LES OPÉRATIONS ADDITIVES ET SOUSTRACTIVES : QUAND LES SYMBOLISATIONS INFORMELLES ET PLUS CONVENTIONNELLES S'EN MÊLENT (OU S'EMMÊLENT ?)

Annick Fagnant et Geneviève Hindryckx
Unité d'analyse des Systèmes et des Pratiques d'enseignement
Université de Liège

1. FONDEMENTS THÉORIQUES

La résolution de problèmes arithmétiques est un terrain de recherche foisonnant depuis de nombreuses années. Il est généralement accepté que les problèmes doivent aider à établir des liens entre, d'une part, le symbolisme mathématique utilisé pour représenter les additions et les soustractions et, d'autre part, les actions sur les objets et les relations mentionnées dans les situations décrites.

Plusieurs recherches se sont centrées sur l'exploration des stratégies informelles de résolution (essentiellement basées sur le comptage) développées par les jeunes enfants (pour une vue d'ensemble, voir Fayol, 1990 ; Verschaffel & De Corte, 1997). Les résultats de ces études ont montré que les élèves avaient des compétences importantes dans ce domaine, même avant tout enseignement formel en arithmétique et en résolution de problèmes. Ils développent une grande variété de stratégies qui, généralement, modélisent les actions ou les relations décrites dans les problèmes.

D'autres recherches (Bebout, 1990 ; Carey, 1991 ; Fagnant, 2002a,b, 2005a,b) se sont intéressées aux capacités que les élèves pouvaient démontrer dans l'utilisation du symbolisme mathématique. La plupart de ces études sont basées sur des interviews individuelles et tentent d'analyser les relations entre les stratégies de résolution informelles développées par les enfants et les calculs qu'ils produisent. A titre illustratif, l'étude réalisée par Fagnant (2002a) en fin de première année primaire met en évidence des différences de performance importantes entre l'utilisation de stratégies informelles de résolution et la production de calculs. Face à chaque problème proposé, le nombre de calculs corrects est toujours inférieur au nombre de réponses correctes. La différence témoigne de difficultés spécifiques d'utilisation du symbolisme mathématique : plusieurs élèves ont été incapables de produire un calcul correct face à un problème qu'ils avaient pourtant résolu correctement (en développant une démarche informelle de résolution). Une analyse par profils d'élèves révèle, de manière criante, les difficultés éprouvées par bon nombre d'élèves pour utiliser le symbolisme mathématique en situation de résolution de problèmes. Les résultats observés peuvent brièvement être synthétisés comme suit : parmi les 25 élèves interrogés en fin de première année, seuls 9 élèves démontrent une utilisation relativement pertinente des symboles conventionnels ; pour les 16 autres élèves, la création de connexions avec les problèmes et/ou les stratégies s'avère nettement plus problématique. Pour 9 d'entre eux, même l'utilisation de l'addition engendre des difficultés ; pour les 7 autres, les symboles additifs sont utilisés adéquatement mais la soustraction n'est jamais proposée. Les résultats sont donc globalement assez mitigés et montrent les difficultés importantes éprouvées par les élèves pour créer des liens entre le symbolisme conventionnel (les calculs) et des histoires (des problèmes) ou des stratégies de comptage (les stratégies de résolution de ces problèmes).

Dans la présente recherche, nous avons voulu dépasser ce constat en nous intéressant aux capacités démontrées par des élèves en début de 3e maternelle et de 1re primaire quant à la **production de symbolisations informelles** d'une part et quant à **l'utilisation de symbolisations plus conventionnelles** (telles que des graphes fléchés, des diagrammes de Venn, des calculs, etc.) d'autre part. On se focalise ici sur un moment de l'apprentissage où les élèves sont en train de construire les concepts d'addition et de soustraction ainsi que les symbolisations liées. Cette manière d'envisager les choses se place dans la lignée des courants socioculturels actuels qui défendent clairement l'idée d'une co-construction des concepts et des symboles (voir ouvrage de Cobb, Yackle & McClain, 2000, d'une part et de Gravemeijer, Lehrer, van Oers & Verschaffel, 2002, d'autre part).

2. MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Les interviews d'élèves se sont déroulées aux mois de novembre et décembre. Vingt élèves de 3^{e} maternelle et 20 élèves de 1re primaire ont été interrogés ; ils provenaient de plusieurs classes et écoles. Les enfants de 3^{e} maternelle avaient déjà eu l'occasion de rencontrer différentes symbolisations des nombres, mais se trouvaient devant la nécessité de développer des démarches informelles et spontanées dans le domaine des opérations. Tous les enfants de 1re primaire interrogés avaient appris l'écriture symbolique conventionnelle de l'addition et, la plupart, de la soustraction (même si celle-ci est souvent introduite plus tardivement).

Deux domaines ont été investigués : le domaine des nombres (concept et symbolisations − conventionnelles ou non) d'une part ; le domaine des opérations (addition/soustraction) (concepts et symbolisations – conventionnelles ou non). Trois axes ont été envisagés pour analyser les conceptions des enfants et leurs compétences informelles dans ces domaines : **expliquer** des concepts et des symbolisations, **produire** des symbolisations différentes, et enfin, **reconnaître et utiliser** des symbolisations différentes. Le tableau suivant présente une synthèse des différents aspects investigués dans les interviews.

Tableau 1 : Les différents angles envisagés lors des interviews d'élèves

Le concept de nombre et les symbolisations (conventionnelles ou non)	**Le concept d'opération (addition / soustraction) et les symbolisations (conventionnelles ou non)**
1. Expliquer des concepts et des symbolisations	
Expliquer le concept de nombre Demander à l'enfant d'expliquer ce qu'est un nombre.	**Expliquer les concepts d'addition et de soustraction** Demander à l'enfant d'expliquer ce qu'est une addition (vs une soustraction).
Expliquer ce que représente une symbolisation donnée d'un nombre Donner le symbole conventionnel d'un nombre et demander à l'enfant ce que cela représente.	**Expliquer ce que représente une symbolisation donnée d'une opération** Donner la symbolisation conventionnelle d'une addition (vs d'une soustraction) et demander à l'enfant ce que cela représente.
2. Produire des symbolisations différentes (symboliser dans le but de communiquer - un nombre ou une démarche de résolution - à autrui)	
Produire des symbolisations différentes d'un nombre Disposer x objets sur la table et demander à l'enfant de symboliser le nombre correspondant de différentes façons.	**Produire des symbolisations différentes d'opérations (au départ de la résolution d'un problème)** Donner un problème (additif vs soustractif) à l'enfant et lui demander de le résoudre en utilisant du matériel manipulable. Lui demander ensuite de symboliser sa stratégie de résolution de différentes façons.
3. Reconnaître et utiliser des symbolisations différentes (utiliser des symboles prédéfinis dans le but d'identifier des nombres ou de résoudre des problèmes)	
Identifier des symbolisations différentes d'un même nombre Disposer x objets sur la table et demander à l'enfant d'identifier les différentes symbolisations qui correspondent au nombre d'objets proposés.	**Identifier des symbolisations différentes d'un même problème et s'en servir pour résoudre ce problème** Donner un problème (additif vs soustractif) à l'enfant et lui demander de reconnaître les différentes symbolisations qui correspondent à ce problème. Lui demander ensuite de résoudre le problème sur base de la symbolisation choisie.

Dans le cadre du présent article, nous allons focaliser les analyses sur les **opérations** et, plus précisément, sur les tâches de **production de symbolisation**, d'une part, et de **reconnaissance et d'utilisation de**

symbolisations variées, d'autre part (*cf.* les cases grisées dans le tableau). La tâche d'explication de concepts et de symbolisations ne sera pas analysée en profondeur, mais nous y ferons référence pour illustrer certaines difficultés éprouvées par les élèves dans les tâches de production de symbolisations. Détaillons à présent les deux tâches principales qui font l'objet des présentes analyses.

Pour la **production de symbolisations** relatives aux opérations, un problème additif (vs soustractif) était lu à voix haute aux enfants. Pour le résoudre, ceux-ci disposaient de matériel manipulable (une poupée représentant une fille, une poupée représentant un garçon et des pièces de monnaie en quantité suffisante) afin de pouvoir jouer l'histoire concrètement et de développer des stratégies de comptage pour découvrir la solution. Lorsque les enfants avaient résolu le problème, on leur proposait la consigne suivante : « Tu dois expliquer à un copain comment tu as fait pour trouver la réponse. Fais-le sur la feuille ». On essayait ensuite de les amener à faire preuve d'inventivité en leur demandant de procéder « autrement » ; puis (s'ils ne l'avaient pas proposé spontanément), on leur demandait de produire un calcul (« Peux-tu écrire un calcul qui va avec ce que tu as fait pour trouver la réponse ? »).

Pour la **tâche de reconnaissance et d'utilisation de symbolisations prédéfinies**, une série de cartes représentant des opérations additives et soustractives (diagrammes de Venn, graphes fléchés, calculs conventionnels,…) était proposée aux enfants. Les représentations figurant sur les cartes ont été choisies au départ d'une analyse des manuels fréquemment utilisés par les enseignants. Comme dans la tâche de production, un problème additif et un problème soustractif servaient de point de départ à la réflexion. Ils étaient lu à voix haute aux élèves et répétés autant de fois que nécessaire. Les élèves devaient alors identifier les cartes correspondant aux problèmes proposés et permettant de les résoudre. Dans la mesure du possible, on leur demandait également de justifier leurs choix, mais aussi leur absence de choix (pourquoi telle ou telle carte était choisie et pourquoi telle ou telle autre ne l'était pas).

Les principaux constats tirés de ces deux types de tâches sont présentés dans le point suivant.

3. PRINCIPAUX RÉSULTATS

3.1. Produire des symbolisations différentes d'opérations (au départ de la résolution de problèmes)

Les problèmes proposés étaient les suivants :

- Pierre avait 5 pièces de monnaie. Anne a donné 3 pièces à Pierre. Combien de pièces Pierre a-t-il maintenant ?
- Pierre avait 8 pièces de monnaie. Pierre a donné 3 pièces à Anne. Combien de pièces Pierre a-t-il maintenant ?

Deux types d'aide ont été fournis aux élèves lorsque le besoin s'en faisait sentir : relire le problème autant de fois que nécessaire (éventuellement en insistant sur les quantités de pièces des personnages) et inviter explicitement les élèves à utiliser le matériel manipulable et à jouer l'histoire avec les personnages et les pièces.

En 3^{e} maternelle, les élèves ont généralement **résolu les problèmes** en s'appuyant sur le matériel manipulable. Comme on pouvait s'y attendre, ils sont quelque peu désorientés face à **la tâche de symbolisation** de leur démarche de résolution. On note toutefois que 9 d'entre eux parviennent à proposer une symbolisation pour le problème additif : six élèves dessinent les deux termes de la somme (un tas de 5 ronds et un tas de 3 ronds - l'un d'eux indique les chiffres 5 et 3 à côté des tas, un autre accompagne son dessin du calcul 5+3=8) ; deux élèves indiquent la solution en écrivant le chiffre 8 et un élève propose le calcul 5-3=8 (confusion entre les signes + et -).

Pour le problème additif, le dessin des deux nombres de départ (les tas de 5 et 3 pièces) permettait à la fois de représenter les données du problème et la solution. La représentation du problème soustractif s'avère plus complexe dans la mesure où le dessin des deux nombres de départ implique ici de les mettre clairement en relation, soit en barrant, soit en entourant le nombre à retirer ; les ronds non barrés (ou non entourés) indiquent alors la solution. Aucun élève n'a proposé ce type de représentation. Au mieux, les élèves ont représenté uniquement la solution, soit en dessinant 5 ronds, soit en écrivant le chiffre 5. Un élève a tenté de dessiner les données du problème mais a représenté côte à côte un tas de 8 et un tas de 3, sans qu'aucune relation n'indique que 3 doit être retiré à 8 (la solution n'apparaît donc pas sur le dessin). L'élève qui avait proposé le calcul 5-3=8 pour le problème additif propose ici 8+3=5, faisant à nouveau preuve d'une confusion entre les signes + et –.

En 1re primaire, les élèves développent plus fréquemment des **stratégies de résolution** mentales (rappel mnésique du résultat de l'opération) ou verbales (comptage des mots-nombres de la chaîne numérique). Cela ne pose pas de difficulté pour le problème additif mais cela occasionne quelques erreurs pour le problème soustractif. Seuls 14 élèves ont résolu ce problème correctement ; 2 élèves ont proposé une solution s'apparentant à une erreur de calcul (6 et 4), 2 élèves ont donné une réponse relevant d'une stratégie additive (11 et 12), un élève a proposé une donnée de l'énoncé (8) et le dernier n'a pas répondu.

Au niveau des **symbolisations**, on note une prégnance des **opérations formelles**. Pour le problème additif, ils sont ainsi 15 à proposer le calcul 5+3=8 ; les 5 autres n'y parviennent pas, même lorsqu'on les invite explicitement à produire un calcul (3 proposent un calcul incorrect et 2 n'en proposent pas du tout). Pour le problème soustractif, parmi les 14 élèves qui ont résolu le problème correctement, 11 réalisent un calcul correct, 2 proposent un calcul incorrect (5–5=5 et 8+3=8) et 1 ne fait aucun calcul. Les 6 élèves qui n'avaient pas résolu le problème correctement produisent des calculs incorrects (8+3=11 pour 2 élèves, 8+3=12 pour 2 autres, 8+3=6 pour 1 et 8+3=4 pour le dernier). Etant donné que les opérations (et principalement l'addition) sont travaillées de façon assez intensive en début de première primaire (pour la maîtrise des techniques opératoires), on peut s'étonner (voire s'inquiéter) des difficultés éprouvées par plusieurs élèves pour produire ces symbolisations en lien avec les problèmes proposés.

Il est intéressant de relier ces résultats aux difficultés éprouvées par les élèves dans une tâche relevant de l'axe « **expliquer** des concepts et des symbolisations », non développé en détail dans cet article. Pour amener les élèves à « expliquer ce que représente une symbolisation donnée d'une opération », on leur proposait des cartes représentant des calculs conventionnels (« 5+3=8 » et « 8–3=5 »). Une des consignes données lors des interviews consistait à demander aux élèves de raconter **une histoire qui corresponde au calcul**.

Cette tâche était évidemment un peu hors de portée des élèves de maternelle qui n'avaient pas encore découvert les calculs conventionnels en classe. Notons néanmoins qu'une petite fille (dont la grande sœur est en 3e année et joue parfois à l'école avec elle) a inventé un problème soustractif : « Il y a 8 chiques, on en enlève 3, ça fait 5 ». En primaire, ils ne sont que 4 à avoir proposé une « histoire » liée au calcul additif et 5 au calcul soustractif. La plupart de ces « créations » ne sont pas de réels problèmes, mais consistent simplement à accoler des unités aux nombres.

Seuls 4 élèves parviennent à raconter une « histoire » qui « colle » au calcul « 5+3=8 » :

Trois sont correctes (mais pas de réelles histoires)
- « Cinq chats plus trois chats, ça fait huit chats »
- « Il y en avait cinq, on en a ajouté trois et ça fait huit »
- « Cinq nains plus trois nains égalent huit nains »

Une est peu cohérente
- « Le matin, il y en avait trois ; l'après-midi cinq et le soir huit »

Seuls 5 élèves parviennent à raconter une « histoire » qui « colle » au calcul « 8-3=5 » :

Une histoire…
- « On a huit papiers et on en a enlevé trois, il reste alors cinq papiers »

Deux sont correctes (mais pas de réelles histoires)
- « Il y en avait huit et on en retiré cinq et cela fait cinq » *(confusion au niveau des nombres)*
- « Huit nains moins cinq nains égalent trois nains »

Une retrace plutôt une addition
- « C'est l'histoire de huit chiens qui vont à la maison. Il y en a trois autres qui vont à la maison »

Une est peu cohérente
- « Le matin, il y en avait huit ; l'après-midi huit et le soir trois » *(confusion au niveau des nombres)*

Les difficultés éprouvées par une partie des élèves, tant pour produire un calcul lié à un problème qu'ils viennent de résoudre que (et encore plus) pour inventer un problème qui « colle » à un calcul donné, témoignent assez clairement d'un manque de connexions entre le symbolisme mathématique conventionnel et les actions sur les objets dans le monde réel.

Mais, si on dépasse la problématique même des calculs formels, les élèves font-ils preuve d'inventivité dans la **production de symbolisations moins conventionnelles** ? Les productions des élèves sont synthétisées ci-dessous :

Problème additif

- 8 élèves proposent au moins deux symbolisations différentes et correctes
  - un tas de 5 et un tas de 3 ⇔ le calcul (7 élèves)
  - un dessin de 5 et 3 doigts ⇔ le calcul (1 élève)
- 8 élèves proposent une seule symbolisation correcte
  - le calcul (7 élèves)
  - un tas de 5 et un tas de 3 (1 élève)
- 4 élèves ne proposent aucune symbolisation correcte

Problème soustractif

(sur les 14 élèves qui ont résolu le problème correctement)

- 3 élèves proposent au moins deux symbolisations différentes et correctes
  - un tas de 8 ronds parmi lesquels 3 sont barrés ⇔ le calcul (1 élève)
  - un tas de 8 ronds parmi lesquels 3 sont entourés ⇔ le calcul (2 élèves)
- 9 élèves proposent une seule symbolisation correcte
  - le calcul (8 élèves)
  - un tas de 5 et un tas de 3 (ce qui correspond plutôt à la configuration des pièces une fois le retrait effectué) (1 élève)
- 2 élèves ne proposent aucune symbolisation correcte

Les résultats présentés ici témoignent du manque d'inventivité des élèves pour représenter par un dessin leur stratégie de résolution ; ceci est particulièrement crucial pour le problème soustractif où ils ne sont que trois à proposer un dessin représentant clairement un retrait.

Des symbolisations variées pour représenter les opérations additives et soustractives (diagrammes de Venn, graphes fléchés,…) sont proposées dans les manuels et les élèves sont vraisemblablement confrontés en classe à plusieurs d'entre elles. On voit ici qu'ils ne produisent pas spontanément ce type de représentation, se focalisant plutôt sur les calculs conventionnels. Il est donc intéressant de voir s'ils peuvent utiliser des symbolisations variées lorsqu'elles leur sont explicitement proposées. C'est ce que nous avons tenté d'analyser dans la phase « reconnaître et utiliser des symbolisations différentes » qui est développée ci-après.

3.2. Identifier des symbolisations différentes d'un même problème (d'une même opération) et s'en servir pour résoudre le problème

L'objectif de cette tâche était de voir dans quelle mesure les élèves reconnaissent différentes symbolisations prédéfinies de l'addition et de la soustraction (ici, différentes cartes représentant ces opérations). Comme dans la tâche de production, un problème additif et un problème soustractif servaient de point de départ à la réflexion :

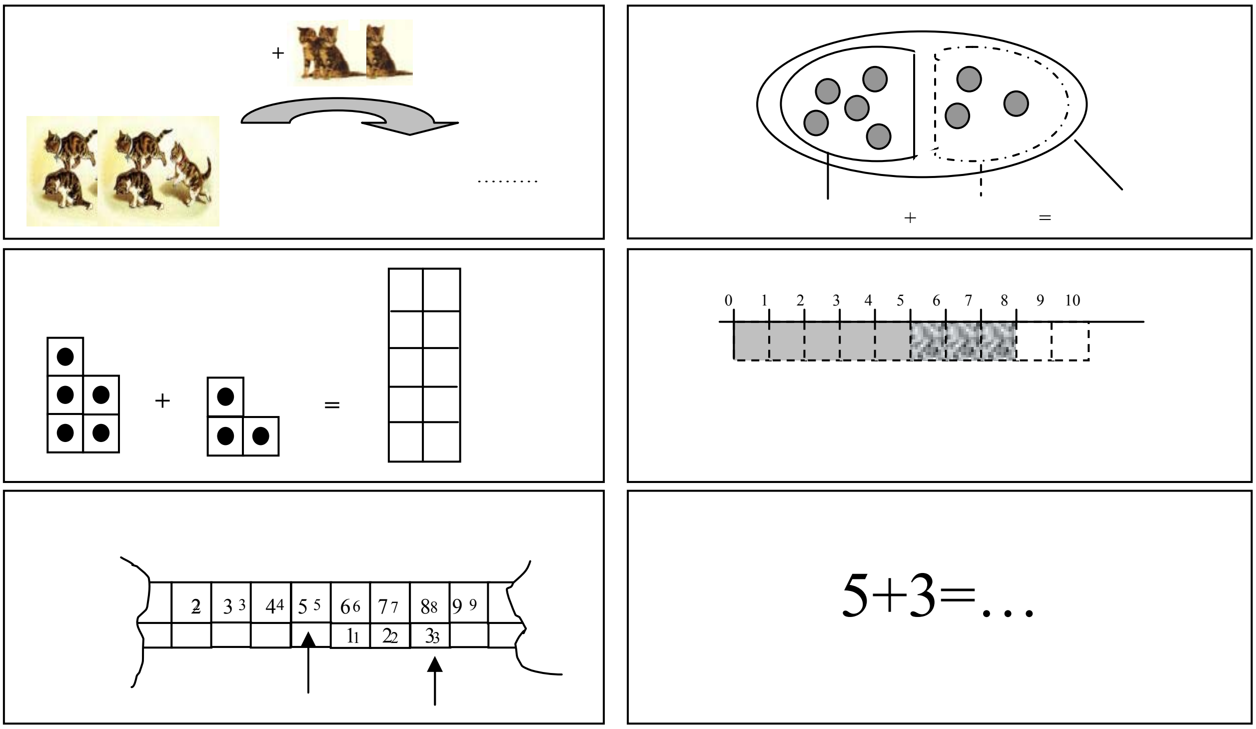
- Cinq chats jouent dans le jardin. Trois autres chats viennent jouer avec eux. Combien y a-t-il de chats maintenant ?
- Il y a huit oiseaux sur une branche. Trois oiseaux s'envolent. Combien reste-t-il d'oiseaux sur la branche ?

Nous avons choisi de ne donner ici que les résultats relatifs au **problème additif**. Les analyses sont distinctes pour les élèves de maternelle et pour ceux de primaire parce que les cartes utilisées différaient : les élèves de maternelle étaient principalement confrontés à des symbolisations variées et assez schématiques (diagrammes de Venn, droite graduée, graphes fléchés,…) alors que les élèves de primaire étaient confrontés à un nombre plus important de cartes symbolisant des calculs conventionnels.

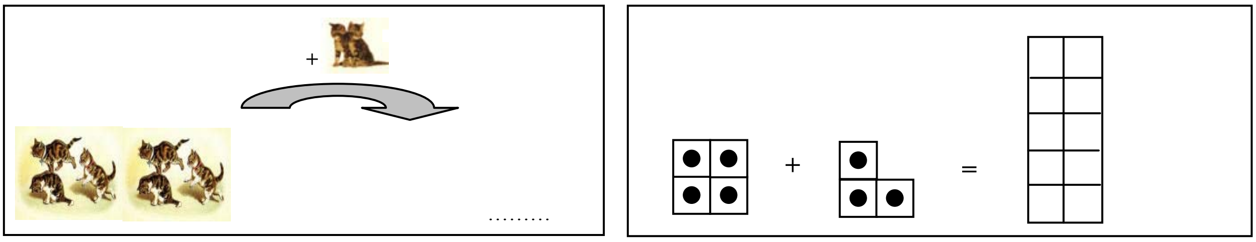
En 3ᵉ Maternelle

Parmi les 10 cartes proposées aux enfants :

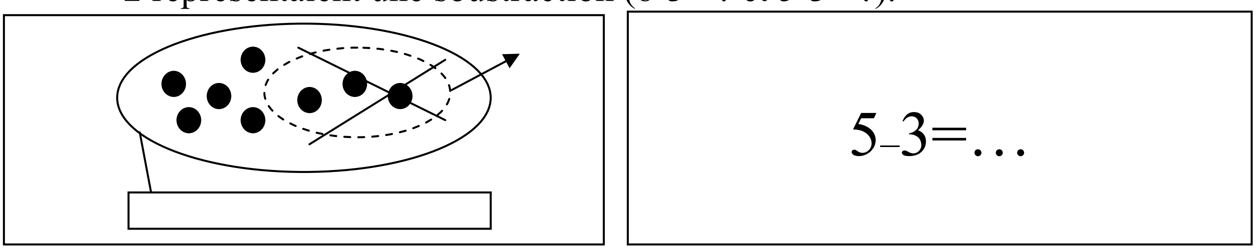
- 6 représentaient l'opération correcte (5+3= ?)



- 2 représentaient une addition avec des termes ne correspondant pas au problème proposé (6+2= ? et 4+3= ?)



- 2 représentaient une soustraction (8-3= ? et 5-3= ?).



Parmi les différents types de **symbolisations correctes**, trois semblent plus parlantes que les autres pour les enfants de cet âge : l'opérateur représentant des chats (16 élèves sur 20 choisissent cette carte), le diagramme de Venn (choisi par 17 élèves) et le schème en appartements (choisi par 15 élèves). Les deux autres types de symbolisations ne proposant pas un calcul classique leur sont nettement plus étrangères : les deux types de droites graduées sont seulement choisies par seulement 4 élèves pour l'une et par 3 élèves pour l'autre.

Les **erreurs** semblent pouvoir s'expliquer en partie par une focalisation sur le résultat (8) indépendamment des termes de l'addition (la carte représentant 6 chats + 2 chats a été choisie par 5 élèves) ou de l'action représentée (la carte représentant le diagramme de Venn avec 8 points dont 3 barrés a été choisie par 6 élèves). Assez logiquement (dans la mesure où ce type de symbolisation n'a pas sa place à l'école maternelle), les **calculs conventionnels** perturbent complètement les enfants : soit ils ne choisissent aucune des deux cartes, soit ils prennent les deux (ne faisant pas de distinction en fonction du signe).

En terme de **petit bilan**, il est intéressant de voir combien d'élèves n'ont choisi que des bonnes cartes et lesquelles.

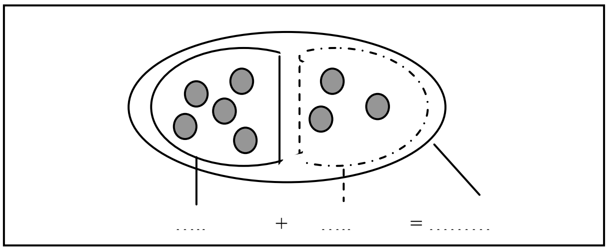
- Trois élèves n'ont choisi que des bonnes cartes (4, 3 ou 1 selon les élèves). Dans tous les cas, l'opérateur représentant les chats a été choisi, vient ensuite le diagramme de Venn, puis le schème en appartement et, pour un élève, la latte graduée complète.
- Onze élèves ont choisi une mauvaise carte et un ensemble variable de cartes correctes. Dans le cas d'une seule erreur, il s'agit principalement du calcul conventionnel 5-3 (pour 6 élèves), du diagramme de Venn indiquant 8-3 (3 élèves) et de l'opérateur avec des chats représentant 6+2 (2 élèves).

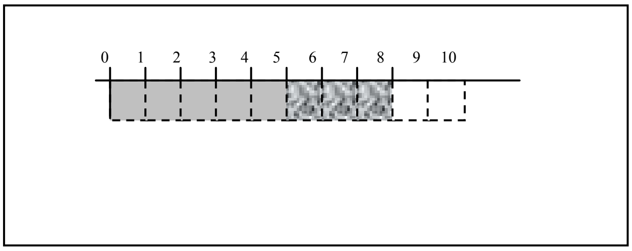
Si on exclut les calculs conventionnels qui sont clairement étrangers aux élèves de début de 3^{e} maternelle, on note que près de la moitié des élèves (3 qui n'ont choisi que des bonnes cartes et 6 dont la seule erreur est le calcul conventionnel) se débrouillent finalement assez bien face à cette tâche de résolution de problèmes et d'identification de symbolisations variées.

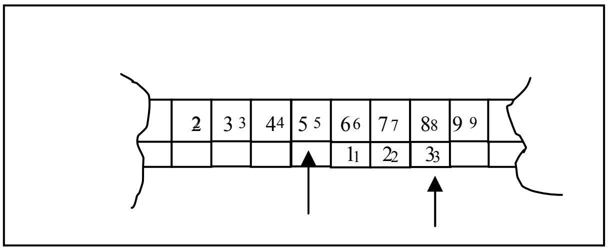
En 1re Primaire

Parmi les 10 cartes qui leur étaient proposées :

- 4 représentaient l'opération correcte (5+3= ?)

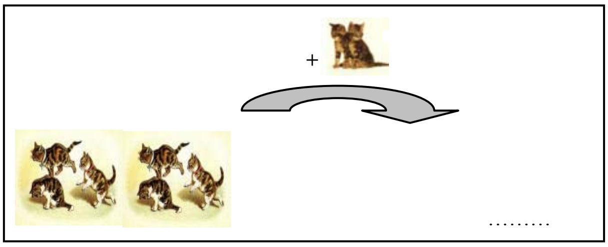


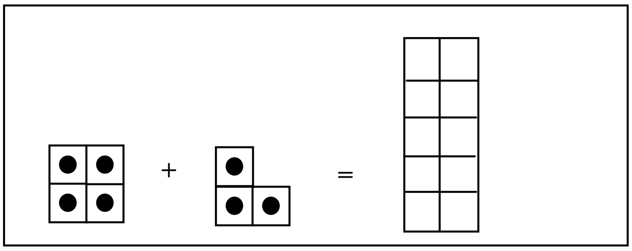




5+3=…

- 2 représentaient une addition avec des termes ne correspondant pas au problème proposé (6+2= ? et 4+3= ?)





- 4 représentaient des opérations conventionnelles ne correspondant pas au problème proposé (5-3= ?, 8-5=3, 8+3= ? et 8-3= ?).

5-3=…

8+3=…

8-5=3

8-3=…

Les résultats ne portent ici que sur 14 élèves. Parmi les différents types de **symbolisations correctes**, deux ont obtenu plus de succès que les autres : le diagramme de Venn et le calcul conventionnel ont été sélectionné par 12 enfants sur 14. Comme pour les élèves de maternelle, les deux symbolisations représentant des droites graduées (complète ou incomplète) leur sont clairement plus étrangères et ne sont choisies que par 4 ou 5 élèves.

En ce qui concerne **les erreurs**, il convient de distinguer les représentations schématiques et les calculs conventionnels. Pour les représentations schématiques, la carte représentant un opérateur avec des chats et correspondant à l'opération 6+2 a été choisie par 9 élèves sur 14 ; ce qui est le signe d'une focalisation sur le résultat (8) indépendamment des termes de l'addition (6+2 à la place de 5+3).

L'analyse des **symbolisations conventionnelles** révèle des résultats assez troublants. En effet, le choix de la bonne carte par 12 élèves sur 14 donne une vision assez trompeuse des compétences des élèves dans ce domaine. En effet, ils ne sont que 7 à ne choisir que cette carte parmi les différentes symbolisations conventionnelles proposées ; 3 choisissent simultanément « 5+3 » et « 5-3 » et 2 choisissent toutes les cartes exprimant des symboles conventionnels à l'exception de « 5-3= ? ». Ces choix multiples témoignent assez clairement des difficultés éprouvées par les élèves pour donner du sens aux opérations additives et soustractives en situation de résolution de problèmes.

Le **bilan** portant sur les élèves qui n'ont choisi que des bonnes cartes ou qui ont commis une seule erreur donne des résultats pour le moins mitigés.

- Trois élèves n'ont choisi que des bonnes cartes (3 ou 2 selon les élèves). Dans tous les cas, le diagramme de Venn et le calcul conventionnel 5+3 ont été choisis ; la latte graduée complète a également été sélectionnée par un élève.
- Cinq élèves choisissent des cartes correctes et une seule carte erronée. Il s'agit de l'opérateur proposant 6 chats + 2 chats pour 4 élèves et du schème en appartement correspondant à l'opération 4+3 pour 1 élève.

La présentation de nombreuses cartes comprenant des opérations conventionnelles a-t-elle perturbé les élèves ? Leur construction des opérations conventionnelles est-elle encore trop balbutiante pour leur permettre d'identifier clairement les calculs ayant du sens par rapport à la situation problème proposée face à d'autres calculs (de structure correcte) mais s'éloignant clairement du problème cible ? Quoi qu'il en soit, les résultats obtenus ici posent question car on ne peut nier l'importance de donner du sens, dès le départ, aux premiers apprentissages mathématiques. Les difficultés mises en évidence montrent tout l'intérêt de travailler l'apprentissage des opérations en situation de résolution de problèmes pour aider les élèves à créer des connexions entre le symbolisme conventionnel et les situations concrètes (ici, les problèmes et les stratégies de résolution).

4. CONCLUSION ET DISCUSSION

En 3e maternelle, les résultats sont assez encourageants : les élèves se sont montrés assez compétents dans la résolution des problèmes à l'aide de matériel manipulable ; quelques-uns d'entre eux sont même parvenus à représenter leur démarche en dessinant des tas représentant leur comptage. Cette dernière remarque porte principalement sur le problème additif parce que la représentation d'une action de retrait paraît nettement plus complexe à réaliser. Pour ce qui concerne la reconnaissance et l'utilisation de symbolisations variées, on peut noter que près de la moitié des élèves se débrouillent très bien et n'ont sélectionné que des cartes appropriées (si on exclut les symboles conventionnels face auxquels ils sont généralement perplexes).

Globalement, ces résultats montrent la possibilité de travailler les concepts additifs et soustractifs avec les élèves de maternelle au départ de situations problèmes. Attention toutefois à veiller au développement de symbolisations variées, produites si possible par les enfants, pour leur permettre d'acquérir une compréhension solide des concepts. Attention aussi à ne pas chercher à introduire trop précocement des symbolisations conventionnelles qui n'auraient pas beaucoup de sens à leurs yeux et qui risqueraient d'être mal comprises.

Les interviews menées avec les élèves de **1re primaire** se centrent davantage sur les calculs conventionnels puisque ceux-ci font partie des objets d'enseignement fortement développés à ce niveau scolaire. Peuvent-ils produire des calculs corrects en lien avec leurs démarches informelles de résolution (tâche de production de symbolisations) et peuvent-ils distinguer les calculs correspondant à un problème donné de ceux qui ne présentent aucun lien avec ce problème (tâche de reconnaissance et d'utilisation de symbolisations) ?

Les résultats obtenus montrent que les élèves de première primaire font preuve de certains comportements qui laissent supposer une compréhension trop partielle des symboles conventionnels et dès lors un risque de développement de démarches superficielles. Le premier indice de cela concerne tout d'abord la résolution proprement dite où l'on voit qu'ils sont 6 à commettre des erreurs dans la résolution du problème soustractif, sans doute parce qu'ils veulent appliquer une opération et qu'ils ne recourent pas à l'utilisation du matériel qui leur aurait permis de jouer l'histoire concrètement (et donc d'éviter d'additionner les nombres plutôt que de le soustraire et d'éviter aussi les erreurs de calculs). Un autre point à noter est qu'une part non négligeable d'entre eux ne parvient pas à produire un calcul correct en lien avec les problèmes très simples qui leur étaient proposés (5 élèves sur 20 pour l'addition et 8 pour la soustraction). La tâche portant sur l'utilisation de symboles prédéfinis montre encore de manière plus troublante ces difficultés : bon nombre d'élèves ne semblent pas perturbés de choisir des calculs représentant des opérations différentes pour symboliser un même problème (ex. 5+3=… et 5-3=…) ; en conséquence, ils ne sont pas très nombreux à ne choisir que le bon calcul parmi les différentes symbolisations conventionnelles proposées (7 élèves sur 14 pour l'addition et 6 pour la soustraction).

En bref, les différentes tâches proposées montrent assez clairement les difficultés éprouvées par les élèves pour créer des connexions entre les symboles mathématiques conventionnels et les actions sur les objets dans le monde réel (les problèmes proposés). Les interviews ont été réalisées ici en début d'année mais, comme nous l'avons mentionné en introduction de cet article, d'autres études nous ont permis par le passé de constater d'importantes difficultés en fin d'année également (Fagnant, 2002a, 2005a,b).

Un autre point important à noter est que les élèves, tant de **maternelle** que de **primaire**, font preuve de **peu d'inventivité pour le développement de représentations variées et plus spontanées** (cf. la pauvreté observée dans la phase de production de symbolisations). Ce manque d'inventivité dans la production des symbolisations apparaissait également de manière très nette dans les tâches relatives aux nombres alors que la reconnaissance de symbolisations variées d'un même nombre posait peu de difficultés aux élèves (analyse non détaillée ici puisque nous avions fait le choix de centrer l'article sur les opérations). Ces résultats nous ont conduit à émettre l'hypothèse d'une prégnance d'activités portant sur la reconnaissance de symbolisations prédéfinies plutôt que sur la production de symbolisations variées, et ceci tant dans le domaine des nombres que dans celui des opérations. Une enquête sur les pratiques des enseignants au cycle 5-8 (plus spécifiquement, sur la place accordée à la résolution de problèmes à ce niveau d'enseignement, Fagnant & Hindryckx, 2005) fournit quelques résultats qui tendent à renforcer cette hypothèse.

Un des axes au cœur des activités développées dans le cadre de la présente recherche (dont les fondements se trouvent notamment dans les courants théoriques socioculturels − voir notamment les travaux de Gravemeijer, Cobb, an Oers & Verschaffel, 2000, et de Bednarz, Dufour-Janvier, Poirier & Bacon, 1993) consiste à travailler au départ des symbolisations informelles produites par les élèves pour les aider à développer une meilleure compréhension des concepts impliqués et pour tendre progressivement vers des symbolisations mathématiques plus conventionnelles qu'ils devraient ainsi mieux intégrer.

La citation suivante illustre les principes chers aux tenants de la Realistic Mathematics Education. Les différents aspects mentionnés traduisent assez bien les fondements théoriques auxquels nous nous référons dans le cadre de la présente recherche.

> La caractéristique de cette approche est de choisir comme point de départ pour l'apprentissage des mathématiques des situations problèmes qui constituent une réalité dans l'expérience des élèves. Ces situations problèmes donnent la possibilité aux élèves de s'engager de façon informelle dans une activité porteuse de sens. Ensuite, les enfants doivent être encouragés et aidés pour développer, par leurs propres moyens, à partir de leurs propres stratégies informelles de résolution, des procédures plus proches d'une perspective mathématique plus formelle. La question cruciale concerne la manière d'encourager et de guider (d'étayer) ce processus de construction de connaissance sans interférer avec l'initiative et l'autonomie intellectuelle de l'élève » *(*Gravemeijer, Lehrer, van Oers & Verschaffel, 2002, p. i – c'est nous qui soulignons).

En donnant du sens aux opérations et au symbolisme mathématiques dès les premiers apprentissages, en proposant des problèmes concrets et variés, en s'appuyant sur les démarches informelles des enfants, en les amenant à développer dès le départ une démarche analytique et réflexive de résolution de problèmes,… le projet a pour ambition de créer un corpus d'activités qui amènera à les élèves à développer une approche positive des mathématiques et de la résolution de problèmes.

5. RÉFÉRENCES

Bebout, H.C. (1990). Children's symbolic representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *2(2),* 123-131.

Bednarz, N., Dufour-Janvier, B., Poirier, L., & Bacon, L. (1993). Socioconstructivist viewpoint on the use of symbolism in mathematics education. *Alberta Journal of Educational Research, 39,* 41-58.

Carey, D.A. (1991). Number sentences : Linking addition and subtraction word problems and symbols. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22,* 266-280.

Cobb, P., Yackel, E., & Mc Clain, K. (2000, Eds.). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools and instructional design*. Mahwah, New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Fagnant, A. (2002a). *Quelle compréhension du symbolisme mathématique au travers de la résolution de problèmes arithmétiques?* Thèse de doctorat non publiée. Université de Liège. Belgique.

Fagnant, A. (2002b). Mathematical symbolism : A feature responsible for superficial approaches? A.D. Cockburn and E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 345-352). Norwich, UK : University of East Anglia.

Fagnant, A. (2005a). Résoudre et symboliser des problèmes additifs et soustractifs en début d'enseignement primaire. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?(131-150).* Bruxelles : De Boeck.

Fagnant, A. (2005b). The use of mathematical symbolism in problem solving. An empirical study carried out in grade one in the French Community of Belgium. *European Journal of Psychology of Education, XX (4),* pp. 355-367.

Fagnant, A., & Hindryckx, G. (2005). Développer la résolution de problèmes au cycle 5-8 pour donner sens aux premiers apprentissages mathématiques en s'appuyant sur les démarches spontanées des enfants. Rapport final de la 1re année de recherche. Août 2005. Liège : Service de Pédagogie expérimentale de l'Université (document non publié).

Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre.* Paris : Delachaux et Niestlé.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). *Symbolizing, modelling, and instructional design.* In P. Cobbs, E. Yackel, & K. Mc Clain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools and instructional design* (pp 225-273). Mahwah, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Gravemeijer, K., Lehrer, R., van Oers, B., & Verschaffel, L. (2002). Introduction and overview. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (1-5), Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Word problems : A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school ? In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 69-97). Hove, East Sussex : Psychology Press Ltd.