finis.

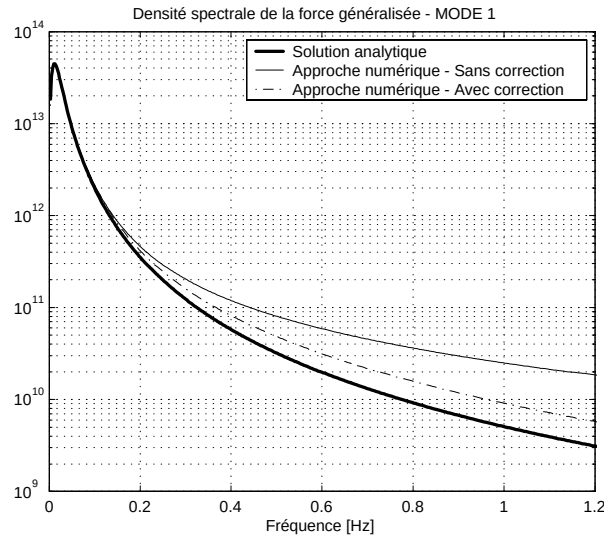


FIG. 15.21 – Améliorations liées à l'utilisation du facteur de correction

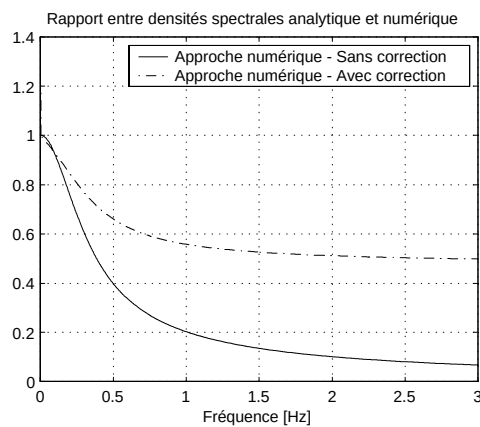


FIG. 15.22 – Améliorations liées à l'utilisation du facteur de correction

La figure 15.21 montre que l'utilisation du facteur de correction permet d'améliorer l'estimation des forces généralisées. La figure 15.22 représente, pour la force généralisée dans le premier mode de flexion, le rapport entre la densité spectrale analytique et les densités spectrales calculées par la méthode éléments finis. Cette représentation non dimensionnelle est plus parlante car elle permet de s'affranchir de la forme du spectre de vitesse de vent choisi.

Seconde approche : cohérence au niveau des forces nodales La première approche permet de prendre en compte la cohérence des pressions de vent sur un même

élément mais pas sur des éléments voisins. Or, la force nodale résulte des efforts tranchants dans deux éléments adjacents. Pour obtenir de meilleurs résultats, il convient donc de prendre en compte plus précisément cet autre manifestation de la cohérence.

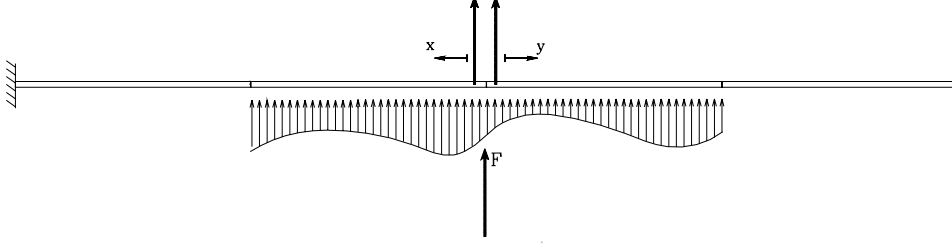


FIG. 15.23 – Illustration du second niveau de correction

La force nodale est la somme des contributions des efforts provenant de chacun des éléments adjacents :

$$F(t) = T_1(t) + T_2(t) = \int_0^L L_T(x)p(x,t)dx + \int_0^L L_T(y)p(y,t)dy \quad (15.59)$$

Dans une formulation rigoureuse, la densité spectrale de la force nodale est donc donnée par :

$$\begin{aligned} S_F(f) &= \int_0^L \int_0^L L_T(x_1)L_T(x_2)S_P(x_1, x_2, f)dx_1dx_2 \\ &+ \int_0^L \int_0^L L_T(y_1)L_T(y_2)S_P(y_1, y_2, f)dy_1dy_2 \\ &+ \int_0^L \int_0^L L_T(x)L_T(y)S_P(x, y, f)dx dy \\ &+ \int_0^L \int_0^L L_T(y)L_T(x)S_P(y, x, f)dx dy \end{aligned} \quad (15.60)$$

En supposant, pour simplifier la formulation, que les deux éléments adjacents aient la même longueur,

$$\begin{aligned} S_F(f) &= 2S_P(f)l^2\kappa_T \left(\frac{Cfl}{2U} \right) + 2S_P(f)l^2 \int_0^L \int_0^L L_T(x)L_T(y)e^{-\frac{Cf(x+y)}{2U}} dx dy \\ &= S_P(f)l^2 \left[2\kappa_T \left(\frac{Cfl}{2U} \right) + 2 \int_0^L \int_0^L L_T(x)L_T(y)e^{-\frac{Cf(x+y)}{2U}} dx dy \right] \\ &= S_P(f)l^2\lambda_T^0 \left(\frac{Cfl}{2U} \right) \end{aligned} \quad (15.61)$$

Le résultat analytique de la double intégration est également assez lourd. Il est présenté à l'annexe H. On comprend à nouveau que la fonction $\lambda_T^0 \left(\frac{Cfl}{2U} \right)$ qui permet de représenter la réduction de l'effort tranchant nodal sollicitant pour les plus hautes fréquences est différente de la fonction $\hat{\lambda}_T^0 \left(\frac{Cfl}{2U} \right)$ qui est proposée par notre modèle de chargement simplifié¹¹. Les deux nouvelles fonctions adimensionnelles λ_T^0 et $\hat{\lambda}_T^0$ sont représentées à la figure 15.24. Puisqu'elles assurent une meilleure correction de la cohérence des pressions de vent, ces fonctions devraient donner une admittance numérique meilleure que celle obtenue à l'aide des fonctions κ_M et $\hat{\kappa}_M$ introduites ci-avant.

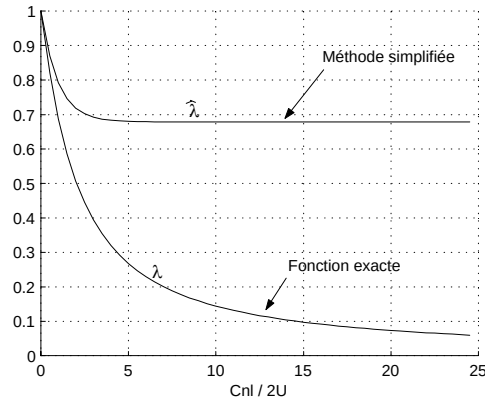


FIG. 15.24 – Facteur de correction des efforts tranchants : correction de efforts nodaux

Nous sommes donc amenés à définir une nouvelle admittance numérique :

$$\chi_T^0(f) = \frac{\lambda_T^0 \left(\frac{Cfl}{2U} \right)}{\hat{\lambda}_T^0 \left(\frac{Cfl}{2U} \right)} \quad (15.62)$$

Pratiquement, la matrice de densité spectrale des forces nodales peut être établie selon la méthode simplifiée et tous les éléments diagonaux de cette matrice peuvent être modifiés par cette nouvelle admittance numérique, identique pour tous les éléments diagonaux puisque les éléments finis sont tous de longueur identique. Quant aux éléments hors diagonale, afin que la cohérence entre forces nodales reste inaltérée, il convient de les multiplier également par ce même facteur de correction. En définitive, cette constatation permet de simplifier énormément le problème puisque qu'il suffit de multiplier l'entièreté de la matrice de densité spectrale par un seul et même coefficient.

La figure 15.22 peut donc être complétée en ajoutant la courbe obtenue avec ce nouveau facteur de correction. Cette autre modification permet de corriger encore mieux le contenu aux hautes fréquences. La correction sur la force nodale (seconde approche), plutôt que sur la résultante sur l'élément (première approche), permet de s'approcher davantage de la solution analytique.

¹¹On peut vérifier que

$$\hat{\lambda}_T^0 \left(\frac{Cfl}{2U} \right) = \frac{694 + 312e^{-\frac{Cfl}{2U}} + 18e^{-\frac{Cf(2l)}{2U}}}{1024}$$

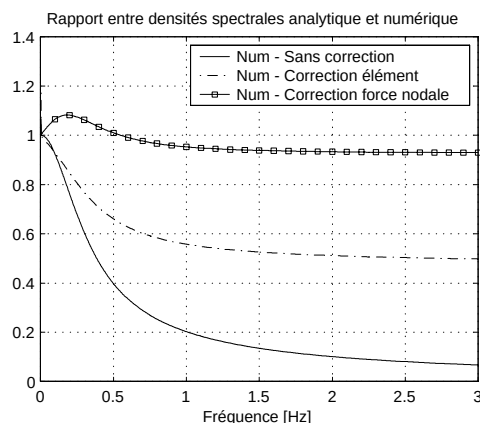


FIG. 15.25 – Amélioration liée à l'utilisation de la seconde correction : représentation adimensionnelle

Troisième approche : cohérence entre forces nodales L'examen de cette figure montre que la solution analytique n'est cependant pas encore atteinte car la matrice de densité spectrale des forces nodales est corrigée de façon uniforme alors qu'en réalité les éléments non diagonaux devraient être corrigés par des coefficients différents. En effet, la cohérence entre forces nodales estimée par la méthode simplifiée n'est pas tout à fait correcte non plus. Une ultime modification nécessite donc l'estimation des forces nodales en des points différents de la structure :

$$F_1(t) = T_1(t) + T_2(t) = \int_0^L L_T(x_1)p(x_1, t)dx_1 + \int_0^L L_T(y_1)p(y_1, t)dy_1 \quad (15.63)$$

$$F_2(t) = T_3(t) + T_4(t) = \int_0^L L_T(x_2)p(x_2, t)dx_2 + \int_0^L L_T(y_2)p(y_2, t)dy_2 \quad (15.64)$$

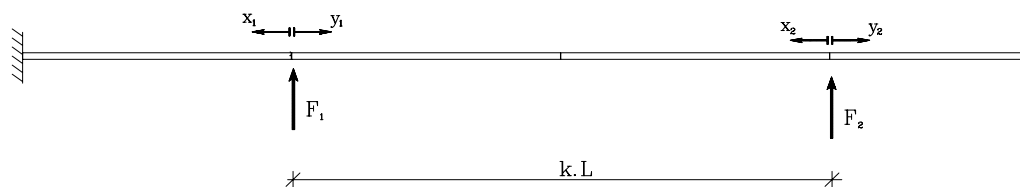


FIG. 15.26 – Illustration du troisième niveau de correction

Admettons que ces forces soient distantes d'un nombre k d'éléments. La densité spec-

trale croisée entre ces forces nodales s'obtient à l'aide de la relation :

$$\begin{aligned}
S_{F_1 F_2}(f) = & \int_0^L \int_0^L L_T(x_1) L_T(x_2) S_P(x_1, x_2, f) dx_1 dx_2 \\
& + \int_0^L \int_0^L L_T(x_1) L_T(y_2) S_P(x_1, y_2, f) dx_1 dy_2 \\
& + \int_0^L \int_0^L L_T(x_2) L_T(y_1) S_P(x_2, y_1, f) dy_1 dx_2 \\
& + \int_0^L \int_0^L L_T(y_1) L_T(y_2) S_P(x_2, y_1, f) dy_1 dy_2
\end{aligned} \tag{15.65}$$

Des développements identiques aux développements précédents (mais encore plus longs) permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned}
S_{F_1 F_2}(f) = & S_P(f) l^2 e^{-(k-2)\frac{Cfl}{2U}} \left[\sum_{i=1}^8 M_{0_i}^{k>1} \left(\frac{Cfl}{2U} \right)^{-i} + e^{-\frac{Cfl}{2U}} \sum_{i=1}^8 M_{1_i}^{k>1} \left(\frac{Cfl}{2U} \right)^{-i} \right. \\
& + e^{-\frac{Cf(2l)}{2U}} \sum_{i=1}^8 M_{2_i}^{k>1} \left(\frac{Cfl}{2U} \right)^{-i} + e^{-\frac{Cf(3l)}{2U}} \sum_{i=1}^8 M_{3_i}^{k>1} \left(\frac{Cfl}{2U} \right)^{-i} \\
& \left. + e^{-\frac{Cf(4l)}{2U}} \sum_{i=1}^8 M_{4_i}^{k>1} \left(\frac{Cfl}{2U} \right)^{-i} \right]
\end{aligned} \tag{15.66}$$

Les coefficients intervenant dans ces expressions sont à nouveaux donnés à l'annexe H. Sous une forme plus sympathique, nous pouvons simplement noter :

$$S_{F_1 F_2}(f) = S_P(f) l^2 \lambda_T^{k>1} \left(\frac{Cfl}{2U} \right) \tag{15.67}$$

Si $k = 1$, le terme relatif à l'intégration entre les deux forces prend une forme légèrement différente, ce qui se traduit également par une fonction adimensionnelle de réduction légèrement différente :

$$S_{F_1 F_2}(f) = S_P(f) l^2 \lambda_T^1 \left(\frac{Cfl}{2U} \right) \tag{15.68}$$

Pour la compacité des notations, il est plus intéressant de regrouper sous une seule notation ces deux cas ($k > 1$ et $k = 1$) ainsi que celui du paragraphe précédent ($k = 0$) :

$$S_{F_1 F_2}(f) = S_P(f) l^2 \lambda^k \left(\frac{Cfl}{2U} \right) \tag{15.69}$$

$$\text{où } \lambda^k \left(\frac{Cfl}{2U} \right) = \begin{cases} \lambda_T^0 \left(\frac{Cfl}{2U} \right) & \text{si } k = 0 \\ \lambda_T^1 \left(\frac{Cfl}{2U} \right) & \text{si } k = 1 \\ \lambda_T^{k>1} \left(\frac{Cfl}{2U} \right) & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

On peut comprendre maintenant que les fonctions adimensionnelles λ que nous venons d'introduire sont légèrement différentes de fonctions adimensionnelles $\hat{\lambda}$ que notre modèle de chargement simplifié recommande d'utiliser. Dans la référence [26], nous présentons les expressions exactes de ces fonctions, qui mènent finalement à la même expression plus compacte des densités spectrales croisées entre sollicitations appliquées en des noeuds différents :

$$S_{F_1 F_2}(f) = S_P(f) l^2 \hat{\lambda}^k \left(\frac{C f l}{2U} \right) \quad (15.70)$$

$$\text{où } \hat{\lambda}^k \left(\frac{C f l}{2U} \right) = \begin{cases} \hat{\lambda}^0 \left(\frac{C f l}{2U} \right) & \text{si } k = 0 \\ \hat{\lambda}^1 \left(\frac{C f l}{2U} \right) & \text{si } k = 1 \\ \hat{\lambda}^{k>1} \left(\frac{C f l}{2U} \right) & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

La figure 15.27 représente les fonctions adimensionnelles (λ^k et $\hat{\lambda}^k$) qui permettent d'estimer les cohérences entre forces nodales, aussi bien pour la méthode simplifiée que pour la nouvelle méthode présentée. Les rapports entre ces paires de courbes sont les admittances numériques qu'il convient d'utiliser pour une correction optimale des termes d'effort tranchant. Les admittances d'ordre 0 doivent être utilisées pour les termes diagonaux de la matrice de densité spectrale ; les termes d'ordre 1 ($k = 1$) doivent être utilisés pour les éléments correspondant à une distance d'un élément entre les degrés de liberté concernés ; les termes d'ordre 2 ($k = 2$) doivent être utilisés pour les éléments correspondant à une distance de deux éléments entre les degrés de liberté concernés, etc. On peut démontrer que les formes des fonctions adimensionnelles $\lambda^{k>1}$ et $\hat{\lambda}^{k>1}$ sont telles que les admittances numériques calculées pour $k \geq 2$ sont toutes identiques. La correction des termes diagonaux correspondant à une distance d'au moins deux éléments sera donc effectuée à l'aide d'un seul et même facteur.

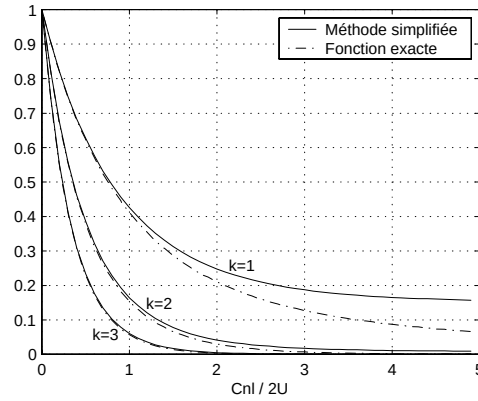


FIG. 15.27 – Facteur de correction des efforts tranchants : correction du champ de forces nodales

Maintenant que les coefficients correcteurs sont calculés, il ne reste plus qu'à les appliquer à la matrice de densité spectrale de force plutôt que de la multiplier purement et simplement par un seul coefficient.

La figure 15.28 représente, pour les différents niveaux de correction présentés, les rapports entre les densités spectrales numérique et analytique (force dans le premier mode de flexion verticale). On peut y constater que le résultat numérique ainsi obtenu concorde presque avec le résultat analytique. La petite différence résiduelle provient d'une part des contributions des moments et des termes croisés entre moments et forces aux nœuds. D'autre part, l'écart peut également être attribué au passage en base modale et donc à la représentation de fonctions sinusoïdales par une cubique par morceaux.

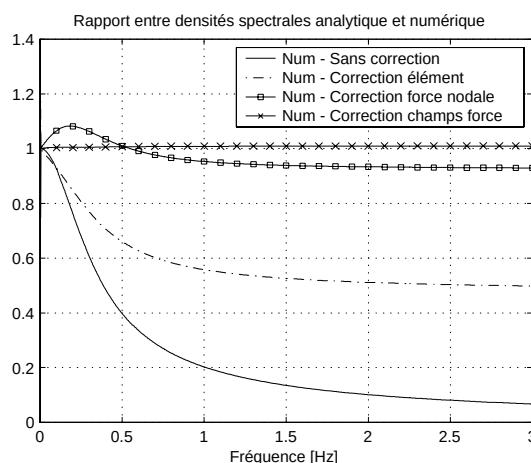


FIG. 15.28 – Améliorations liées à l'utilisation du facteur de correction

L'utilisation des fonctions d'admittance numérique permet donc de réaliser le maillage éléments finis de la structure étudiée sans prendre égard à la cohérence dans les pressions de vent. Une formulation éléments finis trop simple (comme la première méthode présentée) devrait limiter la taille des éléments en fonction de l'échelle de turbulence du vent ; l'utilisation des admittances numériques que nous venons de présenter brièvement permet de mailler la structure avec des éléments de plus grande taille. A la limite, pour autant qu'il puisse représenter correctement les caractéristiques mécaniques de la poutre, un seul élément fini peut suffire à représenter correctement la sollicitation appliquée sur la structure.

Etude numérique d'une poutre jusqu'à l'ordre 3

Les développements du paragraphe précédent montrent que la prise en compte correcte de la cohérence existant dans la structure du chargement nécessite soit une discrétisation assez fine de la structure, soit les développements de relations assez fastidieuses. Etant donné que l'objectif de l'étude actuelle ne consiste ni à étudier une structure composée d'un grand nombre d'éléments finis, ni à étendre à l'ordre trois les développements qui ont mené à l'établissement des admittances numériques, nous avons décidé de réaliser l'étude d'une structure jusqu'à l'ordre trois, mais sans comparer les résultats obtenus à ceux de l'approche analytique.

Afin de valider les développements que nous avons réalisés dans le domaine fréquentiel, les résultats obtenus seront comparés à ceux obtenus à l'aide de simulations de Monte Carlo, se basant sur les mêmes hypothèses au niveau de la cohérence du chargement.

La structure étudiée est une poutre sur deux appuis modélisée à l'aide de huit éléments (Fig. 15.29). Pour l'étude de cette structure, nous avons utilisé notre code de calcul qui permet l'analyse tridimensionnelle de structures filaires. Etant donné que nous n'étudions que les caractéristiques vibratoires dans une seule direction, tous les degrés de liberté non intéressants sont bloqués. Il ne reste alors que les degrés de liberté représentés à la figure 15.29.

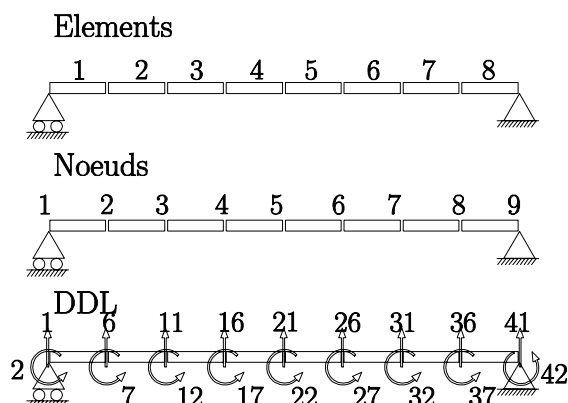


FIG. 15.29 – Numérotation des éléments, noeuds et degrés de liberté

Les caractéristiques structurales sont reprises au tableau 15.6. Quant au chargement aérodynamique, il s'agit d'un vent turbulent dont les intensités de turbulence dans les deux directions transversales sont identiques ($I_u = I_w = 10\%$). Le vent moyen est supposé être horizontal avec $\bar{U} = 10\text{m/s}$.

Longueur de la poutre (L) :	300m
Nombre d'éléments (N_{el}) :	8 éléments de 37.5m
Nombre de noeuds :	9 noeuds
Nombre de DDL ($NDOF$) :	45DDL dont 39 bloqués
Module de Young (E) :	210000MPa
Inertie en flexionnelle (I_H) :	80 m ⁴
Masse linéique (m) :	10,6to/m
Amortissement :	Rayleigh : $\xi_1 = 0.02$; $\xi_2 = 0.0125$; $\xi_3 = 0.02$
Coefficients aérodynamiques	Millau - Drag (cf. Tab. 14.5)
Largeur du tablier (B) :	30m

TAB. 15.6 – Caractéristiques de la structure étudiée

Afin d'étudier l'influence de la non linéarité du chargement, plusieurs sollicitations peuvent être envisagées :

- un chargement non linéaire où la non linéarité du coefficient aérodynamique est prise en compte jusqu'au terme quadratique :

$$\frac{f_i}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}_i^2} = c_{0i} + \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} u_i + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} u_i^2 + \frac{c_{1i}}{\bar{U}} w_i + \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} u_i w_i + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) w_i^2 \quad (15.71)$$

- un chargement non linéaire où le coefficient aérodynamique est linéarisé ($c_2 = 0$), mais où les termes d'ordre supérieur de la turbulence sont pris en compte :

$$\frac{f_i}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}_i^2} = c_{0_i} + \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}} u_i + \frac{c_{0_i}}{\bar{U}^2} u_i^2 + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}} w_i + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} u_i w_i \quad (15.72)$$

- un chargement où seul les termes linéaires sont conservés :

$$\frac{f_i}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}_i^2} = c_{0_i} + \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}} u_i + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}} w_i \quad (15.73)$$

Analyse par simulations de Monte Carlo Pour l'approche à l'aide de simulations de Monte Carlo, l'effort nécessaire à l'analyse de la structure requiert sensiblement le même effort de calcul pour chacune de ces trois sollicitations puisque la seule distinction entre les trois analyses réside en l'établissement de la sollicitation. Pour réaliser ce genre d'analyse, nous avons utilisé le logiciel *GWind3D* (présenté au § 6.2, p. 271) pour générer des échantillons de vitesses de vent cohérentes dans l'espace (cohérence exponentielle, $C = 8$). En réalité, chaque échantillon est composé d'un ensemble de neuf histoires de vent, une par noeud chargé¹². Afin d'obtenir une représentation moyenne du comportement, nous avons réalisé l'étude à l'aide de 15 échantillons de vitesses. Les paramètres de génération ont été choisis à l'aide des critères que nous avons établis au chapitre 6.

Etant donné que la réponse aux hautes fréquences n'est pas vraiment représentative (puisque la cohérence du chargement n'est pas représentée correctement), nous nous sommes limité à imposer une représentation correcte de la réponse dans le premier mode de vibration. Notons également que la durée des échantillons générés a dû être légèrement allongée de façon à pouvoir générer deux composantes u et w indépendantes entre elles¹³.

La figure 15.30 représente les sollicitations obtenues à partir des vitesses de vent générées pour les trois types de chargement que nous avons considérés. Premièrement, on peut constater que les deux derniers chargements donnent sensiblement le même résultat. Cela signifie donc que les termes de chargement non linéaire n'ont guère d'impact lorsque le coefficient aérodynamique est linéarisé. Ceci peut s'expliquer par les faibles intensités de turbulence. Ceci a déjà été longuement discuté à l'occasion de l'étude de l'oscillateur simple.

Nous nous contenterons donc essentiellement d'étudier la différence existant entre les deux premiers chargements. La figure 15.30 montre que les deux évolutions de sollicitation sont sensiblement différentes alors que les vitesses u et w qui ont été utilisées pour calculer ces efforts sont identiques ! Dans le premier cas, la sollicitation présente quelques pics vers le bas. Ils correspondent à des angles d'incidence très faibles et pour lesquels le coefficient aérodynamique linéarisé est fortement différent du coefficient approché par une parabole (cf Fig. 14.2 à 14.4). La concavité tournée vers le bas du coefficient aérodynamique est telle que le premier type de chargement gomme complètement les pics vers le haut que

¹² Au vu des explications données au paragraphe précédent, on peut ainsi comprendre que la cohérence du vent ne peut pas être représentée correctement pour les hautes fréquences.

¹³ Un essai de génération avec une durée d'échantillon cinq fois plus courte, nous donnait systématiquement des coefficients de corrélation de l'ordre de 40% à 60% entre les deux composantes générées indépendamment. Ceci provient du fait que ces deux composantes présentent un contenu énergétique dans les très basses fréquences. En multipliant la durée des échantillons générés par cinq, nous sommes passés à des coefficients de corrélation de l'ordre de 5% au maximum.

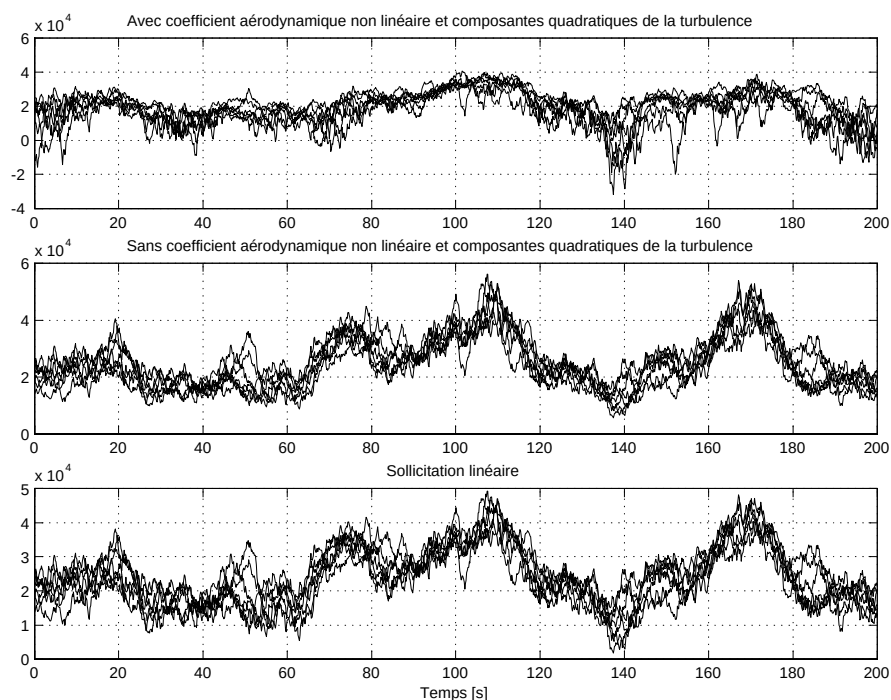


FIG. 15.30 – Représentation des sollicitations générées pour différentes hypothèses de chargement

l'on peut retrouver dans le second chargement et qui proviennent des composantes de la turbulence. Une simple observation de la figure 15.30 nous permet donc déjà d'annoncer un comportement sensiblement différent en termes d'analyse au troisième ordre lorsque la composante quadratique du coefficient aérodynamique est prise en compte.

La figure 15.31 représente les déplacements des noeuds de la structure pour les trois chargements représentés à la figure 15.30. Comme annoncé, la différence entre les deux derniers graphiques de cette figure est assez faible et ne sera donc pas discutée.

La forme des courbes obtenues montre que la structure répond essentiellement dans le premier mode propre puisque les déplacements de tous les noeuds de la structure sont en phase.

Les déplacements obtenus montrent que la réponse structurelle semble présenter des composantes dynamique et quasi-statique d'un ordre de grandeur comparable. On peut en effet retrouver les pics vers le haut et respectivement vers le bas pour chacun des deux types de chargement, ainsi qu'un caractère oscillatoire assez évident. On peut constater que la non linéarité du coefficient de traînée semble présenter un avantage notable en considérant qu'elle permet de limiter les intensités des déplacements extrêmes positifs. Par contre, il convient également de noter que la non linéarité de ce coefficient et essentiellement la dissymétrie négative du chargement alors obtenu engendre quelques excursions dans le domaine des déplacements négatifs. Il convient donc d'être prudent lorsque le matériau utilisé ne présente pas les mêmes caractéristiques de comportement dans les deux sens de chargement.

La figure 15.32 représente les densités spectrales de déplacements de certains noeuds.

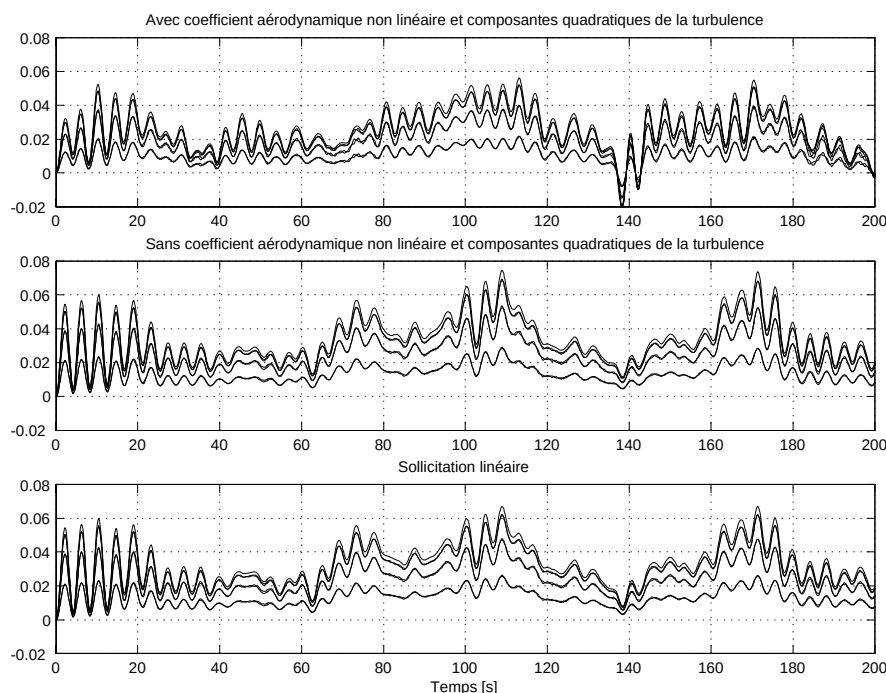


FIG. 15.31 – Déplacements des noeuds de la structure pour les différents types de chargement étudiés

Les courbes lisses sont celles provenant de l'étude dans le domaine fréquentiel (discutée ci-après) et les courbes plus erratiques résultent d'une moyenne de densités spectrales obtenues pour les 15 simulations de Monte Carlo. Les formes obtenues sont assez habituelles. On peut y retrouver la répartition énergétique entre les composantes quasi-statique, prédominante et dynamique (moins importante et limitée à un seul mode propre). On peut également constater que l'approche temporelle par simulation de Monte Carlo sous-estime les fréquences propres des modes 2 et 3. Ceci provient du non respect des critères de génération que nous avons présentés. Le critère non respecté dans ce cas est un pas de temps trop important, ce qui résulte en un allongement de la période propre concernée ("stabilité d'algorithme").

Afin de représenter plus précisément les caractéristiques statistiques de la réponse de la structure, nous avons représenté, pour chacune des 15 simulations de Monte Carlo, les histogrammes du déplacement à mi-travée. La figure 15.33 donne cette représentation, ainsi que celle de l'histogramme moyen, lorsque le coefficient aérodynamique est linéarisé. On peut constater que les histogrammes obtenus sont assez proches de l'histogramme moyen, ce qui laisse supposer que les résultats de la simulation de Monte Carlo peuvent être fiables. Nous tenons à signaler que cette précision provient d'une qualité de la génération des composantes de la turbulence¹⁴. Conformément aux commentaires que nous avons formulés ci-avant, on peut constater que la densité de probabilité de la

¹⁴Par exemple, si les premiers échantillons générés (d'une durée cinq fois plus courte) avaient été conservés, les histogrammes obtenus pour chacune des 15 simulations présenterait une dispersion très importante autour de l'histogramme moyen. Ceci est bien sûr à éviter !

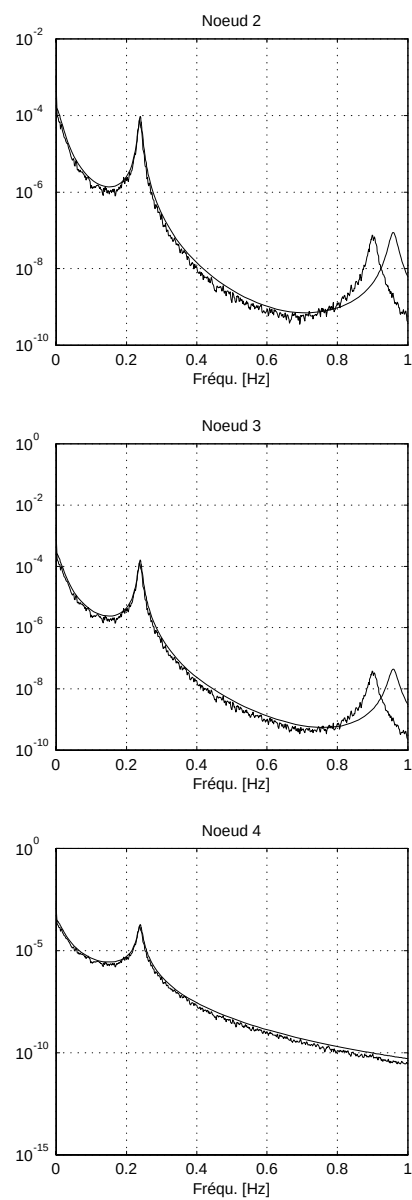


FIG. 15.32 – Représentation des densités spectrales des déplacements en certains noeuds

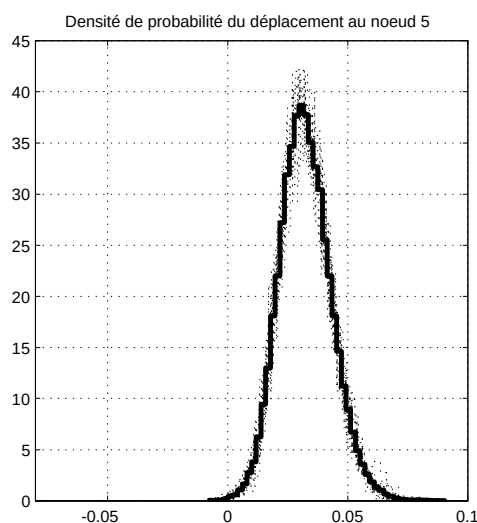


FIG. 15.33 – Histogramme du déplacement à mi-travée lorsque le coefficient aérodynamique est linéarisé.

réponse structurelle présente une dissymétrie positive. Cela signifie donc que les excursions dans le domaine des valeurs extrêmes sont plus fréquentes que si le processus était gaussien.

La figure 15.34 représente les mêmes histogrammes mais, cette fois, lorsque la non linéarité du coefficient aérodynamique est prise en compte. De nouveau, on peut constater un faible étalement autour de l'histogramme moyen. Afin de faciliter la comparaison avec la réponse sous l'autre chargement étudié, nous avons également représenté l'histogramme moyen de la figure 15.33. L'observation de ces histogrammes mène aux mêmes conclusions que celles qui ont déjà été formulées. Il est maintenant indiscutable que la prise en compte de la non linéarité du coefficient aérodynamique rend la réponse structurelle dissymétrique vers le bas.

Mises à part ces quelques discussions sur la topologie de la réponse, il pourrait être intéressant de quantifier les caractéristiques statistiques principales de la réponse. Pour chacun des quinze échantillons, les caractéristiques statistiques du déplacement du noeud situé à mi-travée ont été calculées. Les figures 15.35 et 15.36 illustrent les résultats obtenus.

Tout comme pour l'étude de l'oscillateur simple, nous pouvons constater que les caractéristiques statistiques d'ordre 1 et 2 sont assez bien représentées : 15 échantillons semblent donc suffire pour quantifier ces caractéristiques assez précisément. Rappelons que les critères concernant les paramètres de génération ont été établis afin de rendre l'approche temporelle pas-à-pas la plus précise possible et donc ainsi limiter la variabilité des résultats.

Le coefficient de dissymétrie qui a été estimé présente par contre une variabilité bien plus importante. La seule certitude est que, dans les simulations qui ont été réalisées, ce coefficient est positif lorsque c_2 est posé égal à zéro et est négatif lorsque la non linéarité du coefficient aérodynamique est prise en compte. Aussi, la dispersion est plus importante dans le premier cas ($\delta = 60\%$) que dans le second ($\delta = 42\%$). Nous pouvons donc affirmer

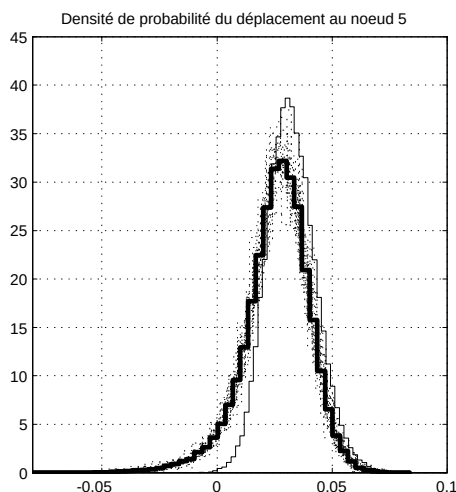


FIG. 15.34 – Histogramme du déplacement à mi-travée lorsque le comportement non linéaire du coefficient aérodynamique est pris en compte

que quinze échantillons ne peuvent suffire à la bonne représentation des caractéristiques d'ordre 3 de la réponse.

Les paramètres de génération ont été choisis de façon à obtenir une représentation la plus précise possible de la réponse structurale, c'est-à-dire, depuis la représentation de la sollicitation ou plutôt d'échantillons de sollicitation représentatifs, jusqu'à l'analyse pas-à-pas dans le domaine temporel. Nous savons qu'une bonne génération s'accompagne d'une minimisation de la dispersion des caractéristiques statistiques autour des valeurs moyennes (sur l'ensemble des échantillons). Ceci laisse donc penser que les critères de génération qui ont été formulés peuvent suffire au second ordre mais pas aux ordres supérieurs. Par exemple, nous savons qu'un pas de temps égal à la période de l'oscillateur divisée par 15 ($\Delta t = \frac{T}{15}$) suffit pour représenter précisément les caractéristiques statistiques de second ordre. Un critère plus strict devrait peut-être être formulé pour représenter plus précisément les caractéristiques d'ordres supérieurs.

Nous ne pouvons cependant pas rejeter sur l'algorithme de génération-résolution l'entière responsabilité de cette dispersion. En effet, à l'occasion de la discussion que nous avons menée sur la précision des méthodes de génération, nous avons pu constater qu'il existait à l'ordre 3 une dispersion significative des grandeurs sortant du générateur. Il paraît donc utopique de vouloir réduire la dispersion obtenue sur les caractéristiques d'ordres supérieurs de la réponse.

Afin d'investiguer ce problème, nous avons réalisé l'analyse temporelle dans les mêmes conditions mais, cette fois, à l'aide de 50 échantillons. Lors de cette analyse, la dispersion des caractéristiques d'ordre 3 a diminué d'environ 20%, ce qui laisse donc encore une dispersion très importante. En raison des commentaires qui viennent d'être avancés, nous ne pouvons pas espérer pouvoir diminuer cette dispersion, même en utilisant un nombre d'échantillons bien plus important.

Les caractéristiques d'ordre 4 sont données à titre indicatif. En effet, souvenons-nous que le générateur *GWind3D* est un générateur par séries de Fourier (travaillant dans une base orthogonale orientée différemment selon les fréquences successives traitées). Au

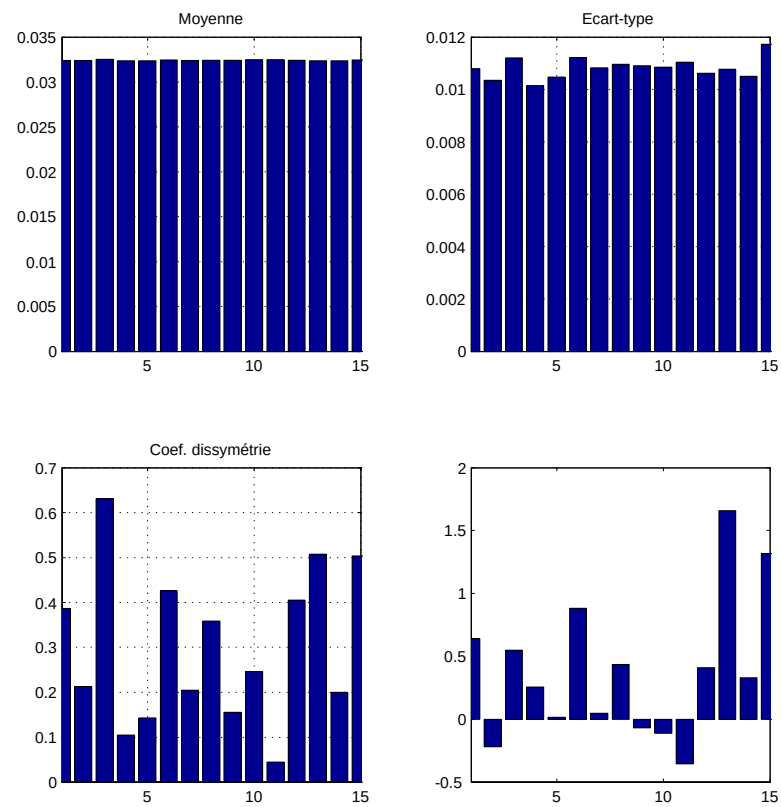


FIG. 15.35 – Caractéristiques statistiques du déplacement à mi-travée (coefficient aérodynamique linéarisé)

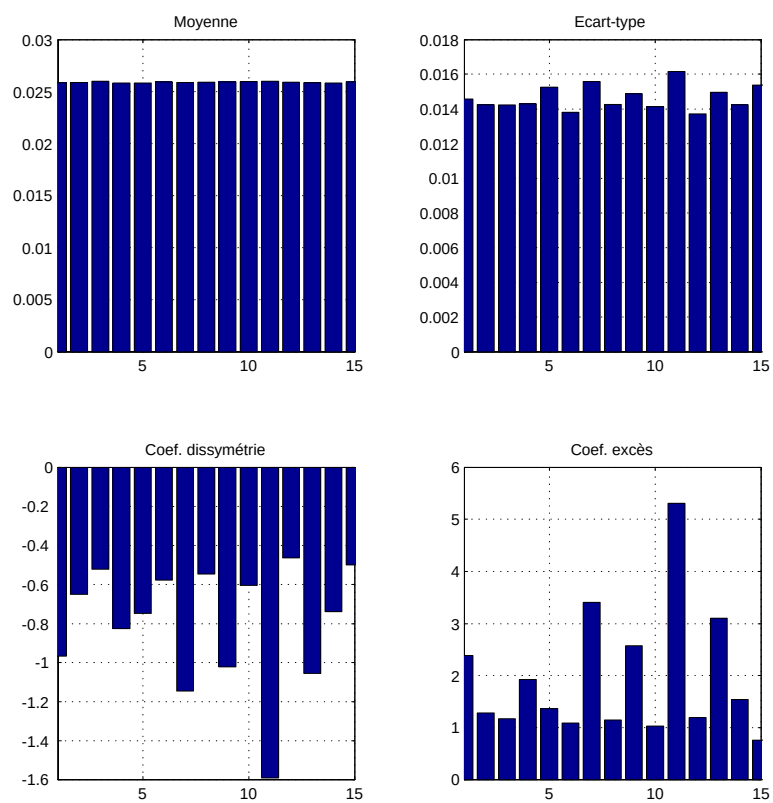


FIG. 15.36 – Caractéristiques statistiques du déplacement à mi-travée (coefficient aérodynamique quadratique)

Avec coefficient aérodynamique linéarisé				
	Moyenne (m)	Ecart-type (m)	Coef. dissymétrie	Coef. excès
$\mu - \sigma$	0.0324	0.0104	0.1137	-0.1953
μ	0.0324	0.0107	0.2840	0.3171
$\mu + \sigma$	0.0325	0.0111	0.4542	0.8296
Avec coefficient aérodynamique non linéaire				
	Moyenne (m)	Ecart-type (m)	Coef. dissymétrie	Coef. excès
$\mu - \sigma$	0.0258	0.0135	-1.1167	0.6380
μ	0.0259	0.0144	-0.7863	1.8297
$\mu + \sigma$	0.0259	0.0153	-0.4560	3.0213

TAB. 15.7 – Caractéristiques statistiques du déplacement à mi-travée

chapitre 6, nous avons démontré l'incapacité de générer correctement les caractéristiques de quatrième ordre pour les générateurs basés sur cette méthode de génération.

Le tableau 15.7 résume les valeurs moyennes (sur les 15 valeurs obtenues pour chaque échantillon) et donne des "intervalles de confiance" pour les caractéristiques statistiques du déplacement à mi-travée obtenu pour les deux chargements étudiés. La comparaison des résultats obtenus pour les deux chargements différents permet de caractériser les effets de la non linéarité du coefficient aérodynamique. Ces conclusions sont identiques à celles qui ont été données lors de l'étude de l'oscillateur simple :

- augmentation de la variance du déplacement. Celle-ci provient d'une augmentation de la réponse quasi-statique provenant, elle-même, d'une augmentation de la variance de la sollicitation. Cette augmentation est inévitable et systématique lorsque les deux composantes de la turbulence sont non cohérentes entre elles ;
- au troisième ordre, la prise en compte du coefficient c_2 modifie le coefficient de dissymétrie de la sollicitation et donc également de la réponse dans le sens de c_2/c_0 . Dans notre cas, puisque ce rapport est négatif, le coefficient de dissymétrie est donc diminué. La dissymétrie négative de la sollicitation est tellement importante que cette diminution donne un coefficient de dissymétrie négatif et plus grand en valeur absolue.

Caractéristiques de la sollicitation Avant de débiter l'analyse de la structure, il peut être intéressant de déterminer les caractéristiques statistiques de la sollicitation. Cette démarche devrait en réalité être menée avant de débiter l'analyse, que ce soit par une méthode de simulations temporelles pas-à-pas ou par une méthode numérique dans le domaine fréquentiel. Cette étape nous semble tout aussi nécessaire que celle du calcul des modes propres de la structure. Au second ordre, par exemple, le calcul de la matrice des covariances des sollicitations nodales permet d'obtenir les déplacements quasi-statiques de chacun des noeuds de la structure¹⁵. Au troisième ordre, nous savons que la dissymétrie de la sollicitation permet d'obtenir un ordre de grandeur de la dissymétrie qui peut être attendue au niveau de la réponse structurelle, celle-ci étant néanmoins d'autant plus faible que la structure est faiblement amortie.

¹⁵Le raisonnement peut également être mené dans la base modale

Chargement moyen. La première caractéristique à étudier est celle du chargement moyen. Les relations 15.71 et 15.72 permettent d'obtenir assez facilement :

$$\frac{\bar{f}_i^{(lin)}}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}_i^2} = c_{0i} + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \sigma_{u_i}^2 \quad (15.74)$$

$$\frac{\bar{f}_i^{(non\ lin)}}{\frac{1}{2}\rho B \bar{U}_i^2} = c_{0i} + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \sigma_{u_i}^2 + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \sigma_{w_i}^2 \quad (15.75)$$

Pour l'exemple que nous étudions, les sollicitations sont identiques en chacun des noeuds chargés. Le rapport entre les forces moyennes relatives à ces deux chargements correspond donc également au rapport entre les forces généralisées moyennes, entre les amplitudes modales moyennes et entre les déplacements moyens de la structure. Il vaut :

$$1 + \frac{\frac{2c_0+c_2}{2\bar{U}^2} \sigma_w^2}{c_0 + \frac{c_0}{\bar{U}^2} \sigma_u^2} = 1 + \frac{\left(1 + \frac{c_2}{2c_0}\right) I_u^2}{1 + I_u^2} \simeq 1 + \left(1 + \frac{c_2}{2c_0}\right) I_u^2 = 0.805 \quad (15.76)$$

Cette grandeur peut être retrouvée dans les résultats de l'analyse par simulations de Monte Carlo ($\frac{0.0259}{0.0324} = 0.80$).

Variance de la sollicitation Au paragraphe 15.2.1, nous avons étudié les caractéristiques de second ordre du chargement aérodynamique dans un champ de turbulence bidimensionnel. En appliquant la relation 15.8 dans le cadre de l'étude actuelle, nous obtenons :

$$\frac{\tilde{m}_{2f}^{(lin)}(\omega)}{\left(\frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2\right)^2} = (4c_0^2 + c_1^2) I_u^2 + (4c_0^2 + c_1^2) I_u^4 \quad (15.77)$$

$$\frac{\tilde{m}_{2f}^{(non\ lin)}(\omega)}{\left(\frac{1}{2}\rho B \bar{U}^2\right)^2} = (4c_0^2 + c_1^2) I_u^2 + \left(4c_0^2 + c_1^2 + c_2 c_0 \left(2 + \frac{c_2}{2c_0}\right)\right) I_u^4 \quad (15.78)$$

Le rapport entre ces deux expressions permet d'estimer l'augmentation¹⁶ de la variance de la sollicitation lorsque la non linéarité du coefficient aérodynamique est prise en compte :

$$1 + \frac{c_2 c_0 \left(2 + \frac{c_2}{2c_0}\right) I_u^4}{(4c_0^2 + c_1^2) I_u^2 + (4c_0^2 + c_1^2) I_u^4} \simeq 1 + \frac{c_2 c_0 \left(2 + \frac{c_2}{2c_0}\right) I_u^2}{4c_0^2 + c_1^2} = 1.763 \quad (15.79)$$

Le rapport entre les variances obtenues à l'aide de la simulation de Monte Carlo ($\frac{0.0144}{0.0107} = 1.346$) n'est pas dans le rapport des variances des sollicitations. Cela signifie simplement que la réponse structurelle n'est pas exclusivement quasi-statique et que le terme de chargement en c_2 n'intéresse pas la même gamme de fréquence que les autres termes de chargement. En d'autres mots, la distribution fréquentielle de l'énergie contenue dans ce terme de chargement n'est pas homothétique à celle contenue dans les autres termes.

¹⁶Cette expression plus précise montre que la variance peut éventuellement diminuer lorsque $c_2 \in [-4c_0, 0]$. Cette condition n'est remplie pour aucun des coefficients aérodynamiques étudiés dans ce travail.

Dissymétrie de la sollicitation La relation 15.16 montre que la non linéarité du coefficient aérodynamique se manifeste de deux manières dans l'expression du bispectre de la sollicitation à l'aide de termes d'ordres différents en l'intensité de la turbulence :

- le premier groupe de termes réunit les termes qui s'apparentent à

$$2c_0c_1^2 \left(1 + \frac{c_2}{2c_0}\right) \frac{S_{w_iw_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_jw_k}(\omega_1)}{\bar{U}^4} \quad (15.80)$$

et sont donc d'ordre 4 en l'intensité de la turbulence. Notons également que ces termes sont de l'ordre 1 en c_2/c_0 ;

- le second groupe de termes sont ceux qui s'expriment à l'aide d'une intégrale comme

$$2c_0c_1^2 \left(1 + \frac{c_2}{2c_0}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{w_iw_j}(\omega + \omega_1) S_{w_jw_k}(\omega) S_{u_iu_k}(\omega_2 - \omega)}{\bar{U}^6} d\omega$$

ou

$$8c_0^3 \left(1 + \frac{c_2}{2c_0}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{w_iw_j}(\omega + \omega_1) S_{w_jw_k}(\omega) S_{w_iw_k}(\omega_2 - \omega)}{\bar{U}^6} d\omega$$

et sont donc des termes d'ordre 6 en l'intensité de turbulence. Le premier de ces deux derniers termes est également du premier ordre en c_2/c_0 . Pour les formes de densités spectrales rencontrées en pratique, ce terme peut généralement être négligé vis-à-vis de la première contribution énoncée au point ci-dessus. Quant à la seconde intégrale, elle est d'ordre 3 en c_2/c_0 . Cet ordre élevé ne permet pas nécessairement, en tout cas pour les coefficients aérodynamiques rencontrés en pratique, de négliger ce terme de chargement.

Afin de mettre en évidence l'importance de ces deux types de dissymétrie, nous allons étudier la situation intermédiaire où la contribution au bispectre de l'intégrale est négligée. Cela nous mène donc aux trois situations où :

- le coefficient c_2 est pris en compte de manière complète. Dans ce cas, le coefficient de dissymétrie de la sollicitation appliquée en un noeud s'exprime par (cf. Eq. 15.18) :

$$\begin{aligned} \gamma_{3f} &= I_u \frac{2c_0c_1^2 (6 + 3I_u^2) + 8c_0^3 (3 + I_u^2) + c_1^2 (2c_0 + c_2) (3 + 3I_u^2) + (2c_0 + c_2)^3 I_u^2}{\left[2c_0^2 (2 + I_u^2) + c_1^2 (1 + I_u^2) + 2c_0^2 \left(1 + \frac{c_2}{2c_0}\right)^2 I_u^2 \right]^{3/2}} \\ &= -1.619 \end{aligned} \quad (15.81)$$

- les termes faisant intervenir une intégrale dans l'expression du bispectre ne sont pas pris en considération. Le coefficient de dissymétrie de la sollicitation appliquée en un noeud s'exprime alors par :

$$\gamma_{3f} = I_u \frac{12c_0c_1^2 + 24c_0^3 + 3c_1^2 (2c_0 + c_2)}{\left[2c_0^2 (2 + I_u^2) + c_1^2 (1 + I_u^2) + 2c_0^2 \left(1 + \frac{c_2}{2c_0}\right)^2 I_u^2 \right]^{3/2}} = -0.809 \quad (15.82)$$

- le coefficient aérodynamique est linéarisé et les termes supérieurs en l'intensité de la turbulence sont négligés :

$$\gamma_{3f} = I_u \frac{18c_0c_1^2 + 24c_0^3}{[4c_0^2 + c_1^2]^{3/2}} = 0.418 \quad (15.83)$$

La comparaison des trois coefficients de dissymétrie que nous venons d'obtenir montre que le terme d'ordre 6 en l'intensité de la turbulence ne peut pas être négligé. Cela signifie donc que le terme faisant intervenir une intégrale dans l'expression du bispectre doit être pris en compte. Cela complique substantiellement le calcul car cette intégration doit être réalisée pour chaque couple de fréquences traité. Etant donné que cette intégration ne peut pas être réalisée analytiquement lorsque $i \neq j \neq k$ (même pour la forme simple de densité spectrale choisie), cette intégrale doit être calculée numériquement. Cela présente l'inconvénient de ralentir substantiellement les calculs. Par contre, cela indique également que n'importe quelle densité spectrale (plus réaliste par exemple) peut être étudiée avec la procédure établie.

Au paragraphe suivant, nous présentons les résultats obtenus à l'aide de notre code de calcul. Les développements que nous avons menés suivent les étapes présentées ci-dessus. Dans le cadre de ce document, nous ne présentons cependant que les deux cas de chargement extrêmes (qui sont également les deux seuls cas de chargement discutés lors de l'exposé des résultats obtenus à l'aide de la méthode de Monte Carlo).

Approche numérique dans le domaine fréquentiel Commençons par présenter les résultats obtenus en considérant le cas de chargement le plus simple, celui relatif au coefficient aérodynamique linéarisé. La méthode d'analyse au second ordre devrait maintenant être bien maîtrisée. La première étape consiste en l'établissement de la liste des fréquences de calcul. Ceci a été réalisé à l'aide de notre algorithme de présélection (§ 3.7, p. 63). Il a permis d'obtenir une liste de 274 fréquences réparties de façon optimale entre 0 Hz et 6.48 Hz. Suivent alors le calcul de la matrice des densités spectrales croisées entre sollicitations nodales (Eq. 15.7), puis des forces généralisées, des amplitudes modales et enfin des déplacements des noeuds de la structure.

Nous avons vérifié successivement les résultats obtenus à chacune de ces étapes intermédiaires. Nous nous contentons ici de ne donner que quelques grandeurs significatives qui permettraient par exemple de vérifier et de reproduire cet exemple à l'aide d'un autre code aux éléments finis permettant l'analyse dynamique stochastique jusqu'aux ordres 2, voire 3.

Par exemple, la variance des sollicitations en chacun des noeuds (obtenue en intégrant les éléments diagonaux de la matrice des densités spectrales) s'exprime par :

$$\sigma_F = 7.2151.10^3 N \quad (15.84)$$

ce qui est bien en accord avec la relation 15.77. A l'ordre 3, l'espace bidimensionnel des fréquences doit être maillé de façon à représenter correctement le bispectre des déplacements. Pour ce faire, nous avons utilisé la procédure de maillage présentée ci-avant. Ceci a permis d'établir le réseau d'environ 14000 points d'intégration représenté à la figure 15.37.

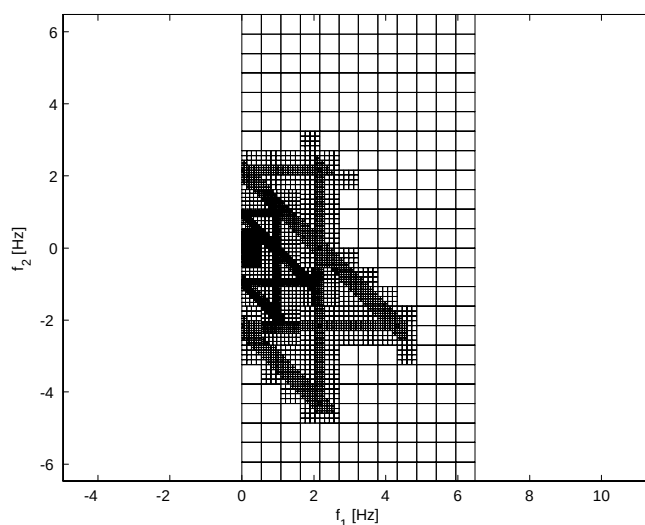


FIG. 15.37 – Représentation du maillage pour le calcul des bispectres

A l'ordre 3, la procédure de calcul consiste à estimer successivement les matrices des bispectres des sollicitations nodales puis généralisées, ensuite, celle des amplitudes modales et finalement des déplacements nodaux. L'intégration des éléments diagonaux de la matrice des bispectres des forces nodales nous a permis d'obtenir une valeur du moment centré d'ordre 3 des sollicitations appliquées en chacun des noeuds :

$$\tilde{m}_{3_F} = 1.5511 \cdot 10^{11} N^3 \quad (15.85)$$

Ces deux dernières relations nous permettent d'obtenir une estimation du coefficient de dissymétrie des sollicitations appliquées en chaque noeud :

$$\gamma_{3_F} = 0.413 \quad (15.86)$$

ce qui est en bon accord avec le résultat théorique (analytique) attendu (Eq. 15.83). Ceci indique donc que les discrétisations fréquentielles que nous avons réalisées nous permettent de représenter correctement les caractéristiques d'ordres 2 et 3 de la sollicitation.

Les résultats qui sont présentés au tableau 15.8 résument les caractéristiques statistiques des grandeurs modales

	Forces généralisées		Amplitudes modales			
	σ_{F^*}	$\gamma_3 F^*$	$\sigma_{\eta \text{ exact}}$	$\sigma_{\eta QS}$	$\frac{\sigma_{QS}}{\sigma_{\text{exact}}}$	$\gamma_3 \eta$
MODE 1	24.7211	-0.3535	13.3427	10.8921	81.6%	-0.292
MODE 2	10.4466	-0.0000	0.3862	0.2875	74.4%	-0.0000
MODE 3	9.3559	-0.3692	0.0574	0.0508	88.0%	-0.2576

TAB. 15.8 – Caractéristiques statistiques des grandeurs modales

Etant donné que la taille de la structure est relativement grande par rapport à l'échelle de la turbulence, l'énergie de sollicitation dans chacun des modes propres (σ_{F^*}) est assez

	σ_x	$\gamma_{3\ x}$
Noeud 1	0	$\times$
Noeud 2	$4.075.10^{-3}$	0.2920
Noeud 3	$7.504.10^{-3}$	0.2919
Noeud 4	$9.772.10^{-3}$	0.2919
Noeud 5	$10.56.10^{-3}$	0.2919
Noeud 6	$9.772.10^{-3}$	0.2919
Noeud 7	$7.504.10^{-3}$	0.2919
Noeud 8	$4.075.10^{-3}$	0.2920
Noeud 9	0	$\times$

TAB. 15.9 – Caractéristiques statistiques des déplacements

importante. L'importante différence de raideur entre ces modes est cependant telle que l'entièreté de la réponse se produit dans le premier mode propre ($\sigma_{\eta\ exact}$).

Remarquons, ainsi que cela a été introduit à l'occasion de notre discussion sur les admittances numériques d'ordre 3, que le cumulatif d'ordre 3 de la sollicitation dans le second mode est nul. Bien qu'elles soient des combinaisons linéaires de forces (appliquées en chacun des noeuds de la structure) dont les coefficients de dissymétrie sont identiques, les forces généralisées ne présentent donc pas nécessairement les mêmes coefficients de dissymétrie que les forces nodales.

La projection des sollicitations dans la base des modes propres donne des forces généralisées dont les densités de probabilité sont plus symétriques que les forces appliquées aux noeuds. A l'étape suivante, le calcul des caractéristiques des amplitudes modales, nous savons que le coefficient de dissymétrie ne peut à nouveau que diminuer. Etant donné que les réponses modales présentent une certaine composante dynamique, cette réduction est assez faible mais non négligeable. Pour le premier mode propre, on passe de $\gamma_{3\ F^*} = -0.3535$ à $\gamma_{3\ \eta} = -0.292$, soit une réduction d'environ 20%¹⁷.

Etant donné que les amplitudes des modes 2 et 3 sont très faibles (colonne $\sigma_{\eta\ exact}$ du tableau 15.8), les déplacements des noeuds de la structure s'expriment presque exclusivement en fonction de l'amplitude dans le premier mode. Il est donc assez logique de retrouver les mêmes caractéristiques de dissymétrie pour les déplacements structurels que pour l'amplitude modale dans le premier mode. Les grandeurs que nous avons obtenues pour les déplacements des noeuds de la structure sont repris au tableau 15.9.

Les densités spectrales de quelques déplacements ont déjà été données à l'occasion de la présentation des résultats de la méthode par simulations de Monte Carlo. Nous pouvons également représenter le bispectre du déplacement à mi-travée (Fig. 15.38). Cette représentation indique une composante quasi-statique significative. C'est la composante qui est essentiellement responsable de la dissymétrie de la densité de probabilité du déplacement à mi-travée.

Avant de conclure la présentation des résultats obtenus lorsque le coefficient aérodynamique est linéarisé, nous pouvons comparer les déplacements structurels obtenus pour les deux méthodes envisagées (tableaux 15.7 et 15.9). L'écart type du déplacement à mi-travée que nous obtenons à l'aide de la seconde méthode ($\sigma_x = 0.01056\ m$) est en très

¹⁷ce qui est également la proportion de la composante dynamique dans la réponse au second ordre. Cette constatation n'est pas générale et dépend de la forme des modes propres.

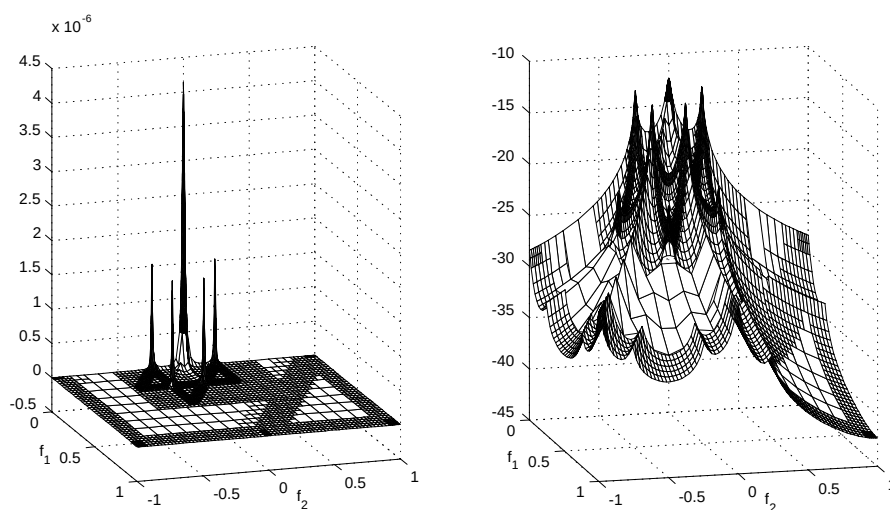


FIG. 15.38 – Bispectre du déplacement à mi-travée (coefficient aérodynamique linéarisé)

bon accord avec celui obtenu par simulations de Monte Carlo ($\sigma_x = 0.01070 \text{ m}$), compte tenu que nous avons une dispersion de 3.2% sur cette dernière valeur. De même, à l'ordre 3, les résultats coïncident assez remarquablement car nous obtenons un coefficient de dissymétrie $\gamma_{3x} = 0.2919$ pour la seconde méthode à comparer avec $\gamma_{3x} = 0.2840$ pour l'approche temporelle pas-à-pas. L'écart entre ces deux valeurs est donc d'environ 10%, ce qui est très faible vis-à-vis de la dispersion que nous avons obtenue lors des simulations temporelles ($\delta = 60\%$!). Cette constatation semble donc montrer que, bien que les résultats d'une approche par simulation soient fortement dispersés, la valeur moyenne obtenue peut néanmoins être utilisée pour obtenir une bonne représentation de la grandeur statistique recherchée.

La bonne correspondance des résultats obtenus à partir de deux méthodes complètement différentes nous laissent confiant dans la programmation entreprise. Notons que le code de calcul opérant dans le domaine fréquentiel est limité à l'utilisation de composantes non cohérentes entre elles alors que la méthode temporelle établie permet d'ores et déjà l'imposition d'une cohérence entre ces composantes. Les modifications à apporter au code opérant dans le domaine fréquentiel sont cependant minimales et se basent sur les développements tout à fait généraux que nous avons présentés au paragraphe 15.2.

Cette première étape que nous venons de présenter était la validation d'une analyse stochastique avec prise en compte des termes quadratiques du chargement. Nous avons successivement étudié les situations intermédiaires brièvement introduites ci-avant. La présentation de toutes ces étapes rendrait assurément l'exposé lassant ; nous avons choisi de passer directement à la présentation de l'analyse en champ de turbulence bidimensionnel, avec prise en compte des termes quadratiques de la turbulence ainsi que de la non linéarité du coefficient aérodynamique.

Les résultats de cette analyse à l'aide de la méthode de Monte Carlo ont déjà été présentés au tableau 15.7. Il ne nous reste donc qu'à présenter les modifications complémentaires qui nous ont permis de mener l'approche dans le domaine fréquentiel.

La relation 15.7 (p. 496) montre que la courbure du coefficient aérodynamique se

manifeste au niveau du chargement par une intégrale de convolution. Lors de l'étude de l'oscillateur simple, ou plutôt d'une structure sans dimensions (car c'est plutôt d'un effet de dimensions qu'il s'agit), ce terme d'autoconvolution ne posait aucun problème car il pouvait être intégré numériquement. Maintenant que nous sommes passés à l'étude d'une structure à plusieurs degrés de liberté, nous devons être en mesure d'étudier les densités spectrales de sollicitations croisées entre différents noeuds de la structure. Dans un champ de turbulence à cohérence exponentiellement décroissante, l'intégrale de convolution à calculer s'exprime par :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_i w_j}(\omega_1) S_{w_i w_j}(\omega - \omega_1) d\omega_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{S_{w_i}(\omega_1) S_{w_j}(\omega_1)} e^{-C|\omega_1| \Delta_{ij}} \sqrt{S_{w_i}(\omega - \omega_1) S_{w_j}(\omega - \omega_1)} e^{-C|\omega - \omega_1| \Delta_{ij}} d\omega_1 \end{aligned} \quad (15.87)$$

Cette intégrale ne peut pas être calculée analytiquement, même si les densités spectrales unilatérales aux noeuds i et j sont identiques ($S_{w_i}(\omega_1) = S_{w_j}(\omega_1)$) et représentées par une densité spectrale aussi simple que celle d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Pour prendre en compte les effets au second ordre de la non linéarité du coefficient aérodynamique, nous avons imaginé deux solutions :

- la première consiste à simplifier l'intégrale à calculer. Nous avons travaillé sur un modèle de cohérence simplifié où l'exponentielle décroissante peut être approchée par une fonction polynômiale beaucoup plus simple. Cette solution permet d'obtenir une forme analytique simple pour le résultat de l'autoconvolution. Elle présente cependant l'inconvénient de travailler sur une seule densité spectrale ; les développements doivent donc être entrepris pour toutes les densités spectrales unilatérales qui peuvent être considérées en pratiques (Von Karman, Davenport ...). Aussi, nous pouvons noter que, dans le cadre du problème que nous étudions ici, l'application de cette méthode ne nous rend pas exactement les bonnes variances des sollicitations généralisées (écart de 10% à 20%) puisque la cohérence entre les sollicitations appliquées est approchée ;
- la seconde solution consiste à réaliser l'intégration numérique pour obtenir l'autoconvolution voulue. Par rapport à la première solution, cette méthode ne se vaut aucunement subtile puisqu'il s'agit de la solution rigoureuse. Nous avons cependant choisi cette méthode car elle permet de travailler avec une large gamme de densités spectrales unilatérales sans aucun effort de calcul ou de programmation supplémentaire. Au rang des inconvénients, on peut affirmer que cette méthode présente un effort de calcul considérablement plus important.

Afin de simplifier la présentation, nous allons présenter l'application de la méthode retenue dans le cadre du problème que nous étudions. Dans ce cas, les densités spectrales unilatérales sont identiques en tout point de la structure et l'intégrale à calculer (numériquement) s'exprime par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_w(\omega_1) e^{-C|\omega_1| \Delta_{ij}} S_w(\omega - \omega_1) e^{-C|\omega - \omega_1| \Delta_{ij}} d\omega_1 \quad (15.88)$$

soit le produit de deux fonctions $S_w(\omega_1) e^{-C(\omega_1) \Delta_{ij}}$ et $S_w(\omega - \omega_1) e^{-C(\omega - \omega_1) \Delta_{ij}}$ présentant un maximum dans le voisinage de $\omega_1 = 0$ et, respectivement, $\omega_1 = \omega$. Le schéma d'intégration retenu consiste donc à disposer les points d'intégration de façon optimale

dans le voisinage de ces deux zones critiques. Au total, nous utilisons 121 points d'intégration dans chacune de ces deux zones critiques, ce qui donne ainsi un nombre maximum de 242 points d'intégration pour le calcul de cette intégrale. Nous parlons d'un nombre maximum de points d'intégration car les domaines couverts par chacune de ces deux zones¹⁸ peuvent éventuellement être recouverts. Dans ce cas, les points d'intégration situés dans le recouvrement ne sont pris en compte qu'une seule fois. A la limite, l'intégrale doit être estimée pour $\omega = 0$ et les deux domaines d'intégrations coïncident. Dans ce cas, l'intégrale est estimée à l'aide de 121 points uniquement.

L'application de cette méthodologie pour chacune des fréquences de calcul des densités spectrales (pour rappel, nous utilisons 274 fréquences réparties de façon optimale) permet d'établir la matrice des densités spectrales des forces nodales qui prend en compte la non linéarité du coefficient aérodynamique. Tout comme pour l'étude précédente, les éléments diagonaux de cette matrice sont tous identiques. La figure 15.39 représente la densité spectrale de la sollicitation que nous avons à l'étape précédente ainsi que le complément à lui ajouter provenant de l'intégrale de convolution.

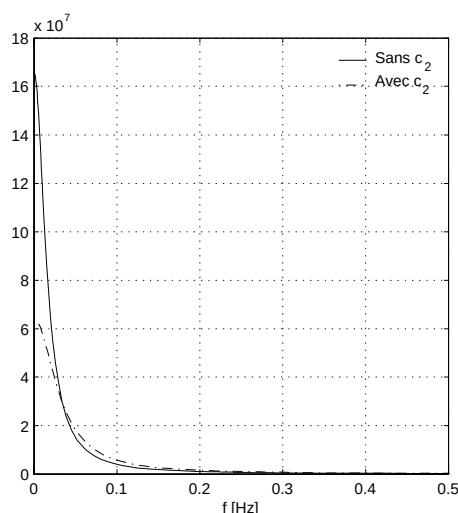


FIG. 15.39 – Densité spectrale de la sollicitation nodale de la première analyse (sans c_2 , trait continu) et complément à ajouter pour prendre en compte le chargement de façon plus rigoureuse

Tout comme les résultats des autoconvolutions que nous avons présentées à l'occasion de l'étude de l'oscillateur simple, le complément de sollicitation présente un étalement plus important vers les hautes fréquences. Cela signifie donc que ce terme de chargement engendrera, proportionnellement, une réponse quasi-statique moins importante que la réponse dynamique.

Nous sommes relativement confiants vis-à-vis de la méthode d'intégration choisie. Pour preuve, nous nous tournons vers l'écart type de la sollicitation incluant le terme d'autoconvolution. Cette grandeur est obtenue par intégration de la densité spectrale

¹⁸le plus petit intervalle de $[-\frac{10}{C\Delta_{ij}}, +\frac{10}{C\Delta_{ij}}]$ et $[-20\alpha; 20\alpha]$

établie :

$$\sigma_F = 9.6021.10^3 N \quad (15.89)$$

Elle est plus importante que la grandeur que nous avons calculée à l'étape précédente ($\sigma_F = 7.2151.10^3 N$) ; ceci montre que le terme de chargement complémentaire n'est pas sans intérêt. L'écart type de la sollicitation obtenu peut être comparé à l'écart type théorique (15.78) qui donne $\sigma_F = 9.6035.10^3 N$. C'est en ce sens que nous justifions l'efficacité de la méthode d'intégration développée.

Avant de passer aux caractéristiques des réponses modales et structurelles, nous allons nous pencher sur la représentation de la sollicitation au troisième ordre. Nous savons (p. 549) que le coefficient c_2 intervient de deux façons différentes au niveau de l'expression du bispectre de sollicitation. La première est tout à fait classique et ne fait intervenir que les expressions des densités spectrales croisées. L'estimation de ces termes est donc en tout point similaire à ce qui a été réalisé dans la première phase des calculs. Quant à la seconde manifestation du terme c_2 , il s'agit à nouveau d'une intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) S_{w_j w_k}(\omega) S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega)}{\bar{U}^6} d\omega \quad (15.90)$$

Tout comme l'intégrale de convolution qui est apparue au second ordre, cette intégrale ne peut pas être calculée analytiquement lorsque $i \neq j \neq k$. Les deux solutions que nous avons proposées peuvent à nouveau s'appliquer. Plutôt que de simplifier la prise en compte de la cohérence, nous avons cette fois également choisi une intégration numérique de cette expression. La forme de l'intégrand est sensiblement identique à celle que nous avons au second ordre, mis à part que cette fois, la fonction à intégrer présente trois pics et non plus deux. Nous avons programmé une méthode d'intégration sur trois zones distinctes (avec prise en compte des recouvrements) situées dans le voisinage de chacun des pics.

La partie gauche de la figure 15.40 représente le bispectre de la sollicitation appliquée en un des noeuds lorsque seuls les termes d'ordres 4 en l'intensité de la turbulence sont pris en compte. Il s'agit du bispectre de l'étape précédente (qui, rappelons-le, était positif) auquel nous avons ajouté la première manifestation du coefficient c_2 . Cette première contribution est négative et tellement importante en valeur absolue que le bispectre de sollicitation résultant est négatif. La partie droite du graphique représente le complément de bispectre que l'on peut associer à la seconde manifestation du coefficient c_2 , celle qui fait intervenir l'intégrale. Ce complément de bispectre à ajouter est d'un ordre de grandeur comparable au bispectre de la partie gauche du graphique. Ceci montre donc que la prise en compte de la non linéarité du coefficient aérodynamique ne peut pas se limiter à la considération des termes de chargement d'ordre 4 en l'intensité de turbulence, mais doit également inclure les termes d'ordre 6.

De même que l'autoconvolution de la densité spectrale était proportionnellement plus étalée vers les hautes fréquences que la densité spectre elle-même (Fig. 15.39), le complément de bispectre provenant de l'intégrale est plus étalé vers les hautes fréquences que le bispectre résultant des termes d'ordre 4 en l'intensité de turbulence. Nous pouvons observer ceci en traçant l'évolution dans le domaine des fréquences du rapport entre ces contributions d'ordres différents au bispectre. La figure 15.41 montre que ce rapport est bien plus petit que l'unité dans le voisinage de l'origine (le pic à l'origine du graphique

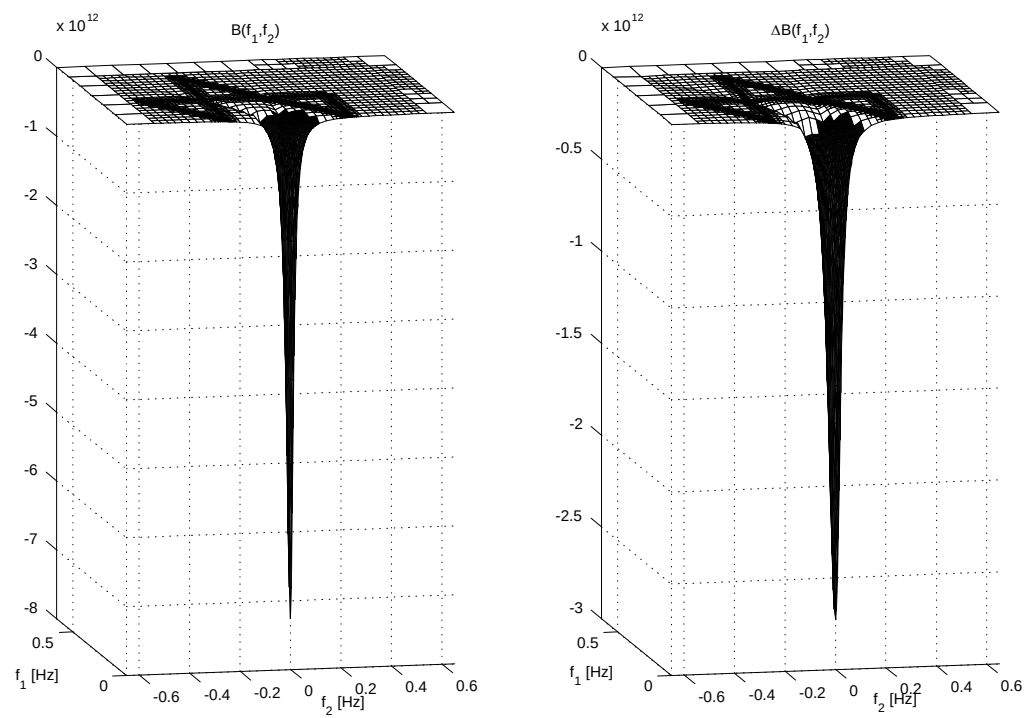


FIG. 15.40 – Bispectres de sollicitation provenant des termes d'ordre 4 (gauche) et 6 (droite) en l'intensité de turbulence

de gauche de la figure 15.40 est plus important que celui du graphique de droite) mais est plus grand que l'unité dans le domaine des fréquences plus éloignées. Plus particulièrement, ceci est également vrai au droit des pics du second noyau de Volterra que l'on peut localiser grâce à une densification du maillage. Cela signifie donc que le complément de bispectre ne peut pas être négligé lorsque la structure est peu amortie et que la composante dynamique est très importante.

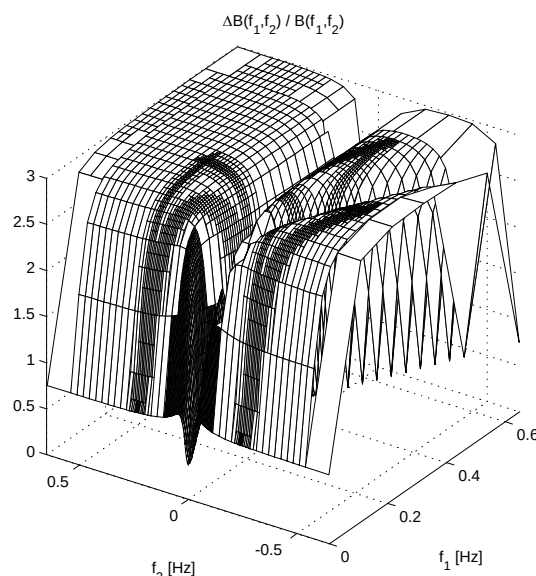


FIG. 15.41 – Rapport entre contributions au bispectre de sollicitation d'ordres 4 et 6

L'intégration sur le domaine bidimensionnel des fréquences permet d'obtenir le moment centré de troisième ordre de la sollicitation. Les coefficients de dissymétrie associables aux deux contributions du bispectre sont :

$$\gamma_{3F} = -0.8006 \quad \text{et} \quad \Delta\gamma_{3F} = -0.7798 \quad (15.91)$$

soit un coefficient de dissymétrie total $\gamma_{3F} = -1.5804$. Cette grandeur peut être comparée au coefficient de dissymétrie théorique ($\gamma_{3F} = -1.6193$) que nous avons établi ci-avant (Eq. 15.81).

Le tableau 15.10 résume les grandeurs statistiques principales des sollicitations et amplitudes modales. Par rapport à la première étude où le coefficient aérodynamique était linéarisé, nous pouvons constater une faible diminution de la part de la contribution quasi-statique dans la réponse modale. Nous pouvons également constater, comme annoncé à l'occasion des sollicitations nodales, une augmentation des écarts-type des forces généralisées et donc également aussi des amplitudes modales.

Quant aux caractéristiques d'ordre 3, nous attirons simplement l'attention sur le fait que le bispectre unilatéral est toujours nul dans le second mode (cela ne dépend que des caractéristiques structurales) et que les coefficients de dissymétrie ont cette fois changé de signe.

La figure 15.42 représente la densité spectrale du déplacement à mi-travée, lorsque le coefficient aérodynamique est linéarisé ou non. La conclusion principale rejoint des

	Forces généralisées		Amplitudes modales			
	σ_{F^*}	$\gamma_3 F^*$	$\sigma_{\eta \text{ exact}}$	$\sigma_{\eta QS}$	$\frac{\sigma_{QS}}{\sigma_{\text{exact}}}$	$\gamma_3 \eta$
MODE 1	31.1842	1.4302	18.3011	13.7398	75.1%	0.9246
MODE 2	15.2037	0.0000	0.5864	0.4185	71.4%	0.0000
MODE 3	12.9522	1.0873	0.0824	0.0703	85.3%	0.6797

TAB. 15.10 – Caractéristiques statistiques des grandeurs modales

remarques déjà formulées : la prise en compte de la non linéarité de ce coefficient augmente la variance de la réponse. Ce graphique montre également que l'énergie de la réponse structurelle reste essentiellement concentrée dans le voisinage des basses fréquences ainsi que dans le voisinage du pic du premier mode propre.

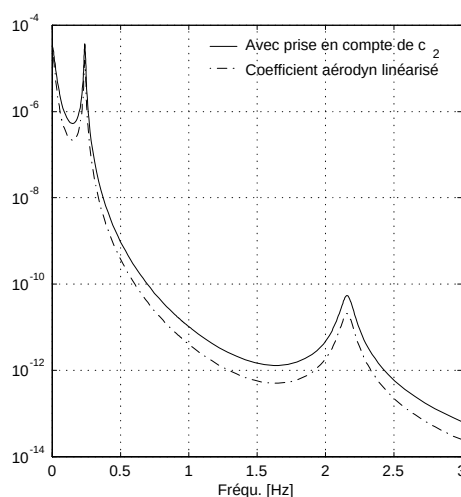


FIG. 15.42 – Densité spectrale du déplacements à mi-travée (avec ou sans la linéarisation du coefficient aérodynamique)

Au troisième ordre, le bispectre du déplacement à mi-travée prend une forme complètement différente puisqu'il est maintenant négatif. Il est représenté à la figure 15.43, en axes cartésiens et en axes logarithmiques (en valeur absolue dans ce cas).

Les constations que l'on peut tirer de la topologie des densités spectrales et des bispectres est généralement assez limitée. Au tableau 15.11, nous résumons donc également les grandeurs statistiques des déplacements des noeuds de la structure. Nous allons simplement nous contenter de vérifier que ces résultats s'accordent assez bien avec ceux qui ont été obtenus à l'aide de l'approche par simulations de Monte Carlo.

Au second ordre, cet accord est remarquable : $\sigma_x = 14.495 \cdot 10^{-3}$ pour cette approche dans le domaine fréquentiel contre une moyenne de $\sigma_x = 14.406 \cdot 10^{-3}$ pour l'approche à l'aide des simulations de Monte Carlo. A nouveau, nous pouvons insister sur la qualité des échantillons générés. Cette bonne concordance nous rend également confiant vis-à-vis de l'approche dans le domaine fréquentiel et la prise en compte du terme d'autoconvolution du chargement.

Au troisième ordre, l'approche dans le domaine fréquentiel nous donne $\gamma_3 x = -0.9236$

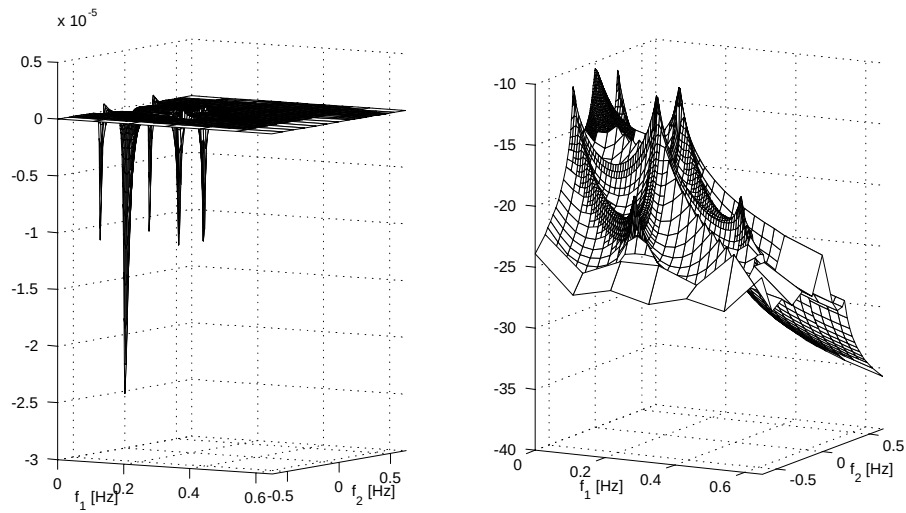


FIG. 15.43 – Bispectre du déplacement à mi-travée (en axes cartésiens ou logarithmiques)

	σ_x	γ_{3x}
Noeud 1	0	$\times$
Noeud 2	$5.584.10^{-3}$	-0.9259
Noeud 3	$10.290.10^{-3}$	-0.9250
Noeud 4	$13.407.10^{-3}$	-0.9240
Noeud 5	$14.495.10^{-3}$	-0.9236
Noeud 6	$13.407.10^{-3}$	-0.9240
Noeud 7	$10.290.10^{-3}$	-0.9250
Noeud 8	$5.584.10^{-3}$	-0.9259
Noeud 9	0	$\times$

TAB. 15.11 – Caractéristiques statistiques des déplacements

alors que l'approche par simulations temporelle nous a donné un moyenne $\gamma_{3x} = -0.7863$, soit un écart de 14.8%. Cet écart nous semble tout à fait honorable dans la mesure où la dispersion sur le coefficients de symétrie obtenu par l'approche temporelle est de 42%.

15.5 Conclusions

Les développements que nous avons menés au chapitre précédent ont permis d'obtenir une nouvelle formulation de la sollicitation aérodynamique. Cette sollicitation s'exprime maintenant en fonction de deux processus aléatoires u et w . Sur base d'un raisonnement en tout point identique à celui que nous avons présenté ci-avant, nous avons dans un premier temps donné les expressions des densités spectrales et des bispectres des sollicitations appliquées aux différents noeuds de la structure. Ces expressions sont en réalité les seules modifications apportées par rapport aux développements précédents. Le reste de la résolution suit la démarche habituelle : calcul des grandeurs statistiques des forces généralisées, puis des amplitudes modales et enfin des déplacements structurels et efforts internes.

Lors de l'étude d'une structure soumise à un champ de turbulence unidimensionnel, nous avons constaté que le coefficient de dissymétrie de la sollicitation s'exprimait par $3I_u$ où I_u représentait la seule et unique intensité de turbulence. Dans le cadre d'un champ de turbulence bidimensionnel, la non linéarité du coefficient aérodynamique doit (ou au moins peut) être prise en compte. Cela signifie donc que le coefficient de dissymétrie de la sollicitation dépend également des caractéristiques aérodynamiques du tablier. Cette première étude sur les caractéristiques de la sollicitation nous a montré que la linéarisation du coefficient aérodynamique pouvait engendrer une erreur significative sur le coefficient de dissymétrie obtenu. Pour fixer les idées, utiliser un coefficient aérodynamique linéaire peut donner une sollicitation à dissymétrie positive alors que la conservation du terme quadratique de ce coefficient donnerait une sollicitation à dissymétrie négative !

Après ces premières investigations sur les caractéristiques de la sollicitation, nous avons réalisé les études d'un oscillateur simple d'une part et d'une poutre sur deux appuis d'autre part. Ces études ont permis d'estimer également les effets de la non linéarité du coefficient aérodynamique sur la réponse structurelle. Il est relativement évident que les discordances obtenues vont dans le même sens que celles qui ont été relevées sur les sollicitations. Une approche par simulations de Monte Carlo a permis de reproduire des résultats identiques, ce qui a donc permis de valider les développements entrepris.

Dans ce chapitre, nous avons également donné quelques réflexions (reprises de notre travail de recherche intermédiaire [26]) concernant la formulation des caractéristiques statistiques nodales à considérer pour une simulation par éléments finis. Selon la formulation qui est choisie pour la représentation des sollicitations, une partie de l'énergie de la sollicitation aux hautes fréquences peut être perdue. Nous avons proposé une solution mettant en oeuvre les coefficients que nous appelons "d'admittance numérique" pour donner une meilleure représentation de la cohérence des pressions sur un élément fini.

Chapitre 16

Calcul d'une structure en champ tridimensionnel

"Les probabilités, c'est comme les mini jupes : ça donne des idées mais ça ne montre rien"

Meunier

"Les statistiques, c'est comme le bikini, ça montre tout, mais ça cache l'essentiel"

Louis Armand

16.1 Introduction

Les développements que nous avons réalisés au chapitre précédent constituent une progression par rapport au simple modèle de chargement unidimensionnel et ponctuel que nous avons étudié lors de la première partie du document. Au terme de ces développements complémentaires, nous sommes maintenant en mesure d'étudier le comportement d'une structure plane soumise à une turbulence bidimensionnelle. Le modèle de calcul que nous avons développé permet également la prise en compte de la non linéarité des coefficients aérodynamiques. Ces coefficients peuvent éventuellement être différents d'un point à l'autre de la structure, ce qui permet d'étudier une structure composée de sections différentes. Ce code de calcul au troisième ordre, dans le domaine fréquentiel et en base modale, représente de façon assez précise un nombre relativement important de phénomènes. Néanmoins, l'analyse plus précise d'un ouvrage d'art complet doit éventuellement prendre en compte les caractéristiques tridimensionnelles du comportement structurel et/ou du chargement.

C'est pour cette raison que nous avons également intégré les développements présentés dans un code de calcul aux éléments finis plus performant. Ci-après, nous donnons une vue panoramique des possibilités offertes par le code choisi, *FineLg*, ainsi qu'un exposé

plus précis de ses limitations dans le cadre de l'analyse au vent turbulent. Ensuite, nous présenterons les modifications apportées au code pour pouvoir réaliser l'étude complète, jusqu'au troisième ordre d'une structure tridimensionnelle plongée dans un champ de turbulence tridimensionnel.

16.2 FineLg

16.2.1 Présentation du code

Le code aux éléments finis *FineLg* qui est développé conjointement entre le Bureau d'Etudes GREISCH et le département M&S de l'Université de Liège peut représenter le comportement tridimensionnel de structures. C'est ce logiciel qui a été utilisé par le Bureau d'Etude GREISCH pour représenter le phasage de la construction du Viaduc de Millau ainsi que les effets du vent turbulent qui sollicitent la structure pendant sa construction. Les premiers développements du code de calcul *FineLg* sont dus à F. Frey (1978, [41]). Initialement dédié à l'analyse statique des structures métalliques au second ordre, le code de calcul a connu une seconde importante modification au moment de la prise en compte du comportement tridimensionnel des structures, notamment lors de l'introduction de la fameuse poutre à 7 noeuds due à V. de Ville-de Goyet (1989, [28]). Dans le courant des années 90, le code de calcul a été complété par quelques autres chercheurs de sorte à en faire un logiciel d'analyse statique au second ordre très performant. Il possède une bibliothèque d'éléments finis assez vaste (poutres planes, poutres spatiales, barres, câbles, plaques, coques, ressorts) et permet la prise en compte des grands déplacements et la représentation des phénomènes d'instabilité tels le flambement, le voilement, le déversement. Les autres possibilités de ce logiciel sont la large gamme de lois constitutives élasto-plastiques, la prise en compte des contraintes résiduelles ou la possibilité d'introduire facilement des déformées initiales.

A la fin des années '90 (1996, [98]), le code de calcul a connu une nouvelle orientation : celle de l'analyse dynamique linéaire des structures. Désormais, outre la simple détermination des modes et fréquences propres, le code permet le calcul de la réponse dynamique d'une structure soumise à des sollicitations dynamiques (analyse pas-à-pas) en base modale ou en base structurelle. Les premiers aspects particuliers de l'analyse dynamique dans *FineLg* concernent l'étude des vibrations d'un pont sous le passage des véhicules. *FineLg* réalise également l'étude sismique de structures, sur base de spectres de réponse ou d'accélérogrammes artificiels générés. Des développements récents ([34]) ont mis en commun les deux parties essentielles du code de calcul de façon à pouvoir réaliser l'analyse dynamique non linéaire de structures.

Depuis 2001, le code de calcul a été étendu à l'analyse de structures soumises au vent turbulent. L'introduction dans le code de calcul de ces développements sont essentiellement dus à H. Somja et V. de Ville-de Goyet ([34]). La méthodologie d'analyse qui a été introduite dans le code de calcul est basée sur la référence bibliographique [70]. L'analyse est réalisée dans le domaine fréquentiel et en base modale. L'intégration des densités spectrales est réalisée à l'aide de l'approximation en bruit blanc, ce qui confère à l'analyse une rapidité d'exécution remarquable. Le code de calcul présente une très grande flexibilité vis-à-vis du chargement aérodynamique qui peut être pris en compte. En effet, le champ de turbulence est tridimensionnel et les densités spectrales unilatérales peuvent prendre des formes différentes dans différentes zones de la structure. De même,

le profil moyen de la vitesse du vent peut éventuellement être paramétré différemment d'un point à l'autre d'une même structure.

Les forces qui s'appliquent sur les éléments de la structure sont les forces de traînée, de portance et de moment. Les coefficients aérodynamiques sont définis de façon concise pour les sections non symétriques, simplement symétriques ou doublement symétriques. Pour l'analyse, ces coefficients sont linéarisés de façon à représenter une sollicitation ainsi qu'une réponse gaussienne.

16.2.2 L'analyse au vent dans FineLg

Nous avons déjà mentionné que les possibilités au niveau du champ de turbulence sont assez vastes. Elles sont reprises de façon précise et exhaustive dans les références [34] (Rapport 5, Annexe X) et [36]. Etant donné que nous n'apportons aucune contribution personnelle à cet aspect de l'étude, nous nous contenterons uniquement de présenter la façon dont les forces aérodynamiques sont calculées. Nous présentons dans un premier temps les développements qui ont été réalisés par H. Somja. Ceci devrait donner une idée des possibilités et limitations du code de calcul, avant que nous introduisions nos apports personnels. Dans un second temps, nous préciserons la façon dont le code a été complété.

La figure 16.1 représente les trois systèmes de référence nécessaires à l'expression des forces appliquées sur la structure. Le premier système de référence (X_v, Y_v, Z_v) permet de représenter les caractéristiques du vent. Ce système d'axes peut être a priori différent du système d'axes globaux (X_g, Y_g, Z_g) utilisé pour représenter le modèle éléments finis. La matrice de rotation $[R_v]$ permet de passer d'un système de référence à l'autre.

Au moment de l'établissement de matrices de masse et de raideur structurales (*FIRST*), tous les éléments finis constitutifs de la structure sont passés en revue. Pour chaque élément, les matrices élémentaires sont calculées puis ajoutées, après rotation et localisation, à la matrice globale correspondante. C'est à ce moment également que les sollicitations aérodynamiques sur les éléments sont calculées.

Considérons, pour les développements, un élément fini dont les axes de référence locaux (x_e, y_e, z_e) sont repérés en fonction des axes globaux par la matrice de rotation $[R_e]$.

Soit $\{d_v\}$, $\{d_g\}$ et $\{d_e\}$ des vecteurs exprimés dans les trois repères qui viennent d'être introduits. Grâce aux matrices de rotation introduites, on peut écrire :

$$\{d_v\} = [R_v] \{d_g\} \longleftrightarrow \{d_g\} = [R_v]^T \{d_v\} \quad (16.1)$$

$$\{d_e\} = [R_e] \{d_g\} \longleftrightarrow \{d_g\} = [R_e]^T \{d_e\} \quad (16.2)$$

Dans les axes de référence liés à l'élément fini étudié, les composantes du vent s'expriment par :

$$\{U_e\} = \underbrace{[R_e][R_v]^T}_{[R_{ev}]} \begin{Bmatrix} \bar{U} + u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{Bmatrix} \quad (16.3)$$

Les cosinus directeurs ($[R_{ev}]$) de chacune des composantes du champ de vitesse de vent $(\bar{U}, u(t), v(t), w(t))$ occupent une place importante dans l'établissement des sollicitations. Ils sont représentés sur la partie droite de la figure 16.1. Dans le système d'axes liés à l'élément, il importe essentiellement de déterminer les composantes de la turbulence dans

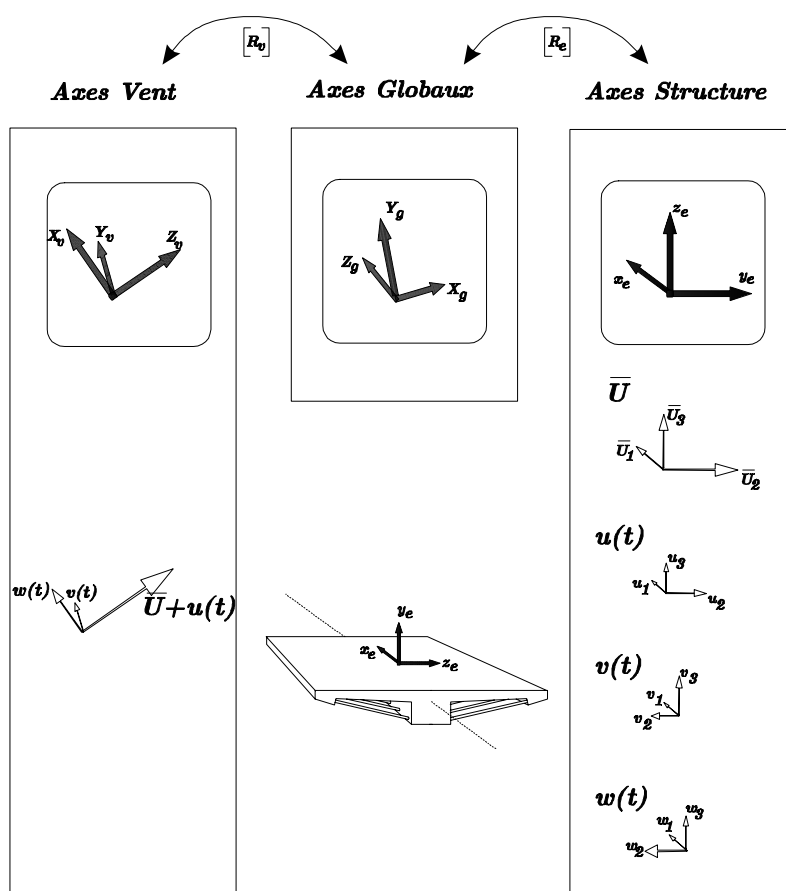


FIG. 16.1 – Représentation des systèmes de référence

les directions perpendiculaires à l'élément¹ :

$$U_{e_y} = R_{ev2,1} (\bar{U} + u(t)) + R_{ev2,2} v(t) + R_{ev2,3} w(t) \quad (16.4)$$

$$U_{e_z} = R_{ev3,1} (\bar{U} + u(t)) + R_{ev3,2} v(t) + R_{ev3,3} w(t) \quad (16.5)$$

Ces expressions sont les deux expressions des composantes de la turbulence qui permettent de retrouver les développements que nous avons menés ci-avant.

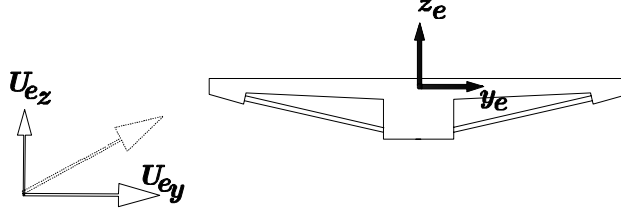


FIG. 16.2 – Représentation des vitesses de vent en axes locaux

L'expression des forces aérodynamiques se base sur la formulation quasi-permanente (13.21, p. 469). L'estimation des forces appliquées sur l'élément nécessite le calcul de la norme de la vitesse² du vent ainsi que de l'angle d'incidence apparent.

La partie linéaire de l'expression de la norme de la vitesse du vent transversal à l'élément s'exprime par :

$$V_{el}^2 = U_{e_y}^2 + U_{e_z}^2 \simeq \bar{U}^2 \left(a_1 + a_2 \frac{u(t)}{\bar{U}} + a_3 \frac{v(t)}{\bar{U}} + a_4 \frac{w(t)}{\bar{U}} \right) \quad (16.6)$$

où les paramètres a_1 à a_4 s'expriment à partir des éléments de la matrice de rotation R_{ev} . L'angle d'incidence du vent s'exprime par :

$$i_{el} = \arctan \frac{U_{e_z}}{U_{e_y}} \simeq \arctan \frac{R_{ev3,1}}{R_{ev2,1}} + i_1 \frac{v(t)}{\bar{U}} + i_2 \frac{w(t)}{\bar{U}} \quad (16.7)$$

où le dernier résultat a été obtenu à partir d'un développement en série de l'arctan³. Puisque les composantes $v(t)$ et $w(t)$ de la turbulence sont à moyenne nulle, cette relation montre que l'angle d'incidence moyen est :

$$\bar{i}_{el} = \arctan \frac{R_{ev3,1}}{R_{ev2,1}} \quad (16.8)$$

Dans sa version initiale, le code prévoit de travailler exclusivement avec une version linéarisée des coefficients aérodynamiques. Ces coefficients sont donc linéarisés autour de l'angle d'incidence moyen :

$$C(i_{el}) = C(\bar{i}_{el}) + \left. \frac{dC}{di} \right|_{i=\bar{i}_{el}} (i_{el} - \bar{i}_{el}) = C(\bar{i}_{el}) + \left. \frac{dC}{di} \right|_{i=\bar{i}_{el}} \left(i_1 \frac{v(t)}{\bar{U}} + i_2 \frac{w(t)}{\bar{U}} \right) \quad (16.9)$$

¹ Le code suppose que la composante longitudinale (dans l'axe de l'élément) n'a pas d'effet. Ceci revient à négliger une éventuelle rugosité dans le sens longitudinal.

² Le terme d'amortissement aérodynamique est pris en compte séparément ; c'est pour cette raison que la vitesse absolue (plutôt que la vitesse apparente) peut être considérée.

³ Pour la présentation, nous avons conservé les notations i_1 et i_2 de H. Somja. Dans la suite, lors de la généralisation de l'expression de l'effort, nous utiliserons une notation qu'il convient de ne pas confondre avec celle-ci.

La figure 16.3 illustre la façon dont le coefficient aérodynamique est linéarisé dans *FineLg*. Le coefficient est approché par une expression linéaire :

- de façon à représenter correctement le coefficient aérodynamique pour une incidence égale à l'incidence moyenne ;
- dont la pente est estimée par différence finie avec un pas borné fixé par l'utilisation. Nous avons utilisé $\Delta i = 6^\circ$ pour l'illustration de la figure 16.3.

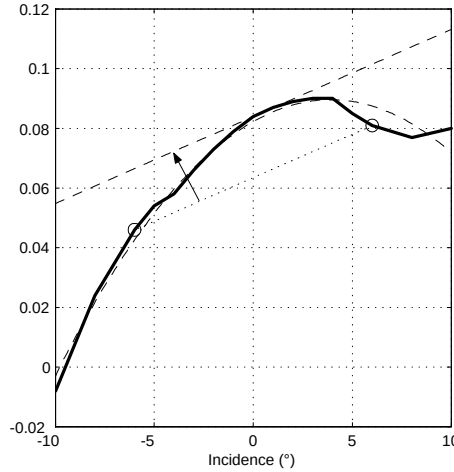


FIG. 16.3 – Approche du coefficient aérodynamique par des fonctions polynômiales

Nous avons inclus dans le logiciel de calcul les développements présentés au paragraphe 14.4. Le code de calcul permet donc maintenant également de linéariser les coefficients aérodynamiques par une méthode des moindres carrés avec des poids de pondération à distribution gaussienne dont l'écart type peut être fixé par l'utilisateur.

Les développements suivants sont identiques pour les trois forces aérodynamiques (traînée, portance, moment). Pour une des ces trois forces, on peut écrire :

$$F = \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left(a_1 + a_2 \frac{u(t)}{\bar{U}} + a_3 \frac{v(t)}{\bar{U}} + a_4 \frac{w(t)}{\bar{U}} \right) \left(C(\bar{i}_{el}) + \frac{dC}{di} \right)_{i=\bar{i}_{el}} \left(i_1 \frac{v(t)}{\bar{U}} + i_2 \frac{w(t)}{\bar{U}} \right) \quad (16.10)$$

Cette expression est toujours quadratique. Tout comme aux développements présentés au paragraphe 14.2, cette relation est de nouveau simplifiée de façon à ne conserver que les termes de chargement linéaires :

$$F = \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left(a_1 C(\bar{i}_{el}) + a_2 C(\bar{i}_{el}) \frac{u(t)}{\bar{U}} + \left[a_3 C(\bar{i}_{el}) + a_1 \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} i_1 \right] \frac{v(t)}{\bar{U}} + \left[a_4 C(\bar{i}_{el}) + a_1 \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} i_2 \right] \frac{w(t)}{\bar{U}} \right) \quad (16.11)$$

Cette opération peut être répétée pour les trois forces aérodynamiques de façon à établir, dans les axes locaux, une relation entre les sollicitations appliquées et les composantes de vent. Les grandeurs qui sont obtenues par cette relation sont en réalité des forces par unité de longueur et représentent les charges réparties sur la longueur de l'élément.

Dans la logique de la démarche "éléments finis", la représentation du champ de turbulence se limite aux valeurs prises par les composantes u , v et w aux noeuds de la structure. Pour la programmation dans le code de calcul, la vitesse sur un élément est supposée être constante et égale à la moyenne des vitesses aux extrémités de cet élément. Au vu des développements du paragraphe 15.4.2, cela signifie donc que les hautes fréquences du chargement ne seront pas bien représentées⁴, à moins d'utiliser les fonctions d'admittance adéquates.

Moyennant ces hypothèses, les expressions des forces aux noeuds de l'élément (dans les axes locaux) peuvent être exprimées, par une relation linéaire, en fonction des composantes de la turbulence :

$$\{F_{el}\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = [M_{F_{vel}}] \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{u(t)}{U} \\ \frac{v(t)}{U} \\ \frac{w(t)}{U} \end{Bmatrix} \quad (16.12)$$

Finalement, les efforts peuvent être exprimés dans les axes globaux, de façon à obtenir une relation entre les sollicitations (en axes globaux cette fois) et les composantes de la turbulence aux noeuds de la structure :

$$\{F_{glob}\} = [R_e]^T \{F_{el}\} = \underbrace{[R_e]^T [M_{F_{el}}]}_{[M_{F_{glob}}]} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{u(t)}{U} \\ \frac{v(t)}{U} \\ \frac{w(t)}{U} \end{Bmatrix} \quad (16.13)$$

Les éléments de la matrice $[M_{F_{glob}}]$ sont ensuite placés dans une plus grande matrice $[M_F]$ qui comporte quatre colonnes et autant de lignes que de degrés de liberté. Les éléments qui sont placés dans cette matrice sont éventuellement ajoutés aux éléments qui y étaient déjà présents.

A la fin de ce premier bouclage, tous les éléments ont été passés en revue et nous disposons alors d'une matrice $[M_F]$ qui relie tous les efforts nodaux aux composantes de la turbulence en tous les noeuds de la structure (comme cela est également réalisé dans notre code de calcul, § 15.4.2).

Après cette première étape, l'analyse de la structure continue ensuite avec le calcul des modes propres et fréquences propres. Ensuite, nous savons que les densités spectrales des forces généralisées et des amplitudes modales peuvent être calculées. Le code de calcul se contente de calculer les variances des amplitudes modales (et non pas les covariances entre amplitudes dans des modes différents).

Pour un mode particulier, la variance de l'amplitude modale est calculée par la méthode d'approximation en bruit blanc. Cela signifie donc que seules suffisent la variance de la force généralisée dans ce mode et la densité spectrale de la sollicitation pour une fréquence égale à la fréquence propre du mode étudié. L'estimation de la force généralisée

⁴Le modèle qui a été utilisé pour l'étude du Viaduc a été discrétisée avec des éléments assez courts ($\simeq 10m$). Les "hautes fréquences" dont nous parlons ici sont supérieures aux fréquences propres structurales ; aucun problème n'est donc à craindre.

est entreprise par la relation :

$$S_{F_i^*}(f_i) = \{\Phi_i\}^T [S_F(f_i)] \{\Phi_i\} = \{\Phi_i\}^T [M_F]^T [S_u(f_i)] [M_F] \{\Phi_i\} \quad (16.14)$$

où $[S_u]$ représente la densité spectrale des composantes de la turbulence (en tous les noeuds de la structure). Cette opération est réalisée à l'aide d'un double bouclage sur les degrés de liberté et d'un double bouclage sur les modes propres. Dans les développements, nous profitons également de ces bouclages sur les degrés de liberté pour établir la variance de la force généralisée, valeur à l'origine de la fonction d'autocorrélation :

$$R_{F_i^*}(\Delta t) = \{\Phi_i\}^T [R_F(\Delta t)] \{\Phi_i\} = \{\Phi_i\}^T [M_F]^T [R_u(\Delta t)] [M_F] \{\Phi_i\} \quad (16.15)$$

Notons que cette façon de procéder présente une légère inconsistance dans la mesure où les cohérences entre composantes de la turbulence sont prises en compte dans le domaine fréquentiel dans 16.14 à l'aide des coefficients de cohérence C_x, C_y, C_z et dans le domaine temporel dans 16.15 à l'aide des échelles de turbulence⁵.

Ces deux dernières relations permettent donc d'appliquer la méthode d'approximation en bruit blanc, de façon à établir la variance de l'amplitude dans le mode propre étudié. Cette opération est répétée pour les modes propres choisis pour l'étude de la structure. Ceci permet donc d'établir la matrice des covariances des amplitudes modales $[\sigma_\eta^2]$ ⁶. A ce stade du calcul, un facteur de pointe pourrait être calculé pour chaque amplitude modale. L'option choisie dans le logiciel est de calculer un seul facteur de pointe, intermédiaire entre les facteurs de tous les modes propres. Ce choix présente l'avantage de faciliter la réalisation du calcul des grandeurs extrêmes : un seul facteur de pointe pour les déplacements, efforts, réactions et contraintes.

Lorsque les covariances des amplitudes modales sont déterminées, le calcul peut être considéré comme terminé. En effet, la fin de l'analyse (de retour dans *MASCOL*) consiste à établir les variances des déplacements, sans les contributions intermodales puisqu'elles ne sont pas évaluées. Cette opération est très rapide. En effet, elle consiste en une seule et simple sommation (Eq. 9.9, p. 346).

Pour finir, un dernier bouclage dans les éléments permet, également sur base des variances des amplitudes modales, de calculer les variances des forces nodales.

16.3 Développements personnels dans *FineLg*

Il faut avouer que les possibilités offertes par *FineLg* avant nos développements personnels étaient déjà assez vastes. Les développements de H. Somja que nous venons de présenter sont à féliciter. Nos contributions personnelles concernent des points très particuliers de l'analyse qui pourraient apparaître fort localisés. Ils ont cependant nécessité

⁵La caractérisation d'un champ de turbulence ne devrait en toute rigueur dépendre que de ces coefficients de cohérence ou des échelles de turbulence. Ces deux groupes de paramètres offrent une information redondante et ne pouvant en aucun cas coïncider. Ceci justifie l'inconsistance.

⁶Cette matrice est diagonale étant donné que les covariances entre amplitudes modales ne sont pas calculées. Cette façon de procéder présente l'avantage de ne pas devoir estimer les densités spectrales croisées entre forces généralisées. L'intégration des densités spectrales croisées entre amplitudes modales est considérée comme une opération compliquée (sauf numériquement). Nous avons cependant présenté une méthode d'adaptation de l'approximation en bruit blanc pour l'estimation des termes croisées (§ 9.2.4, p. 353). Cette relation pourrait être appliquée pour déterminer facilement une estimation des covariances entre amplitudes modales.

un certain remaniement de la programmation. Celle-ci a pu se dérouler grâce aux conseils opportuns de H. Degée et sa vaste connaissance de l'organisation du logiciel.

Les contributions personnelles que nous avons apportées à *FineLg* sont celles qui ont été discutées depuis le début de ce document (dans le domaine fréquentiel uniquement). Il nous paraît inutile de répéter en long et large toutes ces notions qui représentent déjà un volume assez conséquent. Nous pensons également qu'il est inutile de surcharger la présentation avec des détails de programmation. C'est pour ces deux raisons que nous pensons préférable de donner un bref exposé des modifications que nous avons apportées au logiciel⁷. Nous engageons cependant le lecteur à imaginer que le travail et le temps passé à la programmation dans ce code de calcul colossal ne sont pas proportionnels à l'espace qui lui est réservé dans cette présentation.

16.3.1 Représentation complète des densités spectrales

La première modification que nous avons apportée au code concerne l'intégration des densités spectrales. Dans la première partie de ce document, nous avons étudié quatre méthodes d'intégration numérique :

- Approximation en bruit blanc
- Approximation par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck
- Approximation du chargement par une somme de fonctions-impulsions
- Intégration numérique avec disposition optimale des points d'intégration

Rappelons que les deux premières méthodes d'intégration sont très rapides mais peu précises, la seconde l'étant cependant plus que la première. La troisième méthode est toujours une méthode approchée. Elle donne cependant des résultats beaucoup plus précis, mais au prix d'un effort de calcul plus important. Finalement, la quatrième méthode demande un peu plus de temps de calcul mais est rigoureuse (erreur de l'ordre du pour mille).

Avant notre intervention, *FineLg* présentait déjà la première possibilité d'intégration. Etant donné la rapidité de calcul des processeurs actuels, nous avons uniquement intégré la dernière méthode. Grâce à l'optimisation sur les positions des points d'intégration, le nombre de fréquences propres à traiter n'est pas si important et l'analyse de structures importantes (env. 10000 DDL) peut être réalisée en quelques minutes sur un processeur actuel.

En terme de programmation, cette modification consiste à calculer les densité spectrales des amplitudes modales pour une série de fréquences et non plus pour deux fréquences uniquement (la fréquence propre du mode considéré et un décalage temporel nul de façon à obtenir la variance de l'effort généralisé). Cela signifie également que nous avons dû introduire la routine d'établissement de la liste des fréquences de calcul. Notons que cette opération a été assez immédiate puisque cette routine fonctionne de façon déterministe à partir du moment où les fréquences propres et les coefficients d'amortissement modaux sont déterminés. Cette facilité d'exportation est un avantage de la routine de détermination de ces fréquences de calcul.

⁷Les détails de la programmation ont été consignés dans la référence [34] (Rapport 7, Annexe 8, 95 pages)

16.3.2 Prise en compte des contributions intermodales

Le second point important que nous avons présenté concerne la prise en compte des contributions intermodales. Bien que la présentation que nous en avons donnée à la seconde partie de ce document soit originale, ce phénomène de couplage entre modes propres (provenant d'une cohérence entre sollicitations généralisées) est relativement bien connu. Néanmoins, dans le domaine du génie civil, rares sont les codes de calcul qui prennent ces effets en compte. A titre d'exemple, les analyses sismiques en sont toujours à considérer des combinaisons SRSS (Square Root of the Sum of the Squares) bien plus souvent que des combinaisons CQC (avec prise en compte des corrélations entre amplitudes modales).

Bien que cet aspect semble conceptuellement assez simple, les modifications qu'il nécessite d'apporter au code de calcul sont assez importantes. La principale difficulté consiste au fait que la caractérisation des amplitudes modales (la matrice des covariances des amplitudes modales) nécessite maintenant une matrice, alors qu'avant, elle se limitait à la diagonale et donc à un simple vecteur. Les modifications ne s'arrêtent pas là. Il faut également mentionner que, quitte à calculer les caractéristiques de covariance entre modes propres, nous avons offert la possibilité de calculer des caractéristiques statistiques conjointes entre les déplacements en des noeuds différents.

Pour les grandes structures rencontrées en pratique, on imagine aisément qu'il est fastidieux de calculer, voire imprimer, les caractéristiques statistiques croisées entre tous les degrés de liberté de la structure. Nous avons donc décidé de continuer à calculer les variances des déplacements (la diagonale de la matrice des covariances) et de donner un ensemble de covariances entre déplacements qui est choisi par l'utilisateur.

Il est peut-être encore un peu tôt pour comprendre, à ce point de l'exposé, qu'il était nécessaire de détacher davantage les apports personnels de la programmation de ce qui existait alors dans *FineLg*. Au fur et à mesure des développements suivants, cela devrait apparaître comme une nécessité. Nous avons décidé de nous introduire dans une autre partie du logiciel, la branche dynamique, probablement plus propice à recevoir un tel genre d'étude. Il faut donc considérer maintenant que les matrices des covariances des amplitudes modales et ensuite des déplacements nodaux sont donc calculées dans une toute nouvelle routine.

Mentionnons également l'introduction d'une routine préalable qui calcule, fréquence par fréquence, la matrice de transfert en base modale. Cette modification était nécessaire de façon à pouvoir établir les termes de couplage entre amplitudes modales.

Il convient également de remarquer que l'analyse d'une structure avec prise en compte des couplages intermodaux nécessite un effort de calcul plus important. Ceci provient d'une double sommation pour le calcul des covariances des déplacements mais également (et surtout) de la nécessité d'établir les covariances entre amplitudes modales. La manifestation de cette double sommation se retrouve clairement dans la programmation par l'imbrication d'une boucle supplémentaire.

16.3.3 Calcul des efforts internes

Dans la version originelle de l'analyse au vent turbulent, les efforts internes étaient calculés exclusivement pour une moyenne quadratique de "forces modales", les équivalentes, mais en termes de forces, des modes propres. Cet extrait de programmation était récupéré de l'analyse sismique et ne permettait pas, in illo tempore, la combinaison des

sollicitations avec prise en compte des corrélations entre amplitudes modales.

Etant donné que nous avons localisé nos développements dans la branche dynamique du *FineLg*, il était impossible de repasser par la programmation existante pour le calcul des efforts internes. Nous avons alors choisi une orientation vers *THIRDY*. Cette routine est utilisée dans les analyses dynamiques linéaires (éventuellement) et non linéaires pour le calcul des efforts internes ; elle est un équivalent simplifié de la routine *THIRD* utilisée pour les analyses statiques non linéaires.

Le passage par cette routine nous semble assez logique et surtout respecte la philosophie du code de calcul. Tous les éléments sont donc finalement repassés en revue et les efforts internes sont calculés élément par élément. Pour chaque élément, la matrice de covariance des déplacements des noeuds de l'élément est établie. La multiplication à gauche et à droite par la matrice de raideur élémentaire permet alors d'obtenir la matrice des covariances des efforts intérieurs. Notons que cette méthode est sensiblement différente de celle qui consiste à utiliser les forces modales mais donne strictement les mêmes résultats.

Notons également que la connaissance de la matrice de covariance entre efforts internes permet de représenter les statistiques croisées entre différents efforts. Nous avons ainsi par exemple accès au coefficient de corrélation entre l'effort normal et les moments de flexion en une section déterminée. Les caractéristiques statistiques des contraintes introduites peuvent donc être calculées sans devoir postuler d'hypothèse sur le coefficient de corrélation entre ces grandeurs.

Notons également que la programmation que nous avons introduite permet le calcul des facteurs de pointe de chaque amplitude modale séparément, de chaque déplacement, ou de chaque effort intérieur.

16.3.4 Prise en compte de l'amortissement non proportionnel

Au chapitre 9, nous avons insisté sur la distinction entre deux types de couplage modal qui sont généralement confondus : le couplage intermodal et le couplage par amortissement non proportionnel. Ce type d'amortissement apparaît lorsque la matrice d'amortissement structural n'est pas diagonale dans la base des modes propres. En présence de ce genre d'amortissement, nous avons vu que la matrice de transfert généralisée ne pouvait plus être estimée aussi facilement. Pour traiter ce genre d'amortissement, nous avons présenté différentes solutions :

- inverser la matrice complète ;
- négliger les termes non diagonaux ;
- recourir à l'utilisation des modes propres complexes ;
- utiliser une méthode approchée basée sur le développement en série de l'inverse de la matrice.

La méthode qui était programmée dans *FineLg* consistait à négliger les termes non diagonaux de l'amortissement généralisé. Cette solution a été programmée ainsi dans le code de calcul car c'est celle qui est le plus souvent présentée dans les ouvrages de référence ([9], [70]).

La routine de calcul de la fonction de transfert modale que nous avons introduite permet de reproduire cette première solution. Elle peut également prendre en compte la non proportionnalité de façon plus rigoureuse, en inversant la matrice complète (d'impédance). Aussi, nous avons intégré la possibilité de travailler avec la méthode d'inversion

de la matrice quasi-diagonale de façon approchée. L'utilisateur a le loisir de conserver le nombre de corrections de son choix. Nous rappelons que cette méthode n'est vraiment intéressante que lorsque le nombre de corrections ajoutées s'élève à une ou deux.

Des quatre solutions proposées, seule la méthode recourant aux modes propres complexes n'a pas été intégrée, notamment parce que les routines de calcul aux valeurs propres disponibles dans le logiciel ne prévoient pas le calcul aux valeurs propres de problèmes complexes. Aussi, il convient de remarquer que l'acheminement des caractéristiques d'amortissement jusqu'à cet endroit du logiciel n'est pas réellement prévu et nécessite quelques importantes modifications qui rendrait, sauf réécriture, la lisibilité du code moins claire.

Il nous semble qu'à l'heure actuelle, les moyens informatiques mis à notre disposition permettent de résoudre les problèmes les plus complexes dans des délais tout à fait raisonnables à l'aide des trois méthodes programmées. Il faut en effet concéder que la partie de l'analyse consistant en la résolution en base modale occupe une place limitée (en temps de calcul) vis-à-vis de la projection en base modale des sollicitations. Cela nous laisse donc penser que, pour le nombre de modes propres rencontrés en pratique (de l'ordre d'une vingtaine), la méthode recourant à l'inversion de la matrice complète présente la meilleure précision à prix tout à fait abordable.

16.3.5 Introduction d'un chargement par forces nodales stochastiques

Les développements apportés dans le code de calcul aux éléments finis *FineLg* ne se limitent pas à l'étude de structures soumises au vent turbulent. Dans le cadre d'une analyse dynamique pas-à-pas (et donc déterministe), le logiciel prévoit la possibilité de chargement des noeuds de la structure par des forces nodales de formes très variées (impulsives, harmoniques, trapézoïdales, définies constantes ou linéaires par morceaux...). Nous avons également introduit dans le logiciel les équivalents aélatoires de ces sollicitations : les forces nodales stochastiques.

Cela signifie donc que *FineLg* peut maintenant étudier une structure soumise à des sollicitations aléatoires autres que le vent. Ces forces appliquées peuvent prendre des formes très variées (bruit blanc, Ornstein-Uhlenbeck, exponentielle, définie constantes ou linéaires par morceaux...). Ces forces nodales peuvent être rendues cohérentes en définissant un (ou plusieurs) champ(s) de cohérence entre forces appliquées. Cela nous a permis, par exemple, de reproduire, à l'aide du code de calcul plus performant, la simple étude d'une poutre sur deux appuis sollicitée en ses noeuds par des densités spectrales d'Ornstein-Uhlenbeck et présentant une cohérence exponentielle (§ 15.4).

16.3.6 Possibilité d'analyses par simulations de Monte Carlo

Au rang des analyses déterministes dans le domaine temporel, nous pouvons également mentionner notre participation à la prise en compte d'un chargement (pour une analyse pas-à-pas) défini par un fichier extérieur. Ce fichier extérieur doit contenir une colonne de définition de l'échelle du temps ainsi qu'autant de colonnes qu'il y a de charges appliquées sur la structure. Durant l'analyse pas-à-pas, ce fichier est relu de façon à obtenir (par interpolation) les sollicitations en chacun des instants de calcul.

Le générateur d'échantillons de vent *GWind3D* permet non seulement la génération d'histoires de vent (corrélées entre elles) mais également la génération de forces nodales.

En effet, lorsque le fichier de données introduit dans *GWind3D* est un fichier de données d'une analyse au vent turbulent, la géométrie de la structure et les caractéristiques de prises au vent sont interprétées à l'aide des routines équivalentes du *FineLg*. Ceci permet, après la création des vitesses en chacun des points de la structure, de générer également, et de façon tout à fait indépendante, les sollicitations appliquées en chacun des noeuds de la structure. En fin de génération, ces efforts sont alors sauves dans un fichier qui servira à l'analyse dynamique à l'aide de *FineLg*.

Tous les développements personnels qui viennent d'être présentés jusqu'à ce point permettent de réaliser l'analyse numérique d'une structure au second ordre (en termes de probabilités) dans les domaines fréquentiels et temporels. Les possibilités qui sont maintenant offertes devraient permettre de résoudre très facilement la majorité des problèmes pratiques rencontrés dans le domaine du génie civil. Bien qu'étant une contribution minime vis-à-vis des possibilités que *FineLg* offre à l'heure actuelle, il nous semble que la branche dynamique stochastique que nous avons intégrée vient compléter avantageusement le code de calcul aux éléments *FineLg*.

16.3.7 Prise en compte des termes d'ordres supérieur du chargement

Aux chapitres précédents, nous avons présenté la méthode d'analyse stochastique au troisième ordre d'abord d'un oscillateur simple, et ensuite d'une structure à plusieurs degrés de liberté. Les développements que nous avons présentés visent à prendre en compte les termes quadratiques de la turbulence ainsi que les non linéarités des coefficients aérodynamiques. Jusqu'à ce point, nous avons présenté la démarche pour l'étude d'une structure plongée dans un champ de turbulence bidimensionnel. Dans ce paragraphe, nous allons présenter brièvement les développements qui vont nous permettre de réaliser l'étude d'une structure tridimensionnelle ainsi que l'implantation de cette analyse dans le code de calcul *FineLg*. La présentation théorique que nous allons donner sera brève car les calculs sont en réalité assez longs et fastidieux, mais surtout présentent la même logique que les développements déjà présentés en champ bidimensionnel.

Lors de la présentation de la programmation de l'analyse au vent existant dans *FineLg* avant nos développements personnels, nous avons précisé la façon dont le champs de turbulence tridimensionnel pouvait être pris en compte. L'utilisation des différents systèmes de référence a permis finalement d'exprimer les composantes de la turbulence dans le plan de la section droite étudiée par :

$$U_{e_y} = R_{ev2,1} (\bar{U} + u(t)) + R_{ev2,2} v(t) + R_{ev2,3} w(t) \quad (16.16)$$

$$U_{e_z} = R_{ev3,1} (\bar{U} + u(t)) + R_{ev3,2} v(t) + R_{ev3,3} w(t) \quad (16.17)$$

Plutôt que de linéariser l'expression des sollicitations, nous allons cette fois conserver les termes de chargement quadratique. La norme de la vitesse du transversal s'exprime maintenant par :

$$V_{el}^2 = U_{e_y}^2 + U_{e_z}^2 = \bar{U}^2 \left(a_1 + a_2 \frac{u(t)}{\bar{U}} + a_3 \frac{v(t)}{\bar{U}} + a_4 \frac{w(t)}{\bar{U}} + a_5 \frac{u^2(t)}{\bar{U}^2} + a_6 \frac{u(t)v(t)}{\bar{U}^2} + a_7 \frac{u(t)w(t)}{\bar{U}^2} + a_8 \frac{v^2(t)}{\bar{U}^2} + a_9 \frac{v(t)w(t)}{\bar{U}^2} + a_{10} \frac{w^2(t)}{\bar{U}^2} \right) \quad (16.18)$$

où les coefficients a_1 à a_4 sont les mêmes que ceux qui ont été calculés par H. Somja. Ils s'expriment par :

$$\begin{aligned}
a_1 &= R_{ev2,1}^2 + R_{ev3,1}^2 \\
a_2 &= 2R_{ev2,1}^2 + 2R_{ev3,1}^2 \\
a_3 &= 2R_{ev2,1}R_{ev2,2} + 2R_{ev3,1}R_{ev3,2} \\
a_4 &= 2R_{ev2,1}R_{ev2,3} + 2R_{ev3,1}R_{ev3,3} \\
a_5 &= R_{ev2,1}^2 + R_{ev3,1}^2 \\
a_6 &= 2R_{ev2,1}R_{ev2,2} + 2R_{ev3,1}R_{ev3,2} \\
a_7 &= 2R_{ev2,1}R_{ev2,3} + 2R_{ev3,1}R_{ev3,3} \\
a_8 &= R_{ev2,2}^2 + R_{ev3,2}^2 \\
a_9 &= 2R_{ev2,2}R_{ev2,3} + 2R_{ev3,2}R_{ev3,3} \\
a_{10} &= R_{ev2,3}^2 + R_{ev3,3}^2
\end{aligned}$$

Quant au développement en série de l'angle d'incidence, il s'exprime par :

$$\begin{aligned}
i_{el} = \arctan \frac{U_{ez}}{U_{ey}} \simeq & i_1 + i_2 \frac{u(t)}{\bar{U}} + i_3 \frac{v(t)}{\bar{U}} + i_4 \frac{w(t)}{\bar{U}} + i_5 \frac{u^2(t)}{\bar{U}^2} + i_6 \frac{u(t)v(t)}{\bar{U}^2} \\
& + i_7 \frac{u(t)w(t)}{\bar{U}^2} + i_8 \frac{v^2(t)}{\bar{U}^2} + i_9 \frac{v(t)w(t)}{\bar{U}^2} + i_{10} \frac{w^2(t)}{\bar{U}^2} \quad (16.19)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
i_1 &= \arctan \frac{R_{ev3,1}}{R_{ev2,1}} \\
i_2 &= 0 \\
i_3 &= \frac{R_{ev2,1}R_{ev3,2} - R_{ev2,2}R_{ev3,1}}{R_{ev2,1}^2 + R_{ev3,1}^2} \\
i_4 &= \frac{R_{ev2,1}R_{ev3,3} - R_{ev2,3}R_{ev3,1}}{R_{ev2,1}^2 + R_{ev3,1}^2} \\
i_5 &= 0 \\
i_6 &= \frac{-R_{ev2,1}R_{ev3,3} + R_{ev2,3}R_{ev3,1}}{R_{ev2,1}^2 + R_{ev3,1}^2} \\
i_7 &= \frac{-R_{ev2,1}R_{ev3,3} + R_{ev2,3}R_{ev3,1}}{R_{ev2,1}^2 + R_{ev3,1}^2} \\
i_8 &= \frac{(R_{ev2,2}R_{ev3,1} - R_{ev2,1}R_{ev3,2})(R_{ev2,1}R_{ev2,2} - R_{ev3,1}R_{ev3,2})}{R_{ev2,1}^2 + R_{ev3,1}^2} \\
i_9 &= \frac{(R_{ev3,1}^2 - R_{ev2,1}^2)(R_{ev2,3}R_{ev3,2} + R_{ev2,2}R_{ev3,3}) + 2R_{ev2,1}R_{ev3,1}(R_{ev2,2}R_{ev2,3} + R_{ev3,2}R_{ev3,3})}{R_{ev2,1}^2 + R_{ev3,1}^2} \\
i_{10} &= \frac{(R_{ev2,3}R_{ev3,1} - R_{ev2,1}R_{ev3,3})(R_{ev2,1}R_{ev2,3} - R_{ev3,1}R_{ev3,3})}{R_{ev2,1}^2 + R_{ev3,1}^2}
\end{aligned}$$

On peut également vérifier que l'expression qui a été présentée ci avant pour l'approche linéarisée correspond bien à conserver les quatre premiers termes de cette série.

L'expression de l'angle d'incidence moyen peut être obtenue en prenant l'espérance mathématique membre à membre dans la relation 16.19. En supposant que les composantes de la turbulence sont non corrélées :

$$\bar{i}_{el} = \bar{U}^2 (i_1 + i_5 I_u^2 + i_8 I_v^2 + i_{10} I_w^2) \quad (16.20)$$

Conserver cette expression complète et rigoureuse (à l'ordre 2) de l'angle d'incidence moyen compliquerait fortement les développements analytiques suivants. Etant donné que nous commençons déjà une certaine approximation sur le remplacement des coefficients aérodynamiques exacts par des formes polynômiales, il nous semble que les faibles intensités de turbulence rencontrées en pratique puissent à nouveau être invoquées pour pouvoir utiliser le même angle d'incidence moyen que précédemment :

$$\bar{i}_{el} = i_1 = \arctan \frac{R_{ev3,1}}{R_{ev2,1}} \quad (16.21)$$

Cet angle d'incidence moyen peut nous servir à obtenir une forme polynômiale des expressions des coefficients aérodynamiques :

$$C(i_{el}) = C(\bar{i}_{el}) + \left. \frac{dC}{di} \right|_{i=\bar{i}_{el}} (i_{el} - \bar{i}_{el}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 C}{di^2} \right|_{i=\bar{i}_{el}} (i_{el} - \bar{i}_{el})^2 \quad (16.22)$$

En introduisant dans cette dernière relation l'expression de l'angle d'incidence i_{el} de la relation 16.19, et en ne conservant que les termes d'ordre 2 au plus des composantes de la turbulence, on obtient :

$$\begin{aligned} & C(i_{el}) \\ = & C(\bar{i}_{el}) + i_2 \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} \frac{u(t)}{\bar{U}} + i_3 \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} \frac{v(t)}{\bar{U}} + i_4 \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} \frac{w(t)}{\bar{U}} \\ & + \left(i_5 \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} + \frac{i_2^2}{2} \frac{d^2 C(\bar{i}_{el})}{di^2} \right) \frac{u^2(t)}{\bar{U}^2} + \left(i_6 \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} + i_2 i_3 \frac{d^2 C(\bar{i}_{el})}{di^2} \right) \frac{u(t)v(t)}{\bar{U}^2} \\ & + \left(i_7 \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} + i_2 i_4 \frac{d^2 C(\bar{i}_{el})}{di^2} \right) \frac{u(t)w(t)}{\bar{U}^2} + \left(i_8 \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} + \frac{i_3^2}{2} \frac{d^2 C(\bar{i}_{el})}{di^2} \right) \frac{v^2(t)}{\bar{U}^2} \\ & + \left(i_9 \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} + i_3 i_4 \frac{d^2 C(\bar{i}_{el})}{di^2} \right) \frac{v(t)w(t)}{\bar{U}^2} + \left(i_{10} \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} + \frac{i_4^2}{2} \frac{d^2 C(\bar{i}_{el})}{di^2} \right) \frac{w^2(t)}{\bar{U}^2} \end{aligned} \quad (16.23)$$

Nous pouvons maintenant donner une expression plus complète de la force aérodynamique qui sollicite une section de la structure étudiée :

$$F = \frac{1}{2} \rho C(i_{el}) B V_{el}^2 \quad (16.24)$$

En introduisant dans cette relation les expressions que nous avons obtenues pour la vitesse apparente du vent et pour celle du coefficient aérodynamique, nous pouvons ainsi obtenir une formulation complète du chargement aérodynamique. Cette expression présente néanmoins encore des termes d'ordre supérieur en les composantes turbulentes. Après suppression de ces termes et simplification, on trouve :

$$\begin{aligned}
F = & \frac{1}{2}\rho B\bar{U}^2 \left(a_1 C(\bar{i}_{el}) + \left(a_2 C(\bar{i}_{el}) + a_1 i_2 \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} \right) \frac{u(t)}{\bar{U}} + \right. \\
& \left(a_3 C(\bar{i}_{el}) + a_1 i_3 \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} \right) \frac{v(t)}{\bar{U}} + \left(a_4 C(\bar{i}_{el}) + a_1 i_4 \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} \right) \frac{w(t)}{\bar{U}} \\
& + \left(a_5 C(\bar{i}_{el}) + (a_1 i_5 + a_2 i_2) \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} + \frac{a_1 i_2^2}{2} \frac{d^2 C(\bar{i}_{el})}{di^2} \right) \frac{u^2(t)}{\bar{U}^2} + \\
& \left(a_6 C(\bar{i}_{el}) + (a_1 i_6 + a_2 i_3 + a_3 i_2) \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} + a_1 i_2 i_3 \frac{d^2 C(\bar{i}_{el})}{di^2} \right) \frac{u(t)v(t)}{\bar{U}^2} + \\
& \left(a_7 C(\bar{i}_{el}) + (a_1 i_7 + a_2 i_4 + a_4 i_2) \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} + a_1 i_2 i_4 \frac{d^2 C(\bar{i}_{el})}{di^2} \right) \frac{u(t)w(t)}{\bar{U}^2} + \\
& \left(a_8 C(\bar{i}_{el}) + (a_1 i_8 + a_3 i_3) \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} + \frac{a_1 i_3^2}{2} \frac{d^2 C(\bar{i}_{el})}{di^2} \right) \frac{v^2(t)}{\bar{U}^2} + \\
& \left(a_9 C(\bar{i}_{el}) + (a_1 i_9 + a_3 i_4 + a_4 i_3) \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} + a_1 i_3 i_4 \frac{d^2 C(\bar{i}_{el})}{di^2} \right) \frac{v(t)w(t)}{\bar{U}^2} + \\
& \left. \left(a_{10} C(\bar{i}_{el}) + (a_1 i_{10} + a_4 i_4) \frac{dC(\bar{i}_{el})}{di} + \frac{a_1 i_4^2}{2} \frac{d^2 C(\bar{i}_{el})}{di^2} \right) \frac{w^2(t)}{\bar{U}^2} \right) \quad (16.25)
\end{aligned}$$

On peut vérifier que cette relation dégénère en l'équation 16.11 lorsque seuls les termes de premier ordre en l'intensité de turbulence sont conservés. En remplaçant dans cette dernière relation les coefficients a_1 à a_{10} et i_1 à i_{10} par leurs expressions en fonction des cosinus directeurs dans les axes de référence, nous obtenons finalement la relation qui a été introduite dans le code de calcul et qui permet de relier les sollicitations aux noeuds en fonction des premières puissances des composantes de la turbulence.

La suite des développements continue alors comme dans la méthode initialement programmée dans *FineLg*, c'est-à-dire en exprimant sous une forme matricielle les expressions des sollicitations dans les axes locaux liés à l'élément :

$$\{F_{el}\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = [M_{F_{vel}}] \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{u(t)}{\bar{U}} \\ \frac{v(t)}{\bar{U}} \\ \frac{w(t)}{\bar{U}} \\ \frac{u^2(t)}{\bar{U}^2} \\ \frac{u(t)v(t)}{\bar{U}^2} \\ \frac{u(t)w(t)}{\bar{U}^2} \\ \frac{v^2(t)}{\bar{U}^2} \\ \frac{v(t)w(t)}{\bar{U}^2} \\ \frac{w^2(t)}{\bar{U}^2} \end{Bmatrix} \quad (16.26)$$

Cette fois, les forces appliquées sur l'élément dépendent de dix processus aléatoires (non indépendants). Mis à part ce détail, la démarche au niveau de la programmation est tout à fait identique. Les efforts sont ensuite exprimés dans les axes globaux de façon à obtenir une relation entre les sollicitations (en axes globaux) et les premières puissances

des composantes de la turbulence aux noeuds de la structure :

$$\{F_{glob}\} = [R_e]^T \{F_{el}\} = \underbrace{[R_e]^T [M_{F_{el}}]}_{[M_{F_{glob}}]} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{u(t)}{U} \\ \frac{v(t)}{U} \\ \frac{w(t)}{U} \\ \frac{u^2(t)}{U^2} \\ \frac{u(t)v(t)}{U^2} \\ \frac{u(t)w(t)}{U^2} \\ \frac{v^2(t)}{U^2} \\ \frac{v(t)w(t)}{U^2} \\ \frac{w^2(t)}{U^2} \end{array} \right\} \quad (16.27)$$

Rappelons que l'opération que nous venons de décrire se produit au moment du premier bouclage sur les éléments constitutifs de la structure. La démarche que nous suivons est identique à celle qui existait dans *FineLg* si ce n'est que les matrices $[M_{F_{glob}}]$ que nous stockons maintenant sont de dimensions 6×10 et non plus 6×4 comme auparavant. Avant de passer au traitement de l'élément fini suivant, les éléments de cette matrice sont globalisés au niveau d'une matrice de plus grandes dimensions comportant 10 colonnes et autant de lignes que de degrés de liberté. Le bouclage sur tous les éléments permet de remplir cette matrice complètement.

Finalement, pour chaque degré de liberté, nous disposons d'une relation comme :

$$f_i = a_i^{(1)} + a_i^{(2)} u_i + a_i^{(3)} v_i + a_i^{(4)} w_i + a_i^{(5)} u_i^2 + a_i^{(6)} v_i^2 + a_i^{(7)} w_i^2 + a_i^{(8)} u_i v_i + a_i^{(9)} u_i w_i + a_i^{(10)} v_i w_i \quad (16.28)$$

qui relie la sollicitation en axes globaux aux composantes de la turbulence (dans le système d'axes "vent"). Le passage de ces coefficients (c'est-à-dire de la matrice $[M_{F_{glob}}]$) à la routine d'analyse dynamique à proprement parler se fait à l'aide d'une série de vecteurs second membre⁸.

La suite de l'analyse continue avec le calcul des modes propres. Ils permettront de projeter les densités spectrales des sollicitations dans la base des modes propres et ensuite de continuer l'analyse stochastique selon la méthode habituelle (calcul fréquence par fréquence). Etant donné que cette démarche est relativement bien connue, nous nous contenterons de n'exposer que la façon dont les densités spectrales des sollicitation sont calculées.

Densités spectrales des forces nodales

Dans cette partie, nous devrions en réalité revenir à des développements plus théoriques. L'objectif des développements est d'obtenir une expression de la densité spectrale croisée entre les sollicitations en deux degrés de liberté i et j . Ce raisonnement a déjà été mené dans le cadre de l'oscillateur simple en champ unidimensionnel, puis pour l'oscillateur en champs bidimensionnel de turbulence et également pour la structure à plusieurs degrés de liberté en champ bidimensionnel. Nous supposons que la méthode est donc bien acquise et nous nous contenterons de passer rapidement les développements en revue.

⁸ à l'aide de la routine *FORC94*, stockage dans les vecteurs second membre P (ou B).

La relation 16.28 nous permet d'écrire la fonction de cross-corrélation entre les sollicitations appliquées aux degrés de liberté i et j :

$$R_{f_i f_j}(\Delta t) = E[f_i(t) f_j(t + \Delta t)] \quad (16.29)$$

De cette expression qui comporte 10×10 termes, nous pouvons supprimer tous les termes d'ordres impairs en les composantes de la turbulence ainsi que les termes croisés entre composantes différentes qui donneront une contribution nulle après avoir pris l'espérance mathématique. Toutes les simplifications sont reprises en détails à l'annexe G. En fin de calculs, il ne reste plus que neuf termes et la densité spectrale croisée entre les sollicitations aux noeuds i et j peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned} S_{f_i f_j}(\omega) = & a_i^{(2)} a_j^{(2)} S_{u_i u_j}(\omega) + a_i^{(3)} a_j^{(3)} S_{v_i v_j}(\omega) + a_i^{(4)} a_j^{(4)} S_{w_i w_j}(\omega) \\ & + 2a_i^{(5)} a_j^{(5)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{u_i u_j}(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \\ & + 2a_i^{(6)} a_j^{(6)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{v_i v_j}(\omega_1) S_{v_i v_j}(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \\ & + 2a_i^{(7)} a_j^{(7)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_i w_j}(\omega_1) S_{w_i w_j}(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \\ & + a_i^{(8)} a_j^{(8)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{v_i v_j}(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \\ & + a_i^{(9)} a_j^{(9)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{w_i w_j}(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \\ & + a_i^{(10)} a_j^{(10)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{v_i v_j}(\omega_1) S_{w_i w_j}(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \end{aligned} \quad (16.30)$$

où nous n'avons conservé que les termes qui permettent d'obtenir, après intégration sur les pulsations, les covariances et non pas les carrés moyens. Dans cette relation, si le champ de turbulence est supposé être bidimensionnel, cette relation dégénère en la relation 15.7 que nous avons établie pour un tel champ de turbulence⁹. Cette relation peut donc être vue comme une généralisation des développements que nous avons présentés ci-avant.

Si le chargement aérodynamique avait été linéarisé, de la relation 16.30, il ne resterait que les termes de la première ligne, c'est-à-dire, les termes de chargement qui étaient initialement prévus pour l'analyse au vent. Les premiers développements que nous avons entrepris (décrits ci-avant) traitaient également uniquement ces termes de chargement. Une fois que les coefficients $a^{(1)}$ à $a^{(10)}$ sont établis pour chaque degré de liberté et acheminés vers la routine de calcul que nous avons implémentée dans la branche dynamique du *FineLg*, la prise en compte des termes d'ordre supérieurs ne demande qu'un effort de programmation limité.

La méthodologie qui a été suivie pour prendre en compte ces termes d'ordres supérieurs en l'intensité de turbulence est identique à celle qui a été présentée lors de l'étude en champ bidimensionnel. Pour rappel, nous proposons deux solutions :

⁹ Lors de ces développements, nous avons supposé que les axes locaux de l'élément étaient identiques aux axes permettant de définir l'orientation du vent. Dans ce cas, $a^{(1)} = c_0$, $a^{(2)} = \frac{2c_0}{U}$, $a^{(3)} = 0$, $a^{(4)} = \frac{c_1}{U}$, $a^{(5)} = \frac{c_0}{U^2}$, $a^{(6)} = 0$, $a^{(7)} = \frac{c_0 + \frac{c_2}{2}}{U}$, $a^{(8)} = 0$, $a^{(9)} = \frac{c_1}{U^2}$, $a^{(10)} = 0$,

- simplifier l'expression de la cohérence pour pouvoir obtenir une expression analytique simple des densités spectrales croisées ;
- intégrer numériquement les densités spectrales intervenant dans les termes de chargement complémentaires.

C'est cette seconde méthode qui a été retenue. Le schéma d'intégration est identique à celui qui a été présenté ci-avant : deux zones de 121 points d'intégration chacune et qui peuvent éventuellement se recouvrir pour de faibles décalages de pulsation ω .

Lorsque la densité spectrale de sollicitation croisée entre les deux degrés de liberté i et j est établie, la suite du calcul suit ensuite le déroulement habituel.

Bispectres des forces nodales

Les expressions des bispectres des forces nodales sont assez laborieuses à obtenir car nous partons maintenant de l'expression complète de la fonction de tricorrélation entre les trois sollicitations relatives à trois degrés de liberté différents, soit une somme de $10 \times 10 \times 10 = 1000$ termes !

Les simplifications habituelles, à savoir indépendance entre les différentes composantes de la turbulence, peuvent être formulées pour simplifier substantiellement cette expression. Les développements complets sont repris à l'annexe G. Dans ces développements, nous avons regroupé tous les termes intervenant dans l'expression du bispectre en deux groupes :

$$D_{f_i f_j f_k}(\omega_1, \omega_2) = D_{f_i f_j f_k}^{(1)}(\omega_1, \omega_2) + D_{f_i f_j f_k}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \quad (16.31)$$

où $D_{f_i f_j f_k}^{(1)}(\omega_1, \omega_2)$ reprend tous les termes d'ordre 4 en l'intensité de turbulence et $D_{f_i f_j f_k}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ reprend tous les termes d'ordre 6. Nous avons vérifié (cf Annexe G) que la relation obtenue dégénère correctement en l'expression que nous avons obtenue pour le bispectre des sollicitations en champ de turbulence bidimensionnel.

Au vu des développements précédents, nous pouvons nous attendre à ce que les termes de $D_{f_i f_j f_k}^{(1)}(\omega_1, \omega_2)$ s'expriment par des produits de deux densités spectrales éventuellement croisées alors que les termes de $D_{f_i f_j f_k}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ s'expriment à partir d'une intégrale d'un produit de trois densités spectrales. A titre indicatif, l'expression de $D_{f_i f_j f_k}^{(1)}(\omega_1, \omega_2)$ est reportée ci-dessous. Quant à l'expression de $D_{f_i f_j f_k}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$, elle est un peu plus longue et n'est donc pas reprise dans le corps du document ; le lecteur intéressé pourra trouver cette expression complète à l'annexe G.

$$\begin{aligned}
D_{f_i f_j f_k}^{(1)}(\omega_1, \omega_2) = & 2a_i^{(5)} a_j^{(2)} a_k^{(2)} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{u_i u_k}(\omega_2) + 2a_i^{(2)} a_j^{(5)} a_k^{(2)} S_{u_i u_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_j u_k}(\omega_2) + \\
& 2a_i^{(2)} a_j^{(2)} a_k^{(5)} S_{u_i u_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_j u_k}(\omega_1) + 2a_i^{(6)} a_j^{(3)} a_k^{(3)} S_{v_i v_j}(\omega_1) S_{v_i v_k}(\omega_2) + \\
& 2a_i^{(3)} a_j^{(6)} a_k^{(3)} S_{v_i v_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{v_j v_k}(\omega_2) + 2a_i^{(3)} a_j^{(3)} a_k^{(6)} S_{v_i v_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{v_j v_k}(\omega_1) + \\
& 2a_i^{(7)} a_j^{(4)} a_k^{(4)} S_{w_i w_j}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2) + 2a_i^{(4)} a_j^{(7)} a_k^{(4)} S_{w_i w_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_2) + \\
& 2a_i^{(4)} a_j^{(4)} a_k^{(7)} S_{w_i w_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_1) + a_i^{(8)} a_j^{(3)} a_k^{(2)} S_{u_i u_k}(\omega_2) S_{v_i v_j}(\omega_1) + \\
& a_i^{(2)} a_j^{(8)} a_k^{(3)} S_{u_i u_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{v_j v_k}(\omega_2) + a_i^{(3)} a_j^{(2)} a_k^{(8)} S_{u_j u_k}(\omega_1) S_{v_i v_k}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(8)} a_j^{(2)} a_k^{(3)} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{v_i v_k}(\omega_2) + a_i^{(3)} a_j^{(8)} a_k^{(2)} S_{u_j u_k}(\omega_2) S_{v_i v_j}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(2)} a_j^{(3)} a_k^{(8)} S_{u_i u_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{v_j v_k}(\omega_1) + a_i^{(9)} a_j^{(4)} a_k^{(2)} S_{u_i u_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1) + \\
& a_i^{(2)} a_j^{(9)} a_k^{(4)} S_{u_i u_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_2) + a_i^{(4)} a_j^{(2)} a_k^{(9)} S_{u_j u_k}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(9)} a_j^{(2)} a_k^{(4)} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2) + a_i^{(4)} a_j^{(9)} a_k^{(2)} S_{u_j u_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(2)} a_j^{(4)} a_k^{(9)} S_{u_i u_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_1) + a_i^{(10)} a_j^{(4)} a_k^{(3)} S_{v_i v_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1) + \\
& a_i^{(3)} a_j^{(10)} a_k^{(4)} S_{v_i v_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_2) + a_i^{(4)} a_j^{(3)} a_k^{(10)} S_{v_j v_k}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(10)} a_j^{(3)} a_k^{(4)} S_{v_i v_j}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2) + a_i^{(4)} a_j^{(10)} a_k^{(3)} S_{v_j v_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(3)} a_j^{(4)} a_k^{(10)} S_{v_i v_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_1)
\end{aligned}$$

Ces expressions des bispectres sont celles qui ont été programmées dans le logiciel *FineLg*. L'analyse stochastique des structures jusqu'au troisième ordre a en effet été introduite dans le code de calcul selon la même procédure que pour l'analyse au second ordre.

C'est assez naturellement la branche dynamique stochastique qui a été choisie comme emplacement pour l'intégration de routines. Actuellement, l'étude d'une structure ne peut se faire qu'à l'ordre 2 ou à l'ordre 3. L'aiguillage entre ces deux analyses est réalisé dès l'arrivée dans la branche dynamique, au moment d'établir la liste des fréquences de calcul.

Tout comme la première étape de l'analyse au second ordre consiste en l'établissement des fréquences de calcul, au troisième ordre, la première opération consiste à établir la liste des couples de fréquences pour lesquels les bispectres doivent être calculés. Cette opération est réalisée à l'aide de la méthode que nous avons présentée à la première partie (maillage initial, nécessité de subdivision puis subdivision) et améliorée à la seconde partie du document, lors de l'étude de structures à plusieurs degrés de liberté.

Lorsque ces fréquences de calcul sont déterminées, l'analyse peut continuer avec l'estimation des bispectres des forces nodales qui ne sont pas stockées entièrement (car cela prendrait trop de place) mais directement projetées, élément par élément, dans la base des modes propres. Ceci permet donc d'établir la matrice des bispectres des forces généralisées.

Les développements de programmation que nous avons réalisés dans *FineLg* à l'ordre 3 se limitent pour l'instant à la détermination de cette matrice des bispectres. Un lien par fichier extérieur est réalisé avec les routines de calcul que nous avons développées dans *MatLab* et qui ont essentiellement servi à cette recherche. A terme, il paraît bien sûr

intéressant de pouvoir développer l'entièreté de l'analyse au troisième ordre dans le code de calcul *FineLg*. Au stade actuel de la recherche, il nous semble pourtant que la solution adoptée permette de bénéficier des avantages de chacun des deux logiciels : les très vastes possibilités offertes par *FineLg* en ce qui concerne la modélisation de la structure et du champ de turbulence d'une part et la facilité d'interprétation et de post-traitement des résultats obtenus à l'aide des routines *MatLab* d'autre part. Notons que la vitesse de calcul est presque quintuplée en passant à une programmation FORTRAN ; ceci est un argument supplémentaire pour l'introduction à long terme des développements dans le code *FineLg*.

16.4 Conclusions

Tout au long de ce travail, nous avons présenté des méthodes d'analyse de structures soumises à des sollicitations non gaussiennes. En partant de la situation la plus simple, nous avons évolué vers l'étude de structures et de chargements de plus en plus complexes. Nous concédons qu'en débutant ce travail, la ligne de mire était probablement floue et en tout cas certainement lointaine : quelle différence de niveau entre le petit oscillateur simple du premier chapitre et les vastes possibilités offertes par *FineLg* !

Bien que le travail que nous avons présenté se veut essentiellement scientifique, nous étions cependant poussé par la motivation de pouvoir appliquer les développements relativement théoriques dans le cadre d'applications plus pratiques. La présentation qui vient d'être donnée dans cet ultime chapitre montre que le code de calcul est désormais prêt pour l'étude de structures réalistes.

Quatrième partie

Conclusions et perspectives

Chapitre 17

Conclusions

17.1 Contributions personnelles

Ce travail s'inscrit dans le contexte de la prise en compte des effets du vent turbulent sur les structures souples du génie civil. La présentation de ce travail en tant que thèse de doctorat veut que nous présentions clairement les apports personnels du travail. Ces apports peuvent être classés en deux catégories regroupant les aspects pratiques et théoriques.

17.1.1 Aspects pratiques

Le titre de ce travail, "*Application des méthodes d'analyse stochastique ...*", peut être justifié par le fait que les développements que nous avons entrepris visaient à répondre à une demande pratique et concrète en la matière. Sous le premier type de contributions, nous voudrions regrouper toutes les possibilités pratiques que les développements que nous avons réalisés peuvent offrir. Elles peuvent être estimées en comparant, par exemple, les nouvelles possibilités d'analyse du *FineLg* entre le terme et le commencement de notre recherche.

Analyse au second ordre

Bien que les développements que nous avons présentés dans ce document s'articulent essentiellement au niveau de la prise en compte du comportement non gaussien de la structure, il faut cependant rappeler que le code de calcul n'était pas vraiment adapté, aux prémices de ce travail, à l'analyse stochastique au sens général. Les premières modifications que nous avons apportées peuvent paraître assez banales à l'heure actuelle puisqu'elles ne concernent que l'analyse stochastique au second ordre, sur base des densités spectrales de puissance. La banalité provient du fait que de nombreux codes de calcul permettent ce genre d'analyse depuis quelques années déjà. Nous pouvons donc considérer ces premiers développements comme une remise à niveau du *FineLg* au rang des logiciels d'analyse stochastique.

L'objectif principal d'une analyse stochastique au second ordre consiste à se défaire aussi vite que possible des densités spectrales. A l'occasion de l'analyse de l'oscillateur simple, nous avons présenté différentes méthodes d'intégration. Selon le type de problème étudié, nous pouvons réaliser à l'heure actuelle, une analyse :

- à l'aide de l'approximation en bruit blanc,
- à l'aide d'une approximation par un processus d'Ornstein Uhlenbeck,
- par intégration numérique avec disposition uniforme des points d'intégration,
- par intégration numérique avec distribution optimale des points d'intégration.

Le choix de l'une ou l'autre méthode est généralement conditionné par la taille du système étudié ainsi que la précision requise. L'originalité du travail ne concerne que les deuxième et quatrième méthodes d'intégration. Notons que cette dernière méthode est particulièrement efficace et permet l'étude de modèles numériques de grande taille.

Les développements que nous avons apportés permettent également une meilleure représentation des caractéristiques extrêmes des déplacements et efforts internes dans la mesure où des facteurs de pointe sont calculés pour chacune de ces grandeurs. Dans la version initiale du logiciel, un seul facteur de pointe était utilisé pour l'entièreté de la structure (et dans les bases modale comme nodale).

Le logiciel d'analyse que nous avons modifié peut également, à l'heure actuelle, calculer les coefficients de corrélation qui existent entre les différents éléments de réduction d'une même section. Ceci peut permettre le calcul plus précis des statistiques des contraintes internes ou d'autres grandeurs dérivées de ces éléments de réduction.

La notion de couplage

La notion de couplage modal, que nous avons divisée en couplage intermodal et couplage par amortissement non proportionnel, était pour ainsi dire inexistante dans le *Fi-neLg* au début de ce travail. La seule façon de pouvoir prendre en compte ces couplages était de recourir à une analyse transitoire (et donc de type Monte Carlo) qui les prend inévitablement en compte.

Une des premières analyses au vent turbulent que nous avons abordée est celle d'un poteau axisymétrique présentant donc, dans une modèle tridimensionnel, deux fréquences propres identiques ([34]). Ce problème (relativement simpliste, après coup!) n'a pas été présenté dans cet ouvrage. Le raisonnement que nous avons suivi pour la résolution de "l'énigme du poteau" nous a mené aux développements présentés dans ce travail sur la nécessité de prendre en compte le couplage modal. Leur mise en oeuvre dans le cadre du code de calcul permet aujourd'hui la prise en compte de ces deux types de couplage dans le cadre d'une analyse stochastique.

De nouveau, ce sont les possibilités d'application du code de calcul que nous voulons avancer et non pas les développements sur la notion de couplage intermodal. Celle-ci est en effet adoptée par de nombreux autres domaines de recherche depuis de nombreuses années.

Concernant le couplage par amortissement non proportionnel, mentionnons également que nous pouvons le prendre en compte de différentes façons : soit en négligeant les termes de couplage (solution qui existait avec notre arrivée), soit en les prenant en compte de façon rigoureuse. En plus de cette dernière possibilité, nous offrons maintenant également la possibilité de traiter cet amortissement de façon intermédiaire. Ces développements sont tout à fait originaux et innovateurs. L'accélération de l'analyse qui résulte de l'utilisation de cette méthode d'analyse peut être intéressante lorsque la structure est de grandes dimensions et doit être étudiée pour de nombreux cas de charges différents.

Analyse au troisième ordre

La modification la plus importante que nous ayons apporté au code de calcul concerne certainement la possibilité de réaliser l'analyse de structures soumises à des chargements aléatoires non gaussiens. Partant d'une représentation exclusivement gaussienne des processus aléatoires utilisés dans *FineLg*, nous sommes maintenant à même de reproduire les caractéristiques de dissymétrie des processus étudiés. Le code de calcul permet donc maintenant la représentation d'un champ de turbulence tridimensionnel ainsi que des efforts aérodynamiques appliqués sur la structure étudiée. Les caractéristiques de ce chargement s'arrêtent à l'ordre trois et sont donc représentées par les densités spectrales croisées et les bispectres croisés des sollicitations appliquées aux noeuds de la structure.

La projection des sollicitations dans une base modale permet de réduire les efforts de calcul, ce qui se traduit également en terme d'efficacité.

Analyse dans le domaine temporel

Les développements pratiques que nous avons réalisés ne se limitent pas à l'introduction de ces quelques points particuliers dans le colossal *FineLg*. Nous tenons également à rappeler que des applications basées sur la théorie du calcul différentiel stochastique d'Ito ont été envisagées. Nous disposons donc également à l'heure actuelle d'un code de calcul indépendant qui peut résoudre, dans le domaine temporel, une structure à plusieurs degrés de liberté soumise à un chargement s'exprimant à l'aide de fonctions polynômiales (de degré non limité !) de processus gaussiens markoviens. Dans ces développements, il ne faut voir d'original que l'application basée sur l'arithmétique particulière de Kronecker.

Au rang des analyse dans le domaine temporel, il convient également de mentionner le travail que nous avons réalisé pour l'étude de structures par simulations de Monte Carlo. Le logiciel *GWind3D* que nous avons écrit permet de simuler les échantillons de vitesses ou de sollicitations à utiliser pour réaliser les analyses dynamiques transitoires dans *FineLg*.

Nous tenons à conclure la présentation de ces aspects plus pratiques des apports personnels en mentionnant que les développements que nous avons entrepris ont déjà servi à la réalisation de deux travaux de fin d'études ([8], [40]). Ces travaux ont permis de réaliser une étude des effets du couplage intermodal sur le calcul des éléments de réduction en pied de pile du Viaduc de Millau. De par la taille de la structure étudiée, ce travail, réalisé en collaboration avec différents agents du Bureau d'Etudes Greisch, constitue une avancée remarquable dans les analyses stochastiques réalisées à l'aide du logiciel *FineLg*. Il nous semble que le code de calcul soit maintenant prêt pour être appliqué à l'étude de différentes structures.

17.1.2 Aspects théoriques

Analyse de l'oscillateur simple

Dans ce paragraphe, nous allons présenter les contributions personnelles concernant les aspects plus théoriques. Nous allons reprendre les points originaux de notre présentation et, dans la mesure du possible, préciser également les vérifications que nous avons réalisées pour la validation des développements.

Au début de ce travail, nous avons étudié la réponse d'un oscillateur simple dans les conditions de la linéarisation stochastique, généralement formulée en bureau d'études. A l'occasion de cette première étude, qui pouvait éventuellement faire office de rappel théorique, nous avons présenté l'analyse stochastique complète de l'oscillateur soumis à une sollicitation à corrélation exponentielle. On trouve assez souvent dans la littérature, des développements identiques mais avec une sollicitation de type bruit blanc. La sollicitation que nous avons choisie rend les développements analytiques relativement ardu. Il convient donc de souligner les efforts que nous avons fournis pour obtenir les formulations analytiques des caractéristiques de la réponse (depuis la variance du déplacement, de la vitesse et l'accélération, et jusqu'à l'estimation des grandeurs extrêmes).

Dans cette première partie, nous avons également donné une présentation relativement originale de la célèbre approximation en bruit blanc. Cette méthode qui permet de simplifier l'estimation de la variance de la réponse d'un oscillateur simple est recommandée par de nombreux ouvrages de référence et est même généralement appliquée au niveau des bureaux d'études.

Un des aspects les plus originaux de cette première partie consiste en la proposition d'une nouvelle méthode d'intégration, basée sur une approximation de la sollicitation par un processus aléatoire à corrélation exponentielle. Cette méthode s'avère être particulièrement efficace dans la mesure où nous disposons de toutes les relations analytiques nécessaires à l'estimation des différentes grandeurs statistiques. De plus, la sollicitation peut être représentée assez finement à l'aide des deux paramètres du processus à corrélation exponentielle.

Nous avons réalisé une étude des erreurs liées à l'utilisation de cette méthode ainsi qu'à l'utilisation de la méthode d'approximation en bruit blanc. Pour cette étude, nous avons choisi le contexte de l'analyse d'un oscillateur simple soumis aux densités spectrales de Davenport ou Von Karman. Nous avons également discuté les conditions de remplacement de ces densités spectrales réalistes par des processus aléatoires à corrélation exponentielle.

Il ressort de l'étude réalisée que l'utilisation de la méthode proposée semble donner, pour des efforts de calcul comparables, une précision légèrement meilleure que l'approximation en bruit blanc.

S'il s'avère être intéressant de pouvoir recourir à ces méthodes simplifiées, il n'en reste pas moins que les moyens de calcul dont nous disposons à l'heure actuelle doivent nous permettre une analyse plus précise. Pour ce faire, nous avons décidé d'étudier une approche rigoureuse, basée sur une intégration numérique des densités spectrales. Après avoir montré que la disposition uniforme des points d'intégration ne pouvait pas être économique, nous avons présenté une méthode d'optimisation des positions des points d'intégration. La première démarche (numérique) a rapidement laissé sa place à une méthode d'optimisation analytique. Cette méthode est tout à fait originale; elle permet, à l'aide d'un changement de variable adéquat, de transformer une série de points espacés uniformément en une série de points disposés de façon optimale pour représenter une intégrale à l'aide de la méthode du trapèze. Cette méthode, quelque peu étonnante, nous a permis de donner la meilleure représentation des densités spectrales de vitesses de vent comme Davenport ou Von Karman.

Dans la suite, nous avons également présenté une méthode originale pour la bonne représentation de la fonction de transfert. Cette méthode est basée sur un développement assez long et le raisonnement que nous avons donné a permis d'aboutir à une formulation relativement simple où la seule connaissance de la fréquence propre et du coefficient

d'amortissement suffit à la détermination de tous les points nécessaires à la bonne représentation de la fonction de transfert.

Etant donné que les représentations de la sollicitation et de la structure ont été étudiées séparément, il était également nécessaire de compléter la démarche à l'aide d'une procédure de mise en commun des fréquences de calcul obtenues. Cette procédure, également originale, a été présentée et appliquée pour l'étude d'un oscillateur simple soumis à une sollicitation aérodynamique. La méthode d'intégration numérique ainsi développée nous a servi de référence pour étudier les précisions liées aux deux autres méthodes approchées.

Les développements suivants visent à la prise en compte du terme de chargement quadratique apparaissant dans la simple expression du chargement unidimensionnel. Une bonne compréhension des développements subséquents ne pouvait passer que par une bonne compréhension des notions de moments de variables aléatoires et de fonctions-moments de processus aléatoires. Nous avons donc donné un traité de différentes relations que l'on peut trouver dans la littérature. A cette étape, il n'y a donc de personnel que les exemples présentés pour une meilleure compréhension des notions de moments, moments centrés, cumulants et de leurs équivalents en terme de processus aléatoires.

Les développements suivants (réalisés sur base de développements dans les domaines fréquentiel puis temporel et puis de nouveau fréquentiel) reflètent les difficultés que nous avons initialement éprouvées pour estimer les expressions des sollicitations appliquées sur l'oscillateur simple. Cette présentation chronologique de nos développements aboutit finalement sur l'expression de la densité spectrale du chargement prenant en compte le terme quadratique de la turbulence. Après avoir écrit l'expression de la sollicitation, nous avons poursuivi nos développements analytiques (originaux) concernant l'étude d'un oscillateur simple soumis à un processus aléatoire à corrélation exponentielle en incluant, cette fois, le terme de chargement quadratique. Cette étude analytique nous a permis de réaliser une étude paramétrique simple de l'effet de ce terme de chargement particulier sur toutes les grandeurs statistiques de la réponse (variance, fréquence de passage par zéro, facteur de pointe, ...).

Au second ordre, le terme de chargement non linéaire peut être pris en compte par un complément de densité spectrale de sollicitation. Celui-ci s'exprime à l'aide d'une autoconvolution de la densité spectrale du processus. Nous avons donc réalisé une étude un peu plus approfondie de ce terme. Nous avons d'ailleurs pu en donner une interprétation physique simple, ce que nous avons également illustré à l'aide d'exemples simples (sollicitation monochromatique, à contenu monotonément décroissant, ...).

Le dernier point original de ce chapitre consistait en l'application au domaine du vent turbulent. Nous avons appliqué dans ce contexte, les méthodes d'intégration (approchées ou exacte) discutées auparavant et nous avons analysé les précisions qu'elles pouvaient donner de la représentation de cet effet complémentaire. Aussi, une des conclusions principales, à ce stade de la présentation, est que le terme de chargement quadratique n'influence presque pas la réponse de l'oscillateur au second ordre.

Les premières implications de ce terme de chargement se présentent lors de l'analyse au troisième ordre. En effet, lorsque ce terme est négligé, la réponse de la structure, tout autant que la sollicitation, est gaussienne. Dès lors que ce terme de chargement est pris en compte, l'analyse au troisième ordre prend un sens. La présentation théorique que nous donnons de cette analyse est décalquée de la présentation que nous avons donnée au second ordre.

Ces développements théoriques nous montrent que les caractéristiques non linéaires de la turbulence peuvent être prises en compte à l'aide du second noyau de Volterra qui n'est en réalité rien d'autre que l'extension au troisième ordre de la fonction de transfert structurelle. Après une brève présentation des caractéristiques de cette fonction (nous concédons en effet que son utilisation est assez peu fréquente!), nous réalisons l'analyse de l'oscillateur simple au troisième ordre. Les développements analytiques que nous menons sont toujours originaux; et cela nous permet, moyennant des calculs d'intégrales relativement fastidieux, d'obtenir une expression analytique du coefficient de dissymétrie de la réponse de l'oscillateur en fonction de celui de la sollicitation. Nous considérons que l'établissement de cette fonction constitue un apport essentiel du travail dans la mesure où il s'agit de l'équivalent à l'ordre trois des coefficients d'amplification dynamiques utilisés au second ordre. Au troisième ordre, il s'agit plutôt de coefficients de réduction : la dissymétrie de la réponse est pour ainsi dire toujours inférieure à celle de la sollicitation. Nous donnons également une justification physique à la forme obtenue pour cette fonction.

Le bispectre de la sollicitation, qui est sa caractéristique essentielle au troisième ordre, peut être séparé en deux contributions d'ordres différents en l'intensité de turbulence. Dans les problèmes qui nous concernent, nous proposons, avec justifications, de ne considérer qu'une seule des deux contributions. Notons cependant que cette simplification n'est plus valable dans la dernière partie de ce document.

Les contributions personnelles de nos développements de l'analyse au troisième ordre comptent également la présentation de la méthodologie d'établissement des bispectres des vitesses et accélérations qui pourraient éventuellement être utilisés pour obtenir les expressions des coefficients de dissymétrie de ces grandeurs.

Toujours à l'ordre trois, nous avons étudié la possibilité d'adapter la méthode d'approximation en bruit blanc qui est utilisée au second ordre, de façon à simplifier le calcul des moments d'ordre 3. Ce point constitue un échec du travail : nous n'avons résumé dans cette présentation que quelques arguments qui nous poussent à affirmer que cette simplification n'est pas possible. Cette affirmation n'a pas pu être démontrée rigoureusement. Les arguments présentés montrent cependant que cette adaptation de l'approximation en bruit blanc à l'ordre trois ne doit pas être évidente, si elle est réalisable. Elle serait cependant la bienvenue !

Après ces développements analytiques, nous avons également présenté quelques méthodes numériques pour réaliser cette étude au troisième ordre. De toutes les méthodes présentées, il s'avère que seul le remplacement de la sollicitation par un processus aléatoire à corrélation exponentielle ou l'intégration numérique optimale soit réellement applicable. Pour rappel, ce sont les deux méthodes que nous avons suggérées pour l'étude au second ordre. Nous portons une attention toute particulière à l'intégration numérique optimale qui consiste en réalité en la mise au point d'un maillage de l'espace bidimensionnel des fréquences. La procédure utilisée est à nouveau innovatrice; elle est basée sur un développement relativement sain qui se prêterait volontiers à d'éventuelles modifications (maillage initial, nécessité de subdivision puis subdivision).

Toujours dans le contexte de l'oscillateur simple, nous avons abordé, avec le même formalisme qu'aux ordres inférieurs, l'analyse à l'ordre quatre. Nous avons donné une brève description du troisième noyau de Volterra qui constitue l'équivalent d'ordre quatre de la fonction de transfert structurelle. La représentation de cette fonction n'est guère évidente car il s'agit d'une fonction de trois paramètres. La visualisation en courbes de

niveau que nous en donnons est particulièrement originale et présente effectivement cette fonction comme une généralisation des ses petites soeurs aux ordres deux et trois.

Les développements que nous présentons à l'ordre quatre sont équivalents à ceux présentés aux ordres inférieurs. De nouveau, nous pouvons souligner les développements personnels qui ont mené à l'expression des statistiques d'ordre quatre de la réponse. Cette approche analytique de la réponse d'une structure soumise au carré d'un processus aléatoire à corrélation exponentielle vient parfaire la caractérisation que nous avons déjà pu établir de cette réponse. Ces développements que nous avons menés dans le domaine fréquentiel sont innovateurs; les résultats obtenus peuvent à nouveau être vus comme une possibilité d'application numérique simplifiée. Dans le cadre de cette sollicitation particulière, nous obtenons donc finalement une expression du coefficient de kurtosis de la réponse de l'oscillateur simple en fonction de celui de la sollicitation. Ce "facteur de réduction dynamique" montre, tout comme à l'ordre 3, que l'étalement statistique de la réponse dynamique doit nécessairement être moindre que celui de la sollicitation.

Les développements aux troisième et quatrième ordres nous ont permis de quantifier (d'une manière certes limitée) la non gaussianité de la réponse d'une structure. Ces grandeurs statistiques peuvent alors être utilisées pour représenter les statistiques extrêmes de ce genre de variable aléatoire.

La présentation que nous donnons des théories des valeurs extrêmes n'a d'original que l'étude des limites d'applicabilité de la méthode basée sur la transformation cubique. Cet aspect nous semble cependant intéressant dans la mesure où l'application des relations analytiques en dehors de ce domaine de validité donne des résultats (d'abord!) et erronés (cela aurait été un moindre mal si la méthode ne donnait pas de résultats...).

Au chapitre suivant, nous donnons une présentation, largement inspirée de la littérature, de l'analyse temporelle à l'aide des équations différentielles stochastiques d'Ito. Dans ces développements, seule l'application des méthodes au problème que nous étudions est originale, bien que le résultat final soit également donné par Grigoriu ([46], 1986). Ces développements dans le domaine temporel nous ont permis de valider les développements analytiques (très ardu) entrepris dans le domaine fréquentiel à l'aide des notions de bispectres et trispectres.

La troisième méthode "réputée exacte" pour réaliser l'analyse dynamique de la structure avec son chargement non linéaire est celle de Monte Carlo. Chronologiquement, nous avons utilisé cette méthode de simulation au début de notre travail et c'est pour cette raison que les développements les plus précis se trouvent dans [26]. La première étape de cette analyse consiste en la génération de sollicitations pour le problème étudié. Les réflexions que nous avons menées à ce sujet occupent une place relativement importante. Dans le contexte de l'analyse des processus aléatoires non gaussiens, les points forts originaux de cette présentation consistent en l'étude des caractéristiques statistiques d'ordres trois et quatre des échantillons simulés à l'aide de différentes méthodes (séries de Fourier, processus autorégressifs). Toujours à cette étape de la simulation, nous pouvons mentionner notre contribution à l'accélération de l'algorithme de génération. Cette optimisation consiste à limiter le nombre de calcul aux valeurs propres lors de l'étude de la base non cohérente du champ de vitesse. Ces développements permettent d'appliquer la méthode de génération à des champs de vitesses de dimensions relativement impressionnantes (de l'ordre de 1000 noeuds à 3 composantes).

La seconde étape qui consiste en l'analyse de la structure est généralement mieux maîtrisée. Nous donnons cependant quelques critères qui permettent le choix des para-

mètres (le pas de temps, le nombre de pas de temps) à utiliser pour l'analyse dynamique. Rappelons également que nous conseillons d'étudier ces paramètres en considérant simultanément les caractéristiques structurelles ainsi que les caractéristiques du chargement.

Nous présentons également des développements originaux concernant le traitement du contenu fréquentiel aux très basses fréquences. Ce contenu énergétique doit en effet être étudié avec une attention toute particulière lorsque la composante quasi-statique de la réponse est importante. Le shift fréquentiel (décalage vers des fréquences légèrement supérieures) permet d'améliorer la qualité des échantillons générés et représente donc mieux le contexte étudié. Notons que ce problème provient essentiellement du fait que nous sommes censés n'étudier que la partie stationnaire de la réponse, ce qui n'est manifestement pas évident à l'aide d'une analyse dynamique transitoire.

Etude d'une structure à plusieurs degrés de liberté

La seconde partie du document concerne l'application, au contexte d'une structure à plusieurs degrés de liberté, des méthodes élémentaires présentées à la première partie. Les premiers éléments de réflexion que nous donnons concernent la distinction entre les deux principaux types de couplage que nous recensons : le couplage intermodal et le couplage par amortissement non proportionnel. Ces notions qui sont rarement prises en compte dans le domaine du génie civil sont pourtant des aspects élémentaires de la mécanique.

Le premier de ces deux couplages est généralement bien mieux maîtrisé que le second. Nous nous sommes contentés, en réalisant l'étude d'une structure simple à deux degrés de liberté, d'établir deux conditions nécessaires pour obtenir ce genre de couplage (fréquences propres proches et sollicitations cohérentes). Au titre d'application, nous avons également étudié le cas d'une structure à un degré de liberté amortie par un amortisseur par masse accordée. Lors de cette étude, nous avons mis en évidence le couplage intermodal existant entre la structure et la masse vibrante.

Les covariances entre amplitudes modales permettent de représenter ce premier type de couplage. Dans la littérature, on peut trouver l'expression de cette grandeur lorsque la densité spectrale croisée de sollicitation entre les deux modes étudiés est constante. Nous profitons de ces développements pour introduire une méthode identique à l'approximation en bruit blanc et qui permet le calcul rapide des covariances entre amplitudes modales. Il nous semble que cette démarche soit innovatrice. Etant donné leur aspect élémentaire, il ne serait cependant pas étonnant que cette contribution ne soit pas originale.

Concernant le second type de couplage, notre exposé a débuté par un traité des différentes méthodes existant pour sa prise en compte. Ensuite, nous présentons une méthode originale, basée sur une décomposition en série de Taylor de la fonction de transfert modale (attention, obligatoirement modale!). Cette méthode simplifiée se trouve entre les deux extrêmes les plus fréquemment utilisés et vise donc les applications intermédiaires. Elle présente l'avantage d'offrir une prise en compte partielle du couplage pour un effort de calcul relativement réduit.

Cette méthode de calcul pourrait paraître dénuée de sens en notre époque où les processeurs de calcul ne cessent de s'améliorer. Elle présente cependant l'avantage d'offrir une représentation relativement didactique de la notion de couplage. En effet, dans les développements suivants, nous avons proposé d'utiliser cette représentation partielle du couplage en reportant sur les caractéristiques de la sollicitation, les problèmes de couplage liés au comportement structurel. Nous qualifions cette solution (également originale),

d'approche "ingénieur". En effet, elle permet d'étudier une structure simple (alors sans couplage) mais chargée par une sollicitation modifiée. Cette méthode permet de donner une bonne interprétation physique du couplage par amortissement non proportionnel.

Après ces quelques réflexions élémentaires sur le fonctionnement mécanique des structures étudiées, nous nous sommes de nouveau plongés dans l'étude de structures soumises à des sollicitations non gaussiennes. Toujours dans le même formalisme que lors de l'étude de l'oscillateur simple (et au risque de lasser le lecteur...), nous avons établi les expressions des densités spectrales croisées et bispectres croisés entre sollicitations appliquées en différents noeuds de la structure. Les expressions obtenues commencent alors à se compliquer légèrement en raison de l'étude d'une structure de dimensions éventuellement comparables aux échelles de turbulence, ce qui nécessite la prise en compte des cohérences entre ces sollicitations.

L'objectif des développements réalisés consiste à pouvoir appliquer cette méthode d'analyse dans le cadre de l'étude de structures de grandes dimensions et présentant donc un nombre important de degrés de liberté. La seule issue possible consiste donc en une étude dans une base réduite comme celle des modes propres. Il semble que ce genre d'analyse, dans le domaine fréquentiel et en base modale soit innovateur. On peut trouver dans la littérature ([54]) l'étude d'une structure à plusieurs degrés de liberté dans sa base nodale. Il nous semble cependant que ces résultats présentés doivent être considérés avec précautions.

Nous montrons que le passage dans la base des modes propres n'est finalement qu'une extension de l'étude qui est généralement réalisée au second ordre à l'aide des densités spectrales. L'interprétation physique de la projection en base modale nécessite déjà une certaine habitude au second ordre ; au troisième ordre, cela est encore moins évident.

L'étude dans la base des modes propres présente l'avantage de pouvoir récupérer les développements entrepris lors de l'étude de l'oscillateur simple. A ceux-ci, nous avons cependant dû ajouter le calcul des bispectres croisés entre amplitudes modales, qui représentent les caractéristiques statistiques croisées d'ordre trois entre les amplitudes modales, au même titre que les densités spectrales croisées entre amplitudes modales représentent les covariances. Cela nous a donc ensuite mené à une discussion sur la nécessité de la prise en compte des termes de couplage au troisième ordre. L'étude originale que nous avons réalisée a mis en évidence la nécessité de prendre en compte ces termes de couplage au troisième ordre dans la majorité des cas d'application pratiques. Il est bien connu qu'au second ordre, on ne peut parler de couplage intermodal que lorsque les fréquences propres structurelles sont proches l'une de l'autre. Au troisième ordre, le phénomène est quelque peu différent. Nous avons mis en évidence l'importance maximale de ces termes de couplage lorsque la somme de deux fréquences propres structurelles est égale à une troisième. Dans le cadre de l'analyse d'un oscillateur simple, ces termes de couplage au troisième ordre sont donc les plus importants lorsqu'une des deux fréquences propres est double de l'autre. Ces développements nous semblent également innovateurs. Bien que différents auteurs travaillent également dans le domaine fréquentiel, il nous semble que ce genre de raisonnement soit relativement unique et permette une bonne interprétation physique du phénomène. C'est en ce sens que notre travail se démarque.

Au chapitre suivant, nous reprenons une méthodologie d'analyse dans le domaine temporel et basée sur les équations différentielles stochastiques d'Ito. Dans cette partie, il n'y a d'original que l'application de la méthode dans notre code de calcul. La programmation de cette approche a permis de valider les développements sur l'étude d'une

structure à deux degrés de liberté. Il convient de souligner le très bon accord que nous avons obtenu à l'aide des quatre méthodes différentes (approche analytique, approche numérique dans le domaine fréquentiel à l'aide des bispectres, approche par simulations de Monte Carlo, approche temporelle à l'aide de la théorie d'Ito).

Applications propres au domaine du vent turbulent

La troisième partie de ce document présente les aspects plus réalistes du chargement aérodynamique qu'une structure est susceptible de subir. La finalité des développements réalisés est certainement la contribution théorique la plus innovatrice de ce travail. En partant d'une expression relativement large de l'expression aérodynamique du chargement, nous avons présenté dans un premier temps la méthode de linéarisation qui est généralement appliquée. Ensuite, nous avons présenté l'approche de ce chargement rigoureux par une forme quadratique. Cet aspect original du travail permet d'obtenir une expression du chargement incluant les effets de la non linéarité des coefficients aérodynamiques. Notons que ces effets ne se présentent, sous cette forme quadratique de la sollicitation, que si le champ de turbulence étudié est au moins bidimensionnel.

L'obtention de cette forme quadratique de la sollicitation a nécessité une étude de la représentation des coefficients aérodynamiques à l'aide de formes polynômiales. Cette étude originale est basée sur une approche par les moindres carrés des coefficients aérodynamiques avec une pondération réfléchie. Pour ce faire, nous avons réalisé une étude statistique de l'angle d'incidence du vent dans un champ de turbulence bidimensionnel.

Au terme de cette étude préalable, nous étions à même de formuler les expressions des densités spectrales et bispectres des sollicitations appliquées sur la structure. Ceci a de nouveau été réalisé (au risque cette fois d'harasser le lecteur !) dans le même formalisme que celui qui est utilisé depuis le début de ce document. Lorsque ces sollicitations sont établies, l'analyse stochastique peut suivre la même démarche que celle qui a été présentée à la partie précédente.

Ces expressions nous ont donc finalement permis de réaliser l'étude de structures plongées dans un champ de turbulence bidimensionnel. La première structure étudiée est un oscillateur simple pour lequel les développements analytiques peuvent encore être réalisés assez facilement. La seconde structure étudiée est une poutre sur deux appuis. L'approche analytique de cette structure nous a permis d'introduire les notions bien connues d'admittance mécanique. Un des derniers points originaux de ce travail concerne l'établissement des grandeurs similaires, à l'ordre trois. Ces admittances mécaniques d'ordre trois permettent de représenter la réduction de la sollicitation (lors de la projection dans la base modale) provenant de la cohérence dans le champ de sollicitation étudié.

Les études de ces deux structures pourraient être utilisées de façon plus systématique pour d'autres coefficients aérodynamiques de façon à représenter les effets de leur non linéarité pour un champ de turbulence donné.

Les dernières applications numériques que nous avons présentées sont des résultats de simulations de Monte Carlo qui ont permis de valider la programmation de l'analyse dans le domaine fréquentiel.

Afin de conclure la présentation des aspects originaux de ce travail, nous tenons également rappeler la notion d'admittance numérique que nous avons introduite de sorte à contrecarrer la réduction de sollicitation liée à une discrétisation trop lâche de la structure et à une prise en compte trop simplifiée du champ de sollicitation. Notons cependant que

ces développements se sont limités à l'étude au second ordre.

17.2 Perspectives

Le travail que nous venons de présenter semble déjà relativement complet. Néanmoins, d'un oeil plus attentif, plusieurs axes de recherche complémentaires peuvent être identifiés.

Nous pouvons par exemple commencer par l'analyse dans le domaine temporel, à l'aide de la règle de différentiation d'Ito. Le domaine d'application de cette approche que nous avons couvert dans ce travail est relativement limité. Pour rappel, cette règle de différentiation permet de réaliser des analyses bien plus complexe que la simple étude d'une structure linéaire soumise à une forme polynômiale d'un processus aléatoire gaussien. Nous pourrions par exemple utiliser les développements que nous avons réalisés, et, sans trop de modifications, réaliser l'étude instationnaire de la réponse d'une structure. Quelques développements plus profonds devraient permettre de réaliser l'étude de structures à comportement non linéaire. La mise en commun de ces deux aspects devrait permettre de réaliser l'analyse transitoire de structures à comportement non linéaire. On peut donc voir en ce point une ouverture vers l'analyse sismique des structures du génie civil pour lesquelles nous savons que le comportement non linéaire (friction, dissipation, décollement, plasticité, ...) doit être pris en compte.

Dans le cadre plus précis de l'effet du vent sur les structures du génie civil, il serait intéressant d'étudier plus précisément la représentation du champ de chargement du vent par un processus markovien. Les quelques développements que nous avons pu entreprendre sur ce sujet (et non présentés dans ce document) nous ont appris que la représentation des densités spectrales unilatérales ne pose aucun problème. Il ne s'agit en réalité que d'un problème d'optimisation classique. Les dérivées de la fonction-objectif peuvent être écrites analytiquement, ce qui facilite la convergence des itérations. Par contre, la représentation du champ complet et essentiellement des cohérences entre vitesses de vent en différents noeuds est relativement compliquée. De plus, on ne trouve guère de renseignements dans la littérature qui permettrait d'aider à cette représentation réaliste du champ de vitesse. Il nous semble que cet axe de recherche soit relativement prometteur mais surtout intéressant dans la mesure où l'approche temporelle pourrait être appliquée dans des conditions similaires aux conditions tout à fait générales d'application de la méthode d'analyse dans le domaine fréquentiel.

Nous avons également mentionné, lors de la présentation de la méthode d'analyse dans le domaine temporel, qu'il pourrait être relativement intéressant de représenter les matrices mises en jeu dans un format éparpillé. Nous avons déjà travaillé quelque peu sur ce problème. Nous avons mis au point des routines qui permettent de réaliser les opérations de l'algèbre de Kronecker avec des matrices stockées sous ce format particulier. Ces développements pourraient être poussés plus loin de façon à réécrire l'approche temporelle d'une structure multidimensionnelle (basée sur cette algèbre particulière) de façon à la rendre compétitive vis-à-vis de l'approche dans le domaine fréquentiel. L'utilisation au format éparpillé permettrait en effet d'éviter le recours à des matrices de dimensions énormes.

Les perspectives que nous voyons à l'issue de ce travail concernent également l'approche dans le domaine fréquentiel. Dans ce domaine, la méthode que nous avons étudiée

se limite à la résolution de problèmes identiques à ceux que nous avons étudiés dans ce document. Il n'y a donc pas de possibilité d'extension vers les études d'autres types de comportement.

Par contre, il pourrait être intéressant de compléter l'analyse que nous avons réalisée de sorte à prendre en compte les caractéristiques du chargement à l'aide d'une forme polynomiale d'ordre plus élevé. Par exemple, la forme du coefficient de traînée du Viaduc de Millau montre qu'une composante cubique devrait idéalement être ajoutée pour représenter plus précisément son comportement aux grands angles d'incidences, c'est-à-dire aux plus grandes intensités de turbulence. Cette composante cubique se traduit par un terme de chargement cubique. Ce terme modifie non seulement les caractéristiques d'ordre trois (et plus) de la réponse mais également les caractéristiques d'ordre deux. Ces dernières modifications s'expriment à l'aide de termes d'ordres de plus en plus élevés en l'intensité de turbulence. C'est d'ailleurs pour cette raison que nous les avons négligés. Leur prise en compte pourrait être intéressante si la composante cubique était prépondérante ou si l'intensité de la turbulence était vraiment importante.

Ces effets d'ordre trois et plus de la non linéarité des coefficients aérodynamiques se traduisent également au niveau des caractéristiques d'ordre 3 de la réponse. Les développements analytiques que nous avons donnés dans ce document peuvent être adaptés sans peine pour la prise en compte de ces effets.

Un autre point de l'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel mériterait d'être davantage fouillé. Il s'agit de l'adaptation à l'ordre trois de la méthode d'approximation en bruit blanc. Nous avons présenté dans ce document les éléments qui nous ont poussé à conclure que cette adaptation était loin d'être évidente. Il serait pourtant intéressant de pouvoir appliquer cette subtile méthode de façon à pouvoir éviter l'intégration numérique dans l'espace bidimensionnel des fréquences. Il nous semble que les avantages qui pourraient être tirés de l'élaboration d'une telle méthode puissent justifier de se (re)pencher sérieusement sur ce problème. Une autre motivation de cet exercice consiste en ce que nous pouvons éventuellement nous permettre une précision moindre sur l'estimation des caractéristiques d'ordre trois que sur les caractéristiques d'ordre deux. Si l'approximation en bruit blanc est acceptée à l'ordre deux, il ne devrait y avoir aucun problème à faire admettre une méthode approchée au troisième ordre.

Les développements que nous avons entrepris au quatrième ordre étaient relativement limités, d'abord pour ne pas alourdir inutilement la présentation, mais aussi parce que nous ne disposons à l'heure actuelle que d'une méthode d'intégration numérique pour l'intégration des trispectres. Il nous semble que le développement d'une méthode approchée devrait également offrir un avenir plus heureux aux analyses à l'ordre quatre.

Nous avons également présenté dans ce document une autre raison de notre motivation limitée à calculer rigoureusement les caractéristiques d'ordre quatre de la réponse. En effet, nous avons pu constater que ces grandeurs s'expriment à partir des caractéristiques d'ordre huit (!) de la composante turbulente. Il nous paraît intéressant de remettre en question la caractérisation de cette composante par une variable aléatoire gaussienne. Il nous semble qu'une caractérisation plus précise de la turbulence du vent devrait permettre de réaliser des calculs plus réalistes. Cette perspective concerne certainement plus le météorologue que l'ingénieur civil des constructions.

Le code de calcul *FineLg* que nous avons modifié de façon à permettre une analyse stochastique plus rigoureuse a déjà été appliqué pour l'étude de structures réelles dont le Viaduc de Millau et un pont levant de grande portée. Ces cas concrets d'application se

limitent à la détermination des caractéristiques de second ordre de la réponse. Au rang de perspectives, il serait intéressant d'inscrire l'application du code de calcul au troisième ordre dans le cadre de structures plus réalistes. Il convient cependant de remarquer que les processeurs actuels ne permettent pas encore l'étude des structures présentant un nombre important de noeuds (de l'ordre 5000 noeuds) dans des délais raisonnables (de l'ordre de la semaine). C'est aussi pour cette raison que nous portons énormément d'attention à la nécessité de trouver une formulation simplifiée pour l'analyse de la structure au troisième ordre.

17.3 Conclusions

Dans les quelques paragraphes précédents, nous avons passé en revue les développements qui ont été présentés dans ce document. Il nous semble que ces développements semblent répondre aux objectifs que nous avons fixés à l'introduction. Ces objectifs se rassemblent autour d'un même but qui donne la cohésion au travail : il consiste en l'étude des hypothèses qui sont généralement formulées lors du dimensionnement d'un ouvrage d'art soumis au vent turbulent.

Un point essentiel de ces hypothèses concerne les termes de chargement non linéaires. Les développements menés permettent la prise en compte des termes de chargement non linéaires provenant de la turbulence du vent et du comportement non linéaire des coefficients aérodynamiques. Nous avons vu que le premier type de non linéarité était directement relié à l'intensité de la turbulence. Quant au second, son importance dépend directement de la forme des coefficients aérodynamique. Les études les plus complètes que nous avons menées montrent que ces non linéarités peuvent influencer significativement les caractéristiques de la réponse structurelle, surtout en termes de grandeurs extrêmes.

Le second point important concerne les notions de couplage qui sont pour ainsi dire toujours négligées. Nous avons présenté dans ce document la marche à suivre pour prendre en compte deux types de couplage identifiés. Afin d'éviter toute redondance avec les conclusions de chaque chapitre, nous renvoyons le lecteur à ces parties pour les détails plus particuliers liés aux différents aspects étudiés.

Outre les objectifs présentés et remplis, nous tenons également à préciser que les quelques égarements autour de la ligne conductrice de ce travail nous ont permis d'étudier des problèmes plus particuliers comme les notions d'admittance mécanique et numérique.

A l'heure actuelle, les analyses stochastiques rigoureuses (intégration numérique) au second ordre commencent à être possibles. Dans les années à venir, il nous semble que les développements que nous avons abordés dans le cadre de ce document devraient prendre de plus en plus d'importance. En effet, les améliorations des processeurs de calcul (et la possibilité d'adapter assez facilement la procédure de calcul aux processeurs parallèles) devraient permettre de réaliser dans des délais raisonnables (probablement de l'ordre de l'heure) les études au troisième et quatrième ordres de structures de très grandes dimensions.

Cinquième partie

Bibliographie

Bibliographie

- [1] AAS-JACKOBSEN K., STROMMEN E., *Time domain calculations of buffeting response for wind sensitive structures*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, pp. 687-695, Vol 74 (1998).
- [2] AMBROSINI R. D., RIERA J. D., DANESI R. F., *Analysis of structures subjected to random wind loading by simulation in the frequency domain*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 233-239, Vol. 17 (2002).
- [3] ARMAND J.-L., BELLIZZI S., BOUC R., GUENARD Y., ORSERO P., *Méthodes probabilistes appliquées à la dynamique des structures*, Institut pour la promotion des sciences de l'ingénieur, Notes de cours, Marseille, (20-22 mars 1990).
- [4] BACHMANN H., AMMANN W., *Vibrations in structures induced by man and machines*, Ed. IABSE, Zurich (1987).
- [5] BARTOLI G., BORRI C., FACCHINI L., *Simulation of non-Gaussian wind pressures on a 3-D bluff body and estimation of design loads*, Computers and Structures, pp. 1061-1070, Vol. 80 (2002).
- [6] BENFRATELLO S., FALSONE G., MUSCOLINO G., *Influence of the quadratic term in the along wind stochastic response of SDOF structures*, Engineering Structures, pp. 685-695, Vol 18 (1996).
- [7] BENFRATELLO S., DI PAOLO M., SPANOS P.D., *Stochastic Response of MDOF wind-excited structures by means of Volterra series approach*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 1135-1145, Vol. 74 (1998).
- [8] BRIAMONT N., *Approche temporelle du comportement des ouvrages d'art soumis au vent turbulent*, Travail de fin d'études, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège (2004).
- [9] BUCHHOLDT H. A., *Structural Dynamics for Engineers*, Thomas Telford Ed., London (1997).
- [10] CARASSALE L., SOLARI G., *Wind modes for structural dynamics : a continuous approach*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 157-166, Vol. 17 (2002).
- [11] CARASSALE L., KAREEM A., *A Volterra approach for nonlinear multi-DOF structures*, Conference on Structural Dynamics, EUROLYN 2002, pp. 755-760, Munich (2002).
- [12] CAUGHEY T. K., *Non Linear Theory of random vibrations*, Advanced applied mechanics, Vol 11, pp 209-253 (1971).
- [13] CHEN X., KAREEM A., *Advanced analysis of coupled buffeting response of bridges : a complex modal decomposition approach.*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 201-213, Vol. 17 (2002).

- [14] CHEN X., KAREEM A., *Advances in modeling of aerodynamic forces on bridge decks*, Journal of Engineering Mechanics, pp. 1193-1250 Vol 128-11 (2002)
- [15] CIGADA A., DIANA G., ZAPPA E., *On the response of a bridge deck to turbulent wind : a new approach*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 1173-1182, Vol. 90 (2002).
- [16] CLOUGH R. W., PENZIEN J., *Dynamics of structures*, Mc Graw-Hill : Civi Engineering series (second edition), (1993).
- [17] CREMONA C., *Dynamique aléatoire des structures*, Calcul au vent des ponts, Collège de Polytechnique, Palaiseau. Notes de cours, (15 mai 2002).
- [18] CREMONA C., FOUCRIAT J. C., *Comportement au vent des ponts*, Presses de l'école nationale de ponts et chaussées (2002).
- [19] DAVENPORT W. B., ROOT W. L., *An Introduction to the theory of random signals and noise*, Mc Graw-Hill Book Company, New York (1958)
- [20] DAVENPORT A.G., *The application of statistical concepts to the wind loading of structures*, Proceedings of the Institue of Civil Engineers, Vol 19, p 449 (1961).
- [21] DAVENPORT A. G., *The response of slender line-like structures to a gusty wind*, Proceeding of the Institution of Civil Engineers, Vol 23 pp 389-408 (1962).
- [22] DAVENPORT A. G., *Gust loading factors*, Journal of Structural Division ASCE, pp. 11-34, Vol 93 (1967).
- [23] DAVENPORT A. G., *Past, present and future of wind engineering*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 1371-1380, Vol. 90 (2002).
- [24] DENOEL V., *Generation of spatially correlated wind histories*, International Conference on Finite Elements, LUXFEM, Luxembourg (2003).
- [25] DENOEL V., *Treating non proportionnal damping by means of Taylor polynomial approximations*, International Conference on Extreme Loading, Toronto CA (2003).
- [26] DENOEL V., *Analyse de structures soumises au vent turbulent : de l'approche stochastique fréquentielle au dynamique transitoire non linéaire*, Travail de Diplôme d'Etudes Approfondies, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège (2003).
- [27] DENOEL V., DEGEE H., *On the accounting for non proportional damping in stochastic analysis - Application to wind loaded structures*, En soumission.
- [28] DE VILLE- DE GOYET V., *L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 1989.
- [29] DIANA G., BRUNI S., CIAGADA A., ZAPPA E., *Complex aerodynamic admittance function role in buffeting response of a bridge deck*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 2057-2072, Vol. 90 (2002).
- [30] DI PAOLA M. MUSCOLINO G., *Differential moment equations of FE modelled structures with geometrical non-linearities*, International Journal of Non Linear Mechanics, pp 363-373, Vol 25-4 (1990).
- [31] DI PAOLA M. FALSONE G., PIRROTTA A., *Stochastic response analysis of nonlinear systems under gaussian inputs*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 15-21, Vol. 7 (1992)

- [32] DI PAOLA M., FALSONE G., *Stochastic dynamics of nonlinear systems driven by non-normal delta-correlated processes*, Journal of Applied Mechanics ASME, pp. 141-148, Vol 60 (1993)
- [33] DI PAOLA M., *Digital simulation of wind field velocity*, journal of Wind Engineering and industrial Aerodynamics, pp. 91-109, Vol 74 (1998).
- [34] DYNAMIX, *Calcul dynamique non linéaire des structures mixtes*, Subvention "Objectif 2", PME R&D Plus, Rapports 1 à 10
- [35] DYRBYE C., HANSEN S. O., *Wind loads on structures*, John Wiley & Sons, (1997).
- [36] FINELG, *User's manual, Version 8.2*, Département M&S (ULg) - Bureau d'Etudes Greisch (1999).
- [37] FLORIS C., *Equivalent gaussian process in stochastic dynamics with application to along-wind response of structures*, International Journal of Non-Linear Mechanics, pp. 779-794, Vol 31-5 (1996).
- [38] FLORIS C., VALLONI, *Non gaussian response to random wind pressure : a comparison of different approaches*, Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2002, pp. 773-778, Munich (2002).
- [39] FONDER G., *Calcul des structures soumises aux effets dynamiques et sismiques*, Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège, Notes de cours.
- [40] FRERE P.Y., *Approche fréquentielle du comportement des ouvrages d'art soumis au vent turbulent*, Travail de fin d'études, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège (2004).
- [41] FREY F., *L'analyse statique non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la construction métallique*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 1978.
- [42] GERADIN M., RIXEN D., *Théorie des vibrations*, Ed. Masson, Paris (1996).
- [43] GIBERT R. J., *Dynamique aléatoire des structures*, Calcul au vent des ponts, Collège de Polytechnique, Palaiseau. Notes de cours, (13-15 mai 2002).
- [44] GIOFFRE M., GUSELLA V. GRIGORIU M., *Simulation of non-gaussian field applied to wind pressure fluctuations*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp 339-345, Vol 15 (2000).
- [45] GRIGORIU M., *Crossing of non-gaussian translation processes*, Journal of Engineering Mechanics ASCE, pp. 610-620, Vol 110-4 (1984)
- [46] GRIGORIU M., *Response of linear systems to quadratic gaussian excitations*, Journal of Engineering Mechanics ASCE, pp. 523-535, Vol 112-6 (1986).
- [47] GRIGORIU M., *Response of offshore structures to random waves*, Journal of Engineering Mechanics ASCE, pp. 729-744, Vol 112-8 (1986).
- [48] GRIGORIU M., *White noise processes*, Journal of Engineering Mechanics ASCE, pp. 757-765, Vol 113-5 (1987).
- [49] GRIGORIU M., ARIARATNAM S.T., *Response of linear systems to polynomials of gaussian processes*, Journal of Applied Mechanics ASME, pp. 905-910, Vol 55 (1988)
- [50] GRIGORIU M., *Dynamic systems with Gaussian and non-Gaussian input*, Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2002, pp. 773-778, Munich (2002).

- [51] GU M., CHEN S. R., CHANG C. C., *Background component of buffeting response of cable-stayed bridges*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 2045-2055, Vol. 90 (2002).
- [52] GUO-KANG ER, *Exponential closure method for some randomly excited non-linear systems*, International Journal of Non-Linear Mechanics, pp. 69-78, Vol. 35 (2000).
- [53] GURLEY K., TOGNARELLI A., KAREEM A., *Analysis and simulation tools for wind engineering*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 9-31 Vol 12-1 (1997).
- [54] GUSELLA V., MATERAZZI A.L., *Non gaussian along wind response analysis in time and frequency*, Engineering Structures, pp 49-57, Vol 22 (2000).
- [55] HE Y.-l, MA X., WANG Z-m, *Nonlinear discrete analysis method for random vibration of guyed masts under wind load*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 512-525, Vol. 91 (2003).
- [56] HOLMES J.D., *Wind loading on structures*, Ed. SpronPress, London (2001).
- [57] HU S. L., *Response of dynamic systems excited by non gaussian pulse processes*, Journal of Engineering Mechanics ASCE, pp. 1819-1827, Vol 119 (1993).
- [58] IBRAHIM R. A., SOUDNARARAJAN A., HEO H., *Stochastic Response of Nonlinear Dynamic Systems Based on a Non-Gaussian Closure*, Journal of Applied Mechanics, pp.965-970 Vol 52 (1985).
- [59] ITO K., *On a formula concerning stochastic differential*, Nagoya Math., p 55 Vol 3 (1951)
- [60] JAIN A., JONES N.P., SCANLAN R.H., *Coupled flutter and buffeting analysis of long-span bridges*, Journal of Structural Engineering ASCE 122-7 (1996).
- [61] KAC M., SIEGERT A. J. F., *On the theory of noise in radio receivers with square law detectors*, Journal of applied physics, pp 383-397 Vol 8 (1947).
- [62] KAPPOS A. J., *Dynamic loading and design of structures*, Spon Press (2002).
- [63] KAREEM A., KIJIEWSKI T., *Time-frequency analysis of wind effects on structures*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 1435-1452, Vol. 90 (2002).
- [64] KAREEM A., JUN Z., TOGNARELLI A., *Surge response statistics of tension leg platforms under wind and wave loads : a statistical quadratization approach*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 225-240 Vol 10-4 (1995).
- [65] KAREEM A., TOGNARELLI M.A., GURLEY K.R., *Modeling and analysis of quadratic term in the wind effects on structures*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 1101-11110, Vol. 74 (1998).
- [66] KRASNOV M., KISSELEV A., MAKARENKO G., *Equations intégrales*, (Traduit du Russe), Ed. MIR, Moscou (1976)
- [67] LARSEN A., *Aerodynamics of Large Bridges*, Balkema, Amsterdam, (1992).
- [68] LUTES L.D., HU S.L., *Non normal stochastic response of linear systems*, Journal of Engineering Mechanics ASCE, pp. 127-141, Vol 112 (1986).
- [69] LUTES L.D, *Cumulants of stochastic response for linear systems*, Journal of Engineering Mechanics ASCE, pp. 1062-1075, Vol 112-10 (1986)

- [70] MESTAT P., PRAT M., *Ouvrages en interaction*, AFPC, Emploi des éléments finis en génie civil, Hermes Science Publications, Paris (1999).
- [71] MINH N. N., MIYATA T., YAMADA H., SANADA Y., *Numerical simulation of wind turbulence and buffeting analysis of long span-bridges*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 301-315, Vol. 83 (1999).
- [72] MIRRI D., IUCULANO G., TRAVERSO P.A., PASINI G., FILICORI F., *Non-linear dynamic system modelling based on modified Volterra series approaches*, Measurement, pp. 9-21, Vol 33 (2003).
- [73] MUSCOLINO G., *Response of linear and non linear structural systems under gaussian or non gaussian filtered input*, Dynamic motion chaotic and stochastic behaviour, Ed. F. CASCIATI, Springer, Wien, pp. 203-299 (1993).
- [74] MUSCOLINO G., *Linear systems excited by polynomial forms of non-Gaussian filtered processes*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 35-44, Vol 10 (1995)
- [75] NAESS A., *Statistical analysis of second-order response of marine structures*, Journal of Ship Res. pp. 270-284, Vol 29-4 (1985).
- [76] NAESS A., *Crossing rate statistics of quadratic transformations of gaussian processes*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp 209-217, Vol 16 (2001).
- [77] PHOON K.K., HUANG S.P., QUEK S.T., *Simulation of second-order processes using Karhunen-Loeve expansion*, Computers and Structures, pp. 1049-1060, Vol. 80 (2002).
- [78] PRADLWARTER H. J., *Non-linear stochastic response distributions by local statistical linearization*, International Journal of Non-Linear Mechanics, pp. 1135-1151, Vol. 36 (2001).
- [79] PRADLWARTER H. J., *Deterministic integration algorithms for stochastic response computations of FE-systems*, Computers and structures, pp. 1489-1502, Vol. 80 (2002).
- [80] PREUMONT A., *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*, Presses polytechniques et universitaires romandes (1990).
- [81] RICE S. O., *Mathematical analysis of random noise*, Bell system technical journal, pp46-156, Vol 25 (1945).
- [82] RISKEN H., *The Fokker-Planck equation. Methods of solution and application*, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [83] SCHETZEN M., *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*, John Wiley & Sons, New York (1980).
- [84] SIBETHEROS I.A., RIJKEN O. R., NIEDZWECKI J. M., *Volterra series-based system analysis of random wave interaction with a horizontal cylinder*, Ocean Engineering, pp. 241-270, Vol 27 (2000).
- [85] SIMIU E., SCANLAN R. H., *Wind effects on structures*, John Wiley & Sons (1996).
- [86] SOIZE C., *Gust loading factors with non linear pressure terms*, Journal of the structural division ASCE pp 991-1007, Vol 104-6 (1978).
- [87] SOIZE C., KREE P., *Mécanique aléatoire*, Ed. Dunod, Paris (1983).
- [88] SOLARI G., *Gust buffeting - Peak wind velocity and equivalent pressure*, Journal of Structural and Mechanical Engineering ASCE, pp. 365-382, Vol 119-2 (1993)

- [89] SOLARI G., *The role of analytical methods for evaluating the wind-induced response of structures*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 1453-1477, Vol. 90 (2002).
- [90] SOLARI G., TUBINO F., *A turbulence model based on principal components*, Probabilistic Engineering Mechanics pp. 327-335, Vol. 17 (2002).
- [91] SPANOS P. D., *Spectral moments calculation of linear system output*, Journal of Applied Mechanics ASME pp. 901-903 Vol 50 (1983)
- [92] STRATONOVICH R. L., *Topics in the theory of random noise*, Volume 1, Gordon and Breach Science Publishers, New York (1963)
- [93] TO C. W. S., *On computational stochastic structural dynamics applying finite elements*, Computational methods in engineering, pp. 3-40, Vol. 8 (2001).
- [94] VAICAITIS R., SIMIU E., *Non linear pressure terms and alongwind response*, Journal of Structural Division ASCE pp. 903-906 Vol 103 (1977).
- [95] WINTERSTEIN S. R., *Nonlinear vibration models for extremes and fatigue*, Journal of Engineering Mechanics ASCE, pp 1772-1790, Vol 114-10 (1988).
- [96] WOLFRAM RESEARCH, *Mathworld*, <http://mathworld.wolfram.com/>
- [97] WU W. F., LIN Y. K., *Cumulant-neglect closure for non-linear oscillators under random parametric and external excitations*, International Journal of Non Linear Mechanics, pp. 349-362 Vol 19-4 (1984).
- [98] YANG F., *Vibrations of cable-stayed bridges under moving vehicles*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège (1996).

Sixième partie

Annexes

Annexe A

Calcul d'intégrales de fractions rationnelles

Les développements analytiques que nous avons réalisés ont mené au calcul de quelques intégrales de fractions rationnelles relativement compliquées. Le calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle peut être entrepris de de manière différentes :

- soit en décomposant cet intégrand en une somme de fractions rationnelles plus simples, c'est-à-dire dont les numérateurs et dénominateurs sont au plus des formes quadratiques. On peut démontrer que cette décomposition est toujours possible. Elle n'est cependant pas toujours évidente dans le cadre des fonctions étudiées ;
- soit en recourant au théorème des résidus, au lemme de Jordan et aux théorème des grandes encoches (voire aussi parfois des petites encoches).

Dans cette annexe, nous nous contentons de donner une liste de quelques intégrales que nous avons calculées. Ces résultats pourraient éventuellement être réutilisés dans la cadre d'autres développements analytiques.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\varpi^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\varpi}\right)^2} d\omega = \frac{\pi \varpi}{2\xi} \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\varpi^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\varpi}\right)^2} d\omega = \frac{\frac{\pi \varpi^4}{\alpha} + \frac{\pi \varpi}{2\xi} (\alpha^2 + \varpi^2 (1 - 4\xi^2))}{\alpha^4 + 2\alpha^2 (1 - 2\xi^2) \varpi^2 + \varpi^4} \quad (\text{A.2})$$

Notons que :

$$\frac{\frac{\pi \varpi^4}{\alpha} + \frac{\pi \varpi}{2\xi} (\alpha^2 + \varpi^2 (1 - 4\xi^2))}{\alpha^4 + 2\alpha^2 (1 - 2\xi^2) \varpi^2 + \varpi^4} \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{\pi}{\alpha} \underbrace{\frac{\varpi^4}{\alpha^4 + 2\alpha^2 (1 - 2\xi^2) \varpi^2 + \varpi^4}}_{\simeq 1} + \frac{\pi \varpi}{2\xi} \underbrace{\frac{\alpha^2 + \varpi^2 (1 - 4\xi^2)}{\alpha^4 + 2\alpha^2 (1 - 2\xi^2) \varpi^2 + \varpi^4}}_{\simeq \frac{1}{\alpha^2 + \varpi^2}} \quad (\text{A.4})$$

ce qui traduit mathématiquement le notion d'approximation en bruit blanc.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\varpi^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\varpi}\right)^2} d\omega &= \frac{\pi \varpi}{2\xi} \frac{\varpi^2}{\alpha^2 + 2\xi \alpha \varpi + \varpi^2} \\ &\simeq \frac{\pi \varpi^3}{2\xi (\alpha^2 + \varpi^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^4}{\alpha^2 + \omega^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\varpi^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\varpi}\right)^2} d\omega &= \frac{\pi \varpi}{2\xi} \frac{(2\xi \alpha + \varpi) \varpi^3}{\alpha^2 + 2\xi \alpha \varpi + \varpi^2} \\ &\simeq \frac{\pi \varpi}{2\xi} \frac{\varpi^4}{\alpha^2 + \varpi^2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Pour le calcul du bispectre associé à la densité spectrale d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\left[\alpha^2 + (\omega + \omega_1)^2\right] \left[\alpha^2 + (\omega_2 - \omega)^2\right] [\alpha^2 + \omega^2]} = \frac{2\pi (12\alpha^2 + \omega_1^2 + \omega_1\omega_2 + \omega_2^2)}{\alpha (4\alpha^2 + \omega_1^2) (4\alpha^2 + \omega_2^2) (4\alpha^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)} \quad (\text{A.7})$$

Pour le calcul de la réponse de l'oscillateur simple soumis à un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3\alpha^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2) K_2(\omega_1, \omega_2)}{(\alpha^2 + \omega_1^2) (\alpha^2 + \omega_2^2) (\alpha^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)} d\omega_1 d\omega_2 = \\ \frac{\pi^2}{\varpi^8} \frac{1}{1 + 8\xi^2} \frac{\varphi^4 \sum_{k=0}^{k=7} a_k(\xi) \varphi^k}{(1 + 2\xi\varphi) (1 + 2\xi\varphi + \varphi^2)^2 (4 + 4\xi\varphi + \varphi^2) (1 + 4\xi\varphi + 4\varphi^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

où $\varphi = \frac{\varpi}{\alpha}$ et les coefficients $a_0(\xi)$, $a_7(\xi)$ sont données au tableau ci-dessous..

Pour le calcul de la réponse de l'oscillateur simple soumis à un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, une autre intégrale doit également être évaluée. Elle permet de prendre compte des termes d'ordre inférieur (en I_u) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(12\alpha^2 + \omega_1^2 + \omega_1\omega_2 + \omega_2^2) K_2(\omega_1, \omega_2)}{(4\alpha^2 + \omega_1^2) (4\alpha^2 + \omega_2^2) (4\alpha^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)} d\omega_1 d\omega_2 = \\ \frac{\pi^2}{\varpi^8} \frac{1}{1 + 8\xi^2} \frac{\varphi^4 \sum_{k=0}^{k=3} b_k(\xi) \varphi^k}{4(1 + \xi\varphi) (4 + 4\xi\varphi + \varphi^2) (1 + 2\xi\varphi + \varphi^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

où $\varphi = \frac{\varpi}{\alpha}$ et les coefficients $a_0, \dots, a_7$ sont données au tableau A.1.

Pour l'intégrale du tri-spectre

$a_0(\xi)$	32	$b_0(\xi)$	8
$a_1(\xi)$	352ξ	$b_1(\xi)$	32ξ
$a_2(\xi)$	$8(17 + 184\xi^2)$	$b_2(\xi)$	$5(1 + 8\xi^2)$
$a_3(\xi)$	$16\xi(53 + 184\xi^2)$	$b_3(\xi)$	$2\xi(1 + 8\xi^2)$
$a_4(\xi)$	$131 + 2040\xi^2 + 2816\xi^4$		
$a_5(\xi)$	$2\xi(197 + 1128\xi^2 + 512\xi^4)$		
$a_6(\xi)$	$12(3 + 34\xi^2 + 80\xi^4)$		
$a_7(\xi)$	$24\xi(1 + 8\xi^2)$		

TAB. A.1 – Coefficients a et b

$$\begin{aligned}
& \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{\left(\alpha^2 + (x+z+t)^2\right) \left(\alpha^2 + (y+t)^2\right) \left(\alpha^2 + (z-t)^2\right) (\alpha^2 + t^2)} dx dy dz dt \\
&= \frac{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^4}{8\xi(1-\xi^2)(1+3\xi^2)} \frac{\sum_{k=0}^{k=19} d_k(\xi) \varphi^k}{DENOM}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

où

$$\begin{aligned}
DENOM = & (1 + \xi\varphi)(1 + 2\xi\varphi + \varphi^2)(4 - 4\xi\varphi + \varphi^2)(4 + 4\xi\varphi + \varphi^2)(16 + 8\xi\varphi + \varphi^2) \\
& (4 + 12\xi\varphi + 9\varphi^2)(4 + 20\xi\varphi + 25\varphi^2)(4 + 12\xi\varphi + (1 + 8\xi^2)\varphi^2) \\
& (4 + 20\xi\varphi + (9 + 16\xi^2)\varphi^2)(4 + 20\xi\varphi + (1 + 24\xi^2)\varphi^2)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

et

$$\begin{aligned}
d_0 &= 131072\xi(-1 - 8\xi^2 + 12\xi^4) \\
d_1 &= 65536(2 - 47\xi^2 - 404\xi^4 + 588\xi^6) \\
d_2 &= 8192\xi(219 - 5404\xi^2 - 33428\xi^4 + 50304\xi^6) \\
d_3 &= 8192(239 + 925\xi^2 - 55252\xi^4 - 180808\xi^6 + 308544\xi^8) \\
d_4 &= 2048\xi(18001 - 28543\xi^2 - 1487500\xi^4 - 2050496\xi^6 + 4783872\xi^8) \\
d_5 &= 1024(9995 + 308041\xi^2 - 1051124\xi^4 - 12701384\xi^6 - 3519488\xi^8 + 24185856\xi^{10}) \\
d_6 &= 512\xi(344852 + 2952469\xi^2 - 14218356\xi^4 - 67249232\xi^6 + 30186368\xi^8 + 78001152\xi^{10}) \\
d_7 &= 256(91325 + 5184913\xi^2 + 15554638\xi^4 - 107692640\xi^6 - 203447968\xi^8 + 238194176\xi^{10} + \\
& 139167744\xi^{12}) \\
d_8 &= 512\xi(660260 + 10841403\xi^2 + 7531780\xi^4 - 122527524\xi^6 - 54260144\xi^8 + 193385984\xi^{10} + \\
& 5388288\xi^{12}) \\
d_9 &= 128(207419 + 15939535\xi^2 + 107106932\xi^4 - 64484880\xi^6 - 652886560\xi^8 + 351590464\xi^{10} + \\
& 585318400\xi^{12} - 270956544\xi^{14}) \\
d_{10} &= 32\xi(9628859 + 206380094\xi^2 + 600878556\xi^4 - 1025031024\xi^6 - 1627271360\xi^8 + \\
& 3091768576\xi^{10} - 41927680\xi^{12} - 1383776256\xi^{14}) \\
d_{11} &= 64(225566 + 22357359\xi^2 + 192001889\xi^4 + 173267792\xi^6 - 747505800\xi^8 + \\
& 221901440\xi^{10} + 1194177152\xi^{12} - 827069440\xi^{14} - 424132608\xi^{16})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{12} &= 8\xi (17284737 + 431506745\xi^2 + 1607096620\xi^4 - 1016493536\xi^6 - 4319885184\xi^8 + \\
&\quad 6461884416\xi^{10} + 2261010432\xi^{12} - 5636702208\xi^{14} - 1078198272\xi^{16}) \\
d_{13} &= 12 (264253 + 41404903\xi^2 + 397335204\xi^4 + 502641304\xi^6 - 1677770496\xi^8 - 677420032\xi^{10} + \\
&\quad 3352473600\xi^{12} - 850468864\xi^{14} - 1391788032\xi^{16} - 94371840\xi^{18}) \\
d_{14} &= 2\xi (14213942 + 454478537\xi^2 + 1989525724\xi^4 - 653017136\xi^6 - 8254993728\xi^8 + \\
&\quad 2984349696\xi^{10} + 7698173952\xi^{12} - 3692593152\xi^{14} - 1203240960\xi^{16}) \\
d_{15} &= 248733 + 79771545\xi^2 + 975544790\xi^4 + 2130246400\xi^6 - 3265110240\xi^8 - 7322349312\xi^{10} + \\
&\quad 5600200704\xi^{12} + 2945433600\xi^{14} - 1344798720\xi^{16}) \\
d_{16} &= \xi (2292257 + 104231101\xi^2 + 675071320\xi^4 + 805976336\xi^6 - 1845526464\xi^8 - 1912829952\xi^{10} + \\
&\quad 1936945152\xi^{12} + 221184000\xi^{14}) \\
d_{17} &= 4 (1575 + 1051628\xi^2 + 19132679\xi^4 + 77894182\xi^6 + 53001280\xi^8 - 143321472\xi^{10} \\
&\quad - 76326912\xi^{12} + 68567040\xi^{14}) \\
d_{18} &= 120\xi (1 - \xi^2) (1 + 3\xi^2) (585 + 23858\xi^2 + 211488\xi^4 + 383360\xi^6 + 67584\xi^8) \\
d_{19} &= 1800\xi^2 (1 - \xi^2) (1 + 3\xi^2) (1 + 8\xi^2) (9 + 16\xi^2) (1 + 24\xi^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{\left(\alpha^2 + (x+t)^2\right) \left(\alpha^2 + (y+t)^2\right) \left(\alpha^2 + (z-t)^2\right) (\alpha^2 + t^2)} dx dy dz dt \\
&= \frac{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^4}{32\xi (1 + 3\xi^2)} \frac{\varphi^3 \sum_{k=0}^{k=17} e_k(\xi) \varphi^k}{DENOM} \tag{A.12}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
DENOM &= (1 + \xi\varphi)^2 (2 + \xi\varphi) (1 + 2\xi\varphi) (1 + 2\xi\varphi + \varphi^2)^2 (4 + 4\xi\varphi + \varphi^2)^2 (16 + 8\xi\varphi + \varphi^2) \\
&\quad (1 + 4\xi\varphi + 4\varphi^2) (1 + 4\xi\varphi + (1 + 3\xi^2) \varphi^2) (4 + 12\xi\varphi + (1 + 8\xi^2) \varphi^2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
e_0 &= 15360 \\
e_1 &= 337920\xi \\
e_2 &= 320 (305 + 10476\xi^2) \\
e_3 &= 160\xi (10993 + 124344\xi^2) \\
e_4 &= 8 (21991 + 1762320\xi^2 + 9871200\xi^4) \\
e_5 &= 4\xi (665273 + 16684692\xi^2 + 55477440\xi^4) \\
e_6 &= 2 (68813 + 8773946\xi^2 + 104326472\xi^4 + 227740800\xi^6) \\
e_7 &= \xi (1701525 + 66931772\xi^2 + 456000256\xi^4 + 693991680\xi^6) \\
e_8 &= 2 (26033 + 4488264\xi^2 + 82474964\xi^4 + 359177296\xi^6 + 394496640\xi^8) \\
e_9 &= \xi (501585 + 26756496\xi^2 + 277546908\xi^4 + 827879504\xi^6 + 666190080\xi^8) \\
e_{10} &= 2 (4435 + 1008932\xi^2 + 25093836\xi^4 + 164024786\xi^6 + 349805256\xi^8 + 205632000\xi^{10}) \\
e_{11} &= \xi (62867 + 4461220\xi^2 + 62327769\xi^4 + 275479540\xi^6 + 492074112\xi^8 + 179988480\xi^{10}) \\
e_{12} &= 2 (383 + 91610\xi^2 + 2992768\xi^4 + 26191079\xi^6 + 81903508\xi^8 + 92981056\xi^{10} + 26388480\xi^{12}) \\
e_{13} &= \xi (3279 + 281098\xi^2 + 5070597\xi^4 + 29821340\xi^6 + 67567504\xi^8 + 54002432\xi^{10} + 9277440\xi^{12}) \\
e_{14} &= 2 (12 + 2940\xi^2 + 122435\xi^4 + 1363887\xi^6 + 5630468\xi^8 + 9218128\xi^{10} + 4712064\xi^{12} + 368640\xi^{14}) \\
e_{15} &= 4\xi (11 + 1262\xi^2 + 30425\xi^4 + 226898\xi^6 + 667776\xi^8 + 750240\xi^{10} + 186624\xi^{12}) \\
e_{16} &= 16\xi^2 (1 + 122\xi^2 + 2017\xi^4 + 10772\xi^6 + 21984\xi^8 + 13824\xi^{10}) \\
e_{17} &= 256\xi^5 (1 + 3\xi^2)^2 (1 + 8\xi^2)
\end{aligned}$$

Annexe B

Résumé de la méthode basée sur le produit de Kronecker

Equation de comportement structurel :

$$\dot{X} = DX + EF \quad (\text{B.1})$$

Dimensions : $X(N,1)$, $D(N,N)$, $E(N,n)$, $F(n,1)$

Colorisation des efforts appliqués :

$$F = \sum_{l=0}^L A_l Y^{[l]} \quad (\text{B.2})$$

Dimensions : $A_l(n,p)^l$, $Y(p,1)$

Caractérisation des processus aléatoires générateurs :

$$dY = \Gamma Y dt + \Lambda dL \quad (\text{B.3})$$

Dimensions : $\Gamma(p,p)$, $\Lambda(p,q)$, $L(q,1)$ t.q. $E[dL^2] = q_2(t)dt$, $q_2(q^2,1)$

Equation gouvernant l'évolution des moments structuraux :

$$\dot{E} \left[X^{[r]} \right] = D_r E \left[X^{[r]} \right] + E_r E \left[X^{[r-1]} \otimes F \right] \quad (\text{B.4})$$

où $D_1 = D$, $D_r = D \otimes I_{n_X}^{[r-1]} + I_{n_X} \otimes D_{r-1}$ size(n_X^r, n_X^r) et $E_r = Q_r^N \left(I_{n_X}^{[r-1]} \otimes E \right)$ size(n_X^r, n_X^r)

Equation gouvernant l'évolution des moments croisés entre réponse et sollicitation :

$$E \left[X^{[r-1]} \otimes F \right] = \sum_{l=0}^L \left(I_N^{[r-1]} \otimes A_l \right) E \left[X^{[r-1]} \otimes Y^{[l]} \right] \quad (\text{B.5})$$

Equation gouvernant l'évolution des moments croisés entre réponse et processus générateurs :

$$\begin{aligned}
E \left[X^{[r]} \otimes Y^{[l]} \right] &= -M_{r,l}^{-1} \left(I_N^{[r]} \otimes \Lambda_l \right) \left(E \left[X^{[r]} \otimes Y^{[l-2]} \right] \otimes I_p^{[2]} \right) \Lambda^{[2]} q_2(t) \\
&\quad - M_{r,l}^{-1} E_r \left\{ \sum_{h=0}^L \left\{ \left(I_N^{[r-1]} \otimes A_h \right) \otimes I_p^{[l]} \right\} E \left[X^{[r-1]} \otimes Y^{[h+l]} \right] \right\} \quad (B.6)
\end{aligned}$$

où $M_{r,l} = D_r \otimes I_p^{[l]} + I_N^{[r]} \otimes \Gamma_l \text{ size}(n_X^r p^l, n_X^r p^l)$, $\Gamma_l = \Gamma \otimes I_p^{[l-1]} + I_p \otimes \Gamma_{l-1} \text{ size}(p^l, p^l)$ et $\Lambda_l = \frac{1}{2} Q_l^p (Q_{l-1}^p \otimes I_p) \text{ size}(p^l, p^l)$

Equation gouvernant l'évolution des moments des processus générateurs :

$$\dot{E} \left[Y^{[l]} \right] = l \Gamma E \left[Y^{[l]} \right] + \frac{l(l-1)}{2} E \left[Y^{[l-2]} \right] \Lambda^{[l]} q_2 \quad (B.7)$$

ou formule basée sur celle ci-dessus pour $r = 0$ (ce qui est programmé en pratique)

Annexe C

Transformées de Fourier pour le calcul du bi-spectre

Les transformées de Fourier double des termes principaux de la fonction de bi-corrélation de l'effort appliqué sont les suivantes :

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 = S(\omega_1) S_u(\omega_2) \quad (C.1)$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau_1) R_u(\tau_2 - \tau_1) e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 = S_u(\omega_1 + \omega_2) S_u(\omega_2) \quad (C.2)$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1) e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 = S_u(\omega_1 + \omega_2) S_u(-\omega_1) \quad (C.3)$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau_1) e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 = S_u(\omega_1) \delta(\omega_2) \quad (C.4)$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau_2 - \tau_1) e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 = S_u(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \quad (C.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u^2(\tau_1) e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega \delta(\omega_2) \\ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u^2(\tau_2) e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega \delta(\omega_1) \\ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u^2(\tau_2 - \tau_1) e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega \delta(\omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \quad (C.6)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\
= & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_A) e^{i\omega_A\tau_1} d\omega_A \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_B) e^{i\omega_B\tau_2} d\omega_B \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_C) e^{i\omega_C(\tau_2-\tau_1)} d\omega_C e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\
= & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_A) S_u(\omega_B) S_u(\omega_C) e^{i(\omega_A-\omega_C-\omega_1)\tau_1} \\
& e^{i(\omega_B+\omega_C-\omega_2)\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 d\omega_A d\omega_B d\omega_C \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_A) S_u(\omega_B) S_u(\omega_C) \delta(\omega_A - \omega_C - \omega_1) \delta(\omega_B + \omega_C - \omega_2) d\omega_A d\omega_B d\omega_C \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega + \omega_1) S_u(\omega_2 - \omega) S_u(\omega) d\omega \tag{C.7}
\end{aligned}$$

Annexe D

Transformées de Fourier pour le calcul du tri-spectre

Le calcul complet du trispectre nécessite le calcul des transformée de Fourier (triples) suivantes :

$$\begin{aligned} d_A(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_A(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &= S_u(\omega_1) \delta(\omega_2) \delta(\omega_3) + S_u(\omega_2) \delta(\omega_3) \delta(\omega_1) + S_u(\omega_3) \delta(\omega_1) \delta(\omega_2) \\ &\quad + S_u(\omega_3) \delta(\omega_1) \delta(\omega_2 + \omega_3) + S_u(\omega_3) \delta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_3) + S_u(\omega_2) \delta(\omega_3) \delta(\omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \quad (D.1)$$

$$\begin{aligned} d_B(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_B(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \delta(\omega_2) \delta(\omega_3) + \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega_1 \delta(\omega_3) \delta(\omega_1) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_3 - \omega) d\omega_1 \delta(\omega_1) \delta(\omega_2) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_3 - \omega) d\omega_1 \delta(\omega_1) \delta(\omega_2 + \omega_3) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_3 - \omega) d\omega_1 \delta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_3) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega_1 \delta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \quad (D.2)$$

$$\begin{aligned}
d_C(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_C(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
&= S_u(\omega_1) S_u(\omega_2) \delta(\omega_3) + S_u(\omega_1) S_u(\omega_3) \delta(\omega_2) + S_u(\omega_2) S_u(\omega_3) \delta(\omega_1) \\
&\quad + S_u(\omega_2) S_u(\omega_1 + \omega_2) \delta(\omega_3) + S_u(\omega_1) S_u(\omega_1 + \omega_2) \delta(\omega_3) \\
&\quad + S_u(\omega_3) S_u(\omega_1 + \omega_3) \delta(\omega_2) + S_u(\omega_1) S_u(\omega_1 + \omega_3) \delta(\omega_2) \\
&\quad + S_u(\omega_3) S_u(\omega_2 + \omega_3) \delta(\omega_1) + S_u(\omega_2) S_u(\omega_2 + \omega_3) \delta(\omega_1) \\
&\quad + \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) S_u(\omega_2) S_u(\omega_3) + \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) S_u(\omega_1) S_u(\omega_3) \\
&\quad + \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) S_u(\omega_2) S_u(\omega_1)
\end{aligned} \tag{D.3}$$

$$d_D(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} [\delta(\omega_2 + \omega_3) S_u(\omega_1) S_u(\omega_3)] \tag{D.4}$$

car

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
&= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau_1) R_u(\tau) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i(\omega_2+\omega_3)\tau_2} e^{-i\omega_3\tau} d\tau_1 d\tau_2 d\tau \\
&= \frac{\delta(\omega_2 + \omega_3)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau_1) R_u(\tau) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_3\tau} d\tau_1 d\tau \\
&= \delta(\omega_2 + \omega_3) S_u(\omega_1) S_u(\omega_3)
\end{aligned} \tag{D.5}$$

$$\begin{aligned}
&d_E(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\
&= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_E(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3
\end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
&= S_u(\omega_2) S_u(\omega_3) S_u(\omega_1 + \omega_3) + S_u(\omega_2) S_u(\omega_3) S_u(\omega_1 + \omega_2) \\
&\quad + S_u(\omega_1) S_u(\omega_3) S_u(\omega_2 + \omega_3) + S_u(\omega_1) S_u(\omega_3) S_u(\omega_1 + \omega_2) \\
&\quad + S_u(\omega_1) S_u(\omega_2) S_u(\omega_2 + \omega_3) + S_u(\omega_1) S_u(\omega_2) S_u(\omega_1 + \omega_3) \\
&\quad + S_u(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) S_u(\omega_2 + \omega_3) (S_u(\omega_2) + S_u(\omega_3)) \\
&\quad + S_u(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) S_u(\omega_1 + \omega_2) (S_u(\omega_1) + S_u(\omega_2)) \\
&\quad + S_u(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) S_u(\omega_1 + \omega_3) (S_u(\omega_1) + S_u(\omega_3))
\end{aligned} \tag{D.7}$$

$$d_F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_F(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (D.8)$$

$$= \delta(\omega_1) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_2 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega \\ + \delta(\omega_2) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_3 + \omega) S_u(\omega_1 - \omega) S_u(\omega) d\omega \\ + \delta(\omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1 + \omega) S_u(\omega_2 - \omega) S_u(\omega) d\omega \\ + \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_2 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega \quad (D.9)$$

car :

$$\frac{\delta(\omega_3)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_2 - \tau_1) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\ = \frac{\delta(\omega_3)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(x) e^{ix\tau_1} dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(y) e^{iy\tau_2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(z) e^{iz(\tau_2 - \tau_1)} dz e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\ = \frac{\delta(\omega_3)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(x) S_u(y) S_u(z) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_1 + z - x)\tau_1} e^{-i(\omega_2 - y - z)\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 dx dy dz \\ = \delta(\omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(x) S_u(y) S_u(z) \delta(\omega_1 + z - x) \delta(\omega_2 - y - z) dx dy dz \\ = \delta(\omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1 + z) S_u(\omega_2 - z) S_u(z) dz \quad (D.10)$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) \\
& \quad e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
& \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(A) R_u(B) R_u(B - A) \\
& \quad e^{-i(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\tau_1} e^{-i\omega_2 A} e^{-i\omega_3 B} d\tau_1 dA dB \\
& = \frac{\delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(x) e^{ixA} dx \\
& \quad \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(y) e^{iyB} dy \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(z) e^{iz(B-A)} dz e^{-i\omega_2 A} e^{-i\omega_3 B} dA dB \\
& = \frac{\delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(x) S_u(y) S_u(z) \\
& \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_2-x+z)A} e^{-i(\omega_3-y-z)B} dA dB dx dy dz \\
& = \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(x) S_u(y) S_u(z) \\
& \quad \delta(\omega_2 - x + z) \delta(\omega_3 - y - z) dx dy dz \\
& = \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_2 + z) S_u(\omega_3 - z) S_u(z) dz \tag{D.11}
\end{aligned}$$

$$d_G(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_G(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (D.12)$$

$$\begin{aligned}
= & \delta(\omega_2 + \omega_3) S_u(\omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega \\
& + \delta(\omega_1 + \omega_3) S_u(\omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega \\
& + \delta(\omega_1 + \omega_2) S_u(\omega_2) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_3 - \omega) d\omega \\
& + \delta(\omega_2 + \omega_3) S_u(\omega_1) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_3 - \omega) d\omega \\
& + \delta(\omega_1 + \omega_3) S_u(\omega_2) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega \\
& + \delta(\omega_1 + \omega_2) S_u(\omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega \quad (D.13)
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u^2(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
= & \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u^2(\tau) R_u(\tau_3) e^{-i(\omega_1+\omega_2)\tau_1} e^{-i\omega_2\tau} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau d\tau_3 \\
= & \delta(\omega_1 + \omega_2) S_u(\omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega \quad (D.14)
\end{aligned}$$

$$d_H(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_H(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (D.15)$$

$$= \mathfrak{L}_{1,2,3}^{\odot} \left[\delta(\omega_2 + \omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega \right] \\ + 4\mathfrak{L}_{1,2,3}^{\odot} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1 + \omega) S_u(\omega_2 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega \right] \quad (D.16)$$

car

$$\frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u^2(\tau_1) R_u^2(\tau_3 - \tau_2) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ = \delta(\omega_2 + \omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega \quad (D.17)$$

et

$$\frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ = \frac{1}{8\pi^3} \int \cdots \int S_u(x) e^{ix\tau_1} S_u(y) e^{iy\tau_2} S_u(z) e^{iz(\tau_3 - \tau_1)} S_u(q) e^{iq(\tau_3 - \tau_2)} e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} d\cdots \\ = \frac{1}{8\pi^3} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(x) S_u(y) S_u(z) S_u(q) e^{-i(\omega_1 - x + z)\tau_1} e^{-i(\omega_2 + q - y)\tau_2} e^{-i(\omega_3 - z - q)\tau_3} d\cdots \\ = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega_1 - x + z) \delta(\omega_2 + q - y) \delta(\omega_3 - z - q) S_u(x) S_u(y) S_u(z) S_u(q) dx dy dz dq \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1 + \omega_3 + \omega) S_u(\omega_2 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega \quad (D.18)$$

$$r_H(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = +4R_u(\tau_1) R_u(\tau_2) R_u(\tau_3 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) \\ +4R_u(\tau_1) R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_2) \\ +4R_u(\tau_2) R_u(\tau_3) R_u(\tau_2 - \tau_1) R_u(\tau_3 - \tau_1) \quad (D.19)$$

Avec les notations de sommation cyclique, on peut écrire :

$$d_A(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} [S_u(\omega_1) \delta(\omega_2) \delta(\omega_3) + S_u(\omega_3) \delta(\omega_1) \delta(\omega_2 + \omega_3)] \quad (\text{D.20})$$

$$\begin{aligned} d_B(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega \delta(\omega_2) \delta(\omega_3) \right] \\ & + \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_3 - \omega) d\omega \delta(\omega_1) \delta(\omega_2 + \omega_3) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{aligned} d_C(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} [(S_u(\omega_2) S_u(\omega_3) + S_u(\omega_3) S_u(\omega_2 + \omega_3)) \delta(\omega_1)] \\ & + \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} [S_u(\omega_2) S_u(\omega_2 + \omega_3) \delta(\omega_1)] \\ & + \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} [S_u(\omega_2) S_u(\omega_3)] \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

$$d_D(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} [\delta(\omega_2 + \omega_3) S_u(\omega_1) S_u(\omega_3)] \quad (\text{D.23})$$

$$\begin{aligned} d_E(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} [S_u(\omega_2) S_u(\omega_1 + \omega_3) (S_u(\omega_1) + S_u(\omega_3))] \\ & + S_u(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} [S_u(\omega_1 + \omega_3) (S_u(\omega_1) + S_u(\omega_3))] \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned} d_F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} \left[\delta(\omega_1) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_2 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega \right] \\ & + \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_2 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

$$d_G(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} \left[(\delta(\omega_2 + \omega_3) + \delta(\omega_1 + \omega_3)) S_u(\omega_2) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega \right] \quad (\text{D.26})$$

$$\begin{aligned} d_H(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} \left[\delta(\omega_2 + \omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_1 - \omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) S_u(\omega_2 - \omega) d\omega \right] \\ & + 4 \mathbb{C}_{1,2,3}^{\odot} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1 + \omega_3 + \omega) S_u(\omega_2 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega \right] \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

L'expression du trispectre de la sollicitation ainsi obtenu est parfaitement symétrique par rapport à ses arguments. Pour les sommations cycliques, ceci est évident. Pour un

terme comme le dernier terme de l'expression de d_E , cela peut paraître moins évident. Pourtant, quand on remplace ω_1 par ω_2 et inversement, on trouve :

$$\delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_1 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega \quad (\text{D.28})$$

Pour les valeurs de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ telles que $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \neq 0$, cette fonction est nulle et est donc trivialement égale à son équivalent avant inversion de ω_1 et ω_2 . Lorsque $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ cette dernière relation peut également s'écrire :

$$\delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(-\omega_2 - \omega_3 + \omega) S_u(\omega_3 - \omega) S_u(\omega) d\omega \quad (\text{D.29})$$

Le changement de variable $\omega' = \omega_3 - \omega$ permet d'écrire :

$$\delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(-\omega_2 - \omega') S_u(\omega') S_u(\omega_3 - \omega') d\omega' \quad (\text{D.30})$$

$$= \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega_2 + \omega) S_u(\omega) S_u(\omega_3 - \omega) d\omega \quad (\text{D.31})$$

ce qui montre finalement que nous avons pu inverser de nouveau les variables ω_1 et ω_2 . Le raisonnement qui vient d'être mené pour ω_1 et ω_2 pourrait également être entrepris pour ω_1 et ω_3 ou ω_2 et ω_3 . Ceci démontre que le tri-spectre de la sollicitation est parfaitement symétrique par rapport à ses arguments.

Annexe E

Représentation de la DDP conjointe gaussienne

La densité de probabilité croisée entre deux variables aléatoires gaussiennes s'exprime par :

$$p_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)} \quad (\text{E.1})$$

Le changement de variables :

$$x' = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \quad (\text{E.2})$$

$$y' = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \quad (\text{E.3})$$

permet d'écrire :

$$p_{xy}(x, y) = \frac{e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(x'^2 - 2\rho x'y' + y'^2)}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \quad (\text{E.4})$$

La densité de probabilité maximale $p_{\max}$ est obtenue pour $x' = y' = 0$. Concentrons nous sur l'écriture des courbes de niveau de la densité de probabilité conjointe, pour des courbes de niveau définies par :

$$p_i = \frac{i}{N} p_{\max} \quad (\text{E.5})$$

avec $i = 1, \dots, N-1$. La courbe de niveau pour $i = N$ se réduit au point de probabilité maximale et la courbe de niveau pour $i = 0$ est une courbe fermée à l'infini.

L'équation de la $i^{\text{ème}}$ courbe de niveau s'écrit donc :

$$x'^2 - 2\rho x'y' + y'^2 = -2(1-\rho^2) \ln \left[2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2} p_i \right] = c_i \quad (\text{E.6})$$

Il s'agit donc d'une conique. Etant donné que le coefficient de corrélation ρ est une grandeur en valeur absolue inférieure ou égale à l'unité, le discriminant quadratique est donc toujours négatif et les courbes de niveau sont donc des ellipses.

Soit le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} x' &= u \cos \alpha - v \sin \alpha \\ y' &= u \sin \alpha + v \cos \alpha \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Dans le nouveau système de coordonnées, la $i^{\text{ème}}$ courbe de niveau s'écrit :

$$(1 - \rho \sin 2\alpha) u^2 + (1 + \rho \sin 2\alpha) v^2 - 2uv\rho \cos 2\alpha = c_i \quad (\text{E.8})$$

En choisissant $\alpha = \frac{\pi}{4}$, l'ellipse possède ses axes principaux parallèles aux axes u et v :

$$(1 - \rho) u^2 + (1 + \rho) v^2 = c_i \quad (\text{E.9})$$

et les demi-longueurs des axes principaux sont :

$$a = \sqrt{\frac{c_i}{(1 - \rho)}} \quad (\text{E.10})$$

$$b = \sqrt{\frac{c_i}{(1 + \rho)}} \quad (\text{E.11})$$

Dans le système de coordonnées normalisé centré (x', y') , les courbes de niveaux de la densité de probabilité croisée entre deux variables aléatoires gaussiennes sont donc des ellipses concentriques dont les axes principaux sont inclinés à 45° .

Le retour dans les axes (x, y) se fait à l'aide du changement de variables inverse de (E.7). Les ellipses des courbes de niveau se centrent donc sur le point de coordonnées (μ_x, μ_y) et les ellipses inclinées à 45° se trouvent étirées d'un facteur σ_x dans la direction de l'axe x et d'un facteur σ_y dans la direction de l'axe y . L'ancien axe principal qui formait un angle de 45° avec l'axe x' se trouve donc maintenant inclinés de $\arctan \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$.

Annexe F

Efforts en champ de turbulence bidimensionnel

Le bispectre croisé entre les sollicitations appliquées entre trois sections différentes de l'ouvrage peut être obtenu à partir de l'expression de la fonction de bicorrélation correspondante. Cette fonction n'est rien d'autre que l'espérance statistique des expressions des sollicitations en ces trois sections :

$$f_i = c_{0_i} + \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}}u_i + \frac{c_{0_i}}{\bar{U}^2}u_i^2 + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}}w_i + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2}u_iw_i + \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2}\right)w_i^2 \quad (\text{F.1})$$

$$f_j = c_{0_j} + \frac{2c_{0_j}}{\bar{U}}u_j + \frac{c_{0_j}}{\bar{U}^2}u_j^2 + \frac{c_{1_j}}{\bar{U}}w_j + \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2}u_jw_j + \left(\frac{2c_{0_j} + c_{2_j}}{2\bar{U}^2}\right)w_j^2 \quad (\text{F.2})$$

$$f_k = c_{0_k} + \frac{2c_{0_k}}{\bar{U}}u_k + \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2}u_k^2 + \frac{c_{1_k}}{\bar{U}}w_k + \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2}u_kw_k + \left(\frac{2c_{0_k} + c_{2_k}}{2\bar{U}^2}\right)w_k^2 \quad (\text{F.3})$$

Le développement des termes de cette expression est assez long. Limitons-nous à ne conserver que les termes d'ordres pairs en les processus aléatoires u , v et w :

$$\begin{aligned} & \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} c_{0_j} u_i w_i u_k w_k + \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}} \frac{2c_{0_j}}{\bar{U}} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} u_i u_j u_k w_k + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}} \frac{2c_{0_j}}{\bar{U}} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} w_i u_j u_k w_k + \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} u_i w_j u_k w_k + \\ & \frac{c_{1_i}}{\bar{U}} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} w_i w_j u_k w_k + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0_j}}{\bar{U}} \frac{2c_{0_k}}{\bar{U}} u_i w_i u_j u_k + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0_j}}{\bar{U}} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}} u_i w_i u_j w_k + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}} u_i w_i w_j w_k + \\ & \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}} u_i u_j w_j w_k + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}} w_i u_j w_j w_k + \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0_k}}{\bar{U}} u_i u_j w_j u_k + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0_k}}{\bar{U}} w_i u_j w_j u_k + \\ & \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}} \frac{2c_{0_k}}{\bar{U}} u_i w_i w_j u_k + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} c_{0_j} \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} u_i w_i u_k^2 + \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}} \frac{2c_{0_j}}{\bar{U}} \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} u_i u_j u_k^2 + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}} \frac{2c_{0_j}}{\bar{U}} \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} w_i u_j u_k^2 + \\ & \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}} \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} u_i w_j u_k^2 + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}} \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} w_i w_j u_k^2 + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} c_{0_j} \left(\frac{2c_{0_k} + c_{2_k}}{2\bar{U}^2}\right) u_i w_i w_k^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) u_i u_j w_k^2 + \frac{c_{1i}}{\bar{U}} \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) w_i u_j w_k^2 + \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} \frac{c_{1j}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) u_i w_j w_k^2 + \\
& \frac{c_{1i}}{\bar{U}} \frac{c_{1j}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) w_i w_j w_k^2 + \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} u_i u_j^2 u_k + \frac{c_{1i}}{\bar{U}} \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} w_i u_j^2 u_k + \\
& \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} u_i^2 u_j u_k + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} w_i^2 u_j u_k + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} \frac{c_{1k}}{\bar{U}} u_i^2 u_j w_k + \\
& \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} \frac{c_{1k}}{\bar{U}} w_i^2 u_j w_k + \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1k}}{\bar{U}} u_i u_j^2 w_k + \frac{c_{1i}}{\bar{U}} \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1k}}{\bar{U}} w_i u_j^2 w_k + \\
& \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1j}}{\bar{U}} \frac{c_{1k}}{\bar{U}} u_i^2 w_j w_k + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1j}}{\bar{U}} \frac{c_{1k}}{\bar{U}} w_i^2 w_j w_k + \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1k}}{\bar{U}} u_i w_j^2 w_k +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{c_{1i}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1k}}{\bar{U}} w_i w_j^2 w_k + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1j}}{\bar{U}} \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} u_i^2 w_j u_k + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1j}}{\bar{U}} \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} w_i^2 w_j u_k + \\
& \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} u_i w_j^2 u_k + \frac{c_{1i}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} w_i w_j^2 u_k + \\
& \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0k}}{\bar{U}^2} u_i w_i u_j^2 u_k^2 + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0k}}{\bar{U}^2} u_i^2 u_j w_j u_k^2 + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0k}}{\bar{U}^2} w_i^2 u_j w_j u_k^2 + \\
& \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{0k}}{\bar{U}^2} u_i w_i w_j^2 u_k^2 + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1k}}{\bar{U}^2} u_i^2 u_j^2 u_k w_k + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1k}}{\bar{U}^2} w_i^2 u_j^2 u_k w_k + \\
& \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1k}}{\bar{U}^2} u_i^2 w_j^2 u_k w_k + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1k}}{\bar{U}^2} w_i^2 w_j^2 u_k w_k +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) u_i w_i u_j^2 w_k^2 + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1j}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) u_i^2 u_j w_j w_k^2 + \\
& \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1j}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) w_i^2 u_j w_j w_k^2 + \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) u_i w_i w_j^2 w_k^2 + \\
& \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0k}}{\bar{U}^2} u_i w_i u_j w_j u_k^2 + \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1k}}{\bar{U}^2} u_i w_i u_j^2 u_k w_k + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1k}}{\bar{U}^2} u_i^2 u_j w_j u_k w_k + \\
& \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1k}}{\bar{U}^2} w_i^2 u_j w_j u_k w_k + \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1k}}{\bar{U}^2} u_i w_i w_j^2 u_k w_k + \\
& \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1j}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) u_i w_i u_j w_j w_k^2 + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0k}}{\bar{U}^2} u_i^2 u_j^2 u_k^2 + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0k}}{\bar{U}^2} w_i^2 u_j^2 u_k^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{0k}}{\bar{U}^2} u_i^2 w_j^2 u_k^2 + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{0k}}{\bar{U}^2} w_i^2 w_j^2 u_k^2 + \\
& \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) u_i^2 u_j^2 w_k^2 + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) w_i^2 u_j^2 w_k^2 + \\
& \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) u_i^2 w_j^2 w_k^2 + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) w_i^2 w_j^2 w_k^2 \\
& + \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1k}}{\bar{U}^2} u_i w_i u_j w_j u_k w_k
\end{aligned}$$

L'expression de la fonction de tricorrélation croisée entre toutes les forces nodales s'exprime donc par l'espérance mathématique de toutes ces expressions. Nous avons décidé de regrouper les termes identiques ensemble. Par exemple, nous pouvons assez facilement retrouver les quelques termes suivants sont l'expression de pose aucun problème ($E[w_i u_j u_k w_k] = E[u_j u_k] E[w_i w_k]$) :

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_{1i}}{\bar{U}} \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} \frac{c_{1k}}{\bar{U}^2} R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} \frac{c_{1j}}{\bar{U}} \frac{c_{1k}}{\bar{U}^2} R_{u_i u_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + \\
& + \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} \frac{c_{1k}}{\bar{U}} R_{u_i u_j}(t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} \frac{c_{1j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1k}}{\bar{U}} R_{u_i u_j}(t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + \\
& + \frac{c_{1i}}{\bar{U}} \frac{c_{1j}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_j}(t_1) + \frac{c_{1i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1j}}{\bar{U}} \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} R_{u_i u_j}(t_1) R_{w_i w_j}(t_1)
\end{aligned}$$

Les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
E[u_i(t) u_j(t + t_1) u_k(t + t_2) u_l(t + t_3)] &= R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_k u_l}(t_3 - t_2) \\
&+ R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_l}(t_3 - t_1) + R_{u_i u_l}(t_3) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1)
\end{aligned}$$

$$E[u_i u_j u_k w_k] = 0$$

$$E[w_i w_j u_k w_k] = 0$$

permettent de prendre en compte les termes supplémentaires suivants :

$$\begin{aligned}
& \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} \frac{c_{0k}}{\bar{U}^2} (\sigma_{u_k}^2 R_{u_i u_j}(t_1) + 2R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1)) \\
& + \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} (\sigma_{u_j}^2 R_{u_i u_k}(t_2) + 2R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1)) \\
& + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} (\sigma_{u_i}^2 R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) + 2R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2)) \\
& + \frac{c_{1i}}{\bar{U}} \frac{c_{1j}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) (\sigma_{w_k}^2 R_{u_i u_j}(t_1) + 2R_{w_i w_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1)) \\
& + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1j}}{\bar{U}} \frac{c_{1k}}{\bar{U}} (\sigma_{w_i}^2 R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + 2R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_i w_k}(t_2)) \\
& + \frac{c_{1i}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1k}}{\bar{U}} (\sigma_{w_j}^2 R_{w_i w_k}(t_2) + 2R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1)) \\
& + \frac{c_{1i}}{\bar{U}} \frac{c_{1j}}{\bar{U}} \frac{c_{0k}}{\bar{U}^2} \sigma_{u_k}^2 R_{w_i w_j}(t_1) + \frac{c_{1i}}{\bar{U}} \frac{c_{0j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1k}}{\bar{U}} \sigma_{u_j}^2 R_{w_i w_k}(t_2) + \frac{c_{0i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1j}}{\bar{U}} \frac{c_{1k}}{\bar{U}} \sigma_{u_i}^2 R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) \\
& \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0k} + c_{2k}}{2\bar{U}^2} \right) \sigma_{w_k}^2 R_{u_i u_j}(t_1) + \left(\frac{2c_{0i} + c_{2i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{2c_{0j}}{\bar{U}} \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} \sigma_{w_i}^2 R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) \\
& + \frac{2c_{0i}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0j} + c_{2j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{2c_{0k}}{\bar{U}} \sigma_{w_j}^2 R_{u_i u_k}(t_2)
\end{aligned}$$

Au, en notant également que

$$E[u_i u_j u_k^2] = \sigma_{u_k}^2 R_{u_i u_j}(t_1) + 2R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1)$$

$$E[w_i w_j u_k^2] = \sigma_{u_k}^2 R_{w_i w_j}(t_1)$$

$$\begin{aligned}
E[u_1(t) u_2(t + t_1) u_3(t + t_2) u_4(t + t_3) u_5^2(t + t_3)] &= 2R_{u_1 u_4} R_{u_2 u_5} R_{u_3 u_5} \\
&+ 2R_{u_1 u_3} R_{u_2 u_5} R_{u_4 u_5} + 2R_{u_1 u_2} R_{u_3 u_5} R_{u_4 u_5} + 2R_{u_1 u_5} (R_{u_2 u_5} R_{u_3 u_4} + R_{u_2 u_4} R_{u_3 u_5} + R_{u_2 u_3} R_{u_4 u_5}) \\
&+ R_{u_5 u_5} (R_{u_1 u_4} R_{u_2 u_3} + R_{u_1 u_3} R_{u_2 u_4} + R_{u_1 u_2} R_{u_3 u_4})
\end{aligned}$$

$$E[u_i w_i u_j w_j u_k^2] = 2R_{u_i u_k} R_{u_j u_k} R_{w_i w_j} + \sigma_{u_k}^2 R_{u_i u_j} R_{w_i w_j}$$

$$E[u_j w_j w_i^2 u_k^2] = 0$$

Nous pouvons encore compléter l'expression obtenue avec ces termes d'ordre 6 :

$$\begin{aligned}
& \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} (2R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_j}(t_1) + \sigma_{u_k}^2 R_{u_i u_j}(t_1) R_{w_i w_j}(t_1)) \\
& + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} (2R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + \sigma_{u_j}^2 R_{u_i u_k}(t_2) R_{w_i w_k}(t_2)) \\
& + \frac{c_{0_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} (2R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + \sigma_{u_i}^2 R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1)) \\
& + \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} (2R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_i w_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) + \sigma_{w_i}^2 R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1)) \\
& + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0_j} + c_{2_j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} (2R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) R_{u_i u_k}(t_2) + \sigma_{w_j}^2 R_{w_i w_k}(t_2) R_{u_i u_k}(t_2)) \\
& + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0_k} + c_{2_k}}{2\bar{U}^2} \right) (2R_{w_i w_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) R_{u_i u_j}(t_1) + \sigma_{w_k}^2 R_{w_i w_j}(t_1) R_{u_i u_j}(t_1))
\end{aligned}$$

En considérant également que :

$$\begin{aligned}
E[u_1^2(t) u_2^2(t + t_1) u_3^2(t + t_2)] &= 2R_{u_1 u_3}^2 R_{u_2 u_2} + 2R_{u_1 u_2}^2 R_{u_3 u_3} + 2R_{u_2 u_3}^2 R_{u_1 u_1} \\
&+ 8R_{u_1 u_2} R_{u_2 u_3} R_{u_3 u_1} + R_{u_1 u_1} R_{u_2 u_2} R_{u_3 u_3} \\
E[u_i^2 u_j^2 u_k^2] &= 2R_{u_i u_k}^2(t_2) \sigma_{u_j}^2 + 2R_{u_i u_j}^2(t_1) \sigma_{u_k}^2 + 2R_{u_j u_k}^2(t_2 - t_1) \sigma_{u_i}^2 \\
&+ 8R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{u_i u_k}(t_2) + \sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \sigma_{u_k}^2 \\
E[w_i^2 u_j^2 u_k^2] &= 2R_{u_j u_k}^2(t_2 - t_1) \sigma_{w_i}^2 + \sigma_{w_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \sigma_{u_k}^2 \\
E[u_i w_i u_j w_j u_k w_k] &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons finalement ajouter les derniers termes d'ordre 6 :

$$\begin{aligned}
& \frac{c_{0_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} (2R_{u_i u_k}^2(t_2) \sigma_{u_j}^2 + 2R_{u_i u_j}^2(t_1) \sigma_{u_k}^2 + 2R_{u_j u_k}^2(t_2 - t_1) \sigma_{u_i}^2) \\
& + \frac{c_{0_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} (8R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{u_i u_k}(t_2) + \sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \sigma_{u_k}^2) \\
& + \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0_j} + c_{2_j}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0_k} + c_{2_k}}{2\bar{U}^2} \right) (2R_{w_i w_k}^2(t_2) \sigma_{w_j}^2 + 2R_{w_i w_j}^2(t_1) \sigma_{w_k}^2 + 2R_{w_j w_k}^2(t_2 - t_1) \sigma_{w_i}^2) \\
& \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0_j} + c_{2_j}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0_k} + c_{2_k}}{2\bar{U}^2} \right) (8R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + \sigma_{w_i}^2 \sigma_{w_j}^2 \sigma_{w_k}^2) \\
& + \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{0_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} (2R_{u_j u_k}^2(t_2 - t_1) \sigma_{w_i}^2 + \sigma_{w_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \sigma_{u_k}^2) \\
& + \frac{c_{0_i}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0_j} + c_{2_j}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0_k} + c_{2_k}}{2\bar{U}^2} \right) (2R_{w_j w_k}^2(t_2 - t_1) \sigma_{u_i}^2 + \sigma_{u_i}^2 \sigma_{w_j}^2 \sigma_{w_k}^2) \\
& + \frac{c_{0_i}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0_j} + c_{2_j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} (2R_{u_i u_k}^2(t_2) \sigma_{w_j}^2 + \sigma_{u_i}^2 \sigma_{w_j}^2 \sigma_{u_k}^2) \\
& + \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{0_j}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0_k} + c_{2_k}}{2\bar{U}^2} \right) (2R_{w_i w_k}^2(t_2) \sigma_{u_j}^2 + \sigma_{w_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \sigma_{w_k}^2) \\
& + \frac{c_{0_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0_j}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0_k} + c_{2_k}}{2\bar{U}^2} \right) (2R_{u_i u_j}^2(t_1) \sigma_{w_k}^2 + \sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \sigma_{w_k}^2) \\
& + \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0_j} + c_{2_j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} (2R_{w_i w_j}^2(t_1) \sigma_{u_k}^2 + \sigma_{w_i}^2 \sigma_{w_j}^2 \sigma_{u_k}^2)
\end{aligned}$$

En regroupant tous ces termes de façon plus organisée, nous pouvons écrire l'expression complète de la fonction de tricorrélation des forces nodales. Au total :

$$\begin{aligned}
& B_{f_i f_j f_k}(t_1, t_2) \\
= & \frac{c_{1_i}}{\bar{U}} \frac{2c_{0_j}}{\bar{U}} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} R_{u_i u_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + \\
& + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0_j}}{\bar{U}} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}} R_{u_i u_j}(t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}} R_{u_i u_j}(t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + \\
& + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0_k}}{\bar{U}} R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_j}(t_1) + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}} \frac{2c_{0_k}}{\bar{U}} R_{u_i u_k}(t_2) R_{w_i w_j}(t_1) \\
& + \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}} \frac{2c_{0_j}}{\bar{U}} \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} (2R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1)) + \frac{2c_{0_i}}{\bar{U}} \frac{c_{0_j}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0_k}}{\bar{U}} (2R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1)) \\
& + \frac{c_{0_i}}{\bar{U}^2} \frac{2c_{0_j}}{\bar{U}} \frac{2c_{0_k}}{\bar{U}} (\sigma_{u_i}^2 R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) + 2R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2)) \\
& + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0_k} + c_{2_k}}{2\bar{U}^2} \right) (2R_{w_i w_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1)) \\
& + \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1_j}}{\bar{U}} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}} (\sigma_{w_i}^2 R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + 2R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_i w_k}(t_2)) \\
& + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}} \left(\frac{2c_{0_j} + c_{2_j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1_k}}{\bar{U}} (\sigma_{w_j}^2 R_{w_i w_k}(t_2) + 2R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1)) \\
& + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} (2R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_j}(t_1)) \\
& + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} (2R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_k}(t_2)) \\
& + \frac{c_{0_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} (2R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1)) \\
& + \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} (2R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_i w_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1)) \\
& + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0_j} + c_{2_j}}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_{1_k}}{\bar{U}^2} (2R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) R_{u_i u_k}(t_2)) \\
& + \frac{c_{1_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{1_j}}{\bar{U}^2} \left(\frac{2c_{0_k} + c_{2_k}}{2\bar{U}^2} \right) (2R_{w_i w_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) R_{u_i u_j}(t_1)) \\
& + \frac{c_{0_i}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0_j}}{\bar{U}^2} \frac{c_{0_k}}{\bar{U}^2} (8R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{u_i u_k}(t_2)) \\
& + \left(\frac{2c_{0_i} + c_{2_i}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0_j} + c_{2_j}}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_{0_k} + c_{2_k}}{2\bar{U}^2} \right) (8R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_k}(t_2))
\end{aligned}$$

La transformée de Fourier double de cette expression permet finalement d'obtenir l'expression du bispectre des sollicitations :

$$\begin{aligned}
& B_{f_i f_j f_k}(\omega_1, \omega_2) \\
= & \frac{2c_{1_i} c_{0_j} c_{1_k}}{\bar{U}^4} (S_{u_j u_k}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_1 + \omega_2) + S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2)) \\
& + \frac{2c_{0_i} c_{1_j} c_{1_k}}{\bar{U}^4} (S_{u_i u_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_1) + S_{u_i u_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_2)) \\
& + \frac{2c_{1_i} c_{1_j} c_{0_k}}{\bar{U}^4} (S_{u_j u_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1 + \omega_2) + S_{u_i u_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1)) \\
& + \frac{8c_{0_i} c_{0_j} c_{0_k}}{\bar{U}^4} (S_{u_i u_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_j u_k}(\omega_1) + S_{u_i u_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_j u_k}(\omega_2) + S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{u_i u_k}(\omega_2)) \\
& + \frac{c_{1_i} c_{1_j} (2c_{0_k} + c_{2_k})}{\bar{U}^4} S_{w_i w_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_1) \\
& + \frac{(2c_{0_i} + c_{2_i}) c_{1_j} c_{1_k}}{\bar{U}^4} S_{w_i w_j}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2) + \frac{c_{1_i} (2c_{0_j} + c_{2_j}) c_{1_k}}{\bar{U}^4} S_{w_i w_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_2) \\
& + \frac{2c_{1_i} c_{1_j} c_{0_k}}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) S_{u_j u_k}(\omega) S_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) d\omega \\
& + \frac{2c_{1_i} c_{0_j} c_{1_k}}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) S_{u_j u_k}(\omega) S_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) d\omega \\
& + \frac{2c_{0_i} c_{1_j} c_{1_k}}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) S_{w_j w_k}(\omega) d\omega \\
& + \frac{(2c_{0_i} + c_{2_i}) c_{1_j} c_{1_k}}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) S_{u_j u_k}(\omega) d\omega \\
& + \frac{c_{1_i} (2c_{0_j} + c_{2_j}) c_{1_k}}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) S_{w_j w_k}(\omega) S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) d\omega \\
& + \frac{c_{1_i} c_{1_j} (2c_{0_k} + c_{2_k})}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) S_{w_j w_k}(\omega) S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) d\omega \\
& + \frac{8c_{0_i} c_{0_j} c_{0_k}}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) S_{u_j u_k}(\omega) S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) d\omega \\
& + \frac{(2c_{0_i} + c_{2_i}) (2c_{0_j} + c_{2_j}) (2c_{0_k} + c_{2_k})}{\bar{U}^6} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) S_{w_j w_k}(\omega) S_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) d\omega
\end{aligned}$$

Notons que lorsque les trois degrés de liberté i , j et k étudiés coïncident, cette expression peut se résumer à celle d'un bispectre unilatéral. L'intégration de la fonction alors obtenue permet d'obtenir le moment centré de troisième ordre de la sollicitation appliquée en ce degré de liberté :

$$\begin{aligned}
m_3 = & c_0^3 + \frac{15c_0^3}{\bar{U}^2} \sigma_u^2 + \left[3c_0^2 \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) + 3c_0 \left(\frac{c_1}{\bar{U}} \right)^2 \right] \sigma_w^2 \\
& \frac{45c_0^3}{\bar{U}^4} \sigma_u^4 + \left[18 \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_0^2}{\bar{U}^2} + 18c_0 \left(\frac{c_1}{\bar{U}^2} \right)^2 \right] \sigma_u^2 \sigma_w^2 \\
& + \left[9c_0 \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) + 9 \left(\frac{c_1}{\bar{U}} \right)^2 \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) \right] \sigma_w^4 \\
& + \frac{15c_0^3}{\bar{U}^6} \sigma_u^6 + \left[9 \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_0^2}{\bar{U}^4} + 9c_0 \left(\frac{c_1}{\bar{U}^3} \right)^2 \right] \sigma_u^4 \sigma_w^2 \\
& + \left[9c_0 \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^4} \right) + 9 \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_1}{\bar{U}^2} \frac{c_1}{\bar{U}^2} \right] \sigma_u^2 \sigma_w^4 \\
& + 15 \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) \sigma_w^6
\end{aligned}$$

Notons que les moments centrés d'ordres 1 et 2 de cet effort s'expriment par :

$$m_1 = c_0 + \frac{c_0}{\bar{U}} \sigma_u^2 + \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) \sigma_w^2$$

et

$$\begin{aligned}
m_2 = & c_0^2 + \frac{6c_0^2}{\bar{U}^2} \sigma_u^2 + \left(2c_0 \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) + \left(\frac{c_1}{\bar{U}} \right)^2 \right) \sigma_w^2 \\
& \frac{3c_0^2}{\bar{U}^4} \sigma_u^4 + \left[2 \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) \frac{c_0}{\bar{U}^2} + \left(\frac{c_1}{\bar{U}^2} \right)^2 \right] \sigma_u^2 \sigma_w^2 + 3 \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) \left(\frac{2c_0 + c_2}{2\bar{U}^2} \right) \sigma_w^4
\end{aligned}$$

Cette dernière relation permet alors de calculer l'expression du coefficient de dissymétrie de la sollicitation considérée.

Annexe G

Efforts en champ de turbulence tridimensionnel

G.1 Densités spectrales

La densité spectrale croisée entre les sollicitations appliquées en deux sections différentes peut s'exprimer à partir de la fonction de cross-corrélation, elle-même obtenue à partir de l'espérance mathématique du produit des efforts appliqués en ces deux sections :

$$\begin{aligned} f_i &= a_i^{(1)} + a_i^{(2)}u_i + a_i^{(3)}v_i + a_i^{(4)}w_i + a_i^{(5)}u_i^2 + a_i^{(6)}v_i^2 + a_i^{(7)}w_i^2 + a_i^{(8)}u_iv_i + a_i^{(9)}u_iw_i + a_i^{(10)}v_iw_i \\ f_j &= a_j^{(1)} + a_j^{(2)}u_j + a_j^{(3)}v_j + a_j^{(4)}w_j + a_j^{(5)}u_j^2 + a_j^{(6)}v_j^2 + a_j^{(7)}w_j^2 + a_j^{(8)}u_jv_j + a_j^{(9)}u_jw_j + a_j^{(10)}v_jw_j \end{aligned}$$

En supprimant les termes d'ordres impairs, ce produit s'exprime par :

$$\begin{aligned} f_i f_j &= a_i^{(1)}a_j^{(1)} + a_i^{(5)}a_j^{(1)}u_i^2 + a_i^{(6)}a_j^{(1)}v_i^2 + a_i^{(7)}a_j^{(1)}w_i^2 + a_i^{(8)}a_j^{(1)}u_iv_i + a_i^{(9)}a_j^{(1)}u_iw_i \\ &+ a_i^{(10)}a_j^{(1)}v_iw_i + a_i^{(1)}a_j^{(5)}u_j^2 + a_i^{(5)}a_j^{(5)}u_j^2u_i^2 + a_i^{(6)}a_j^{(5)}u_j^2v_i^2 + a_i^{(7)}a_j^{(5)}u_j^2w_i^2 \\ &+ a_i^{(8)}a_j^{(5)}u_j^2u_iv_i + a_i^{(9)}a_j^{(5)}u_j^2u_iw_i + a_i^{(10)}a_j^{(5)}u_j^2v_iw_i + a_i^{(1)}a_j^{(6)}v_j^2 \\ &+ a_i^{(5)}a_j^{(6)}v_j^2u_i^2 + a_i^{(6)}a_j^{(6)}v_j^2v_i^2 + a_i^{(7)}a_j^{(6)}v_j^2w_i^2 + a_i^{(8)}a_j^{(6)}v_j^2u_iv_i \\ &+ a_i^{(9)}a_j^{(6)}v_j^2u_iw_i + a_i^{(10)}a_j^{(6)}v_j^2v_iw_i + a_i^{(1)}a_j^{(7)}w_j^2 + a_i^{(5)}a_j^{(7)}w_j^2u_i^2 \\ &+ a_i^{(6)}a_j^{(7)}w_j^2v_i^2 + a_i^{(7)}a_j^{(7)}w_j^2w_i^2 + a_i^{(8)}a_j^{(7)}w_j^2u_iv_i + a_i^{(9)}a_j^{(7)}w_j^2u_iw_i \\ &+ a_i^{(10)}a_j^{(7)}w_j^2v_iw_i + a_i^{(1)}a_j^{(8)}u_jv_j + a_i^{(5)}a_j^{(8)}u_jv_ju_i^2 + a_i^{(6)}a_j^{(8)}u_jv_jv_i^2 \\ &+ a_i^{(7)}a_j^{(8)}u_jv_jw_i^2 + a_i^{(8)}a_j^{(8)}u_jv_ju_iv_i + a_i^{(9)}a_j^{(8)}u_jv_ju_iw_i + a_i^{(10)}a_j^{(8)}u_jv_jv_iw_i \\ &+ a_i^{(1)}a_j^{(9)}u_jw_j + a_i^{(5)}a_j^{(9)}u_jw_ju_i^2 + a_i^{(6)}a_j^{(9)}u_jw_jv_i^2 + a_i^{(7)}a_j^{(9)}u_jw_jw_i^2 \\ &+ a_i^{(8)}a_j^{(9)}u_jw_ju_iv_i + a_i^{(9)}a_j^{(9)}u_jw_ju_iw_i + a_i^{(10)}a_j^{(9)}u_jw_jv_iw_i \\ &+ a_i^{(1)}a_j^{(10)}v_jw_j + a_i^{(5)}a_j^{(10)}v_jw_ju_i^2 + a_i^{(6)}a_j^{(10)}v_jw_jv_i^2 + a_i^{(7)}a_j^{(10)}v_jw_jw_i^2 \\ &+ a_i^{(8)}a_j^{(10)}v_jw_ju_iv_i + a_i^{(9)}a_j^{(10)}v_jw_ju_iw_i + a_i^{(10)}a_j^{(10)}v_jw_jv_iw_i \\ &+ a_i^{(2)}a_j^{(2)}u_ju_i + a_i^{(3)}a_j^{(2)}u_jv_i + a_i^{(4)}a_j^{(2)}u_jw_i + a_i^{(2)}a_j^{(3)}v_ju_i + a_i^{(3)}a_j^{(3)}v_jv_i \\ &+ a_i^{(4)}a_j^{(3)}v_jw_i + a_i^{(2)}a_j^{(4)}w_ju_i + a_i^{(3)}a_j^{(4)}w_jv_i + a_i^{(4)}a_j^{(4)}w_jw_i \end{aligned}$$

Etant donné que nous supposons que les différentes composantes de la turbulence sont non cohérentes, quelques termes de cette expression s'annuleront après le calcul de l'espérance mathématique. Nous ne conservons donc que les termes restant :

$$\begin{aligned}
f_i f_j = & a_i^{(1)} a_j^{(1)} + a_i^{(5)} a_j^{(1)} u_i^2 + a_i^{(6)} a_j^{(1)} v_i^2 + a_i^{(7)} a_j^{(1)} w_i^2 + a_i^{(8)} a_j^{(1)} u_i v_i + a_i^{(9)} a_j^{(1)} u_i w_i + a_i^{(10)} a_j^{(1)} v_i w_i \\
& + a_i^{(1)} a_j^{(5)} u_j^2 + a_i^{(5)} a_j^{(5)} u_j^2 u_i^2 + a_i^{(6)} a_j^{(5)} u_j^2 v_i^2 + a_i^{(7)} a_j^{(5)} u_j^2 w_i^2 + a_i^{(8)} a_j^{(5)} u_j^2 u_i v_i + a_i^{(9)} a_j^{(5)} u_j^2 u_i w_i \\
& + a_i^{(10)} a_j^{(5)} u_j^2 v_i w_i + a_i^{(1)} a_j^{(6)} v_j^2 + a_i^{(5)} a_j^{(6)} v_j^2 u_i^2 + a_i^{(6)} a_j^{(6)} v_j^2 v_i^2 + a_i^{(7)} a_j^{(6)} v_j^2 w_i^2 + a_i^{(8)} a_j^{(6)} v_j^2 u_i v_i \\
& + a_i^{(9)} a_j^{(6)} v_j^2 u_i w_i + a_i^{(10)} a_j^{(6)} v_j^2 v_i w_i + a_i^{(1)} a_j^{(7)} w_j^2 + a_i^{(5)} a_j^{(7)} w_j^2 u_i^2 + a_i^{(6)} a_j^{(7)} w_j^2 v_i^2 + a_i^{(7)} a_j^{(7)} w_j^2 w_i^2 \\
& + a_i^{(8)} a_j^{(7)} w_j^2 u_i v_i + a_i^{(9)} a_j^{(7)} w_j^2 u_i w_i + a_i^{(10)} a_j^{(7)} w_j^2 v_i w_i + a_i^{(1)} a_j^{(8)} u_j v_j + a_i^{(5)} a_j^{(8)} u_j v_j u_i^2 \\
& + a_i^{(6)} a_j^{(8)} u_j v_j v_i^2 + a_i^{(7)} a_j^{(8)} u_j v_j w_i^2 + a_i^{(8)} a_j^{(8)} u_j v_j u_i v_i + a_i^{(9)} a_j^{(8)} u_j v_j u_i w_i + a_i^{(10)} a_j^{(8)} u_j v_j v_i w_i \\
& + a_i^{(1)} a_j^{(9)} u_j w_j + a_i^{(5)} a_j^{(9)} u_j w_j u_i^2 + a_i^{(6)} a_j^{(9)} u_j w_j v_i^2 + a_i^{(7)} a_j^{(9)} u_j w_j w_i^2 + a_i^{(8)} a_j^{(9)} u_j w_j u_i v_i \\
& + a_i^{(9)} a_j^{(9)} u_j w_j u_i w_i + a_i^{(10)} a_j^{(9)} u_j w_j v_i w_i + a_i^{(1)} a_j^{(10)} v_j w_j + a_i^{(5)} a_j^{(10)} v_j w_j u_i^2 + a_i^{(6)} a_j^{(10)} v_j w_j v_i^2 \\
& + a_i^{(7)} a_j^{(10)} v_j w_j w_i^2 + a_i^{(8)} a_j^{(10)} v_j w_j u_i v_i + a_i^{(9)} a_j^{(10)} v_j w_j u_i w_i + a_i^{(10)} a_j^{(10)} v_j w_j v_i w_i \\
& + a_i^{(2)} a_j^{(2)} u_j u_i + a_i^{(3)} a_j^{(3)} v_j v_i + a_i^{(4)} a_j^{(4)} w_j w_i
\end{aligned}$$

La fonction de cross-corrélation s'exprime donc par :

$$\begin{aligned}
R_{f_i f_j}(\Delta t) = & a_i^{(1)} a_j^{(1)} + \left(a_i^{(5)} a_j^{(1)} + a_i^{(1)} a_j^{(5)} \right) \sigma_{u_i}^2 + \left(a_i^{(6)} a_j^{(1)} + a_i^{(1)} a_j^{(6)} \right) \sigma_{v_i}^2 + \\
& \left(a_i^{(7)} a_j^{(1)} + a_i^{(1)} a_j^{(7)} w_j^2 \right) \sigma_{w_i}^2 + \quad (G.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_i^{(5)} a_j^{(5)} \left(\sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_j}^2 + 2R_{u_i u_j}^2(\Delta t) \right) + a_i^{(6)} a_j^{(5)} \sigma_{v_i}^2 \sigma_{u_j}^2 + a_i^{(7)} a_j^{(5)} \sigma_{w_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \\
& + a_i^{(5)} a_j^{(6)} \sigma_{u_i}^2 \sigma_{v_j}^2 + a_i^{(6)} a_j^{(6)} \left(\sigma_{v_i}^2 \sigma_{v_j}^2 + 2R_{v_i v_j}^2(\Delta t) \right) + a_i^{(7)} a_j^{(6)} \sigma_{w_i}^2 \sigma_{v_j}^2 \\
& + a_i^{(5)} a_j^{(7)} \sigma_{u_i}^2 \sigma_{w_j}^2 + a_i^{(6)} a_j^{(7)} \sigma_{v_i}^2 \sigma_{w_j}^2 + a_i^{(7)} a_j^{(7)} \left(\sigma_{w_i}^2 \sigma_{w_j}^2 + 2R_{w_i w_j}^2(\Delta t) \right) \\
& + a_i^{(8)} a_j^{(8)} R_{u_i u_j}(\Delta t) R_{v_i v_j}(\Delta t) + a_i^{(9)} a_j^{(9)} R_{u_i u_j}(\Delta t) R_{w_i w_j}(\Delta t) \\
& + a_i^{(10)} a_j^{(10)} R_{v_i v_j}(\Delta t) R_{w_i w_j}(\Delta t) \quad (G.2)
\end{aligned}$$

$$+ a_i^{(2)} a_j^{(2)} R_{u_i u_j}(\Delta t) + a_i^{(3)} a_j^{(3)} R_{v_i v_j}(\Delta t) + a_i^{(4)} a_j^{(4)} R_{w_i w_j}(\Delta t) \quad (G.3)$$

En ne conservant que les termes qui participent à la variance et non pas au carré

moyen, la densité spectrale s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 S_{f_i f_j}(\omega) = & a_i^{(2)} a_j^{(2)} S_{u_i u_j}(\omega) + a_i^{(3)} a_j^{(3)} S_{v_i v_j}(\omega) + a_i^{(4)} a_j^{(4)} S_{w_i w_j}(\omega) \\
 & + 2a_i^{(5)} a_j^{(5)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{u_i u_j}(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \\
 & + 2a_i^{(6)} a_j^{(6)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{v_i v_j}(\omega_1) S_{v_i v_j}(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \quad (G.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2a_i^{(7)} a_j^{(7)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_i w_j}(\omega_1) S_{w_i w_j}(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \\
 & + a_i^{(8)} a_j^{(8)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{v_i v_j}(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \quad (G.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + a_i^{(9)} a_j^{(9)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{w_i w_j}(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \quad (G.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + a_i^{(10)} a_j^{(10)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{v_i v_j}(\omega_1) S_{w_i w_j}(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \quad (G.7)
 \end{aligned}$$

G.2 Bispectres

Les bispectres croisées entre forces appliquées en des sections différentes peuvent s'exprimer à partir de la transformée de Fourier double de l'expression de la fonction de bicorrélation. Cette fonction, quant à elle, s'exprime par l'espérance mathématique du produit des trois sollicitations appliquées en des degrés de libertés (éventuellement) différents :

$$\begin{aligned}
 f_i &= a_i^{(1)} + a_i^{(2)} u_i + a_i^{(3)} v_i + a_i^{(4)} w_i + a_i^{(5)} u_i^2 + a_i^{(6)} v_i^2 + a_i^{(7)} w_i^2 + a_i^{(8)} u_i v_i + a_i^{(9)} u_i w_i + a_i^{(10)} v_i w_i \\
 f_j &= a_j^{(1)} + a_j^{(2)} u_j + a_j^{(3)} v_j + a_j^{(4)} w_j + a_j^{(5)} u_j^2 + a_j^{(6)} v_j^2 + a_j^{(7)} w_j^2 + a_j^{(8)} u_j v_j + a_j^{(9)} u_j w_j + a_j^{(10)} v_j w_j \\
 f_k &= a_k^{(1)} + a_k^{(2)} u_k + a_k^{(3)} v_k + a_k^{(4)} w_k + a_k^{(5)} u_k^2 + a_k^{(6)} v_k^2 + a_k^{(7)} w_k^2 + a_k^{(8)} u_k v_k + a_k^{(9)} u_k w_k + a_k^{(10)} v_k w_k
 \end{aligned}$$

Le triple produit donne 1000 termes dont nous pouvons supprimer une bonne partie en supposant que les composantes de la turbulence soient différentes entre elles. Par exemple, nous savons que tous les termes d'ordre impair en les composantes de la turbulence peuvent être supprimées. L'expérience que nous avons acquise jusqu'ici nous permet de supprimer aussi dès à présent les termes qui donneront des fonctions de Dirac dans l'expression du bispectre. En effet, nous savons que ces termes ne participeront pas à l'expression du moment centré d'ordre 3.

Les seuls termes intéressants peuvent être regroupés en deux catégories selon leur degré en l'intensité de turbulence. Les termes d'ordre quatre s'expriment par les 45 termes

suivants :

$$\begin{aligned}
& a_i^{(5)} a_j^{(2)} a_k^{(2)} u_i^2 u_j u_k + a_i^{(2)} a_j^{(5)} a_k^{(2)} u_i u_j^2 u_k + a_i^{(2)} a_j^{(2)} a_k^{(5)} u_i u_j u_k^2 + \\
& a_i^{(5)} a_j^{(3)} a_k^{(3)} u_i^2 v_j v_k + a_i^{(3)} a_j^{(5)} a_k^{(3)} v_i u_j^2 v_k + a_i^{(3)} a_j^{(3)} a_k^{(5)} v_i v_j u_k^2 + \\
& a_i^{(5)} a_j^{(4)} a_k^{(4)} u_i^2 w_j w_k + a_i^{(4)} a_j^{(5)} a_k^{(4)} w_i u_j^2 w_k + a_i^{(4)} a_j^{(4)} a_k^{(5)} w_i w_j u_k^2 + \\
& a_i^{(6)} a_j^{(2)} a_k^{(2)} v_i^2 u_j u_k + a_i^{(2)} a_j^{(6)} a_k^{(2)} u_i v_j^2 u_k + a_i^{(2)} a_j^{(2)} a_k^{(6)} u_i u_j v_k^2 + \\
& a_i^{(6)} a_j^{(3)} a_k^{(3)} v_i^2 v_j v_k + a_i^{(3)} a_j^{(6)} a_k^{(3)} v_i v_j^2 v_k + a_i^{(3)} a_j^{(3)} a_k^{(6)} v_i v_j v_k^2 + \\
& a_i^{(6)} a_j^{(4)} a_k^{(4)} w_i^2 w_j w_k + a_i^{(4)} a_j^{(6)} a_k^{(4)} w_i w_j^2 w_k + a_i^{(4)} a_j^{(4)} a_k^{(6)} w_i w_j w_k^2 + \\
& a_i^{(7)} a_j^{(2)} a_k^{(2)} w_i^2 u_j u_k + a_i^{(2)} a_j^{(7)} a_k^{(2)} u_i w_j^2 u_k + a_i^{(2)} a_j^{(2)} a_k^{(7)} u_i u_j w_k^2 + \\
& a_i^{(7)} a_j^{(3)} a_k^{(3)} w_i^2 v_j v_k + a_i^{(3)} a_j^{(7)} a_k^{(3)} v_i w_j^2 v_k + a_i^{(3)} a_j^{(3)} a_k^{(7)} v_i v_j w_k^2 + \\
& a_i^{(7)} a_j^{(4)} a_k^{(4)} w_i^2 w_j w_k + a_i^{(4)} a_j^{(7)} a_k^{(4)} w_i w_j^2 w_k + a_i^{(4)} a_j^{(4)} a_k^{(7)} w_i w_j w_k^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& a_i^{(8)} a_j^{(3)} a_k^{(2)} u_i v_i v_j u_k + a_i^{(3)} a_j^{(8)} a_k^{(2)} v_i u_j v_j u_k + a_i^{(8)} a_j^{(2)} a_k^{(3)} u_i v_i u_j v_k + \\
& a_i^{(2)} a_j^{(8)} a_k^{(3)} u_i u_j v_j v_k + a_i^{(3)} a_j^{(2)} a_k^{(8)} v_i u_j u_k v_k + a_i^{(2)} a_j^{(3)} a_k^{(8)} u_i v_j u_k v_k + \\
& a_i^{(9)} a_j^{(4)} a_k^{(2)} u_i w_i w_j u_k + a_i^{(4)} a_j^{(9)} a_k^{(2)} w_i u_j w_j u_k + a_i^{(9)} a_j^{(2)} a_k^{(4)} u_i w_i u_j w_k + \\
& a_i^{(2)} a_j^{(9)} a_k^{(4)} u_i u_j w_j w_k + a_i^{(4)} a_j^{(2)} a_k^{(9)} w_i u_j u_k w_k + a_i^{(2)} a_j^{(4)} a_k^{(9)} u_i w_j u_k w_k + \\
& a_i^{(10)} a_j^{(4)} a_k^{(3)} v_i w_i w_j v_k + a_i^{(4)} a_j^{(10)} a_k^{(3)} w_i v_j w_j v_k + a_i^{(10)} a_j^{(3)} a_k^{(4)} v_i w_i v_j w_k + \\
& a_i^{(3)} a_j^{(10)} a_k^{(4)} v_i v_j w_j w_k + a_i^{(4)} a_j^{(3)} a_k^{(10)} w_i v_j v_k w_k + a_i^{(3)} a_j^{(4)} a_k^{(10)} v_i w_j v_k w_k
\end{aligned}$$

Ces deux groupes se distinguent par le fait qu'un des arguments apparaît au carré dans la première série alors que tous les arguments apparaissent à la première puissance dans la seconde série. Les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
E[u_i u_j u_k^2] &= \sigma_{u_k}^2 R_{u_i u_j}(t_1) + 2 R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) \\
E[w_i w_j u_k^2] &= \sigma_{u_k}^2 R_{w_i w_j}(t_1) \\
E[w_i u_j u_k w_k] &= R_{u_i u_j}(t_2 - t_1) R_{w_i w_k}(t_2)
\end{aligned}$$

vont nous permettre d'exprimer la fonction de bicorrélation entre les forces nodales en fonction des fonctions d'autocorrélation (éventuellement croisées) des composantes de la turbulence. Après la double transformée de Fourier, quelques termes disparaîtront encore des expressions ci-dessus car ils donneront naissance à des fonctions de Dirac. Finalement, nous pouvons considérer que :

$$\begin{aligned}
E[u_i u_j u_k^2] &\rightarrow 2 R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) \\
E[w_i w_j u_k^2] &\rightarrow 0 \\
E[w_i u_j u_k w_k] &\rightarrow R_{u_i u_j}(t_2 - t_1) R_{w_i w_k}(t_2)
\end{aligned}$$

Finalement, des expressions ci-dessus, il ne reste que :

$$\begin{aligned}
& 2a_i^{(5)} a_j^{(2)} a_k^{(2)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) + 2a_i^{(2)} a_j^{(5)} a_k^{(2)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) + \\
& 2a_i^{(2)} a_j^{(2)} a_k^{(5)} R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) + 2a_i^{(6)} a_j^{(3)} a_k^{(3)} R_{v_i v_j}(t_1) R_{v_i v_k}(t_2) + \\
& 2a_i^{(3)} a_j^{(6)} a_k^{(3)} R_{v_i v_j}(t_1) R_{v_j v_k}(t_2 - t_1) + 2a_i^{(3)} a_j^{(3)} a_k^{(6)} R_{v_i v_k}(t_2) R_{v_j v_k}(t_2 - t_1) + \\
& 2a_i^{(7)} a_j^{(4)} a_k^{(4)} R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + 2a_i^{(4)} a_j^{(7)} a_k^{(4)} R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + \\
& 2a_i^{(4)} a_j^{(4)} a_k^{(7)} R_{w_i w_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& a_i^{(8)} a_j^{(3)} a_k^{(2)} R_{u_i u_k}(t_2) R_{v_i v_j}(t_1) + a_i^{(2)} a_j^{(8)} a_k^{(3)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{v_j v_k}(t_2 - t_1) + \\
& a_i^{(3)} a_j^{(2)} a_k^{(8)} R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{v_i v_k}(t_2) + a_i^{(8)} a_j^{(2)} a_k^{(3)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{v_i v_k}(t_2) + \\
& a_i^{(3)} a_j^{(8)} a_k^{(2)} R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{v_i v_j}(t_1) + a_i^{(2)} a_j^{(3)} a_k^{(8)} R_{u_i u_k}(t_2) R_{v_j v_k}(t_2 - t_1) + \\
& a_i^{(9)} a_j^{(4)} a_k^{(2)} R_{u_i u_k}(t_2) R_{w_i w_j}(t_1) + a_i^{(2)} a_j^{(9)} a_k^{(4)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + \\
& a_i^{(4)} a_j^{(2)} a_k^{(9)} R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + a_i^{(9)} a_j^{(2)} a_k^{(4)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + \\
& a_i^{(4)} a_j^{(9)} a_k^{(2)} R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_j}(t_1) + a_i^{(2)} a_j^{(4)} a_k^{(9)} R_{u_i u_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + \\
& a_i^{(10)} a_j^{(4)} a_k^{(3)} R_{v_i v_k}(t_2) R_{w_i w_j}(t_1) + a_i^{(3)} a_j^{(10)} a_k^{(4)} R_{v_i v_j}(t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + \\
& a_i^{(4)} a_j^{(3)} a_k^{(10)} R_{v_j v_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + a_i^{(10)} a_j^{(3)} a_k^{(4)} R_{v_i v_j}(t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + \\
& a_i^{(4)} a_j^{(10)} a_k^{(3)} R_{v_j v_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_j}(t_1) + a_i^{(3)} a_j^{(4)} a_k^{(10)} R_{v_i v_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1)
\end{aligned}$$

La transformée de Fourier double de ces expressions permet d'obtenir la première partie du bispectre de sollicitation, attribuable aux termes d'ordre quatre en l'intensité de turbulence :

$$\begin{aligned}
D_{f_i f_j f_k}^{(1)}(\omega_1, \omega_2) = & 2a_i^{(5)} a_j^{(2)} a_k^{(2)} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{u_i u_k}(\omega_2) + 2a_i^{(2)} a_j^{(5)} a_k^{(2)} S_{u_i u_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_j u_k}(\omega_2) + \\
& 2a_i^{(2)} a_j^{(2)} a_k^{(5)} S_{u_i u_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_j u_k}(\omega_1) + 2a_i^{(6)} a_j^{(3)} a_k^{(3)} S_{v_i v_j}(\omega_1) S_{v_i v_k}(\omega_2) + \\
& 2a_i^{(3)} a_j^{(6)} a_k^{(3)} S_{v_i v_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{v_j v_k}(\omega_2) + 2a_i^{(3)} a_j^{(3)} a_k^{(6)} S_{v_i v_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{v_j v_k}(\omega_1) + \\
& 2a_i^{(7)} a_j^{(4)} a_k^{(4)} S_{w_i w_j}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2) + 2a_i^{(4)} a_j^{(7)} a_k^{(4)} S_{w_i w_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_2) + \\
& 2a_i^{(4)} a_j^{(4)} a_k^{(7)} S_{w_i w_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_1) + a_i^{(8)} a_j^{(3)} a_k^{(2)} S_{u_i u_k}(\omega_2) S_{v_i v_j}(\omega_1) + \\
& a_i^{(2)} a_j^{(8)} a_k^{(3)} S_{u_i u_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{v_j v_k}(\omega_2) + a_i^{(3)} a_j^{(2)} a_k^{(8)} S_{u_j u_k}(\omega_1) S_{v_i v_k}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(8)} a_j^{(2)} a_k^{(3)} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{v_i v_k}(\omega_2) + a_i^{(3)} a_j^{(8)} a_k^{(2)} S_{u_j u_k}(\omega_2) S_{v_i v_j}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(2)} a_j^{(3)} a_k^{(8)} S_{u_i u_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{v_j v_k}(\omega_1) + a_i^{(9)} a_j^{(4)} a_k^{(2)} S_{u_i u_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1) + \\
& a_i^{(2)} a_j^{(9)} a_k^{(4)} S_{u_i u_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_2) + a_i^{(4)} a_j^{(2)} a_k^{(9)} S_{u_j u_k}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(9)} a_j^{(2)} a_k^{(4)} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2) + a_i^{(4)} a_j^{(9)} a_k^{(2)} S_{u_j u_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(2)} a_j^{(4)} a_k^{(9)} S_{u_i u_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_1) + a_i^{(10)} a_j^{(4)} a_k^{(3)} S_{v_i v_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1) + \\
& a_i^{(3)} a_j^{(10)} a_k^{(4)} S_{v_i v_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_2) + a_i^{(4)} a_j^{(3)} a_k^{(10)} S_{v_j v_k}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(10)} a_j^{(3)} a_k^{(4)} S_{v_i v_j}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2) + a_i^{(4)} a_j^{(10)} a_k^{(3)} S_{v_j v_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(3)} a_j^{(4)} a_k^{(10)} S_{v_i v_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_1)
\end{aligned}$$

La seconde contribution à la fonction de bicorrélation entre les forces appliquées aux noeuds sont les termes d'ordre 6 en la composante de la turbulence. Ils sont au nombre de 60 et peuvent également être séparés en trois sous-groupes :

$$\begin{aligned}
& a_i^{(5)} a_j^{(5)} a_k^{(5)} u_i^2 u_j^2 u_k^2 + a_i^{(6)} a_j^{(6)} a_k^{(6)} v_i^2 v_j^2 v_k^2 + a_i^{(7)} a_j^{(7)} a_k^{(7)} w_i^2 w_j^2 w_k^2 \\
& a_i^{(6)} a_j^{(5)} a_k^{(5)} v_i^2 u_j^2 u_k^2 + a_i^{(5)} a_j^{(6)} a_k^{(5)} u_i^2 v_j^2 u_k^2 + a_i^{(5)} a_j^{(5)} a_k^{(6)} u_i^2 u_j^2 v_k^2 \\
& a_i^{(6)} a_j^{(6)} a_k^{(5)} v_i^2 v_j^2 u_k^2 + a_i^{(6)} a_j^{(5)} a_k^{(6)} v_i^2 u_j^2 v_k^2 + a_i^{(5)} a_j^{(6)} a_k^{(6)} u_i^2 v_j^2 v_k^2 \\
& a_i^{(7)} a_j^{(5)} a_k^{(5)} w_i^2 u_j^2 u_k^2 + a_i^{(5)} a_j^{(7)} a_k^{(5)} u_i^2 w_j^2 u_k^2 + a_i^{(5)} a_j^{(5)} a_k^{(7)} u_i^2 u_j^2 w_k^2 \\
& a_i^{(7)} a_j^{(6)} a_k^{(5)} w_i^2 v_j^2 u_k^2 + a_i^{(6)} a_j^{(7)} a_k^{(5)} v_i^2 w_j^2 u_k^2 + a_i^{(7)} a_j^{(5)} a_k^{(6)} w_i^2 u_j^2 v_k^2 \\
& a_i^{(5)} a_j^{(7)} a_k^{(6)} u_i^2 w_j^2 v_k^2 + a_i^{(6)} a_j^{(5)} a_k^{(7)} v_i^2 u_j^2 w_k^2 + a_i^{(5)} a_j^{(6)} a_k^{(7)} u_i^2 v_j^2 w_k^2 \\
& a_i^{(7)} a_j^{(7)} a_k^{(5)} w_i^2 w_j^2 u_k^2 + a_i^{(7)} a_j^{(5)} a_k^{(7)} w_i^2 u_j^2 w_k^2 + a_i^{(5)} a_j^{(7)} a_k^{(7)} u_i^2 w_j^2 w_k^2 \\
& a_i^{(7)} a_j^{(6)} a_k^{(6)} w_i^2 v_j^2 v_k^2 + a_i^{(6)} a_j^{(7)} a_k^{(6)} v_i^2 w_j^2 v_k^2 + a_i^{(6)} a_j^{(6)} a_k^{(7)} v_i^2 v_j^2 w_k^2 \\
& a_i^{(7)} a_j^{(7)} a_k^{(6)} w_i^2 w_j^2 v_k^2 + a_i^{(7)} a_j^{(6)} a_k^{(7)} w_i^2 v_j^2 w_k^2 + a_i^{(6)} a_j^{(7)} a_k^{(7)} v_i^2 w_j^2 w_k^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_i^{(8)} a_j^{(8)} a_k^{(5)} u_i v_i u_j v_j u_k^2 + a_i^{(8)} a_j^{(5)} a_k^{(8)} u_i v_i u_j^2 u_k v_k + a_i^{(5)} a_j^{(8)} a_k^{(8)} u_i^2 u_j v_j u_k v_k \\
& a_i^{(8)} a_j^{(8)} a_k^{(6)} u_i v_i u_j v_j v_k^2 + a_i^{(8)} a_j^{(6)} a_k^{(8)} u_i v_i v_j^2 u_k v_k + a_i^{(6)} a_j^{(8)} a_k^{(8)} v_i^2 u_j v_j u_k v_k \\
& a_i^{(8)} a_j^{(8)} a_k^{(7)} u_i v_i u_j v_j w_k^2 + a_i^{(8)} a_j^{(7)} a_k^{(8)} u_i v_i w_j^2 u_k v_k + a_i^{(7)} a_j^{(8)} a_k^{(8)} w_i^2 u_j v_j u_k v_k \\
& a_i^{(9)} a_j^{(9)} a_k^{(5)} u_i w_i u_j w_j u_k^2 + a_i^{(9)} a_j^{(5)} a_k^{(9)} u_i w_i u_j^2 u_k w_k + a_i^{(5)} a_j^{(9)} a_k^{(9)} u_i^2 u_j w_j u_k w_k \\
& a_i^{(9)} a_j^{(6)} a_k^{(6)} u_i w_i u_j v_j v_k^2 + a_i^{(9)} a_j^{(6)} a_k^{(9)} u_i w_i v_j^2 u_k w_k + a_i^{(6)} a_j^{(9)} a_k^{(9)} v_i^2 u_j w_j u_k w_k \\
& a_i^{(9)} a_j^{(9)} a_k^{(7)} u_i w_i u_j w_j w_k^2 + a_i^{(9)} a_j^{(7)} a_k^{(9)} u_i w_i w_j^2 u_k w_k + a_i^{(7)} a_j^{(9)} a_k^{(9)} w_i^2 u_j w_j u_k w_k \\
& a_i^{(10)} a_j^{(10)} a_k^{(5)} v_i w_i v_j w_j u_k^2 + a_i^{(10)} a_j^{(5)} a_k^{(10)} v_i w_i u_j^2 v_k w_k + a_i^{(5)} a_j^{(10)} a_k^{(10)} u_i^2 v_j w_j v_k w_k \\
& a_i^{(10)} a_j^{(10)} a_k^{(6)} v_i w_i v_j w_j v_k^2 + a_i^{(10)} a_j^{(6)} a_k^{(10)} v_i w_i v_j^2 v_k w_k + a_i^{(6)} a_j^{(10)} a_k^{(10)} v_i^2 v_j w_j v_k w_k \\
& a_i^{(10)} a_j^{(10)} a_k^{(7)} v_i w_i v_j w_j w_k^2 + a_i^{(10)} a_j^{(7)} a_k^{(10)} v_i w_i w_j^2 v_k w_k + a_i^{(7)} a_j^{(10)} a_k^{(10)} w_i^2 v_j w_j v_k w_k
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& a_i^{(10)} a_j^{(9)} a_k^{(8)} v_i w_i u_j w_j u_k v_k + a_i^{(8)} a_j^{(10)} a_k^{(9)} u_i v_i v_j w_j u_k w_k + a_i^{(9)} a_j^{(8)} a_k^{(10)} u_i w_i u_j v_j v_k w_k \\
& a_i^{(9)} a_j^{(10)} a_k^{(8)} u_i w_i v_j w_j u_k v_k + a_i^{(10)} a_j^{(8)} a_k^{(9)} v_i w_i u_j v_j u_k w_k + a_i^{(8)} a_j^{(9)} a_k^{(10)} u_i v_i u_j w_j v_k w_k
\end{aligned}$$

Pour simplifier ces relations, nous pouvons utiliser les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
E[u_i^2 u_j^2 u_k^2] &= \sigma_{u_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \sigma_{u_k}^2 + 2\sigma_{u_i}^2 R_{u_j u_k}^2(t_2 - t_1) + 2\sigma_{u_j}^2 R_{u_i u_k}^2(t_2) + 2\sigma_{u_k}^2 R_{u_i u_j}^2(t_1) \\
&\quad + 8R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) \\
E[v_i^2 u_j^2 u_k^2] &= \sigma_{v_i}^2 \sigma_{u_j}^2 \sigma_{u_k}^2 + 2\sigma_{v_i}^2 R_{u_j u_k}^2(t_2 - t_1) \\
E[u_i v_i u_j v_j u_k^2] &= [2R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) + R_{u_i u_j}(t_1) \sigma_{u_k}^2] R_{v_i v_j}(t_1) \\
E[v_i w_i v_j w_j u_k^2] &= \sigma_{u_k}^2 R_{v_i v_j}(t_1) R_{w_i w_j}(t_1) \\
E[v_i w_i u_j w_j u_k v_k] &= R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{v_i v_k}(t_2) R_{w_i w_j}(t_1)
\end{aligned}$$

que nous pouvons remplacer par :

$$\begin{aligned}
E[u_i^2 u_j^2 u_k^2] &\rightarrow 8R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) \\
E[v_i^2 u_j^2 u_k^2] &\rightarrow 0 \\
E[u_i v_i u_j v_j u_k^2] &\rightarrow 2R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{v_i v_j}(t_1) \\
E[v_i w_i v_j w_j u_k^2] &\rightarrow 0 \\
E[v_i w_i u_j w_j u_k v_k] &\rightarrow R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{v_i v_k}(t_2) R_{w_i w_j}(t_1)
\end{aligned}$$

pour continuer de travailler avec un bispectre "centré". Dans ce cas, les expressions ci-dessus se simplifient en :

$$\begin{aligned}
& 8a_i^{(5)} a_j^{(5)} a_k^{(5)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) + 8a_i^{(6)} a_j^{(6)} a_k^{(6)} R_{v_i v_j}(t_1) R_{v_i v_k}(t_2) R_{v_j v_k}(t_2 - t_1) \\
& + 8a_i^{(7)} a_j^{(7)} a_k^{(7)} R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_i w_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2a_i^{(8)} a_j^{(8)} a_k^{(5)} R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{v_i v_j}(t_1) + 2a_i^{(8)} a_j^{(5)} a_k^{(8)} R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{u_i u_j}(t_1) R_{v_i v_k}(t_2) + \\
& 2a_i^{(5)} a_j^{(8)} a_k^{(8)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) R_{v_j v_k}(t_2 - t_1) + 2a_i^{(8)} a_j^{(8)} a_k^{(6)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{v_i v_k}(t_2) R_{v_j v_k}(t_2 - t_1) + \\
& 2a_i^{(8)} a_j^{(6)} a_k^{(8)} R_{u_i u_k}(t_2) R_{v_i v_j}(t_1) R_{v_j v_k}(t_2 - t_1) + 2a_i^{(6)} a_j^{(8)} a_k^{(8)} R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{v_i v_j}(t_1) R_{v_i v_k}(t_2) + \\
& 2a_i^{(9)} a_j^{(9)} a_k^{(5)} R_{u_i u_k}(t_2) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_j}(t_1) + 2a_i^{(9)} a_j^{(5)} a_k^{(9)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + \\
& 2a_i^{(5)} a_j^{(9)} a_k^{(9)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{u_i u_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + 2a_i^{(9)} a_j^{(9)} a_k^{(7)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{w_i w_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + \\
& 2a_i^{(9)} a_j^{(7)} a_k^{(9)} R_{u_i u_k}(t_2) R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + 2a_i^{(7)} a_j^{(9)} a_k^{(9)} R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_j}(t_1) R_{w_i w_k}(t_2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& a_i^{(10)} a_j^{(9)} a_k^{(8)} R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{v_i v_k}(t_2) R_{w_i w_j}(t_1) + a_i^{(8)} a_j^{(10)} a_k^{(9)} R_{u_i u_k}(t_2) R_{v_i v_j}(t_1) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1) + \\
& a_i^{(9)} a_j^{(8)} a_k^{(10)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{v_j v_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + a_i^{(9)} a_j^{(10)} a_k^{(8)} R_{u_i u_k}(t_2) R_{v_j v_k}(t_2 - t_1) R_{w_i w_j}(t_1) + \\
& a_i^{(10)} a_j^{(8)} a_k^{(9)} R_{u_j u_k}(t_2 - t_1) R_{v_i v_j}(t_1) R_{w_i w_k}(t_2) + a_i^{(8)} a_j^{(9)} a_k^{(10)} R_{u_i u_j}(t_1) R_{v_i v_k}(t_2) R_{w_j w_k}(t_2 - t_1)
\end{aligned}$$

La transformée double des ces expressions permet d'obtenir la seconde contribution au bispectre croisé entre les sollicitations :

$$\begin{aligned}
D_{f_i f_j f_k}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) &= 8a_i^{(5)} a_j^{(5)} a_k^{(5)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) R_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) R_{u_j u_k}(\omega) d\omega + \\
& 8a_i^{(6)} a_j^{(6)} a_k^{(6)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{v_i v_j}(\omega + \omega_1) R_{v_i v_k}(\omega_2 - \omega) R_{v_j v_k}(\omega) d\omega + \\
& 8a_i^{(7)} a_j^{(7)} a_k^{(7)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) R_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) R_{w_j w_k}(\omega) d\omega + \\
& 2a_i^{(8)} a_j^{(8)} a_k^{(5)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{v_i v_j}(\omega + \omega_1) R_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) R_{u_j u_k}(\omega) d\omega + \\
& 2a_i^{(8)} a_j^{(5)} a_k^{(8)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) R_{v_i v_k}(\omega_2 - \omega) R_{u_j u_k}(\omega) d\omega + \\
& 2a_i^{(5)} a_j^{(8)} a_k^{(8)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) R_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) R_{v_j v_k}(\omega) d\omega +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2a_i^{(8)} a_j^{(8)} a_k^{(6)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) R_{v_i v_k}(\omega_2 - \omega) R_{v_j v_k}(\omega) d\omega + \\
& 2a_i^{(8)} a_j^{(6)} a_k^{(8)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) R_{v_i v_j}(\omega + \omega_1) R_{v_j v_k}(\omega) d\omega + \\
& 2a_i^{(6)} a_j^{(8)} a_k^{(8)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_j u_k}(\omega) R_{v_i v_j}(\omega + \omega_1) R_{v_i v_k}(\omega_2 - \omega) d\omega +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2a_i^{(9)} a_j^{(9)} a_k^{(5)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) R_{u_j u_k}(\omega) R_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) d\omega + \\
& 2a_i^{(9)} a_j^{(5)} a_k^{(9)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) R_{u_j u_k}(\omega) R_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) d\omega + \\
& 2a_i^{(5)} a_j^{(9)} a_k^{(9)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) R_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) R_{w_j w_k}(\omega) d\omega +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2a_i^{(9)} a_j^{(9)} a_k^{(7)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) R_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) R_{w_j w_k}(\omega) d\omega + \\
& 2a_i^{(9)} a_j^{(7)} a_k^{(9)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) R_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) R_{w_j w_k}(\omega) d\omega + \\
& 2a_i^{(7)} a_j^{(9)} a_k^{(9)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_j u_k}(\omega) R_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) R_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) d\omega +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_i^{(10)} a_j^{(9)} a_k^{(8)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_j u_k}(\omega) R_{v_i v_k}(\omega_2 - \omega) R_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) d\omega + \\
& a_i^{(8)} a_j^{(10)} a_k^{(9)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) R_{v_i v_j}(\omega + \omega_1) R_{w_j w_k}(\omega) d\omega + \\
& a_i^{(9)} a_j^{(8)} a_k^{(10)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) R_{v_j v_k}(\omega) R_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) d\omega + \\
& a_i^{(9)} a_j^{(10)} a_k^{(8)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) R_{v_j v_k}(\omega) R_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) d\omega + \\
& a_i^{(10)} a_j^{(8)} a_k^{(9)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_j u_k}(\omega) R_{v_i v_j}(\omega + \omega_1) R_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) d\omega + \\
& a_i^{(8)} a_j^{(9)} a_k^{(10)} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) R_{v_i v_k}(\omega_2 - \omega) R_{w_j w_k}(\omega) d\omega
\end{aligned}$$

Si le champ de turbulence se réduit à un champ de turbulence bidimensionnel, les expressions de $D_{f_i f_j f_k}^{(1)}(\omega_1, \omega_2)$ et $D_{f_i f_j f_k}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ se limitent à :

$$\begin{aligned}
D_{f_i f_j f_k}^{(1)}(\omega_1, \omega_2) = & 2a_i^{(5)} a_j^{(2)} a_k^{(2)} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{u_i u_k}(\omega_2) + 2a_i^{(2)} a_j^{(5)} a_k^{(2)} S_{u_i u_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_j u_k}(\omega_2) + \\
& 2a_i^{(2)} a_j^{(2)} a_k^{(5)} S_{u_i u_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{u_j u_k}(\omega_1) + \\
& 2a_i^{(7)} a_j^{(4)} a_k^{(4)} S_{w_i w_j}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2) + 2a_i^{(4)} a_j^{(7)} a_k^{(4)} S_{w_i w_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_2) + \\
& 2a_i^{(4)} a_j^{(4)} a_k^{(7)} S_{w_i w_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_1) + a_i^{(9)} a_j^{(4)} a_k^{(2)} S_{u_i u_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1) + \\
& a_i^{(2)} a_j^{(9)} a_k^{(4)} S_{u_i u_j}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_2) + a_i^{(4)} a_j^{(2)} a_k^{(9)} S_{u_j u_k}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(9)} a_j^{(2)} a_k^{(4)} S_{u_i u_j}(\omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2) + a_i^{(4)} a_j^{(9)} a_k^{(2)} S_{u_j u_k}(\omega_2) S_{w_i w_j}(\omega_1 + \omega_2) + \\
& a_i^{(2)} a_j^{(4)} a_k^{(9)} S_{u_i u_k}(\omega_1 + \omega_2) S_{w_j w_k}(\omega_1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{f_i f_j f_k}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = & 8a_i^{(5)} a_j^{(5)} a_k^{(5)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) S_{u_j u_k}(\omega) d\omega + \\
& 8a_i^{(7)} a_j^{(7)} a_k^{(7)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) S_{w_j w_k}(\omega) d\omega +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2a_i^{(9)} a_j^{(9)} a_k^{(5)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) S_{u_j u_k}(\omega) S_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) d\omega + \\
& 2a_i^{(9)} a_j^{(5)} a_k^{(9)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) S_{u_j u_k}(\omega) S_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) d\omega + \\
& 2a_i^{(5)} a_j^{(9)} a_k^{(9)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) S_{w_j w_k}(\omega) d\omega + \\
& 2a_i^{(9)} a_j^{(9)} a_k^{(7)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_j}(\omega + \omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) S_{w_j w_k}(\omega) d\omega + \\
& 2a_i^{(9)} a_j^{(7)} a_k^{(9)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_i u_k}(\omega_2 - \omega) S_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) S_{w_j w_k}(\omega) d\omega + \\
& 2a_i^{(7)} a_j^{(9)} a_k^{(9)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{u_j u_k}(\omega) S_{w_i w_j}(\omega + \omega_1) S_{w_i w_k}(\omega_2 - \omega) d\omega +
\end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}
a^{(1)} &= c_0 \quad , \quad a^{(2)} = \frac{2c_0}{\bar{U}} \quad , \quad a^{(3)} = 0 \quad , \quad a^{(4)} = \frac{c_1}{\bar{U}} \quad , \quad a^{(5)} = \frac{c_0}{\bar{U}^2} \quad , \\
a^{(6)} &= 0 \quad , \quad a^{(7)} = \frac{c_0 + \frac{c_2}{2}}{\bar{U}} \quad , \quad a^{(8)} = 0 \quad , \quad a^{(9)} = \frac{c_1}{\bar{U}^2} \quad , \quad a^{(10)} = 0
\end{aligned}$$

nous pouvons retrouver identiquement la même expression que celle que nous avons développée dans le cadre d'un champ de turbulence bidimensionnel et pour l'étude d'une structure dont les axes principaux coïncident avec les axes de définition du vent (Eq. 15.16).

Annexe H

Intégrales pour le calcul de l'admittance numérique

Au chapitre 15, nous avons vu que la cohérence des pressions de vent sur un élément fini pouvait être estimée à l'aide de coefficients réducteurs que nous avons appelés *admittances numériques*. Selon que les efforts considérés sont des efforts tranchants, des moments de flexion ou même encore des moments de torsion, et selon que le niveau de correction désiré soit celui de la cohérence sur l'élément, au niveau des forces nodales énergétiquement équivalentes ou au niveau du champ de forces nodales, ces admittances numériques résultent de l'une ou l'autre intégration.

Quelques résultats d'intégrales utiles à l'estimation de ces coefficients sont donnés ci-dessous.

H.1 Première intégrale

$$I = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L P(x_1)P(x_2)e^{-\frac{|x_1-x_2|}{\Delta}} dx_1 dx_2 \quad (\text{H.1})$$

$$P(x) = A \left(\frac{x}{L}\right)^3 + B \left(\frac{x}{L}\right)^2 + C \left(\frac{x}{L}\right) + D \quad (\text{H.2})$$

$$I = \sum_{i=1}^8 F_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i + e^{-\frac{L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 G_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i \quad (\text{H.3})$$

$$F = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2A^2}{7} + \frac{2B^2}{5} + \frac{2C^2}{3} + 2D^2 + \frac{2AB}{3} + \frac{4AC}{5} + AD + BC + \frac{4BD}{3} + 2CD \\ -A^2 - B^2 - C^2 - D^2 - 2AB - 2AC - 2AD - 2BC - 2BD - 2CD \\ \frac{12A^2}{5} + \frac{4B^2}{3} + 4AB + 4AC + 6AD + 2BC + 4BD \\ -3A^2 + 2C^2 - 4AB - 6AC - 12AD + 2BC - 8BD \\ 0 \\ -8B^2 + 24AC \\ 0 \\ 72A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{H.4})$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ 2AD + 2BD + 2CD + 2D^2 \\ -2C^2 - 2AC + 6AD - 2BC + 4BD \\ 4B^2 - 2C^2 + 4AB - 6AC + 12AD + 8BD \\ -12A^2 + 8B^2 - 24AC \\ -36A^2 + 8B^2 - 24AC \\ -72A^2 \\ -72A^2 \end{pmatrix} \quad (\text{H.5})$$

Lorsque $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le polynôme $P(x)$ représente

la ligne d'influences des efforts tranchants (à gauche ou à droite) :

$$F = \begin{pmatrix} 26/35 \\ -1 \\ -12/5 \\ 12 \\ 0 \\ -72 \\ 0 \\ 288 \end{pmatrix} ; \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 24 \\ -72 \\ -288 \\ -288 \end{pmatrix} \quad (\text{H.6})$$

Lorsque $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le polynôme $P(x)$ représente

la ligne d'influences des moments (à gauche ou à droite) :

$$F = \begin{pmatrix} 2/105 \\ 4 \\ -4/15 \\ 1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 72 \end{pmatrix} ; \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ -28 \\ -72 \\ -72 \end{pmatrix} \quad (\text{H.7})$$

H.2 Deuxième intégrale

$$I = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L P(x_1) P(x_2) e^{-\frac{kL+x_1+x_2}{\Delta}} dx_1 dx_2 \quad (\text{H.8})$$

$$P(x) = A \left(\frac{x}{L} \right)^3 + B \left(\frac{x}{L} \right)^2 + C \left(\frac{x}{L} \right) + D \quad (\text{H.9})$$

$$I = e^{-\frac{kL}{\Delta}} \left(\sum_{i=1}^8 E_i \left(\frac{\Delta}{L} \right)^i + e^{-\frac{L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 F_i \left(\frac{\Delta}{L} \right)^i + e^{-\frac{2L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 G_i \left(\frac{\Delta}{L} \right)^i \right) \quad (\text{H.10})$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ D^2 \\ 2CD \\ C^2 + 4BD \\ 12AD + 4BC \\ 4B^2 + 12AC \\ 24AB \\ 36A^2 \end{pmatrix} \quad (\text{H.11})$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -2AD - 2BD - 2CD - 2D^2 \\ -2C^2 - 2AC - 6AD - 2BC - 4BD - 4CD \\ -4B^2 - 2C^2 - 4AB - 6AC - 12AD - 8BC - 8BD \\ -12A^2 - 8B^2 - 24AB - 24AC - 24AD - 8BC \\ -36A^2 - 8B^2 - 48AB - 24AC \\ -72A^2 - 48AB \\ -72A^2 \end{pmatrix} \quad (\text{H.12})$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB + 2AC + 2AD + 2BC + 2BD + 2CD \\ 6A^2 + 4B^2 + 2C^2 + 10AB + 8AC + 6AD + 6BC + 4BD + 2CD \\ 21A^2 + 8B^2 + C^2 + 28AB + 18AC + 12AD + 8BC + 4BD \\ 48A^2 + 8B^2 + 48AB + 24AC + 12AD + 4BC \\ 72A^2 + 4B^2 + 48AB + 12AC \\ 72A^2 + 24AB \\ 36A^2 \end{pmatrix} \quad (\text{H.13})$$

Lorsque $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le polynôme $P(x)$ représente

la ligne d'influences des efforts tranchants (à gauche ou à droite) :

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -12 \\ 24 \\ 36 \\ -144 \\ 144 \end{pmatrix} ; \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -12 \\ -24 \\ 72 \\ 0 \\ -288 \end{pmatrix} ; \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 36 \\ 144 \\ 144 \end{pmatrix} \quad (\text{H.14})$$

H.3 Troisième intégrale

$$I = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L P(x_1)P(x_2)e^{-\frac{kL+x_1-x_2}{\Delta}} dx_1 dx_2 \quad (\text{H.15})$$

$$P(x) = A \left(\frac{x}{L}\right)^3 + B \left(\frac{x}{L}\right)^2 + C \left(\frac{x}{L}\right) + D \quad (\text{H.16})$$

$$I = e^{-\frac{(k-1)L}{\Delta}} \left(\sum_{i=1}^8 E_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i + e^{-\frac{L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 F_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i + e^{-\frac{2L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 G_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i \right) \quad (\text{H.17})$$

$$E = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ AD + BD + CD + D^2 \\ C^2 + AC - 3AD + BC - 2BD \\ 2B^2 - C^2 + 2AB - 3AC + 6AD + 4BC \\ 6A^2 + 12AC - 4B^2 \\ -18A^2 + 4B^2 - 12AC \\ 36A^2 \\ -36A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{H.18})$$

$$F = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -A^2 - B^2 - C^2 - D^2 - 2AB - 2AC - 2AD - 2BC - 2BD - 2CD \\ 0 \\ -3A^2 + 2C^2 - 4AB - 6AC - 12AD - 8BD \\ 0 \\ -8B^2 + 24AC \\ 0 \\ 72A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{H.19})$$

$$G = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ AD + BD + CD + D^2 \\ -C^2 - AC + 3AD - BC + 2BD \\ 2B^2 - C^2 + 2AB - 3AC + 6AD + 4BD \\ -6A^2 + 4B^2 - 12AC \\ -18A^2 + 4B^2 - 12AC \\ -36A^2 \\ -36A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{H.20})$$

Lorsque $\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ou $\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, le polynôme $P(x)$ représente

la ligne d'influences des efforts tranchants (à gauche ou à droite) :

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -12 \\ -36 \\ 144 \\ -144 \end{pmatrix} ; \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ -72 \\ 0 \\ 288 \end{pmatrix} ; \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 12 \\ -36 \\ -144 \\ -144 \end{pmatrix} \quad (\text{H.21})$$

H.4 Quatrième intégrale

$$I = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L P(x_1)P(x_2)e^{-\frac{kL-x_1-x_2}{\Delta}} dx_1 dx_2 \quad (\text{H.22})$$

$$P(x) = A \left(\frac{x}{L}\right)^3 + B \left(\frac{x}{L}\right)^2 + C \left(\frac{x}{L}\right) + D \quad (\text{H.23})$$

$$I = e^{-\frac{(k-2)L}{\Delta}} \left(\sum_{i=1}^8 E_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i + e^{-\frac{L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 F_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i + e^{-\frac{2L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 G_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i \right) \quad (\text{H.24})$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB + 2AC + 2AD + 2BC + 2BD + 2CD \\ -6A^2 - 4B^2 - 2C^2 - 10AB - 8AC - 6AD - 6BC - 4BD - 2CD \\ 21A^2 + 8B^2 + C^2 + 28AB + 18AC + 12AD + 8BC + 4BD \\ 48A^2 - 8B^2 - 48AB - 24AC - 12AD - 4BC \\ 72A^2 + 4B^2 + 48AB + 12AC \\ -72A^2 - 24AB \\ 36A^2 \end{pmatrix} \quad (\text{H.25})$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -2AD - 2BD - 2CD - 2D^2 \\ 2C^2 + 2AC + 6AD + 2BC + 4BD + 4CD \\ -4B^2 - 2C^2 - 4AB - 6AC - 12AD - 8BC - 8BD \\ 12A^2 + 8B^2 + 24AB + 24AC + 24AD + 8BC \\ -36A^2 - 8B^2 - 48AB - 24AC \\ 72A^2 + 48AB \\ -72A^2 \end{pmatrix} \quad (\text{H.26})$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ D^2 \\ -2CD \\ C^2 + 4BD \\ -12AD - 4BC \\ 4B^2 + 12AC \\ -24AB \\ 36A^2 \end{pmatrix} \quad (\text{H.27})$$

Lorsque $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient les résultats de l'intégrale pour les lignes d'influences des efforts tranchants (à gauche ou à droite) :

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 36 \\ -144 \\ 144 \end{pmatrix} ; \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -12 \\ 24 \\ 72 \\ 0 \\ -288 \end{pmatrix} ; \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -12 \\ -24 \\ 36 \\ 144 \\ 144 \end{pmatrix} \quad (\text{H.28})$$

H.5 Cinquième intégrale

$$I = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L P(x_1) P(x_2) e^{-\frac{|L-x_1-x_2|}{\Delta}} dx_1 dx_2 \quad (\text{H.29})$$

$$P(x) = A \left(\frac{x}{L} \right)^3 + B \left(\frac{x}{L} \right)^2 + C \left(\frac{x}{L} \right) + D \quad (\text{H.30})$$

$$I = \sum_{i=1}^8 F_i \left(\frac{\Delta}{L} \right)^i + e^{-\frac{L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 G_i \left(\frac{\Delta}{L} \right)^i \quad (\text{H.31})$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{A^2}{70} + \frac{B^2}{15} + \frac{C^2}{3} + 2D^2 + \frac{AB}{15} + \frac{AC}{5} + AD + \frac{BC}{3} + \frac{4BD}{3} + 2CD \\ -2AD - 2BD - 2CD - 2D^2 \\ \frac{3A^2}{5} + \frac{4B^2}{3} + 2AB + 2AC + 6AD + 2BC + 4BD \\ -4B^2 - 2C^2 - 4AB - 6AC - 12AD - 8BC - 8BD \\ 0 \\ -36A^2 - 8B^2 - 48AB - 24AC \\ 0 \\ -72A^2 \end{pmatrix} \quad (\text{H.32})$$

$$G = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 + 2D^2 + 2AB + 2AC + 2AD + 2BC + 2BD + 2CD \\ 6A^2 + 4B^2 + 2C^2 + 10AB + 8AC + 6AD + 6BC + 4BD \\ 21A^2 + 8B^2 + 2C^2 + 28AB + 18AC + 12AD + 8BC + 8BD \\ 48A^2 + 8B^2 + 48AB + 24AC \\ 72A^2 + 8B^2 + 48AB + 24AC \\ 72A^2 \\ 72A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{H.33})$$

Lorsque $\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ou $\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, on obtient les résultats de

l'intégrale pour les lignes d'influences des efforts tranchants (à gauche ou à droite) :

$$E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -12 \\ -36 \\ 144 \\ -144 \end{Bmatrix} ; \quad F = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ -72 \\ 0 \\ 288 \end{Bmatrix} ; \quad G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 12 \\ -36 \\ -144 \\ -144 \end{Bmatrix} \quad (\text{H.34})$$