DES OUTILS DIDACTIQUES POUR DÉVELOPPER LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DANS L'ENSEIGNEMENT FONDAMENTAL

Aperçu des fondements théoriques et entrée au cœur de quelques activités

Annick Fagnant
Unité d'analyse des Systèmes et Pratiques d'enseignement (aSPe)
Université de Liège

1. INTRODUCTION

Depuis plusieurs années, une équipe de chercheuses de l'unité d'analyse des systèmes et des pratiques d'enseignement a développé une expertise dans le domaine de la résolution de problèmes en mathématiques, dans l'enseignement fondamental. Plusieurs recherches ont été menées depuis la fin des années 1990, avec pour objectif de construire des outils didactiques à l'usage des enseignants du fondamental. La première recherche s'est déroulée de 1998 à 2001 et concernait les élèves de 3e et 4e années de l'enseignement primaire ; elle a été poursuivie, de 2001 à 2004, par une recherche menée en fin d'enseignement fondamental (5e et 6e années du primaire) puis de 2004 à 2007, par la construction d'outils pour le cycle 5-8.

Ces trois recherches ont été commanditées par l'Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique de la Communauté française. Les outils créés sont ainsi le fruit d'une collaboration avec les inspecteurs, les enseignants de ce réseau et leurs élèves. Les trois recherches ont débouché sur la publication d'outils didactiques pour les enseignants : « Résoudre des problèmes : pas de problème ! » (Demonty, Fagnant & Lejong, 2004 ; Fagnant & Demonty, 2005 ; Fagnant, Hindryckx & Demonty, 2008).

L'objectif du présent article est de donner un aperçu de l'ensemble de ce travail. Il se présente en deux parties : la première présente les courants théoriques qui ont influencé nos travaux et la deuxième illustre quelques activités développées aux différents niveaux scolaires.

2. LES FONDEMENTS THÉORIQUES À LA BASE DE NOS TRAVAUX

Les courants théoriques à la base de nos travaux didactiques sont présentés en trois parties. Une brève incursion dans les théories cognitivistes est tout d'abord proposée afin de mettre en lumière quelques apports des théories du traitement de l'information, en ce qui concerne principalement les problèmes additifs et soustractifs à proposer en début d'apprentissage. Le deuxième point reprend quelques principes importants issus des approches socioculturelles et relevant de la *Realistic Mathematics Education* (RME). En opposition avec ces approches novatrices, généralement qualifiées d'ascendantes (ou *bottom-up*), ce point propose également quelques constats permettant de montrer les limites d'une approche traditionnelle installant les premières symbolisations selon une approche que l'on peut qualifier de descendante (ou *top-down*). Enfin, nous terminerons cet aperçu théorique par les apports de nos collègues de Leuven (les équipes de Lieven Verschaffel et d'Eric De Corte), qui ont très largement influencé nos travaux. En accord avec ces chercheurs, on verra comment il est aujourd'hui courant de considérer la résolution de problèmes comme un processus complexe de modélisation mathématiques (voir Fagnant, Demonty & Lejong, 2003, pour une présentation détaillée de cette perspective).

2.1. Les approches cognitives et l'apport des théories du traitement de l'information

2.1.1. Aperçu général du courant

Le postulat fondamental de la psychologie cognitive est que la pensée est un système de traitement de l'information ; ces théories se sont donc essentiellement intéressées à la façon dont les personnes se représentent les informations, aux processus qu'elles développent pour traiter ces informations et aux limites de la mémoire qui contraignent la quantité d'information que les personnes peuvent représenter et traiter (Siegler, 2001). Les recherches ont notamment porté sur les stratégies générales et spécifiques de résolution de problèmes telles que les stratégies d'encodage de l'information, de planification, d'analyse des buts, de chaînage avant ou arrière, de raisonnement analogique,… (voir Tardif, 1992, pour une vue d'ensemble). Un apport important des recherches menées dans le domaine de la psychologie cognitive se situe également au niveau des comparaisons experts-novices. En s'appuyant sur Tardif (1992), on peut brièvement synthétiser quelques constats principaux : (1) l'étape de représentation de la situation est une phase cruciale de la résolution de problèmes ; (2) les stratégies métacognitives de régulation et de contrôle jouent elles aussi un rôle important et (3) on n'est pas un expert au sens absolu du terme mais en fonction des situations rencontrées, dans la mesure où les connaissances spécifiques occupent une place centrale (la personne doit avoir dans sa mémoire à long terme les connaissances spécifiques pour traiter de manière significative le problème). Globalement, les démarches des experts et des novices sont assez contrastées : d'un côté, les experts consacrent plus de la moitié du temps à comprendre le problème, ils ne s'engagent pas aveuglément dans l'application d'un algorithme de calcul et prennent beaucoup de temps pour analyser et explorer les données du problème ; les novices, quant à eux, prennent très peu de temps pour lire et comprendre le problème, ils s'engagent très rapidement dans une stratégie de résolution qu'ils conservent souvent jusqu'à la fin sans tenter de réguler ou de vérifier leur démarche (Schoenfeld, 1992).

Les élèves peuvent généralement être considérés comme des novices en résolution de problèmes ; les activités menées en classe devront les encourager à tendre vers des démarches expertes, en leur apprenant à consacrer du temps à l'analyse des situations, en les encourageant à mobiliser les connaissances spécifiques liées aux situations proposées et en tentant de les conduire à réguler leurs apprentissages.

2.1.2. Les études centrées sur les problèmes additifs et soustractifs à une opération

Les théories du traitement de l'information se sont beaucoup intéressées aux problèmes additifs et soustractifs à une opération, tels que proposés généralement en début d'enseignement primaire. Ce champ de recherche a permis des études très fines des stratégies de résolution des élèves et a conduit plusieurs chercheurs à développer des modèles informatiques permettant de simuler les processus de résolution de problèmes ; les plus connus d'entre eux sont sans doute les modèles développés par Riley, Greeno et Heller (1983), par Briars et Larkin (1984) et par Kitsch et Greeno (1985) (voir aussi De Corte & Verschaffel, 1988, pour une présentation critique de ces approches). Nous ne nous attarderons pas ici sur les modèles informatiques qui concernent plutôt le champ de la psychologie, mais nous présenterons les apports importants de ces courants pour l'enseignement et la didactique. Quatre points retiendront ainsi notre attention : les typologies de problèmes, la difficulté relative des problèmes, l'étude des stratégies informelles de résolution et enfin, les deux fonctions des algorithmes de calcul.

a) Une typologie de problèmes

La typologie présentée ici est centrée sur les aspects liés à la structure sémantique des problèmes. De nombreuses études ont mis en évidence l'aspect psychologiquement significatif des catégories sémantiques. On a ainsi pu constater que des problèmes qui peuvent être résolus par la même opération arithmétique mais qui diffèrent au niveau de la structure sémantique sous-jacente se distinguent significativement du point de vue de leur niveau de difficulté (voir point b). La pertinence des aspects sémantiques a également été mise en évidence au travers de l'analyse des stratégies de résolution utilisées par les élèves, tant en ce qui concerne les stratégies informelles de résolution (voir point c) que la production de symbolisations mathématiques plus formelles (voir point d).

Vers la fin des années 70, ce type d'approche a été adopté par un nombre croissant de chercheurs s'intéressant activement aux processus de résolution des élèves. En 1978, Greeno et ses associés ont introduit un schéma de classification pour les problèmes additifs et soustractifs qui permet de distinguer trois catégories de situations problèmes : les problèmes de type changement, combinaison et comparaison (Riley, Greeno et Heller, 1983).

- Les problèmes de type <u>changement</u> se réfèrent à des situations actives ou dynamiques dans lesquelles certains événements affectent la valeur d'une quantité initiale.
- Les problèmes de type <u>combinaison</u> font référence à des situations statiques impliquant deux quantités qui peuvent être considérées soit séparément soit en combinaison.
- Les problèmes de type <u>comparaison</u> impliquent deux quantités qui sont comparées, ainsi qu'une valeur indiquant la différence entre ces deux quantités.

Chaque catégorie de problèmes peut être subdivisée en sous-catégories en fonction de l'identité de la quantité inconnue. Pour les problèmes de type changement et comparaison, on peut encore faire des distinctions supplémentaires en fonction de la direction, respectivement, de l'événement décrit (augmentation ou diminution) ou de la relation (plus ou moins). En combinant ces différentes caractéristiques, Greeno et ses associés distinguent 14 types de problèmes additifs et soustractifs impliquant une seule opération. Le tableau suivant présente quelques problèmes construits sur cette base.

Tableau 1 : Quelques exemples de problèmes issus de la typologie de Riley *et al.* (1983)

Combinaison – recherche d'une partie	Joe et Tom ont 8 billes ensemble. Joe a 3 billes. Combien de billes Tom a-t-il ?
Changement – transformation positive, recherche du terme final	Joe avait 3 billes. Puis, Tom lui a donné 5 billes. Combien de billes Joe a-t-il maintenant ?
Changement – transformation négative, recherche de la transformation	Joe avait 8 billes. Puis, il a donné quelques billes à Tom. Maintenant, il a 3 billes. Combien de billes a-t-il données à Tom ?
Changement - transformation négative, recherche du terme initial	Joe avait quelques billes. Puis, il a donné 5 billes à Tom. Maintenant, Joe a 3 billes. Combien de billes Joe avait-il au début ?
Comparaison – formulation « de plus » - recherche du terme relationnel	Joe a 8 billes. Tom a 5 billes. Combien de billes Joe a-t-il de plus que Tom ?
Comparaison – formulation « de moins » - recherche de l'ensemble de comparaison	Joe a 8 billes. Tom a 5 billes de moins que Joe. Combien de billes Tom a-t-il?
Comparaison - formulation « de plus » - recherche de l'ensemble correspondant au référant	Joe a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Tom. Combien de billes Tom a-t-il ?

b) La difficulté des problèmes relevant de différentes catégories

De nombreuses études empiriques se sont attachées à déterminer la difficulté relative des problèmes du type de ceux proposés par Greeno et ses associés (voir notamment De Corte & Verschaffel, 1991 ; Greeno & Heller, 1983). A l'encontre d'une conception naïve de l'arithmétique et de sa genèse, il est intéressant de constater que la difficulté des problèmes n'est pas déterminée par les opérations à effectuer (Fayol, 1990). Par exemple, deux problèmes requérant l'opération « 5+3= ? » peuvent être de difficulté très variable en fonction des catégories sémantiques. De même, certains problèmes impliquant une addition se révèlent plus complexes que d'autres impliquant une soustraction, même si cette dernière opération est généralement considérée comme conceptuellement plus simple. Des différences au niveau de la difficulté des problèmes n'ont pas été uniquement trouvées entre des problèmes additifs et soustractifs appartenant à des catégories sémantiques différentes. A l'intérieur de chaque catégorie, on trouve également des différences en fonction de la position de l'inconnue. Autrement dit, les recherches portant sur le niveau de difficulté des problèmes montrent clairement l'influence des structures sémantiques : des problèmes requérant la même opération arithmétique, mais décrits en terme de différents réseaux de concepts et de relations ne sont pas équivalents du point de vue de leur difficulté. Cela montre également que résoudre un problème requiert bien plus que de seulement connaître les opérations et de disposer de quelques compétences générales pour les appliquer.

Enfin, il convient encore de préciser que d'autres facteurs tels que la formulation des énoncés, le type et la taille des nombres utilisés, les procédures de testing, l'âge et le background éducatif des sujets… peuvent également affecter la difficulté relative des problèmes (voir Verschaffel & De Corte, 1997a pour une synthèse).

c) L'étude des stratégies informelles de résolution

Carpenter et Moser (1982, 1984) ont développé une classification des stratégies de résolution de problèmes qui est construite au départ de deux dimensions. La première dimension amène à distinguer les stratégies additives (qui conduisent à une réponse correcte face aux problèmes additifs) et les stratégies soustractives (qui conduisent à une réponse correcte face aux problèmes soustractifs[1]). La deuxième distinction se fait en fonction du niveau d'internalisation des stratégies : les <u>stratégies matérielles</u> sont basées sur des modélisations directes des situations avec les doigts ou avec des objets physiques ; les <u>stratégies verbales</u> sont basées sur l'utilisation de séquences de comptage et les <u>stratégies mentales</u> sont basées sur des rappels mnésiques de faits numériques. Les auteurs distinguent ensuite différentes stratégies de résolution pour les différents problèmes. Par la suite, De Corte et Verschaffel (1985a,b, 1987) ont poursuivi ces travaux et ont complété la classification de stratégies.

Ces deux équipes de recherche ont analysé les stratégies de résolution développées par les jeunes enfants (en fin de maternelle et en début du primaire). Globalement, les résultats montrent que les élèves essaient d'analyser et de représenter les différentes structures de problèmes en vue de les résoudre. Les enfants développent une grande variété de stratégies informelles qui permettent, la plupart du temps, de mettre en acte les actions ou les relations décrites dans la situation. En guise d'exemple, le tableau suivant propose quelques stratégies informelles de niveau matériel (c'est-à-dire basées sur le comptage des doigts ou d'objets manipulables) utilisées préférentiellement par les enfants face à quelques problèmes.

[1] Les problèmes additifs sont ceux qui correspondent à l'opération canonique a+b= ? (ce qui signifie qu'ils peuvent correspondre aux calculs relationnels a+b= ? ou ?-b=a). Par opposition, les problèmes soustractifs sont ceux qui correspondent au calcul canonique a-b= ? (ils peuvent donc correspondre aux calculs relationnels a-b= ?; a- ?=b ; b+ ?=a ou ?+b=a). Voir point d pour plus de détails concernant les deux types de calculs.

Tableau 2 : Quelques exemples de stratégies de niveau matériel développées face à quelques problèmes

Combinaison 1 - Joe a 3 billes. Tom a 5 billes. Combien de billes ont-ils ensemble ?	L'enfant fait un tas de 3 blocs, il fait un autre tas de 5 blocs, puis il compte le tout en laissant les deux tas séparés (ou alors il joint les deux tas avant de recompter le tout).
Changement 1 - Joe avait 3 billes. Puis, Tom lui a donné 5 billes. Combien de billes Joe a-t-il maintenant ?	L'enfant fait un tas de 3 blocs, il construit ensuite le second tas de 5 blocs en l'ajoutant directement sur le premier tas. Ensuite, il recompte le tout.
Changement 2 - Joe avait 8 billes. Puis, il a donné 5 billes à Tom. Combien de billes Joe a-t-il maintenant ?	L'enfant construit un tas de 8 blocs, 5 éléments sont ensuite retirés. La réponse est le nombre d'éléments restants.
Changement 3 - Joe avait 3 billes. Puis, Tom lui a donné quelques billes. Maintenant, Joe a 8 billes. Combien de billes Tom lui a-t-il données ?	L'enfant construit un tas de 3 blocs. Des éléments sont ensuite ajoutés à cet ensemble de manière à obtenir un total de 8 éléments. La réponse est trouvée en comptant le nombre d'éléments ajoutés.
Changement 4 - Joe avait 8 billes. Puis, il a donné quelques billes à Tom. Maintenant, il a 3 billes. Combien de billes a-t-il données à Tom ?	L'enfant construit un tas de 8 blocs, des éléments sont ensuite retirés jusqu'à ce qu'il reste 3 blocs. La réponse est le nombre d'éléments qui ont été retirés.
Comparaison 1 - Joe a 8 billes. Tom a 5 billes. Combien de billes Joe a-t-il de plus que Tom ?	Un ensemble de 8 éléments est placé en correspondance terme à terme avec un ensemble de 5 éléments jusqu'à ce qu'un des deux ensembles soit épuisé. La réponse est le nombre d'éléments restants.

On pense généralement que les élèves doivent disposer d'une certaine maîtrise des techniques opératoires avant de résoudre les problèmes. Les recherches portant sur les stratégies informelles des enfants montrent qu'il n'en est rien. Au contraire, les problèmes devraient être considérés comme un contexte approprié pour introduire les opérations additives et soustractives et pour donner du sens aux symbolisations mathématiques.

d) Les deux fonctions des algorithmes de calcul

Les études basées sur les stratégies informelles de résolution ont montré que les jeunes élèves développent des stratégies variées pour résoudre différents problèmes qu'un adulte pourrait représenter avec la même opération arithmétique. Carpenter, Moser et Bebout (1988) estiment que ces différences peuvent également se refléter au niveau de l'écriture des calculs : *calculs qui modélisent directement les actions ou les relations impliquées dans les* *problèmes* (en lien avec les stratégies informelles de résolution : a+b= ? ; a+ ?=b ; ?+b=c ; a-b= ? ; a- ?=c ou ?-b=c) ou *calculs de forme standard* (a+b= ? ou a-b= ?). Dans le même ordre d'idées, Verschaffel et De Corte (1985b) précisent que les calculs peuvent remplir deux fonctions : ils peuvent être utilisés comme une représentation mathématique formelle des relations sémantiques unissant les quantités connues ou inconnues impliquées dans la situation ; ils peuvent aussi indiquer la notation mathématique de l'opération qui a été ou qui devrait être mise en œuvre pour découvrir la solution. Parfois, le même calcul peut remplir les deux fonctions. C'est le cas dans l'exemple suivant « *Pierre a 6 pommes. Il donne 2 pommes à Anne. Combien de pommes a-t-il maintenant ?* », où le calcul « 6-2= ? » représente la structure sémantique du problème, ainsi que l'opération arithmétique standard. Dans d'autres cas, les deux aspects conduisent à produire des calculs différents. Par exemple, le problème suivant doit être résolu en additionnant les deux nombres (5+3= ? ou 3+5= ?) : *Pierre avait quelques pommes. Il a donné 3 pommes à Anne. Maintenant, il a 5 pommes. Combien de pommes avait-il au départ ?* Le calcul qui représente la relation sémantique sous-jacente au problème entre en conflit avec cette opération puisqu'il s'exprime sous une forme soustractive (?-3=5.). De Corte et Verschaffel (1985b) qualifient les opérations de type « a+b= ? » ou « a-b= ? » de « *calculs canoniques* » et les opérations de type « a+ ?=c », « ?+b=c », « a- ?=c »et « ?-b=c » d'« *équations non canoniques* ».

Les calculs canoniques sont ceux qui présentent la réponse derrière le signe d'égalité ; ils correspondent aux calculs numériques identifiés par Vergnaud (1982) et aux *calculs de forme standard* selon Carpenter *et al.* (1988). Ils ne sont pas liés à la structure sémantique des problèmes. L'idée sous-jacente à l'utilisation de ce type de calculs est que tous les problèmes additifs et soustractifs peuvent être conceptualisés en terme de relations partie-tout. Ils peuvent alors être résolus par le calcul « a+b= ? », lorsque l'on recherche le tout, ou par le calcul « a-b= ? », lorsque l'on recherche une partie. De l'autre côté, on peut voir un lien étroit entre les calculs qui correspondent aux structures sémantiques des problèmes (*calculs qui modélisent directement les actions impliquées dans le problème* - selon Carpenter *et al.*, 1988) et les calculs relationnels identifiés par Vergnaud (1982). Ces calculs peuvent être de forme canonique (a+b= ? ou a-b= ?) lorsque les problèmes portent sur la recherche du terme final, ou ils peuvent prendre la forme de calculs à trou (a+ ?=c ; ?+b=c ; a- ?=c et ?-b=c), lorsque l'inconnue porte sur le terme initial ou intermédiaire.

Lorsque l'on impose aux élèves d'utiliser des calculs canoniques en résolution de problèmes (ce qui se fait parfois dans les classes, même en tout début d'enseignement primaire, comme l'a encore révélé une récente étude menée en Communauté française de Belgique, Fagnant & Hindryckx, 2006), on leur demande une très grande abstraction face à certains problèmes. En effet, les études basées sur les stratégies informelles ont montré que les élèves avaient très majoritairement tendance à développer des stratégies proches des structures sémantiques des problèmes. Les calculs relationnels sont alors clairement en lien avec ces stratégies (par exemple, le calcul 4+…=7 face à un problème résolu par surcomptage) alors que les calculs canoniques entrent au contraire en conflit (par exemple, 7-4=…, quand le problème a été résolu par surcomptage et « raconte » une histoire additive).

2.2. L'apport des approches socioculturelles et la Realistic Mathematic Education

Les recherches fondées sur les approches socioculturelles sont basées sur les travaux de Vygotsky dont une des thèses est de considérer l'activité humaine comme socialement médiatisée par des instruments. Face à la problématique de la symbolisation, les mathématiques occupent une position qui les distingue des autres sciences : les objets mathématiques n'ont pas d'existence tangible et ne sont pas directement accessibles à la perception. La seule voie d'accès passe dès lors par des représentations symboliques. Les mathématiques appartiennent en effet à ce que Sfard (2000, p. 39) appelle la *Virtual Reality*, qu'elle oppose à la réalité tangible appelée *Actual Reality* : « dans la réalité tangible, la communication peut être médiatisée par les objets qui sont au centre de la discussion ; alors que dans la réalité virtuelle, la médiation perceptive est inexistante et la communication n'est donc possible que par le biais de substituts symboliques qui représentent les objets dont on parle ». Les symboles font donc partie intégrante du raisonnement mathématique. A l'heure actuelle, de nombreux auteurs (voir ouvrages de Cobb, Yackle & Mac Lain, 2000 et de Gravemeijer, Lehrer, van Oers & Verschaffel, 2002) défendent l'idée d'une co-construction des symboles et des concepts.

2.2.1. Approches bottom-up versus top-down au niveau des symbolisations

La place accordée aux symboles et à leur construction dans les approches socioculturelles diffère fortement de la vision traditionnelle de l'enseignement où les symboles conventionnels sont proposés d'emblée aux élèves à qui on explique ce qu'ils représentent et comment ils doivent les utiliser. D'aucuns (Gravemeijer, 1997, 2002 ; Gravemeijer, Cobb, Bowers & Whitenack, 2000) qualifient dès lors ce type d'approche de descendantes (ou *top-down*) par opposition aux approches plus novatrices qui elles sont considérées comme étant de type ascendantes (ou *bottom-up*).

Dans l'approche traditionnelle, on présente aux élèves des modèles concrets qui doivent les aider à acquérir les mathématiques abstraites : « le matériel manipulable et les modèles visuels sont utilisés pour rendre les mathématiques abstraites que l'on doit enseigner plus concrètes et accessibles aux étudiants » (Gravemeijer, 2002, p. 8). Dans cette approche *top-down*, « les symboles mathématiques sont traités comme référant de manière non ambiguë à des référents fixes et donnés d'emblée. Le rôle de l'enseignant est alors typiquement perçu comme celui qui explique ce que les symboles signifient et comment ils peuvent être utilisés en les reliant aux référents » (Gravemeijer *et al.*, 2000, p. 226). Dans le domaine qui nous préoccupe, cela peut se traduire par l'utilisation de matériels plus ou moins concrets tels que des blocs ou des bouchons à compter pour illustrer les opérations additives et soustractives formelles. L'addition est alors présentée comme la mise en commun des deux ensembles d'objets constitués (ou par l'ajout d'un ensemble sur l'autre), elle se symbolise par 3+4=7 (3 et 4 représentant les deux ensembles de départ et 7 leur réunion). Pour la soustraction, le symbolisme conventionnel est introduit de façon similaire, après illustration de l'action de retrait au départ de matériel concret.

Les approches récentes (qualifiées de "*bottom-up*") ont pour intention d'accorder une place plus active aux élèves dans la co-construction des concepts et des symboles. Dans les approches *bottom-up*, Gravemeijer (1997) précise que les connaissances et les stratégies informelles des apprenants doivent constituer le point de départ d'un apprentissage mathématique plus formel. La résolution de problèmes face auxquels les élèves pourront développer des approches personnelles et significatives constitue le point de départ privilégié des ces approches. « Le challenge est de soutenir le passage de chaque élève vers des activités mathématiques dans lesquelles l'utilisation de symboles conventionnels porte la signification d'agir sur des entités mathématiques qui ont du sens dans l'expérience de l'enfant » (Gravemeijer *et al.*, 2000, p. 226). C'est dans cette perspective "*bottom-up*"que l'on peut situer les approches « inventives » telles que celle développée par Bednarz, Dufour-Janvier, Poirier et Bacon (1993) : « plutôt que de présenter les symboles comme des représentations externes de relations mathématiques pré-existantes, ils défendent l'idée selon laquelle les symbolisations devraient être conçues comme des outils construits par les étudiants eux-mêmes. (…) Le point de départ doit être des situations de communication dans lesquelles les élèves symbolisent leur compréhension mathématique » (Gravemeijer *et al.*, 2000, p. 232). C'est également dans une perspective "*bottom-up*" que se situe le courant de la *Realistic Mathematics Education* dont les principes clés peuvent se synthétiser comme suit :

> *La caractéristique de cette approche est de choisir comme point de départ pour l'apprentissage des mathématiques des* <u>situations problèmes</u> *qui*

constituent une réalité dans l'expérience des élèves. Ces situations problèmes donnent la possibilité aux élèves de s'engager de façon informelle dans une activité porteuse de sens. Ensuite, les enfants doivent être encouragés et aidés pour développer, par leurs propres moyens, à partir de leurs propres stratégies informelles de résolution, des procédures plus proches d'une perspective mathématique plus formelle. La question cruciale concerne la manière d'encourager et de guider (d'étayer) ce processus de construction de connaissance sans interférer avec l'initiative et l'autonomie intellectuelle de l'élève » (Gravemeijer *et al.*, 2002, p. i).

Ces approches novatrices donnent un tout autre statut à la symbolisation : « les métaphores de *transmission de connaissances* avec l'aide de symboles qui fonctionnent comme des *porteurs de sens* sont remplacées par l'image d'étudiants construisant leur propre façon de symboliser au sein même de leur activité mathématique » (Gravemeijer *et al.* 2002, p.1).

2.2.2. Les limites des approches de type top-down

Une étude empirique (Fagnant, 2002a,b, 2005a,b) a été menée en Communauté française de Belgique, dans des classes de première année primaire où les symboles ont été introduits pour développer les techniques opératoires, en dehors d'un contexte de résolution de problèmes (approche *top-down*). La méthodologie utilisée consistait en des interviews individuelles autour des 14 problèmes de la classification de Riley, Greeno et Heller (1983). L'approche était assez similaire à celle développée par De Corte et Verschaffel (1985a,b) : l'interviewer lisait les problèmes à voix haute, l'enfant répétait le problème et tentait de le résoudre avec l'aide de matériel concret (des poupées et des blocs) ; il était alors invité à écrire un calcul qui correspondait à l'histoire et/ou à la stratégie développée pour résoudre le problème.

Globalement, les résultats observés montrent que les élèves éprouvent d'importantes difficultés pour créer des connexions entre leurs démarches informelles et spontanées de résolution de problèmes (principalement basées sur le comptage) et le symbolisme mathématique utilisé en classe pour entraîner les techniques de calcul. On observe des différences de performance importantes entre l'utilisation de stratégies informelles de résolution (où les élèves démontrent des compétences non négligeables avant tout enseignement formel en résolution de problèmes) et la production de calculs (où les élèves sont moins performants, témoignant par là de difficultés d'utilisation du symbolisme mathématique). Face à chaque problème proposé, le nombre de calculs corrects est toujours inférieur au nombre de réponses correctes. La différence témoigne de difficultés spécifiques d'utilisation du symbolisme mathématique : plusieurs élèves ont été incapables de produire un calcul correct face à un problème qu'ils avaient pourtant résolu correctement (en développant une démarche informelle de résolution). Par le passé, de nombreuses recherches avaient déjà montré que, contrairement aux présupposés sous-tendant certaines approches d'enseignement (dont celle à laquelle ont été soumis les élèves que nous avons interviewés), la maîtrise des techniques de calculs n'est pas un pré-requis à la résolution de problèmes. Les résultats que nous avons obtenus permettent de faire une autre constatation : l'apprentissage des techniques de calculs ne semble pas non plus constituer une aide à la résolution de problèmes. En effet, aucun élève n'est parvenu à produire un calcul correct s'il n'avait pas été capable, au préalable, de résoudre le problème correctement. Les élèves ont des compétences informelles (essentiellement basées sur le comptage) en résolution de problèmes ; on devrait pouvoir s'y appuyer pour donner du sens au symbolisme mathématique et pour privilégier une co-construction des concepts et des symbolisations.

Par ailleurs, il apparaît que les élèves ont une forte propension à utiliser des calculs relationnels ; c'est-à-dire des calculs qui « collent » à l'histoire et aux stratégies de résolution modélisant les actions ou les relations décrites dans les situations. Lorsque l'inconnue à rechercher ne porte pas sur l'état final, ces calculs prennent la forme de calculs à trou. Les approches d'enseignement qui imposent l'utilisation de calculs canoniques (c'est-à-dire proposant la réponse derrière le signe d'égalité) creusent encore fortement le fossé qui existe déjà entre les stratégies informelles et l'utilisation du symbolisme mathématique. Les résultats obtenus ici montrent clairement l'importance de privilégier l'utilisation de calculs relationnels car ce sont ceux qui correspondent le plus directement aux démarches informelles des enfants et donc ceux grâce auxquels ils paraissent le plus à même de donner du sens au symbolisme.

Une étude récente menée auprès d'une centaine d'enseignants du primaire (Fagnant & Hindryckx, 2006) montre encore une certaine réticence des enseignants à développer la résolution de problèmes dès les premiers apprentissages, pour donner du sens aux opérations et pour viser une construction conjointe des concepts d'addition et de soustraction et des symbolisations liées. Nombre d'entre eux déclarent post-poser (généralement en fin de première ou en deuxième année) la résolution de problèmes verbaux pour lui donner plutôt un rôle d'application, une fois que les élèves ont acquis une certaine maîtrise des techniques de calcul et quelques compétences en lecture. Certains enseignants sont encore à convaincre pour qu'ils tentent de s'appuyer davantage sur les démarches informelles de comptage des élèves, qu'ils autorisent l'utilisation de calculs à trous et qu'ils envisagent de développer l'addition et la soustraction simultanément, pour réellement mettre les enfants en situation de résolution de problèmes…

2.3. La modélisation et la résolution de problèmes d'application

Il est courant de distinguer trois grandes classes de stratégies de résolution de problèmes : les stratégies informelles, les stratégies superficielles et les stratégies expertes (Verschaffel & De Corte, 1997a). Les stratégies informelles consistent à mettre en acte les actions et les relations décrites dans les problèmes et entremêlent ainsi les étapes de construction de la représentation et de résolution proprement dite du problème. Elles se basent généralement sur le dénombrement d'objets manipulables ou sur le comptage verbal. Comme nous l'avons mentionné précédemment (voir point 2..1.2.c), elles ont été largement étudiées face aux problèmes additifs et soustractifs. Les jeunes élèves présentent de grandes compétences en résolution de problèmes et sont capables de mettre en œuvre une variété de stratégies informelles. Selon Carpenter, Hiebert et Moser (1983), les stratégies informelles seraient progressivement remplacées par des stratégies superficielles dans lesquelles les élèves se posent juste la question de savoir quelle opération ils vont effectuer. Comme leur nom l'indique, ces stratégies consistent à choisir une opération arithmétique formelle sur la base de critères superficiels : mots-clés (ex. : puisqu'on parle de « gagner », je dois faire une addition), opérations dictées par les nombres de l'énoncé (ex. : 75 et 3, cela se divise bien, je dois donc faire une division tandis que les nombres 25 et 3 indiquent plutôt une multiplication), application de la dernière opération vue en classe (ex. après avoir appris un nouveau calcul comme la division écrite, on doit souvent résoudre une série de problèmes impliquant cette opération) ou de celle pour laquelle on se sent le plus compétent,... Lorsque les élèves développent ce type de stratégies, ils ne semblent pas baser leur approche sur une analyse approfondie de la situation, ni chercher à mettre en relation le contexte évoqué dans le problème avec leurs connaissances de la vie réelle. Tout se passe comme s'ils considéraient que « résoudre un problème, c'est faire une opération avec tous les nombres proposés dans l'énoncé ». Le développement de stratégies superficielles peut être considéré comme une forme d'échec de l'enseignement. Un aperçu des études menées dans ce domaine est proposé au point suivant (2.3.1.). Le dernier point de l'aperçu théorique se propose alors d'aborder le troisième type de stratégies, c'est-à-dire celles vers lesquelles l'enseignement doit faire tendre les élèves. On peut qualifier ces stratégies d'expertes, en référence aux comparaisons experts-novices mentionnées précédemment (voir point 2.1.1). Elles s'opposent aux stratégies superficielles (qui pourraient alors en ce sens être qualifiées de « novices ») dans la mesure où la construction d'une représentation de la situation tient cette fois une place centrale. C'est alors sur la base d'une représentation appropriée du problème (représentation qui implique une organisation des informations présentes dans l'énoncé et une prise en compte de contraintes réalistes) que le sujet détermine les procédures mathématiques à mettre en œuvre. Comme on le verra plus en détails par la suite, ces stratégies expertes impliquent également de confronter la solution au modèle de situation, de l'interpréter en contexte et d'en évaluer sa pertinence.

2.3.1. Les stratégies superficielles, les présupposés qui les sous-tendent et l'origine de ces présupposés

Fin des années 1970 et début des années 1980, quelques études françaises ont mis en évidence des comportements étonnants de la part de jeunes élèves. L'exemple le plus frappant concerne celui connu sous le nom de l'âge du capitaine : *Il y a 26 chèvres et 10 moutons sur le bateau. Quel est l'âge du capitaine ?* Des chercheurs de l'université de Grenoble ont proposé ce problème à des élèves de première et de deuxième années primaires et ont constaté que la plupart d'entre eux fournissaient une réponse numérique précise en combinant les données de l'énoncé (l'addition des données conduisant ainsi notre brave capitaine à l'âge de 36 ans). Les résultats de ces études ont fait couler beaucoup d'encre et ont donné lieu à de nombreuses interprétations : pourquoi les enfants abordent-ils les problèmes sans faire attention au contexte et sans faire appel à leur sens commun ? Pourquoi cette perte de sens en mathématiques ? Un autre exemple célèbre provient d'une étude américaine dans laquelle on pose le problème suivant à des élèves de 13 ans : *Un bus de l'armée peut contenir 36 soldats. Si 1128 soldats doivent être conduits en bus à leur site d'entraînement, combien faudra-t-il de bus ?* Seuls 23 % des élèves fournissent la réponse attendue (32 bus), les autres élèves qui réalisent correctement la division n'interprètent pas correctement le résultat et proposent « 31 reste 12 », « 31,33 » ou « 31 ».

Par la suite, de nombreuses études se sont attachées à étudier de manière assez systématique ce phénomène de « perte de sens » ou de « suspension de construction de sens ». Plus précisément, ces études ont tenté de voir si les élèves utilisaient leurs connaissances de la vie réelle pour résoudre des problèmes de mathématiques. Les deux études pionnières dans ce domaine sont celles réalisées par Greer (1993) en Irlande du Nord et par Verschaffel, De Corte & Lasure (1994) en Communauté flamande de Belgique. Elles ont été reproduites dans de nombreux pays et aboutissent toujours à des résultats assez similaires (voir Verschaffel, Greer & De Corte, 2000 pour une revue de la littérature). Dans l'étude de Verschaffel *et al.* (1994), menée dans 3 classes de 5^{e} année primaire (75 élèves), un test papier-crayon composé de 10 paires de problèmes a été proposé aux élèves. Chaque paire d'items était composée d'un problème standard (qui pouvait être résolu par l'application directe d'une opération) et d'un problème problématique pour lequel la simple application d'une opération posait question à partir du moment où on évoquait des connaissances réalistes liées à la situation. Le tableau suivant présente quelques paires de problèmes proposées et des exemples de réponses réalistes pour les problèmes problématiques. On note également le pourcentage de réponses réalistes fournies pour chacun de ces problèmes.

Tableau 3 : Problèmes standards et problèmes problématiques (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000)

Problèmes standards	**Problèmes problématiques** RR = réponses faisant appel à des considérations réalistes	
Steve a acheté 5 planches de 2 m chacune. Combien de planches de 1 m peut-il faire à partir de ces planches ?	**Les planches** Steve a acheté 4 planches de 2,5 m chacune. Combien de planches de 1 m peut-il faire à partir de ces planches ?	**RR : 14%** - *Ex. Steve peut faire 2 planches d'un mètre au départ d'une planche de 2,5 m ➔ il peut donc faire 8 planches (2x4=8)*
Un bateau navigue à une vitesse moyenne de 45 km/h. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 180 km ?	**Le coureur** John court le 100 m en 15 secondes. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir un km ?	**RR : 3%** - *Ex. certainement plus de 150 secondes*
Un marchand a deux containers de pommes. Le premier container contient 60 pommes et le deuxième 90 pommes. Il met toutes les pommes dans un nouveau container qui est plus grand. Combien de pommes y a-t-il dans le nouveau container ?	**L'eau** Quelle sera la température de l'eau d'un container si vous versez dedans un litre d'eau à 80 degrés et un litre d'eau à 40 degrés.	**RR : 17%** - *Ex. 40+80=120 et 120 :2=60 OU je ne sais pas exactement mais ce sera entre 40 et 80 degrés.*
Christophe fait une balade. Il marche 8 km durant la matinée et 15 km durant l'après-midi. Combien de km a-t-il marché en tout ?	**L'école** Bruce et Alice vont à la même école. Bruce habite à 17 km de l'école et Alice à 8 km de l'école. Quelle est la distance entre la maison de Bruce et la maison d'Alice.	**RR : 5%** - *Ex. La réponse doit se situer entre 9 et 25 km.*

Les résultats issus des diverses recherches menées dans ce domaine montrent que les élèves ont tendance à « appliquer envers et contre tout » des opérations mathématiques en vue de fournir des réponses numériques précises à tous les problèmes qui leur sont proposés. Tout se passe comme s'ils excluaient totalement leurs connaissances de la vie réelle pour résoudre les problèmes proposés en classe. Pourquoi agissent-ils ainsi ?

Selon Verschaffel *et al.* (2000), la croyance des élèves selon laquelle les problèmes sont sans lien avec la réalité ne peut pas être considérée isolément. Elle fait partie d'un système de connaissances et de croyances plus général concernant les problèmes, la manière dont ils sont structurés et formulés et concernant le rôle qu'ils jouent dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école. Les auteurs ont introduit le terme de « *word problem schemata* » (schéma de résolution de problèmes) pour faire référence à ce système de croyances. Le *word problem schemata* comprend les connaissances et les croyances à propos de différents aspects de la résolution de problèmes tels que le but et le rôle des problèmes, la structure typique des problèmes et un certain nombre de règles implicites, de présupposés et d'accords inhérents au « jeu » de la résolution de problèmes. Verschaffel *et al.* (2000) ont ainsi dressé une liste de présupposés dont disposeraient les élèves et qui seraient susceptibles d'orienter la façon dont ils font face aux situations problématiques qui leur sont proposées. Quelques présupposés sont listés en guise d'exemple dans le tableau suivant.

Tableau 4 : Quelques exemples de présupposés partagés par les élèves face à la résolution de problèmes (Verschaffe, Greer & De Corte, 2000)

Supposer que tous les problèmes proposés sont corrects, complets et qu'ils ont du sens (puisqu'ils sont déterminés tels quels par l'autorité en place).
Supposer qu'il n'y a qu'une seule réponse correcte pour chaque problème et qu'elle doit se présenter sous une forme numérique et précise.
Supposer que cette réponse unique, précise et numérique peut être et doit être obtenue en mettant en œuvre une ou plusieurs opérations arithmétiques ou formules au départ des nombres proposés dans l'énoncé et certainement avec tous les nombres.
Supposer que la tâche peut être effectuée au départ des connaissances mathématiques dont dispose l'étudiant – c'est-à-dire, dans la plupart des cas, en appliquant les concepts mathématiques, les formules, les algorithmes,… qui viennent d'être appris récemment dans les leçons de mathématiques.
Supposer que la solution finale (et même généralement les résultats intermédiaires) doit (doivent) contenir des nombres « propres » (c'est-à-dire des nombres entiers).
Supposer que le problème contient en lui-même toutes les informations nécessaires pour l'interpréter et le résoudre correctement et qu'aucune information extérieure ne doit être prise en considération. Le problème ne doit pas être altéré par l'importation d'informations contextuelles pertinentes qui ne sont pas spécifiées telles quelles dans l'énoncé et qui risquent de compliquer les intentions initiales relatives au modèle mathématique impliqué.
Supposer que les personnes, les objets, les endroits, les prix, etc. sont différents dans les problèmes scolaires et dans la vie réelle ; il ne faut pas (trop) se tracasser si les connaissances ou intuitions personnelles dont on dispose concernant la vie de tous les jours sont parfois « violées » dans les problèmes décrits.

La notion de *word problem schemata* peut être reliée à la notion de contrat didactique définie par Brousseau (1990), à la notion de notion de contrat expérimental définie par Greer (1993) et aux concepts bien connus de curriculum caché ou latent. Une rupture des « contrats » ou des « règles du jeu » peut en partie expliquer les résultats de « suspension de construction de sens ». Il semblerait que le *word problem schemata* se construise progressivement lorsque l'élève « vit » au sein de l'école. Cette idée peut être rapprochée du concept d'enculturation défini notamment par Schoenfeld (1992) qui s'est très largement intéressé aux croyances développées par les élèves dans le domaine des mathématiques. Cette enculturation semblerait être principalement due à deux aspects de la culture et de la pratique de la classe au sein de laquelle l'élève apprend à résoudre des problèmes : la nature appauvrie et stéréotypée des problèmes rencontrés traditionnellement en classe, d'une part, et la manière dont ces problèmes sont considérés et traités par les enseignants, d'autre part (Verschaffel *et al.*, 2000).

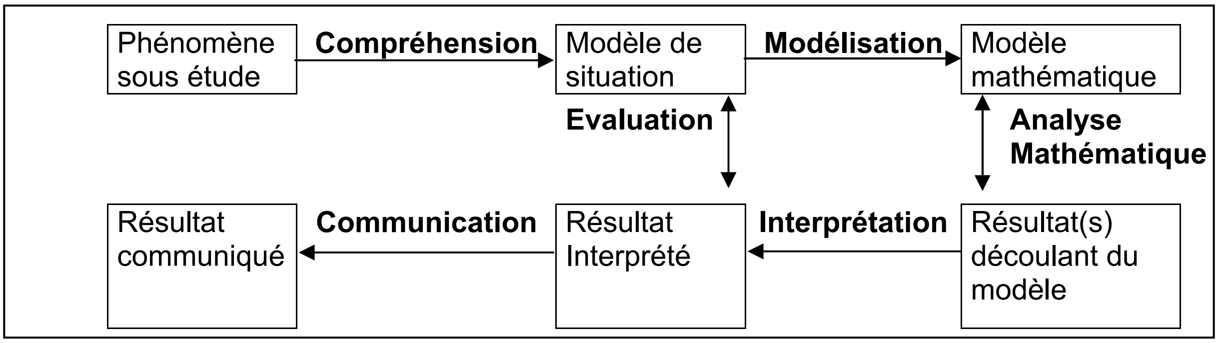
Une analyse des manuels et des pratiques courantes d'enseignement a conduit Verschaffel *et al.* (2000) à une vision assez critique des problèmes généralement rencontrés dans les classes. Ils notent tout d'abord que, durant les premières années d'école, les élèves sont majoritairement confrontés à des problèmes qui peuvent être directement résolus par l'application d'une des quatre opérations arithmétiques de base au départ des nombres proposés dans l'énoncé. Ceci renforce la croyance selon laquelle tous les problèmes peuvent être résolus de cette manière. Par ailleurs, les problèmes sont souvent présentés de manière à rendre efficaces les stratégies superficielles et routinières : très peu de problèmes incluent des données superflues, imprécises ou manquantes et résoudre un problème revient souvent à faire quelque chose avec tous les nombres de l'énoncé. Les auteurs dénoncent également la pauvreté des contextes proposés qui s'avèrent trop souvent manquer d'informations vivantes ou intéressantes. Il en est généralement de même pour la nature des questions posées. Tout cela contribue à ne pas motiver ou stimuler l'enfant à faire attention au contexte et à y apporter un regard critique. Il est plutôt amené à considérer celui-ci comme un habillage peu pertinent et ayant peu d'incidence sur la tâche mathématique à réaliser. Ceci est encore renforcé par le fait que les enfants sont souvent confrontés à des problèmes qui contiennent des données peu réalistes. Des exemples typiques concernent les problèmes de vitesse où des véhicules roulent à des vitesses constantes pendant des heures (quand ce n'est pas des animaux inépuisables,…) ; les problèmes de jardins autour desquels on met une clôture sans laisser de porte d'entrée, un enfant lisant les pages d'un livre à une cadence inaltérable,… Les élèves apprennent donc qu'il y a un fossé entre les problèmes scolaires et le monde réel. Par ailleurs, les problèmes qui requièrent une estimation plutôt qu'une solution précise sont extrêmement rares. Ceci renforce l'idée selon laquelle la solution doit être un nombre précis et que les autres types de réponses (réponses conditionnelles, approximations, intervalles,…) sont des réponses moins valides, voire complètement illégitimes. De même, les problèmes indéterminés, équivoques ou impossibles à résoudre sont quasi inexistants. Comme les enfants ne sont pas confrontés à des problèmes qui permettent des interprétations multiples, des modèles de situation alternatifs, des chemins de résolutions divergents, des solutions variées,… ils développent une croyance selon laquelle chaque problème a une seule interprétation, une seule méthode de résolution et une seule solution. Enfin, les situations qui requièrent de formuler des problèmes, de structurer des problèmes similaires ou différents, de trier des problèmes en fonction de diverses caractéristiques,… sont également trop peu présentes. Ceci est très différent du monde réel dans lequel identifier, définir et formuler les problèmes sont des tâches qui jouent un rôle essentiel dans le processus de résolution.

Toujours selon Verschaffel *et al.* (2000), le deuxième volet responsable du développement de présupposés se situerait au niveau de la culture de classe où l'enseignement et l'évaluation seraient trop souvent centrés sur le produit (le résultat final) et où trop peu d'attention serait accordée au processus lui-même (la démarche de résolution). On considère généralement la résolution de problèmes dans sa fonction d'application (faire un calcul) alors qu'il s'agit en fait d'un processus complexe de modélisation dans lequel la construction de la représentation joue un rôle crucial. De plus, l'apprentissage de la formalisation mathématique ne serait pas suffisamment ancré dans les stratégies informelles et spontanées des élèves (approche généralement *top-down*, au détriment d'approches *bottom-up* qui se voudraient davantage porteuses de sens).

2.3.2. Vers le développement de démarches expertes de résolution de problèmes

A l'heure actuelle, il est généralement admis de considérer la résolution de problèmes comme un processus complexe de modélisation mathématique. Le schéma suivant (traduit du schéma proposé par Verschaffel *et al.*, 2000) illustre une démarche experte de résolution de problèmes (*the mathematical modelling process*). La démarche doit être considérée comme cyclique, plutôt que comme une progression linéaire conduisant des données au but.

Figure 1 : La résolution de problèmes conçue comme un processus complexe de modélisation mathématique (Verschaffel *et al.*, 2000)



Le point de départ est le phénomène sous étude. Il correspond à la description de certains aspects de la réalité, considérés comme potentiellement capables d'être soumis à une analyse mathématique. La première étape implique la compréhension de la situation décrite et la construction d'un modèle de situation. La construction de ce modèle peut être médiatisée par des représentations externes, mettant en évidence les variables importantes dans la situation, ainsi que les relations temporelles et causales entre ces variables. La deuxième étape (la modélisation) consiste à transformer le modèle de situation en un modèle mathématique. Pour ce faire, il convient d'identifier les éléments importants et les relations clés et d'exprimer tout cela sous une forme mathématique. La troisième étape consiste à appliquer une analyse mathématique au modèle mathématique. La disponibilité des ressources joue alors un rôle important, tant pour l'analyse elle-même que pour une anticipation des résultats découlant du modèle. La quatrième étape consiste alors à interpréter la ou les solution(s) en relation avec le modèle de situation. Plusieurs modèles alternatifs peuvent encore être comparés à cette étape. Les résultats interprétés doivent encore être évalués en fonction du modèle de situation : la solution obtenue a-t-elle du sens ? Si ce n'est pas le cas, le modèle de situation peut être soumis à une nouvelle analyse et le processus cyclique peut redémarrer… Une fois la solution trouvée, interprétée, évaluée et acceptée, la dernière étape consiste alors à communiquer la solution en fonction des requêtes de la tâche.

Les démarches superficielles mentionnées précédemment consistent généralement à négliger une ou plusieurs étapes de cette démarche, généralement les étapes de compréhension, d'interprétation et/ou d'évaluation. Un enjeu important de l'enseignement serait donc d'essayer d'amener les élèves à développer des démarches expertes et réflexives de résolution de problèmes, consistant en quelque sorte à mettre en œuvre un tel processus de modélisation mathématique. C'est dans cette optique que l'équipe de chercheurs de la KUL a développé plusieurs études interventionnistes (Verschaffel & De Corte, 1997b ; Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts & Ratinckx, 1999). A titre illustratif, la seconde étude est brièvement décrite ci-dessous.

L'étude développée par Verschaffel *et al.* (1999) a conduit à mettre en place un environnement éducatif dont les buts visés peuvent être synthétisés selon deux pôles : d'une part, faire acquérir aux élèves une stratégie générale permettant de résoudre des problèmes d'application et, d'autre part, faire acquérir aux élèves un ensemble de croyances et d'attitudes positives vis-à-vis de la résolution de problèmes, de l'apprentissage et de l'enseignement de cette discipline.

La stratégie générale de résolution de problèmes que l'enseignement visait à faire acquérir aux élèves était constituée de cinq étapes impliquant un ensemble de huit heuristiques particulièrement utiles pour les deux premières étapes de la démarche.

Figure 2 : Une démarche de résolution de problèmes en cinq étapes (Verschaffel *et al.*, 1999)

1. Etape 1 :	Construire une représentation du problème	
	Heuristiques :	Faire un dessin
		Faire une liste, un schéma, un tableau
		Distinguer les données pertinentes et non pertinentes
		Utiliser ses connaissances de la vie réelle
2. Etape 2 :	Décider comment résoudre le problème	
	Heuristiques :	Faire un graphe fléché
		Procéder par essai-erreur
		Rechercher de régularités
		Simplifier les nombres
3. Etape 3 :	Exécuter les calculs nécessaires	
4. Etape 4 :	Interpréter le résultat et formuler une réponse	
5. Etape 5 :	Evaluer la solution	

C'est au travers des caractéristiques de l'environnement éducatif que les auteurs visent à rencontrer l'objectif de faire acquérir aux élèves un ensemble de croyances et d'attitudes positives face à la résolution de problèmes, à l'apprentissage et à l'enseignement de cette discipline. Les caractéristiques principales de l'environnement éducatif peuvent se décliner en trois points essentiels.

Tout d'abord, il s'agissait de proposer aux élèves un ensemble de problèmes variés et soigneusement choisis pour être complexes, réalistes, constituant des défis abordables et présentant une certaine ouverture, comme par exemple celle d'engendrer plusieurs solutions. Ces problèmes devaient permettre la mise en œuvre des heuristiques définies ci-avant ; ils devaient aussi favoriser la métacognition. Certains problèmes étaient proposés dans un format exclusivement textuel, d'autres sous forme d'une histoire racontée par l'enseignant, d'un article de journal, d'une brochure, d'une bande dessinée, d'un tableau… ou d'une combinaison de ces différents formats.

Le deuxième aspect central consistait à proposer une série de plans de leçons précisant les activités d'enseignement et d'apprentissage. La plupart de ces plans de leçons consistaient à proposer une alternance de travaux de groupes ou individuels et de discussions en groupe-classe. Le rôle des enseignants était d'encourager et de soutenir les élèves de façon à ce qu'ils s'engagent dans les types d'activités cognitives et métacognitives impliquées dans le modèle d'une approche compétente de résolution de problèmes (cf. démarche en 5 étapes décrite à ci-avant). Les encouragements et les soutiens devaient diminuer progressivement de façon à ce que les élèves deviennent pleinement responsables de leur activité d'apprentissage et de résolution de problèmes.

Le troisième aspect essentiel concerne des interventions visant explicitement à l'établissement d'une nouvelle norme socio-mathématique ; c'est-à-dire d'un climat de classe qui doit conduire les élèves à développer des croyances adéquates à propos des mathématiques. Ces normes avaient trait à divers aspects : (a) la définition du rôle de l'enseignant et des élèves en classe (ex. : ne pas attendre de l'enseignant qu'il atteste de l'adéquation de la démarche ou de la solution ; ces décisions doivent être prise par le groupe classe sur la base de discussions, de confrontation de démarches, d'argumentations,…) ; (b) la définition de ce qui constitue un bon problème (ex. : beaucoup de problèmes peuvent être interprétés et résolus de plusieurs façons) ; (c) la définition de ce qui constitue une bonne solution (ex. : parfois une estimation est une meilleure solution qu'un nombre exact) ; (d) la définition de ce qui constitue une bonne procédure de résolution (ex. : la démarche d'un expert ne consiste pas toujours en une suite de calculs, parfois un croquis ou un diagramme peuvent s'avérer être des outils plus efficaces).

L'expérience a duré environ 3 mois à raison de deux séquences d'enseignement par semaine. Chaque séquence avait une durée de 1h à 1h30 et était préparée par l'équipe de recherche, en collaboration avec les enseignants. Plusieurs séquences visaient explicitement l'acquisition systématique de la stratégie de résolution en cinq étapes et des heuristiques associées (voir figure 2 présentée ci-avant). Par la suite, au travers de problèmes plus complexes, les séquences d'enseignement visaient à apprendre aux élèves à utiliser le modèle d'une approche compétente de résolution de problèmes de façon spontanée et flexible.

Suite à la mise en œuvre d'un schéma expérimental classique (prétest / post-test / test de rétention), les résultats obtenus par les auteurs permettent de conclure que l'environnement d'apprentissage a un effet positif significatif sur le développement des performances de résolution de problèmes des élèves ; effet qui ne disparaît pas dès la fin des séances (cf. test de rétention). De plus, des effets significativement positifs ont été observés sur la maîtrise des heuristiques et des stratégies métacognitives ainsi que sur les croyances et les attitudes des élèves concernant la résolution de problèmes. Les auteurs stipulent néanmoins qu'il convient de nuancer les résultats dans la mesure où les effets observés ne sont pas très grands à l'exception de ce qui concerne l'utilisation des heuristiques où l'effet de l'enseignement est très marqué. Bien que tous les élèves aient progressé (les plus « faibles », comme les plus « forts »), le programme mis en place ne permet pas de réduire les écarts de départ entre les élèves. Les auteurs concluent donc qu'il reste encore du travail pour améliorer le dispositif…

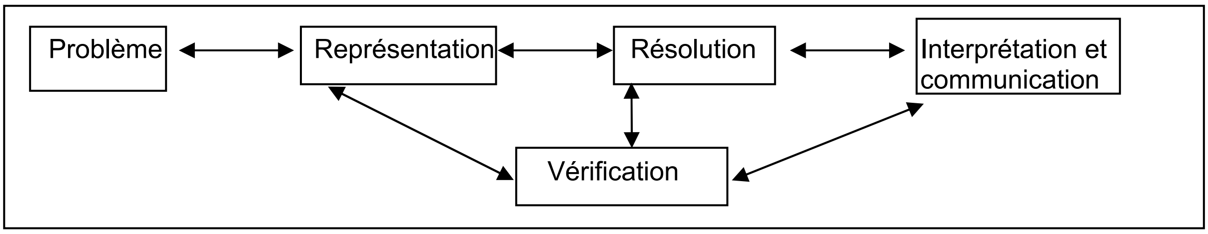
3. La construction d'outils didactiques

Les différents courants théoriques synthétisés dans les pages qui précèdent ont fortement influencé les travaux développés par notre équipe de recherche. Pour donner un aperçu du travail mené et des activités développées, nous avons choisi de procéder en deux étapes. Le premier point permet de dresser les grandes lignes de la philosophie qui sous-tend le travail de construction des outils didactiques et le deuxième s'attache à donner quelques exemples d'activités.

3.1. Les principes directeurs à la base de la construction des outils

Le modèle de *mathematical modeling* développé par Verschaffel *et al.* (2000) a fortement inspiré l'approche que nous avons développée. Nous avons toutefois décidé d'utiliser un modèle simplifié, tel que présenté dans le schéma ci-dessous.

Figure 3 : Modèle illustrant les différentes étapes de la résolution de problèmes



Pour donner un aperçu général de notre approche, deux point sont brièvement présentés ci-dessous : le premier explicite quelques caractéristiques des situations-problèmes proposées ; le deuxième tente de synthétiser les grands axes méthodologiques.

a) Comment caractériser les types de problèmes proposés ?

Les situations abordées dans les outils méthodologiques développés par notre équipe sont principalement des problèmes arithmétiques. Très souvent, le problème se présente sous la forme d'un petit texte qui décrit la situation. Les contraintes et les données sont généralement exprimées par des nombres. Quant au but de la tâche à réaliser, il se trouve souvent exprimé dans la (ou les) question(s). Les contenus mathématiques impliqués relèvent de domaines variés : calculs de coûts, calculs de longueurs et de distances, solides et figures, traitement de données... De façon à créer des ponts entre les mathématiques abordées à l'école et la vie réelle, la plupart des problèmes proposés veillent à présenter un caractère réaliste important. On évite ainsi d'amener les élèves à penser que leurs connaissances de la vie de tous les jours ne leur sont d'aucune utilité en mathématiques. A côté de cela, quelques problèmes se placent dans un monde imaginaire (des géants qui mangent des petits pois, des poules qui ont des dents, un restaurant pour sorcières,…) mais on peut alors y distinguer clairement le caractère humoristique ou irréel sous-jacent. Par ailleurs, même si de nombreux problèmes peuvent paraître à première vue relativement « classiques », il convient de les analyser attentivement parce que la plupart présentent certaines particularités qui visent à contrecarrer le développement de démarches superficielles et stéréotypées chez les élèves. Pour le cycle 5-8, on ne part généralement pas d'énoncés proposés de but en blanc aux élèves, mais plutôt de situations plus concrètes ou de jeux mathématiques.

b) Aperçu des grandes orientations méthodologiques

La méthodologie d'enseignement proposée au travers des outils didactiques vise à fournir aux enseignants des outils pratiques ayant un double objectif : développer chez les enfants des compétences propres à chacune des phases du processus de résolution de problèmes et contrecarrer les stratégies superficielles peu compatibles avec la mise en œuvre d'une démarche efficace de résolution.

Une place importante est accordée à l'enseignement des différentes compétences, tout en évitant de les isoler au sein d'activités trop spécifiques. Ainsi, par exemple, dans chacune des séquences, même si l'apprentissage visé se rapporte à l'une des phases du processus, l'enfant est chaque fois amené à résoudre le problème. Cette façon de procéder permet d'intégrer chaque compétence au sein d'une démarche générale de résolution de problèmes. Par ailleurs, les activités amènent également à construire les apprentissages au départ des productions spontanées des enfants. On part de ce que les enfants savent déjà faire et on développe leurs compétences en leur fournissant des outils plus efficaces pour mener à bien chacune des étapes de la résolution de problèmes.

Il ne suffit cependant pas de plonger les enfants dans des situations bien pensées pour que l'apprentissage se déroule sans heurts. En effet, il convient également d'accorder une attention particulière aux présupposés des élèves concernant les mathématiques et la résolution de problèmes. Les présupposés peuvent être conçus comme des « règles » développées par les élèves face aux situations problèmes. Ces « règles » ne sont pas nécessairement erronées *stricto sensu,* mais des généralisations abusives conduisent les élèves à leur donner une portée qui les rend infondées. Autrement dit, si certaines « règles » peuvent s'avérer correctes dans certains contextes spécifiques, elles deviennent incorrectes dans un contexte plus large et peuvent dès lors entraver toute démarche de résolution analytique et réflexive. Ces « règles » deviennent alors des présupposés erronés qu'il s'agira de « désapprendre » parce qu'ils sont vecteurs du développement de démarches superficielles de résolution.

Aux cycles 8-10 et 10-12, la méthodologie consiste à placer les enfants dans des situations qui, au travers de l'apprentissage des compétences visées, déstabilisent leurs représentations erronées, leurs présupposés non fondés et leurs généralisations abusives. Autrement dit, nous avons pris le parti de lutter (de façon implicite) contre ces présupposés en proposant des situations problèmes qui les remettent en cause et en axant la culture de classe sur une prise en compte centrale des démarches. La problématique est légèrement différente au cycle 5-8, dans la mesure où les recherches mettant en évidence l'existence de présupposés chez les élèves concernent généralement les élèves plus âgés (les élèves plus jeunes ne semblant pas nécessairement en être déjà tributaires). Ceci est assez logique dans la mesure où les recherches menées dans ce domaine (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000) expliquent l'émergence des présupposés par le vécu scolaire de l'élève (principalement, la nature stéréotypée des problèmes et la culture de classe mettant l'accent sur le produit). Pour le cycle 5-8, la prise en compte des présupposés est dès lors envisagée dans l'optique *d'éviter leur développement* plutôt que dans celle de les désapprendre. On parlera alors de « *représentations positives à installer* » plutôt que de « présupposés erronés à désapprendre »…

Le schéma présenté ci-après (issus de la brochure pour le cycle 10-12 ans) illustre le développement d'une démarche réflexive de résolution (c'est-à-dire basée sur une réelle analyse du problème). Dans les outils 5-8 et 8-10, les quatre phases de la démarche sont décomposées en différentes compétences qui permettent de développer les aspects qui nous sont apparus essentiels à ce niveau de l'apprentissage. Dans l'outil 10-12, ce sont trois de ces quatre phases qui ont été décomposées, l'étape de vérification est quant à elle abordée de façon transversale au travers de toutes les activités

Figure 4 : Apprentissage et désapprentissage : les deux grands axes de l'approche méthodologique développée aux cycles 8-10 et 10-12

Développement d'une démarche réflexive de résolution

Outil de vérification

Par l'apprentissage INTÉGRÉ des diverses compétences requises

REPRÉSENTATION

- **La construction d'une représentation**
  - Les éléments d'une bonne représentation
  - L'invention d'énoncés
- **Les liens entre les mathématiques et la vie réelle**
  - La précision des problèmes
  - L'estimation de la solution

RÉSOLUTION

- **Les outils d'aide à la résolution**
  - Développer des démarches de type essais-erreurs
  - Décomposer le problème en sous-problèmes
  - Chercher des régularités
- **Le développement de modèles mathématiques spécifiques**
  - Grandeurs proportionnelles
  - Intervalles
  - Partages inégaux

INTERPRÉTATION ET COMMUNICATION

- **L'interprétation de la situation et de la solution**
  - Interpréter en contexte des situations ouvertes
  - Interpréter en contexte une variété de solutions
- **La communication de la démarche et de la solution**
  - Communiquer sa démarche pour présenter clairement son raisonnement ou pour convaincre de la pertinence de la solution
  - Communiquer la solution des problèmes sous différentes formes

Par le désapprentissage de stratégies superficielles et des présupposés associés

- *Les problèmes de mathématiques n'ont rien à voir avec la vie réelle*
- *Tous les problèmes proposés en classe sont corrects et complets : les problèmes contiennent toutes les informations nécessaires à leur résolution et aucune information extérieure ne doit être prise en compte*
- *Résoudre un problème se limite à faire des calculs (par exemple, appliquer la dernière règle apprise en classe)*
- *Tous les problèmes rencontrés en classe doivent se résoudre rapidement en effectuant une ou deux opérations*
- *Des problèmes évoquant des contextes différents n'ont aucun point commun et ne peuvent donc pas être résolus de la même façon*
- *Tout problème a une solution*
- *En mathématiques, les règles et les formules n'ont aucun sens (il faut les retenir par cœur, c'est impossible de les réinventer)*
- *Tous les problèmes d'agrandissement se résolvent par proportionnalité*
- *Pour résoudre un problème, il faut faire un calcul avec tous les nombres de l'énoncé et uniquement ceux-là*

Outil de vérification

3.2. Quelques exemples d'activités

3.2.1. Un exemple d'activité portant sur l'étape de représentation de la situation

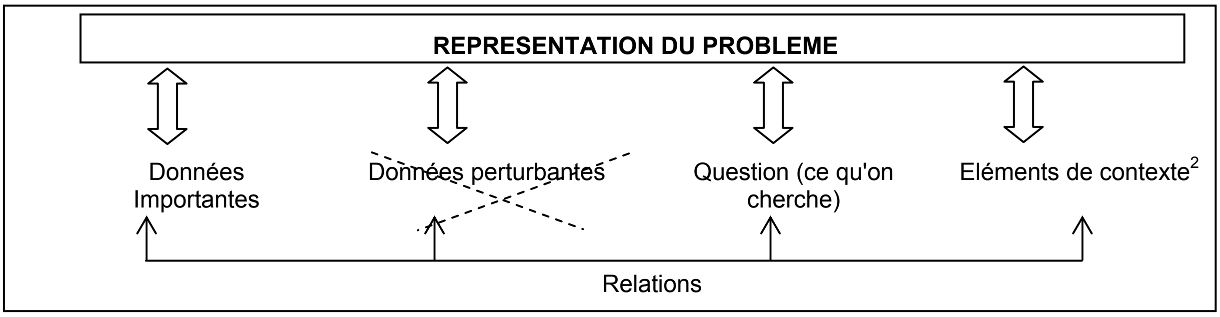
La brochure pour le cycle 5-8 met l'accent sur le développement d'activités permettant d'aborder cette étape cruciale de différentes façons : en jouant l'histoire concrètement ou avec du matériel manipulable, en représentant la situation à l'aide de collages ou de dessins, en formulant des énoncés et en inventant des problèmes. Au 8-10, l'accent a été mis sur la construction de représentations dessinées et sur la reformulation écrite des problèmes, ce qui peut être perçu comme une suite du travail par dessins et collages d'une part et comme un prolongement de la formulation orale d'énoncés d'autre part. Au 10-12, une séquence d'activités se centre encore sur la construction de représentations appropriées, en proposant cette fois de procéder par dessins, schémas, tableaux ou reformulations… selon ce qui s'avère le plus pertinent face aux problèmes proposés.

Par ailleurs, on a vu dans les pages qui précèdent que l'estimation et la vérification pouvaient constituer les deux versants d'un même processus reliant la représentation et la solution. Au cycle 5-8, cet aspect a été développé en lien avec l'étape de vérification ; au 10-12 on trouve une activité de ce type au niveau de l'étape de représentation.

Les **activités centrées sur la construction d'une représentation dessinée** se retrouvent donc dans les trois outils didactiques que nous avons développés. Au cycle 5-8, cette activité s'appuie sur la typologie de problèmes issue de la classification de Riley *et al.* (1983, complétée par une classification proposée par Vergnaud, 1983 pour les problèmes multiplicatifs).

Ces activités visent à amener les élèves à concrétiser et à extérioriser cette étape centrale de la démarche de résolution. Confrontés à un problème face auxquels ils éprouvent des difficultés, les élèves sont invités à réaliser un dessin (un schéma, une reformulation,…) qui permet de mieux comprendre le problème et d'aider ainsi à sa résolution. Tout l'enjeu de cette séquence repose dans l'exploitation qui sera faite des productions réalisées par les enfants. En effet, l'objectif est de les amener à symboliser la compréhension qu'ils ont construite du problème, puis à utiliser ces premières productions comme objet de discussions en vue de les préciser et de les compléter de façon à ce qu'elles soient plus opérationnelles et plus efficaces dans la démarche de résolution, tout en restant le produit de l'activité des élèves. Il convient donc d'exploiter les productions des enfants pour les faire évoluer, et non de leur fournir un modèle de ce qui constituerait une bonne représentation qu'ils n'auraient plus qu'à reproduire… Pour éviter de tomber dans le « modèle », qui est souvent le fruit d'une correction collective où un élève qui a « réussi » présente son produit aux autres, les séquences d'activités proposent d'exploiter plusieurs productions incomplètes ou incorrectes en orientant les débats sur les éléments importants d'une bonne représentation. Cette façon de procéder permet alors à chaque élève de retravailler sa propre ébauche de représentation, en vue de la compléter et de la rendre plus opérationnelle (c'est-à-dire, qu'elle aide réellement à résoudre le problème). Les éléments essentiels d'une bonne représentation sont repris dans le schéma ci-dessous. Il convient de synthétiser ces éléments avec les élèves (et ceci, quelle que soit la forme que prend la synthèse) de façon à ce qu'ils puissent réinvestir la démarche « construire une représentation » dans d'autres problèmes. Cette compétence ne s'acquiert pas d'emblée ; elle nécessite un apprentissage dans une variété de situations problèmes.

Figure 5 : Les éléments importants de la représentation d'un problème



Pour aider les enseignants à gérer les moments d'exploitation, l'équipe de recherche a réalisé de nombreuses analyses de productions d'élèves en vue de dresser des typologies de dessins qui ont pour but d'orienter les choix des productions à exploiter collectivement. Il est en effet important de bien choisir les productions pour éviter de donner l'image d'un MODELE et pour tenter d'orienter la discussion vers les éléments importants d'une bonne représentation.

L'analyse des productions d'élèves a permis de dégager 5 grandes catégories de dessins :

- Certains enfants réalisent un <u>dessin de la situation</u> : si on parle d'un magasin de jouets, ils vont représenter celui-ci. La plupart du temps, ces dessins ne comportent pas de données numériques et ne sont d'aucune utilité pour aider à résoudre le problème.

[2] Les éléments de contexte ne sont pas indispensables, mais les élèves ressentent généralement le besoin (ou l'envie) d'en indiquer quelques-uns. C'est intéressant dans la mesure où cela permet de conserver une forme de lien avec la réalité et ainsi de donner du sens à la solution obtenue.

- Un autre type de dessin consiste à dessiner la solution ou le calcul. Ces dessins sont souvent proposés par des enfants qui ont pu résoudre le problème mais qui ne parviennent pas à dessiner la situation (ou n'en voient pas l'intérêt). Ces dessins ne sont en soi d'aucune utilité pour aider à comprendre la situation ; ils sont peu utiles en phase d'exploitation collective puisqu'ils n'aideront probablement pas le groupe-classe à mieux comprendre la situation.
- D'autres enfants proposent des dessins comportant certaines données numériques ou certaines relations mais pas toutes. Ces dessins ne permettent pas non plus de résoudre le problème mais ils apportent cependant des éléments importants qui peuvent aider à le résoudre. Ces dessins sont intéressants pour les phases d'exploitation.
- Certains enfants proposent également des dessins incorrects, traduisant souvent une mauvaise compréhension des relations impliquées. Ce type de représentation risque de conduire à une résolution erronée du problème. Il est également intéressant d'utiliser des dessins de ce type pour l'exploitation collective.
- Un dernier type de dessin est le dessin complet et correct. Ce dessin correspond à une représentation du problème qui aide à résoudre celui-ci. Il comporte des informations de contexte, les données nécessaires, les relations entre ces données et soit l'indication de l'inconnue à trouver (par un " ? " par exemple) soit la réponse au problème. Idéalement, la représentation de la situation ne devrait pas contenir la solution du problème (puisque celle-ci n'est pas proposée dans l'énoncé mais seulement obtenue après la résolution proprement dite). Les observations des activités en classe et les analyses de productions d'élèves ont toutefois amené à constater que bon nombre d'élèves avaient tendance à représenter la solution sur le dessin, et ceci, de manière à obtenir une situation tout à fait complète. Si on utilise ces types de dessins lors des phases d'exploitation, il convient d'en analyser plusieurs, de s'assurer qu'ils sont suffisamment différents et de veiller à bien axer le débat sur les éléments importants. Attention en effet de ne pas donner l'image d'un modèle à reproduire !

Lorsque les dessins sélectionnés ont été exploités collectivement, il est important d'inviter les élèves à reprendre leur propre production et à la compléter, de façon à ce qu'y figure l'ensemble des éléments importants du problème. L'activité doit bien entendu être reproduite plusieurs fois, avec des problèmes variés, pour permettre aux élèves d'intégrer progressivement l'idée « d'éléments importants » et pour que chacun puisse s'approprier cet outil d'aide à la résolution de problèmes.

3.2.2. Deux exemples d'activités portant sur l'étape de résolution proprement dite

L'étape de résolution proprement dite des problèmes se caractérise par une volonté de mettre l'accent sur la variété des démarches de résolution (et éventuellement sur la variété des solutions possibles). Au cycle 5-8, on s'intéresse à l'analyse des démarches et au développement de démarches variées. Au 8-10, en plus d'activités visant le développement de démarches et de solutions diversifiées, une activité s'intéresse aux liens entre la représentation et la résolution et une autre met l'accent sur la variété des calculs qui peuvent être proposés face à un problème. Au 10-12, on trouve encore un autre éventail d'activités puisque l'on s'intéresse non seulement à des outils généraux de résolution de problèmes (tels que par exemple le développement de démarches de type essais-erreurs et la décomposition en sous-problèmes), mais également à des outils spécifiques directement liés à certains contenus mathématiques comme la proportionnalité, les partages inégaux et les intervalles.

En ce qui concerne les outils généraux, le développement de démarches de type essais-erreurs est proposé pour les trois cycles et c'est donc une activité de ce type que nous avons choisi d'évoquer ici. Par la suite, un bref aperçu de la séquence sur les intervalles permettra d'illustrer les activités du cycle 10-12 portant sur des contenus mathématiques spécifiques.

a) Le développement de démarches de type essais-erreurs

Les séquences d'activités qui visent à développer des démarches de type essais-erreurs confrontent les élèves à des problèmes « ouverts » pour lesquels un travail de recherche créative (mise à l'épreuve d'hypothèses, essai de démarches peu formalisées, de tâtonnements, dessins...) est indispensable. Face à ce type de tâche, il faut éviter que les élèves ne se trouvent complètement « bloqués ». S'ils ne savent pas comment chercher, les enfants risquent de se décourager et d'abandonner. Dans la gestion des situations, deux pistes sont proposées pour aider les enfants : des propositions de réponses à valider et des indices qui attirent l'attention sur des éléments importants des problèmes. Les énoncés requérant des réponses assez simples, mais difficiles à trouver, les solutions peuvent être facilement comprises par les enfants. Leur proposer des réponses fictives et leur demander de dire si elles sont correctes permet de mettre en évidence les contraintes de la situation et de focaliser l'attention sur les éléments importants du problème, sans pour autant guider vers une démarche de résolution. L'autre type d'aide est constitué d'indices qui ont été établis sur la base des essais réalisés dans les classes et qui attirent l'attention des enfants sur les éléments importants de la situation. Après un temps de recherche individuel, le recours à ces indices peut permettre de donner des idées qui « débloqueront » la situation. Au cycle 5-8, un troisième type d'aide est également proposé : la possibilité d'utiliser du matériel concret et manipulable pour vérifier la solution et/ou pour appuyer le raisonnement et la démarche de résolution.

Dans le présent article, nous avons pris l'option d'illustrer ce type d'activité au départ d'un problème issu des Rallyes Mathématiques Transalpins et proposé au cycle 8-10 ans.

Figure 6 : Exemple de problème et d'indices fournis pour aider les élèves dans une séquence d'activité visant à développer les démarches de type essais-erreurs

Chameaux et dromadaires
Cléopâtre a dessiné des chameaux et des dromadaires, cela fait 19 bosses et 52 pattes. Elle sait que les chameaux ont deux bosses et que les dromadaires n'en ont qu'une. Puis elle a encore dessiné un homme sur le dos de chaque chameau. Combien a-t-elle dessiné d'hommes en tout ?

Pistes pour aider à débloquer

a) Demander aux élèves de dire pourquoi les propositions sont fausses
- 3 chameaux et 6 dromadaires (ni 52 pattes, ni 19 bosses)
- 10 chameaux et 3 dromadaires (il n'y a pas 19 bosses)
- 9 chameaux et 1 dromadaire (il n'y a pas 52 pattes).

b) Proposer des indices (tirés des réponses des enfants lors des essais réalisés en classe)
- 19 bosses, ce n'est pas nécessairement 19 animaux
- Chaque animal a 4 pattes. Combien y a-t-il d'animaux ?
- Si tous les animaux étaient des dromadaires, il y aurait 13 bosses. Que faire des 6 bosses qui restent ?
- Dessine les pattes puis répartis les bosses.

Une des richesses importantes de ce type d'activités est d'engendrer une variété de démarches de résolutions. Il est donc essentiel de permettre aux élèves de développer des démarches variées et originales et il est important de les confronter entre elles. En vue d'aider les enseignants à interpréter les démarches des élèves, une série de démarches correctes est proposée pour chaque problème (mais la liste n'est bien entendu jamais exhaustive).

Figure 7 : Exemples de démarches de résolution développées face au problème « chameaux et dromadaires »t

Quelques démarches correctes…

a) En utilisant un tableau

Réaliser un tableau reprenant le nombre de bosses des chameaux et des dromadaires /// Calculer le nombre d'animaux : 52 : 4 = 13 /// Répartir les 19 bosses dans les deux colonnes /// Compter le nombre d'animaux /// Il y a 13 animaux, donc c'est juste. Il y aura donc 6 hommes.

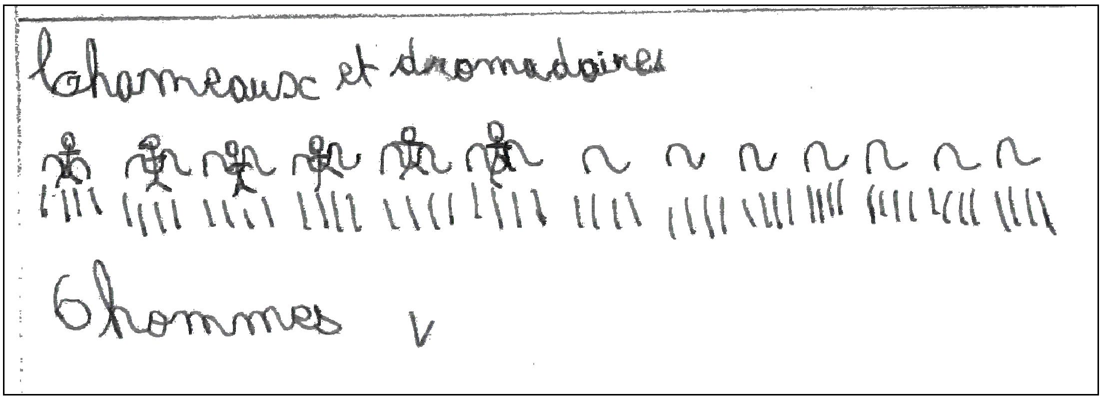
Chameaux	Dromadaires
2	1
2	1
2	1
2	1
2	1
2	1
	1

b) Par essais-erreurs

52 pattes et 4 pattes par animal, cela fait 13 animaux en tout /// S'il y avait 8 chameaux et 5 dromadaires : (8 x 2) + 5 = 21 /// S'il y avait 6 chameaux et 7 dromadaires : (6 x 2) + 7 = 19.

c) Par dessin

Dessiner les 52 pattes par groupes de 4 et dessiner une bosse par animal /// Il reste 6 bosses à placer, donc il faut ajouter 1 bosse à 6 animaux, donc il y aura 6 chameaux et donc 6 hommes



b) Les outils spécifiques de résolution de problèmes : une séquence sur les problèmes d'intervalles

Certains problèmes mettent en œuvre des modèles mathématiques particuliers : un tableau peut aider à résoudre un problème de proportionnalité, un schéma en bandelettes permet d'analyser efficacement un problème de partages inégaux, des formules pourront être utilisées pour résoudre un problème impliquant les notions de prix d'achat, prix de vente, bénéfice, etc. L'intérêt majeur de ces modèles est qu'ils permettent de faire face à un nombre important de situations présentant une même structure mathématique. Afin de pouvoir être utilisés dans une multitude de contextes, il paraît dès lors inévitable que ces supports soient exprimés dans un langage en partie formel et décontextualisé. Amener les élèves à construire progressivement les supports constitue une démarche méthodologique intéressante à plusieurs niveaux : tout d'abord, les élèves sont directement plongés dans de véritables situations défis où ils ont l'occasion de mettre en œuvre des démarches variées de résolution et de se rendre compte des limites de leurs stratégies « spontanées » ; ensuite, à travers l'analyse de différents problèmes, ils rentrent eux-mêmes au cœur du processus de généralisation et peuvent sans doute mieux comprendre la portée des formules ; enfin, si on élabore les supports dans des contextes variés, on peut espérer que les élèves auront moins de difficultés à reconnaître les situations où ces supports pourront être mis en œuvre.

Dans la séquence sur les intervalles, on propose tout d'abord aux élèves une série de problèmes qui les conduit à mettre en échec une démarche superficielle liée au présupposé erroné selon lequel « pour résoudre un problème, il suffit de faire un calcul avec les nombres de l'énoncé ». Une série de problèmes impliquant les mêmes nombres mais conduisant à des solutions différentes est tout d'abord proposée aux élèves.

Figure 8 : Exemple de série de problèmes proposée aux élèves dans la séquence sur les intervalles

Problème 1
Eric doit vendre des billets de tombola pour la fête de l'école. Lorsqu'il commence à travailler, le premier numéro indiqué sur le carnet est le numéro 27. Il décide de faire du porte-à-porte dans sa rue afin de vendre des billets. Il termine sa tournée par ses voisins et leur vend le billet portant le numéro 31. Combien de billets de tombola Eric a-t-il vendu en faisant du porte-à-porte aujourd'hui ?

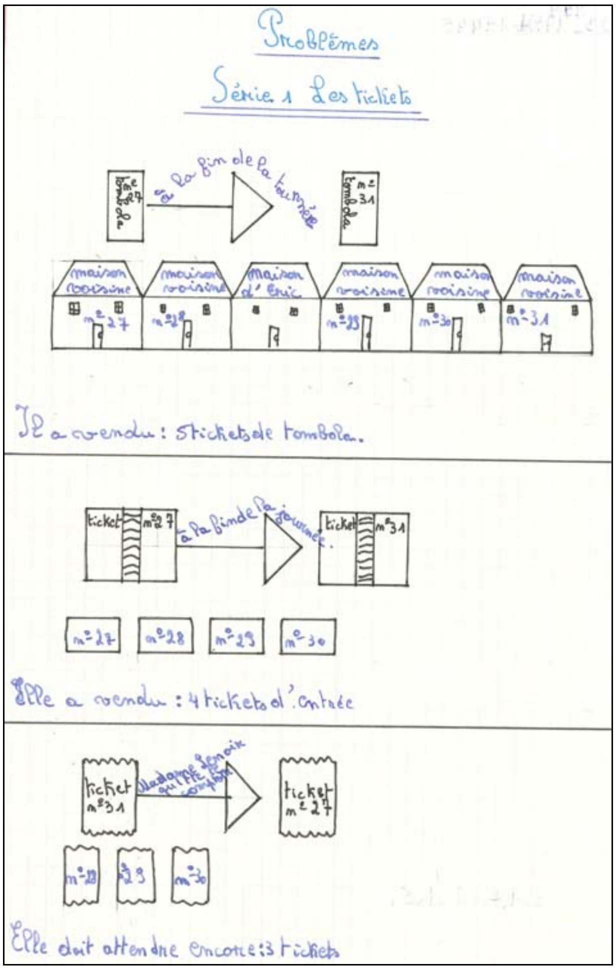
Problème 2
Pascaline travaille dans une piscine le week-end pour gagner un peu d'argent de poche. Elle est responsable de vendre les tickets d'entrée. Lorsqu'elle arrive à son travail, elle note dans un cahier le numéro du premier ticket du rouleau. Aujourd'hui, c'est le numéro 27. Lorsqu'elle repart le soir, elle indique dans le cahier le numéro auquel elle est arrivée. Aujourd'hui, c'est le numéro 31. Combien de tickets d'entrée a-t-elle vendu ?

Problème 3
Madame Frisée va chez le boucher. Elle doit prendre un ticket et attendre son tour. Elle prend le ticket numéro 31 et aperçoit sa voisine, madame Lenoir, qui quitte le comptoir de la boucherie. Elle avait le numéro 27. Madame Frisée se dit qu'elle ne devra pas attendre trop longtemps. Combien de clients devront être servis avant que ce soit le tour de madame Frisée ?

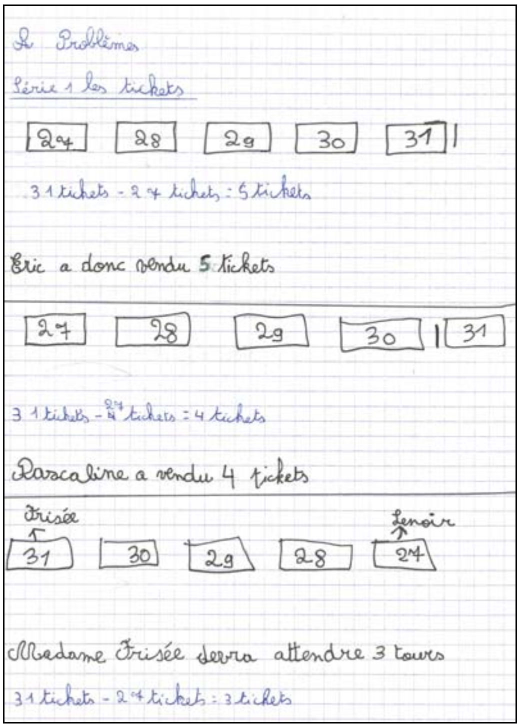
Si on laisse les élèves procéder par calculs sans les mettre en garde face aux « pièges » potentiels, la plupart d'entre eux résolvent les problèmes de manière erronée en appliquant une stratégie superficielle consistant à poser, dans toutes les situations, l'opération « 31-27=4 ». Si l'on incite maintenant les élèves à procéder par dessin, ils recourent volontiers à des stratégies informelles s'appuyant sur le comptage ; ce qui conduit alors généralement à des solutions correctes, comme l'illustre l'exemple de gauche de la figure 9. Attention, ce n'est toutefois pas parce que les élèves ont ainsi pu résoudre le problème qu'ils comprennent les liens entre ces démarches informelles et les opérations mathématiques formelles. Les difficultés éprouvées par nombre d'élèves pour produire un calcul correct sont illustrées dans la partie de droite.

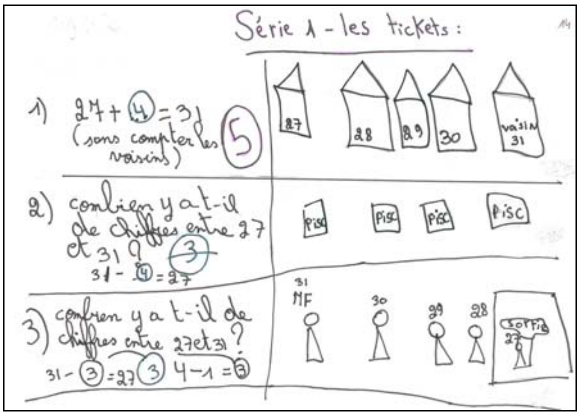
Figure 9 : Exemples de productions d'élèves face à la série de problèmes sur les tickets

Exemples de stratégies de résolution basées sur le dessin et le comptage



Exemples illustrant les difficultés à produire un calcul correct lié à la solution découverte par comptage





Les enfants ne découvrent pas spontanément les règles et formules qui correspondent aux problèmes d'intervalles ; il convient de les y aider. L'enseignant est donc invité à développer une certaine forme d'étayage afin d'amener les élèves à découvrir les régularités et à faire évoluer leurs démarches informelles de résolution. Ceci est nécessaire pour au moins deux raisons : d'une part, il est important de ne pas laisser les élèves devant une incompréhension car, même s'ils ont pu résoudre leur problème par comptage, ils doivent comprendre pourquoi leurs premiers calculs s'avéraient incorrects ; d'autre part, il faut permettre aux élèves d'étendre le champ de leurs démarches de résolution car la compréhension des règles et des formules les aidera face à d'autres problèmes, notamment ceux présentant des grands nombres et rendant complexes et inefficaces les stratégies de dénombrement (imaginons par exemple que ce sont les tickets portant les numéros 127 à 2431 qui ont été vendus dans le premier problème). Les exemples choisis dans les séries de problèmes proposés permettent de rencontrer différents cas d'intervalles (ouverts, semi-ouverts, fermés) ; il est donc intéressant d'organiser une mise en commun au départ d'une schématisation des solutions obtenues pour les différents problèmes de la série. Il est ainsi possible de construire un tableau permettant d'analyser les différences et les ressemblances entre les problèmes en vue de déduire les opérations à réaliser pour résoudre chaque problème.

Figure 10 : Exemples d'analyse des solutions permettant de dégager les différents cas d'intervalles et de faire le lien entre les démarches informelles et les calculs

P1	n°27	n°28	n°29	n°30	n°31	**Réponse : 5**	**+1**
P2	n°27	n°28	n°29	n°30	~~n°31~~	**Réponse : 4**	**31-27=4**
P3	~~n°27~~	n°28	n°29	n°30	~~n°31~~	**Réponse : 3**	**- 1**

Il importe de ne pas généraliser trop vite et de développer ce type d'approche face à des problèmes variés (par exemple, en proposant une série de problèmes d'intervalles plus classiques, avec des piquets à disposer le long d'une clôture, des cônes à placer pour délimiter des travaux,…). Ensuite, en s'appuyant sur plusieurs analyses de ce type, il devient possible de dégager une synthèse qui, idéalement, doit se présenter sous plusieurs formes, dont notamment une expression langagière, en vue d'aider les élèves à donner du sens aux symbolisations mathématiques.

3.2.3. *Deux exemples d'activité portant sur l'étape de communication de la solution*

Au **niveau de l'étape de communication**, on peut noter une certaine forme de gradation : communiquer la solution du problème de façon claire et compréhensible par autrui (au cycle 5-8) ; identifier les éléments importants d'une bonne communication (au 8-10) et envisager la communication de la solution comme un enjeu important de la démarche de résolution (au 8-10 et au 10-12). Enfin, au 10-12, des compétences liées à l'interprétation de la situation et de la solution viennent également compléter ce volet de la démarche de résolution de problèmes.

Une activité du cycle 5-8, intitulée « Les gommettes de couleur », est développée au point a ; elle vise à amener les élèves *à communiquer les solutions sous des formes variées, de façon claire et compréhensible par autrui.* Par ailleurs, une séquence amenant à concevoir *la communication comme un enjeu important de la résolution* est proposé en continuité aux cycles 8-10 et 10-12. Les activités développées confrontent les élèves à des situations nécessitant de construire une affiche, de rédiger un SMS, d'expliquer un trajet,… Une activité de ce type, intitulée « Les jeux olympiques », est explicitée au point b.

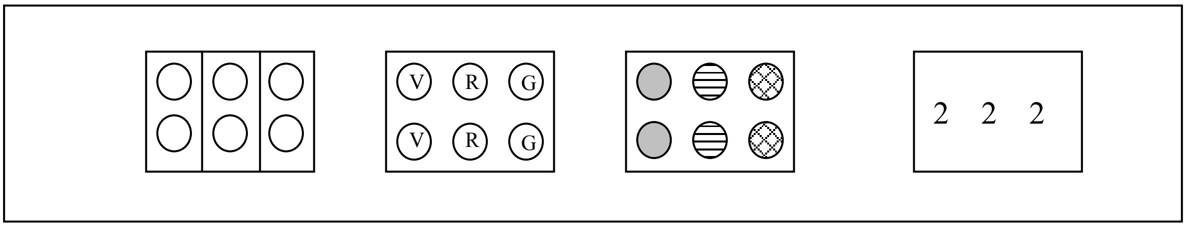
a) Les Gommettes de couleur – Communiquer de façon claire et compréhensible par autrui

Cette activité tente de développer les principes de la *Realistic Mathematic Education* (voir 2.2.1) en prenant pour point de départ de l'apprentissage une situation problème qui constitue une réalité dans l'expérience des élèves (ici, un jeu mathématique). Cette situation problème donne la possibilité aux élèves de s'engager de façon informelle dans l'activité (ils peuvent inventer différentes façons de symboliser leur carte). Ils doivent ensuite être encouragés et aidés pour développer des procédures plus proches d'une perspective mathématique plus formelle (l'accent sera mis progressivement vers l'utilisation de symbolisations plus formelles et conventionnelles, utilisées généralement pour représenter les décompositions additives).

Cette activité se présente sous la forme d'un jeu où il faut faire découvrir aux autres la carte que l'on a piochée. Les cartes du jeu sont constituées de gommettes de couleur présentant différentes décompositions additives du nombre 6 ou du nombre 10 (selon la version utilisée). On n'annonce pas d'emblée aux enfants qu'on travaille sur la décomposition des nombres, c'est eux qui vont le découvrir en trouvant différentes méthodes pour communiquer la carte qu'ils ont piochée. Au départ, les élèves disposent de crayons de couleur et peuvent simplement recopier la carte. Par la suite, les crayons de couleur leur sont retirés et c'est en représentant la décomposition à laquelle correspond leur carte qu'ils pourront la faire découvrir.

Les exemples suivants concernent des représentations d'une carte illustrant une décomposition du nombre 6 en trois paquets de 2 (la carte à faire découvrir est constituée de 2 gommettes grises, 2 rouges et 2 vertes) :

Figure 11 : Exemples de codes produits par les élèves



Dans certaines classes, les élèves ont éprouvé beaucoup de difficultés pour inventer une façon de faire découvrir les cartes une fois les crayons de couleurs retirés. C'est alors que des types d'aide ou des consignes plus spécifiques peuvent parfois aider à « débloquer » les élèves. On peut ainsi proposer aux élèves une sélection d'un sous-ensemble de cartes, les inviter explicitement à analyser les cartes, proposer un codage qu'ils pourront adapter,... Les échanges oraux entre enfants durant l'activité témoignent qu'ils se trouvent dans une réelle situation de recherche. Même si les enfants représentent peu les cartes par des chiffres, les nombres sont très présents dans leurs débats : il y en a 4 grises et 2 vertes ; moi, j'ai 3 couleurs avec 2 de chaque sorte,… La richesse du discours mathématique suscité par cette étape de recherche est un des points forts de l'activité. En effet, la place du langage oral dans la construction des concepts mathématiques et des symbolisations est considérée comme centrale dans les approches socioculturelles. Un autre intérêt de l'activité est que ce type de jeu permet une vérification des productions par les enfants eux-mêmes : la représentation est bonne si elle permet de retrouver la carte cible (et uniquement celle-là). Les échanges entre enfants pour auto-réguler les recherches sont très riches de ce point de vue également.

b) Les jeux olympiques - Communiquer les solutions sous des formes variées

Le point de départ de l'activité est un concours de pentathlon qui propose 5 épreuves : le lancement du javelot, le saut en hauteur, le saut en longueur, le triple saut et la course de 400 m chrono. Il y a 5 participants : Frédéric, Fabrice, Leila, Pablo et Justine. L'activité se déroule en deux temps. Il s'agit tout d'abord de réaliser des affiches pour présenter les résultats de chaque épreuve, puis il conviendra de rechercher le grand vainqueur du Pentathlon. Pour la première étape, les données du problème ce sont les notes du professeur de gymnastique, comme l'illustre l'exemple proposé à la page suivante.

Figure 12 : Exemples de problème proposé pour l'une des épreuves du pentathlon

LANCEMENT DU JAVELOT[3]

Madame Laforme, le professeur de gymnastique, a assisté à l'épreuve de lancement du javelot. Elle a pris quelques notes de façon un peu embrouillée…. Remets un peu de l'ordre dans tout cela pour qu'on puisse afficher le classement.

- Frédéric a fait un premier lancer de 12 m, un deuxième lancer complètement raté de 7 m et un troisième lancer de 13 m.
- Fabrice a dit qu'il avait réalisé un très bon lancer d'une distance équivalente à la moitié de 24 m. Frédéric lui a répondu qu'on pourrait aussi dire qu'il avait lancé son javelot à une distance de 6 fois 2 m et que ce n'était donc pas nécessaire de se vanter.
- Leila a lancé un javelot à 14 m mais son lancer a été annulé parce qu'elle avait mordu. Son deuxième lancer était complètement raté et son troisième lancer était 20 dm plus court que le meilleur lancer de Frédéric.
- Pablo s'est énervé et a abandonné.
- Justine a réalisé une performance de 14 m dès son premier lancer et n'a pas amélioré son score par la suite.

Les cinq épreuves sont réparties dans la classe et chaque groupe est responsable de réaliser une affiche présentant le classement de son épreuve. Quand chacun a terminé son travail, on procède à une mise en commun qui s'avère généralement très riche. D'un point de vue artistique, certains élèves réalisent de véritables chefs d'œuvre hauts en couleurs alors que d'autres présentent le classement dans un coin de l'affiche… Sur le fond, on constate également des lacunes : certains groupes n'ont pas indiqué de quelle épreuve il s'agissait, d'autres n'ont pas classé les concurrents sur l'affiche et c'est aux autres de comparer les scores pour essayer de retrouver le vainqueur. D'autres encore ont réalisé un podium avec les trois meilleurs, faisant ainsi disparaître les deux autres concurrents dont on aura pourtant bien besoin pour la recherche du vainqueur du pentathlon….

L'importance de la communication et les formes qu'elle doit prendre ici sont au cœur des débats : a-t-on bien résolu le problème en réalisant la tâche demandée ? Quelles sont les informations importantes qui doivent se trouver sur les affiches ? Y a-t-il des informations superflues et quel est l'intérêt ou non de les présenter ? Quelle est l'importance de la clarté de la communication ? Perçoit-on bien le classement ou doit-on le rechercher ? Doit-on utiliser tout l'espace de la feuille pour réaliser une affiche ? Etc.

Une fois que les élèves se sont mis d'accord sur les informations indispensables et que les affiches ont été complétées sur cette base, la deuxième étape consiste à rechercher le grand vainqueur du pentathlon :

[3] Un problème de ce type est proposé pour chacune des épreuves. Des versions simplifiées sont également proposées pour les plus jeunes.

définir une règle de calcul des scores, organiser les informations pour s'y retrouver, calculer les scores de chacun et réaliser un classement général. Encore des mathématiques et de la résolution de problèmes à chaque étape ! Mais cette fois, quelle est la tâche à réaliser ? Comment doit-on communiquer la solution ? L'enseignant peut proposer de réaliser une nouvelle affiche, de construire un tableau, d'écrire un article pour le journal de l'école, ... ou toute autre forme de communication faisant de cette étape un enjeu important de la résolution de problèmes.

La communication peut prendre des formes variées. Dans d'autres activités, les élèves sont invités à remplir un bon de commande pour organiser une vente de lasagnes à l'école, à expliquer un trajet de métro à un copain, à envoyer un sms pour donner un rendez-vous, etc.

3.2.4. Comment la vérification est-elle envisagée dans les différents outils ?

L'étape de vérification est abordée selon des angles diversifiés. Au cycle 5-8, on tente de sensibiliser les élèves à l'importance de cette étape et on leur propose quelques activités pour essayer qu'ils prennent en main la correction de leur travail. Au 8-10, c'est une séquence d'activités visant, au départ de l'analyse de productions d'autrui, à faire construire aux élèves un référentiel de communication qui a été imaginée. Au 10-12, aucune activité spécifique à cette étape n'est proposée, mais l'idée de référentiel de vérification est conservée. Plutôt que de procéder au départ d'une activité pensée directement à cette fin, nous avons plutôt choisi de l'envisager comme un outil qui se construit progressivement tout au long de la démarche d'apprentissage. On propose ainsi de construire des synthèses propres aux différentes étapes de la démarche et de se servir de ces synthèses pour construire un référentiel de vérification qui pourrait alors être utilisé face à toute situation problème rencontrée.

Dans une certaine mesure, on peut se demander s'il est réellement envisageable de demander à de jeunes élèves du cycle 5-8 de mettre en œuvre un processus de vérification. Trois activités proposées dans la brochure ont tenté de relever ce pari, en proposant des situations simples qui invitent les élèves à aborder la vérification sous trois angles différents. Deux d'entre-elles sont brièvement évoquées ici.

a) L'activité « Le chipeur de trésor » (cycle 5-8)

Dans cette activité, une grande boîte mystérieuse apparaît dans la classe. C'est un coffre rempli d'un trésor. A partir d'un jet de dés, chaque enfant va obtenir sa part du trésor. Mais un « chipeur » va faire disparaître tout ou une partie du trésor de chaque enfant. A la place se trouve un message signé du « chipeur », qui indique que les éléments ont été cachés mais qu'aucun n'a été enlevé ni ajouté. Les enfants retrouvent les éléments dans un grand sac, rempli des trésors du groupe, que le chipeur y a vidés. Chaque enfant dispose d'un reçu indiquant quelle était sa propre part du trésor. Tour à tour, les enfants sont alors invités à aller reprendre leur dû dans le sac. A la fin, s'il manque des pièces (ou s'il en reste), c'est que quelqu'un s'est trompé. Il y a donc émergence de l'utilité de développer une démarche de vérification…

b) L'activité « Chaque chose à sa place » (cycle 5-8)

Les élèves sont rarement enclins à se lancer spontanément dans une démarche de vérification. Ils préfèrent généralement demander à l'enseignant d'attester de l'aspect correct ou non de leur solution. Dans l'activité « Chaque chose à sa place », l'enseignant refuse de jouer ce rôle d'évaluateur extérieur et en laisse la responsabilité aux élèves. Pour éviter de (simplement) les conduire à refaire pas à pas ce qu'ils viennent de faire, la situation leur permet de développer un processus de vérification par confrontation de diverses sources.

Les élèves disposent d'une série de fiches proposant diverses contraintes spatiales représentées de façon picturale : le cube vert est dans le cercle rouge, le cube vert se situe à l'intersection des rectangles bleu et vert,… L'objectif est de placer tous les cubes au bon endroit. Pour résoudre le problème, les élèves vont devoir combiner les multiples contraintes et pour vérifier, il faudra donc qu'ils s'assurent que la solution les respecte bien toutes.

4. PERSPECTIVES

En vue de donner du sens aux premiers apprentissages mathématiques, il est important de démarrer un travail didactique axé sur la résolution de problèmes dès le début de l'enseignement fondamental. Différentes études (voir Verschaffel & De Corte, 1997a pour une synthèse) ont montré que les élèves avaient des compétences informelles importantes en résolution de problèmes, et ceci avant tout enseignement spécifique de ce type. Ils tentent de mettre en acte les situations décrites et ne semblent nullement avoir, de prime abord, tendance à développer des stratégies superficielles (Fagnant, 2002b ; Stern, 1993). Les présupposés erronés relatifs aux mathématiques et à la résolution de problèmes, ainsi que les stratégies superficielles associées, se développent progressivement au cours de la scolarité. Ceci semblerait pouvoir en partie s'expliquer par le manque de prise en compte des démarches informelles des élèves et par l'utilisation d'un symbolisme mathématique dont ils n'ont pas une compréhension suffisante.

Une approche cohérente de la résolution de problèmes doit pouvoir s'envisager de manière continue tout au long de la scolarité : du cycle 5-8 à la fin de l'enseignement primaire et même au delà. La continuité vers l'enseignement secondaire paraît en effet tout aussi essentielle. La culture mathématique prônée dans le programme PISA de l'Ocdé défend l'importance de cette approche pour que l'enseignement forme des citoyens susceptibles de s'intégrer et de s'épanouir pleinement dans une société telle que la nôtre. L'approche de mathématisation au centre du programme PISA présente en effet de nombreux points communs avec la démarche de « modélisation mathématique » (Verschaffel *et al.*, 2000) que nous avons développée pour la fin de l'enseignement primaire.

Donner du sens aux mathématiques, développer des démarches efficaces et réflexives de résolution de problèmes, promouvoir des attitudes et des croyances positives face aux mathématiques,… autant d'objectifs que devrait viser l'enseignement fondamental. Nous nourrissons l'espoir que les outils construits par notre équipe de recherche contribuent à faire un pas dans ce sens.

5. RÉFÉRENCES

Bednarz, N., Dufour-Janvier, B., Poirier, L., & Bacon, L. (1993). Socioconstructivist viewpoint on the use of symbolism in mathematics education. *Alberta Journal of Educational Research, 39,* 41-58.

Briars, D.J., & Larkin, J.H. (1984). An integrated model of skills in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, *1*, 145-296.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : Le milieu. *Recherches en Didactique des mathématiques, 9,* 308-336.

Carpenter, T.P., Hiebert, J., & Moser, M. (1983). The effect of instruction on children's solution of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 55-72.

Carpenter, T.P., & Moser, J.M. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. In T.P. Carpenter, J.M. Moser and T.A. Romberg (Eds). *Addition and Subtraction. A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Carpenter, T.P., & Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grade one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(3), 179-202.

Carpenter, T.P., Moser, J.M., & Bebout, H.C. (1988). Representation of addition and substraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *4*, 345-357.

Cobb, P., Yackel, E., & Mc Clain, K. (2000, Eds.). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools and instructional design*. Mahwah, New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985a). Beginning first grader's initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *4*, 3-21.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985b). Writing number sentences to represent addition and substraction problems. In J.K. Damarin and M. Shelton (Eds), *Proceeding of the Seventh Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus (pp. 50-56). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985c). Working with simple word problems in early mathematics instruction. In L. Streefland (Ed.), *Proceeding of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1*. (pp. 304-309). The Netherlands : State University of Utrecht.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' solution strategies of elementary addition and substraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 363-381.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1988). Computer simulation as a tool in research on problem solving in subject-matter domains. In M. Rabinowitz (Ed.), *Computer simulations as research tools. International Journal of Educational Research*, *12*, 46-69.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1991). Some factors influencing the solution of addition and substraction word problems. In K. Durkin & B. Shire (Eds), *Language and -Mathematical Education* (pp. 117-130). Milton Keynes : Open University Press.

Demonty, I., Fagnant, A., & Lejong, M. (2004). *Résoudre des problèmes : pas de problème !* Guide méthodologique et documents reproductibles – 8-10 ans. Bruxelles : De Boeck.

Fagnant, A. (2002a). *Quelle compréhension du symbolisme mathématique au travers de la résolution de problèmes arithmétiques?* Thèse de doctorat non publiée. Université de Liège. Belgique.

Fagnant, A. (2002b). Mathematical symbolism : A feature responsible for superficial approaches ? A.D. Cockburn and E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 345-352). Norwich, UK : University of East Anglia.

Fagnant, A. (2005a). Résoudre et symboliser des problèmes additifs et soustractifs en début d'enseignement primaire. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?(131-150).* Bruxelles : De Boeck.

Fagnant, A. (2005b). The use of mathematical symbolism in problem solving. An empirical study carried out in grade one in the French Community of Belgium. *European Journal of Psychology of Education, XX (4),* pp. 355-367.

Fagnant, A., & Demonty, I. (2005). *Résoudre des problèmes : pas de problème !* Guide méthodologique et documents reproductibles – 10-12 ans. Bruxelles : De Boeck.

Fagnant, A., Demonty, I., & Lejong, M. (2003). La résolution de problèmes : un processus complexe de « modélisation mathématique ». *Informations pédagogiques, 54,* 29-39.

Fagnant, A., & Hindrycks, G. (2006). La résolution de problèmes : enquête auprès des enseignants du cycle 5-8. *Actes du quatrième congrès des chercheurs en éducation,* 111-113. Namur, du 21 au 22 mars 2006 : http://www.agers/cfwb/be.

Fagnant, A., Hindryckx, G. & Demonty, I. (2008). *Résoudre des problèmes : pas de problème !* Guide méthodologique et documents reproductibles – 10-12 ans. Bruxelles : De Boeck.

Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre*. Paris : Delachaux & Niestlé.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective* (pp. 315-345). Hove, East Sussex : Psychology Press Ltd.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). *Symbolizing, modelling, and instructional design.* In P. Cobbs, E. Yackel, & K. Mc Clain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools and instructional design* (pp. 225-273). Mahwah, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Gravemeijer, K., Lehrer, R., van Oers, B., & Verschaffel, L. (2002). (Eds.). *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education.* Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Greer, B. (1993). The mathematical modelling perspective of wor(l)d problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*, 239-250.

Gustein, E., & Romberg, T.A. (1995). Teaching children to add and subtract. *Journal of Mathematical Behavior, 14,* 283-324.

Kintsch, W., & Greeno, J.G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological review*, *92*(1), 109-129.

Riley, M.S., Greeno, J.G., & Heller, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.*), Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 334-370). New York : Macmillan.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being. Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobbs, E. Yackel, & K. Mc Clain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools and instructional design* (pp 37-98). Mahwah, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Siegler, R.S. (2001). Enfant et raisonnement. Le développement cognitif de l'enfant. Bruxelles : De Boeck Université.

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children ? *Journal of Educational Psychology, 85(1), 7-23.*

Tardif, J. (1992). *Pour un enseignement stratégique*. Québec : Logiques.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operation of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser and T.A. Romberg (Eds). *Addition and Subtraction. A cognitive perspective*, (pp. 39-59). Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Vergnaud, G. (1983). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Bern : Peter Lang.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997a). Word problems : A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school ? In T. Nunes & P. Bryant (Eds), *Learning and Teaching Mathematics : An International Perspective* (pp. 69-97). UK : Psychology Press Ltd.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997b). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school : A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27(5),* 577-601.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, *4*, 273-294.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems : A design experiment with fifth graders. *Mathematical Learning and Thinking, 1,* 195-299.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands : Swets & Zeitlinger.

Willis, G.B. & Fuson, K.C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and substraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, *80*(2), 192-201.