

Copyright © 2017 — Vincent Denoël
PUBLISHED BY - Centrale des Cours, ULg
Document préparé selon la classe Book, LaTeX
Notes de cours du cours d'analyse des structures II. Remerciements à V. Valkenborg,
R. Marcelle, N. Binet
First printing, January 2017

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte	1
1.2	Organisation du document	8
1.3	Notations	8
I	Analyse statique critique et analyse au second ordre	9
2	Analyse critique des structures formées de poutres	10
2.1	Introduction	10
2.2	Etablissement des équations d'équilibre	15
2.2.1	Formulation par équilibre global	15
2.2.2	Formulation par équilibre local	16
2.2.3	Formulation énergétique de l'équilibre	19
2.2.4	Les degrés de liberté	24
2.2.5	Résumé	25
2.2.6	Exercices	25
2.3	Concept de stabilité d'un équilibre	26
2.3.1	Généralités	26
2.3.2	Détermination d'un état critique	30
2.3.3	Méthode de Rayleigh	33
2.3.4	Méthode de Ritz-Galerkin	35
2.4	Exercices résolus	37
2.5	Exercices proposés	42
2.6	Références et lectures complémentaires	47
3	Analyse au second ordre des structures formées de poutres	48
3.1	Introduction	48

II	Analyse dynamique linéaire	49
4	Équation du mouvement	52
4.1	Généralités	52
4.2	Seconde loi de Newton	53
4.3	Principe des travaux virtuels	54
4.4	Principe de Hamilton	55
4.5	Conclusion	57
4.6	Exercices	59
5	Intégration temporelle	60
5.1	Principes généraux	60
5.2	Exemples de schéma d'intégration	63
5.2.1	Méthode de la différence centrale	63
5.2.1.1	Option 1	64
5.2.1.2	Option 2	65
5.2.2	Accélération constante	66
5.2.3	Accélération linéaire	67
5.2.4	Méthodes de Newmark	68
5.2.5	Méthode de Houbolt	70
5.2.6	Méthode de Wilson	70
5.2.7	Méthodes HHT	70
5.2.8	Méthodes DE3	70
5.3	Stabilité et précision des méthodes numériques	70
5.4	Exercices	72
6	Dynamique des systèmes discrets	74
6.1	Systèmes à un degré de liberté	74
6.1.1	Vibrations libres	74
6.1.2	Vibrations forcées, charges harmoniques	79
6.1.2.1	Étude de trois cas limites	79
6.1.2.2	Étude formelle des vibrations sous charge harmonique	82
6.1.2.3	Approche du problème par une analyse complexe	84
6.1.2.4	Étude transitoire de la mise en résonance	85
6.1.3	Vibrations forcées, charges impulsionnelles	87
6.1.3.1	Impulsion de durée finie	88
6.1.3.2	Impulsion parfaite	91
6.1.4	Vibrations forcées, charges quelconques	92

6.1.4.1	Approche temporelle	93
6.1.4.2	Approche fréquentielle	94
6.1.5	Exercices	103
6.2	Systèmes à plusieurs degré de liberté	103
6.2.1	Généralités	103
6.2.1.1	Structure à M-DDL physiquement séparés	104
6.2.1.2	Structures continues	105
6.2.1.3	En conclusion...	113
6.2.2	Analyse dans la base nodale	115
6.2.2.1	Analyse dans le domaine fréquentiel (charge harmonique)	117
6.2.2.2	Analyse dans le domaine temporel (charge impulsionnelle)	122
6.2.2.3	Résolution pas-à-pas	127
6.2.2.4	Résumé	129
6.2.3	Analyse dans la base modale	130
6.2.3.1	Propriétés modales	130
6.2.3.2	Méthodes approchées pour l'estimation des propriétés modales	135
6.2.3.3	Analyse en base modale	140
6.2.3.4	Analyse dans d'autres bases	150
7	Dynamique des systèmes continus	152
7.1	Equation du mouvement	152
7.2	Modes propres	152
7.3	Analyse en base modale	155
7.4	Exemples	157
8	Analyse dynamique stochastique	158
8.1	La théorie des probabilités	158
8.2	La théorie des processus aléatoires	169
8.3	L'analyse dynamique stochastique	192
8.3.1	Dans le domaine temporel	192
8.3.2	Dans le domaine fréquentiel	196
9	Analyse sismique et spectres de réponses	198
9.1	Généralités sur les séismes	198

10 Vibrations et structures du génie civil	199
10.1 Structures soumises à des sollicitations de vent	199
10.1.1 Généralités sur le vent	199
10.2 Structures soumises à des sollicitations explosives	199
10.2.1 Généralités sur les impacts et explosions	199
10.3 Structures soumises à des sollicitations mobiles	199
10.3.1 Généralités sur le chargement de piéton	199
10.4 Structures soumises à des sollicitations de piétons	200
10.4.1 Généralités sur le chargement de piéton	200
10.5 Amortissement de structures	200
10.5.1 Généralités sur le chargement de piéton	200
10.6 Pathologies vibratoires des soumises	200
10.6.1 Généralités sur le chargement de piéton	200
10.7 Dynamique des câbles	200
10.8 Introduction	200
Index	202

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

L'analyse des structures est l'ensemble des méthodes qui permettent essentiellement de déterminer les contraintes dans les structures ainsi que leurs configurations déformées. Ce cours de compléments d'analyse des structures est la suite logique du cours d'analyse des structures I dont l'objectif était l'analyse des structures hyperstatiques formées de barres. Dans ce cours, nous étendons les concepts à l'analyse dynamique des structures ainsi qu'à l'analyse critique et au second ordre, puis à la théorie des plaques.

Pour fixer les idées, considérons l'exemple de la figure 1.1.1 qui représente une colonne de longueur ℓ et raideur flexionnelle EI , sollicitée par une force P légèrement excentrée d'une quantité $\ell_o \ll \ell$. Les déplacements horizontal et vertical du point d'application de la force sont représentés en fonction de l'intensité de cette force sur la partie supérieure droite de la figure 1.1.1. Ces résultats ont été obtenus avec les valeurs numériques suivantes : $EI = 1$, $\ell = 1$, $\ell_o = 2 \cdot 10^{-3}$, $EA = 10^6$. Elles sont volontairement prises sans dimensions pour faire simple et se conformer aux standards de benchmarking.

Ce résultat est le résultat typique d'une analyse statique élastique non linéaire d'une structure car il **prend en compte la configuration déformée** de la structure pour un certain niveau de sollicitation. Dans cet exemple, à chaque niveau de sollicitation correspond une seule configuration d'équilibre, mais cette observation n'est pas une généralité. Nous verrons d'autres exemples plus tard où il existe plusieurs configurations d'équilibre différentes pour le même niveau de sollicitation. On ne peut donc pas prédire la configuration déformée d'une structure non linéaire sans prendre en compte toute son histoire du chargement (forces et déplacement imposés, par exemple). Cet exemple introductif montre que l'analyse non linéaire d'une structure peut présenter une certaine complexité.

Étudions cependant cet exemple un peu plus en détail. On sait d'un cours de base en résistance des matériaux que la force de compression P génère un effort axial $-P$ et un moment de flexion $P\ell_o$ constants le long de la barre, du moins dans la

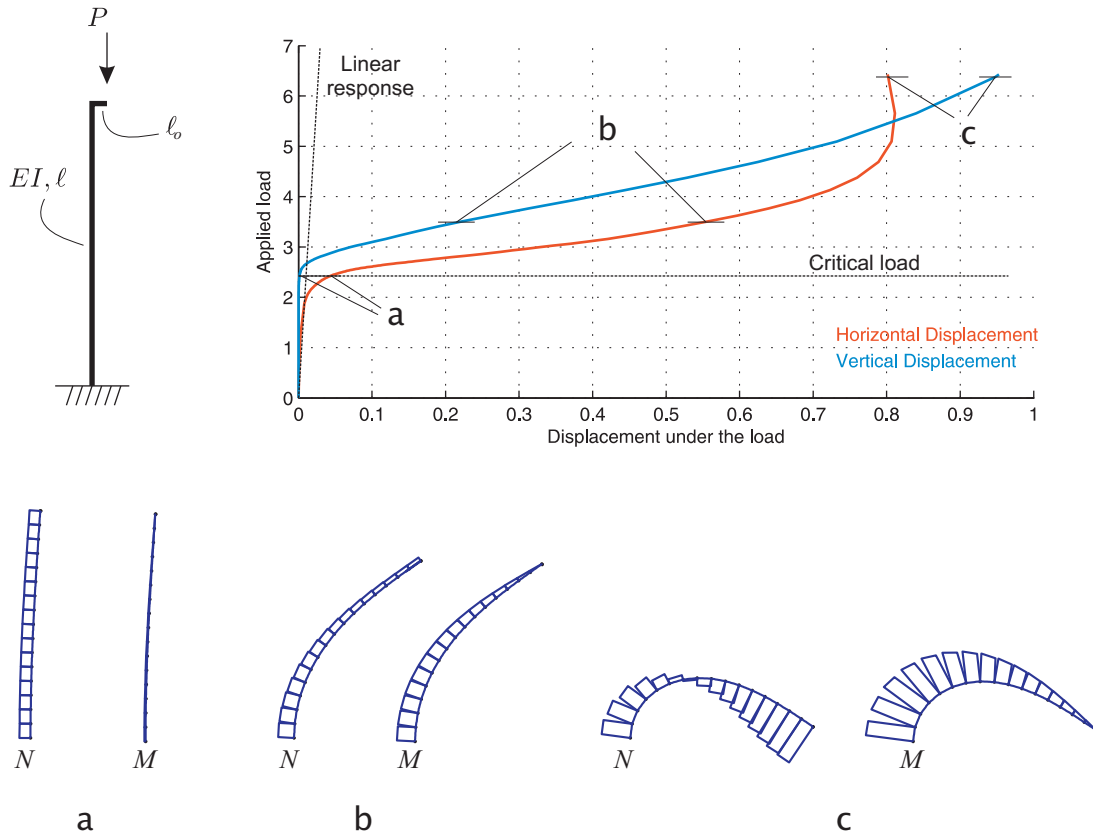


FIGURE 1.1.1 – Réponse d'une colonne soumise à une compression légèrement excentrée. Valeurs numériques : $EI = 1$, $\ell = 1$, $\ell_o = 2 \cdot 10^{-3}$, $EA = 10^6$.

configuration initiale. Par ailleurs les déplacements horizontal et vertical du point d'application de la charge lorsque celle-ci est faible s'expriment par les relations¹

$$\delta_h = \frac{P\ell_o\ell^2}{2EI} \quad ; \quad \delta_v = \frac{P}{EA}. \quad (1.1.1)$$

Lorsque la sollicitation appliquée est faible, les déplacements sont donc proportionnels à l'intensité de la sollicitation. C'est la réponse que l'on calcule typiquement dans l'analyse statique (iso- ou hyper-) des structures. Cette composante linéaire de la réponse est représentée par la ligne en traits pointillés de la figure 1.1.1.

On sait également par un cours élémentaire de résistance des matériaux qu'un phénomène d'instabilité peut exister si la sollicitation est supérieure à un niveau de charge critique. Pour la colonne encastree-libre de la figure 1.1.1, la charge critique est donnée par

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} \simeq 2.5 \frac{EI}{\ell^2} = 2.5, \quad (1.1.2)$$

1. on néglige, dans cette formule, la composante de déformation en flexion qui provient de la barre d'excentrement, ainsi que les composantes de déformation par cisaillement



FIGURE 1.1.2 – (a) Structure de tenségrité, connue pour son extrême légèreté et déformabilité (TensegrityWikispaces.com), (b) Câbles de télécommunication, (c) Perchiste.

en négligeant l'effet de l'excentricité ℓ_o , et est représentée par la ligne horizontale pointillée de la figure 1.1.1. Au-delà de cette charge, les déplacements transversaux de la colonne s'amplifient et la force appliquée P génère un moment de flexion significatif dans la colonne. La représentation de la configuration déformée correspondant à $P = 3.5$ (point b) donne une idée de l'importance des déplacements transversaux, supérieurs à la moitié de la hauteur de la colonne (le coefficient d'amplification est égal à 1). Dans ce comportement, dit *post-critique*, on constate que la structure préserve une certaine raideur, la pente dans ce diagramme $P - \delta$, mais significativement réduite par rapport à la raideur initiale. Lorsque la sollicitation atteint une valeur plus ou moins égale à 5 (point c), le déplacement horizontal du sommet de la colonne atteint son maximum, soit un peu plus de 80% de la hauteur de la colonne. Aux alentours de cet instant, la colonne commence à rentrer en traction (on voit que le diagramme de l'effort axial N change de signe) et un regain de raideur est encore à attendre.

Pour les structures du génie civil, on s'intéresse généralement peu à ce type de comportement post-critique non linéaire, sauf peut-être pour le comportement des structures non contreventées ou câblées, ou celui des âmes de poutres de pont élançées. En effet, la configuration est tellement déformée que l'intégrité structurale peut difficilement être conservée dans la majeure partie des cas. Ce comportement élastique post-critique non linéaire est par contre intéressant dans certaines applications atypiques au domaine, voir Fig. 1.1.2.

Le calcul de la solution non linéaire complète, c'est-à-dire les courbes de la Figure 1.1.1, est impossible à obtenir analytiquement dans la plupart des cas d'applications. Sa détermination demande l'utilisation de méthodes numériques relativement compliquées qui ne seront abordées que dans un cours d'Analyse des Structures III. Nous repoussons donc à beaucoup plus tard le calcul précis de la réponse non linéaire complète. Par contre, nous retenons deux choses de cet exemple simple :

- le comportement *linéaire* donne déjà une bonne idée du comportement de la structure lorsque le niveau de sollicitation reste faible,
- le comportement *critique* est un indicateur du niveau de sollicitation à ne pas

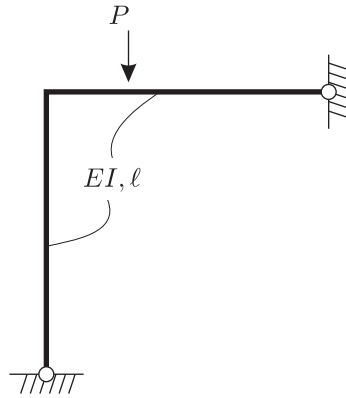


FIGURE 1.1.3 – Géométrie du cadre de Lee, un benchmark bien connu de l’analyse élastique non-linéaire. La charge verticale est appliquée à un cinquième de la longueur de la travée. Valeurs numériques : $\ell = 120$, $A = 6$, $I = 2$, $E = 720$.

dépasser (sauf si une étude poussée montre que la structure a un comportement stable au-delà), ou du moins d’un niveau de sollicitation qui correspond à une augmentation importante des déplacements de la structure.

Nous admettons que le comportement linéaire est bien connu du cours d’analyse des structures I. Un objectif poursuivi dans ce cours est donc de présenter les méthodes de **calcul de la charge critique** pour des structures formées de barres, voir Chapitre 2. Ensuite, nous présenterons des méthodes d’analyse qui permettent de faire la transition régulière entre ces deux comportements, linéaire et critique, mais tout en restant sous le niveau de la charge critique. Ces méthodes, regroupées sous le nom de “**méthodes d’analyse au second ordre**”, seront étudiées au Chapitre 3.

Le problème se complique légèrement lorsqu’il s’agit d’étudier une structure un peu plus compliquée, quoique raisonnable dans sa géométrie tout de même. Imaginons par exemple que l’on doive étudier la structure en portique représentée à la Figure 1.1.3 et que l’on doive déterminer les déplacements vertical et horizontal du point d’application de la force. À nouveau lorsque la sollicitation appliquée reste faible, une analyse linéaire peut être menée et les diagrammes de l’effort axial et du moment de flexion, tels que représentés à la Figure 1.1.4-a, sont ceux qui peuvent être obtenus à l’aide d’une analyse élastique linéaire. En utilisant un logiciel de calcul non linéaire, on peut déterminer l’évolution des déplacements verticaux et horizontaux des différents points de la structure, ainsi que des diagrammes d’efforts internes, sous l’effet d’une séquence de changement choisie.

Par exemple, on choisit ici d’augmenter ou de diminuer l’intensité de la sollicitation P de manière à maintenir la structure en équilibre à tout moment. En commençant depuis une configuration où $P = 0$ et où on augmente progressivement la sollicitation, on observe sur la courbe en bleu que le déplacement vertical sous la force

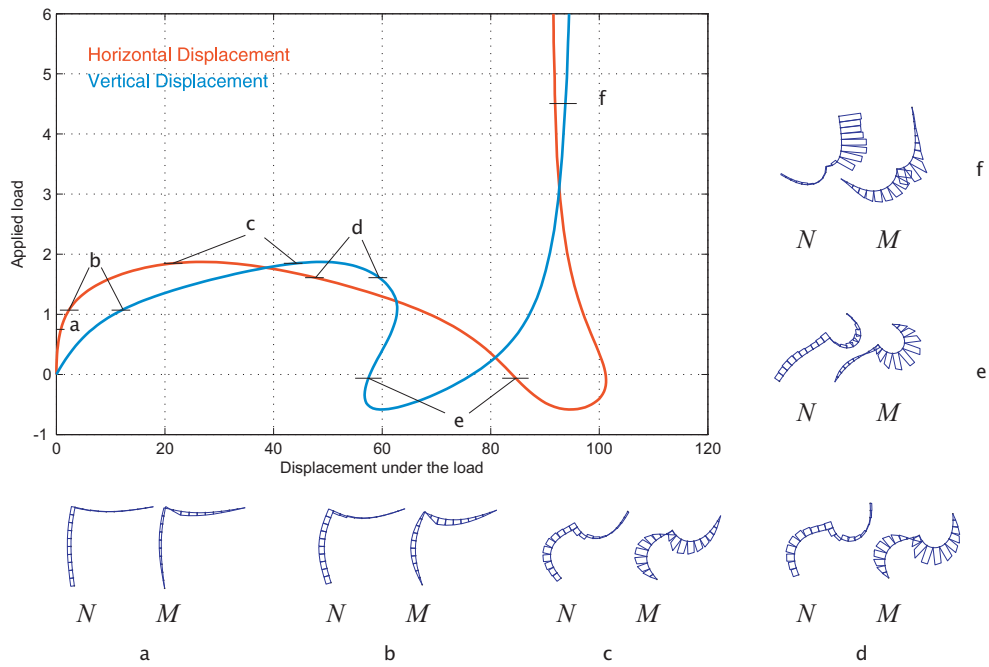


FIGURE 1.1.4 – Déplacements vertical et horizontal du point d’application de la charge verticale P . Les croquis autour du diagramme principal représentent les diagrammes d’effort axial et de moment de flexion dans le portique pour différents niveaux de sollicitation.

commence par augmenter. Le déplacement horizontal, quant à lui, reste relativement faible au début de la sollicitation puis commence à augmenter de façon à prendre le même ordre de grandeur que le déplacement vertical. En effet lorsque la charge appliquée atteint une valeur de l’ordre de 1, le déplacement horizontal commence à augmenter significativement. Cela signifie que nous avons atteint une certaine forme d’instabilité. On peut continuer d’augmenter la force appliquée au-delà de $P = 1$, mais on n’est pas en mesure d’appliquer une force aussi importante que $P = 2$ (voir configuration c). Cela signifie que si l’on désire conserver la structure en état d’équilibre **statique**, il est nécessaire de diminuer la force appliquée. On progresse donc ainsi gentiment depuis le point c, vers le point d et ensuite le point e. Dans cette configuration on constate que la force extérieure appliquée est presque égale à zéro, ce qui signifie que la structure est dans un état d’équilibre statique sans laisser aucune force extérieure appliquée. Par rapport à l’état initial qui était considéré, c’est-à-dire avec un niveau de contraintes égal à zéro dans chacune des barres constituant la structure et une force extérieure nulle, nous avons maintenant toujours une force extérieure nulle mais par contre des contraintes relativement importantes dans chacune des deux barres constituant cette structure simple. Les contraintes dans ces deux barres font en sorte que la structure se trouve dans un état *auto-équilibré*. Pour continuer de voir se déformer la structure en augmentant le déplacement horizontal, il faut que la force appliquée devienne négative pour maintenir des configurations **d’équilibre statique**. Il faut donc “retenir” la structure élastique, qui aurait sinon

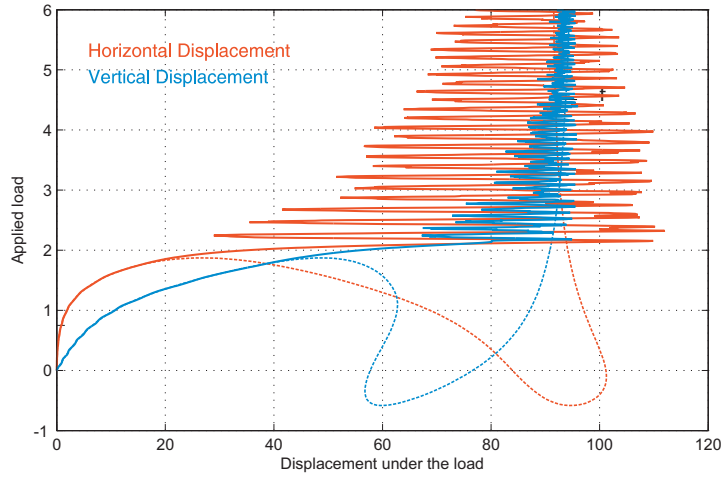


FIGURE 1.1.5 – Simulation dynamique de la réponse du cadre de Lee. Valeurs numériques identiques à celle de la Figure 1.1.4 et $\rho = 1$ (masse volumique). Le trait pointillé représente la réponse statique.

tendance à continuer de se déformer naturellement. Finalement, il faut de nouveau augmenter la force appliquée pour continuer de déformer la structure. La force passe une troisième fois par zéro (entre les points e et f), ce qui correspond donc à une troisième configuration d'équilibre statique sans charge appliquée. Pour terminer, les déplacements vertical et horizontal restent pratiquement inchangés (puisque l'on voit un comportement asymptotique très raide) alors que la sollicitation appliquée devient très importante. On a atteint à nouveau une configuration où la traverse, initialement horizontale, se trouve presque verticale et fortement tendue.

Cet exemple est un benchmark bien connu de l'analyse non-linéaire de structures. Il est particulièrement difficile à appréhender pour plusieurs raisons. La première, et qui nous intéressera le plus, est que le niveau de la charge critique est plus difficile à identifier (aux alentours de $P = 2$); la seconde et les suivantes comprennent un ensemble de spécificités dans le comportement post-critique, dont notamment un phénomène de *snap-back* (le déplacement diminue momentanément entre d et e) et de *snap-through* (la sollicitation diminue avant de remonter à une valeur supérieure à ce qu'elle a été).

Cet exemple soulève également d'autres questions. Quel est ce type de mise en charge statique qui consiste à augmenter la sollicitation puis à la diminuer, de façon à conserver un équilibre statique en permanence? Difficile à dire. Imaginons par exemple que nous décidions de réaliser une expérience avec cette structure et que nous décidions de représenter la charge appliquée par un réservoir d'eau posé au point d'application de la force, et qui se remplit continûment sans qu'on ne puisse le vider. On n'aurait

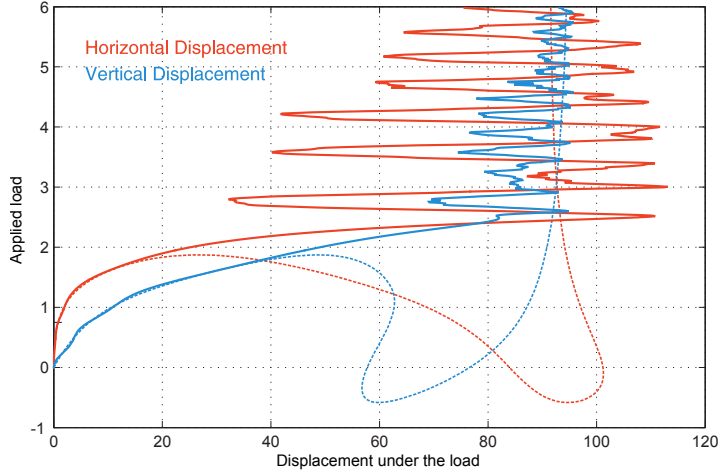


FIGURE 1.1.6 – Simulation dynamique de la réponse du cadre de Lee. Valeurs numériques identiques à celle de la Figure 1.1.4 et $\rho = 10$ (masse volumique). Le trait pointillé représente la réponse statique.

ainsi pas la possibilité de diminuer la force appliquée, mais simplement de l'augmenter. Pour autant que le réservoir se remplisse lentement afin d'éviter tout phénomène dynamique (à préciser dans la suite), rien ne change la phase initiale de chargement. Lorsque la force appliquée doit passer au-dessus de $P = 2$, un passage obligatoire vers la branche montante, après le snap-through, est nécessaire. Le seul moyen de garder la structure dans un équilibre est que des forces d'inertie viennent s'ajouter à l'équilibre. En d'autres termes, le passage vers l'état post-critique se produira avec une certaine vitesse, donc accélération (qui va générer les forces d'inertie évoquées). La structure est donc le siège de vibrations qui persistent tant qu'elles ne sont pas amorties. Ceci est illustré à la Figure 1.1.5 qui représente l'évolution au cours du temps des déplacements vertical et horizontal du point d'application de la force P , calculés en configuration dynamique. Ces résultats ont été obtenu pour une masse volumique $\rho = 1$ et une vitesse de chargement $v_0 = 2.5 \cdot 10^{-4}$.

Si nous avons considéré un matériau dix fois plus lourd, c'est-à-dire une masse volumique $\rho = 10$ au lieu de $\rho = 1$, nous aurions obtenu des vibrations plus lentes, de période plus longue, de fréquence plus petite. Ceci est illustré à la Figure 1.1.6. Dans cette simulation, la vitesse de mise en charge est identique. On perçoit cependant quelques oscillations, même pour les faibles valeurs de déplacement (en-dessous de 20), ce qui indique que la notion de quasi-staticité est très relative.

Toutes ces notions seront précisées plus tard dans le cadre du cours. Nous pouvons retenir pour le moment que, dans le cadre d'une analyse dynamique d'une structure, il est important de compléter les équations d'équilibre par des forces d'inertie. Ceci est tout à fait similaire à la célèbre loi de Newton,

$$\sum F = m a.$$

Dans le cas d'une analyse statique, la somme des forces qui sont appliquées sur l'objet étudié est égale à zéro (puisque'il n'y a pas d'accélération). Par contre dans une analyse dynamique, il est important de prendre en compte les forces d'inertie, le second membre de cette équation, dans le bilan des forces en présence. La loi de Newton s'applique aux corps rigides isolés. Un autre objectif de ce cours est de l'étendre aux structures dont les propriétés mécaniques et géométriques sont distribuées dans l'espace.

1.2 Organisation du document

Ces notes de cours sont organisées en deux parties principales. La première partie traite de compléments d'information relatifs à l'analyse statique, dont notamment l'analyse critique et l'analyse au second ordre des structures formées de barres, dans les chapitres 2 et 3 respectivement. La seconde partie du cours concerne l'analyse dynamique des structures. Elle se décompose en davantage de chapitres, qui couvrent les fondements de l'analyse des systèmes dynamiques à un puis plusieurs degrés de liberté, aux vibrations déterministes puis non déterministes. Ces types d'analyse sont essentiellement illustrés dans le cadre des structures du génie civil.

Dans la mesure du possible, un ensemble d'exercices est fourni à la fin de chaque chapitre, afin de pouvoir s'entraîner et maîtriser les concepts qui y sont présentés.

1.3 Notations

De façon générale, nous utilisons des lettres minuscules (a) pour représenter des scalaires liés à des champs de déplacement, des abscisses ou autres variables de base des problèmes étudiés, des lettres majuscules pour représenter des propriétés géométriques et mécaniques ($P, EI, \dots$), des lettres minuscules grasses (**a**) pour représenter des vecteurs et des lettres majuscules grasses (**A**) pour représenter des matrices. Nous utilisons des lettres grecques (α) ou en caractères calligraphiques ($\mathcal{F}$) pour représenter des grandeurs sans dimension.

Pour alléger la lisibilité, les arguments des fonctions sont omis lorsque cela ne pose pas de confusion possible.

Le symbole ' (prime) est utilisé pour indiquer une dérivée par rapport à l'argument de la fonction. Pour les fonction à plusieurs variables, la notation ∂_x est utilisée pour représenter la dérivée partielle par rapport à une des variables.

Première partie

Analyse statique critique et analyse au second ordre

Chapitre 2

Analyse critique des structures formées de poutres

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions les problèmes d'instabilité par *bifurcation*. Cela signifie que la structure possède un comportement élastique linéaire, est idéalement parfaite et est idéalement chargée. Ces hypothèses sont relativement lointaines de la réalité dans laquelle il existe des imperfections structurelles et géométriques, par exemple des contraintes résiduelles liées à la fabrication des éléments métalliques utilisés pour construire une charpente, ainsi que les hors-plombs liés à leur mise en oeuvre réelle, ainsi que des effets de plastification liés au comportement matériel non linéaire. Il n'en reste pas moins que l'analyse critique visant à la détermination de multiplicateurs de charge critique reste un point essentiel dans la compréhension du fonctionnement d'une structure au second ordre.

Revenons sur l'exemple bien connu de la stabilité d'une colonne bi-appuyée, parfaitement rectiligne, de longueur ℓ et de raideur flexionnelle EI et soumise à une force axiale de compression λP à une de ses extrémités, voir Fig. 2.1.1-a. Afin de modéliser un chargement qui peut éventuellement augmenter, on a introduit le **multiplicateur de charge** λ qui multiplie la sollicitation. De toute évidence, lorsque $\lambda = 0$, aucune force n'est appliquée sur la colonne; et la force appliquée augmente progressivement lorsque le multiplicateur de charge λ augmente. Étant donné que la colonne est parfaitement rectiligne et parfaitement verticale, et que la force appliquée est parfaitement alignée avec l'axe de la colonne, il n'y a *a priori* aucune raison d'avoir un déplacement transversal de la colonne. Admettons cependant que la colonne puisse se déformer transversalement à un moment ou l'autre, comme indiqué à la figure 2.1.1-b. Dans cette configuration, la réaction verticale à l'appui inférieur est égale à P ; quant aux réactions horizontales à chacun des deux appuis, elles doivent nécessairement être nulles de façon à satisfaire l'équilibre horizontal en translation ainsi que l'équilibre en rotation. Ceci nous amène donc au schéma rendu

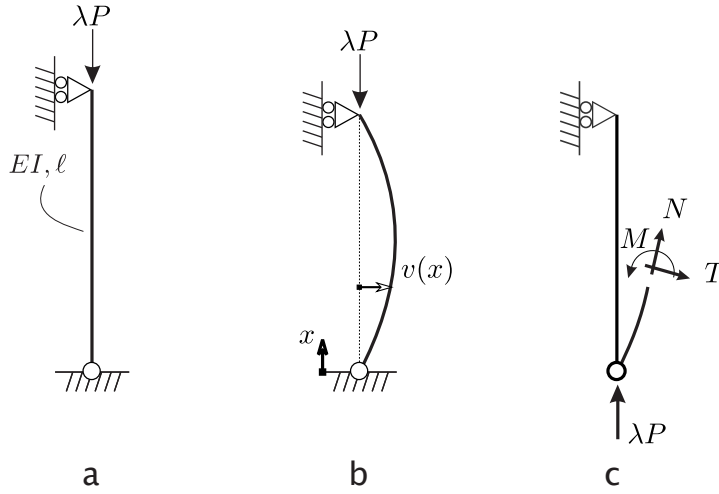


FIGURE 2.1.1 – Exemple le plus simple d'instabilité par bifurcation : le flambement d'Euler

libre de la figure 2.1.1-c. L'équilibre en rotation autour du point de coupe indique immédiatement que le moment de flexion $M(x)$ s'exprime par

$$M = \lambda P v \quad (2.1.1)$$

où $v(x)$ représente la déformée transversale de la colonne et x représente l'abscisse curviligne mesurée depuis l'appui inférieur. Etant donné que le moment est relié à la courbure de la colonne par $M = -EI v''$, la déformée transversale de la colonne $v(x)$ est gouvernée par l'équation différentielle

$$EI v'' + \lambda P v = 0 \quad (2.1.2)$$

avec $v(0) = v(\ell) = 0$ comme conditions limites. Il s'agit d'une équation différentielle *linéaire*¹, de second degré, à coefficients constants et *homogène*. **Le fait que l'équation à résoudre soit homogène est caractéristique de l'instabilité par bifurcation.** Dans une équation homogène, le second membre est égal à zéro et il existe une solution triviale nulle, $v = 0$ dans ce cas. Cette solution triviale est la solution qui n'a pas d'intérêt dans notre cas puisqu'elle correspond à une charge axiale sur une colonne rectiligne, sans produire de déformation transversale de la colonne. Il existe par contre des valeurs bien particulières du multiplicateur de charge λ pour lesquelles l'équation différentielle ci-dessus peut avoir d'autres solutions que $v = 0$. On remarque d'ailleurs une certaine similitude entre 2.1.2 et la forme générale définissant les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = 0. \quad (2.1.3)$$

Les équation 2.1.2 et 2.1.3 sont les deux versions, continue d'une part et discrète de l'autre, du problème de calcul de valeurs propres λ_i et de fonctions propres (en

1. Notez que la linéarité de l'équation résulte de l'hypothèse de petites rotations, puisque le moment de flexion a été estimé par $M = -EI v''$ au lieu de $M = -EI v'' / (1 + v')^{3/2}$.

version continue) ou de vecteurs propres (en version discrète). Nous reviendrons sur cette similitude dans la suite.

La seule solution de 2.1.2 qui satisfasse la condition limite $v(0) = 0$ est

$$v = v_0 \sin \left(\sqrt{\frac{\lambda P}{EI}} x \right), \quad (2.1.4)$$

et la seule possibilité² qui existe pour satisfaire la seconde condition limite $v(\ell) = 0$ est que

$$\sqrt{\frac{\lambda P}{EI}} \ell = k\pi \quad \rightarrow \quad \lambda P = k^2 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (2.1.5)$$

où $k \in \mathbb{N}_0$. On constate donc que des solutions non triviales du problème n'existent que lorsque le multiplicateur de charge λ prend des valeurs bien particulières, dans un ensemble infini. En remplaçant ces valeurs particulières dans l'expression de la déformée $v(x)$ donnée en 2.1.4, on trouve

$$v = v_0 \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (2.1.6)$$

qui représente des solutions sinusoïdales avec de plus en plus de demi-ondes lorsque k augmente. Ces formes sont donc les seules déformées autorisées. Aucune autre déformée ne peut être obtenue en configuration d'équilibre statique et en petites rotations. Le déplacement à mi-longueur ($x = \ell/2$) vaut $v_0 \sin(k\pi/2)$, c'est-à-dire une constante d'intégration qui ne peut pas être déterminée. Ceci résulte du caractère homogène et linéaire de l'équation différentielle. En effet, étant donné que l'équation est linéaire en v et homogène, toute solution qui est un multiple v_0 d'une solution de base est aussi solution de l'équation. C'est la raison pour laquelle on parle de "forme" ou plus généralement de *mode d'instabilité*. **Un mode d'instabilité obtenu à partir d'une analyse critique linéaire est donc toujours déterminé à une constante multiplicative près.**

En guise d'introduction toujours, on peut développer un second exemple. Il s'agit d'une barre supposée infiniment rigide, de longueur ℓ , soumise à un effort de compression λP à son sommet et supportée à la base par un ressort de complaisance K . Ce ressort représente un assemblage dit *semi-rigide*, pour lequel la loi de comportement moment-rotation s'exprime par la relation linéaire $M = K\varphi$. Il s'agit d'un comportement intermédiaire entre une rotule caractérisée par $M = 0$ et un encastrement pour lequel $\varphi = 0$. Tout comme précédemment, on s'attend à ce que la configuration verticale soit une solution (triviale) du problème. Cependant, on peut trouver une autre solution en admettant que la barre puisse tourner autour de son appui, voir Figure 2.1.3. L'équation d'équilibre dans la configuration déformée s'écrit maintenant

$$\lambda P \ell \varphi = M = K \varphi \quad (2.1.7)$$

2. puisque que nous éliminons l'option $v_0 = 0$ car il s'agit de la solution triviale

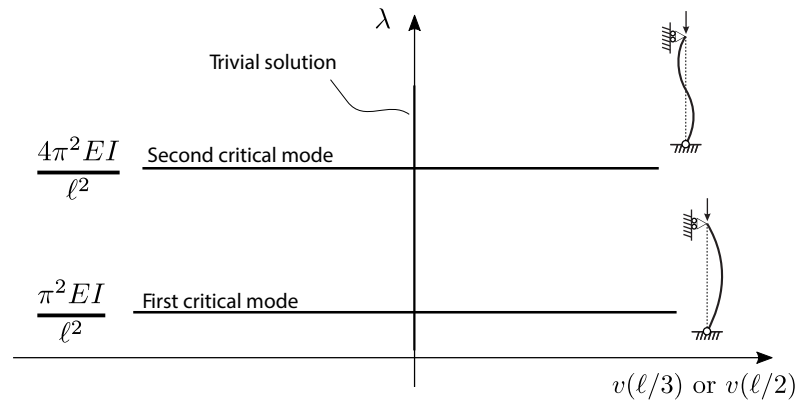


FIGURE 2.1.2 – Instabilité par bifurcation : relation entre le déplacement transversal à mi-hauteur (ou plutôt au tiers de la hauteur pour le second mode) et le multiplicateur critique.

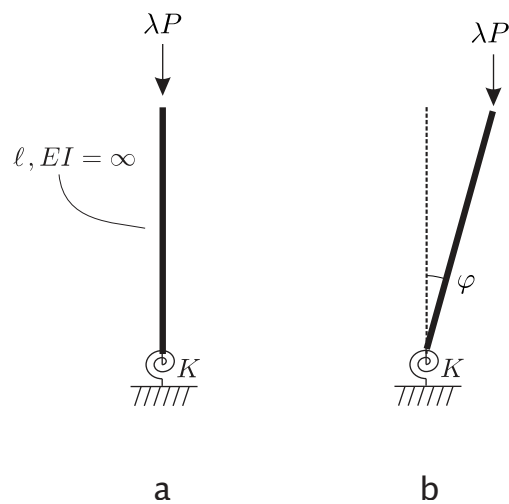


FIGURE 2.1.3 – Instabilité par bifurcation de la barre rigide avec encastrement élastique.

puisque le moment en base est créé par la charge λP excentrée de $\ell\theta$, au premier ordre en petites rotations³. Cette équation est l'équation qui gouverne l'équilibre de la barre en configuration déformée. Il s'agit d'une équation algébrique et non plus différentielle comme 2.1.2. On peut l'écrire également sous la forme

$$(K - \lambda P\ell)\varphi = 0 \quad (2.1.8)$$

qui est celle d'un problème aux valeurs propres, fortement simplifié étant donné que la structure particulière ne peut se déformer que dans un seul mode (une forme). La solution du problème est donc soit $\varphi = 0$ la solution triviale qui ne nous intéresse guère (la barre reste verticale), soit $\lambda P = K/\ell$. Dans ce dernier cas, la valeur de φ est indéterminée pour autant qu'elle respecte les hypothèses choisies, à savoir $\varphi \ll 1$, puisqu'on a supposé des petites rotations. Si ce n'avait pas été le cas, on aurait obtenu, au bout d'un développement similaire

$$K\varphi - \lambda P\ell \sin \varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda P = \frac{K}{\ell} \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \quad (2.1.9)$$

Dans cette configuration en grandes rotations, la solution critique apparaît moins clairement puisqu'on n'a plus le produit de deux facteurs comme dans 2.1.8. Par ailleurs, on n'a plus vraiment une solution "critique" au sens d'une équation linéaire homogène, qui se traduit par une indétermination de l'amplitude du mode d'instabilité. Elle reste bien critique cependant mais, en observant que $\varphi/\sin\varphi$ est toujours supérieur à l'unité, il n'existe de solution d'équilibre que si $\lambda P \geq K/\ell$, mais surtout, si cette condition est satisfaite, il n'y a qu'une seule amplitude du mode qui permette de conserver la structure en équilibre. Ceci est illustré à la Figure 2.1.4 où on observe la solution constante $\lambda P = K/\ell$ obtenue avec le modèle linéaire ainsi que la solution non-linéaire donnée en 2.1.9. Ces deux solutions coïncident de toute évidence lorsque $\varphi \ll 1$. Puisque nous nous intéressons à la valeur critique, c'est-à-dire le niveau de sollicitation à partir duquel d'autres solutions d'équilibre peuvent éventuellement coexister, cet exemple montre qu'un modèle en petites rotations suffit pour déterminer précisément le comportement critique. Il ne permet par contre pas de déterminer l'amplitude réelle (généralement grande) de la configuration déformée. Par ailleurs, pour cette structure à un seul degré de liberté (la rotation autour de la base), il n'y a qu'une seule charge critique et a fortiori qu'un seul mode critique.

Nous verrons dans la suite qu'il existe n modes et multiplicateurs critiques pour une structure à n degrés de liberté.

Avec ces deux exemples introductifs, nous avons illustré les concepts d'équilibre et de charge critique (bifurcation de la stabilité) dans deux cas d'applications distincts. Il reste maintenant à préciser la notion de stabilité de ces équilibres. Par exemple, la solution triviale $v = 0$ ou $\varphi = 0$ est une solution stable lorsque le multiplicateur des

3. Pour être plus précis, on devrait dire $\ell \sin \varphi$, mais qui peut être linéarisé au premier ordre.

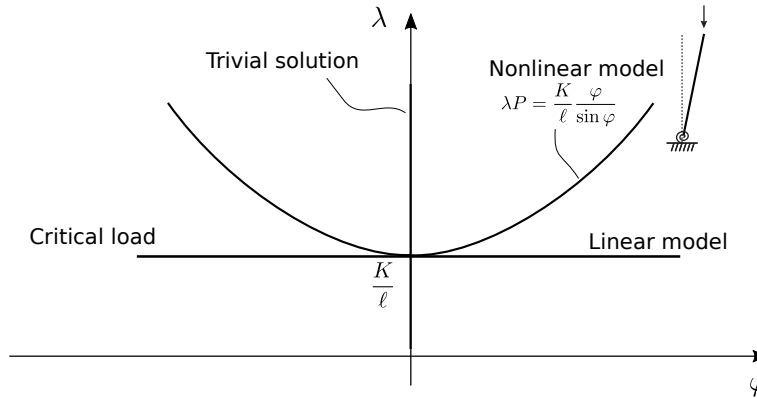


FIGURE 2.1.4 – Instabilité par bifurcation de la barre rigide. Etat post-critique indéterminé (version linéaire) ou déterminé (version non linéaire).Smitises & Hodges

charges est assez petit (une petite perturbation ne va pas l’emmener loin de cet état d’équilibre). Lorsque le multiplicateur des charges est supérieur à la première charge critique, l’équilibre devient instable. Ce sont des notions que nous précisons dans la suite.

2.2 Etablissement des équations d’équilibre

Les exemples utilisés dans l’introduction, à savoir l’instabilité d’une barre parfaite comprimée et d’une barre rigide articulée en base, sont deux illustrations très simples. Trop simples peut-être que pour pouvoir généraliser facilement. En effet, un élément important de l’approche consiste en l’établissement de l’équation gouvernant l’équilibre de la structure (une équation différentielle dans le premier cas, une équation algébrique dans le second). Alors qu’il était relativement simple d’établir ces équations d’équilibre pour les deux exemples étudiés, **à l’aide de coupes** (éventuellement) **et de l’équilibre global** de ces portions de structures, on conçoit facilement que ce type de développement deviendrait vite laborieux dans le cas d’une structure réelle, composée de nombreuses barres. Cela impliquerait en effet d’écrire de nombreuses équations d’équilibre, avec probablement de nombreuses coupes dans la structure, afin d’obtenir une équation différentielle par barre, puis de considérer des conditions de compatibilité entre elles. Dans cette section, nous présentons essentiellement deux autres approches pour traduire l’équilibre statique d’une structure. Outre cette approche globale, nous développons une approche énergétique, ainsi qu’une approche par équilibre local.

2.2.1 Formulation par équilibre global

La formulation de l’équilibre de façon globale a été illustrée précédemment. Nous n’en donnons pas plus de détails car elle est généralement bien connue à l’issue d’un cours

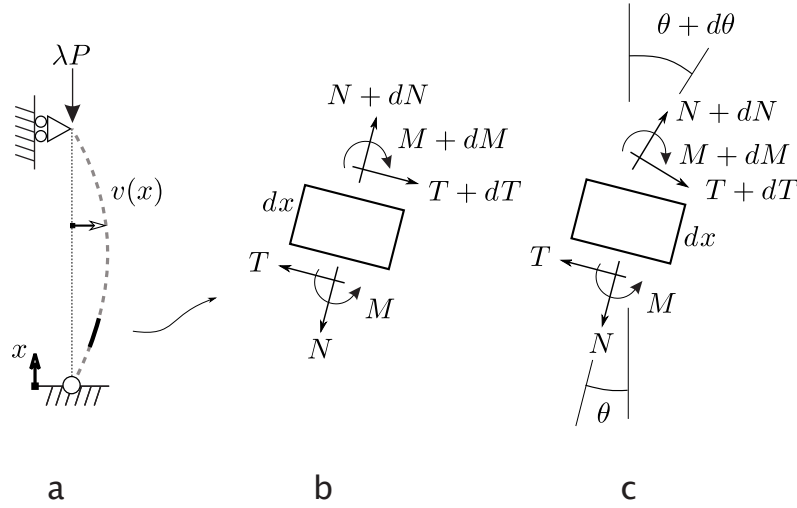


FIGURE 2.2.1 – Equilibre local d’une section droite de poutre de dimension infinitésimale.

d’analyse des structures. Pour des structures isostatiques, elle consiste à extérioriser des efforts internes, à l’aide de coupures bien choisies, et à exprimer les efforts dans la structure par des équilibres des morceaux de structure coupurée. Pour des structures hyperstatiques, la démarche est similaire, dans la méthode des forces, à la différence près qu’une ou plusieurs équations de compatibilité sont nécessaires pour exprimer tous les efforts internes.

2.2.2 Formulation par équilibre local

La formulation par équilibre local se base sur l’équilibre d’une tranche élémentaire de poutre, de plaque ou de coque, selon la théorie développée. La Figure 2.2.1-a l’illustre pour l’exemple d’une poutre de Bernoulli. L’exemple macroscopique (global) considéré est la colonne d’Euler mais cela n’est pas tellement important étant donné que tous les développements suivants se basent sur une équilibre local. Peu importe donc la forme générale de la structure. On dit par contre qu’il s’agit d’une poutre de Bernoulli, par opposition à une poutre de Timoshenko par exemple, car les hypothèses de sections droites restant planes et perpendiculaires à l’axe neutre sont adoptées en écrivant $M = EI\chi$.

Le schéma de la Figure 2.2.1-b représente un équilibre local supposant que la rotation de section $\theta \simeq v'$ est petite ; de plus, dans ce schéma on suppose que l’inclinaison des efforts internes reste inchangée par rapport à l’axe de la poutre. Les trois équations d’équilibre de ce tronçon élémentaire de poutre sont

$$dM = Tdx \quad ; \quad dT = 0 \quad ; \quad dN = 0 \quad (2.2.1)$$

et sont relativement simples car il n’existe pas de force transversale extérieure appli-

quée sur la poutre. Des deux dernières relations, on détermine immédiatement que $T = T_0$ et $N = N_0$, où T_0 et N_0 sont des constantes d'intégration à déterminer (ceci est une conséquence du fait que nous n'avons pas considéré de sollicitation axiale ou transversale dans l'équilibre local). Compte tenu de la relation constitutive $M = -EIv''$, on obtient l'équation fondamentale qui gouverne la déformation d'une poutre de Bernoulli

$$EIv'''' = 0. \quad (2.2.2)$$

C'est l'équation "de l'élastique", dont le second membre est nul étant donné que nous n'avons pas considéré de sollicitation transversale. Dans les trois équations d'équilibre infinitésimal données ci-dessus, on observe que l'effort axial est découplé du comportement flexionnel. Avec ce modèle linéaire, il n'est donc pas possible de déclencher une instabilité par flexion à l'aide d'un effort axial.

L'équation fondamentale du problème doit être résolue avec des conditions aux limites, qui permettent de transcrire les spécificités du problème étudié. Dans cette configuration en petite rotation, l'effort axial à l'extrémité vaut λP , et donc $N_0 = \lambda P$. Quant au déplacement transversal, il doit satisfaire les conditions $v(0) = v'(0) = v(\ell) = v'(\ell) = 0$, soit $v(x) = 0$ partout. Avec ce modèle linéaire en petits déplacements⁴, nous obtenons donc la configuration triviale $v = 0$. Et rien d'autre ! Comme attendu, cet exemple montre qu'il n'est pas possible d'observer le comportement critique à l'aide d'un modèle élastique linéaire au premier ordre.

Le schéma de la Figure 2.2.1-c représente un équilibre local supposant que la rotation de section n'est pas nulle, et donc que, globalement, les rotations relatives entre différentes sections (à distance finie l'une de l'autre) peuvent être finies. En d'autres termes, l'orientation des efforts internes N et T peut évoluer d'une quantité infinitésimale $d\theta$ entre deux abscisses séparées de dx . Les trois équations d'équilibre s'écrivent alors

$$\begin{cases} dM &= Tdx \\ T &= (T + dT) \cos d\theta + (N + dN) \sin d\theta \\ N &= (N + dN) \cos d\theta - (T + dT) \sin d\theta \end{cases} \quad (2.2.3)$$

soit, en négligeant les termes d'ordres plus élevés,

$$dM = Tdx \quad ; \quad dT = -Nd\theta \quad ; \quad dN = Td\theta \quad (2.2.4)$$

de sorte qu'il existe maintenant un couplage entre les deux efforts internes N et T . A ces trois équations d'équilibre, on peut ajouter l'équation constitutive reliant le moment de flexion et la courbure θ' , selon l'hypothèse de Bernoulli, de sorte à obtenir

4. supposer que les efforts internes ne changent pas d'orientation sur la longueur d'un élément infinitésimal consiste à supposer que les déplacements transversaux sont petits

$$M' = T \quad ; \quad T' = -N\theta' \quad ; \quad N' = T\theta' \quad ; \quad M = -EI\theta', \quad (2.2.5)$$

un ensemble de quatre équations différentielles de premier ordre dont les inconnues sont $M(x)$, $N(x)$, $T(x)$ et $\theta(x)$, qui doivent être résolues avec quatre conditions limites. Dans l'exemple de l'instabilité de la barre d'Euler, les conditions limites sont que le moment de flexion est nul aux deux extrémités et que l'effort interne est égal à P aux deux extrémités⁵.

Le système d'équations 2.2.5 a une portée bien plus large que l'équation 2.1.2 gouvernant l'équilibre de la colonne comprimée. En effet, cet ensemble d'équations a été obtenu à partir d'une configuration d'équilibre local, qui a été choisie de façon arbitraire le long de la poutre. Elles sont donc valables partout entre les deux bornes du domaine d'intégration (domaine sur lequel les équations différentielles doivent être résolues). On peut également constater ceci d'une autre manière. Dans l'équation 2.1.2, le paramètre λP apparaît explicitement alors qu'il est traité comme une condition limite dans 2.2.5. C'est bien la preuve que la seconde formulation est plus générale que la première ; elle traduit un équilibre local qui est fondamentalement valable quelles que soient les conditions limites. En conséquence, l'équation 2.1.2 peut être obtenue comme un cas particulier de 2.2.5. Nous montrons ceci dans la suite.

Avant, au lieu de résoudre quatre équations différentielles d'ordre 1, on peut également reformuler le problème de façon à faire apparaître une équation d'ordre 4. En effet, on obtient successivement $T = M' = -EI\theta''$ et donc $N' = -EI\theta''\theta'$. De plus, puisque $T' = -N\theta' = -EI\theta'''$, on peut obtenir un système de deux équations

$$\begin{cases} N' = -EI\theta''\theta' \\ N\theta' = EI\theta''' \end{cases} \quad (2.2.6)$$

dont les deux inconnues sont $N(x)$ et $\theta(x)$. Finalement, en isolant $N(x)$ de la seconde relation et en substituant sa dérivée dans la première, on trouve

$$\theta''''\theta' - \theta'''\theta'' + \theta''\theta'^3 = 0 \quad (2.2.7)$$

dont les quatre conditions limites sont, pour l'exemple de l'instabilité de la poutre d'Euler, la connaissance du moment de flexion aux deux extrémités, soit $\theta'(0) = \theta'(\ell) = 0$ et de l'effort interne soit $-\lambda P \cos \theta(0) = EI\theta'''(0)/\theta'(0)$ et $-\lambda P \cos \theta(\ell) = EI\theta'''(\ell)/\theta'(\ell)$. L'équation 2.2.7 régit le comportement d'une poutre sans poids (sans charge transversale ou axial répartie le long de la poutre) en grandes rotations. Elle porte de nom d'*elastica sans poids* (weightless elastica) dont les premières solutions ont été dessinées par Euler. Cette équation ne possède des solutions analytiques que dans quelques rares cas, qui sortent du cadre de ce cours.

Il est important de distinguer deux types d'hypothèses dans la théorie non linéaire de poutres : **grands déplacements** et **grandes rotations**. Un modèle incluant

5. en éliminant $d\theta$ des deux dernières équations de 2.2.4, on trouve $NdN + TdT = 0$, soit que $\sqrt{N^2 + T^2}$ la résultante des forces internes dans la section droite est constante.

les grandes rotations, comme celui de l'elastica, est le plus général. On dit qu'il correspond à des grandes rotations car aucune hypothèse n'a été faite pour déterminer la courbure de la poutre (rigoureusement, la courbure est la dérivée de la rotation de section, et c'est bien ce qui a été considéré). Une particularisation de cette théorie en grandes rotations est la théorie en grands déplacements qui suppose, notamment, que la courbure peut être assimilée à la dérivée seconde du déplacement transversal à la corde. Pour obtenir la formulation en grands déplacements à partir d'un équilibre local, il était nécessaire de considérer la rotation relative entre deux faces de l'élément infinitésimal, de sorte qu'une rotation finie puisse apparaître après intégration.

Nous pouvons démontrer qu'en faisant l'hypothèse de petites rotations, mais en conservant cependant une formulation non-linéaire (en grands déplacements, donc), on peut retrouver l'équation 2.1.2, obtenue par équilibre global. En effet, si on suppose que les rotations sont petites, on peut écrire $\theta = v'$ et donc la seconde équation de 2.2.6 devient

$$EIv'''' - Nv'' = 0 \quad (2.2.8)$$

qui est très similaire à la dérivée seconde de 2.1.2. Il rester à prouver que, en petites rotations, $N = -\lambda P$ c'est-à-dire que l'effort axial est constant. En observant que la première équation de 2.2.6 possède l'intégrale première $N = N_0 - EI\theta'^2/2$ et en admettant que la variation d'inclinaison θ' est négligeable le long de la barre, on trouve $N_0 = -\lambda P$ à l'aide de la condition limite. Une autre approche consiste à repartir de $dN = -T d\theta$ et $dT = N d\theta$ dans 2.2.4 et à éliminer T pour obtenir

$$\frac{d^2 N}{d\theta} + N(\theta) = 0 \quad (2.2.9)$$

dont la solution est $N(\theta) = N_a \sin \theta + N_b \cos \theta$. En petites rotations, on trouve $N = N_a v' + N_b$ qui est maintenant paramétré par l'abscisse linéaire x . En $x = \ell/2$, la pente est nulle par symétrie et l'effort axial est égal à $-\lambda P$. Donc $N_b = -\lambda P$. Puisque nous étions intéressés à développer une solution en petites rotations, on peut négliger N_a et se limiter à observer des solutions qui sont valables tant que $|N_a v'| \ll |\lambda P|$.

2.2.3 Formulation énergétique de l'équilibre

Les structures étudiées dans le cadre de ce cours sont des exemples de systèmes conservatifs. Cela signifie que les déformations de la structure sont élastiques⁶ et que les forces extérieures dérivent d'un potentiel⁷. Le potentiel dont dérive les forces extérieures, noté U est généralement, conventionnellement, défini comme étant l'opposé

6. éventuellement non-linéaires, mais réversibles ; on appelle cela *hyper-élastique*

7. Le travail d'une force $\mathbf{F}$ sur une particule de matière se déplaçant d'un point $\mathbf{r}_0$ à un point $\mathbf{r}_i$ est défini par

$$W = \oint_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

du travail de forces extérieures. En notant l'énergie potentielle interne V (c'est-à-dire le potentiel dont dérivent les efforts internes), on obtient une définition de l'**énergie potentielle totale**

$$H := U + V. \quad (2.2.10)$$

Ces deux composantes de l'énergie potentielle totale $H[v(x); \mathbf{p}]$ dépendent du champ de déplacement $v(x)$ qui est a priori inconnu, ainsi que de ses dérivées et d'un ensemble de paramètres éventuels $(P, \lambda, K, \dots)$ qui sont regroupés sous le symbole $\mathbf{p}$. L'énergie potentielle totale $H[v(x); \mathbf{p}]$ est donc une fonctionnelle, puisque c'est une fonction des fonctions $v(x)$, $v'(x)$, etc. Puisqu'on ne sait pas *a priori* jusqu'à quel ordre de dérivée la suite s'arrête, on note simplement $H[v(x); \mathbf{p}]$.

Au lieu de résoudre une équation différentielle pour obtenir les configurations d'équilibre en fonction des différents paramètres du problème, dans l'approche énergétique les configurations d'équilibre $v_*(x)$ sont obtenues **en imposant qu'elles satisfassent bien les conditions limites et en exprimant que $v_*(x)$ soit un point stationnaire de l'énergie potentielle totale $H[v_*(x); \mathbf{p}]$** . Ceci signifie que toute perturbation infinitésimale $\varepsilon\eta(x)$ qui est aussi cinématiquement admissible ne modifie pas la valeur de l'énergie potentielle totale. Ceci correspond au théorème fondamental des travaux virtuels qui stipule que, à l'équilibre, le travail virtuel de forces extérieures est nul pour tout déplacement virtuel cinématiquement admissible.

Exemple. Nous verrons ci-dessous que, dans le cas de la stabilité de la poutre d'Euler, $H[v(x); \mathbf{p}]$ s'exprime par

$$H[v(x); EI, \lambda P] = \int_0^\ell \left(EI \frac{v''^2}{2} - \lambda P \frac{v'^2}{2} \right) dx. \quad (2.2.11)$$

L'énergie potentielle totale est définie à une constante près. Cette constante est choisie égale à 0 dans la configuration initiale, lorsque $v(x) = 0$ et $v'(x) = 0$. On exprime que $v_*(x)$ est une configuration d'équilibre pour autant que cette fonction soit cinématiquement admissible (satisfasse les conditions limites) et qu'elle constitue un point stationnaire de la fonctionnelle. En d'autres termes, une petite variation $\varepsilon\eta(x)$ cinématiquement admissible ajoutée à $v_*(x)$ ne devrait pas changer $H[v(x); \mathbf{p}]$ à l'ordre ε . On peut écrire $H[v_*(x) + \varepsilon\eta(x); \mathbf{p}]$ explicitement⁸

$$H[v_* + \varepsilon\eta] = \int_0^\ell \left(EI \frac{(v_*'' + \varepsilon\eta'')^2}{2} - \lambda P \frac{(v_*' + \varepsilon\eta')^2}{2} \right) dx = 0 \quad (2.2.12)$$

Cette intégrale dépend *a priori* du chemin parcouru entre $\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{r}_i$. Cependant, si le résultat de cette intégrale ne dépend pas du chemin choisi, alors W ne dépend que des positions initiale et finale de la force appliquée et $W = W(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i, \mathbf{F})$ et la force est dite conservative.

8. pour simplifier la notation, on laisse momentanément tomber les paramètres $\mathbf{p}$ dans les arguments de H .

et développer cette expression en série de Taylor autour de $\varepsilon = 0$, soit

$$H[v_\star + \varepsilon\eta] = H[v_\star] + \varepsilon \int_0^\ell (EI v_\star''\eta'' - \lambda P v_\star'\eta') dx + \text{ord}(\varepsilon^2) \quad (2.2.13)$$

où $H[v_\star]$ correspond à l'énergie potentielle totale associée à la configuration d'équilibre $v_\star$. Exprimer que $v_\star(x)$ est une configuration d'équilibre revient donc à assurer que le coefficient de ε dans 2.2.13 soit égal à zéro. En intégrant le premier terme de ce coefficient une fois par parties, on trouve

$$[EI v_\star''\eta']_0^\ell - \int_0^\ell (EI v_\star'''\eta' + \lambda P v_\star'\eta') dx = 0. \quad (2.2.14)$$

La variation est nulle car $v_\star(x)$ respecte les conditions limites, donc $v_\star''(0) = v_\star''(\ell) = 0$ et, puisque la déformée $\eta(x)$ est choisie arbitrairement, tout en étant cinématiquement admissible, il faut nécessairement que l'intégrant s'annule, soit

$$EI v_\star''' + \lambda P v_\star' = 0. \quad (2.2.15)$$

En intégrant une fois cette expression par rapport à x , puis en utilisant les conditions limites en $x = 0$ pour éliminer la constante d'intégration, on retrouve l'équation différentielle gouvernant l'équation de la colonne rectiligne simplement appuyée soumise au flambement.

Dans l'exemple de la barre infiniment rigide avec un ressort à son extrémité inférieure, nous verrons que l'énergie potentielle totale s'exprime par

$$H[\varphi; K, \lambda P\ell] = K \frac{\varphi^2}{2} - \lambda P\ell(1 - \cos \varphi). \quad (2.2.16)$$

A nouveau, on exprime que la configuration déformée, paramétrée par le scalaire φ est en équilibre en exprimant que la solution $\varphi_\star$ est un point stationnaire de $H[\varphi]$. Dans ce cas, on peut simplement calculer la dérivée de l'énergie potentielle totale par rapport à φ , $\partial_\varphi H = K\varphi - \lambda P\ell \sin \varphi$, ou bien procéder à l'aide d'une perturbation d'ordre ε comme précédemment

$$H[\varphi_\star + \varepsilon\eta] = K \frac{(\varphi_\star + \varepsilon\eta)^2}{2} - \lambda P\ell + \lambda P\ell \cos(\varphi_\star + \varepsilon\eta). \quad (2.2.17)$$

Un développement en série de Taylor autour de $\varepsilon = 0$ donne

$$H[\varphi_\star + \varepsilon\eta] = H[\varphi_\star] + \varepsilon\eta [K\varphi_\star - \lambda P\ell \sin \varphi_\star] + \text{ord}(\varepsilon^2). \quad (2.2.18)$$

Compte tenu que le coefficient de ε doit s'annuler, pour traduire la stationnarité du point $\varphi_\star$, on retrouve bien l'équation d'équilibre 2.1.9.

Afin de pouvoir traiter des cas plus généraux que ces deux exemples, on étudie dans la suite les différents types de contribution à l'énergie potentielle totale.

Energie potentielle de déformation élastique. A l'échelle d'une fibre de matériau en extension, on peut calculer l'énergie potentielle de déformation en intégrant les contraintes sur le chemin des déformations. En se limitant au domaine élastique, on obtient

$$\frac{U}{\mathcal{V}} = \int_0^\epsilon \sigma d\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{1}{2} E \epsilon^2$$

où E représente le module de Young du matériau, ϵ la déformation de la fibre concernée et $U/\mathcal{V}$ représente une énergie potentielle de déformation interne, par unité de volume. On vérifie d'ailleurs que $\frac{1}{2} E \epsilon^2$ a bien les unités de J/m^3 .

Energie potentielle de déformation dans un élément tendu (barre de treillis ou ressort). Dans un élément tendu, l'énergie potentielle par unité de longueur $[J/m]$ s'exprime par l'énergie potentielle par unité de volume multipliée par la section droite (étant donné que la contrainte est uniforme sur la section droite), c'est-à-dire par la moitié du produit entre la déformation axiale constante sur la section, mais éventuellement variable sur la longueur de la barre $[-]$ et l'effort axial $[N]$. L'énergie interne de déformation s'exprime donc par

$$U = \int_0^\ell EA \frac{u'^2}{2} dx.$$

Si l'effort axial est constant dans la barre (treillis ou ressort), il en est de même de la déformation u' et donc

$$U = EA\ell \frac{u'^2}{2}.$$

Dans ce cas, on peut également relier la déformation axiale à l'allongement Δ , $\epsilon := u' = \Delta/\ell$, de sorte que l'énergie interne de déformation s'exprime aussi par

$$U = k \frac{\Delta^2}{2}$$

où $k = EA/\ell$ représente une constante de raideur d'un ressort, de façon générique, ou la raideur extensionnelle d'une barre de treillis.

Energie potentielle de déformation dans un ressort en rotation. De façon similaire, dans un ressort en rotation, l'énergie potentielle de déformation interne $[J]$ s'exprime par la moitié du produit entre la rotation relative de ses extrémités $[-]$ et le moment de flexion $[Nm]$ auquel il est soumis, soit

$$U = K \frac{\theta^2}{2}.$$

Energie potentielle de déformation dans une poutre fléchie. Dans une poutre en flexion, les différentes fibres constituant la section droite de la poutre ne sont pas tendues de la même façon. En s'appuyant la théorie de Bernoulli pour laquelle la déformation ϵ d'une fibre est proportionnelle à la courbure de la poutre χ et à la distance z par rapport à un axe neutre. En admettant qu'il s'agisse d'une flexion simple d'une poutre à section rectangulaire (pas de moment de flexion composée), on obtient l'énergie de déformation par unité de longueur en intégrant l'énergie volumique sur la largeur b et la hauteur h de la poutre, soit

$$\mathcal{U} = \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} E \epsilon^2 dz dy = \frac{b}{2} E \chi^2 \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = EI \frac{\chi^2}{2}.$$

Dans la théorie des petites rotations, la courbure de la poutre est égale à la dérivée seconde du déplacement transversale (éventuellement au signe près selon les conventions de signes), de sorte que l'énergie de déformation interne s'exprime par

$$U = \int_0^\ell EI \frac{v''^2}{2} dx.$$

Travail de forces extérieures transversales. Lorsqu'une charge par unité de longueur $p(x)$ [N/m] est appliquée sur une poutre dont les déplacements transversaux s'expriment par $v(x)$, elle effectue un travail

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\ell p v dx.$$

Ce travail est l'opposé du potentiel dont dérive les forces extérieures et doit être ajouté dans l'expression de l'énergie potentielle totale. Dans la théorie de l'instabilité critique, où souvent c'est une charge de bifurcation d'équilibre qui est recherchée, on ne considère généralement pas les sollicitations transversales au poutres qui résultent généralement en une instabilité par divergence (voir Section suivante).

Travail de forces extérieures axiales. Une sollicitation axiale λP dont le point d'application subit un déplacement développe également un travail, exprimé par le produit de l'intensité de la force et du raccourcissement de la barre. Ce dernier a deux origines ; d'abord le raccourcissement résultant de la compressibilité axiale de la barre (souvent négligée), ainsi que le raccourcissement de la corde de la poutre résultant de ses déplacements transversaux. Soit s l'abscisse curviligne mesurée le long de la poutre et $v'(s)$ la dérivée du déplacement transversal qui est supposé représenter l'inclinaison de la section, dans une théorie en petites rotations. La projection de ds sur la corde s'exprime par $ds \cos v'$ si bien que la projection de la poutre déformée sur la corde, qui valait initialement ℓ , s'exprime par

$$\int_0^\ell \cos v'(s) ds \simeq \int_0^\ell 1 - \frac{v'^2}{2} ds = \ell - \int_0^\ell \frac{v'^2}{2} ds.$$

Le raccourcissement de la barre s'exprime donc par

$$\delta = \int_0^\ell \frac{v'^2}{2} ds \simeq \int_0^\ell \frac{v'^2}{2} dx$$

puisque les deux abscisses sont très proches en configuration de petites rotations. Par conséquent, le travail de la force extérieure λP s'exprime par

$$V = \frac{1}{2} \lambda P \int_0^\ell v'^2 dx.$$

2.2.4 Les degrés de liberté

Les deux exemples étudiés jusqu'ici sont (i) d'une part celui d'une colonne continue possédant un nombre infini de degrés de liberté et pour laquelle l'équilibre se traduit par une équation différentielle, (ii) d'autre part une structure rigide à un degré de liberté, pour laquelle l'équilibre se traduit par une équation algébrique à une inconnue. L'exemple de la Figure 2.2.2 est un exemple d'une structure à deux degrés de liberté, car la configuration déformée est parfaitement connue dès lors que deux degrés de libertés (les rotations φ_1 et φ_2 par exemple) sont connues.

On peut démontrer en partant d'une méthode d'équilibre global et de coupes appropriées que les équations traduisant l'équilibre de cette structure (en petites rotations) sont

$$\begin{cases} K\varphi_1 &= \lambda P (2\varphi_1 + \varphi_2) \ell \\ K\varphi_2 &= \lambda P (\varphi_1 + \varphi_2) \ell \end{cases}$$

De même, on pourrait montrer que l'énergie interne totale s'exprime par

$$\begin{aligned} H[(\varphi_1, \varphi_2), \lambda P, \ell] &= K \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2} - \lambda P \ell (1 - \cos \varphi_1) - \lambda P \ell (1 - \cos(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ &\simeq \frac{1}{2} [(K - 2\lambda P \ell) \varphi_1^2 - 2\lambda P \ell \varphi_1 \varphi_2 + (K - \lambda P \ell) \varphi_2^2] \end{aligned}$$

et on pourrait retrouver les deux équations algébriques traduisant l'équilibre du corps en exprimant que l'énergie totale est stationnaire dans le voisinage d'une configuration d'équilibre (voir exercices proposés).

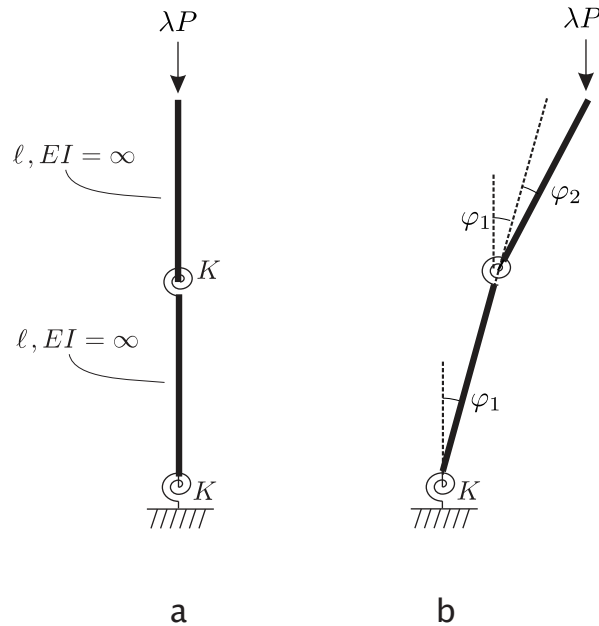


FIGURE 2.2.2 – Instabilité par bifurcation de la barre rigide avec encastrement élastique.

2.2.5 Résumé

Pour conclure, nous venons de voir qu'il existe trois méthodes différentes pour exprimer l'équilibre d'une structure :

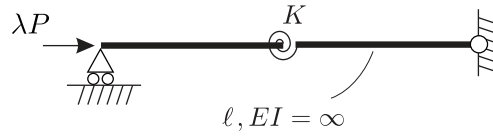
- une méthode d'équilibre global se basant éventuellement sur des coupes ; elle résulte en une équation différentielle ou algébrique dans laquelle apparaissent les paramètres du problème, notamment le multiplicateur des charges λ ,
- une méthode d'équilibre local, permettant d'écrire la ou les équations différentielles du problème en faisant intervenir ses conditions limites de façon totalement séparée,
- une méthode énergétique qui peut être développée pour tous les systèmes conservatifs ; elle résulte en une intégrale première du mouvement.

Dans la suite, c'est essentiellement l'approche énergétique qui sera utilisée.

2.2.6 Exercices

Exercice 1. Etablissez les équations d'équilibre de la structure à deux degrés de liberté de la Figure 2.2.2.

Exercice 2. Etablissez les équations d'équilibre de la structure à deux degrés de liberté de la figure ci-dessous.



2.3 Concept de stabilité d'un équilibre

2.3.1 Généralités

La définition rigoureuse de la stabilité structurelle remonte aux travaux de Lyapounov, Chetayev, LaSalle, Langhaar durant les années 60, en tant que cas particulier de l'équation du mouvement. Étant donné que l'équation du mouvement s'applique à des structures dont le comportement dynamique est pris en compte (et que ceci se trouve être la seconde partie de ce cours), nous allons recourir à une approche plus heuristique de la définition de stabilité.

On considère l'état, éventuellement déformé, d'une structure soumise à un ensemble de forces extérieures appliquées de manière quasi-statique. Dans cet état déformé, les forces extérieures appliquées sont en équilibre avec les contraintes à l'intérieur du matériau. Admettons maintenant que, pour un niveau quelconque de l'intensité de ces forces extérieures, on impose une petite perturbation à cette structure en équilibre. Si la structure réagit par des oscillations de petites amplitudes autour de la position d'équilibre, cette configuration d'équilibre est dite **stable**. Ces petites perturbations peuvent être autant des perturbations sur les positions que sur les vitesses et, par "petites", nous entendons aussi petites que voulu (au sens d'une limite mathématique). En revanche, le niveau des sollicitations imposées est supposé rester inchangé durant l'application de ces petites perturbations. Par contre si la structure tend à continuer d'osciller indéfiniment ou si l'amplitude de ces oscillations tend à augmenter avec le temps, la structure est dite **instable**⁹.

Partant d'une structure en configuration initiale qui n'est soumise à aucune sollicitation, on s'attend à ce que la configuration d'équilibre soit stable, du moins pour une structure du génie civil qui doit remplir ses fonctions. En augmentant le multiplicateur des charges qui sont appliquées sur la structure, la configuration d'équilibre peut devenir instable, et généralement le reste si l'intensité de la sollicitation est augmentée davantage. La transition entre ces deux types de stabilité correspond à un état **critique**. Le multiplicateur des charges qui y correspond est appelé *multiplicateur critique*. Étant donné qu'à une valeur du multiplicateur ne correspond pas nécessairement qu'une seule configuration d'équilibre (voir exemple du cadre de Lee), pour éviter toute confusion, il est possible, dans certains cas, de devoir associer un état critique à cette valeur du multiplicateur critique de façon à être suffisamment précis.

La Figure 2.3.1-a illustre ces concepts de stabilité en considérant les équilibres possibles d'une bille posée sur une surface courbe et rugueuse, et soumise à l'action de

9. On fait parfois la distinction entre ces deux cas en disant que l'équilibre est *neutre* si les oscillations persistent et *instable* si leur amplitude augmente.

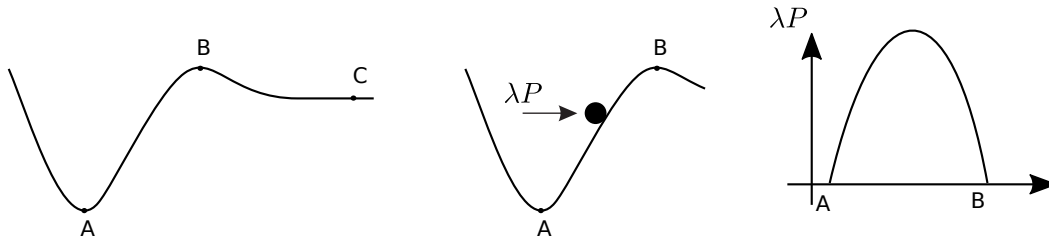


FIGURE 2.3.1 – Illustration du concept d'équilibre stable (A), instable (B) et neutre (C).

la gravité. L'avantage de cet exemple est que l'énergie potentielle totale s'apparente au profil représenté puisqu'il n'y a dans cet exemple que l'énergie potentielle de la bille. Les points A et B et tous les autres points où la pente est horizontale sont des points d'équilibre en l'absence de forces extérieures appliquées (voir définition de la stabilité comme un point stationnaire de l'énergie potentielle totale). Le point A est un point d'équilibre stable, le point B est un point d'équilibre instable et le point C est un point d'équilibre neutre.

Cette définition de la stabilité est une définition infinitésimale. Dans la réalité, la notion de variation d'intensité infiniment petite est difficile à maîtriser. Le concept de stabilité sur base de cette définition infinitésimale peut éventuellement être modifié dans un contexte de déplacements finis. Les deux exemples de la figure 2.3.1-c montrent qu'un équilibre qui est localement instable peut-être stable (configuration B) peut en réalité trouver une autre configuration d'équilibre, dans un voisinage plus ou moins lointain, en évoluant vers la configuration A, par exemple. Dans les applications du génie civil, il existe des phénomènes d'instabilité pour lesquels on ne retrouve généralement pas de nouvelle configuration d'équilibre (déversement de poutre, par exemple) et d'autres exemples pour lesquels une nouvelle configuration d'équilibre peut être trouvée assez rapidement, grâce à un regain d'une raideur non linéaire qui se développe après que l'instabilité ne soit apparue (voilement d'une plaque en cisaillement, par exemple). Inversement, un équilibre qui est localement stable peut être instable en version finie.

Notion énergétique de la stabilité pour un système continu

Soit $H[v(x); \mathbf{p}]$ la fonctionnelle représentant l'énergie potentielle totale d'un système dont la déformée s'exprime par la fonction $v(x)$. La condition nécessaire pour qu'un équilibre statique $v_*(x)$ soit stable est que la dérivée seconde de $H[v_*(x) + \varepsilon\eta(x); \mathbf{p}]$ par rapport à ε soit positive quelle que soit la fonction $\eta(x)$ satisfaisant les conditions limites.

Notion énergétique de la stabilité pour un système discret

Soit $H[\mathbf{q}; \mathbf{p}]$ la fonction représentant l'énergie potentielle totale d'un système dont

la déformée s'exprime par les coordonnées généralisées $\mathbf{q}$ ¹⁰. La condition nécessaire pour qu'un équilibre statique $\mathbf{q}_\star$ soit stable est que la dérivée seconde de $H[\mathbf{q}_\star + \varepsilon \mathbf{r}; \mathbf{p}]$ rapport à ε soit positive quelle que soient les valeurs des coordonnées généralisées $\mathbf{r}$.

Poussons donc jusqu'à l'ordre 2 le développement asymptotique précédent. Pour les systèmes continus, on trouve¹¹

$$H[v_\star + \varepsilon \eta; \mathbf{p}] = H[v_\star; \mathbf{p}] + \varepsilon \left[\frac{d}{d\varepsilon} H[v_\star + \varepsilon \eta; \mathbf{p}, \eta] \right]_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\frac{d^2}{d\varepsilon^2} H[v_\star + \varepsilon \eta; \mathbf{p}, \eta] \right]_{\varepsilon=0} + \text{ord}(\varepsilon^3) \quad (2.3.1)$$

et pour les systèmes discrets, on trouve

$$H[\mathbf{q}_\star + \varepsilon \mathbf{r}; \mathbf{p}] = H[\mathbf{q}_\star; \mathbf{p}] + \varepsilon \left[\frac{d}{d\varepsilon} H[\mathbf{q}_\star; \mathbf{p}, \mathbf{r}] \right]_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\frac{d^2}{d\varepsilon^2} H[\mathbf{q}_\star; \mathbf{p}, \mathbf{r}] \right]_{\varepsilon=0} + \text{ord}(\varepsilon^3). \quad (2.3.2)$$

Les conditions pour que les configurations d'équilibres $v_\star$ et $\mathbf{q}_\star$ soient stables sont respectivement que

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} H[v_\star; \mathbf{p}, \eta] > 0$$

quelle que soit la forme $\eta(x)$ représentant la perturbation cinématiquement admissible et que

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} H[\mathbf{q}_\star; \mathbf{p}, \mathbf{r}] > 0$$

quelles que soient les coordonnées $\mathbf{r}$.

Exemple. Dans le cas de la stabilité de la colonne d'Euler, $H[v(x); \mathbf{p}]$ s'exprime par 2.3.1. La condition de stabilité s'obtient en développant $H[v_\star + \varepsilon \eta]$ au second ordre, soit

$$\begin{aligned} H[v_\star + \varepsilon \eta] &= \int_0^\ell \left(EI \frac{(v_\star'' + \varepsilon \eta'')^2}{2} - \lambda P \frac{(v_\star' + \varepsilon \eta')^2}{2} \right) dx \\ &= H[v_\star] + \varepsilon \int_0^\ell (EI v_\star'' \eta'' - \lambda P v_\star' \eta') dx \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^\ell (EI \eta''^2 - \lambda P \eta'^2) dx + \text{ord}(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

10. par exemple, $\mathbf{p} := \varphi$ dans l'exemple à un degré de liberté.

11. Il faut remarquer que $\frac{d}{d\varepsilon} H[v_\star; \mathbf{p}, \eta]$ est généralement une fonction de la déformée choisie η et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Ceci apparaît clairement sur un exemple.

et en identifiant le coefficient de ε^2 . Nous avons trouvé toutes les configurations d'équilibre en écrivant que le coefficient de ε était égal à 0. Pour $\lambda \neq k^2\pi^2 EI/\ell^2$, il n'y a qu'une configuration d'équilibre, $v_*(x) = 0$ et, pour $\lambda = k^2\pi^2 EI/\ell^2$, il y a une infinité de configurations d'équilibre (dans la version linéarisée), qui sont affines à la forme $\sin(k\pi x/\ell)$. Pour une configuration d'équilibre donnée, et pour une valeur du multiplicateur des charges λ correspondant, la stabilité est assurée s'il est impossible de trouver une fonction $\eta(x)$ qui satisfait les conditions limites et qui est telle que

$$\int_0^\ell (EI\eta''^2 - \lambda P \eta'^2) dx \leq 0.$$

On comprend bien que si $\lambda = 0$, ceci est effectivement impossible. De plus, on peut démontrer qu'il est impossible de rendre le résultat de l'intégrale négatif, tant que $\lambda P < \lambda_{cr} P = \pi^2 EI/\ell^2$. Ensuite, en choisissant $\eta(x) = \sin(\pi x/\ell)$, on voit que

$$\int_0^\ell (EI\eta''^2 - \lambda P \eta'^2) dx = \int_0^\ell \left(\frac{\pi^4 EI}{\ell^4} \sin^2 \frac{x}{\ell} - \lambda P \frac{\pi^2}{\ell^2} \cos^2 \frac{x}{\ell} \right) dx = \frac{\pi^2}{2\ell} (\lambda_{cr} - \lambda) P. \quad (2.3.4)$$

Donc, puisqu'il est possible de trouver une fonction cinématiquement admissible $\eta(x)$ qui rend cette intégrale négative ou nulle pour $\lambda \geq \lambda_{cr}$, toutes les configurations d'équilibre qui correspondent à une valeur du multiplicateur supérieure ou égale à la valeur critique associée au premier mode sont donc instables.

Exemple. Dans le cas la poutre encastrée de façon semi-rigide, on peut également déterminer les conditions de stabilité. L'énergie potentielle totale s'exprime par

$$H[\varphi; K, \lambda P\ell] = K \frac{\varphi^2}{2} - \lambda P\ell(1 - \cos \varphi) \quad (2.3.5)$$

dans la version en grandes rotations. Le développement en série autour de la position d'équilibre φ_* jusqu'au second ordre donne

$$H[\varphi_* + \varepsilon\eta] = K \frac{(\varphi_* + \varepsilon\eta)^2}{2} - \lambda P\ell + \lambda P\ell \cos(\varphi_* + \varepsilon\eta). \quad (2.3.6)$$

Un développement en série de Taylor autour de $\varepsilon = 0$ donne

$$H[\varphi_* + \varepsilon\eta] = H[\varphi_*] + \varepsilon\eta [K\varphi_* - \lambda P\ell \sin \varphi_*] + \frac{\varepsilon^2 \eta^2}{2} [K - \lambda P\ell \cos \varphi_*] + \text{ord}(\varepsilon^3). \quad (2.3.7)$$

On voit donc que l'équilibre devient indifférent lorsque $K - \lambda_{cr} P\ell = 0$ (en petites rotations). L'équilibre est stable pour $\lambda < \lambda_{cr}$ puisque le coefficient du terme en ε^2 est alors positif, instable sinon. Dans le cas d'un système à un degré de liberté, la dérivée par rapport à ε est similaire à la dérivée par rapport à la coordonnée généralisée. On aurait donc pu obtenir plus rapidement $\partial_\varphi^2 H = K - \lambda P\ell \cos \varphi_*$ dans cet exemple.

2.3.2 Détermination d'un état critique

Dans les paramètres du problème représentés par le symbol générique $\mathbf{p}$, nous avons placé le multiplicateur des charges. Imaginons maintenant que nous partons d'un équilibre stable en $\lambda = 0$ et que le multiplicateur de charge soit augmenté jusqu'à l'apparition d'une instabilité, c'est-à-dire l'apparition d'une charge critique. Dans une structure sans imperfections, la configuration initiale, en équilibre pour λ , reste une configuration d'équilibre jusqu'à un multiplicateur critique λ_{cr} . C'est le plus souvent la stabilité de cette configuration d'équilibre qui intéresse l'ingénieur.

La condition de passage par un état critique est celui d'un état stable à un état indifférent. En d'autres termes, lorsque les dérivées secondes s'annulent,

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} H[v_\star; \mathbf{p}_{cr}, \eta] = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} H[\mathbf{q}; \mathbf{p}_{cr}, \mathbf{r}] = 0, \quad (2.3.8)$$

pour au moins une forme $\eta(x)$ (ou ensemble de coordonnées $\mathbf{r}$), le multiplicateur de charge contenu dans $\mathbf{p}_{cr}$ atteint une valeur critique (de bifurcation).

La Figure 2.3.2 représente l'énergie potentielle totale de la colonne avec un encastrement semi-rigide en base ; sur la gauche dans sa version linéarisée $H[\varphi; K, \lambda P\ell] = (K - \lambda P\ell) \frac{\varphi^2}{2}$, sur la droite dans sa version non linéaire, $H[\varphi; K, \lambda P\ell] = K \frac{\varphi^2}{2} - \lambda P\ell(1 - \cos \varphi)$. Dans la version linéaire, la fonction-potential est une fonction quadratique de φ de sorte que la dérivée seconde soit constante. Lorsque $\lambda = 0$, la concavité de la fonction potentiel est tournée vers le haut. La concavité diminue au fur et à mesure que λ augmente et lorsque $\lambda P\ell = K$, la courbure est nulle. L'équilibre devient indifférent. Ceci définit la charge critique d'instabilité. Dans la version non-linéaire du problème, on observe (bien sûr) que la courbure en $\varphi = 0$ s'annule pour la même valeur du multiplicateur des charges. La courbure n'est cependant pas constante et on voit que la fonction potentiel est strictement positive, sauf en $\varphi = 0$. Lorsque le multiplicateur des charges est supérieur à la valeur critique, on observe que la courbure en φ devient négative, ce qui indique que la configuration d'équilibre $\varphi = 0$ n'est plus stable. Contrairement à la version linéarisée, il existe dans ce cas deux autres configurations d'équilibre (symétriques) qui sont associées à une courbure positive. Elles sont donc stables.

Un état critique correspond donc à la transition entre un état stable et un état instable. Exactement comme il existe deux approches pour établir l'équilibre d'une structure, soit par équilibre local ou global, soit par une méthode énergétique, la stabilité peut également être étudiée de deux façon différentes. Dans la première approche, on a recours à l'approche par équilibre ; dans ce cas, on se doit de perturber la structure étudiée et déterminer la nouvelle configuration d'équilibre, puis déterminer ce qu'elle devient lorsque l'intensité de la perturbation tend vers 0. Si elle persiste, c'est que l'équilibre est critique. Cette approche est relativement lourde, du moins analytiquement, car elle demande de calculer la déformée sous une certain perturbation, ce qui n'est pas toujours facile. De plus, si on s'intéresse à une valeur du multiplicateur des charges, probablement que la déformée de la structure sous

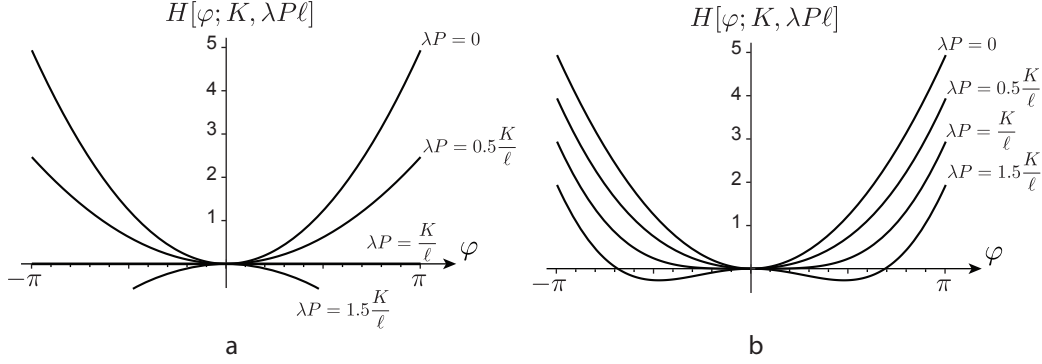


FIGURE 2.3.2 – Bifurcation d'équilibre pour le cas de la poutre infiniment raide encastré à l'aide d'un ressort (a) version linéaire, (b) version non linéaire.

un ensemble de configuration perturbées présente un intérêt limité. C'est pour ces raisons que la seconde approche est plus souvent choisie. La solution des équations d'équilibres perturbées fera l'objet de l'analyse au second ordre (Chapitre 3).

Dans la seconde approche, on se contente d'écrire que la dérivée seconde de l'énergie potentielle totale est nulle dans la configuration critique, pour une valeur (au moins) de $\eta(x)$ ou $\mathbf{r}$, notées $\eta_{cr}(x)$ ou $\mathbf{r}_{cr}$, soit

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} H[v_\star + \varepsilon \eta_{cr}; \mathbf{p}_{cr}, \eta_{cr}] = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2}{d\varepsilon^2} H[\mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}, \mathbf{r}_{cr}] = 0. \quad (2.3.9)$$

En introduisant de nouveau explicitement le potentiel dont dérivent les forces extérieures $U = -\lambda \mathcal{T}_e$, où $\mathcal{T}_e[v(x), \mathbf{p}]$ représente le travail des forces extérieures de référence (c'est-à-dire avec $\lambda = 1$), et l'énergie potentielle de déformation $V[v(x), \mathbf{p}]$, on trouve

$$\frac{d^2 H}{d\varepsilon^2} = \frac{d^2 V}{d\varepsilon^2} - \lambda_{cr} \frac{d^2 \mathcal{T}_e}{d\varepsilon^2} = 0, \quad (2.3.10)$$

de sorte que le multiplicateur de charge critique s'exprime par

$$\lambda_{cr} = \frac{\frac{d^2}{d\varepsilon^2} V[v_\star + \varepsilon \eta_{cr}; \mathbf{p}_{cr}, \eta_{cr}]}{\frac{d^2}{d\varepsilon^2} \mathcal{T}_e[v_\star + \varepsilon \eta_{cr}; \mathbf{p}_{cr}, \eta_{cr}]} \quad \text{ou} \quad \lambda_{cr} = \frac{\frac{d^2}{d\varepsilon^2} V[\mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}, \mathbf{r}_{cr}]}{\frac{d^2}{d\varepsilon^2} \mathcal{T}_e[\mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}, \mathbf{r}_{cr}]} \quad (2.3.11)$$

selon qu'il s'agisse d'un système continu ou discret. Le problème avec cette méthode est que la forme $\eta_{cr}(x)$ ou $\mathbf{r}_{cr}$ qui permet d'annuler la dérivée seconde de l'énergie potentielle totale est inconnue à ce stade. En fait, cette forme est très précisément associée à la valeur du multiplicateur critique et on ne peut rigoureusement les déterminer que toutes les deux à la fois. Ceci est détaillé dans la suite.

Dans la plupart des cas pratiques, un analyse du système linéarisé est suffisante (elle l'est du moins pour ce cours. Donc, toutes les composantes de l'énergie potentielle totale, présentées à la Section 2.2.3, sont des formes quadratiques du champ v , ou des coordonnées généralisées $\mathbf{q}$. En conséquent, et on peut l'observer aussi sur l'exemple

de l'instabilité de la colonne d'Euler, les dérivées secondes de V et $\mathcal{T}_e$ s'identifient également aux valeurs de la fonction elle-même, en remplaçant cependant v par η (et $\mathbf{q}$ par $\mathbf{r}$). En d'autres mots, on peut également évaluer le multiplicateur critique par

$$\lambda_{cr} = \frac{V[\eta_{cr}; \mathbf{p}_{cr}]}{\mathcal{T}_e[\eta_{cr}; \mathbf{p}_{cr}]} \quad \text{ou} \quad \lambda_{cr} = \frac{V[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}]}{\mathcal{T}_e[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}]} \quad (2.3.12)$$

La détermination du multiplicateur et des modes critiques d'une structure continue est discutée à la section suivante. En attendant, dans le cas d'une structure discrète, l'expression ci-dessus peut également s'écrire

$$V[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}] - \lambda_{cr} \mathcal{T}_e[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}] = 0 \quad (2.3.13)$$

où $V[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}]$ et $\mathcal{T}_e[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}]$ sont des formes quadratiques des coordonnées généralisées $\mathbf{p}_{cr}$. Par exemple, pour la barre avec un ressort à son extrémité inférieure, on a

$$V[\mathbf{r}_{cr}; p_{cr}] = \frac{1}{2} K p_{cr}^2 \quad ; \quad \mathcal{T}_e[\mathbf{r}_{cr}; p_{cr}] = \frac{1}{2} P \ell p_{cr}^2 \quad (2.3.14)$$

Pour l'exemple de la Figure 2.2.2, on vérifie facilement,

$$V[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}] = \mathbf{r}_{cr}^T \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \mathbf{r}_{cr} \quad ; \quad \mathcal{T}_e[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}] = \mathbf{r}_{cr}^T \begin{pmatrix} 2P\ell & P\ell \\ P\ell & P\ell \end{pmatrix} \mathbf{r}_{cr} \quad (2.3.15)$$

où $\mathbf{r}_{cr} = (\varphi_1 \quad \varphi_2)^T$. De façon plus générale, puisque V et $\mathcal{T}_e$ sont des fonctions quadratiques positives des coordonnées généralisées $\mathbf{p}_{cr}$, on peut écrire, en toute généralité,

$$V[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}] := \mathbf{r}_{cr}^T \mathbf{K} \mathbf{r}_{cr} \quad ; \quad \mathcal{T}_e[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}] := \mathbf{r}_{cr}^T \mathbf{K}_\sigma \mathbf{r}_{cr} \quad (2.3.16)$$

La matrice $\mathbf{K}$ n'est rien d'autre que la matrice de raideur (linéaire) de la structure. La matrice $\mathbf{K}_\sigma$ est appelée la matrice des contraintes. En substituant ces expressions dans 2.3.13, on obtient

$$\mathbf{r}_{cr}^T (\mathbf{K} - \lambda_{cr} \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{r}_{cr} = 0. \quad (2.3.17)$$

On observe donc que la seule façon de satisfaire cette relation (sans que $\mathbf{p}_{cr}$ ne soit une solution triviale) est que la matrice $(\mathbf{K} - \lambda_{cr} \mathbf{K}_\sigma)$ soit singulière et que

$$(\mathbf{K} - \lambda_{cr} \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{r}_{cr} = 0. \quad (2.3.18)$$

Les multiplicateurs critiques et les modes propres associés sont donc les valeurs et vecteurs propres du système aux valeurs propres généralisé composé des matrices de raideur et des contraintes. La plupart des logiciels d'ingénieur offrent la possibilité de résoudre ce type de problème pour des tailles de matrices allant jusqu'à plusieurs centaines de milliers, voire même quelques millions. C'est donc ainsi que se fait la recherche de mode propres et de multiplicateurs critiques aujourd'hui.

Exemple. Dans l'exemple de la Figure 2.2.2, il n'y a que deux degrés de liberté et les matrices $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}_\sigma$ sont donc de taille 2×2 . Les modes propres et multiplicateurs critiques peuvent donc être calculés à la main. On obtient directement l'expression des multiplicateurs critiques en annulant le déterminant de $(\mathbf{K} - \lambda_{cr}\mathbf{K}_\sigma)$,

$$\det \begin{pmatrix} K - 2\lambda_{cr}P\ell & -\lambda_{cr}P\ell \\ -\lambda_{cr}P\ell & K - \lambda_{cr}P\ell \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{cr} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

avec les modes propres correspondant (vecteurs propres), $\mathbf{r}_{cr} = (1.618, 1)$ et $\mathbf{r}_{cr} = (1, -1.618)$.

2.3.3 Méthode de Rayleigh

Pour les structures continues, nous nous sommes arrêtés à la relation 2.3.12 qui nécessite a priori de connaître le mode d'instabilité η_{cr} qui apparaît. Avec un peu d'expérience, on peut facilement en déterminer une approximation car on a généralement une bonne idée de ce à quoi il devrait ressembler. Il est donc naturellement tentant de remplacer η_{cr} par $\tilde{\eta}_{cr}$ dans la relation 2.3.12 pour obtenir une valeur approchée du multiplicateur critique

$$\tilde{\lambda}_{cr} = \frac{V[\tilde{\eta}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}]}{\mathcal{T}_e[\tilde{\eta}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}]} \quad (2.3.19)$$

Regardons pour commencer ce que le même type de raisonnement donnerait pour une structure discrète. Si on remplace dans $\mathbf{r}_{cr}$ par autre chose que le mode critique associé à la valeur critique λ_{cr} dans

$$\mathbf{r}_{cr}^T (\mathbf{K} - \lambda_{cr}\mathbf{K}_\sigma) \mathbf{r}_{cr} = 0, \quad (2.3.20)$$

on obtient un produit positif car la matrice $(\mathbf{K} - \lambda_{cr}\mathbf{K}_\sigma)$ est singulière, certes, mais toujours définie positive. Cela signifie qu'elle a une, voire quelques, valeur(s) propre(s) égale(s) à 0 et que toutes les autres sont strictement positives. Il en est de même dans la version continue, si on associe un mode propre erroné à un vrai multiplicateur critique de la structure, on obtient l'inégalité

$$V[\tilde{\eta}_{cr}] - \lambda_{cr}\mathcal{T}_e[\tilde{\eta}_{cr}] \geq 0, \quad (2.3.21)$$

le produit ne s'annulant que si $\tilde{\eta}_{cr} = \eta_{cr}$. En isolant λ_{cr} dans cette relation, on trouve

$$\lambda_{cr} \leq \frac{V[\tilde{\eta}_{cr}]}{\mathcal{T}_e[\tilde{\eta}_{cr}]} = \tilde{\lambda}_{cr}. \quad (2.3.22)$$

de sorte que, si on estimait le multiplicateur critique à l'aide d'un mode d'instabilité erroné, on obtiendrait une estimation par excès du vrai multiplicateur critique. Pour

une structure continue, la recherche du multiplicateur critique consiste donc à trouver la forme η qui minimise le *quotient de Rayleigh*

$$\lambda_{cr} = \min_{\eta(x)} \frac{V[\eta]}{\mathcal{T}_e[\eta]}. \quad (2.3.23)$$

Cette méthode est connue sous le nom de **méthode de Rayleigh**. Elle s'applique également aux structures discrètes avec un nombre fini de degrés de libertés.

Il va de soi que la méthode de Rayleigh est une méthode approchée et que l'estimation du multiplicateur critique sera d'autant meilleure que la forme choisie pour évaluer le quotient de Rayleigh sera proche du vrai mode d'instabilité.

Bien qu'apparemment obsolète, car elle ne donne qu'une solution approchée alors qu'une méthode numérique (voir ci-dessous) permettrait d'avoir une estimation plus précise, la méthode de Rayleigh garde tout son intérêt lorsque la solution peut être calculée à la main, et offrir une solution analytique. Elle est approchée, certes, mais le fait que la solution soit analytique permet d'avoir une meilleure compréhension de l'implication de chacun des paramètres du problème.

Exemple. Dans le cas de la stabilité de la colonne d'Euler, l'énergie potentielle de déformation et le travail des forces extérieures s'expriment par

$$V[\eta] = \int_0^\ell EI \frac{\eta''^2}{2} dx \quad ; \quad \mathcal{T}_e[\eta] = \int_0^\ell P \frac{\eta'^2}{2} dx. \quad (2.3.24)$$

Si on choisit $\eta = v_0 \sin \pi x / \ell$ comme approximation du mode d'instabilité (ce qui est la solution exacte dans ce cas), on trouve

$$V[\eta] = v_0^2 \frac{\pi^4 EI}{4\ell^4} \quad ; \quad \mathcal{T}_e[\eta] = v_0^2 \frac{\pi^2 P}{4\ell^2} \quad (2.3.25)$$

et le quotient de Rayleigh donne $\lambda_{cr} P = \pi^2 EI / \ell^2 \simeq 9.87 EI / \ell^2$. Si on avait choisi une déformée approximative quartique, par analogie avec la théorie des poutres, on aurait utilisé¹²

$$\eta(x) = \frac{\ell^4}{24EI} \left(\left(\frac{x}{\ell} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{\ell} \right)^3 + \frac{x}{\ell} \right) \quad (2.3.26)$$

ce qui aurait conduit, tous calculs fait à $\lambda_{cr} P = 9.88 EI / \ell^2$, soit une toute petite sur-estimation. Ceci indique que la forme choisie pour la déformée approchée est relativement similaire à la déformée exacte.

12. qui satisfait toute les conditions aux limites et qui est normalisée à une valeur unitaire à mi-travée

Exemple. On peut également utiliser la méthode de Rayleigh pour les structures discrètes. L'exemple de la structure à un degré de liberté n'a pas vraiment de sens puisque le multiplicateur critique est directement identifié à partir de l'équation d'équilibre. Pour l'exemple à deux degrés de liberté de la Figure 2.2.2, l'application de la méthode de Rayleigh consiste à trouver r_1 et r_2 , composantes de $\mathbf{r}$, qui permettent de minimiser

$$\frac{V[\mathbf{r}]}{\mathcal{T}_e[\mathbf{r}]} = \frac{K}{\lambda P \ell} \frac{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}{(1 - \cos r_1) + (1 - \cos(r_1 + r_2))} \simeq \frac{K}{\lambda P \ell} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 + (r_1 + r_2)^2}, \quad (2.3.27)$$

le second membre étant une approximation en petites rotations. Etant donné que le numérateur et le dénominateur sont des fonctions homogènes de r_1 et r_2 , on voit immédiatement que seul le rapport entre r_1 et r_2 peut être déterminé¹³. On peut écrire le rapport précédent sous la forme

$$\frac{V[\mathbf{r}]}{\mathcal{T}_e[\mathbf{r}]} = \frac{K}{\lambda P \ell} r_2 \frac{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + 1}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)^2} \quad (2.3.28)$$

et on vérifie que rapport dans le dernier facteur est minimum pour $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$. Exactement comme dans l'exemple précédent, il était impossible de déterminer l'amplitude v_0 , on voit également que le mode critique est à nouveau déterminé à une constante multiplicative près. On peut par exemple admettre qu'il s'exprime par $\mathbf{r} = (1.618, 1)$.

Cet exemple est intéressant, mais difficile à généraliser à de nombreux degrés de liberté. Avec la puissance de calcul des ordinateurs modernes, le calcul aux valeurs propres décrit plus haut permet généralement de résoudre le problème beaucoup plus facilement.

2.3.4 Méthode de Ritz-Galerkin

L'exemple à deux degrés de liberté soulève une piste intéressante puisqu'il vient de montrer que la détermination des modes critiques et des multiplicateurs correspondant peut se faire via un calcul traditionnel aux valeurs propres dans le cas d'un système discret. La méthode, dite de Ritz (parfois Galerkin) vise à remplacer un système continu par un système discret en exprimant le champ déformé inconnu comme une combinaison linéaire de plusieurs formes *a priori* déterminées

$$v(x) = q_1 \phi_1(x) + \dots + q_n \phi_n(x) = \mathbf{q}^T \boldsymbol{\phi}. \quad (2.3.29)$$

13. ceci indique également qu'un mode propre ne peut être défini qu'à une constante multiplicative près.

Cette méthode n'est finalement qu'une généralisation de la méthode de Rayleigh où une seule forme $\phi_1(x)$ est retenue. Comme observé préalablement, on peut mettre chacune des composantes de l'énergie potentielle totale sous une forme quadratique, discrète maintenant. Par exemple, l'énergie interne de déformation associée à la flexion élastique d'une barre fléchie s'exprime par

$$\frac{1}{2} \int_0^\ell v'' EI v'' dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \mathbf{q}^T \phi'' EI \phi''^T dx \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}.$$

De même, le travail des forces extérieures de référence s'exprime par

$$\frac{1}{2} \int_0^\ell v' P v' dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \mathbf{q}^T \phi' P \phi'^T dx \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_\sigma \mathbf{q},$$

et le même développement peut être réalisé pour les autres composantes de l'énergie potentielle totale. En conséquence, pour l'exemple de la colonne d'Euler, l'énergie potentielle totale peut s'écrire

$$H[v(x); EI, \lambda P] = \int_0^\ell \left(EI \frac{v''^2}{2} - \lambda P \frac{v'^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{q}, \quad (2.3.30)$$

et le problème peut donc être traité comme celui du système discrétisé, c'est-à-dire avec un nombre fini de degrés de liberté.

Dans le cadre de ce cours, on se limitera à choisir des formes relativement simples pour créer la base ϕ ; de même, à utiliser un nombre limité de formes. Il faut cependant savoir que cette méthode de discrétisation est à la base des éléments finis, pour lesquels les formes choisies ont un support local.

Quoi qu'il en soit, l'approche de Ritz (Galerkin) reste une approximation et la qualité de l'approximation finale dépend de la qualité des formes de bases utilisées pour représenter les modes d'instabilité réels.

Exemple. Instabilité de la colonne d'Euler. On pourrait tenter de calculer le multiplicateur critique à l'aide des deux formes suivantes

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 3\frac{x}{\ell} - 4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 & 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \\ -1 + 6\frac{x}{\ell} - 9\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 & \frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell \end{cases} \quad ; \quad \phi_2(x) = \frac{x}{\ell} - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^4$$

La première est la déformée statique d'une poutre soumise à une charge concentrée en son centre. La seconde est la forme déjà considérée précédemment. Tous calculs faits, on trouve

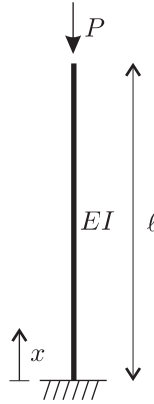
$$\mathbf{K} = \frac{24EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{K}_\sigma = \frac{P}{\ell} \begin{pmatrix} \frac{69}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{17}{35} \end{pmatrix}.$$

En combinant ces deux formes et la méthode décrite ci-dessus, on obtient une approximation de la charge critique de $\lambda_1 P = 9.872EI/\ell^2$, soit une erreur relative de $3 \cdot 10^{-4}$. Puisque nous avons utilisé deux degrés de libertés pour représenter la déformée de la colonne, une seconde charge critique est obtenue par la résolution du problème aux valeurs propres. Elle vaut $\lambda_2 P = 122.8EI/\ell^2$ et est supposée être une approximation du second multiplicateur critique (valeur exacte $4\pi^2 EI/\ell^2 = 39.48EI/\ell^2$). Le résultat n'est pas bon car la forme du second mode propre (deux demi-ondes) ne peut pas être précisément représentée avec les deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 . La méthode de Ritz-Galerkin fournit également les modes propres associés aux multiplicateurs calculés. En l'occurrence, le calcul aux valeurs propres donne $\mathbf{q}_1 = (-0.023, 1)^T$ ce qui montre que la forme ϕ_2 seule est déjà très bonne pour représenter le premier mode.

La méthode de Ritz-Galerkin n'est pas spécialement intéressante pour les structures simples comme la colonne d'Euler. Elle est par contre relativement intéressante dans le cas de structures composées de plusieurs parties, comme dans le cas de portiques ou de structures formées de plusieurs poutres, barres ou colonnes.

2.4 Exercices résolus

Exercice 3. Utilisez les méthodes de Rayleigh et Ritz pour déterminer la charge critique P d'une colonne soumise à une charge axiale constante.



On peut d'abord obtenir une estimation du multiplicateur critique par application du principe de Rayleigh. Dans cet exercice, il s'exprime par

$$\lambda_{cr} = \frac{\frac{EI}{2} \int_0^\ell \eta''^2 dx}{\frac{P}{2} \int_0^\ell \eta'^2 dx} \quad (2.4.1)$$

puisque le travail de la force extérieure se développe dans le raccourcissement de colonne de longueur ℓ et caractérisée par un déplacement transversal $\eta(x)$, et que seule l'énergie de déformation interne par flexion est considérée.

L'approximation est d'autant plus proche de la solution exacte que la déformée choisie $\eta(x)$ est proche de la déformée réelle de la structure, au moment où l'instabilité

apparaît (le mode critique). Considérons d'abord la déformée suivante

$$\eta = A \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2\ell} \right) \quad (2.4.2)$$

pour laquelle

$$\eta' = \frac{A\pi}{2\ell} \sin \frac{\pi x}{2\ell} \quad ; \quad \eta'' = \frac{A\pi^2}{4\ell^2} \cos \frac{\pi x}{2\ell}. \quad (2.4.3)$$

Le potentiel dont dérivent la force extérieure vaut donc

$$W = \frac{P}{2} \int_0^\ell \eta'^2 dx = \frac{P}{2} \int_0^\ell \left(\frac{A\pi}{2\ell} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2\ell} dx = \frac{P}{2} \left(\frac{A\pi}{2\ell} \right)^2 \frac{\ell}{2} = A^2 \frac{\pi^2 P}{16\ell} \quad (2.4.4)$$

et l'énergie interne s'exprime par

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^\ell \eta''^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^\ell \left(\frac{A\pi^2}{4\ell^2} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi x}{2\ell} dx = \frac{EI}{2} \left(\frac{A\pi^2}{4\ell^2} \right)^2 \frac{\ell}{2} = A^2 \frac{\pi^4 EI}{64\ell^3}. \quad (2.4.5)$$

On obtient donc une première estimation de la charge critique,

$$\lambda_{cr} P = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} \simeq 2.47 \frac{EI}{\ell^2} \quad (2.4.6)$$

qui est en réalité la charge critique exacte pour cette colonne avec ces conditions limites. On n'a pas toujours la possibilité d'utiliser des fonctions harmoniques pour étudier la stabilité de ces colonnes. De toute façon, la solution harmonique est rapidement entachée par de composantes hyperboliques, même pour une poutre simple, dès que les conditions limites sont différentes. Il peut donc être intéressant d'utiliser des solutions polynomiales à la place. Considérons d'abord une déformée parabolique

$$\eta = Ax^2 + Bx + C \quad (2.4.7)$$

Deux des trois paramètres de cette expression peuvent être déterminés à l'aide de conditions cinématiques $\eta = 0$ et $\eta' = 0$, ce qui donne alors simplement

$$\eta = Ax^2 \quad (2.4.8)$$

et

$$\begin{aligned} W &= \frac{P}{2} \int_0^\ell \eta'^2 dx = \frac{2A^2 P \ell^3}{3} \\ U &= \frac{EI}{2} \int_0^\ell \eta''^2 dx = 2A^2 EI \ell^3 \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

si bien que la charge critique s'exprime par

$$\lambda_{cr}P = \frac{3EI}{\pi^2}$$

soit une surestimation d'environ 20%. On peut reprocher à la parabolique Ax^2 un certain manque de réalisme car elle ne satisfait pas la condition statique $\eta''(\ell) = 0$. Cela justifie en partie l'erreur de l'ordre de 20%, mais il n'est pas nécessaire que la fonction $\eta(x)$ choisie satisfasse la conditions statiques. Dans ce cas, ce n'aurait pas été possible. Considérons donc maintenant une déformée cubique

$$\eta = Ax^3 + Bx^2 \quad (2.4.10)$$

satisfaisant les deux conditions cinématiques, et où nous utilisons la condition statique $\eta''(\ell) = 0$, soit

$$\eta = A(x^3 - 3x^2\ell). \quad (2.4.11)$$

Les intégrales au numérateur et dénominateur de l'expression du multiplicateur critique valent donc respectivement

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \eta'^2 dx &= \int_0^\ell (3Ax^2 - 6Ax\ell)^2 dx = \frac{24A\ell^5}{5}, \\ \int_0^\ell \eta''^2 dx &= \int_0^\ell (6Ax - 6A\ell)^2 dx = 12A\ell^3. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

La charge critique vaut donc dans ce cas,

$$\lambda_{cr}P = \frac{5EI}{2\ell^2} = 2.5 \frac{EI}{\ell^2},$$

soit à peine 1% au-dessus de la charge critique exacte. Il est également possible de partir de la déformée cubique générique introduite ci-dessus et de ne pas imposer la condition statique $\eta''(\ell) = 0$ correspondant à l'imposition d'un moment de flexion nul à l'extrémité supérieure. En faisant de la sorte, on garde deux degrés de libertés, A et B , pour représenter la déformée de la colonne, mais on viole la condition faible sur le moment de flexion. Il s'agit d'une approche qui est tout à fait semblable à l'approche par éléments finis, où les conditions limites fortes¹⁴ En conservant l'expression plus générale $\eta = Ax^3 + Bx^2$ pour la forme de la petite perturbation ajoutée autour de la configuration d'équilibre $v = 0$, on trouve que le coefficient de ε^2 , ou de la seconde variation de l'énergie potentielle totale, s'écrit

14. conditions s'exprimant en fonction du champ inconnu et de ses dérivées d'un ordre inférieur à la moitié de l'ordre de l'équation différentielle gouvernant le phénomène (4 pour une poutre en flexion, 2 pour un barre en traction, 4 pour un plaque en flexion).

$$\begin{aligned}
\delta^2 H &= \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[EI \int_0^\ell \eta''^2 dx - \lambda P \int_0^\ell \eta'^2 dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[4EI \ell (B^2 + 3AB\ell + 3A^2\ell^2) - \lambda P \left(\frac{4B^2\ell^3}{3} + 3AB\ell^4 + \frac{9A^2\ell^5}{5} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

ou encore

$$\delta^2 H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12EI\ell^3 - \frac{9\lambda P\ell^5}{5} & 6EI\ell^2 - \frac{3}{2}\lambda P\ell^4 \\ 6EI\ell^2 - \frac{3}{2}\lambda P\ell^4 & 4EI\ell - \frac{4\lambda P\ell^3}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \tag{2.4.14}$$

On obtient les multiplicateurs critiques en annulant le déterminant de la matrice ci-dessus. Après simplification du polynôme caractéristique, on trouve

$$\frac{3}{5} (\lambda P)^2 - \frac{104}{5} \frac{EI}{\ell^2} \lambda P + 48 \left(\frac{EI}{\ell^2} \right)^2 = 0 \tag{2.4.15}$$

soit deux racines dont la plus petite vaut

$$\lambda_{cr} P = \frac{52 - 8\sqrt{31}}{3} \frac{EI}{\ell^2} = 2.486 \frac{EI}{\ell^2} \tag{2.4.16}$$

à moins d'un pourcent de la solution exacte.

Notons également que si nous avons utilisé la déformée sous une charge transversale concentrée F en tête de la colonne

$$\eta = \frac{-Fx^2}{6EI} (3\ell - x), \tag{2.4.17}$$

on aurait obtenu

$$\lambda_{cr} P = 2.5 \frac{EI}{\ell^2}. \tag{2.4.18}$$

Exercice 4. Une colonne encastree libre de hauteur ℓ et de raideur EI est assemblée en base à l'aide d'un assemblage semi-rigide de raideur K . On voudrait évaluer l'influence de la raideur de ce ressort sur la stabilité d'ensemble de la colonne. On s'attend à ce que, si la raideur est "grande", la charge critique de la colonne soit égale à $\pi^2 EI/4\ell^2$, et diminue vers 0 pour de "petites" valeurs de la raideur en rotation de l'assemblage. (i) Préciser ce que l'on entend par "grande" et "petite", (ii) quantifier plus précisément ce résultat.

La notion de grandeur relative de la raideur de l'assemble peut être résolue par une approche dimensionnelle, en observant que le problème considéré s'exprime à l'aide de 3 paramètres, EI , ℓ et K , et de deux unités (longueur et force). La solution du problème doit donc pouvoir s'exprimer à l'aide du seul paramètre adimensionnel $\kappa = K\ell/EI$. Il est donc clair que la grandeur du paramètre K doit être comparée à

EI/L . Lorsque $\kappa \gg 1$, par exemple $\kappa = 10$ et plus, on peut donc s'attendre à ce que l'assemblage en base soit suffisamment raide que pour avoir une influence faible sur le multiplicateur critique. Ceci est évalué plus précisément dans la suite.

En exprimant la déformée du mode critique par

$$\eta(x) = A \frac{x}{\ell} + B \left[1 - \cos \left(\frac{\pi x}{2\ell} \right) \right], \quad (2.4.19)$$

on trouve que l'énergie interne et le travail des forces extérieures s'expriment par

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^\ell \eta''^2(x) dx + \frac{K}{2} \eta^2(0) = \frac{\pi^4 EI B^2}{64 L^3} + \frac{A^2 K}{2 L^2} \quad (2.4.20)$$

$$\mathcal{T}_e = \frac{P}{16L} (8A^2 + 16AB + \pi^2 B^2) \quad (2.4.21)$$

De sorte que l'énergie potentielle totale puisse aussi s'exprimer sous la forme

$$H = U - \lambda \mathcal{T}_e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{K}{L^2} - \frac{\lambda P}{L} & -\frac{\lambda P}{L} \\ -\frac{\lambda P}{L} & \frac{EI\pi^4}{32L^3} - \frac{\lambda P\pi^2}{8L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

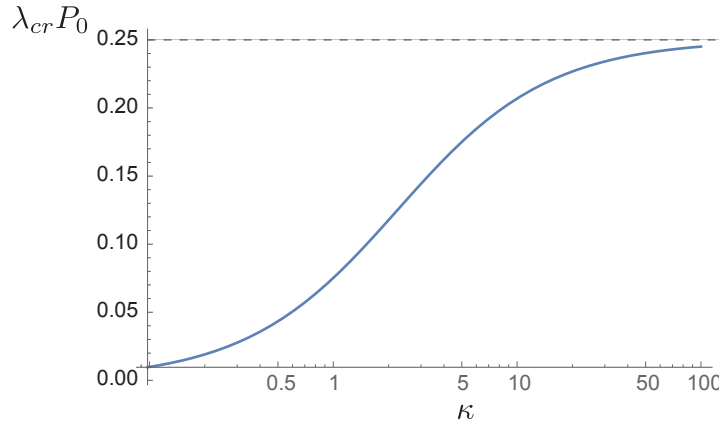
En introduisant les notations $\kappa = K\ell/EI$ et $P_0 = \pi^2 EI/\ell^2$, la matrice apparaissant dans l'expression ci-dessus peut être réécrite sous la forme

$$\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_\sigma = \frac{P_0}{L} \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\pi^2} - \frac{\lambda P}{P_0} & -\frac{\lambda P}{P_0} \\ -\frac{\lambda P}{P_0} & \frac{\pi^2}{32} \left(1 - 4 \frac{\lambda P}{P_0} \right) \end{pmatrix},$$

dont le déterminant s'annule lorsque

$$\lambda = P_0 \frac{\pi^2 + 4\kappa \pm \sqrt{16(\kappa + 8)\kappa - 8\pi^2\kappa + \pi^4}}{8(\pi^2 - 8)}. \quad (2.4.22)$$

La plus petite de ces deux valeurs (avec le signe “-”) est représentée à la figure ci-dessous. On y observe effectivement que si κ est grand, disons égal à 10 ou plus, alors l'influence sur la stabilité de la colonne s'amointrit, et la charge critique tend vers celle d'une colonne encastree-libre ($P_0/4$).



2.5 Exercices proposés

Exercice 5. L'équation de l'élastique

$$EIv'''' + p = 0$$

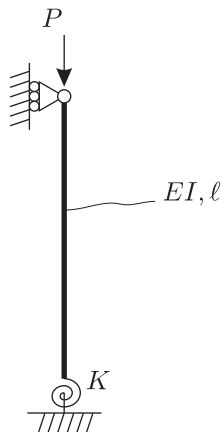
gouverne les déplacements transversaux d'une poutre soumise à une pression transversale constante. Ré-établisiez cette équation à l'aide des trois approches permettant d'obtenir les équations d'équilibre.

Exercice 6. Vérifiez que, dans l'exemple de l'instabilité de la colonne d'Euler, l'équilibre est stable pour toute valeur de $\lambda < \lambda_{cr}$ et que l'équilibre est instable pour toute valeur de $\lambda > \lambda_{cr}$.

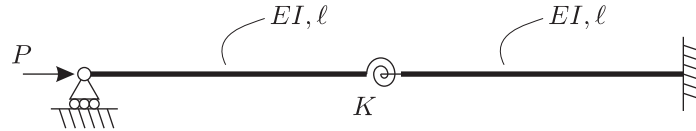
Exercice 7. Déterminez la charge critique d'instabilité d'une colonne bi-articulée soumise à son poids propre.

Exercice 8. Déterminez l'influence de la déformabilité axiale EA d'une colonne bi-articulée soumise à une charge axiale constante sur sa charge critique d'instabilité. Exprimez le résultat en fonction du rapport entre le rayon de giration i_z de la section droite et la longueur ℓ de la colonne.

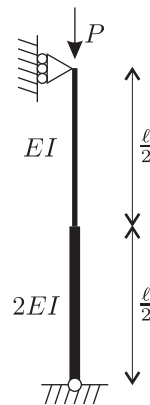
Exercice 9. Utilisez la méthode énergétique pour déterminer la charge critique P de la colonne représentée ci-dessous. Représentez votre estimation de la charge critique en fonction de la raideur réduite du ressort en base, $K\ell^3/EI$. Commentez les deux comportements limites $K \rightarrow +\infty$ and $K \rightarrow 0$.



Exercice 10. Utilisez la méthode énergétique pour déterminer la charge critique P de l'exemple ci-dessous.

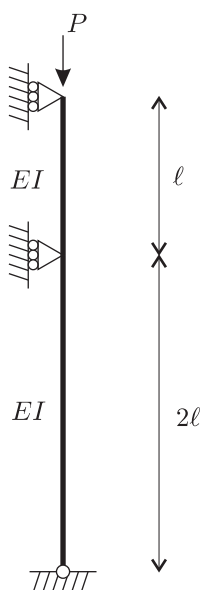


Exercice 11. Estimez la charge critique P de la colonne ci-dessous et comparez-la à celle d'une colonne simple doublement appuyée. Quelle serait la raideur flexionnelle d'une colonne à section uniforme qui aurait la même charge critique ?



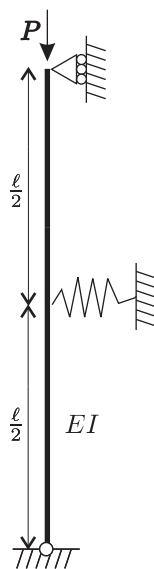
Tip : utilisez soit une sinusoïde (Rayleigh), soit une superposition de sinusoïdes (Ritz) pour déterminer la charge critique. Solution : $P_{cr} = 14.8EI/\ell^2$ (1 sinusoïde), $P_{cr} = 13.3EI/\ell^2$ (sinusoides). A comparer à la solution exacte $P_{cr} = 12.8EI/\ell^2$.

Exercice 12. Dessinez l'allure de la déformée de cette colonne au moment de son instabilité. Estimez la charge critique de cette colonne en utilisant une forme simple (une sinusoïde par exemple) sur chaque tronçon. Essayer ensuite la superposition de deux sinusoïdes, l'une à une demi-onde et l'autre à deux demi-ondes sur la longueur 3ℓ .



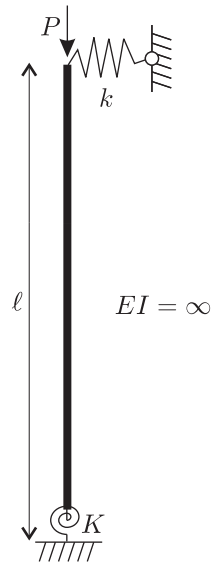
Solution : $P_{cr} = 4.93EI/\ell^2$ (sinusoïde sur chaque tronçon), $P_{cr} = 3.73EI/\ell^2$ (2 sinusoïdes). Solution exacte $P_{cr} = 3.72EI/\ell^2$.

Exercice 13. A l'aide de la méthode énergétique, évaluez la charge critique de la structure représentée ci-dessous. Exprimez le résultat en fonction de la raideur réduite $K\ell^3/EI$.

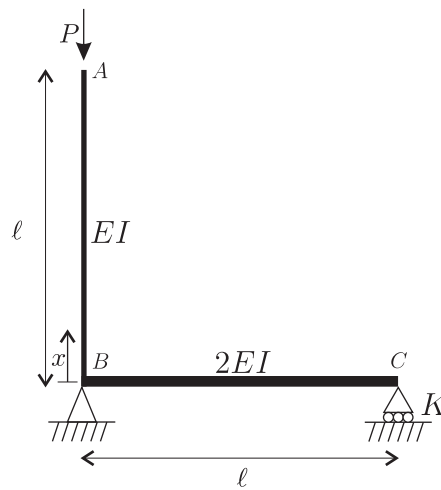


Tip : utilisez un polynôme de degré 4.

Exercice 14. Utilisez la méthode énergétique pour déterminer la charge critique P de la structure ci-dessous.

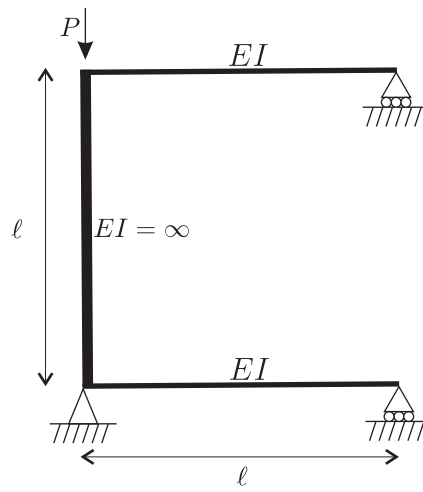


Exercice 15. Utilisez la méthode énergétique pour déterminer la charge critique P de la colonne ci-dessous. Exprimez la charge critique comme une longueur de flambement (équivalente) de la colonne.



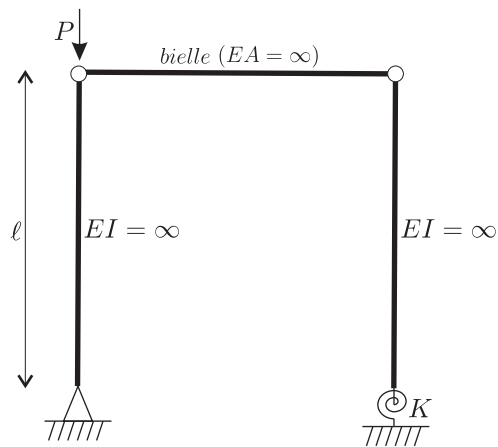
Tip : en prenant $Ax + B(1 - \cos \frac{\pi x}{2\ell})$ pour la colonne et une cubique pour la poutre, on trouve $P_{cr} = 1.83EI/\ell^2$, soit une longueur de flambement de 2.33ℓ . Solution exacte : $P_{cr} = 1.76EI/\ell^2$.

Exercice 16. Une colonne supposée infiniment rigide est raidie par deux poutres de raideur flexionnelle EI et de longueur ℓ . Utilisez la méthode énergétique pour déterminer la charge critique P de cette colonne



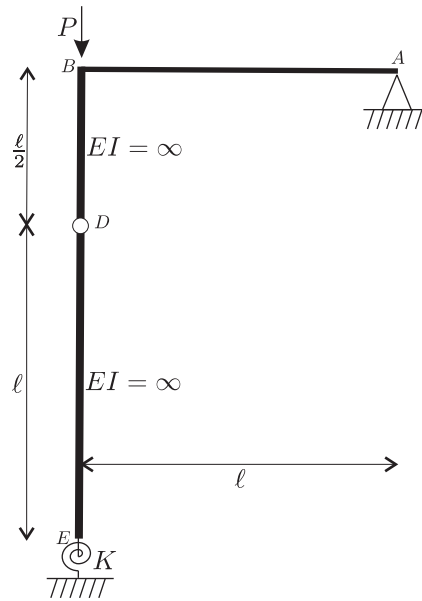
Solution : $P_{cr} = 6EI/\ell^2$ (cubique sur chaque poutre).

Exercice 17. Déterminez la charge critique de la structure ci-dessous.

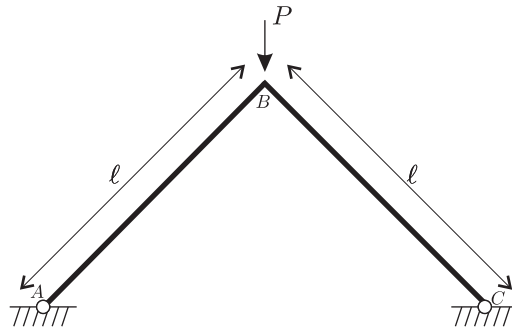


Solution : $P_{cr} = K/\ell$

Exercice 18. Estimez la charge critique P de la structure suivante.



Exercice 19. Déterminez la charge critique pour laquelle la structure suivante manifeste une bifurcation de son équilibre.



Exercice 20.

2.6 Références et lectures complémentaires

Chapitre 3

Analyse au second ordre des structures formées de poutres

3.1 Introduction

Deuxième partie

Analyse dynamique linéaire

Contexte

Pour un ensemble de sollicitations données, l'analyse d'une structure consiste en la détermination de sa déformée, des éléments de réduction ou contraintes dans cette structure ainsi que les réactions d'appui. Lorsque ces sollicitations varient suffisamment lentement dans le temps, l'analyse peut être réalisée sous l'hypothèse d'un comportement (quasi-)statique. On suppose que le lecteur est familier avec les méthodes d'analyses de structures sont chargements statiques. Notamment, le cas des structures isostatiques est généralement considéré comme simple puisque les distributions d'efforts internes ne dépendent pas des valeurs relatives des raideurs ; par contre l'analyse statique de structures hyperstatiques requiert l'utilisation de méthodes plus avancées généralement basées sur le théorème des travaux virtuels, ou sur le principe de conservation d'énergie. Parmi les méthodes les plus connues, les méthodes des forces, des déplacements ou de Cross permettent de réaliser cette analyse statique.

Dans le domaine du génie civil, la majorité des structure étudiées sont continues. Il s'agit généralement de poutres et colonnes, de plaques, coques ou voiles. Cependant, pour différentes raisons, mais surtout pour en simplifier la représentation numérique, une structure physiquement continue est généralement modélisée à l'aide d'un ensemble fini de degrés de liberté ou coordonnées généralisées. La méthode la plus couramment utilisée pour remplacer un problème continu en un problème discret est certainement celle de la méthode des éléments finis. Dans un tel contexte, les forces appliquées peuvent être exprimées à l'aide d'un vecteur de charges $\mathbf{p}$ et l'analyse consiste en la détermination du vecteur $\mathbf{x}$ des déplacements des degrés de liberté ou des coordonnées généralisées qui permettent d'assurer l'équilibre entre les forces appliquées et les efforts intérieurs à la structure, exprimé par

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{p} \quad (3.1.1)$$

où $\mathbf{K}$ est une matrice de raideur relative à la modélisation choisie. L'analyse statique d'une structure se résume donc à la résolution d'un système d'équations algébriques, éventuellement non linéaires (si $\mathbf{K}$ ou $\mathbf{p}$ dépendent de $\mathbf{x}$).

Lorsque les efforts appliqués sur une structure la mettent en mouvement de façon telle que les effets liés au mouvement de sa masse ne soient plus négligeables, (3.1.1) doit être complétée par un terme d'inertie. L'équation du mouvement écrite sous sa forme la plus simple

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (3.1.2)$$

inclut ces effets et traduit, dans l'ordre, l'équilibre entre les efforts d'inertie, les efforts intérieurs et les forces appliquées. L'analyse dynamique consiste en la détermination du vecteur $\mathbf{x}$ des déplacements qui permet de satisfaire cet équilibre. Il apparaît donc une différence fondamentale entre analyse statique et dynamique puisque la première ne requiert que la solution d'un ensemble d'équations algébriques alors que la seconde nécessite la résolution d'un ensemble d'équations différentielles. Ceci vient en étroite relation avec la nature de la solution calculée : il est évident que la solution $\mathbf{x}(t)$

d'une analyse dynamique représente l'évolution au cours du temps du déplacement des noeuds du modèle, contrairement à la solution statique $\mathbf{x}$ qui est constante.

Puisqu'il est donc évident qu'une analyse dynamique présente un degré de complexité supérieur à l'analyse statique, il est attendu que les notions relatives à l'analyse statique soient maîtrisées convenablement avant d'aborder l'étude du comportement dynamique. Pour cette raison, nous ne reviendrons que brièvement sur des outils de modélisation communs avec ceux de l'analyse statique, comme notamment la méthode des éléments finis.

Dans certains cas traités en pratique, l'équation du mouvement (3.1.2) est parfaitement déterminée. Cela signifie d'une part que les caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure ($\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$) sont parfaitement connues et d'autre part que les efforts $\mathbf{p}(t)$ appliqués en chaque point de la structure sont parfaitement déterminés (ce sont des fonctions du temps connues). On recourt donc dans ce cas à une analyse dite déterministe dont nous présentons les principes fondamentaux dans ce cours.

Dans le domaine du génie civil, un certain caractère aléatoire peut (et dans certains cas doit) être attribué aux grandeurs mises en jeu :

- les caractéristiques de la structure peuvent ne pas être connues avec certitude. Prenons pour exemple une construction en béton armé dont on sait que les caractéristiques de résistance et de déformabilité ne sont pas connues avec exactitude. Dans ce cas, certaines composantes des matrices structurelles $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ peuvent être caractérisées par des grandeurs probabilistes plutôt qu'être parfaitement déterminées ;
- les sollicitations extérieures peuvent également n'être déterminées qu'en termes de probabilités. C'est généralement le cas lorsque les efforts appliqués proviennent de phénomènes naturels (tremblements de terre, vent, houle, trafic, etc.).

Il existe des techniques de résolution qui, partant de représentations probabilistes de la structure et de son chargement, permettent de déterminer les structures statistiques des déplacements des noeuds de la structure ou des éléments de réduction. Il s'agit d'analyses stochastiques que nous présenterons dans le second volume du cours.

Chapitre 4

Équation du mouvement

4.1 Généralités

Un système à un seul degré de liberté associé à une coordonnée généralisée q est tel que la connaissance de $q(t)$ en un instant t quelconque détermine de façon exhaustive l'état de la structure étudiée. Cela ne signifie pas que la structure soit nécessairement limitée à un seul point matériel, ni qu'elle soit parfaitement rigide.

Exemple 4.1. *Un exemple célèbre est celui du pendule simple (Fig. 4.1.1) où la coordonnée généralisée $q \equiv \theta$ est la position angulaire du pendule par rapport à la verticale. Le pendule est composé d'un bras de longueur ℓ dont une extrémité est fixe et l'autre est pourvue d'une masse m significativement plus lourde que la masse du bras. Puisque le bras est supposé être parfaitement rigide, la connaissance de l'angle θ implique de facto celle de tous les points de la structure (masse et bras). En particulier, avec les notations de la Fig. 4.1.1, la position de la masse dans le référentiel (x, y) est*

$$\mathbf{x} = (\ell \cos \theta, \ell \sin \theta) \quad (4.1.1)$$

dont on peut, par dérivation, déterminer les expressions de la vitesse et de l'accélération¹

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} -\ell \dot{\theta} \sin \theta & \ell \dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} -\ell \dot{\theta}^2 \cos \theta - \ell \ddot{\theta} \sin \theta & -\ell \dot{\theta}^2 \sin \theta + \ell \ddot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

■

1. si la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante, l'expression de l'accélération se réduit à $\ddot{\mathbf{x}} = -\ell \dot{\theta}^2 (\cos \theta, \sin \theta)$, qui est l'expression bien connue de l'accélération centripète d'un mouvement circulaire uniforme.

FIGURE 4.1.1 – Exemple de système à un degré de liberté θ : le pendule simple.

L'équation du mouvement traduit l'équilibre de la structure. L'analyse dynamique d'une structure consiste à établir cette équation, puis à la résoudre de façon à déterminer l'évolution au cours du temps de la coordonnée généralisée $q(t)$. Dans cette section, trois méthodes différentes d'exprimer l'équilibre dynamique d'une structure sont présentées. Elles mènent naturellement à la même équation du mouvement, qui est unique sous les hypothèses de modélisation choisies. Dans la pratique, on a recours à l'une ou l'autre méthode selon la difficulté du problème rencontré. Il est donc important de maîtriser les différentes méthodes pour pouvoir établir l'équation du mouvement de façon optimale dans toute circonstance.

4.2 Seconde loi de Newton

La seconde loi de Newton, appelée également théorème du centre d'inertie, s'énonce :

Dans un repère inertiel, la somme vectorielle des forces appliquées sur un objet est égale au produit de la masse de l'objet par son vecteur accélération.

et s'écrit

$$\sum \mathbf{f}_i = m\ddot{\mathbf{x}}. \quad (4.2.1)$$

Dans le formalisme de d'Alembert, une force d'inertie $-m\ddot{\mathbf{x}}$ est considérée comme une force agissant sur l'objet considéré, qui subit donc une force extérieure fictive supplémentaire. Puisque l'équilibre d'un corps se traduit par une somme vectorielle nulle des forces appliquées, le principe de d'Alembert s'écrit

$$\sum \mathbf{f}_i - m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (4.2.2)$$

et est donc strictement équivalent à la seconde loi de Newton.

Étant donné qu'il faut exprimer l'accélération et éventuellement les forces appliquées en fonction de la coordonnée généralisée, l'application de la seconde loi de Newton ou du principe de d'Alembert devient rapidement compliquée. Ils ne sont utilisés pour établir l'équation du mouvement que lorsque le système étudié se limite à un ou quelques points matériels.

Pendule simple.

L'application de la seconde loi de Newton veut que la masse du pendule multipliée par l'accélération soit égale à la somme vectorielle des deux forces appliquées, la tension dans la barre et le poids propre. L'équilibre dans les directions x et y du système de référence s'écrit donc

$$\begin{cases} mg - T \cos \theta &= m \left(-\ell \dot{\theta}^2 \cos \theta - \ell \ddot{\theta} \sin \theta \right) \\ -T \sin \theta &= m \left(-\ell \dot{\theta}^2 \sin \theta + \ell \ddot{\theta} \cos \theta \right) \end{cases} \quad (4.2.3)$$

L'élimination de la tension inconnue T entre ces deux équations fournit l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0. \quad (4.2.4)$$

Cette équation ne fait intervenir que deux termes, l'inertie et la force de rappel. En outre, elle est non linéaire puisque si θ_1 et θ_2 sont deux solutions non triviales de cette équation, $\theta_1 + \theta_2$ n'est pas solution de l'équation. Ceci est dû à la présence de la fonction $\sin$. $\square$

4.3 Principe des travaux virtuels

La première méthode présentée ne permet pas d'écrire les équations d'équilibre de systèmes continus. Aussi, lorsque le système étudié présente un nombre important de masses ponctuelles, écrire explicitement l'équilibre vectoriel de toutes les masses peut vite devenir impraticable. Dans ces cas, le principe des déplacements virtuels permet souvent d'obtenir l'expression recherchée des équations d'équilibre. Ce principe se base sur la notion de *déplacement virtuel*, un déplacement arbitrairement choisi, d'amplitude infinitésimale et cinématiquement admissible, c'est-à-dire satisfaisant les conditions limites cinématiques (appuis) de la structure. Le principe des déplacements virtuels stipule que

Partant d'une structure en équilibre, le travail virtuel des forces intérieures δU égale celui des forces extérieures δW dans un déplacement virtuel arbitrairement choisi.

Ce principe est largement appliqué à l'analyse statique de structures². La seule différence ici est qu'il convient d'introduire, en sus des forces qui seraient habituellement considérées, une force d'inertie ainsi que le travail virtuel correspondant. Très pratiquement, c'est le fait que le déplacement virtuel soit arbitrairement choisi qui permet d'exprimer l'équilibre de la structure ou, en d'autres termes, l'équation du mouvement. Ceci est illustré à l'aide d'un exemple ci-après.

Pendule simple.

Considérons un déplacement virtuel $\delta\theta$ comme indiqué à la figure 4.3.1. Dans ce déplacement, la masse du pendule se déplace de $\ell \cos(\theta + \delta\theta) - \ell \cos \theta = -\ell \delta\theta \sin \theta$ dans le sens des x positifs et de $\ell \sin(\theta + \delta\theta) - \ell \sin \theta = \ell \delta\theta \cos \theta$ dans le sens des y positifs. Le travail virtuel effectué par chacune des forces doit être établi pour ce déplacement virtuel (depuis une position d'équilibre réelle) :

(i) la tension dans le bras ne travaille pas puisqu'elle est perpendiculaire au mouvement. Étant donné que c'est la seule force intérieure susceptible de travailler, il en découle $\delta U = 0$,

2. Aucune limitation n'est formulée concernant le comportement de la structure. Le principe est donc également d'application aux structures à comportement non linéaire.

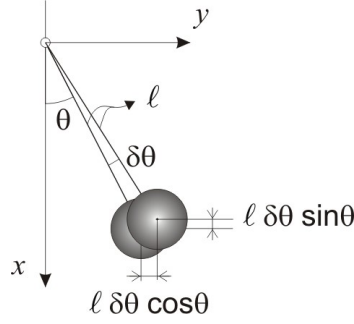


FIGURE 4.3.1 – Exemple de système à un degré de liberté θ : le pendule simple.

(ii) le poids mg qui agit dans la direction de x produit un travail virtuel $\delta W_1 = -mg\ell\delta\theta \sin\theta$,

(iii) selon le principe de d'Alembert, la force d'inertie à considérer est $-m\ddot{\mathbf{x}}$ où $\ddot{\mathbf{x}}$ est donné par (4.1.2) ; le travail de cette force s'exprime donc par le produit scalaire $\delta W_2 = -m\ddot{\mathbf{x}} \cdot (-\ell\delta\theta \sin\theta, \ell\delta\theta \cos\theta)$, ou, après simplifications $\delta W_2 = -m\ell^2\ddot{\theta}\delta\theta$,

Le principe des travaux virtuels veut que $\delta W_1 + \delta W_2 + \delta U = 0$, soit

$$(mg\ell \sin\theta + m\ell^2\ddot{\theta}) \delta\theta = 0 \quad (4.3.1)$$

En raison du caractère arbitraire du déplacement virtuel, l'expression entre parenthèses doit être identiquement nulle. Comme annoncé, ceci permet donc d'établir l'équation du mouvement. Elle prend naturellement la même forme que (4.2.4) obtenue précédemment. $\square$

4.4 Principe de Hamilton

Une autre façon de traduire l'équilibre d'un corps consiste à utiliser le principe de Hamilton. Dans le contexte de la mécanique classique, il stipule que

Parmi toutes les évolutions possibles d'un système entre deux configurations fixées aux instants t_1 et t_2 , l'évolution naturelle est celle qui conserve l'intégrale

$$\mathcal{S}(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (4.4.1)$$

où L représente le Lagrangien du système étudié. Pour les domaines d'applications qui nous intéressent, il est défini par

$$L = T - V \quad (4.4.2)$$

où $T(t, q)$ est l'énergie cinétique absolue du système et $V(t, q)$ est le potentiel dont dérivent les forces. Il s'agit donc d'un principe de conservation d'énergie, ou d'un

équilibre des flux d'énergie cinétique et potentielle. L'équation de conservation (4.4.1) est une équation où l'inconnue est en réalité une fonction inconnue $q(t)$ et ne doit pas être confondue avec une équation scalaire. La théorie du calcul des variations permet de démontrer que la solution de ce type d'équation est la fonction $q(t)$ qui satisfait

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (4.4.3)$$

Il s'agit en réalité de l'équation différentielle d'ordre 2 qui gouverne l'équilibre dynamique de la structure étudiée.

Lorsqu'il existe une dissipation d'énergie dans la structure étudiée (généralement résultant de frottements internes), le principe de conservation doit être légèrement adapté

$$\hat{S}(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} W_{nc}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (4.4.4)$$

où W_{nc} représente le travail des forces non conservatives, de sorte à écrire que la quantité d'énergie cinétique et potentielle perdue a été absorbée dans un processus de dissipation non réversible. En incluant ces effets de dissipation à l'aide d'une fonction de dissipation de Rayleigh F , l'équation du mouvement 4.4.5 devient

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (4.4.5)$$

L'établissement du Lagrangien L relatif à un problème donné et son introduction dans 4.4.5 permet d'obtenir l'équation du mouvement. Lorsque la complexité du problème étudié augmente, cette approche est souvent préférée car elle ne demande pas d'écrire d'équilibre vectoriel ; l'équation du mouvement résulte de considérations sur des fonctions scalaires uniquement.

Pendule simple

L'énergie cinétique stockée dans le pendule s'exprime par

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 \quad (4.4.6)$$

et le potentiel dont dérivent les forces appliquées par

$$V = -mgr(1 - \cos \theta) \quad (4.4.7)$$

de sorte que, sous l'hypothèse d'un mouvement non amorti, le Lagrangien s'exprime par

$$L = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 - mgr(1 - \cos \theta), \quad (4.4.8)$$

et l'équation du mouvement (4.4.5) s'écrit ($q = \theta$)

$$m\ell^2 \ddot{\theta} + mgr \sin \theta = 0. \quad (4.4.9)$$

qui est exactement identique à 4.2.4. $\square$

4.5 Conclusion

Quelque soit la structure considérée, l'application de l'une ou l'autre méthode permet d'écrire l'équation du mouvement. De façon la plus générale, on peut facilement se convaincre qu'elle prend la forme d'une équation différentielle de second ordre du type

$$m\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = 0 \quad (4.5.1)$$

où la fonction f , dépendant du problème étudié, peut éventuellement être non linéaire. Par exemple, pour le pendule simple, $f(\theta) = \frac{mg}{\ell} \sin \theta$ est une fonction non linéaire de θ .

L'analyse dynamique d'une structure non linéaire présente un niveau de complexité substantiellement supérieur à celle d'une structure à comportement linéaire. Une première façon d'éviter une analyse non linéaire consiste à considérer des vibrations de faible amplitude autour d'une position d'équilibre $(q_o, \dot{q}_o)$. Dans ce cas, la fonction f peut être linéarisée, de façon à obtenir

$$m\ddot{q} + f(q_o, \dot{q}_o) + \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{(q_o, \dot{q}_o)} (q - q_o) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right|_{(q_o, \dot{q}_o)} (\dot{q} - \dot{q}_o) = 0. \quad (4.5.2)$$

L'équation (4.5.2) peut aussi être réécrite sous la forme

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = p. \quad (4.5.3)$$

qui est l'expression la plus générale permettant de modéliser les vibrations linéaires de structures.

Cette équation traduit un équilibre entre les forces d'inertie $m\ddot{q}(t)$, d'amortissement visqueux $c\dot{q}(t)$, de rappel élastique $kq(t)$ et extérieures $p(t)$. Dans ce cours, nous limiterons essentiellement à étudier les vibrations linéaires de structures, qui permettent d'étudier une large gamme d'applications rencontrées dans les problèmes du génie civil. Il existe cependant aussi des applications particulières, comme les vibrations de câbles ou les effets de tremblements de terre, qui nécessitent de prendre en compte des effets de non linéarités géométriques et matérielles. Ces quelques problèmes non linéaire particuliers feront l'objet d'un chapitre en soi.

Afin de simplifier les illustrations dans la suite des développements, nous considérerons que m , c et k représentent une masse, une viscosité et une raideur, et nous représenterons un système dynamique à l'aide d'un chariot sur roulettes comme indiqué à la figure 4.5.1. Il convient de garder à l'esprit que d'autres types de structures présentent la même forme canonique de l'équation du mouvement, et donc que m , c et k ne présentent pas nécessairement les unités d'une masse, viscosité et raideur. Par exemple, les vibrations de petites amplitudes (donc linéaires) du pendule simple autour de la position d'équilibre $\theta = 0$, s'étudient par $\ddot{\theta} + g\theta/\ell = 0$. Cette expression prend bien la forme canonique (4.5.3) mais montre que $k = g/\ell$ peut en principe avoir une signification différente de celle d'une raideur. En réalité, il est possible de trouver

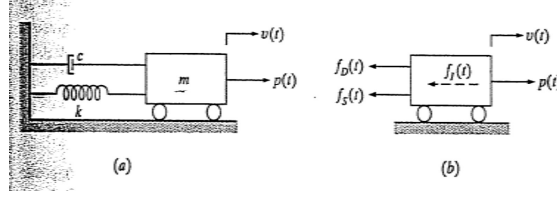


FIGURE 4.5.1 – Représentation schématique du système à un degré de liberté.

d'autres systèmes qui donneraient d'autres significations encore aux coefficients de (4.5.3).

L'objectif de ce premier chapitre consiste à présenter les méthodes analytiques et numériques qui permettent d'étudier ce simple système vibratoire, mais cependant très utile pour la modélisation des structures plus complexes du génie civil.

Dès à présent, nous pouvons introduire des notions fondamentales du problème dynamique. En divisant les deux membres de (4.5.3) par m , l'équation du mouvement devient

$$\ddot{q} + 2\omega_1\xi_1\dot{q} + \omega_1^2q = \frac{p}{m}. \quad (4.5.4)$$

où $\omega_1^2 = k/m$ et $2\omega_1\xi_1 = c/m$. La *pulsation propre* de l'oscillateur ω_1 est reliée à la *fréquence propre* f_1 et la *période propre* T_1 par

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \quad ; \quad f_1 = \frac{1}{T_1} \quad ; \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}. \quad (4.5.5)$$

Le coefficient d'amortissement relatif ξ_1 est défini par le rapport entre la viscosité c et une viscosité caractéristique³ $2m\omega_1$. Il s'exprime aussi par

$$\xi_1 = \frac{c}{2m\omega_1} = \frac{c}{2\sqrt{km}}. \quad (4.5.6)$$

Dans toutes ces grandeurs, l'indice "1" permet de rappeler que, pour le moment, nous étudions un système à un degré de liberté.

Dans les applications du génie civil, le coefficient d'amortissement relatif ξ_1 est intrinsèquement très faible. Puisqu'il provient d'un amortissement interne au matériau, on le choisit souvent de façon conventionnelle (et très peu claire), en fonction du matériau constitutif de la structure étudiée. Le tableau (4.1) donne des valeurs indicatives du coefficient d'amortissement selon le matériau utilisé. Nous verrons dans la suite qu'un faible coefficient d'amortissement peut produire un comportement dynamique problématique en cas de résonance. On est donc souvent amené à augmenter volontairement la dissipation d'énergie dans la structure (appuis en néoprène, installation de pistons amortisseurs, systèmes d'amortissement actif/passif, etc.). Dans ce cas, le coefficient d'amortissement peut prendre des valeurs de l'ordre de 5% – 10%.

3. appelée aussi amortissement critique car cette valeur de la viscosité permet de séparer les

Matériau	ξ_1
Acier soudé	0.1%-0.5%
Acier boulonné	0.5%-1%
Béton	1%-2%
Bois	2%-5%

TABLE 4.1 – Coefficients d’amortissement structurel selon le type de matériau constitutif

4.6 Exercices

réponses libres avec oscillations (régime infra-critique) des réponses sans oscillations autour de la position d’équilibre (régime super-critique).

Chapitre 5

Intégration temporelle

5.1 Principes généraux

Lorsque les sollicitations, bien que connues exactement, sortent des fonctions simples, la résolution analytique devient assez ardue. On passe donc généralement dans ce cas à des méthodes numériques pour la résolution.

Une première option consiste à écrire les équivalents numériques des approches temporelle (Duhamel) et fréquentielle développées dans le cadre de notre étude analytique des vibrations (cf. section 6.1.4.1, p. 93). Ces deux méthodes se basent sur les hypothèses fondamentales du principe de superposition et ne sont donc applicables qu'aux structures à comportement linéaire (en raideur et amortissement).

Tant qu'à passer à une approche numérique, il peut être intéressant de développer une méthode qui permet d'obtenir des résultats concluants, même dans le cas de structures à comportement non-linéaire. On présente donc dans la suite des méthodes d'analyse dont le domaine d'application est tout à fait général. Les méthodes sont développées dans le contexte d'une structure à un degré de liberté, quoique tous les développements suivants peuvent être facilement transposés à des structures à plusieurs degrés de liberté (grossièrement, en remplaçant les grandeurs scalaires par des grandeurs vectorielles). Il s'agit donc de discuter les méthodes numériques qui permettent de résoudre :

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = p(t) \quad (5.1.1)$$

La numérisation de cette équation doit nécessairement s'accompagner d'une discrétisation. Cela signifie qu'une solution numérique de l'équation du mouvement ne peut que satisfaire l'équation du mouvement en certains instants t_0, t_1 , etc. Par souci de simplicité, les méthodes utilisent souvent un pas de temps constant $t_i = t_0 + i \Delta t$, quoique cette solution ne soit pas toujours la plus optimale. Entre ces instants où l'équation d'équilibre est satisfaite, des hypothèses doivent être formulées. Selon les hypothèses choisies, on obtient des méthodes différentes, avec des propriétés de précision et stabilité plus ou moins intéressantes. Ces méthodes peuvent être classées

en différentes familles selon qu'elles se basent sur des approximations des dérivées (p. ex. la méthode de la différence centrale) ou des intégrales (p. ex. la méthode de Newmark). On peut également classer les méthodes selon leur caractère implicite ou explicite, c'est-à-dire la nécessité ou non de devoir utiliser une procédure itérative à chaque pas de temps.

Il existe un problème fondamental en analyse numérique qui consiste à résoudre une équation différentielle (non-linéaire) de premier ordre

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (5.1.2)$$

où $\mathbf{y}$ est un vecteur de fonctions inconnues et $\mathbf{f}$ est une fonction vectorielle de $\mathbf{y}$ et, éventuellement t . Il existe toute une liste de méthodes pour résoudre ce problème. Les plus élémentaires sont présentées ci-dessous pour mieux comprendre la classification des méthodes.

1. l'équation du mouvement est satisfaite à l'instant t , et la dérivée est approchée par une différence avant

$$\left. \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right|_t = f(\mathbf{y}_t, t) \quad (5.1.3)$$

$$\left. \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right|_t \simeq \frac{\mathbf{y}_{t+\Delta t} - \mathbf{y}_t}{\Delta t} \quad (5.1.4)$$

En égalant les deux expressions de la dérivée, on obtient donc

$$\frac{\mathbf{y}_{t+\Delta t} - \mathbf{y}_t}{\Delta t} = f(\mathbf{y}_t, t) \Rightarrow \mathbf{y}_{t+\Delta t} = \mathbf{y}_t + \Delta t f(\mathbf{y}_t, t) \quad (5.1.5)$$

Partant d'une valeur connue de $\mathbf{y}_0$ (condition initiale), cette relation permet donc de déterminer la suite de valeurs $\mathbf{y}_t$ qui représentent l'évolution au cours du temps de la réponse. On obtient la suite $\mathbf{y}_t$ à l'aide d'une simple récurrence puisque le second membre de (5.1.8) ne fait pas intervenir $\mathbf{y}_{t+\Delta t}$. La méthode est dite *explicite* (et basée sur une approximation de la dérivée).

2. une seconde façon, tout aussi valable a priori de résoudre ce problème consiste à considérer plutôt la différence arrière pour estimer la dérivée

$$\left. \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right|_t = f(\mathbf{y}_t, t) \quad (5.1.6)$$

$$\left. \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right|_t \simeq \frac{\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (5.1.7)$$

En égalant les deux expressions de la dérivée, on obtient donc

$$\frac{\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-\Delta t}}{\Delta t} = f(\mathbf{y}_t, t) \Rightarrow \mathbf{y}_{t+\Delta t} = \mathbf{y}_t + \Delta t f(\mathbf{y}_{t+\Delta t}, t + \Delta t) \quad (5.1.8)$$

Dans ce cas, $\mathbf{y}_{t+\Delta t}$ est présent au second membre de la relation de récurrence, ce qui signifie que (5.1.8) est une équation en $\mathbf{y}_{t+\Delta t}$ qui doit être résolue à

chaque pas de temps. Si la fonction $\mathbf{f}$ est linéaire, on peut facilement ramener $\mathbf{y}_{t+\Delta t}$ au membre de gauche et transformer cette méthode a priori implicite en une méthode explicite. Si ce n'est pas le cas, une procédure adaptée (souvent une méthode itérative) est nécessaire pour résoudre la récurrence. La méthode est dite *implicite* (et basée sur une approximation de la dérivée).

3. une troisième méthode se base sur une approximation d'intégrale en réécrivant l'équation à résoudre sous la forme

$$\mathbf{y}_{t+\Delta t} = \mathbf{y}_t + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) dt \simeq \mathbf{y}_t + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y}_{t+\Delta t}, t + \Delta t) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_t, t)}{2} \Delta t \quad (5.1.9)$$

où la méthode du trapèze a été appliquée. La relation obtenue est la récurrence recherchée pour estimer $\mathbf{y}_{t+\Delta t}$. Sous cette formulation, on peut constater qu'il s'agit d'une méthode implicite.

4. en appliquant la méthode du rectangle pour l'estimation numérique de l'intégrale, on trouve

$$\mathbf{y}_{t+\Delta t} = \mathbf{y}_t + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) dt \simeq \mathbf{y}_t + \mathbf{f}(\mathbf{y}_t, t) \Delta t \quad (5.1.10)$$

qui prend donc maintenant la forme d'une méthode explicite (identique à la méthode 1, en réalité).

Ces quatre exemples élémentaires montrent que toutes les combinaisons implicite/explicite et dérivée/intégrale existent. Selon les choix qui sont faits, on obtient une méthode numérique de résolution du problème fondamental différente.

Considérer le problème fondamental n'est pas anodin car l'équation du mouvement (5.1.1) qui nous intéresse peut précisément être remise sous cette forme. En effet, en posant $y_1 = q$ et $y_2 = \dot{q}$, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{1}{m}(p - c y_2 - k y_1) \end{pmatrix} \quad (5.1.11)$$

qui a bien la forme de (5.1.2). Ceci signifie donc que toutes les méthodes qui nourrissent la discussion du problème fondamental peuvent être appliquées à la résolution de l'équation du mouvement, même lorsqu'elle prend une formulation non-linéaire¹. En pratique cependant, des méthodes appropriées sont développées pour résoudre l'équation du mouvement, en prenant en compte les particularités de ce problème (essentiellement le fait qu'il s'agisse d'une équation d'ordre 2). Tout comme pour le problème fondamental (que nous laisserons donc à titre d'illustration ici), les méthodes peuvent être explicites/implicites et basées sur des approximations de dérivées/d'intégrales. Étant donné que les méthodes numériques doivent nécessairement formuler des hypothèses (comme une troncature de série pour l'approximation d'une

1. dans le cas, $\mathbf{f}$ (2) prend une expression non-linéaire de y_1 et y_2

dérivée), aucune méthode ne peut donner de coïncidence parfaite avec une solution analytique de référence. Chaque méthode numérique introduit des erreurs qu'il convient de maîtriser, éventuellement borner ou limiter. Selon la méthode choisie, l'approche numérique introduit une ou plusieurs de ces erreurs :

- un amortissement artificiel (numérique),
- un déphasage de la réponse,
- une modification de la période.

Aussi, en fonction des paramètres propres à chaque méthode, les erreurs introduites peuvent être différemment affectées. Par exemple, le pas de temps Δt doit nécessairement être choisi suffisamment petit pour pouvoir représenter correctement les composantes harmoniques² de plus haute fréquence de la réponse. Pour les applications pratiques, il est nécessaire d'utiliser au moins 10 points pour la plus courte des périodes à représenter (càd la plus haute fréquence).

5.2 Exemples de schéma d'intégration

Dans cette section on donne deux exemples de schémas d'intégration communément appliqués.

Dans un premier temps, la méthode de la différence centrale basée sur des approximations de dérivées est présentée. En développant deux versions légèrement différentes de cet algorithme, on mettra en évidence le fait que la stabilité d'un algorithme est liée aux hypothèses qui sont faites pour arriver à sa formulation sous forme d'une récurrence.

Ensuite, les méthodes d'intégration de Newmark seront présentées comme généralisation des méthodes de l'accélération constante et linéaire.

5.2.1 Méthode de la différence centrale

Comme pour toute méthode numérique, on commence par satisfaire l'équation du mouvement en un instant t

$$m\ddot{q}_t + c\dot{q}_t + kq_t = p_t. \quad (5.2.1)$$

L'accélération peut être estimée par différence finie³ (différence centrale), à l'aide de la relation

$$\ddot{q}_t \simeq \frac{q_{t-\Delta t} - 2q_t + q_{t+\Delta t}}{\Delta t^2} \quad (5.2.2)$$

2. dont l'origine est structurelle (une fréquence propre) ou est à attribuer à la sollicitation.

3.

$$\left. \begin{aligned} q_{t+\Delta t} &= q_t + \Delta t \dot{q}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_t + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{q}_t + o(\Delta t^4) \\ q_{t-\Delta t} &= q_t - \Delta t \dot{q}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_t - \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{q}_t + o(\Delta t^4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{q_{t+\Delta t} + q_{t-\Delta t} - 2q_t}{\Delta t^2} = \ddot{q}_t + o(\Delta t^2)$$

Son introduction dans (5.2.1) donne

$$q_{t+\Delta t} = \frac{\Delta t^2}{m} (p_t - c\dot{q}_t - kq_t) + 2q_t - q_{t-\Delta t}.$$

Dans cette expression, on peut éliminer $q_{t-\Delta t}$ en considérant

$$\dot{q}_t \simeq \frac{q_{t+\Delta t} - q_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \Rightarrow q_{t-\Delta t} = q_{t+\Delta t} - 2\Delta t \dot{q}_t \quad (5.2.3)$$

ce qui donne

$$q_{t+\Delta t} = q_t + \Delta t \dot{q}_t + \frac{\Delta t^2}{2m} (p_t - c\dot{q}_t - kq_t). \quad (5.2.4)$$

Pour autant que l'on soit en mesure de calculer q_t et $\dot{q}_t$, cette relation construit donc la récurrence qui permet d'estimer le déplacement à la fin du pas de temps à partir de grandeurs connues au début du pas de temps. Pour que la récurrence soit convenablement posée, il faut ajouter une expression qui permet de calculer $\dot{q}_{t+\Delta t}$ à partir de q_t et $\dot{q}_t$.

5.2.1.1 Option 1

Alors que les formulations de différences finies qui ont été utilisés jusqu'ici produisent des erreurs de l'ordre de Δt^2 , il est impossible de trouver une expression approchée de $\dot{q}_{t+\Delta t}$ en fonction de q_t et $\dot{q}_t$ qui laisse des erreurs d'un ordre inférieur à Δt . Par exemple, l'hypothèse que la vitesse moyenne sur le pas de temps est donnée par différence finie des positions

$$\frac{\dot{q}_{t+\Delta t} + \dot{q}_t}{2} = \frac{q_{t+\Delta t} - q_t}{\Delta t} \quad (5.2.5)$$

produit⁴ bien une erreur d'ordre Δt . Dans cette première option, le fait de mélanger des hypothèses d'ordre Δt et Δt^2 produit un schéma de qualité médiocre. Ceci sera illustré dans la suite.

On peut extraire l'expression recherchée de $\dot{q}_{t+\Delta t}$ à partir de (5.2.5)

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = 2 \frac{q_{t+\Delta t} - q_t}{\Delta t} - \dot{q}_t \quad (5.2.6)$$

de sorte que (5.2.4) et (5.2.6) forment un ensemble de relations qui permettent de calculer la position et la vitesse en $t + \Delta t$ à partir des mêmes grandeurs en t .

Par souci de formalisme, on peut réécrire ces deux équations sous la forme d'un système. En introduisant l'expression de $q_{t+\Delta t}$ de (5.2.4) dans (5.2.6), on obtient

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} (q_{t+\Delta t} - q_t) - \dot{q}_t = \dot{q}_t + \frac{\Delta t}{m} (p_t - c\dot{q}_t - kq_t)$$

4.

$$\left. \begin{array}{l} q_{t+\Delta t} = q_t + \Delta t \dot{q}_t + o(\Delta t^2) \\ q_t = q_{t+\Delta t} - \Delta t \dot{q}_{t+\Delta t} + o(\Delta t^2) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \frac{q_{t+\Delta t} - q_t}{\Delta t} = \dot{q}_t + \dot{q}_{t+\Delta t} + o(\Delta t)$$

qui, combiné avec (5.2.4), s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} q_{t+\Delta t} \\ \Delta t \dot{q}_{t+\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(\omega_1 \Delta t)^2}{2} & 1 - \frac{\xi_1 \omega_1 \Delta t}{2} \\ -(\omega_1 \Delta t)^2 & 1 - 2\xi_1 \omega_1 \Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_t \\ \Delta t \dot{q}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^2}{2m} \\ \frac{\Delta t^2}{m} \end{pmatrix} p_t. \quad (5.2.7)$$

5.2.1.2 Option 2

En guise de seconde option, nous allons tenter d'éviter de formuler une hypothèse faible comme (5.2.5), tout en continuant de fermer la récurrence. L'optique suivie est différente car nous allons maintenant éliminer $\dot{q}_t$ de (5.2.4) et obtenir $q_{t+\Delta t}$ en fonction de q_t , $q_{t-\Delta t}$.

En réintroduisant dans (5.2.4) l'expression de $\dot{q}_t$ donnée par (5.2.3), on a

$$q_{t+\Delta t} = q_t + \Delta t \frac{q_{t+\Delta t} - q_{t-\Delta t}}{2\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2m} \left(p_t - c \frac{q_{t+\Delta t} - q_{t-\Delta t}}{2\Delta t} - k q_t \right) \quad (5.2.8)$$

que l'on peut aussi écrire

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right) q_{t+\Delta t} = p_t + \left(\frac{2m}{\Delta t^2} - k \right) q_t - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right) q_{t-\Delta t} \quad (5.2.9)$$

ou, de façon équivalente sous un format matriciel,

$$\begin{pmatrix} q_t \\ q_{t+\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1-\xi_1 \omega_1 \Delta t}{1+\xi_1 \omega_1 \Delta t} & \frac{2-(\omega_1 \Delta t)^2}{1+\xi_1 \omega_1 \Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{t-\Delta t} \\ q_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Delta t^2}{m(1+\xi_1 \omega_1 \Delta t)} \end{pmatrix} p_t. \quad (5.2.10)$$

La méthode de résolution se base maintenant sur la seule équation (5.2.9), mais la récurrence est de second ordre puisque $q_{t+\Delta t}$ est déterminé à partir des positions connues aux deux pas de temps précédents. Il s'agit d'une méthode à *pas multiple*, par opposition aux *méthodes à pas simple* (comme celle de l'option 1). De cette manière, aucune hypothèse supplémentaire n'a été formulée et l'on peut s'attendre à obtenir un algorithme plus performant.

Les conditions initiales concernent souvent la position (q_0) et la vitesse ($\dot{q}_0$). Elles doivent donc nécessairement être adaptées pour pouvoir rentrer dans l'algorithme. En écrivant

$$\dot{q}_0 = \frac{q_0 - q_{-\Delta t}}{\Delta t} \quad (5.2.11)$$

qui est certes une approximation d'ordre Δt (mais limitée au premier pas de temps et non pas à l'entière du domaine comme dans l'option 1), on peut transformer la condition initiale sur la vitesse en une position (fictive) à un pas de temps avant la condition initiale

$$q_{-\Delta t} = q_0 - \Delta t \dot{q}_0. \quad (5.2.12)$$

La connaissance de $q_{-\Delta t}$ et q_0 permettent de débiter dans la relation de récurrence (5.2.9) et ainsi de déterminer l'évolution au cours du temps de la réponse dynamique.

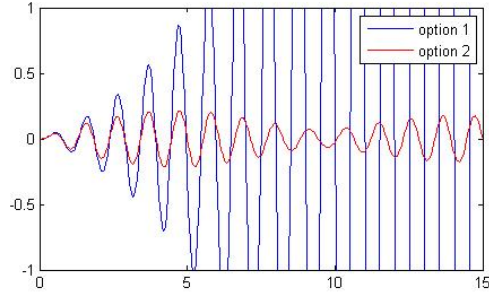


FIGURE 5.2.1 – Réponse dynamique calculée à l'aide de la méthode de la différence centrale

Exemple 5.1. La figure 5.2.1 donne un exemple de réponse dynamique calculée pour $m = 1\text{kg}$, $f = 1\text{Hz}$, $\xi = 1\%$ et une sollicitation harmonique $p = \sin 2\pi f_0 t$ où $f_0 = 0.9\text{Hz}$. On peut constater que l'option 1 donne des déplacements qui deviennent vite démesurément grands (phénomène d'instabilité), alors que l'option 2 donne une solution très proche de la solution analytique (exacte). ■

5.2.2 Accélération constante

Il existe une famille de méthodes qui se basent sur une approximation des intégrales suivantes

$$\begin{aligned}\dot{q}_{t+\Delta t} &= \dot{q}_t + \int_t^{t+\Delta t} \ddot{q}(t) dt \\ q_{t+\Delta t} &= q_t + \int_t^{t+\Delta t} \dot{q}(t) dt\end{aligned}\tag{5.2.13}$$

et qui postulent une expression analytique relativement simple pour $\ddot{q}(t)$ de façon à pouvoir réaliser ces intégrales explicitement. En l'occurrence, la méthode de l'accélération constante (par pas de temps) suppose que

$$\ddot{q}(t + \tau) = \frac{\ddot{q}_t + \ddot{q}_{t+\Delta t}}{2}\tag{5.2.14}$$

pour $\tau \in [0; \Delta t]$. Dans cette expression, $\ddot{q}_t$ est connu puisqu'il s'agit d'une grandeur en début de pas de temps, alors que $\ddot{q}_{t+\Delta t}$ est a priori inconnu. En introduisant dans (5.2.13) cette expression la plus simple de l'accélération, on obtient par intégrations successives l'évolution de la vitesse et du déplacement à l'intérieur du pas de temps

$$\dot{q}(t + \tau) = \dot{q}_t + \frac{\ddot{q}_t + \ddot{q}_{t+\Delta t}}{2} \tau\tag{5.2.15}$$

$$q(t + \tau) = q_t + \dot{q}_t \tau + \frac{\ddot{q}_t + \ddot{q}_{t+\Delta t}}{2} \frac{\tau^2}{2}.\tag{5.2.16}$$

En particulier, pour $\tau = \Delta t$, on obtient la position et la vitesse à la fin du pas de temps

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \dot{q}_t + \Delta t \frac{\ddot{q}_t + \ddot{q}_{t+\Delta t}}{2} \quad (5.2.17)$$

$$q_{t+\Delta t} = q_t + \dot{q}_t \Delta t + \frac{\ddot{q}_t + \ddot{q}_{t+\Delta t}}{2} \frac{\Delta t^2}{2} \quad (5.2.18)$$

en fonction uniquement de $\ddot{q}_{t+\Delta t}$ qui reste inconnu à ce stade. Il suffit alors d'écrire l'équation d'équilibre en $t + \Delta t$

$$m\ddot{q}_{t+\Delta t} + c\dot{q}_{t+\Delta t} + kq_{t+\Delta t} = p_{t+\Delta t}. \quad (5.2.19)$$

en y introduisant les expressions de $q_{t+\Delta t}$ et $\dot{q}_{t+\Delta t}$, de sorte à établir une équation unique en fonction de $\ddot{q}_{t+\Delta t}$. Il est alors nécessaire de résoudre cette équation (il s'agit donc d'une méthode implicite) afin de déterminer les grandeurs à la fin du pas de temps et poursuivre alors la démarche de résolution.

La méthode de l'accélération constante est probablement la méthode la plus couramment utilisée en raison de ses bonnes performances en termes de précision et stabilité (cf. section (5.3)).

5.2.3 Accélération linéaire

Partant d'un raisonnement similaire, il est possible d'affiner la représentation de l'accélération, en passant à une évolution linéaire pendant le pas de temps

$$\ddot{q}(t + \tau) = \ddot{q}_t + \frac{\ddot{q}_{t+\Delta t} - \ddot{q}_t}{\Delta t} \tau \quad (5.2.20)$$

ce qui produit une évolution quadratique de la vitesse et cubique de la position

$$\dot{q}(t + \tau) = \dot{q}_t + \ddot{q}_t \tau + \frac{\ddot{q}_{t+\Delta t} - \ddot{q}_t}{\Delta t} \frac{\tau^2}{2} \quad (5.2.21)$$

$$q(t + \tau) = q_t + \dot{q}_t \tau + \ddot{q}_t \frac{\tau^2}{2} + \frac{\ddot{q}_{t+\Delta t} - \ddot{q}_t}{\Delta t} \frac{\tau^3}{6}. \quad (5.2.22)$$

Dans ces relations intervient à nouveau l'accélération à la fin du pas de temps $\ddot{q}_{t+\Delta t}$ qui est a priori inconnue, mais dont la détermination permettra de calculer l'état de la structure à la fin du pas de temps. De nouveau, en introduisant $\tau = \Delta t$ dans les relations précédentes, on obtient une expression des position et vitesse à la fin du pas de temps

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \dot{q}_t + \frac{\ddot{q}_{t+\Delta t} + \ddot{q}_t}{2} \Delta t \quad (5.2.23)$$

$$q_{t+\Delta t} = q_t + \dot{q}_t \Delta t + \left(\frac{\ddot{q}_t}{3} + \frac{\ddot{q}_{t+\Delta t}}{6} \right) \Delta t^2 \quad (5.2.24)$$

qu'il suffit d'introduire dans l'équation d'équilibre en $t + \Delta t$, puis résoudre par rapport à $\ddot{q}_{t+\Delta t}$.

5.2.4 Méthodes de Newmark

On peut résumer les méthodes de l'accélération constante et de l'accélération linéaire par les relations suivantes

$$\begin{aligned}\dot{q}_{t+\Delta t} &= \dot{q}_t + \frac{\ddot{q}_t + \ddot{q}_{t+\Delta t}}{2} \Delta t \\ q_{t+\Delta t} &= q_t + \dot{q}_t \Delta t + \left(\frac{\ddot{q}_t}{4} + \frac{\ddot{q}_{t+\Delta t}}{4} \right) \Delta t^2\end{aligned}\quad (5.2.25)$$

et

$$\begin{aligned}\dot{q}_{t+\Delta t} &= \dot{q}_t + \Delta t \frac{\ddot{q}_{t+\Delta t} + \ddot{q}_t}{2} \\ q_{t+\Delta t} &= q_t + \dot{q}_t \Delta t + \left(\frac{\ddot{q}_t}{3} + \frac{\ddot{q}_{t+\Delta t}}{6} \right) \Delta t^2\end{aligned}\quad (5.2.26)$$

respectivement. On peut voir qu'elles sont toutes les deux des cas particuliers d'une famille de méthodes qui s'écrivent sous la forme

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \dot{q}_t + [(1 - \delta) \ddot{q}_t + \delta \ddot{q}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (5.2.27)$$

$$q_{t+\Delta t} = q_t + \dot{q}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{q}_t + \alpha \ddot{q}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (5.2.28)$$

où $\alpha = 1/4$ et $\delta = 1/2$ pour l'accélération constante et $\alpha = 1/6$ et $\delta = 1/2$ pour l'accélération linéaire. Un ensemble de paramètres (α, δ) donné correspond à une méthode de résolution bien précise. Il ne faut cependant pas nécessairement vouloir donner de signification physique à cette méthode. Par exemple, on peut comprendre que la méthode correspondant à $\alpha = 1/5$ et $\delta = 1/2$ soit effectivement intermédiaire entre l'accélération linéaire et l'accélération constante, mais il ne faut pas nécessairement vouloir lui donner une quelconque signification. L'idée de la généralisation réside dans le fait qu'une autre méthode, légèrement voisine des deux cas particuliers, mais différente cependant pourrait avoir des propriétés de précision et/ou stabilité plus avantageuses.

Comme pour ces deux cas particuliers, le formalisme général de la méthode de Newmark est obtenu en introduisant (5.2.27) et (5.2.28) dans l'équation d'équilibre en $t + \Delta t$. Il est important de remarquer que cette méthode fonctionne également pour les structures à comportement non linéaire, pour lesquelles l'équation du mouvement prend la forme

$$m\ddot{q}_{t+\Delta t} + f(q_{t+\Delta t}, \dot{q}_{t+\Delta t}) \rightarrow \ddot{q}_{t+\Delta t} = p_{t+\Delta t}. \quad (5.2.29)$$

La résolution de cette équation (éventuellement non linéaire) par rapport à $\ddot{q}_{t+\Delta t}$ permet de déterminer l'état de la structure à la fin du pas de temps.

En cas de comportement non linéaire, cette équation doit être résolue par une méthode itérative (p.ex. Newton-Raphson). Pour autant que l'accélération ne varie pas trop rapidement, $\ddot{q}_t$ peut être considéré comme une bonne approximation de $\ddot{q}_{t+\Delta t}$ et

donc servir de valeur initiale pour le processus itératif nécessaire à la résolution de (5.2.29).

Lorsque le comportement structurel est linéaire, les équations de la méthode de Newmark (5.2.27)-(5.2.29) peuvent s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\delta\Delta t \\ 1 & 0 & -\alpha\Delta t^2 \\ k & c & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{t+\Delta t} \\ \dot{q}_{t+\Delta t} \\ \ddot{q}_{t+\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & (1-\delta)\Delta t \\ 1 & \Delta t & (\frac{1}{2}-\alpha)\Delta t^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_t \\ \dot{q}_t \\ \ddot{q}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{t+\Delta t} \end{pmatrix} \quad (5.2.30)$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\delta \\ 1 & 0 & -\alpha \\ (\omega_1\Delta t)^2 & 2\xi_1\omega_1\Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{t+\Delta t} \\ \Delta t\dot{q}_{t+\Delta t} \\ \Delta t^2\ddot{q}_{t+\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1-\delta \\ 1 & 1 & \frac{1}{2}-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_t \\ \Delta t\dot{q}_t \\ \Delta t^2\ddot{q}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{p_{t+\Delta t}}{m} \end{pmatrix} \quad (5.2.31)$$

et être résolues explicitement. Dans ce cas, l'élimination de $q_{t+\Delta t}$ et $\dot{q}_{t+\Delta t}$ fait donc de (5.2.29) une équation linéaire en $\ddot{q}_{t+\Delta t}$ qui peut être déterminée une bonne fois pour toutes. Ce résultat est évidemment le même que celui de la résolution du système matriciel (5.2.30). Au lieu de résoudre le système par rapport à $\ddot{q}_{t+\Delta t}$, il est coutume de le résoudre par rapport à $q_{t+\Delta t}$ dont on perçoit généralement mieux les limitations physiques. Après quelques développements, on obtient

$$k_F q_{t+\Delta t} = p_F \quad (5.2.32)$$

où

$$k_F = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}m + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}c + k \quad (5.2.33)$$

$$\begin{aligned} p_F = & p_{t+\Delta t} + c \left(\frac{\delta}{\alpha\Delta t}q_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \dot{q}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \ddot{q}_t \right) \\ & + m \left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2}q_t + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{q}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{q}_t \right) \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

sont donc à voir comme une raideur et une sollicitation équivalentes au problème dynamique (compte tenu de sa résolution numérique avec un pas de temps Δt et des paramètres α et δ donnés). De façon pratique, partant des conditions initiales, on utilise (5.2.32) pour déterminer la position à la fin du pas de temps, puis

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \frac{\delta}{\alpha\Delta t} (q_{t+\Delta t} - q_t) + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \dot{q}_t + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \ddot{q}_t \quad (5.2.35)$$

$$\ddot{q}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2} (q_{t+\Delta t} - q_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t} \dot{q}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{q}_t, \quad (5.2.36)$$

(les solutions du système matriciel) pour déterminer les vitesse et accélération à la fin du pas de temps.

5.2.5 Méthode de Houbolt

-

5.2.6 Méthode de Wilson

-

5.2.7 Méthodes HHT

-

5.2.8 Méthodes DE3

-

5.3 Stabilité et précision des méthodes numériques

Les équations relatives à la récurrence d'une méthode peuvent se mettre sous la forme canonique

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{A} \mathbf{x}_t + \mathbf{L}^{(1)} \mathbf{r}_t + \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{r}_{t+\Delta t} \quad (5.3.1)$$

où $\mathbf{x}_t$ est composé de déplacement(s), vitesse(s) et/ou accélération(s) selon la méthode considérée, $\mathbf{r}_t$ dépend de p_t et $\mathbf{r}_{t+\Delta t}$ dépend de $\mathbf{p}_{t+\Delta t}$. Par exemple, les équations (5.2.7), (5.2.10) et (5.2.30) sont les équations sous ce format pour les méthodes de la différence centrale (options 1 et 2) et de Newmark.

Stabilité des méthodes numériques

La stabilité d'un algorithme est étudiée sur la réponse libre ($\mathbf{r}_t \equiv 0; \mathbf{r}_{t+\Delta t} \equiv 0$). Il reste donc

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{A} \mathbf{x}_t \quad (5.3.2)$$

ou, par récurrence,

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{A} \mathbf{x}_t = \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_{t-\Delta t} = \dots = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0. \quad (5.3.3)$$

où $n = (t + \Delta t) / \Delta t$. On obtient donc la réponse après un certain temps en multipliant le vecteur de conditions initiales un nombre suffisant de fois par la matrice $\mathbf{A}$. Étant donné qu'aucune force n'est appliquée sur la structure, on s'attend à ce que les vibrations s'atténuent au cours du temps, ou éventuellement persistent indéfiniment avec une amplitude constante si la structure est non amortie.

Pour que le schéma d'intégration considéré soit acceptable, il faut donc que la matrice $\mathbf{A}^n$ reste bornée pour $n \rightarrow \infty$. Si tel n'était pas le cas, n'importe quelle petite perturbation (d'origine numérique même) serait amplifiée sans limite.

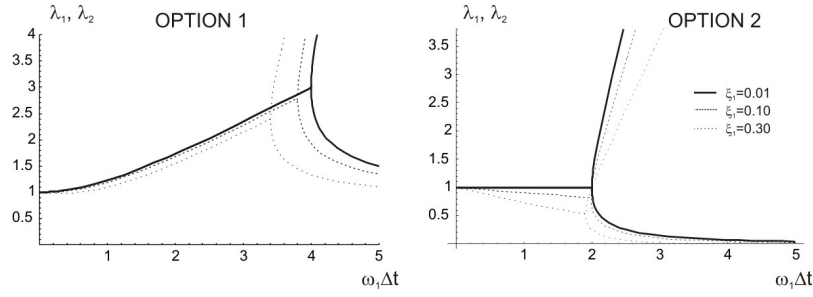


FIGURE 5.3.1 – Valeurs propres de la matrice de stabilité pour la méthode de la différence centrale.

La puissance d'une matrice se calcule à partir de sa décomposition spectrale

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}, \quad (5.3.4)$$

où $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de $\mathbf{A}$ et où $\mathbf{P}$ est la matrice des vecteurs propres associés. On peut calculer successivement

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1}. \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^3\mathbf{P}^{-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

et donc démontrer par induction que

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}. \quad (5.3.5)$$

Ceci montre que $\mathbf{A}^n$ reste bornée tant que $\mathbf{\Lambda}^n$ l'est. Or montrer que $\mathbf{\Lambda}^n$ reste bornée est bien plus simple puisque $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice diagonale. En effet, si tous les éléments de $\mathbf{\Lambda}$ (les valeurs propres de $\mathbf{A}$) restent en norme strictement inférieurs à l'unité, alors $\mathbf{\Lambda}^n$ tend vers zéro pour $n \rightarrow \infty$. Par contre, s'il existe une valeur propre de $\mathbf{A}$ de norme supérieure à l'unité, alors le schéma d'intégration étudié est assurément instable pour l'ensemble de paramètres concernés.

Le raisonnement peut donc être résumé à partir du rayon spectral de $\mathbf{A}$, noté $\rho(\mathbf{A})$, qui représente la plus grande valeur propre de $\mathbf{A}$ en valeur absolue :

- si $\rho(\mathbf{A}) > 1$, alors $\mathbf{A}^n \rightarrow \infty$: amplification indésirée des perturbations, le schéma est instable
- si $\rho(\mathbf{A}) = 1$: les perturbations introduites persistent indéfiniment, le schéma numérique n'introduit ni ne dissipe aucune énergie
- si $\rho(\mathbf{A}) < 1$, alors $\mathbf{A}^n \rightarrow 0$: le schéma numérique apporte un certain amortissement artificiel

A titre illustratif, la figure (5.3.1) indique les évolutions des valeurs propres λ_1 et λ_2 des matrices de stabilité $\mathbf{A}$ relatives aux options 1 et 2 de la méthode de la différence centrale.

Pour des valeurs réalistes du coefficient d'amortissement, l'option 1 fournit des valeurs propres qui sont toujours supérieures à l'unité en valeur absolue. Cela signifie donc que, quelque soit le pas de temps Δt choisi, le schéma d'intégration numérique obtenu est instable.

Le tracé des valeurs propres relatives à l'option 2 indique que ce schéma d'intégration est parfait (aucune dissipation/aucun apport d'énergie) tant que $\omega_1 \Delta t \leq 2$. Cela signifie que ce schéma d'intégration n'est stable que si $\Delta t \leq T_1/\pi$. On dit alors que la méthode est conditionnellement stable (il y a une condition à vérifier sur le pas de temps Δt pour que le processus soit stable). En pratique, dans ce cas précis d'application, la limite de stabilité $T_1/\pi \simeq 0.318T_1$ n'est pas vraiment une limitation en soi puisqu'il est conseillé d'utiliser au moins 10 points pour représenter une période, c'est-à-dire $\Delta t \lesssim T_1/10$. C'est donc en pratique ce critère qui est limitatif et non pas le critère de stabilité de l'algorithme.

En plus d'être stable, on attend d'une méthode numérique qu'elle soit précise. Deux défauts principaux de précision sont :

- la dégradation d'amplitude,
- l'allongement de la période.

La dégradation de l'amplitude est à attribuer à l'amortissement artificiel introduit par la méthode et discuté précédemment. Quant à l'allongement de la période, pour un schéma d'intégration donné (avec ses paramètres fixés), il dépend du type de chargement et du niveau d'amortissement. On ne peut donc que se contenter d'étudier ce phénomène sur des exemples précis. A titre d'exemple, la figure (5.3.2) représente le pourcentage d'allongement de la période propre pour une réponse à un lâcher libre non amorti, c'est-à-dire que l'on a résolu numériquement

$$\ddot{q} + \omega_1^2 q = 0 \quad (5.3.6)$$

avec $q(0) = 1$ et $\dot{q}(0) = 0$ comme conditions initiales. La solution numérique est comparée à la solution exacte : $q = \cos 2\pi \frac{t}{T_1}$. A la figure (5.3.2), on peut par exemple constater que la méthode de l'accélération constante (Newmark avec $\delta = 1/2$ et $\alpha = 1/4$) génère un allongement de la période de l'ordre de 3% lorsque le pas de temps est choisi comme étant égal au dixième de la période propre. Cette illustration est une raison supplémentaire pour laquelle dépasser, pour le choix du pas de temps, une valeur égale à $T_1/10$ n'est pas conseillé.

5.4 Exercices

Déterminez les limites de stabilité de l'algorithme de Newmark.

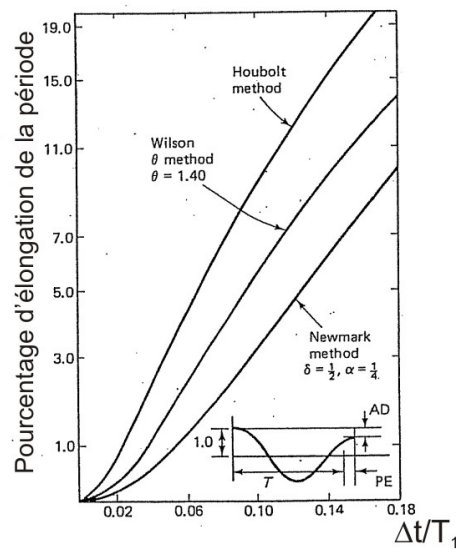


FIGURE 5.3.2 – Pourcentage d'élongation de la période - Réponse libre

Chapitre 6

Dynamique des systèmes discrets

6.1 Systèmes à un degré de liberté

Face à l'analyse d'une structure, un rôle important de l'ingénieur consiste à construire un modèle adéquat qui, de façon minimaliste, devrait permettre d'expliquer les phénomènes attendus en assemblant uniquement les éléments de modélisation nécessaires. Le choix d'un modèle le plus simple possible amène souvent à l'étude d'un système à un degré de liberté, c'est-à-dire un système tel que la connaissance d'une coordonnée généralisée $q(t)$ en un instant quelconque détermine de façon exhaustive l'état de la structure étudiée. Les structures filaires rencontrées dans le domaine du génie civil -un portique à un étage, un haut building, un tablier de pont, un hauban- sont parfois modélisées à l'aide de systèmes à un degré de liberté, ce qui permet de représenter leur comportement dynamique fondamental. En pratique, l'établissement de ce modèle n'est pas toujours évident. A la section ??, nous présentons les outils qui permettront de mettre au point un modèle dynamique de la structure, et d'établir une équation du mouvement comme (3.1.2).

En nous limitant ensuite à l'étude des vibrations de systèmes linéaires, nous étudierons successivement la réponse d'une structure à un degré de liberté soumise à divers types de charges (constante, périodique, impulsionnelle), afin de présenter les bases nécessaires qui nous permettront d'étudier la réponse d'une structure soumise à une charge quelconque.

6.1.1 Vibrations libres

Afin de comprendre le fonctionnement fondamental de l'oscillateur simple, nous allons considérer que le système est libre de force appliquée ($p = 0$), et donc résoudre l'équation différentielle à coefficients constants suivante

$$\ddot{q} + 2\omega_1\xi_1\dot{q} + \omega_1^2q = 0. \quad (6.1.1)$$

La solution de cette équation différentielle homogène s'obtient à partir des racines z_1 et z_2 du polynôme caractéristique

$$z^2 + 2\omega_1\xi_1 z + \omega_1^2 = 0, \quad (6.1.2)$$

soit

$$\begin{aligned} z_1 &= -\omega_1 \left(\xi_1 + \iota \sqrt{1 - \xi_1^2} \right) = -\omega_1 \xi_1 - \iota \omega_d \\ z_2 &= -\omega_1 \left(\xi_1 - \iota \sqrt{1 - \xi_1^2} \right) = -\omega_1 \xi_1 + \iota \omega_d \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

où ι représente le nombre imaginaire complexe et où $\omega_d = \omega_1 \sqrt{1 - \xi_1^2}$ est la *pulsation propre amortie*, légèrement inférieure à ω_1 puisque ξ_1 est de l'ordre du pourcent¹. La solution de l'équation différentielle de second ordre s'écrit alors

$$q = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} \quad (6.1.4)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes complexes qu'il convient de déterminer en fonction des conditions limites. Ces conditions limites sont souvent des conditions initiales, à savoir, une position et une vitesse données. Soit

$$q(0) = q_0 \quad ; \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0. \quad (6.1.5)$$

L'introduction de z_1 et z_2 dans (6.1.4) donne

$$q = e^{-\xi_1 \omega_1 t} [C_1 e^{-\iota \omega_d t} + C_2 e^{+\iota \omega_d t}]. \quad (6.1.6)$$

Au lieu de conserver deux constantes complexes C_1 et C_2 , on peut² leur substituer, puisque la fonction q est réelle, deux autres constantes réelles A et B , et écrire la solution générale de l'équation

$$q = e^{-\xi_1 \omega_1 t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t). \quad (6.1.7)$$

1. Nous nous plaçons dans la situation où $\xi_1 \ll 1$, ce qui correspond à des vibrations généralement appelées sous-critiques puisque $c < c_{cr}$. Considérer $\xi_1 > 1$ n'a pas d'intérêt pratique avec les ordres de grandeurs d'amortissement structurel rencontrés dans les applications du génie civil.

2. En notant $C_1 = a_1 + \iota b_1$ et $C_2 = a_2 + \iota b_2$, et en se souvenant que $e^{\iota \theta} = \cos \theta + \iota \sin \theta$, le contenu des crochets peut s'écrire

$$(a_1 + \iota b_1) (\cos \omega_d t - \iota \sin \omega_d t) + (a_2 + \iota b_2) (\cos \omega_d t + \iota \sin \omega_d t)$$

ou encore

$$(a_1 + a_2) \cos \omega_d t + (b_1 - b_2) \sin \omega_d t + \iota [(a_2 - a_1) \sin \omega_d t + (b_1 + b_2) \cos \omega_d t].$$

Étant donné que cette fonction doit être réelle $\forall t$, on doit nécessairement avoir $a_1 = a_2$ et $b_1 = -b_2$. L'expression précédente peut donc également s'écrire

$$A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t$$

avec $A = a_1 + a_2$ et $B = b_1 - b_2$.

En considérant les conditions limites particulières (6.1.5), on obtient $A = q_0$ et $B = (\dot{q}_0 + \xi_1 \omega_1 q_0) / \omega_d$, soit

$$q = e^{-\xi_1 \omega_1 t} \left(q_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{q}_0 + \xi_1 \omega_1 q_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right). \quad (6.1.8)$$

Cette relation montre que le mouvement de l'oscillateur s'apparente à un mouvement harmonique (combinaison de cos et sin), modulé cependant par une exponentielle décroissante. L'argument de l'exponentielle, que l'on peut écrire $-2\pi\xi_1 t/T_1$ contrôle la rapidité de la décroissance. Si l'on admet que e^{-x} est négligeable pour $x > \pi$ ($e^{-\pi} = 4\%$), on peut constater que la réponse dynamique est fortement amortie lorsque $2\pi\xi_1 t/T_1 > \pi$, c'est-à-dire lorsque le temps t écoulé depuis le lâché libre de l'oscillateur est plus grand que

$$t_r = \frac{T_1}{2\xi_1}. \quad (6.1.9)$$

Cette durée t_r apparaît donc comme le *temps de mémoire* de la structure qui représente la durée pendant laquelle une perturbation quelconque se fait ressentir, que ce soit, comme ici, une condition initiale imposée, ou de façon plus générale un impact, un arrêt brutal de sollicitation, etc.

On peut voir également que la décroissance exponentielle est d'autant plus lente que le taux d'amortissement est faible. A la limite, pour $\xi = 0$, c'est-à-dire $\omega_d = \omega_1$, la réponse de l'oscillateur soumis à un déplacement et une vitesse initiaux devient

$$q = q_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t, \quad (6.1.10)$$

où la décroissance exponentielle a disparu. Cela signifie donc qu'un système non amorti (un idéal théorique!) initialement en mouvement continuera d'osciller tant qu'aucune force ne lui sera appliquée. Plus généralement, toute perturbation appliquée à ce type de structure idéale aura donc un effet à durée illimitée. La figure 6.1.1 donne un exemple typique de la réponse dynamique d'un oscillateur faiblement amorti et d'un oscillateur non-amorti.

Un cas particulier important de (6.1.8) est celui où la vitesse initiale est nulle. Cette situation consiste donc à écarter l'oscillateur de sa position d'équilibre et à le lâcher subitement. La réponse dynamique, obtenue en posant $\dot{q}_0 = 0$ dans (6.1.8),

$$q = q_0 e^{-\xi_1 \omega_1 t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi_1 \omega_1}{\omega_d} \sin \omega_d t \right), \quad (6.1.11)$$

peut être simplifiée davantage pour les faibles amortissements rencontrés. En effet,

$$\frac{\xi_1 \omega_1}{\omega_d} = \frac{\xi_1}{\sqrt{1 - \xi_1^2}} \ll 1, \quad (6.1.12)$$

de sorte que le terme en sin puisse être négligé devant le terme en cos et ainsi donner

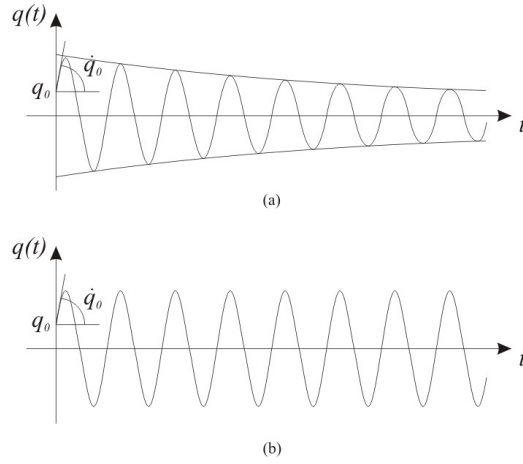


FIGURE 6.1.1 – Réponse libre d'un oscillateur (a) faiblement amorti et (b) non amorti.

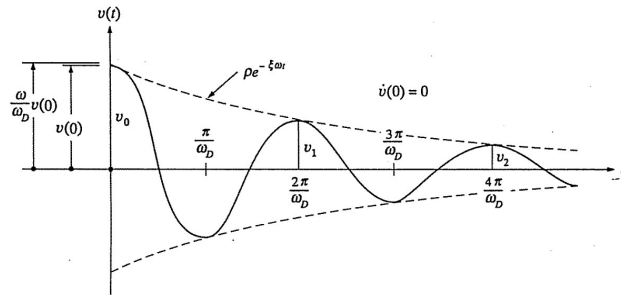


FIGURE 6.1.2 – Réponse libre d'un oscillateur sous lâcher libre ($\dot{q}_0 = 0$)

$$q \simeq q_0 e^{-\xi_1 \omega_1 t} \cos \omega_d t. \quad (6.1.13)$$

La figure 6.1.2 donne un exemple typique de réponse dynamique obtenue sous un lâcher libre. Les instants t_i des maxima relatifs sont obtenus en résolvant

$$\dot{q}(t_i) = 0 \Rightarrow -\xi_1 \omega_1 q_0 e^{-\xi_1 \omega_1 t} \cos \omega_d t_i - \omega_d q_0 e^{-\xi_1 \omega_1 t} \sin \omega_d t_i = 0. \quad (6.1.14)$$

Si l'on suppose à nouveau que ξ_1 est petit, cette équation se résume à $\sin \omega_d t_i = 0$ et donc

$$t_i = \frac{2i\pi}{\omega_d} \simeq i T_1 \quad \text{avec } i = 0, 1, \dots \quad (6.1.15)$$

Les valeurs des maxima relatifs sont obtenues en injectant ces expressions des t_i dans (6.1.13)

$$q_i = q_0 e^{-\xi_1 \omega_1 \frac{2i\pi}{\omega_d}}. \quad (6.1.16)$$

Par définition, le *décrément logarithmique* est le logarithme népérien du rapport entre deux maxima relatifs

$$\delta_1 = \ln \frac{q_i}{q_{i+1}} = \ln \frac{q_0 e^{-\xi_1 \omega_1 \frac{2i\pi}{\omega_d}}}{q_0 e^{-\xi_1 \omega_1 \frac{2(i+1)\pi}{\omega_d}}} = \frac{2\pi \xi_1}{\sqrt{1 - \xi_1^2}}. \quad (6.1.17)$$

Il est donc directement relié au coefficient d'amortissement relatif, et donne ainsi une information équivalente quant à l'amortissement présent dans le système étudié. Pour les faibles coefficients d'amortissement considérés en pratique, on peut considérer que $\delta_1 \simeq 2\pi \xi_1$ et donc

$$\xi_1 \simeq \frac{1}{2\pi} \ln \frac{q_i}{q_{i+1}}. \quad (6.1.18)$$

Cette relation est utilisée pour déterminer pratiquement le coefficient d'amortissement de structures à un degré de liberté. La structure considérée est maintenue écartée de sa position d'équilibre puis lâchée avec précaution (rupture d'un câble, lâcher de masse, etc.). La mesure des déplacements maxima successifs permet d'estimer le coefficient d'amortissement ξ_1 . Si l'on considère deux maxima successifs, on obtient ainsi autant d'estimation de l'amortissement que de maxima mesurés. Pour limiter l'erraticité liée à une mesure réelle et afin d'obtenir une estimation plus globalisée de l'amortissement, on peut procéder de façon similaire en considérant des maxima plus espacés

$$\xi_1 \simeq \frac{1}{2n\pi} \ln \frac{q_i}{q_{i+n}}. \quad (6.1.19)$$

De cette relation, on peut estimer le nombre de cycles n nécessaires pour que l'amplitude de la réponse soit ramenée à un pourcentage $p \in]0; 1[$ de la valeur mesurée en t_i

$$q_{i+n} = p q_i \quad \Rightarrow \quad n = \frac{-\ln p}{2\pi \xi_1}. \quad (6.1.20)$$

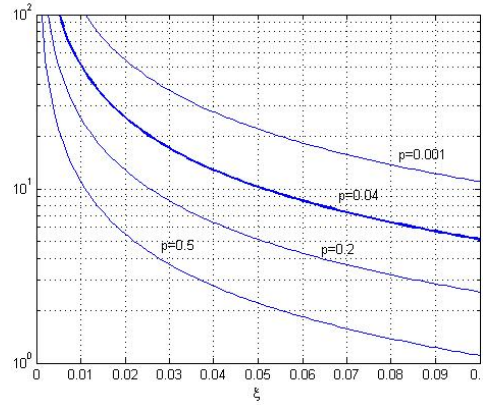


FIGURE 6.1.3 – Nombre de cycles n nécessaires pour que l’amplitude de la réponse soit ramenée à un pourcentage p de son amplitude initiale.

Cette fonction est représentée à la figure 6.1.3 pour différentes valeurs de p . Pour $p = 4\%$, on retrouve $n = 1/2\xi_1$, ce qui est bien compatible avec la notion de temps de mémoire définie précédemment.

6.1.2 Vibrations forcées, charges harmoniques

Pour avancer dans notre étude de l’oscillateur simple, considérons maintenant qu’il existe une charge extérieure appliquée, mais dont l’expression analytique simple nous permettra de mener explicitement les développements. Plusieurs cas de chargement simples seront étudiés. Dans cette section, nous commençons par une force sinusoïdale d’amplitude $\bar{p}$ et de pulsation $\bar{\omega}$. Nous allons donc résoudre

$$\ddot{q} + 2\omega_1\xi_1\dot{q} + \omega_1^2q = p(t) = \frac{\bar{p}}{m} \sin \bar{\omega}t. \quad (6.1.21)$$

6.1.2.1 Étude de trois cas limites

Avant d’étudier la solution de cette équation de façon formelle, il est intéressant de décrire brièvement les caractéristiques de la solution dans trois cas limites différents correspondant aux cas où seul un des termes du membre de gauche est prépondérant.

Pour commencer, supposons que ω_1 est très grand³ et donc que les deux premiers termes du membre de gauche de (6.1.21) soient négligeables par rapport à ω_1^2q . L’équation du mouvement (6.1.21) se résume alors à

$$\omega_1^2q = \frac{\bar{p}}{m} \sin \bar{\omega}t \quad (6.1.22)$$

3. on démontre ci-dessous qu’il s’agit de “très grand par rapport à $\bar{\omega}$ ”

dont la solution est

$$q = \frac{\bar{p}}{k} \sin \bar{\omega} t = \frac{p(t)}{k}, \quad (6.1.23)$$

c'est-à-dire la solution quasi-statique. Dans ce cas, l'oscillateur s'adapte instantanément aux modifications de la sollicitation ; force et réponse dynamique évoluent exactement en phase et l'amplitude de la réponse est essentiellement gouvernée par la raideur de la structure.

Étudions ensuite le cas où ω_1 est très petit (soit $\bar{\omega}$ très grand) et donc où ce sont les effets d'inertie qui sont prépondérants. Dans cette situation, la force varie très rapidement, c'est-à-dire sur des durées très courtes par rapport à la période propre de la structure étudiée. L'équation du mouvement (6.1.21) se réduit à

$$\ddot{q} = \frac{\bar{p}}{m} \sin \bar{\omega} t \quad (6.1.24)$$

dont la solution est

$$q = -\frac{\bar{p}}{m\bar{\omega}^2} \sin \bar{\omega} t + \text{cst} + \text{cst}t. \quad (6.1.25)$$

Le premier terme surtout est à considérer avec intérêt. Il montre que, dans le cas d'un chargement rapide ($\bar{\omega} \gg$), la raideur du système étudié n'influence aucunement l'amplitude de la réponse, mais par contre que c'est la masse qui permet de limiter l'amplitude du mouvement. Aussi, lorsque la fréquence de la sollicitation tend vers l'infini ($\bar{\omega} \rightarrow \infty$), l'amplitude du mouvement tend vers zéro. Ceci s'explique par le fait que la structure étudiée n'a pas le temps de réagir aux modifications de force qui lui sont appliquées. La structure part dans une direction alors que la force, qui a déjà changé de sens, la ramène vers la position d'équilibre. Cette explication est également confortée par le signe "—" dans la réponse qui indique que force et réponse dynamique sont en opposition de phase.

Finalement, dans une gamme de fréquences intermédiaires où $\bar{\omega} \simeq \omega_1$, il se peut que le terme d'amortissement soit prépondérant dans le membre de gauche de l'équation du mouvement. Ceci est tout de même relativement rare puisque ξ_1 est très faible ; donc la gamme de fréquences dont on parle doit nécessairement être très étroite et d'autant plus étroite que l'amortissement est faible. Dans la gamme de pulsation étudiée, on peut donc écrire $\bar{\omega} = \omega_1 (1 + \epsilon)$, où $|\epsilon| \ll$. Dans ce troisième cas de figure, l'équation du mouvement (6.1.21) se résume cette fois à

$$2\omega_1 \xi_1 \dot{q} = \frac{\bar{p}}{m} \sin \bar{\omega} t \quad (6.1.26)$$

dont la solution est

$$q = \frac{-\bar{p}}{2m\omega_1 \bar{\omega} \xi_1} \cos \bar{\omega} t + \text{cst}. \quad (6.1.27)$$

En y introduisant l'expression donnée pour $\bar{\omega}$, le premier terme de cette solution s'écrit aussi

$$q = \frac{-\cos \bar{\omega} t}{2(1 + \epsilon) \xi_1} \frac{\bar{p}}{k}. \quad (6.1.28)$$

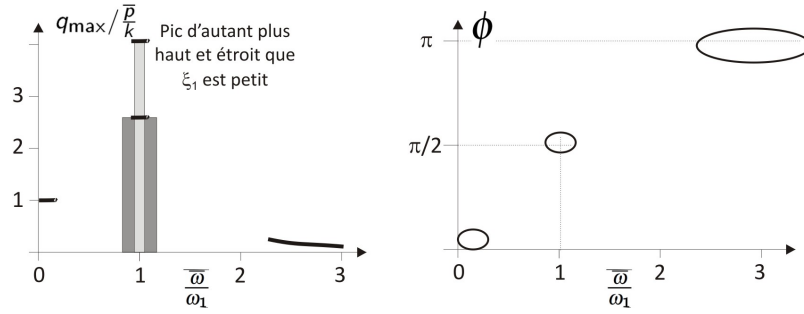


FIGURE 6.1.4 – Résultats de l’analyse de trois cas limites (comportements quasi-statique, résonant et inertiel). Esquisses de l’amplitude du mouvement stationnaire et de son déphasage.

Comportement	$\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}$	$q_{\max}/\frac{\bar{p}}{k}$	ϕ
Quasi-statique (k)	$\frac{\bar{\omega}}{\omega_1} \ll 1$	1	0
Résonant (c)	$\frac{\bar{\omega}}{\omega_1} \simeq 1$	$1/\xi_1$	$\pi/2$
Inertiel (m)	$\frac{\bar{\omega}}{\omega_1} \gg 1$	$1/\frac{\bar{\omega}^2}{\omega_1^2}$	π

TABLE 6.1 – Résultats de l’analyse de trois cas limites (comportements quasi-statique, résonant et inertiel). Expressions de l’amplitude du mouvement stationnaire et de son déphasage

Cette relation montre que, dans ce domaine où la fréquence de la sollicitation est proche de la fréquence propre, la réponse quasi-statique est amplifiée par un facteur démesuré (puisque inversement proportionnel à ξ_1). Ce facteur, qui exprime l’amplification dynamique, indique que cette fois c’est l’amortissement qui gouverne l’amplitude maximale de la réponse. L’équation (6.1.28) montre également que la force et la réponse dynamique sont déphasées de 90° . Il s’agit du phénomène de résonance. Dans ce cas de figure, la structure qui passe par son état d’équilibre est poussée dans son sens de marche par une force maximale qui s’estompe jusqu’à l’atteinte du déplacement maximal. A ce moment, en l’absence de force, l’oscillateur repart naturellement dans l’autre sens puisqu’on est au bout de sa période propre. Lors de son mouvement vers l’amplitude extrême opposée, la force augmente puis diminue en poussant à nouveau la structure dans cette direction, et en prenant une valeur maximale lors du passage par la position d’équilibre. C’est ce processus qui permet d’augmenter l’amplitude des vibrations.

Le tableau (6.1) résume les résultats obtenus pour chacun des trois types de comportement et la figure (6.1.4) esquisse la forme de la fonction représentant l’amplitude du mouvement ainsi que le déphasage entre la force et la réponse dynamique.

6.1.2.2 Étude formelle des vibrations sous charge harmonique

Après cette étude des comportements limites de l'équation du mouvement, nous pouvons entreprendre sa résolution formelle qui permettra de connecter entre elles les différentes solutions limites étudiées. La solution d'une équation différentielle comme (6.1.21) s'écrit

$$q = q_{tr} + q_{st} \quad (6.1.29)$$

où $q_{tr}(t)$ est la solution générale de l'équation homogène et $q_{st}(t)$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. La solution générale de l'équation homogène $q_{tr}(t)$ a été largement discutée à la section précédente. Il s'agit effectivement de la réponse libre représentée par (6.1.7)

$$q_{tr} = e^{-\xi_1 \omega_1 t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t). \quad (6.1.30)$$

Avant d'établir précisément une expression de q_{st} , il est important de rappeler que les constantes A et B doivent être déterminées à partir des conditions initiales sur q et non pas q_{tr} . Donc, si l'on suppose par exemple que l'oscillateur est au repos en $t = 0$, les constantes A et B seront déterminées par

$$\begin{aligned} q(0) &= 0 = q_{tr}(0) + q_{st}(0) = A + q_{st}(0) \\ \dot{q}(0) &= 0 = \dot{q}_{tr}(0) + \dot{q}_{st}(0) = -\xi_1 \omega_1 A + \omega_d B + \dot{q}_{st}(0) \end{aligned} \quad (6.1.31)$$

où l'on constate évidemment que le choix de la solution particulière q_{st} peut influencer la détermination de A et B (mais pas de q). Dans l'étude des vibrations sous chargement harmonique, on se concentre essentiellement sur la solution particulière q_{st} parce que la solution générale q_{tr} se sera évanouie après un laps de temps correspondant au temps de mémoire de la structure. Après ce laps de temps, la structure ne se souvient plus de ses conditions initiales, la solution générale est négligeable, et il ne reste plus alors que la solution particulière. C'est la raison particulière pour laquelle la détermination des constantes A et B présente peu d'intérêt pour le moment.

En d'autres termes, la solution générale q_{tr} est donc à considérer comme une solution *transitoire* qui disparaît après une période de mise en régime. Lorsque la période de mise en régime (égale au temps de mémoire) est écoulée, il ne reste plus alors qu'une composante *stationnaire*, à savoir la solution particulière q_{st} . Dans la suite des développements, nous allons nous focaliser sur cette composante stationnaire q_{st} uniquement et supposer donc que la sollicitation agit depuis suffisamment longtemps pour que la composante transitoire ait disparu.

En raison de la forme du second membre de (6.1.52), on peut essayer de chercher une solution particulière de l'équation du mouvement sous la forme

$$q_{st} = G_1 \sin \bar{\omega} t + G_2 \cos \bar{\omega} t. \quad (6.1.32)$$

On peut dès à présent constater une différence majeure entre les solutions libre (q_{tr}) et forcée (q_{st}) puisque les composantes harmoniques de l'une sont à la pulsation ω_d

alors que celles de l'autre sont à la pulsation $\bar{\omega}$. Ce résultat est assez cohérent avec l'intuition puisque cela signifie que, en l'absence de chargement, la structure vibre à sa fréquence propre (celle dans laquelle elle bouge naturellement), alors qu'elle s'adapte à la cadence de la sollicitation lorsqu'elle est chargée par une force harmonique.

Les constantes G_1 et G_2 sont déterminées en introduisant (6.1.32) dans (6.1.21)

$$\begin{aligned} - (G_1 \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t + G_2 \bar{\omega}^2 \cos \bar{\omega} t) + (2\omega_1 \xi_1 G_1 \cos \bar{\omega} t - G_2 \sin \bar{\omega} t) \\ + \omega_1^2 (G_1 \sin \bar{\omega} t + G_2 \cos \bar{\omega} t) = \frac{\bar{p}}{m} \sin \bar{\omega} t. \end{aligned}$$

Étant donné que cette équation doit être satisfaite en chaque instant t , les coefficients de $\cos \bar{\omega} t$ et $\sin \bar{\omega} t$ doivent nécessairement s'annuler, ce qui fournit les deux relations permettant de déterminer G_1 et G_2

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \bar{\omega}^2) G_1 - 2\omega_1 \bar{\omega} \xi_1 G_2 &= \frac{\bar{p}}{m} \\ 2\omega_1 \bar{\omega} \xi_1 G_1 + (\omega_1^2 - \bar{\omega}^2) G_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.1.33)$$

L'élimination de G_1 et G_2 entre ces deux dernières équations donne

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\bar{p}}{k} \frac{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_1 \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2} \\ G_2 &= \frac{\bar{p}}{k} \frac{-2\xi_1 \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}}{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_1 \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2} \end{aligned} \quad (6.1.34)$$

qui, après introduction dans (6.1.32) donne

$$q_{st} = \frac{\bar{p}}{k} \frac{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right) \sin \bar{\omega} t - 2\xi_1 \frac{\bar{\omega}}{\omega_1} \cos \bar{\omega} t}{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_1 \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2}. \quad (6.1.35)$$

Afin de faire apparaître l'amplitude de la réponse dynamique r , il est intéressant de réécrire cette solution particulière sous la forme

$$q_{st} = r \sin(\bar{\omega} t - \phi). \quad (6.1.36)$$

En développant le sin dans cette relation⁴, puis en égalant les coefficients de $\sin \bar{\omega} t$

4. $q_{st} = r \sin(\bar{\omega} t - \phi) = r \cos \phi \sin \bar{\omega} t - r \sin \phi \cos \bar{\omega} t$, donc $G_1 = r \cos \phi$; $G_2 = -r \sin \phi$ et ainsi $r = \sqrt{G_1^2 + G_2^2}$ et $\tan \phi = -G_1/G_2$.

et $\cos \bar{\omega}t$ à ceux de (6.1.35), on trouve

$$\begin{aligned} r &= \frac{\bar{p}/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_1 \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2}} \\ \phi &= \arctan \frac{2\xi_1 \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2} \end{aligned} \quad (6.1.37)$$

Cette formulation est intéressante car elle montre que l'amplitude de la réponse dynamique d'un système soumis à une charge sinusoïdale s'exprime par le produit de la réponse quasi-statique $\frac{\bar{p}}{k}$ par un autre facteur qui ne dépend que du coefficient d'amortissement et du rapport $\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}$ entre la fréquence de la sollicitation et la fréquence propre du système étudié.

Une autre façon de voir les choses est de comprendre $k\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_1 \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2}$ comme une “raideur dynamique”, qui permet d'estimer l'amplitude du mouvement oscillatoire sous une excitation d'amplitude $\bar{p}$ donnée.

6.1.2.3 Approche du problème par une analyse complexe

Bien que l'introduction de nombres et fonctions complexes ne permette pas toujours de donner une signification physique simple aux équations concernées, cela permet par contre souvent de simplifier les développements mathématiques. En l'occurrence, une alternative aux développements de la section précédente consiste à considérer plutôt ce problème

$$\ddot{\mathcal{Q}} + 2\omega_1\xi_1\dot{\mathcal{Q}} + \omega_1^2\mathcal{Q} = \frac{\mathcal{P}}{m}e^{\iota\bar{\omega}t}. \quad (6.1.38)$$

où la force appliquée reste harmonique mais est maintenant complexe. On peut écrire le nombre complexe $\mathcal{P}$ sous la forme $\mathcal{P} = |\mathcal{P}|e^{\iota\varphi}$ si bien que le second membre de (6.1.38) s'écrit

$$\frac{\mathcal{P}}{m}e^{\iota\bar{\omega}t} = \frac{|\mathcal{P}|}{m} [\cos(\bar{\omega}t + \varphi) + \iota \sin(\bar{\omega}t + \varphi)] = f_r + \iota f_i \quad (6.1.39)$$

avec

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{|\mathcal{P}|}{m} \cos(\bar{\omega}t + \varphi) \\ f_i &= \frac{|\mathcal{P}|}{m} \sin(\bar{\omega}t + \varphi). \end{aligned} \quad (6.1.40)$$

Dans ce cas, la solution $\mathcal{Q}$ de (6.1.38) est une fonction complexe $\mathcal{Q} = q_r + \iota q_i$ dont chacune des parties satisfait les deux équations réelles

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r + 2\omega_1\xi_1\dot{q}_r + \omega_1^2q_r &= f_r \\ \ddot{q}_i + 2\omega_1\xi_1\dot{q}_i + \omega_1^2q_i &= f_i. \end{aligned} \quad (6.1.41)$$

Ceci montre que cette approche dans le domaine complexe permet d'étudier dans un unique développement la réponse sous deux charges différentes, à savoir la réponse sous charges cosinusoidale f_r et sinusoidale f_i dans ce cas. La limitation de l'analyse complexe réside en la faculté d'interpréter facilement des grandeurs mises en jeu. Par exemple, sur base de l'observation de (6.1.38), il est difficile d'attribuer une signification précise à la force complexe $\mathcal{P}$. Il ne s'agit que d'un artefact mathématique dont l'objectif est de produire les deux équations (6.1.41) qui, elles, ont une signification bien précise.

En menant un raisonnement similaire à celui de la section précédente, nous cherchons une solution particulière de (6.1.38) qui s'écrit sous la forme

$$Q_{st} = \mathcal{G} e^{i\bar{\omega}t}, \quad (6.1.42)$$

évidemment semblable à (6.1.32). L'introduction de (6.1.42) dans (6.1.38) donne

$$-\bar{\omega}^2 \mathcal{G} e^{i\bar{\omega}t} + 2i\omega_1 \bar{\omega} \xi_1 \mathcal{G} e^{i\bar{\omega}t} + \omega_1^2 \mathcal{G} e^{i\bar{\omega}t} = \frac{\mathcal{P}}{m} e^{i\bar{\omega}t}, \quad (6.1.43)$$

dont la solution est simplement

$$\mathcal{G} = \frac{\frac{\mathcal{P}}{m}}{-\bar{\omega}^2 + 2i\omega_1 \bar{\omega} \xi_1 + \omega_1^2} = \mathcal{P} \mathcal{H}(\bar{\omega}), \quad (6.1.44)$$

où

$$\mathcal{H}(\bar{\omega}) = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_1^2} + 2i \frac{\bar{\omega}}{\omega_1} \xi_1} \quad (6.1.45)$$

est la définition précise de la *fonction de transfert*.

Cette fonction est représentée à la figure (6.1.5). On peut y retrouver les trois zones différentes correspondant aux trois cas limites étudiés en préliminaire. La fonction de transfert ne dépend que des caractéristiques de la structure (pulsation propre, taux d'amortissement) et est donc une caractéristique intrinsèque de la structure étudiée, modélisée par un oscillateur simple linéaire. Puisqu'il s'agit d'une caractéristique intrinsèque de la structure, son domaine d'applicabilité doit nécessairement dépasser celui d'un chargement harmonique. En effet, nous verrons dans la suite comment établir, à partir de la fonction de transfert, la réponse d'une structure soumise à une charge quelconque.

En se limitant à un chargement harmonique, il faut cependant seulement retenir à ce stade qu'à un chargement harmonique $\mathcal{P}e^{i\bar{\omega}t}$ correspond une réponse harmonique $Q_{st} = \mathcal{P} \mathcal{H} e^{i\bar{\omega}t}$ qui oscille à la même pulsation $\bar{\omega}$ dont l'amplitude est donnée par $|\mathcal{P} \mathcal{H}|$ et déphasée d'un angle qui correspond à la phase de $\mathcal{P} \mathcal{H}$.

6.1.2.4 Étude transitoire de la mise en résonance

La principale particularité de la fonction de transfert reste indéniablement le pic de résonance au voisinage de la fréquence propre. Pour clôturer l'étude des vibrations

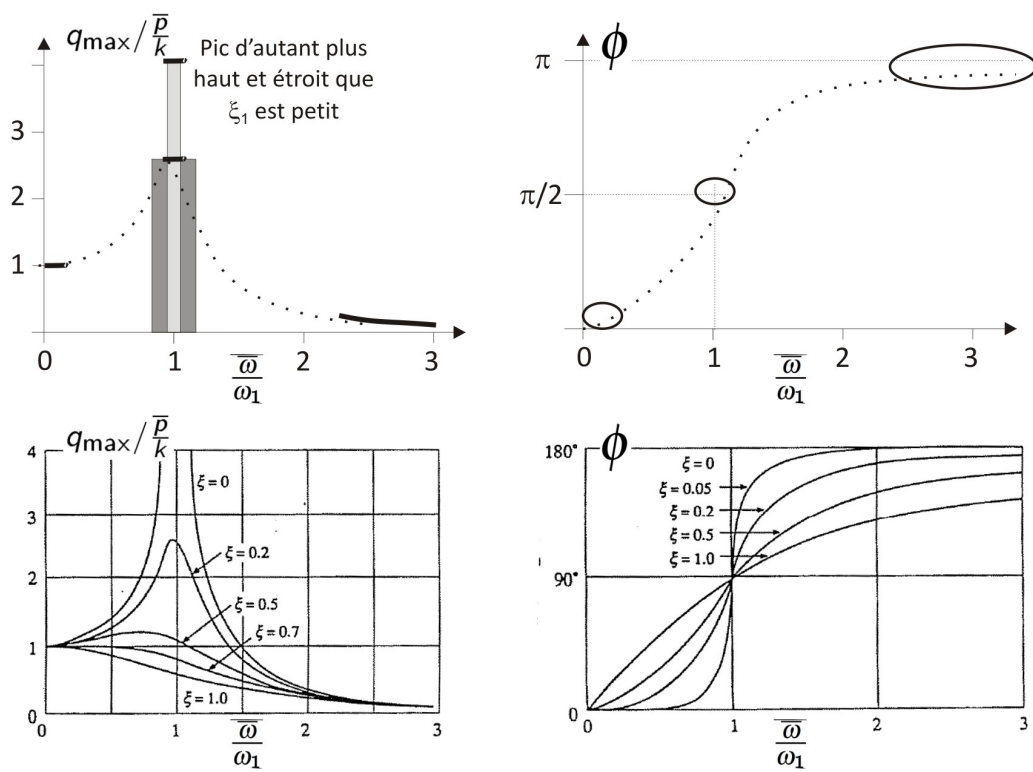


FIGURE 6.1.5 – Amplitude et déphasage de la réponse d'une structure soumise à une charge harmonique.

forcées harmoniques, nous allons étudier plus précisément ce phénomène. Lorsque $\bar{\omega} = \omega_1$, la réponse dynamique complète s'exprime

$$q = e^{-\xi_1 \omega_1 t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) - \frac{\bar{p} \cos \bar{\omega} t}{k} \frac{1}{2\xi_1} \quad (6.1.46)$$

où l'on retrouve les contributions transitoire et stationnaire. Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions initiales, à savoir une structure au repos de sorte à obtenir

$$q = \frac{1}{2\xi_1} \frac{\bar{p}}{k} \left[e^{-\xi_1 \omega_1 t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 - \xi_1^2}} \sin \omega_d t \right) - \cos \omega_1 t \right]. \quad (6.1.47)$$

Si l'on considère à nouveau que l'amortissement structurel ξ_1 est faible, on peut également écrire

$$q = \frac{1}{2\xi_1} \frac{\bar{p}}{k} [e^{-\xi_1 \omega_1 t} \xi_1 \sin \omega_1 t - (1 - e^{-\xi_1 \omega_1 t}) \cos \omega_1 t] \quad (6.1.48)$$

c'est-à-dire une combinaison de deux fonctions harmoniques, $\sin \omega_1 t$ et $\cos \omega_1 t$, modulées par des fonctions très petites toutes les deux⁵ lorsque $t \ll \frac{1}{\xi_1 \omega_1}$. Par contre, au fur et à mesure de la mise en régime ($t \sim \frac{1}{\xi_1 \omega_1}$), le terme en $\sin \omega_1 t$ s'amenuise lentement et il ne reste alors finalement que la contribution stationnaire de la réponse

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q = \frac{-1}{2\xi_1} \frac{\bar{p}}{k} \cos \omega_1 t \quad (6.1.49)$$

qui est bien en accord avec la valeur fournie par la fonction de transfert. La mise en régime vers cet état stationnaire est gouvernée par la même exponentielle décroissante que celle rencontrée lors de l'étude des vibrations libres. Ceci signifie donc que la durée de mise en régime ne diffère en réalité aucunement du temps de mémoire du système. A la limite, pour un amortissement nul, (6.1.48) devient

$$q = \frac{1}{2} \frac{\bar{p}}{k} (\sin \omega_1 t - \omega_1 t \cos \omega_1 t). \quad (6.1.50)$$

qui est l'équation d'un mouvement oscillatoire non bornée entre deux droites.

6.1.3 Vibrations forcées, charges impulsionsnelles

Un second type de chargement particulier qui permettra d'étudier la réponse d'un système soumis à une charge quelconque est celui correspondant à une impulsion. Une impulsion est définie par

$$I = \int_0^{\Delta t} p dt \quad (6.1.51)$$

sur un domaine d'intégration très court par rapport à la période propre de la structure étudiée. Une impulsion présente donc les unités d'une force fois une durée.

5. puisque $\xi_1 \simeq 0$ (pour le coefficient du sin) et $e^{-\xi_1 \omega_1 t} \simeq 1$ (pour le coefficient du cos).

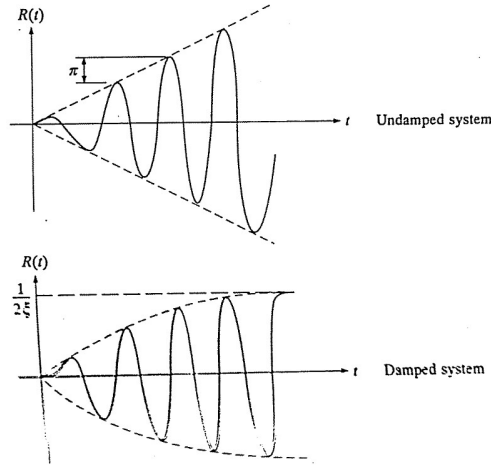


FIGURE 6.1.6 – Mise en résonance d’une structure (a) non-amortie et (b) faiblement amortie.

6.1.3.1 Impulsion de durée finie

Admettons qu’en l’instant $t = 0$, l’oscillateur simple partant du repos soit sollicité par une force constante p_0 pendant un intervalle de temps Δt puis soit libre de toute charge, de façon à produire une impulsion $I = p_0 \Delta t$ d’intensité I . L’équation du mouvement s’écrit donc

$$\ddot{q} + 2\omega_1 \xi_1 \dot{q} + \omega_1^2 q = \begin{cases} \frac{p_0}{m} & \text{pour } 0 \leq t < \Delta t \\ 0 & \text{pour } \Delta t \leq t \end{cases}. \quad (6.1.52)$$

Cette équation différentielle est résolue en considérant successivement les deux domaines. Pour le premier, la solution se compose de la solution générale de l’équation homogène plus une solution particulière, assez simple à trouver dans ce cas,

$$q = e^{-\xi_1 \omega_1 t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + \frac{p_0}{k} \quad (6.1.53)$$

où les constantes d’intégration sont à déterminer à partir des conditions initiales, $q(0) = 0$ et $\dot{q}(0) = 0$, de sorte que, pour $0 \leq t < \Delta t$,

$$q = \frac{p_0}{k} \left[1 - e^{-\xi_1 \omega_1 t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 - \xi_1^2}} \sin \omega_d t \right) \right] \quad (6.1.54)$$

Nous considérerons dans la suite que la durée de l’impulsion est au plus du même ordre de grandeur que la période propre de la structure étudiée, $\frac{\Delta t}{T_1} \lesssim 1$. On peut donc estimer que $\omega_1 t \lesssim 2\pi$ pendant la durée d’application de la force. Étant donné que le coefficient d’amortissement ξ_1 est très petit, l’argument de l’exponentielle est très petit et peut être négligé. Ceci nous amène à écrire

$$q = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega_1 t) \quad ; \quad \dot{q} = \frac{p_0}{k} \omega_1 \sin \omega_1 t \quad (6.1.55)$$

qui est obtenu en remplaçant ξ par 0 dans (6.1.54). Ceci traduit le fait que les forces de viscosité mettent un certain temps avant de se développer et n'influencent que très faiblement la réponse d'une structure soumise à une impulsion (pendant la phase où la force est appliquée).

L'expression de la réponse dynamique donnée par (6.1.55) montre que la position de l'oscillateur oscille entre 0 et $2\frac{p_0}{k}$, avec une pulsation égale à sa pulsation propre. On ne peut pas vraiment parler d'oscillations car elles n'ont probablement pas le temps de s'établir. En effet, le premier maximum relatif est obtenu lorsque $\cos \omega_1 t = -1$, c'est-à-dire lorsque $t = \pi/\omega_1 = T_1/2$. Donc, étant donné que (6.1.55) n'est valable que pour $0 \leq t < \Delta t$, si la durée de l'impulsion est plus courte que la demi-période propre de l'oscillateur, $\Delta t < T_1/2$, le premier maximum relatif se produira après que la force soit appliquée. Si par contre $\Delta t \geq T_1/2$, la durée d'application de la force est suffisamment longue pour qu'un premier maximum relatif apparaisse durant la première phase. Il y aura naturellement d'autant plus de maxima relatifs dans cette première phase que la durée d'application de la force Δt est grande. Cependant, étant donné que nous limitons l'étude à $\frac{\Delta t}{T_1} \lesssim 1$, on ne doit pas s'attendre à plus de quelques maxima uniquement.

La position $q_{\Delta t}$ et la vitesse $\dot{q}_{\Delta t}$ à la fin de l'impulsion sont obtenues en remplaçant t par Δt dans (6.1.54). Ces valeurs servent de condition initiale pour l'établissement de la réponse dans la seconde phase. Cette seconde phase est une réponse libre puisque la charge appliquée est nulle. On obtient son expression à partir de (6.1.7) en modifiant légèrement l'expression pour tenir compte de l'origine temporelle différente, de sorte que, pour $\Delta t \leq t$,

$$q = e^{-\xi_1 \omega_1 (t - \Delta t)} \left(q_{\Delta t} \cos [\omega_d (t - \Delta t)] + \frac{\dot{q}_{\Delta t} + \xi_1 \omega_1 q_{\Delta t}}{\omega_d} \sin [\omega_d (t - \Delta t)] \right). \quad (6.1.56)$$

Étant donné que nous nous intéressons à la valeur du plus grand déplacement que nous savons être obtenu lors du premier cycle de la réponse libre, il est de nouveau licite d'étudier un système non amorti et simplifier (6.1.56) en

$$q = q_{\Delta t} \cos [\omega_1 (t - \Delta t)] + \frac{\dot{q}_{\Delta t}}{\omega_1} \sin [\omega_1 (t - \Delta t)], \quad (6.1.57)$$

qui représente un mouvement harmonique d'amplitude

$$\begin{aligned} q_{max} &= \sqrt{q_{\Delta t}^2 + \left(\frac{\dot{q}_{\Delta t}}{\omega_1} \right)^2} = \frac{p_0}{k} \sqrt{(1 - \cos \omega_1 \Delta t)^2 + \sin^2 \omega_1 \Delta t} \\ &= \frac{p_0}{k} \sqrt{2(1 - \cos \omega_1 \Delta t)} = 2 \frac{p_0}{k} \sin \frac{\pi \Delta t}{T_1}. \end{aligned} \quad (6.1.58)$$

En résumé, selon la durée de l'impulsion, on peut distinguer deux cas :

- si $\Delta t < T_1/2$, le déplacement maximum se produit dans la seconde phase et son amplitude est donnée par (6.1.58),

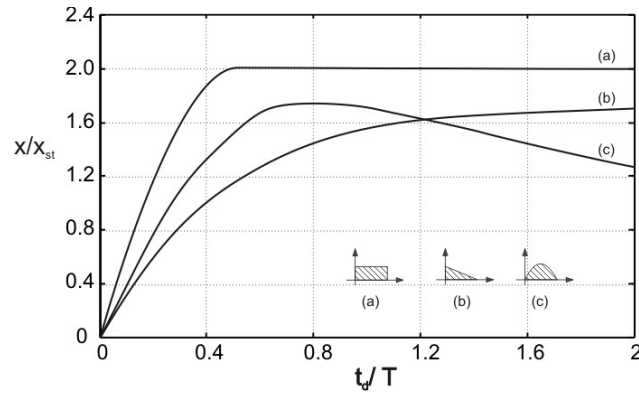


FIGURE 6.1.7 – Spectre de choc. Rapport entre la réponse dynamique maximale et la réponse quasi-statique pour différentes formes et durée d'impulsions.

— si $\Delta t \geq T_1/2$, le déplacement maximum se produit dans la première phase et vaut $2\frac{p_0}{k}$.

La figure 6.1.7 est appelée spectre de choc. Elle représente le déplacement maximum de l'oscillateur en fonction de la durée de l'impulsion considérée $\frac{\Delta t}{T_1}$. On y retrouve le résultat d'une impulsion rectangulaire pour laquelle les développements viennent d'être réalisés, ainsi que les résultats obtenus pour d'autres formes d'impulsion. Il est possible de démontrer que l'impulsion rectangulaire engendre l'amplification dynamique maximale, à savoir des déplacements doublés par rapport à ce qui serait obtenu par une analyse statique. Par simplicité, cette valeur maximale est souvent retenue pour le dimensionnement simple d'une structure soumise à un impact.

En pratique, les durées des impacts rencontrés dans le domaine du génie civil (explosion, accident, ...) sont généralement d'un ou plusieurs ordres de grandeur inférieurs à la période propre. C'est donc essentiellement dans une zone proche de l'origine du spectre de choc que l'on travaille habituellement. Manifestement, les courbes relatives à chaque type d'impulsion démarrent avec des pentes sensiblement différentes. On pourrait donc se dire que la forme de l'impulsion considérée prend alors toute son importance. Ce n'est pas le cas. En effet, lorsque l'impact est de très courte durée, c'est l'impulsion donnée, comme définie par (6.1.51), qui gouverne la réponse, et non pas la valeur maximale de la force⁶.

On peut illustrer ceci à l'aide des développements précédents relatifs à une impulsion rectangulaire. Supposons que $\Delta t < T_1/2$, dans quel cas l'amplitude maximale de la réponse est donnée par (6.1.58). Si l'on fait tendre Δt vers 0, l'amplitude maximale de la réponse tend vers 0, ce qui est logique puisqu'une force finie appliquée pendant un intervalle de temps nul ne peut produire aucun déplacement. Par contre, si l'on

6. on peut facilement se convaincre qu'une force deux fois plus grande appliquée brutalement pendant une durée deux fois plus courte produira le même effet

conserve l'impulsion constante durant ce passage à la limite, on écrit alors

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ p_0 \Delta t = I}} 2 \frac{p_0}{k} \sin \frac{\pi \Delta t}{T_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2 \frac{I \sin \frac{\pi \Delta t}{T_1}}{k \Delta t} = \frac{I}{k} \frac{2\pi}{T_1} = \frac{I}{\sqrt{k m}}. \quad (6.1.59)$$

Dans cette relation, la force maximale appliquée p_0 n'apparaît plus⁷ et l'on constate que, pour les impacts très brefs, la réponse maximale est gouvernée par l'impulsion I et, conformément à l'intuition, est inversement proportionnelle à la raideur et la masse de la structure.

On peut donc maintenant expliquer les pentes différentes du spectre de choc dans le voisinage de l'origine. Elles sont simplement dues à des valeurs d'impulsions différentes pour les différentes formes d'impact, lorsque p_0 et Δt sont communs.

6.1.3.2 Impulsion parfaite

Ces développements préliminaires ont montré la nécessité de considérer des impacts très courts, indépendamment de leur forme. Nous allons maintenant considérer ce type de chargement de façon plus formelle et donc admettre qu'en l'instant $t = 0$, l'oscillateur simple partant du repos est sollicité par une impulsion d'intensité I . L'équation du mouvement s'écrit donc

$$\ddot{q} + 2\omega_1 \xi_1 \dot{q} + \omega_1^2 q = \frac{I}{m} \delta(t). \quad (6.1.60)$$

L'intégration sur un intervalle de temps infiniment court de cette équation donne

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \int_0^{\Delta t} (\ddot{q} + 2\omega_1 \xi_1 \dot{q} + \omega_1^2 q) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \int_0^{\Delta t} \frac{I}{m} \delta(t) dt. \quad (6.1.61)$$

Au membre de gauche, les opérateurs mathématiques peuvent être inversés puisque toutes les limites existent. Il suffit donc de considérer chacune des trois limites séparément. D'abord,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \int_0^{\Delta t} \ddot{q} dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} [\dot{q}(\Delta t) - \dot{q}(0)] = \dot{q}(0^+) \quad (6.1.62)$$

puisque $\dot{q}(0) = 0$. Il est important de réaliser que l'on calcule une limite pour un intervalle infinitésimement court, mais non vide, c'est-à-dire pour Δt tendant vers 0^+ et non pas 0. La limite du second terme donne

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \int_0^{\Delta t} 2\omega_1 \xi_1 \dot{q} dt = 2\omega_1 \xi_1 \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} [q(\Delta t) - q(0)] = 0 \quad (6.1.63)$$

7. elle devient à la limite infiniment grande

puisque la fonction q doit nécessairement être continue ($q(0^+) = q(0) = 0$). Pour une raison similaire la limite du troisième terme est également nulle. Quant au membre de droite de (6.1.61), il se réduit à I/m par propriété de la fonction de Dirac. Finalement, (6.1.61) s'écrit

$$\dot{q}(0^+) = \frac{I}{m}. \quad (6.1.64)$$

Après l'instant $t = 0^+$, l'oscillateur n'est plus soumis à aucune force. La réponse de l'oscillateur sous charge impulsionnelle correspond donc à un mouvement libre dont les conditions initiales sont

$$q(0) = 0 ; \quad \dot{q}(0) = \frac{I}{m} \quad (6.1.65)$$

et pour lequel la réponse s'écrit

$$q = I h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 0 \\ \frac{I}{m\omega_d} e^{-\xi_1 \omega_1 t} \sin \omega_d t & \text{pour } t > 0. \end{cases} \quad (6.1.66)$$

On peut vérifier que le déplacement maximum fourni par cette approche plus formelle correspond bien à ce qui est donné par (6.1.59). Cette étape intermédiaire dans le calcul de la réponse d'un oscillateur à un degré de liberté permet d'introduire la réponse impulsionnelle unitaire $h(t)$, une importante caractéristique intrinsèque de la structure puisqu'elle ne dépend que de ses caractéristiques propres (masse, amortissement, pulsation).

6.1.4 Vibrations forcées, charges quelconques

Les développements des sections 6.1.2 et 6.1.3 ont permis d'introduire deux notions fondamentales dans la représentation du comportement dynamique d'une structure : la fonction de transfert (6.1.45) et la réponse impulsionnelle (6.1.66). Ces deux fonctions ont été établies en considérant deux types de chargement particuliers, harmonique et impulsionnel respectivement, sur lesquels se fondent les développements relatifs à un chargement quelconque.

En décomposant une charge quelconque en une somme de fonctions harmoniques ou impulsionnelles, nous pouvons obtenir deux méthodes différentes pour appréhender la réponse d'une structure dans ce cas le plus général. Quoique différentes, ces deux méthodes fournissent rigoureusement le même unique résultat. L'une, basée sur une décomposition fréquentielle en harmoniques, opère dans le domaine fréquentiel, alors que l'autre, basée sur une décomposition en impulsions successives, opère dans le domaine temporel. En développant ci-après chacune des deux méthodes, nous allons mettre en évidence la dualité qu'il existe entre les domaines temporel et fréquentiel et montrer l'étroite relation entre la fonction de transfert et la fonction de réponse impulsionnelle.

6.1.4.1 Approche temporelle

Connaissant la réponse de l'oscillateur soumis à une charge impulsionnelle, il suffit de considérer que l'effort appliqué p est une suite d'impulsions $I(\tau) = p(\tau) d\tau$ appliquées successivement. Donc la réponse sous une charge quelconque s'obtient par superposition des réponses à chacune de ces impulsions.

La contribution à la réponse de l'oscillateur à l'instant t provenant de l'impulsion élémentaire appliquée à l'instant τ est donnée par

$$dq(t) = p(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (6.1.67)$$

si bien que la réponse calculée comme une somme de ces contributions élémentaires s'exprime sous la forme d'une intégrale de convolution

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi_1 \omega_1 (t - \tau)} \sin \omega_d (t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.1.68)$$

Il s'agit de l'intégrale de Duhamel. Elle exprime analytiquement la solution de l'équation du mouvement. Les limites de validité de cette méthode sont le domaine élastique linéaire puisqu'elle est basée sur le principe de superposition.

Pour simplifier l'utilisation de (6.1.68), on écrit

$$q(t) = \frac{1}{m \omega_d} (p_c(t) \sin \omega_d t - p_s(t) \cos \omega_d t) \quad (6.1.69)$$

où

$$\begin{aligned} p_c(t) &= \int_0^t p(\tau) e^{-\xi_1 \omega_1 (t - \tau)} \cos \omega_d \tau d\tau \\ p_s(t) &= \int_0^t p(\tau) e^{-\xi_1 \omega_1 (t - \tau)} \sin \omega_d \tau d\tau. \end{aligned} \quad (6.1.70)$$

Les fonctions $p_c(t)$ et $p_s(t)$ peuvent être calculées en fonction de la force p appliquée sur la structure. Pour des formes analytiques simples de p , ces intégrales peuvent être calculées explicitement. Le tableau des intégrales de Duhamel⁸ reprend une liste de quelques-unes de ces fonctions simples ainsi que les résultats de ces intégrales. Par contre, lorsque la force appliquée p prend une forme analytique trop compliquée, l'intégration ne peut être pratiquée que numériquement. Une implémentation simple consiste à évaluer la réponse q en des instants discrets $t_n = n \Delta t$, avec $n \in \mathbb{N}$, où Δt est un (petit) pas de temps choisi. L'équivalent numérique de (6.1.69) est

$$q(t_n) = \frac{1}{m \omega_d} (p_c(t_n) \sin \omega_d t_n - p_s(t_n) \cos \omega_d t_n) \quad (6.1.71)$$

8. cf table de Duhamel distribuée au T.P. 1. Attention, les fonctions reprises dans ce tableau concernent les structures non amorties !

où, par la règle du rectangle,

$$\begin{aligned} p_c(t_n) &= \Delta\tau \sum_{i=0}^{n-1} p(i\Delta\tau) e^{-\xi_1\omega_1(n-i)\Delta\tau} \cos(\omega_d i\Delta\tau) \\ p_s(t_n) &= \Delta\tau \sum_{i=0}^{n-1} p(i\Delta\tau) e^{-\xi_1\omega_1(n-i)\Delta\tau} \sin(\omega_d i\Delta\tau). \end{aligned} \quad (6.1.72)$$

Pour que cette solution numérique de l'équation du mouvement fournisse un résultat précis, il convient de choisir le pas de temps $\Delta\tau$ de façon à représenter correctement le comportement vibratoire de la structure. En règle de bonne pratique, une valeur limite de l'ordre du dixième de la période propre ne devrait pas être dépassée, $\Delta\tau \lesssim \frac{T_1}{10}$. Aussi, il faut que le pas de temps choisi permette de représenter précisément les variations temporelles de la force appliquée. Ceci est à discuter au cas par cas en fonction de la particularité du chargement.

Cette première méthode d'intégration numérique de l'équation du mouvement n'est en réalité pas très efficace. Comme principal désavantage, on peut lui reprocher d'être excessivement consommatrice en temps de calcul lorsque n devient grand. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que les sommations courent sur i entre 0 et $n-1$ dans (6.1.72). Il ne faut donc appliquer cette méthode que lorsque le temps de simulation est court, et surtout que lorsque les hypothèses du principe de superposition sont satisfaites. Au chapitre 5, nous verrons des méthodes d'intégration numérique de l'équation du mouvement qui ont de bien meilleures performances.

En conclusion, cette méthode de résolution basée sur l'intégrale de convolution de Duhamel doit être appliquée lorsque la forme analytique de p est simple (voir alors Table de Duhamel), ou éventuellement numériquement lorsque la période de la simulation est relativement courte (ou que l'on ne veut pas s'investir davantage dans les méthodes numériques du chapitre 5).

6.1.4.2 Approche fréquentielle

Une autre façon d'aborder l'étude d'une charge quelconque est de la décomposer à l'aide de l'autre chargement élémentaire considéré, à savoir une force harmonique. Dans un premier temps, nous allons restreindre l'étude à celle de sollicitations périodiques de période T_0 (comme celle de la Fig. 6.1.8), c'est-à-dire telles que

$$p(t + nT_0) = p(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}, t \text{ fixé dans } \left[-\frac{T_0}{2}, +\frac{T_0}{2}\right]. \quad (6.1.73)$$

Ensuite, nous étudierons une sollicitation quelconque, comme cas limite de cette solution périodique, en faisant tendre la période T_0 vers l'infini. Nous introduirons alors la transformée de Fourier comme cas limite de la décomposition en série de Fourier.

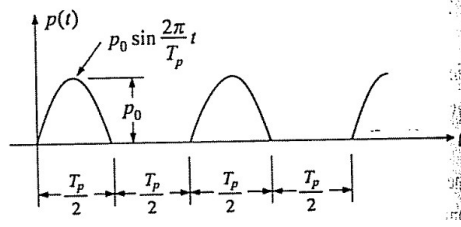


FIGURE 6.1.8 – Exemple de sollicitation périodique (similaire à la sollicitation d'un joggeur sur le sol).

Décomposition en série de Fourier La décomposition en série de Fourier permet d'écrire une fonction périodique p sur $[-\frac{T_0}{2}, +\frac{T_0}{2}]$ comme une somme de fonctions harmoniques

$$p = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega_0 t) \quad (6.1.74)$$

où $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Les coefficients a_n et b_n sont donnés par

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} p(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} p(t) \cos(n\Omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} p(t) \sin(n\Omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (6.1.75)$$

La fonction de la Fig. 6.1.8 est périodique sur $[-\frac{T_0}{2}, +\frac{T_0}{2}]$ et s'exprime par

$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -\frac{T_0}{2} \leq t < 0 \\ p_0 \sin \frac{2\pi t}{T_0} & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (6.1.76)$$

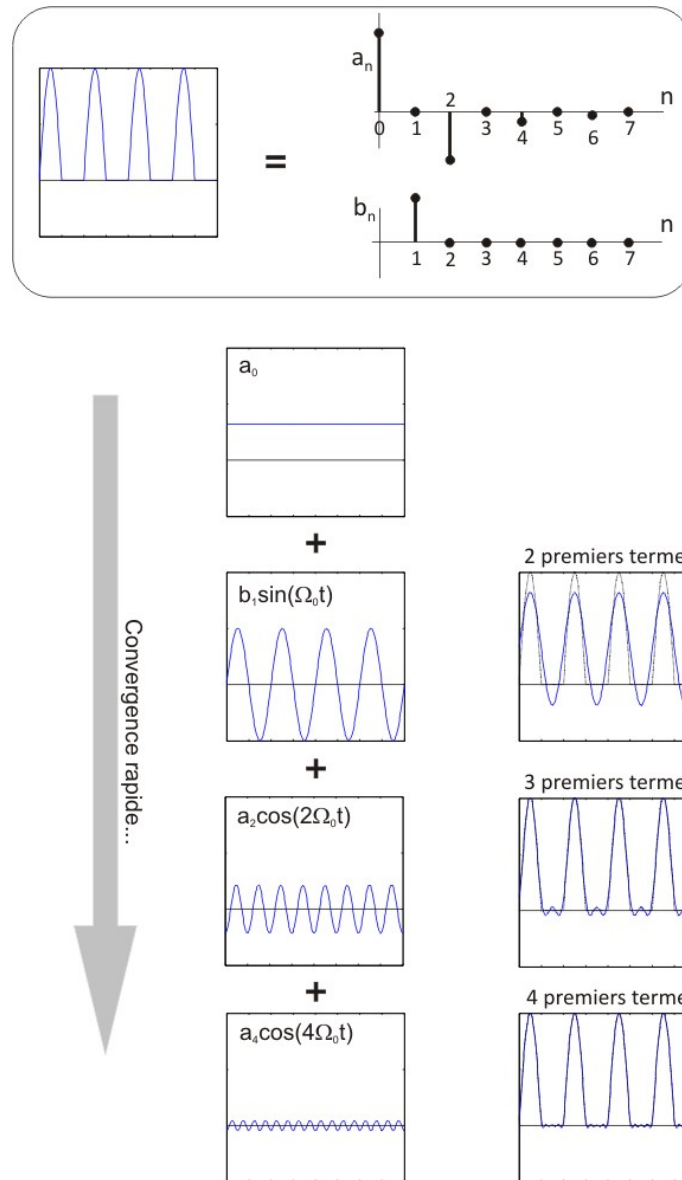


FIGURE 6.1.9 – Décomposition en série de Fourier de la sollicitation de la Fig. 6.1.8. Les coefficients de la décomposition sont donnés par (6.1.77)-(6.1.79).

Les coefficients de la décomposition en série de Fourier s'écrivent⁹

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{+T_0/2} p_0 \sin \frac{2\pi t}{T_0} dt = \frac{p_0}{\pi} \quad (6.1.77)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{+T_0/2} p_0 \sin \frac{2\pi t}{T_0} \cos \frac{2\pi n t}{T_0} dt = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ impair} \\ \frac{p_0}{\pi} \frac{2}{1-n^2} & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases} \quad (6.1.78)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{+T_0/2} p_0 \sin \frac{2\pi t}{T_0} \sin \frac{2\pi n t}{T_0} dt = \begin{cases} \frac{p_0}{2} & \text{pour } n = 1 \\ 0 & \text{pour } n > 1 \end{cases} \quad (6.1.79)$$

Les quelques premières valeurs valent

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{p_0}{\pi}; & a_1 &= 0; & a_2 &= \frac{-2p_0}{3\pi}; & a_3 &= 0; & a_4 &= \frac{-2p_0}{15\pi} \\ b_1 &= \frac{p_0}{2}; & b_2 &= 0; & b_3 &= 0; & b_4 &= 0 \end{aligned} \quad (6.1.80)$$

La figure 6.1.9 représente les coefficients a_n et b_n de la décomposition. Elle illustre également les composantes harmoniques élémentaires (non nulles uniquement, et y incluant aussi la composante moyenne). Les graphiques de la colonne de droite représentent la somme des quelques premières harmoniques obtenue en conservant un nombre de plus en plus important de termes. Elle illustre la convergence rapide de la décomposition en série de Fourier pour l'exemple considéré.□

Avec la décomposition (6.1.74), l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{q} + 2\omega_1 \xi_1 \dot{q} + \omega_1^2 q = \frac{a_0}{m} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{m} \cos(n\Omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{m} \sin(n\Omega_0 t) \quad (6.1.81)$$

où la décomposition de la force en une somme de fonctions simples apparaît maintenant précisément. En invoquant le principe de superposition, la réponse de la structure est obtenue en calculant la réponse de la structure pour chacune des ces fonctions séparément et en additionnant a posteriori ces composantes de la réponse de façon à obtenir la réponse totale q . A la section (6.1.2), nous avons vu que les développements analytiques dans un espace complexe étaient plus compacts que de considérer les chargements sinusoïdal et cosinusoidal séparément.

Nous allons donc abandonner l'idée d'utiliser la forme réelle de la décomposition en série de Fourier et lui préférer plutôt son équivalent complexe

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_n e^{in\Omega_0 t} \quad (6.1.82)$$

9.

$$\begin{aligned} \int_0^{+T_0/2} \sin \frac{2\pi t}{T_0} \sin \frac{2\pi n t}{T_0} dt &= \begin{cases} \frac{T_0}{4} & \text{pour } n = 1 \\ \frac{T_0}{2\pi} \frac{\sin n\pi}{1-n^2} & \text{pour } n \neq 1 \end{cases} \\ \int_0^{+T_0/2} \sin \frac{2\pi t}{T_0} \cos \frac{2\pi n t}{T_0} dt &= \begin{cases} 0 & \text{pour } n = 1 \\ \frac{T_0}{2\pi} \frac{1+\cos n\pi}{1-n^2} & \text{pour } n \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

où les coefficients complexes $\mathcal{P}_n$ sont obtenus par¹⁰

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} p(t) e^{-\imath n \Omega_0 t} dt. \quad (6.1.83)$$

La relation (6.1.82) est également applicable pour décomposer une fonction complexe en ses harmoniques. Étant donné que le chargement $p(t)$ que nous considérons est réel, on peut ajouter une restriction sur les coefficients $\mathcal{P}_n$. En effet, si la fonction $\underline{p}(t)$ est réelle, elle doit nécessairement être égale à son complexe conjugué, $p(t) = \overline{p(t)}$, et donc

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_n e^{\imath n \Omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{P}_n} e^{-\imath n \Omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{P}_{-n}} e^{\imath n \Omega_0 t}, \quad (6.1.84)$$

ce qui indique que $\mathcal{P}_n$ doit être égal à $\overline{\mathcal{P}_{-n}}$ pour que le résultat de la sommation (6.1.89) soit réel.

Les coefficients de la décomposition en série de Fourier complexe de la fonction de la Fig. 6.1.8 s'expriment par

$$\mathcal{P}_n = \frac{p_0}{2\pi} \frac{1 + e^{-\imath n \pi}}{1 - n^2} \quad (6.1.85)$$

dont la formulation analytique est, comme attendu, bien plus simple que (6.1.77)-(6.1.79). Les quelques premières valeurs (autour de $n = 0$) valent

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{-2} &= -\frac{p_0}{3\pi} \\ \mathcal{P}_{-1} &= \frac{\imath p_0}{4} \\ \mathcal{P}_0 &= \frac{p_0}{\pi} \\ \mathcal{P}_1 &= -\frac{\imath p_0}{4} \\ \mathcal{P}_2 &= -\frac{p_0}{3\pi} \\ \mathcal{P}_3 &= 0 \\ \mathcal{P}_4 &= -\frac{p_0}{15\pi} \end{aligned} \quad (6.1.86)$$

ce qui illustre bien que l'information pour $n < 0$ est redondante avec celle pour $n > 0$ quand la sollicitation est réelle (ce qui est toujours le cas, évidemment). Aussi, on peut voir que les coefficients de la décomposition complexe prennent des valeurs que l'on peut facilement relier aux valeurs des coefficients de la décomposition réelle. $\square$

Maintenant, chacune des composantes harmoniques de la sollicitation est considérée séparément et la réponse de la structure est calculée pour chacune d'elle. De façon

10. on obtient cette expression des coefficients en multipliant les deux membres de (6.1.82) par $e^{-\imath \hat{n} \Omega_0 t}$ puis en intégrant sur $[-\frac{T_0}{2}, +\frac{T_0}{2}]$. Étant donné que $\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{\imath 2\pi \hat{n} \frac{t}{T_0}} e^{-\imath n \Omega_0 t} dt = T_0 \delta(n - \hat{n})$, de tous les termes de la sommation dans (6.1.82), il ne reste que celui pour lequel n prend la valeur particulière $\hat{n}$. Ceci permet d'estimer $\mathcal{P}_{\hat{n}}$, rebaptisé $\mathcal{P}_n$.

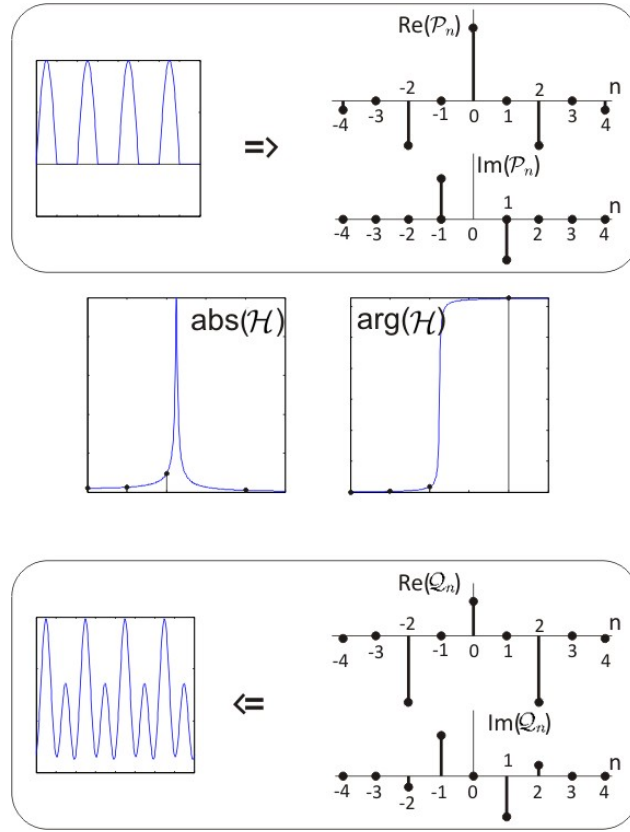


FIGURE 6.1.10 – L'analyse d'une structure soumise à un chargement quelconque est menée en décomposant la sollicitation en plusieurs harmoniques pour lesquelles la réponse est calculée indépendamment des autres. La solution totale est alors obtenue en sommant les composantes élémentaires de la réponse.

générique, la réponse dynamique sous la charge $\mathcal{P}_n e^{in\Omega_0 t}$ est obtenue en remplaçant $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P}_n$ et $\bar{\omega}$ par $\frac{2\pi n}{T_0}$ dans (6.1.44), de sorte que chacune des contributions élémentaires de la réponse s'écrive

$$\mathcal{Q}_n = \mathcal{P}_n \mathcal{H}(n\Omega_0) = \frac{\mathcal{P}_n}{k} \frac{1}{1 - \frac{(n\Omega_0)^2}{\omega_1^2} + 2i \frac{n\Omega_0}{\omega_1} \xi_1}. \quad (6.1.87)$$

Évidemment cette composante élémentaire de la réponse est complexe, mais lorsqu'on recombine ensemble toutes les réponses élémentaires, de sorte à obtenir la réponse dynamique

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{Q}_n e^{in\Omega_0 t}, \quad (6.1.88)$$

on obtient nécessairement un résultat réel (évident puisque la sollicitation est réelle et la structure étudiée est bien physiquement réelle aussi). Ceci peut être démontré facilement en constatant que $\mathcal{Q}_{-n} = \overline{\mathcal{Q}_n}$.

La figure 6.1.10 représente le principe de résolution harmonique par harmonique. Indépendamment l'un de l'autre, chacune des harmoniques de la sollicitation (dont les parties réelle et imaginaire sont représentée en haut de la figure) sont multipliées par $\mathcal{H}(n\Omega_0)$, la fonction de transfert estimée à la pulsation $n\Omega_0$. Ceci permet d'obtenir chacune des composantes harmoniques de la réponse. Leurs parties réelles et imaginaires sont représentées en bas. La réponse totale est finalement obtenue en sommant toutes ces réponses élémentaires.

Dans cet exemple, on voit que la pulsation propre de la structure analysée est de l'ordre de $2.2\Omega_0$. C'est la raison pour laquelle la seconde harmonique est fortement amplifiée par rapport aux autres. De façon plus générale, il est délicat de conclure trop rapidement à la convergence de la série de Fourier décrivant la sollicitation (cf. Fig. 6.1.9). Cette série ne peut être tronquée qu'en prenant en considération les caractéristiques propres de la structure étudiée. Dans tous les cas, les harmoniques au voisinage de la fréquence propre, même si elles sont de faibles amplitudes, doivent être incluses dans la représentation de la sollicitation. $\square$

Transformée de Fourier Lorsque la charge considérée n'est pas périodique, la décomposition en série de Fourier (6.1.89) n'est plus valable. Par contre les développements précédents peuvent rester d'une utilité certaine si l'on considère qu'une sollicitation quelconque peut être vue comme une sollicitation périodique, dont la période T_0 tendrait vers l'infini

$$p(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_n e^{in\Omega_0 t} \quad (6.1.89)$$

Étant donné que T_0 et Ω_0 sont reliés par $T_0\Omega_0 = 2\pi$, le passage à la limite pour T_0 tendant vers l'infini s'accompagne d'une décroissance de Ω_0 vers 0. La résolution fréquentielle caractérisée par la différence de fréquence $\Delta\Omega = (n+1)\Omega_0 - n\Omega_0 = \Omega_0$ entre deux harmoniques successives est précisément représentée par Ω_0 . Ce passage à la limite signifie donc également que le résultat de la décomposition devient une fonction continue de la fréquence (cf. Fig. 6.1.11).

On peut s'attendre à ce que la limite de la sommation (6.1.89) fournisse une intégrale. Pour l'écrire, il est nécessaire d'introduire trivialement une petite quantité dans cette relation, en l'occurrence $\Delta\Omega$

$$p(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_n e^{in\Omega_0 t} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}. \quad (6.1.90)$$

On peut également noter $\Omega_n = n\Omega_0$ qui représente la fréquence (discrète sous cette forme, mais qui tend vers le continuum de fréquence avec le passage à la limite), de

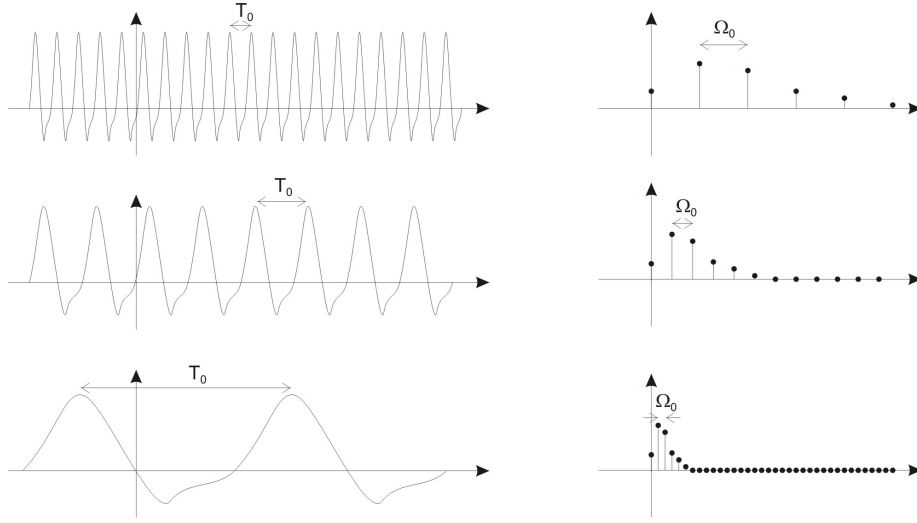


FIGURE 6.1.11 – La transformée de Fourier peut être vue comme la limite de la décomposition en série de Fourier pour une période infinie. Ce passage à la limite s’accompagne d’une diminution de la résolution fréquentielle $\Delta\Omega$, ce qui indique que la transformée de Fourier d’un signal temporel doit fournir une fonction continue de la fréquence.

sorte à obtenir

$$p(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_0 \mathcal{P}_n e^{i\Omega_n t} \Delta\Omega. \quad (6.1.91)$$

Cette relation montre qu’il est nécessaire d’introduire $\mathcal{P}(\Omega_n) = T_0 \mathcal{P}_n$ pour pouvoir réaliser le passage à la limite

$$p(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(\Omega_n) e^{i\Omega_n t} \Delta\Omega, \quad (6.1.92)$$

et finalement obtenir

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (6.1.93)$$

où $\mathcal{P}(\Omega)$ est la transformée de Fourier de $p(t)$. Cette décomposition fréquentielle de $p(t)$ est l’équivalent continu de la décomposition en série de Fourier (6.1.74). La transformée de Fourier $\mathcal{P}(\Omega)$ est obtenue explicitement à partir de (6.1.83)

$$\mathcal{P}(\Omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\Omega_n) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 \mathcal{P}_n = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} p(t) e^{-i\Omega_n t} dt \quad (6.1.94)$$

c’est-à-dire

$$\mathcal{P}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-i\Omega t} dt. \quad (6.1.95)$$

Les relations (6.1.93) et (6.1.95) montrent que les fonctions $p(t)$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ forment une paire de Fourier.

La notion de transformée de Fourier est tout à fait générale et peut également être considérée aussi bien pour la sollicitation appliquée p que pour la réponse dynamique q . Les deux relations qui relient la réponse dynamique et sa transformée de Fourier sont

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{Q}(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (6.1.96)$$

$$\mathcal{Q}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{-i\Omega t} dt. \quad (6.1.97)$$

Dans ce cas limite, l'analyse dynamique peut être réalisée de la même manière que précédemment. Il suffit de considérer une bande de fréquence infinitésimale $df = d\Omega/2\pi$, ainsi que le chargement qui y correspond $\mathcal{P}(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega/2\pi$. La réponse à ce chargement élémentaire s'obtient par multiplication par la fonction de transfert $\mathcal{H}(\Omega) \mathcal{P}(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega/2\pi$, et finalement, la réponse complète s'obtient en intégrant sur l'ensemble des bandes de fréquences, de sorte que

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(\Omega) \mathcal{P}(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega. \quad (6.1.98)$$

La comparaison avec (6.1.96) montre que

$$\mathcal{Q}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) \mathcal{P}(\Omega), \quad (6.1.99)$$

ce qui nous mène à la propriété fondamentale que la transformée de Fourier de la réponse $\mathcal{Q}(\Omega)$ s'obtient en multipliant celle de la sollicitation $\mathcal{P}(\Omega)$ par la fonction de transfert $\mathcal{H}(\Omega)$.

Une façon plus simple d'arriver à cette proposition consiste à considérer l'équation du mouvement et à multiplier les deux membres de l'équation par $e^{-i\Omega t}$ puis intégrer entre $-\infty$ et $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\ddot{q} + 2\omega_1 \xi_1 \dot{q} + \omega_1^2 q) e^{-i\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-i\Omega t} dt. \quad (6.1.100)$$

En intégrant successivement par parties, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{q} e^{-i\Omega t} dt &= -(-i\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} q e^{-i\Omega t} dt = i\Omega \mathcal{Q}(\Omega) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{q} e^{-i\Omega t} dt &= -(-i\Omega)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} q e^{-i\Omega t} dt = -\Omega^2 \mathcal{Q}(\Omega), \end{aligned} \quad (6.1.101)$$

de sorte que (6.1.100) s'écrive aussi

$$-\Omega^2 \mathcal{Q}(\Omega) + 2i\omega_1 \xi_1 \Omega \mathcal{Q}(\Omega) + \omega_1^2 \mathcal{Q}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega). \quad (6.1.102)$$

Cette relation est strictement identique à (6.1.99), puisque la fonction de transfert a été définie par $\mathcal{H}(\Omega) = -\Omega^2 + i\Omega + \mathcal{Q}(\Omega)$.

6.1.5 Exercices

This is an example of an exercise.

Exercise 6.1 This is a good place to ask a question to test learning progress or further cement ideas into students' minds. ■

6.2 Systèmes à plusieurs degré de liberté

6.2.1 Généralités

Même si dans une certaine partie des cas, les structures du génie civil se comportent comme des systèmes à un degré de liberté et peuvent donc être modélisées comme telles, il est parfois nécessaire d'invoquer l'existence d'une combinaison de mouvement dans des formes bien distinctes pour pouvoir expliquer ce qui est réellement observé.

On est généralement familier avec la méthode des déplacements (ou des rotations) pour laquelle la déformée d'une structure est représentée à l'aide de plusieurs déplacements et rotations, à différents endroits de la structure. Clairement, dans ce contexte, la déformée de la structure est modélisée à l'aide de plusieurs degrés de liberté et les formes bien distinctes dont on parle sont alors les déformées associées à chaque déplacement unitaire, tous les autres restant bloqués.

Cette méthode est une des multiples façons de représenter les déformations et l'état de contraintes dans une structure, à l'aide d'un ensemble discret (càd fini) de coordonnées (les déplacements et rotations aux noeuds dans ce cas). En réalité, une structure est physiquement continue. C'est une succession de sections droites infiniment proches les unes des autres. Sa modélisation rigoureuse nécessiterait donc un nombre infini de variables et rendrait donc son traitement numérique impossible. C'est la simple raison pour laquelle une structure continue, quoique possédant une infinité de degrés de liberté, est modélisée à l'aide d'une méthode comme la méthode des déplacements.

À côté des structures continues, on peut également constater l'existence de systèmes (le plus souvent mécaniques) constitués d'un ensemble de corps distincts interagissant entre eux à l'aide de connections localisées, cf. Fig. 6.2.1. Quoique ce genre de système présente un intérêt très limité dans les applications du génie civil, il se trouve que le format des équations permettant de modéliser le comportement de tels assemblages soit très proche de celui régissant l'équilibre dynamique des structures du génie civil.

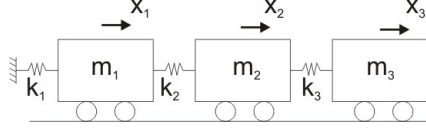


FIGURE 6.2.1 – Exemple de structure à M-DDL physiquement séparés.

On décrit donc, dans les deux paragraphes suivants, la façon dont une équation du mouvement peut être établie, d'une part pour ces véritables systèmes discrets, et d'autre part pour les systèmes continus.

6.2.1.1 Structure à M-DDL physiquement séparés

Les équilibres de chacune des masses du train de chariots de la Fig. 6.2.1 peuvent être écrits séparément. Par exemple, l'équilibre de la masse m_3 est obtenu en considérant les forces suivantes (agissant positivement vers la droite, dans le sens des x positifs) :

- une force d'inertie fictive (principe de d'Alembert) $-m_3\ddot{x}_3$,
- une force de rappel proportionnelle à l'élongation du ressort situé entre m_2 et m_3 . Cette force doit nécessairement s'écrire $k_3(x_2 - x_3)$ puisqu'elle est proportionnelle à $x_2 - x_3$. De plus, on peut facilement se convaincre de la validité du signe, puisque, lorsque x_2 est nul, le ressort s'allonge et exerce bien une force de rappel d'intensité k_3x_3 vers la gauche, soit $-k_3x_3$.
- éventuellement une force extérieure agissant directement sur la masse m_3 , notée p_3 et agissant (positivement) vers la droite.

L'équation d'équilibre de la masse m_3 s'écrit donc

$$-m_3\ddot{x}_3 + k_3(x_2 - x_3) + p_3 = 0. \quad (6.2.1)$$

On peut répéter ces opérations pour les équilibres de m_1 et m_2 , et mettre les équations obtenues sous la forme d'un système matriciel

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Ceci est un cas particulier du formalisme tout à fait général

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (6.2.2)$$

où $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ représentent les matrices structurelles de masse, viscosité et raideur.

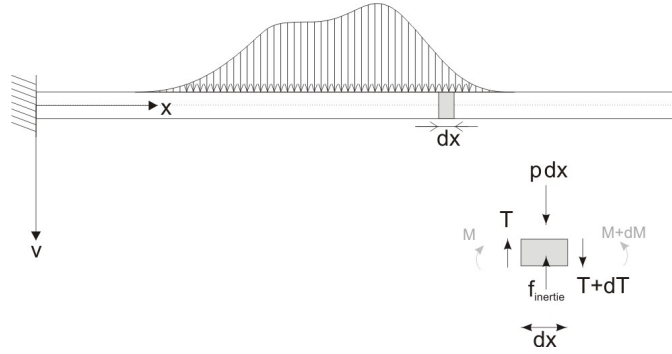


FIGURE 6.2.2 – Equilibre d'un tronçon de poutre infinitésimement court

6.2.1.2 Structures continues

Dans la réalité, les structures sont le plus souvent continues ; une quantité infinie de variables est a priori nécessaire pour représenter l'équilibre de la structure. Cela signifie simplement qu'une formulation continue (analytique) est nécessaire pour représenter l'équilibre d'une telle structure. On obtient cette formulation en écrivant l'équilibre d'une tranche infinitésimale de la structure considérée. Par exemple, on peut étudier les vibrations transversales d'une poutre en écrivant l'équilibre d'une tranche dx telle que représentée à la figure 6.2.2.

L'équilibre en rotation de cette tranche élémentaire permet d'écrire $T = \frac{\partial M}{\partial x}$, comme obtenu classiquement dans les développements relatifs à l'analyse statique. L'équilibre des forces dans une direction transversale à l'axe de la poutre s'écrit

$$p dx + T + dT = T + f_i \quad \Rightarrow \quad p + \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{f_i}{dx}, \quad (6.2.3)$$

où la force élémentaire d'inertie f_i s'exprime par

$$f_i = \mu dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (6.2.4)$$

c'est-à-dire le produit de la masse de la tranche considérée μdx (μ est la masse par unité de longueur) par son accélération. L'équilibre transversal s'écrit donc aussi

$$p + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (6.2.5)$$

Sous les hypothèses de la poutre de Bernoulli¹¹, le moment de flexion est relié à la dérivée seconde du déplacement transversal, si bien que l'équilibre s'écrit

$$\mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right) = p(x, t). \quad (6.2.6)$$

11. la section droite reste plane et perpendiculaire à l'axe neutre de la poutre

Il s'agit de l'équation bien connue de l'élastique, complétée cependant par un terme d'inertie. C'est la formulation continue que l'on cherchait à obtenir. On peut aussi y voir une parallèle flagrant avec l'équation du mouvement : un terme d'inertie, un terme de raideur (représentant les efforts internes) et un terme de chargement extérieur au second membre.

Dans la pratique, il est assez rare de résoudre encore manuellement l'équation de l'élastique (en statique). Ceci est encore plus vrai lorsque l'équation est complétée par le terme d'inertie, ce qui produit une équation aux dérivées partielles, et non plus une équation différentielle ordinaire. La résolution de cette équation est évitée :

1. en écrivant un modèle de la structure étudiée, en décrivant (brutalement !?) la structure à l'aide de quelques DDL ;
2. en discrétisant la coordonnée spatiale x , ce qui permet de se ramener à une équation différentielle ordinaire en t . On utilise par exemple la méthode des déplacements, ou des éléments finis, ce qui permet plus de raffinement ;
3. en utilisant les fonctions caractéristiques de l'équation, ce qui permet de se ramener à un autre ensemble discret (mais infini a priori) d'équations modales. Cette option est probablement la plus intéressante car elle intègre le comportement dynamique de la structure étudiée et permet donc d'obtenir une méthode relativement élégante.

Ces trois méthodes permettent de transformer l'équation aux dérivées partielles en un formalisme discret qui peut être traité à l'aide de méthode numériques (solution par ordinateur). Elles sont étudiées successivement dans la suite.

Ecrire un modèle de structure à l'aide de quelques DDL L'exemple de la figure 6.2.3 représente un portique à 3 étages, c'est-à-dire une structure continue, ainsi que deux méthodes "brutales" pour le remplacer par un système discret. La modélisation intermédiaire (souvent appelée "en brochette") consiste à considérer l'indéformabilité de chaque étage et à additionner les raideurs des colonnes de chaque étage (considérées alors comme encastrees-encastrees à noeuds déplaçables transversalement). Compte tenu de l'indéformabilité des planchers, il est évident que la structure ne comporte que trois degrés de liberté, les déplacements de chaque étage, et que les deux dessins de gauche sont équivalents. Le schéma représenté sous l'option 1 est également équivalent à ces deux premières représentations. Cette représentation à l'aide de chariots est la plus courante. Elle montre également que le comportement dynamique de la structure continue considérée ici s'apparente à celui d'un ensemble d'éléments individuels, comme étudié à la section 6.2.1.1.

Il est possible que les trois degrés de liberté ne soient pas nécessaires pour représenter finement le comportement attendu de la structure. Par exemple, si ce portique est sollicité par un effort en tête appliqué suffisamment lentement, il est très probable que la structure prenne une déformée homothétique à la déformée statique obtenue sous l'effet d'une force appliquée en tête de portique. Pour une force unitaire appliquée en tête, les déplacements relatifs de chaque étage s'expriment par $1/k_1$, $1/k_2$ et $1/k_3$, si bien que le déplacement total s'exprime par la somme de ces trois valeurs, ou encore,

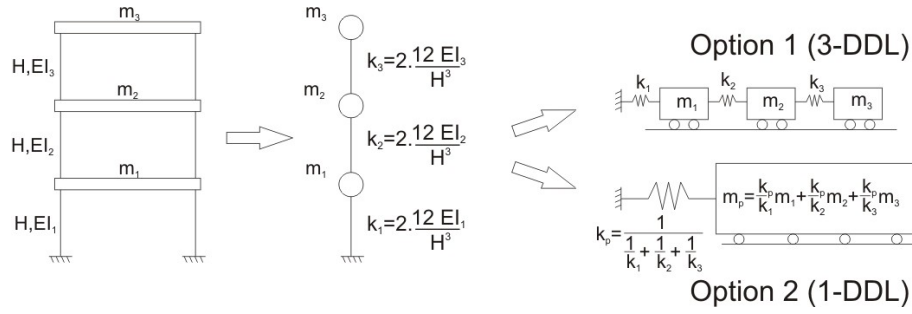


FIGURE 6.2.3 – Remplacement d’une structure continue par un système discret à 3-DDL ou 1-DDL.

que la raideur équivalente à un système 1-DDL reliant la force appliquée au sommet et le déplacement que l’on y obtient s’exprime par

$$k_p = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}}. \quad (6.2.7)$$

Discrétisation de la structure (méthode des déplacements, méthode des éléments finis) La méthode des déplacements et la méthode des rotations (de façon plus générale, la méthode des éléments finis) permettent d’écrire l’équilibre statique d’une structure par

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{p} \quad (6.2.8)$$

où K_{ij} représente la réaction au DDL i sous l’effet d’un déplacement unitaire en j (tous les autres DDL restant bloqués) et p_i représente la force énergétiquement équivalente appliquée au DDL i . L’objectif de ce cours ne consiste pas à établir rigoureusement les notions de la méthode des éléments finis. Néanmoins, il peut être intéressant de rappeler les notions qui sont généralement bien connues dans le cadre de l’analyse statique et de voir dans quelle mesure elles peuvent être étendues dans le cadre d’une analyse dynamique.

La méthode des éléments finis est une méthode tout à fait générale visant à résoudre une équation aux dérivées partielles comme (6.2.6). L’idée de base de la méthode consiste à approcher la solution exacte par une combinaison de fonctions élémentaires comme dans la méthode de Rayleigh-Ritz. Il est souvent assez difficile d’imaginer des fonctions analytiques restant simples, satisfaisant les conditions limites et qui permettent d’enrichir suffisamment la solution. Pour cette raison, dans la méthode des éléments finis, le domaine d’intégration de l’équation différentielle est décomposé en petits morceaux sur chacun desquels des formes simples sont assumées. Il est important que ces fonctions élémentaires restent admissibles, c’est-à-dire satisfassent les conditions limites et assurent une compatibilité entre éléments. Cette seconde condition est satisfaite de facto en sélectionnant des fonctions élémentaires qui dépendent des paramètres du champ de déplacement exprimés aux bords des

Déplacements unitaires
& fonctions d'interpolation

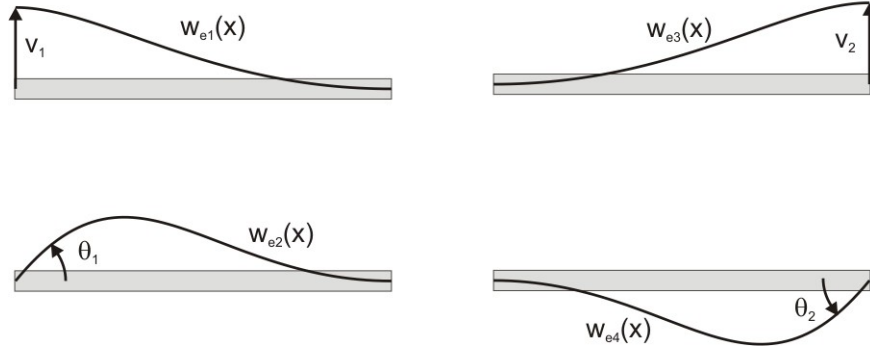


FIGURE 6.2.4 – Degrés de liberté d'un élément fini de type poutre.

petits morceaux de domaine (déplacement, pente, courbure, etc.). De cette façon, la continuité entre éléments peut être imposée sans mettre en place de condition de continuité démesurée. Le problème est exprimé en fonction de ces paramètres limitrophes, appelés *connecteurs* dans la suite. De la même façon que dans l'approche de Rayleigh-Ritz où l'amplitude de chaque forme élémentaire doit être optimisée, la solution du problème résulte, dans la méthode aux éléments finis, de l'optimisation du champ global. Le résultat de cette optimisation est donc un ensemble de valeurs particulières des connecteurs (les déplacements nodaux) qui assurent d'office la continuité entre éléments.

Dans cette optique, et en limitant la présentation aux vibrations transversales des poutres, le déplacement transversal $v_e(x)$ s'écrit

$$v_e(x) = \mathbf{w}_e^T(x) \mathbf{x}_e \quad (6.2.9)$$

où $\mathbf{x}_e = \langle v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \rangle^T$ regroupe les quatre connecteurs (déplacements et rotations d'extrémités) et $\mathbf{w}_e$ contient les fonctions d'interpolation

$$\mathbf{w}_e = \begin{Bmatrix} 1 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \\ \ell \left[\frac{x}{\ell} - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \right] \\ 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \\ \ell \left[-\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \right] \end{Bmatrix}. \quad (6.2.10)$$

Ces fonctions d'interpolation sont représentées à la figure 6.2.4.

Soit $\mathbf{x}$ le vecteur des déplacements et rotations de tous les noeuds de la structure, exprimés dans des axes globaux. On peut admettre que les connecteurs $\mathbf{x}_e$ s'expriment

par une sélection (avec une matrice de localisation $\mathbf{L}_e$) des degrés de liberté concernés de $\mathbf{x}$, suivie d'une rotation (avec une matrice de rotation $\mathbf{R}_e$)

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{R}_e \mathbf{L}_e \mathbf{x}. \quad (6.2.11)$$

L'énergie élastique de déformation stockée dans un élément de poutre s'exprime par

$$U_{int} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI v_e''^2(x) dx$$

Etant donné que $v_e'' = (\mathbf{w}_e'')^T \mathbf{x}_e = \mathbf{x}_e^T \mathbf{w}_e''$, l'énergie interne s'écrit aussi

$$U_{int} = \frac{1}{2} \mathbf{x}_e^T \left(EI \int_0^\ell \mathbf{w}_e'' (\mathbf{w}_e'')^T dx \right) \mathbf{x}_e = \frac{1}{2} \mathbf{x}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{x}_e \quad (6.2.12)$$

où la matrice de raideur $\mathbf{K}_e$ de l'élément considéré peut être obtenue en considérant (6.2.10) :

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}. \quad (6.2.13)$$

En introduisant (6.2.11) dans (6.2.12), on obtient

$$U_{int} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{L}_e^T \mathbf{R}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{R}_e \mathbf{L}_e) \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K}_{e,i} \mathbf{x} \quad (6.2.14)$$

où $\mathbf{K}_{e,i}$ est la contribution de l'élément i à la matrice de raideur complète de la structure. En répétant cette opération à tous les éléments de la structure, on obtient

$$U_{int,tot} = \sum_{i=1}^{Nb\text{ élém}} U_{int} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \left(\sum_{i=1}^{Nb\text{ élém}} \mathbf{K}_{e,i} \right) \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \quad (6.2.15)$$

où $\mathbf{K}$ représente la matrice de raideur de la structure. Elle a les mêmes significations que celles introduites ci-avant, cf (6.2.8).

D'autre part, le travail des forces extérieures appliquées sur un élément fini s'expriment par

$$U_{ext} = \int_0^\ell f(x) v_e(x) dx = \mathbf{x}_e^T \left(\int_0^\ell f(x) \mathbf{w}_e dx \right) = \mathbf{x}_e^T \mathbf{p}_e \quad (6.2.16)$$

où $\mathbf{p}_e$ représente les forces énergétiquement équivalentes. Elles correspondent à des forces appliquées aux noeuds (6 composantes) qui effectuent le même travail que les forces éventuellement réparties le long de l'élément fini considéré. On peut à nouveau exprimer le potentiel de ces forces en fonction des déplacements globaux $\mathbf{x}$, en considérant (6.2.11)

$$U_{ext} = \mathbf{x}^T (\mathbf{L}_e^T \mathbf{R}_e^T \mathbf{p}_e) = \mathbf{x}^T \mathbf{p}_{e,i} \quad (6.2.17)$$

où $\mathbf{p}_{e,i}$ représente la contribution de l'élément i au vecteur des forces énergétiquement équivalentes complet, c'est-à-dire concernant tous les noeuds de la structure. Toutes ces contributions élémentaires peuvent être sommées de façon à établir le vecteur complet des charges énergétiquement équivalentes $\mathbf{p}$:

$$U_{ext,tot} = \sum_{i=1}^{Nb\text{ élém}} U_{ext} = \mathbf{x}^T \left(\sum_{i=1}^{Nb\text{ élém}} \mathbf{p}_{e,i} \right) = \mathbf{x}^T \mathbf{p}. \quad (6.2.18)$$

En condition de chargement statique, la satisfaction de l'équilibre de la structure veut que l'énergie potentielle intérieure contrebalance exactement l'énergie potentielle extérieure, ou encore que l'énergie potentielle totale (énergie interne plus le potentiel dont dérivent les forces conservatives) soit conservée. On écrit donc l'équilibre en indiquant que toute variation de l'énergie totale est exclue

$$\delta \left[\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{p} \right] = 0 \quad (6.2.19)$$

Etant donné que

$$\delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \right) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \quad (6.2.20)$$

puisque cette grandeur est scalaire, l'équilibre s'écrit

$$\delta \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{p}. \quad (6.2.21)$$

Ceci ne fait que traduire l'équilibre de chacun des noeuds de la structure. L'analyse statique de la structure consiste à déterminer les valeurs des connecteurs (déplacements nodaux) $\mathbf{x}$ qui permettent de satisfaire cette relation.

L'analyse dynamique d'une structure par la méthode des éléments finis suit exactement le même formalisme. Puisque l'on cherche maintenant une expression au cours du temps des déplacements transversaux de la structure, on recherche une solution du type

$$v_e(x, t) = \mathbf{w}_e^T(x) \mathbf{x}_e(t) \quad (6.2.22)$$

où la dépendance spatiale a été conservée sur les fonctions d'interpolation, alors que la dépendance temporelle est reportée sur l'évolution au cours du temps des connecteurs (séparation des variables). De la sorte, tous les développements précédents relatifs à U_{int} et U_{ext} restent valables. L'énergie cinétique associée aux vibrations transversales d'un élément vaut

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell \mu \left(\frac{\partial v_e}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_e^T \left(\int_0^\ell \mu \mathbf{w}_e \mathbf{w}_e^T dx \right) \dot{\mathbf{x}}_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_e^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{x}}_e \quad (6.2.23)$$

où $\mathbf{M}_e$ est la matrice de masse de l'élément. En utilisant les fonctions d'interpolation données par (6.2.10), on obtient

$$\mathbf{M}_e = \frac{\mu \ell}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell & 54 & -13\ell \\ 22\ell & 4\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ 54 & 13\ell & 156 & -22\ell \\ -13\ell & -3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}. \quad (6.2.24)$$

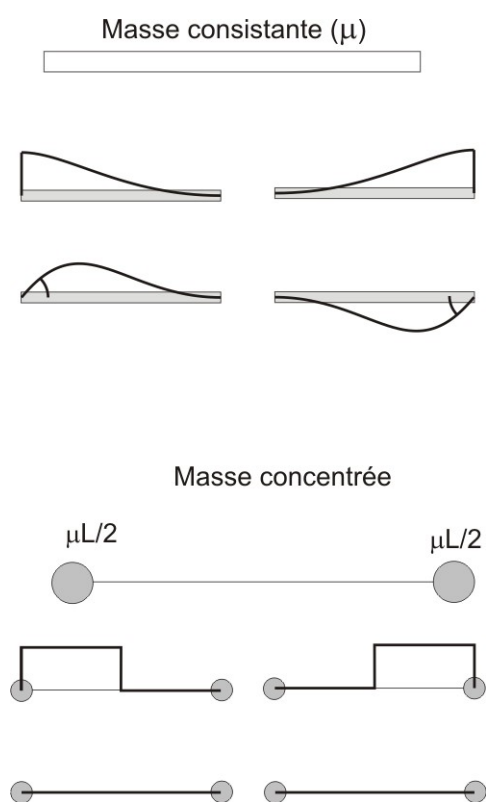


FIGURE 6.2.5 – Degrés de liberté d'un élément fini de type poutre.

Il s'agit de la version *consistante* de la matrice de masse élémentaire. Par souci de simplicité, on utilise parfois des fonctions d'interpolation simplifiées (cf. Fig. 6.2.5) de façon à établir la version *concentrée* de la matrice de masse élémentaire

$$\mathbf{M}_e = \frac{\mu\ell}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.2.25)$$

Par le principe de localisation et rotation, l'énergie cinétique relative à un élément fini peut être écrite en fonction des vitesses des connecteurs $\dot{\mathbf{x}}$ (en axes globaux)

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{L}_e^T \mathbf{R}_e^T \mathbf{M}_e \mathbf{R}_e \mathbf{L}_e) \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M}_{e,i} \dot{\mathbf{x}} \quad (6.2.26)$$

où $\mathbf{M}_{e,i}$ est la contribution de l'élément i à la matrice de masse de la structure. L'expression complète de cette matrice de masse $\mathbf{M}$ s'obtient en écrivant

$$T_{tot} = \sum_{i=1}^{Nb\,élé\,m} T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \left(\sum_{i=1}^{Nb\,élé\,m} \mathbf{M}_{e,i} \right) \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}. \quad (6.2.27)$$

L'équilibre de la structure est écrit en invoquant le principe de Hamilton sur la structure complète. Selon ce principe, le Lagrangien du système doit être conservé lors du mouvement

$$\delta L = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T_{tot} - (U_{int,tot} - U_{ext,tot})) dt = 0. \quad (6.2.28)$$

Avec ces quelques développements successifs

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{p} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\delta \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}^T \mathbf{p}) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (-\delta \mathbf{x}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}^T \mathbf{p}) dt + [\delta \mathbf{x}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}]_{t_1}^{t_2}, \end{aligned}$$

la satisfaction du principe de Hamilton, débouche sur les équations suivantes

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{p}. \quad (6.2.29)$$

A cette formulation, on ajoute également un terme d'amortissement (associé au travail des forces non conservatives) de façon à obtenir l'équation du mouvement d'un système linéaire sous sa forme la plus complète

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t). \quad (6.2.30)$$

Utilisation des fonctions caractéristiques Une autre façon de résoudre l'équation (6.2.6) consiste à utiliser le principe de séparation des variables et un ensemble de fonctions de x caractéristiques (on pourra comprendre dans la suite que ce sont en réalité les modes propres de la structure) qui permettent de remplacer l'équation aux dérivées partielles en un ensemble infini d'équations différentielles ordinaires du type

$$M_k^* \ddot{q}_k(t) + C_k^* \dot{q}_k(t) + K_k^* q_k(t) = p_k^*(t)$$

où les coefficients M_i^* et K_i^* dépendent de la structure étudiée. Cette approche est un peu plus compliquée et les développements précis menant à l'établissement de ces équations fait l'objet d'un chapitre séparé, cf. Chap. 7. A ce stade, retenons simplement que toutes ces équations (indépendantes) peuvent être mises sous la forme

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{q}(t) = \mathbf{p}^*(t) \quad (6.2.31)$$

où $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{C}^*$ et $\mathbf{K}^*$ sont des matrices diagonales.

6.2.1.3 En conclusion...

Quelque soit la méthode d'analyse choisie, on est amené à résoudre une équation différentielle vectorielle du type

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (6.2.32)$$

où $\mathbf{p}$ est un vecteur donné ($N \times 1$) et $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ sont des matrices données ($N \times N$). La figure 6.2.6 représente les différentes méthodes de résolution de cette équation. Les trois familles principales concernent la base de calcul utilisée : nodale, modale ou autre. Cette distinction concerne le choix de l'inconnue pour la résolution du problème. Dans l'approche nodale (la plus évidente, la plus directe, mais aussi la plus rudimentaire), les déplacements des noeuds $\mathbf{x}$ sont conservés comme inconnues du problème et l'équation (6.2.32) est résolue en tant que système d'équations couplées. Dans les deux autres approches, des changements de variables adéquats permettent de prendre en compte plus finement les propriétés dynamiques de la structure. L'option "autre base" ne sera pas abordée dans ce cours. Nous étudierons les options "base nodale" et "base modale" aux sections 6.2.2 et 6.2.3 respectivement.

En plus de cette distinction sur l'inconnue conservée pour résoudre le problème, on peut également différencier les méthodes selon la variable conservée, temps ou fréquence, ce qui mène aux analyses dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Lorsque les sollicitations prennent des formes analytiques simples, la résolution de l'équation du mouvement peut être réalisée analytiquement (méthode de Duhamel dans le domaine temporel et multiplication par la fonction de transfert

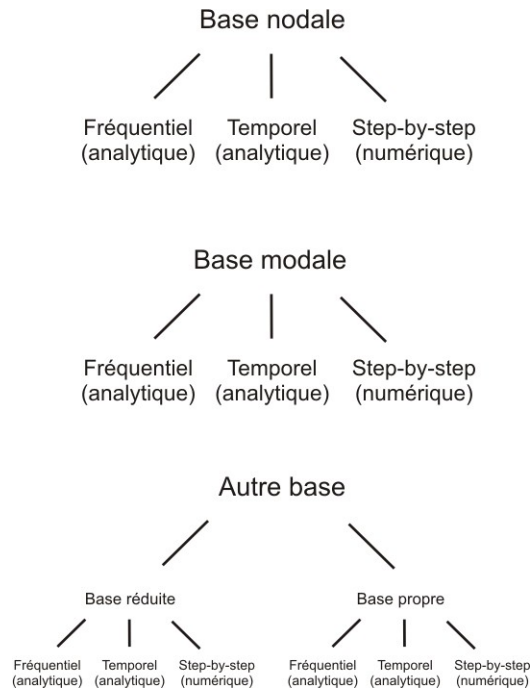


FIGURE 6.2.6 – Méthodes de résolution de l'équation du mouvement.

dans le domaine fréquentiel). Lorsque les expressions analytiques mises en jeu deviennent trop lourdes à supporter, une approche numérique est alors nécessaires. Ces méthodes opèrent dans le domaine temporel (méthodes pas-à-pas).

Cette distinction entre domaines temporel et fréquentiel a déjà été discutée à l'occasion de l'étude du système à 1 DDL. Dans la suite, nous allons montrer que les principes de l'analyse dans l'un ou l'autre domaine restent valables lorsque l'on étudie une structure à plusieurs degrés de liberté. Le principal enjeu lié à l'analyse d'une structure à plusieurs degrés de liberté ne concerne pas le choix du domaine de résolution, mais plutôt la façon dont les multiples DDL sont pris en compte (base nodale, modale, autre).

La figure 6.2.7 est une illustration d'une structure simple qui sera utilisée dans les sections suivantes pour illustrer le principe de fonctionnement de chacune des méthodes d'analyse.

Par le principe d'équilibre dynamique des masses constitutives de la structures, on

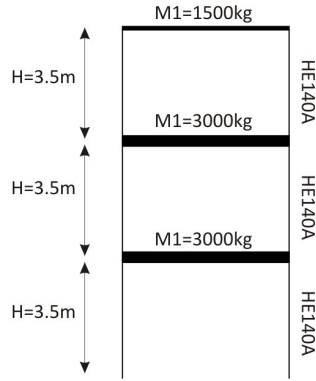


FIGURE 6.2.7 – Structure simple utilisée pour illustrer les différentes méthodes d’analyses.

peut assez facilement écrire les expressions des matrices de masse et de raideur¹²

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3000 & & \\ & 3000 & \\ & & 1500 \end{bmatrix} \text{ kg}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2.43 & -1.21 & 0 \\ -1.21 & 2.43 & 1.21 \\ 0 & -1.21 & 1.21 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ N/m} \quad (6.2.33)$$

L’amortissement dans les structures est difficile à quantifier autrement que par la notion d’un coefficient d’amortissement relatif qui permet de représenter de façon heuristique un niveau de dissipation dans la structure. Nous verrons dans la suite que, pour cette raison, des “formes” relativement simples (ou du moins commodes) sont généralement données à l’amortissement (ex. : Rayleigh). Sans justifier ceci pour le moment, nous pouvons simplement accepter la forme suivante

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3000 & & \\ & 3000 & \\ & & 1500 \end{bmatrix} \text{ Ns/m} \quad (6.2.34)$$

et justifier en temps utile la raison pour laquelle cette forme a été choisie.

6.2.2 Analyse dans la base nodale

On parle d’analyse dans la base nodale lorsque l’équation du mouvement est écrite en conservant les degrés de liberté des noeuds $\mathbf{x}(t)$ ou $\mathbf{X}(\omega)$ comme inconnues. L’équation peut être résolue dans le domaine temporel, auquel cas l’équation

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (6.2.35)$$

12. Essayez d’établir les expressions de ces matrices vous-mêmes...

doit être résolue, mais elle pourrait aussi très bien être résolue dans le domaine fréquentiel qui demande de résoudre

$$-\Omega^2 \mathbf{M} \mathcal{X}(\Omega) + i\Omega \mathbf{C} \mathcal{X}(\Omega) + \mathbf{K} \mathcal{X}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega) \quad (6.2.36)$$

ainsi que cela sera développé dans la suite. Ces différentes approches sont analysées dans la suite.

On pourrait naturellement reproduire sur la structure M-DDL, les étapes de l'étude du système 1-DDL

- étude de la réponse libre ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$),
- analyse sous une charge harmonique que nous pouvons généraliser à un chargement quelconque considéré comme une somme de charges harmoniques de période infinie,
- analyse sous une charge impulsionnelle qui permet d'étudier la réponse sous un chargement quelconque en décomposant celui-ci comme une succession d'impulsions.

Etant donné que toute cette démarche a déjà été appliquée pour le système à un degré de liberté, on peut s'attendre à ne pas apprendre grand chose en réalisant de nouveau tous ces développements. Ce n'est pas vrai. Pour preuve, nous allons laisser pour le moment de côté l'étude de la réponse libre et y revenir à l'occasion de l'étude dans la base modale (où nous verrons que l'étude des mouvements libres d'une structure M-DDL nous apporte beaucoup sur la connaissance du comportement vibratoire d'une structure complexe).

Dans la suite, nous allons donc d'abord développer la réponse d'un système M-DDL soumis à une ou des charges harmoniques. Par extension de ce que nous avons obtenu pour le système 1-DDL, nous obtiendrons une méthode de résolution dans le domaine fréquentiel. En parallèle, le développement de la réponse impulsionnelle d'un système M-DDL permettra d'établir la méthode d'analyse dans le domaine temporel.

Afin de ne pas encombrer excessivement l'exposé avec des mathématiques trop lourdes, nous allons une fois pour toutes justifier la stratégie d'extension de la réponse d'une structure 1-DDL à celle d'une structure M-DDL. Pour ce faire, revenons à l'étude du problème standard

$$\dot{y} = a y \quad (6.2.37)$$

dont la solution est

$$y = C_0 e^{at} \quad (6.2.38)$$

où C est une constante à déterminer à partir des conditions limites. Par "extension", la solution de

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y} \quad (6.2.39)$$

est

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_0 e^{\mathbf{A}t} \quad (6.2.40)$$

où $\mathbf{C}_0$ est une constante d'intégration (un vecteur), à déterminer à partir des conditions limites. Cette notation nécessite de définir l'exponentielle d'une matrice. Elle

est définie par

$$e^{\mathbf{X}} = 1 + \mathbf{X} + \frac{\mathbf{X} \mathbf{X}}{2!} + \frac{\mathbf{X} \mathbf{X} \mathbf{X}}{3!} + \dots \quad (6.2.41)$$

de la même façon que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (6.2.42)$$

Si l'on connaît la décomposition spectrale $\mathbf{X} = \Phi^{-1} \Lambda \Phi$ où Λ est une matrice diagonale, on obtient

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{X}} &= 1 + \Phi^{-1} \Lambda \Phi + \frac{\Phi^{-1} \Lambda^2 \Phi}{2!} + \frac{\Phi^{-1} \Lambda^3 \Phi}{3!} + \dots \\ &= \Phi^{-1} \left(1 + \Lambda + \frac{\Lambda^2}{2!} + \frac{\Lambda^3}{3!} + \dots \right) \Phi = \Phi^{-1} e^{\Lambda} \Phi. \end{aligned} \quad (6.2.43)$$

Sur base de cette équivalence, et avec cette notation, on peut facilement “étendre” au cas M-DDL les solutions obtenues pour l’analyse 1-DDL. Dans la suite des développements, nous nous limiterons parfois à des développements parfois intuitifs, basés sur ce principe qui consiste de façon assez brutale à remplacer des quantités scalaires (1-DDL) par des grandeurs vectorielles ou matricielles correspondantes (M-DDL).

6.2.2.1 Analyse dans le domaine fréquentiel (charge harmonique)

Lors de l’étude du système à un degré de liberté, nous avons d’abord considéré la réponse sous une charge harmonique, puis périodique en constatant qu’une fonction périodique peut s’exprimer par une somme de fonctions harmoniques (décomposition en série de Fourier). Ensuite, en faisant tendre la période de cette fonction périodique vers l’infini, nous avons pu écrire, à l’aide de la transformée de Fourier, la décomposition d’une fonction quelconque comme une somme de fonctions harmoniques de fréquences infiniment proches. En représentant de la sorte la force appliquée sur la structure, et en considérant que la composante stationnaire de la réponse à une sollicitation de fréquence donnée est harmonique de même fréquence, l’analyse du système à un degré de liberté peut être réalisée en multipliant simplement la transformée de Fourier de la sollicitation par la fonction de transfert du système, cf. section 6.1.4.2.

Il existe un raccourci impressionnant à cette méthodologie fastidieuse (mais qui a néanmoins l’intérêt de présenter précisément en quoi consiste la transformée de Fourier). Nous pouvons supposer maintenant que la notion de transformée de Fourier a bien été acquise¹³ et utiliser cette approche plus directe.

Appliquer la transformée de Fourier membre à membre à l’équation (6.2.35) revient à multiplier chaque membre par $e^{-i\Omega t}$ puis intégrer depuis $-\infty$ jusqu’à $+\infty$ par rapport au temps, cf. (6.1.100) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t)) e^{-i\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{p}(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (6.2.44)$$

13. sinon retour à la section 6.1.4.2...

En intégrant successivement par parties, on peut montrer que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{x}}(t) e^{-\iota\Omega t} dt &= -(-\iota\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(t) e^{-\iota\Omega t} dt = \iota\Omega \mathcal{X}(\Omega) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\mathbf{x}}(t) e^{-\iota\Omega t} dt &= -(-\iota\Omega)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(t) e^{-\iota\Omega t} dt = -\Omega^2 \mathcal{X}(\Omega)\end{aligned}\quad (6.2.45)$$

où

$$\mathcal{X}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(t) e^{-\iota\Omega t} dt \quad (6.2.46)$$

est la transformée de Fourier du vecteur $\mathbf{x}$, c'est-à-dire un vecteur dont chaque composante est la transformée de Fourier de la composante correspondante de $\mathbf{x}(t)$. En prenant en considération ces propriétés, l'équation (6.2.44) devient

$$\mathbf{M}(-\Omega^2 \mathcal{X}(\Omega)) + \mathbf{C}(\iota\Omega \mathcal{X}(\Omega)) + \mathbf{K} \mathcal{X}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega) \quad (6.2.47)$$

ou encore

$$\mathcal{X}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) \mathcal{P}(\Omega) \quad (6.2.48)$$

où $\mathcal{H}(\Omega) = (-\mathbf{M}\Omega^2 + \iota\Omega\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}$ est la fonction de transfert de la structure étudiée. Ses dimensions sont $N \times N$ où chaque composante est une fonction de la fréquence. L'établissement de cette matrice peut donc être assez laborieux lorsque le système possède un grand nombre de degrés de liberté. C'est néanmoins une caractéristique intrinsèque fondamentale de la structure qui devrait donc être calculée et comprise pour chaque structure étudiée.

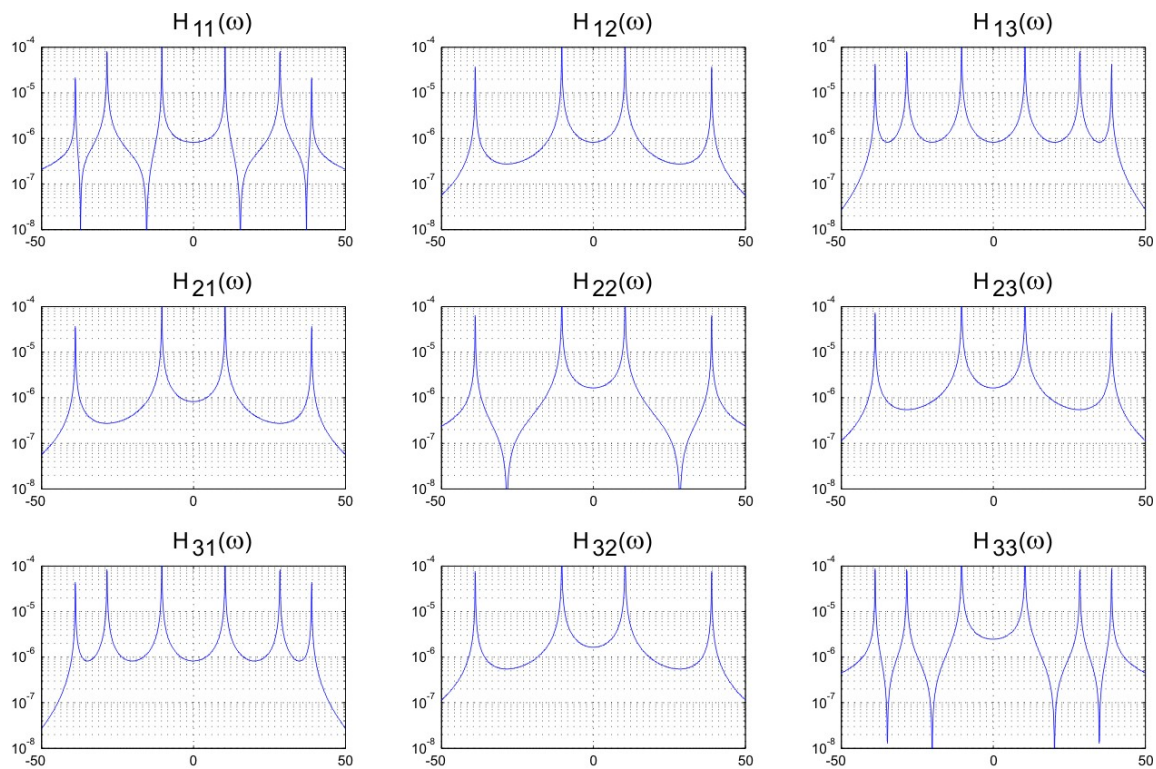
Nous pouvons démontrer que la matrice $\mathcal{H}$ a la signification physique d'une matrice de flexibilité dynamique. En effet, suite à l'équation (6.2.48), la composante i du vecteur inconnue s'écrit

$$\mathcal{X}_i(\Omega) = \sum_{j=1}^N \mathcal{H}_{ij}(\Omega) \mathcal{P}_j(\Omega), \quad (6.2.49)$$

et, dans un contexte où seule la force au noeud k serait non nulle, la sommation se limite donc au seul terme pour lequel $j = k$, c'est-à-dire

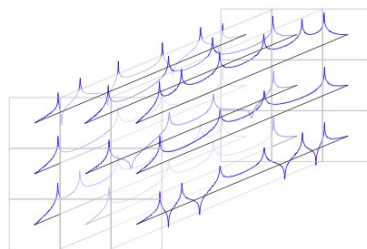
$$\mathcal{X}_i(\Omega) = \mathcal{H}_{ik}(\Omega) \mathcal{P}_k(\Omega). \quad (6.2.50)$$

Si l'on considère également que $\mathcal{P}_k$ est d'amplitude unitaire et de pulsation ω , càd $\mathcal{P}_k(\Omega) = \delta(\Omega - \omega)$, cette relation se limite à $\mathcal{X}_i(\omega) = \mathcal{H}_{ik}(\omega)$. Ceci montre donc que



(a)

En pratique: une matrice $3 \times 3 \times N_{\text{freq}}$



(b)

FIGURE 6.2.8 – Fonction de transfert pour la structure en portique à trois étages (en valeur absolue).

$\mathcal{H}_{ik}(\omega)$ est la réponse (complexe) du degré de liberté i lorsqu'une charge harmonique unitaire est appliquée au degré de liberté k . La norme $|\mathcal{H}_{ik}|$ représente l'amplitude de la réponse et la phase de $\mathcal{H}_{ik}$ représente le déphasage entre la sollicitation et la réponse.

La figure (6.2.8) représente la fonction de transfert du portique à 3 étages. Les neuf fonctions représentées sont les neuf éléments de la matrice $|\mathcal{H}|$. L'élément $\mathcal{H}_{11}$ représente l'amplitude de la réponse au premier degré de liberté (premier étage) lorsqu'une charge harmonique unitaire y est appliquée. Pour une pulsation de sollicitation $\omega = 0$, on retrouve la réponse quasi-statique, soit un peu moins que 10^{-6}m . Les éléments $(2, 2)$ et $(3, 3)$ représentent les réponses des deux autres étages lorsqu'ils sont eux-mêmes sollicités par des forces unitaires. Il est assez logique de retrouver des déplacements plus grands, du moins lorsque la force est appliquée statiquement ($\omega = 0$) sur le second étage et respectivement sur le troisième. Les fonctions obtenues présentent des pics dont on montrera plus tard qu'ils sont associés à des phénomènes de résonance. On ne peut pour le moment que constater que ces pics ont l'air d'être au nombre de 6 (deux fois trois), voire 4 seulement pour les fonctions $\mathcal{H}_{ij}$ où i ou j valent 2. Ceci sera explicité également dans la suite. $\square$

Lorsqu'une telle fonction de transfert doit être numérisée pour un traitement informatique, on la stocke généralement dans une matrice à trois dimensions dont la troisième est celle sur laquelle courent les fréquences, cf. Fig. 6.2.8-b. Il faudra rester attentif au fait que le stockage d'une telle matrice peut vite prendre beaucoup de temps et d'espace mémoire.

Maintenant que les caractéristiques vibratoires propres de la structure sont bien connues, il est possible d'envisager l'analyse dynamique de cette structure à trois degrés de liberté, soumise à une charge donnée. Nous allons considérer le chargement particulier représenté à la Fig. 6.2.9. Il s'agit d'un champ de force de courte durée d'application (de type impulsionnelle donc, mais pas au sens strict du terme puisque ce n'est pas une fonction de Dirac) sollicitant les premier et troisième degrés de liberté (étages). Leurs expressions dans le domaine temporel (en Newton) sont

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 10^6 \sqrt{2\pi} t e^{-50t} \\ p_2(t) &= 0 \\ p_3(t) &= 10^5 \sqrt{2\pi} t e^{-50t} \end{aligned} \tag{6.2.51}$$

pour $t \geq 0$ et nulles pour $t < 0$. Il s'agit donc bien de fonctions de type impulsion puisqu'elles sont exprimées par le produit d'une fonction croissante t et d'une fonction décroissante e^{-50t} . Ces expressions ont été choisies de façon à pouvoir calculer leur

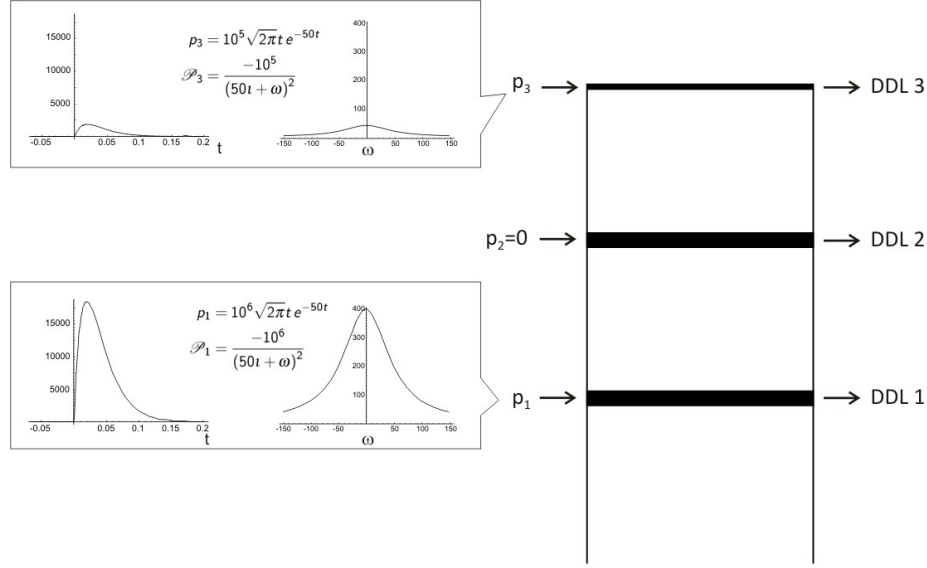


FIGURE 6.2.9 – Exemple de sollicitation appliquée sur le portique à trois étages.

transformées de Fourier analytiquement¹⁴

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_1(\Omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(t) e^{i\Omega t} dt = \frac{10^6}{(50 - i\Omega)^2} \\
 \mathcal{P}_2(\Omega) &= 0 \\
 \mathcal{P}_3(\Omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p_2(t) e^{i\Omega t} dt = \frac{10^5}{(50 - i\Omega)^2}.
 \end{aligned} \tag{6.2.52}$$

L'analyse de la structure est réalisée conformément à l'équation (6.2.48), c'est-à-dire par $\mathcal{X}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) \mathcal{P}(\Omega)$, où il faut considérer $\mathcal{H}(\Omega) = (-\mathbf{M}\Omega^2 + i\Omega\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}$ et

$$\mathcal{P}(\Omega) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1(\Omega) \\ \mathcal{P}_2(\Omega) \\ \mathcal{P}_3(\Omega) \end{pmatrix}. \tag{6.2.53}$$

Par exemple, la transformée de Fourier du premier degré de liberté (déplacement du premier étage) s'obtient par

$$\mathcal{X}_1(\Omega) = \mathcal{H}_{1,1}(\Omega) \mathcal{P}_1(\Omega) + \mathcal{H}_{1,3}(\Omega) \mathcal{P}_3(\Omega)$$

14. il faut savoir qu'il existe plusieurs façon de normaliser une transformée de Fourier. En l'occurrence, on peut voir ici qu'elle a été normalisée par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (par opposition à une valeur unitaire lorsque nous avons introduit le concept)...

(puisque $\mathcal{P}_2 = 0$). La figure 6.2.10-a représente les transformées de Fourier des trois degrés de liberté de la structure en portique. On peut de nouveau observer que

- le déplacement statique (lu sur les graphiques pour $\Omega = 0$) va en augmentant en montant dans les étages,
- le déplacement du second étage ne présente que deux pics (quatre par symétrie) de résonance, alors que les déplacements du premier et du troisième étage en présentent trois.

En outre, on peut constater que

- le déplacement du premier étage se compose essentiellement de deux harmoniques à 10 rad/s et 28 rad/s environ dont les amplitudes sont comparables. L'amplitude du troisième pic dans la réponse (proche de 40 rad/s) est beaucoup plus faible.
- étant donné qu'il lui manque le pic intermédiaire, le déplacement du second étage peut être considéré comme étant presque exclusivement harmonique à la pulsation de 10 rad/s
- le déplacement du troisième étage présente une composante principale de la réponse à 10 rad/s, et deux autres pics situés aux mêmes fréquences que précédemment dont les amplitudes sont plus faibles (mais probablement non négligeables).

En utilisant la transformée de Fourier inverse, on peut revenir à l'expression dans le domaine temporel des déplacements de chaque étage. Cette opération doit être réalisée de façon numérique car le calcul analytique devient rapidement impraticable après la multiplication par la fonction de transfert. L'utilisation d'un logiciel de calcul numérique a permis d'obtenir les graphiques de la figure 6.2.10-b où l'on peut à nouveau observer les mêmes constatations que précédemment. Plus particulièrement, on peut voir que la forme des signaux dans le domaine temporel s'accorde particulièrement bien avec la description du contenu fréquentiel. Ainsi, le déplacement du second étage présente une réponse sensiblement harmonique alors que le déplacement du premier étage montre définitivement la forme typique d'une somme de plusieurs harmoniques.

6.2.2.2 Analyse dans le domaine temporel (charge impulsionnelle)

La stratégie de calcul alternative consiste à étudier la réponse structurelle dans le domaine temporel. Notre expérience de l'oscillateur simple nous a appris qu'une sollicitation quelconque peut être vue comme une succession d'impulsions. Ce concept va maintenant être étendu à l'analyse d'une structure à plusieurs degrés de liberté.

Admettons que tous les noeuds de la structure soient sollicités par des impulsions appliquées strictement à l'instant $t = 0$. Toutes ces impulsions sont regroupées dans un vecteur $\mathbf{I}$; elles génèrent en chaque noeud des forces s'exprimant par $I_i \delta(t)$ où

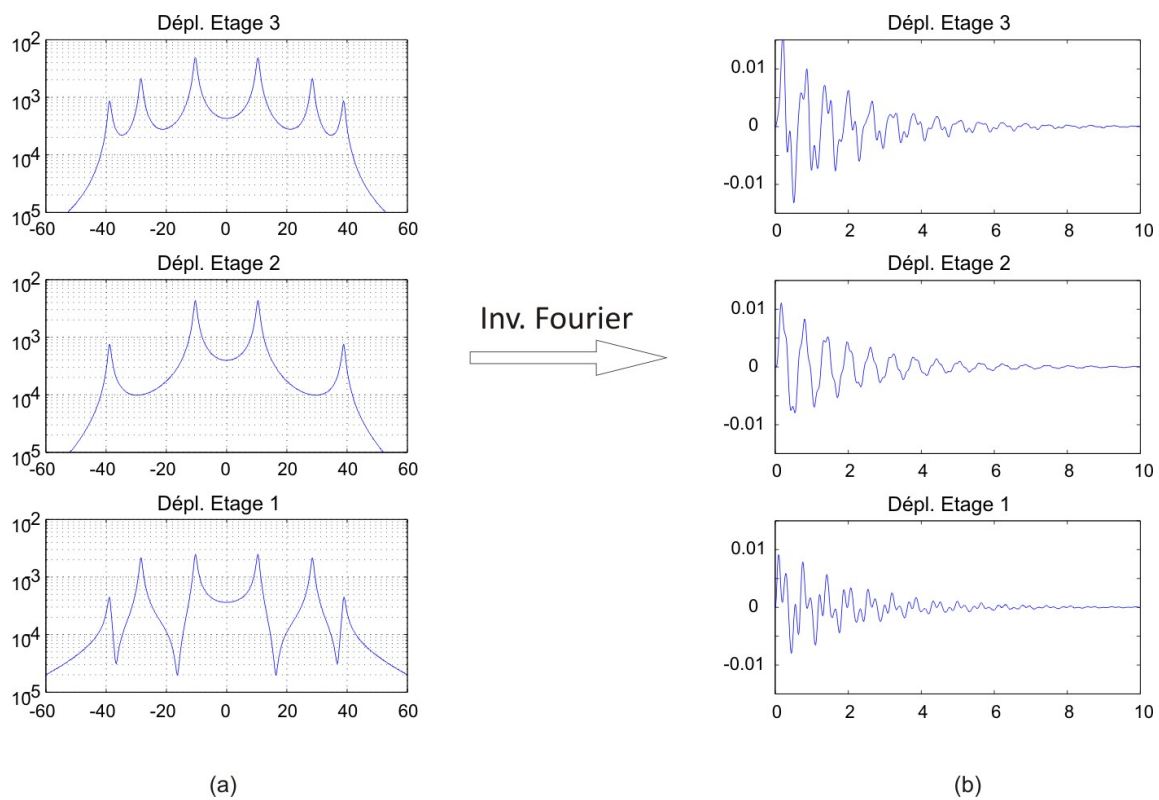


FIGURE 6.2.10 – (a) Réponse (fréquentielle) de chaque étage sous l'effet du chargement de la figure 6.2.9 - (b) Réponse temporelle obtenue par transformée de Fourier inverse.

δ représente la fonction de Dirac. Après l'instant $t = 0^+$, plus aucune force n'est appliquée sur la structure et elle subit un mouvement libre, éventuellement amorti. Il apparaît donc que la réponse de la structure se compose de deux phases distinctes :

- une première phase de durée infinitésimale pendant laquelle la condition initiale de repos est transformée en une condition initiale de vitesse non nulle (puisque la durée de la phase est infinitésimale, l'oscillateur reste donc à sa position d'équilibre - seule sa vitesse est modifiée pendant cette phase) ;
- la seconde phase se calcule comme un mouvement libre amorti avec, comme conditions initiales, la vitesse obtenue au terme de la première phase.

Durant la première phase de la réponse, l'équation du mouvement s'écrit

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{I}\delta(t). \quad (6.2.54)$$

En intégrant cette équation sur une durée Δt très courte, on obtient

$$\int_0^{\Delta t} (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t)) dt = \mathbf{I}. \quad (6.2.55)$$

L'intégrale au membre de gauche peut être estimée terme par terme. Avec les mêmes justifications que pour l'oscillateur simple, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) dt &= \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(0^+) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) dt &= 0 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} \mathbf{K}\mathbf{x}(t) dt &= 0. \end{aligned} \quad (6.2.56)$$

Les conditions initiales suivant l'application de l'impulsion sont donc

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= 0 \\ \dot{\mathbf{x}}(0^+) &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}. \end{aligned}$$

On se limite pour l'instant à l'établissement de la réponse dans la première phase et on ne développe pas l'expression de la réponse libre (obtenue en réalité par extension, au sens donné préalablement, de la solution libre de l'oscillateur simple). Sans en donner l'expression analytique, on admettra donc simplement l'existence de la réponse impulsionnelle unitaire $\mathbf{h}_{i,j}$ qui représente la réponse du degré de liberté i lorsqu'une impulsion unitaire est appliquée au degré de liberté j . Il s'agit donc d'une matrice $N \times N$ dont chaque élément est une fonction du temps. C'est une caractéristique intrinsèque de la structure, au même titre que la fonction de transfert.

Cette fonction est représentée à la figure 6.2.11-a pour le portique à trois étages. Les éléments diagonaux représentent les déplacements de chaque étage lorsqu'une impulsion unitaire y est appliquée. On retrouve à nouveau une plus grande déformabilité pour les étages les plus hauts. Les éléments non diagonaux représentent la réponse à un étage lorsqu'une impulsion unitaire est appliquée à un autre étage. Par le principe de Betti-Maxwell, cette matrice doit nécessairement être symétrique, ce que l'on peut également observer. Comme pour la fonction de transfert, pour des raisons de numérisation, il peut être intéressant de stocker cette matrice sous le format d'une matrice à trois dimensions où le temps court sur cette troisième dimension, cf Fig. 6.2.11-b.

L'analyse d'une structure soumise à des forces quelconques appliquées en ses noeuds se base sur l'expression de cette matrice. Chaque force peut être décomposée en une succession d'impulsions et les réponses élémentaires sous chacune d'elles sont sommées (comme pour l'oscillateur simple). Par exemple, la réponse au noeud i engendrée par la force appliquée au noeud j de la structure s'exprime par

$$x_i(t) = \int_0^{+\infty} h_{i,j}(t-\tau) p_j(\tau) d\tau. \quad (6.2.57)$$

Puisque les conditions d'application du principe de superposition doivent être satisfaites pour arriver à ce stade¹⁵, la réponse sous l'effet de toutes les forces appliquées peut être calculée comme une superposition des réponses obtenues sous chacune d'elles séparément, et donc

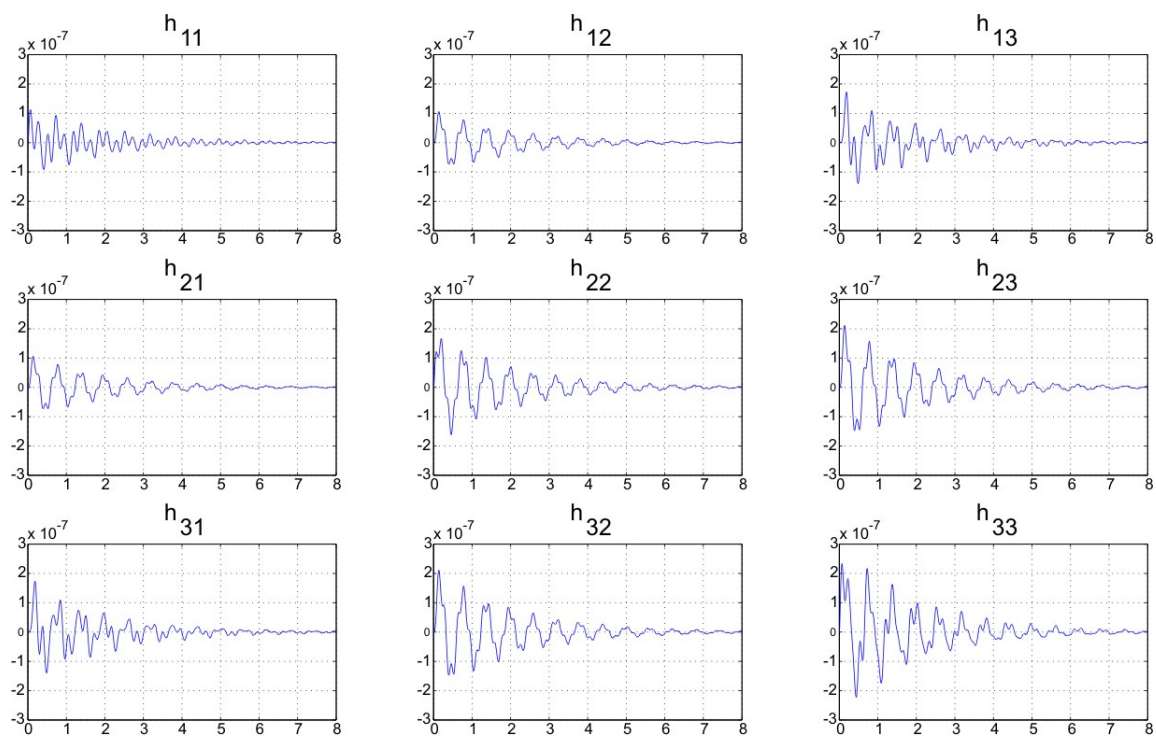
$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{j=1}^N \int_0^{+\infty} h_{i,j}(t-\tau) p_j(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^N h_{i,j}(t-\tau) p_j(\tau) d\tau \end{aligned}$$

ou, sous format matriciel

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^{+\infty} \mathbf{h}(t-\tau) \mathbf{p}(\tau) d\tau. \quad (6.2.58)$$

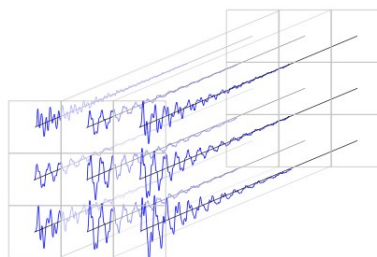
Cette relation est simplement une expression matricielle du produit de convolution obtenu pour l'oscillateur simple. Ce n'est donc rien d'autre qu'une illustration du principe d'extension. Cette relation peut difficilement être appliquée analytiquement car l'expression de $\mathbf{h}$ est relativement compliquée, de même que celle de $\mathbf{p}$ peut

15. puisque l'on vient de superposer les effets de la succession d'impulsions appliquées au noeud j



(a)

En pratique: une matrice $3 \times 3 \times N_{\text{step}}$



(b)

FIGURE 6.2.11 – Réponse impulsionnelle unitaire du portique à trois étages.

également l'être. Lorsque la force $\mathbf{p}$ est appliquée pendant une durée relativement courte, l'intégrale peut éventuellement être décomposée en une somme de petits incréments

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{n_\tau} \mathbf{h}(t - \tau_i) \mathbf{p}(\tau_i) \Delta\tau \quad (6.2.59)$$

où $n_\tau \Delta\tau$ représente la durée d'application de la charge appliquée. Lorsque par contre la durée de la force appliquée est relativement longue, n_τ peut être rapidement démesuré et il n'est alors plus avantageux d'appliquer cette méthode. Quitte à choisir une solution numérique avec un grand nombre de pas de temps, on préfère alors une approche pas-à-pas qui a l'avantage d'avoir un domaine d'application bien plus large. Dans le cas du portique à trois étages et de la sollicitation représentée à la figure 6.2.9, on se trouve justement dans un cas d'application où la sollicitation est appliquée pendant un temps très court et où l'application numérique de Duhamel est particulièrement bien adaptée. En utilisant 20 pas de temps de 5ms, la réponse obtenue en appliquant (6.2.59) fournit les résultats de la figure 6.2.12. Ils sont naturellement fort semblables à ceux obtenus par l'approche dans le domaine fréquentiel. D'un point de vue théorique, on peut montrer qu'ils sont strictement équivalents si $\Delta t \rightarrow 0$. Les seules petites différences sont donc ici dues à l'utilisation d'une transformée de Fourier inverse numérique (Fig. 6.2.10-b) et à la discrétisation de la sollicitation par une succession de 20 "impulsions" rectangulaires (Fig. 6.2.12).

6.2.2.3 Résolution pas-à-pas

Pour les mêmes raisons que celle évoquées à l'occasion de l'étude du système à un degré de liberté, on peut être amené à devoir utiliser une méthode de résolution numérique. Et tant qu'à utiliser une telle méthode, on préfère souvent repartir d'une discrétisation de l'équation du mouvement, plutôt qu'une forme numérique de l'intégrale de Duhamel, par exemple.

Par cette discrétisation temporelle de l'équation du mouvement, on se force à satisfaire l'équilibre en une succession d'instants donnés. En formulant des hypothèses sur ce qu'il se passe entre ces instants précis, on peut obtenir un schéma de récurrence qui permet de calculer l'évolution au cours du temps du déplacement en chacun des noeuds de la structure. Au paragraphe (5.2.4), nous avons obtenu la formulation générale de la méthode de Newmark, qui est certainement la plus utilisée dans les applications de dynamique linéaire, en raison de ses bonnes performances de précision et stabilité. Elle s'exprime par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} m + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} c + k \right) q_{t+\Delta t} = & p_{t+\Delta t} + c \left(\frac{\delta}{\alpha \Delta t} q_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \dot{q}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \ddot{q}_t \right) \\ & + m \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} q_t + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{q}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{q}_t \right) \end{aligned} \quad (6.2.60)$$

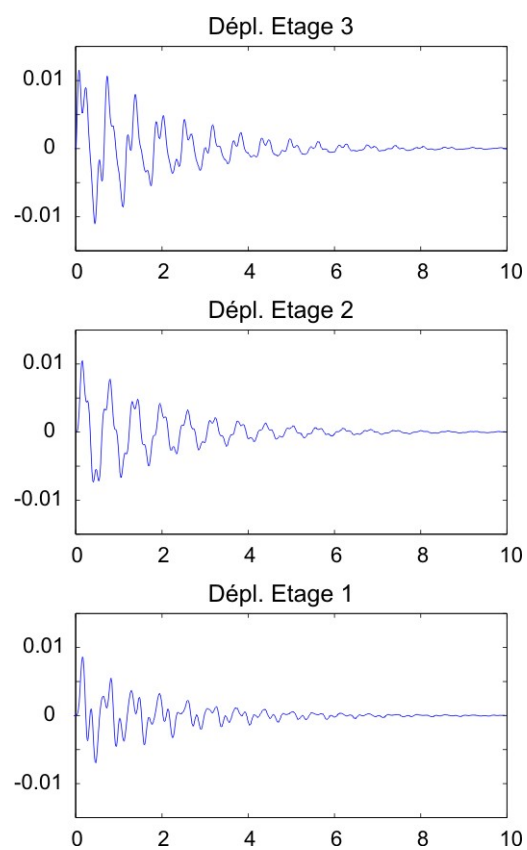


FIGURE 6.2.12 – Réponse du portique à trois étages calculée à l’aide de la méthode d’analyse dans le domaine temporel (Duhamel).

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \frac{\delta}{\alpha\Delta t} (q_{t+\Delta t} - q_t) + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) \dot{q}_t + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) \ddot{q}_t \quad (6.2.61)$$

$$\ddot{q}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2} (q_{t+\Delta t} - q_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t} \dot{q}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \ddot{q}_t. \quad (6.2.62)$$

Par le principe d'extension aux systèmes M-DDL, on obtient un schéma d'intégration temporelle, en remplaçant les variables de réponse scalaires ($q, \dot{q}, \ddot{q}$) par des variables vectorielles ($\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$) et en remplaçant les caractéristiques structurales scalaires (m, k, c) par les grandeurs matricielles correspondantes ($\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}$) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K}\right) \mathbf{x}_{t+\Delta t} = & \mathbf{p}_{t+\Delta t} + \mathbf{C} \left(\frac{\delta}{\alpha\Delta t}\mathbf{x}_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1\right) \dot{\mathbf{x}}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right) \ddot{\mathbf{x}}_t\right) \\ & + \mathbf{M} \left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{x}_t + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\mathbf{x}}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \ddot{\mathbf{x}}_t\right) \end{aligned} \quad (6.2.63)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \frac{\delta}{\alpha\Delta t} (\mathbf{x}_{t+\Delta t} - \mathbf{x}_t) + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) \dot{\mathbf{x}}_t + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) \ddot{\mathbf{x}}_t \quad (6.2.64)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2} (\mathbf{x}_{t+\Delta t} - \mathbf{x}_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t} \dot{\mathbf{x}}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \ddot{\mathbf{x}}_t. \quad (6.2.65)$$

L'application de cette méthode à l'analyse du portique à trois étages donne des résultats strictement semblables à ceux de la figure 6.2.12.

6.2.2.4 Résumé

Dans ce cadre des vibrations linéaires des structures à plusieurs degrés de liberté, les trois méthodes proposées sont (théoriquement) strictement équivalentes. La plus complète et la plus utilisée en pratique reste cependant la méthode pas-à-pas (aussi parce qu'elle permet de prendre en compte d'éventuels comportements non linéaires).

La taille des systèmes à résoudre, p. ex. (6.2.63), peut vite devenir difficile à gérer, surtout lorsqu'on sait que l'opération de résolution d'un système matriciel doit être répétée un grand nombre de fois (un fois par pas de temps). Lorsqu'on est face à une structure possédant un grand nombre de degrés de liberté ($N \gtrsim 10000$), l'analyse dans la base nodale peut demander des temps de calcul prohibitifs. Le prix à payer pour retrouver une méthode efficace est celui des développements analytiques qui permettront de comprendre finement et sainement le comportement dynamique de la structure. Ceci est illustré dans la suite à l'aide de l'analyse en base modale.

6.2.3 Analyse dans la base modale

Lors de l'étude de l'oscillateur à 1-DDL, nous avons pu constater qu'un système à un degré de liberté, lorsqu'il est libre de force appliquée, oscille à une fréquence propre, une fréquence naturelle, celle dans laquelle le système "se sent bien" et vibre naturellement. Ce phénomène est compris de tous les élèves qui, à l'école primaire, faisaient "vibrer" leur latte en plastique pour épater leurs camarades. Ces petits physiciens en herbe auront pu observer que leur latte vibre à une certaine *fréquence propre*, mais aussi qu'elle prend une *déformée propre* (qui évolue au cours du temps de façon harmonique, donc) telle que tous les points vibrent en phase. Les choses se corsent dans le cursus lorsqu'on apprend que tous les corps, pour autant qu'ils possèdent une masse, vibrent à leur fréquence propre, voire leurs fréquences propres. On peut comprendre en effet qu'une structure complexe, par exemple un building à appartements, possède plusieurs fréquences propres et déformées propres. On imagine par exemple facilement une déformée propre et une fréquence par balcon, mais aussi des déformées propres plus globales qui intéressent par exemple les déplacements d'ensemble du bâtiment.

L'objectif de la section 6.2.3.1 consiste à donner les fondements théoriques nécessaires qui permettront de déterminer les fréquences propres et les déformées propres (modes propres) correspondantes. Sur base de ces propriétés dynamiques importantes de la structure, nous pourrons alors aborder, à la section 6.2.3.3, l'analyse dynamique d'une structure en incluant ces propriétés importantes.

6.2.3.1 Propriétés modales

La pulsation propre d'un système à 1-DDL s'écrit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.2.66)$$

et ne dépend donc que de la raideur et de la masse du système étudié. Nous allons donc commencer notre étude des systèmes à plusieurs degrés de liberté, en étudiant les vibrations libres non-amorties

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (6.2.67)$$

dans l'espoir d'extraire de cette analyse les informations désirées sur les fréquences propres et modes propres. Sur base de l'observation de phénomènes physiques, on essaie une solution du type

$$\mathbf{x}(t) = \phi q(t) \quad (6.2.68)$$

où $q(t)$ est une fonction scalaire du temps et ϕ est un vecteur (constant, indépendant du temps). On recherche donc une solution où tous les noeuds du modèle vibrent en phase. On peut voir ceci en calculant le rapport de deux amplitudes à deux degrés de liberté i et j différents

$$\frac{x_i(t)}{x_j(t)} = \frac{\phi_i q(t)}{\phi_j q(t)} = \frac{\phi_i}{\phi_j}. \quad (6.2.69)$$

Puisque ce rapport est toujours constant (il ne dépend pas du temps), les degrés de liberté i et j vibrent donc bien en phase.

Dans ce type de solution, $q(t)$ représente donc l'évolution d'une amplitude au cours du temps et ϕ représente une déformée. En éclairant à l'aide d'un stroboscope, une structure qui vibre en satisfaisant (6.2.68), on photographie donc à chaque fois la même forme ϕ , mais mise à l'échelle différemment, avec $q(t)$

L'introduction de (6.2.68) dans (6.2.67) donne

$$\mathbf{M}\phi\ddot{q}(t) + \mathbf{K}\phi q(t) = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{m}\ddot{q}(t) + \mathbf{k}q(t) = \mathbf{0} \quad (6.2.70)$$

où $\mathbf{m} = \mathbf{M}\phi$ et $\mathbf{k} = \mathbf{K}\phi$ sont des vecteurs de dimension $N \times 1$. En écrivant (6.2.70) composante par composante, on a

$$m_i\ddot{q}(t) + k_i q(t) = 0 \quad (6.2.71)$$

qui peut être mis sous la forme

$$\frac{k_i}{m_i} = -\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}. \quad (6.2.72)$$

Puisque, dans cette expression, le membre de gauche ne dépend pas de t , les deux quotients doivent nécessairement prendre une expression indépendante du temps. De même, puisque le membre de droite ne dépend pas du degré de liberté i choisi, les deux quotients doivent nécessairement prendre une expression indépendante de i . Ils doivent donc nécessairement prendre une valeur constante qui ne dépend ni de i , ni de t

$$\frac{k_i}{m_i} = -\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \omega^2. \quad (6.2.73)$$

Nous la notons pour le moment ω^2 . En égalant les deux quotients à cette constante, on trouve

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \\ k_i = m_i \omega^2 \end{cases} \quad (6.2.74)$$

La première relation montre que la solution est harmonique et que ω a la signification d'une pulsation. Cela signifie donc que les vibrations d'une structure non amortie et non sollicitée peuvent éventuellement s'exprimer par une forme ϕ modulée par une amplitude variant de façon sinusoïdale.

En revenant à la définition de $\mathbf{m}$ et $\mathbf{k}$, la seconde relation nous donne

$$k_i = m_i \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}\phi = \mathbf{M}\phi\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)\phi = \mathbf{0} \quad (6.2.75)$$

La solution triviale de cette équation est $\phi = 0$, que nous rejetons tout de suite puisque nous cherchons justement des formes dans lesquelles la structure peut vibrer.

Par nos connaissances en algèbre, on sait que les solutions non triviales de cette équation sont au nombre de N et sont obtenues en imposant que le déterminant $\det(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)$ soit égal à zéro. On les note ω_i et ϕ_i (avec $i = 1, \dots, N$).

Cela signifie donc que la constante ω introduite ci-avant ne peut pas prendre n'importe quelle valeur. Elle ne peut prendre que l'une des N valeurs particulières ω_i . De même, la forme ϕ dans laquelle la structure peut vibrer naturellement n'est pas quelconque. Il s'agit d'un vecteur propre ϕ_i du système à résoudre et il doit nécessairement être associé à une valeur propre ω_i .

En pratique, écrire que le déterminant $\det(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)$ est nul consiste à écrire un polynôme de degré N en ω^2 . Ce polynôme possède N racines (positives car $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ sont définies positives) qui peuvent être ordonnées de la sorte

$$0 < \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_N^2. \quad (6.2.76)$$

Les fréquences propres sont strictement positives pour une structure iso- ou hyperstatique. Une fréquence propre nulle est le témoignage d'un mécanisme (ou mode rigide). La plus petite pulsation ω_1 (fréquence) ainsi que le mode associé ϕ_1 sont qualifiés de *fondamentaux*.

Pour une pulsation ω_i donnée, le vecteur propre ϕ_i correspondant est obtenu en résolvant

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_i^2) \phi_i = \mathbf{0} \quad (6.2.77)$$

Ce système est singulier (puisque $\det(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_i^2) = 0$), donc ϕ_i est défini à une constante multiplicative près. On peut donc choisir de multiplier chaque mode propre par une constante arbitraire, sans que cela ne change quoi que ce soit à la résolution. Cela exprime donc bien le fait que ϕ est une forme et non pas une amplitude. Pour conserver une signification physique simple, les modes sont tous normés de manière systématique (et semblable). Il existe essentiellement deux méthodes de normalisation :

- normalisation à un maximum unitaire en valeur absolue, c'est-à-dire telle que

$$\max_j |\phi_{j,i}| = 1 \quad (6.2.78)$$

où $\phi_{j,i}$ représente, dans le mode i , la valeur du déplacement du degré de liberté j . Pour normaliser un mode de cette façon, une fois que le mode est établi, on parcourt l'entière des degrés de libertés et on repère la valeur du mode correspondant à ce degré de liberté. On construit ensuite le mode normé en divisant le mode initial par cette valeur maximale (en valeur absolue). Les modes propres que l'on obtient ainsi permettent de donner une signification physique aux fonctions q_i par lesquelles on pourrait multiplier chaque mode. Il s'agit en effet d'amplitudes (évident puisque les modes sont normés à un maximum unitaire).

- normalisation par rapport à la masse, c'est-à-dire telle que

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1; \quad (6.2.79)$$

cette façon de procéder permet, comme nous allons le voir dans la suite, d'assurer une masse généralisée identique pour chaque mode.

Pour faciliter les notations, on regroupe tous les vecteurs propres dans une matrice

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_N] \quad (6.2.80)$$

de sorte que $\Phi_{j,i}$ représente le déplacement du degré de liberté j dans le mode i . De même, toutes les valeurs propres dans une matrice diagonale

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}. \quad (6.2.81)$$

Avec ces notations, l'équation (6.2.77) peut s'écrire sous la forme matricielle

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\Omega^2) \Phi = \mathbf{0} \quad (6.2.82)$$

En utilisant les matrices de masse et de raideur du portique à trois étages, cf. (6.2.33), on obtient les formes modales Φ et la matrice Ω^2 suivantes

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.866 & 0 & -0.866 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \Omega^2 = \begin{bmatrix} 108.5 & & \\ & 809.5 & \\ & & 1510.6 \end{bmatrix}. \quad (6.2.83)$$

On peut donc en déduire les valeurs des pulsations propres $\omega_i = \sqrt{\Omega_{i,i}^2}$ et fréquences propres

$$\omega = \left\{ \begin{array}{c} 10.4 \\ 28.5 \\ 38.9 \end{array} \right\} \text{ rad/s} \rightarrow f = \left\{ \begin{array}{c} 1.66 \\ 4.53 \\ 6.19 \end{array} \right\} \text{ Hz}. \quad (6.2.84)$$

La figure 6.2.13 représente les modes propres de la structure. Par exemple, dans le premier mode $\phi_1 = \langle 0.5 \quad 0.866 \quad 1 \rangle$, on peut voir que les déplacements des étages vont tous dans le même sens et sont d'autant plus grands que l'étage est haut. On pouvait s'attendre à obtenir cette forme fondamentale. En écartant le sommet du portique de sa position d'équilibre, notre sens intuitif nous indique effectivement que ce portique plus ou moins uniforme en hauteur doit vibrer dans cette forme. $\square$

Une propriété fondamentale des modes propres est qu'ils sont orthogonaux via les matrices de masse et de raideur. On démontre ceci en considérant deux modes i et j de pulsations différentes ($\omega_i \neq \omega_j$). Puisque $\mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\phi_i$ et $\mathbf{K}\phi_j = \omega_j^2 \mathbf{M}\phi_j$, cf. 6.2.77, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} \phi_i^T \mathbf{K} \phi_j &= \omega_j^2 \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j \\ \phi_j^T \mathbf{K} \phi_i &= \omega_i^2 \phi_j^T \mathbf{M} \phi_i \end{aligned} \quad (6.2.85)$$

ou encore, en soustrayant ces deux relations membre à membre,

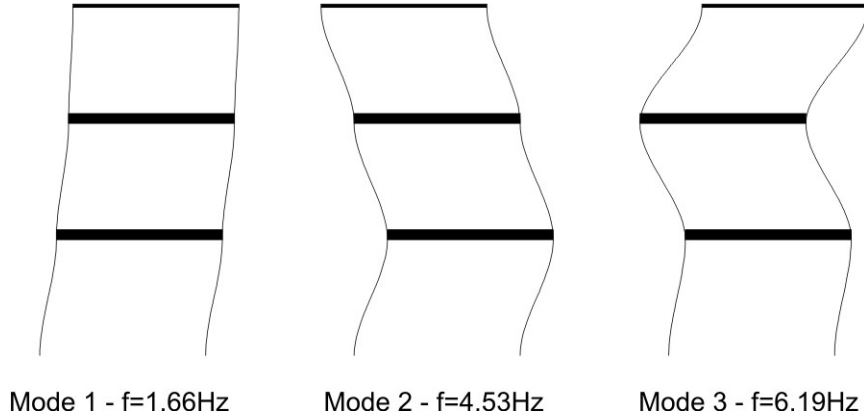


FIGURE 6.2.13 – Réponse du portique à trois étages calculée à l'aide de la méthode d'analyse dans le domaine temporel.

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j - \phi_j^T \mathbf{K} \phi_i = \omega_j^2 \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j - \omega_i^2 \phi_j^T \mathbf{M} \phi_i \quad (6.2.86)$$

Puisque $\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j$ et $\phi_j^T \mathbf{K} \phi_i$ sont des grandeurs scalaires, elles sont égales à leur transposée¹⁶, c'est-à-dire égales entre elles. Il en est de même pour $\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j$ et $\phi_j^T \mathbf{M} \phi_i$. La relation précédente se réduit donc à

$$0 = (\omega_j^2 - \omega_i^2) \phi_j^T \mathbf{M} \phi_i \quad (6.2.87)$$

et donc $\phi_j^T \mathbf{M} \phi_i = \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = 0$. En remontant à (6.2.85), on voit donc également que $\phi_j^T \mathbf{K} \phi_i = \phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = 0$. Nous venons donc de démontrer que $\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j$ et $\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j$ sont tous les deux égaux à zéro lorsque i est différent de j . En d'autres termes, les matrices $\mathbf{M}^* = \Phi^T \mathbf{M} \Phi$ et $\mathbf{K}^* = \Phi^T \mathbf{K} \Phi$ sont toutes les deux diagonales. En réalité, la pré- et post-multiplication par la matrice Φ (de changement de repère) revient à projeter la matrice $\mathbf{M}$ dans la base des modes propres. Les matrices structurelles projetées dans la base des modes propres jouent un rôle très important dans l'analyse en base modale, l'équivalent des matrices structurelles nodales pour une analyse en base nodale. On définit

— la matrice de masse généralisée

$$\mathbf{M}^* = \Phi^T \mathbf{M} \Phi, \quad (6.2.88)$$

— la matrice de raideur généralisée

$$\mathbf{K}^* = \Phi^T \mathbf{K} \Phi, \quad (6.2.89)$$

— la matrice d'amortissement généralisée

$$\mathbf{C}^* = \Phi^T \mathbf{C} \Phi. \quad (6.2.90)$$

16. pour rappel $(AB)^T = B^T A^T$

Rien ne laisse présumer pour l'instant que $\mathbf{C}^*$ est diagonale. Dans un contexte tout à fait général, ce n'est justement pas le cas. Ceci sera discuté dans la suite.

Les éléments (diagonaux) de la matrice de masse généralisée s'obtiennent par

$$\mathbf{M}_{m,m}^* = \phi_m^T \mathbf{M} \phi_m = \sum_i \sum_j \phi_{i,m} \phi_{j,m} \mathbf{M}_{i,j}, \quad (6.2.91)$$

et lorsque la matrice de masse est diagonale (modélisation par masses concentrées, p. ex.), la double sommation se réduit à

$$\mathbf{M}_{m,m}^* = \sum_i \phi_{i,m}^2 \mathbf{M}_{i,i}. \quad (6.2.92)$$

Lorsque les modes propres sont normés à une valeur maximale unitaire, on voit donc que les masses généralisées sont obtenues par une pondération des masses modélisées en chaque noeud de la structure, dont les coefficients sont inférieurs à l'unité, de sorte que

$$\mathbf{M}_{m,m}^* \leq \sum_i \mathbf{M}_{i,i}. \quad (6.2.93)$$

Ceci montre que la masse généralisée dans le mode m peut être interprétée comme la fraction de la masse qui vibre lorsque la réponse se produit exclusivement dans le mode m .

Les matrices généralisées du portique à trois étages peuvent être calculées à partir de ces définitions. On obtient assez facilement

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^* &= \begin{bmatrix} 4500 & & \\ & 4500 & \\ & & 4500 \end{bmatrix} \text{ (kg)} \\ \mathbf{K}^* &= \begin{bmatrix} 0.488 & & \\ & 3.64 & \\ & & 6.80 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ (N/m)} \end{aligned}$$

Dans cet exemple, on peut par exemple constater que les masses généralisées sont identiques dans tous les modes (ce n'est pas une généralité!). Pour interprétation, on peut par exemple regarder le premier mode : lorsque la structure se déforme dans son premier mode, 4500 kg sont mis en mouvement : les 1500 kg du toit participent à 100%, les 3 tonnes du second étage à $0.866^2 = 75\%$ et les trois tonnes du premier étage à $0.5^2 = 25\%$, ce qui fait un total de 4500 kg.

Concernant les raideurs, elles sont d'autant plus importantes que l'on considère des modes élevés. Cela signifie simplement que l'on doit appliquer (globalement) des efforts plus importants pour pouvoir donner à la structure des formes homothétiques aux modes plus hauts. $\square$

6.2.3.2 Méthodes approchées pour l'estimation des propriétés modales

Méthode basée sur le quotient de Rayleigh Le *quotient de Rayleigh* d'un vecteur $\mathbf{y}$ quelconque est défini par

$$R(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}}. \quad (6.2.94)$$

Une propriété importante de cette fonction est que le quotient de Rayleigh d'un mode propre est égal au carré de la pulsation

$$R(\phi_i) = \frac{\phi_i^T \mathbf{K} \phi_i}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} = \omega_i^2. \quad (6.2.95)$$

Ceci est évident lorsqu'on regarde (6.2.85). En effet, puisque $\phi_i^T \mathbf{K} \phi_i = K_{i,i}^*$ et $\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = M_{i,i}^*$, on voit donc que $\omega_i^2 = K_{i,i}^*/M_{i,i}^*$.

Admettons maintenant que $\mathbf{y}$ soit un vecteur proche du vecteur propre ϕ_i , et donc

$$\mathbf{y} = \phi_i + \epsilon \mathbf{z} \quad (6.2.96)$$

où ϵ est un petit paramètre. Le résidu $\mathbf{z}$ peut s'exprimer par une combinaison linéaire des autres vecteurs propres

$$\mathbf{z} = \sum_{i \neq j} \alpha_j \phi_j. \quad (6.2.97)$$

Le quotient de Rayleigh de ce vecteur vaut

$$R(\mathbf{y}) = \frac{\left(\phi_i^T + \epsilon \sum_{i \neq j} \alpha_j \phi_j^T \right) \mathbf{K} \left(\phi_i + \epsilon \sum_{i \neq j} \alpha_j \phi_j \right)}{\left(\phi_i^T + \epsilon \sum_{i \neq j} \alpha_j \phi_j^T \right) \mathbf{M} \left(\phi_i + \epsilon \sum_{i \neq j} \alpha_j \phi_j \right)}. \quad (6.2.98)$$

Compte tenu des propriétés d'orthogonalité via les matrices de masse et de raideur, on obtient

$$R(\mathbf{y}) = \frac{\phi_i^T \mathbf{K} \phi_i + \epsilon^2 \sum_{i \neq j} \alpha_j^2 (\phi_j^T \mathbf{K} \phi_j)}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i + \epsilon^2 \sum_{i \neq j} \alpha_j^2 (\phi_j^T \mathbf{M} \phi_j)}. \quad (6.2.99)$$

On définit

$$\beta_{ij}^2 = \alpha_i^2 \frac{\phi_j^T \mathbf{M} \phi_j}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} \quad (6.2.100)$$

qui représente¹⁷ la façon dont le mode j est normalisé par rapport au mode i . En divisant le numérateur et le dénominateur de (6.2.99) par $\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i$, on obtient

$$R(\mathbf{y}) = \frac{\omega_i^2 + \epsilon^2 \sum_{i \neq j} \beta_{ij}^2 \omega_j^2}{1 + \epsilon^2 \sum_{i \neq j} \beta_{ij}^2}. \quad (6.2.101)$$

Sur base du développement en série de Taylor suivant

$$\frac{a_1 + b_1 \epsilon^2}{1 + b_2 \epsilon^2} = a_1 + (b_1 - a_1 b_2) \epsilon^2 + o(\epsilon^4), \quad (6.2.102)$$

on trouve que

$$R(\mathbf{y}) = \omega_i^2 + \sum_{i \neq j} \beta_{ij}^2 (\omega_j^2 - \omega_i^2) \epsilon^2 + o(\epsilon^4), \quad (6.2.103)$$

17. si les modes sont normalisés de façon à avoir une matrice généralisée identité, $\beta_{ij} = \alpha_i, \forall j$.

ce qui montre donc que si $\mathbf{y}$ est une perturbation de ϕ_i d'ordre ϵ , alors $R(\mathbf{y})$ donne une estimation de $R(\phi_i) = \omega_i^2$ à l'ordre ϵ^2 . La pulsation propre ω_i est donc estimée à l'ordre ϵ . En particulier, si on choisit $i = 1$, on peut voir que toutes les contributions d'ordre ϵ^2 dans $R(\mathbf{y})$ sont positives, ce qui mène à dire que, si $\mathbf{y}$ est une perturbation de ϕ_1 d'ordre ϵ , $R(\mathbf{y})$ donne une estimation *par excès* de ω_1^2 .

Cette propriété est très utile pour déterminer facilement les fréquences propres d'une structure pour laquelle une modélisation précise n'est pas envisageable.

Dans le cas du portique à 3 étages, on pourrait par exemple estimer la première fréquence propre en admettant que le premier mode propre soit

$$\mathbf{y} = \langle 1/3 \quad 2/3 \quad 1 \rangle^T, \quad (6.2.104)$$

ce que l'on peut facilement deviner avec un peu d'expérience. Sur base des matrices de masse et de raideur établies, on peut calculer le coefficient de Rayleigh à l'aide de la relation (6.2.94)

$$R(\mathbf{y}) = 127.8 \text{ (rad/s)}^2. \quad (6.2.105)$$

L'estimation de la fréquence propre est donc

$$f_{1, \text{estimée}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{R(\mathbf{y})} = 1.80 \text{ Hz} \quad (6.2.106)$$

qui n'est pas si éloignée de la fréquence propre exacte, $f_1 = 1.66 \text{ Hz}$, qui correspond à une forme de mode significativement différente, $\phi_1 = \langle 0.5 \quad 0.866 \quad 1 \rangle^T$. $\square$

Solution itérative du problème aux valeurs propres La pulsation et le mode fondamentaux satisfont

$$\mathbf{K} \left(\frac{1}{\omega_1^2} \phi_1 \right) = \mathbf{M} \phi_1. \quad (6.2.107)$$

On peut faire l'analogie entre cette relation et celle d'une analyse statique

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{p}. \quad (6.2.108)$$

Cette analogie montre que $\frac{1}{\omega_1^2} \phi_1$ représente le déplacement statique sous l'effet de la charge¹⁸ $\mathbf{M} \phi_1$. Donc, si on normalise ϕ_1 à un maximum unitaire, $\frac{1}{\omega_1^2}$ apparaît comme la déflexion statique maximale sous la charge $\mathbf{M} \phi_1$. De plus, le mode propre fondamental ϕ_1 représente cette déformée statique. Une autre façon de voir les choses est de dire que les efforts intérieurs $\mathbf{K} \phi_1$ équilibrent les efforts d'inertie $\omega_1^2 \mathbf{M} \phi_1$ lorsque la structure vibre librement dans son mode fondamental.

Résoudre le problème aux valeurs propres (6.2.107) consiste donc à trouver la forme ϕ_1 qui correspond à la fois à la déformée (normalisée) de la structure et à la distribution de charge utilisée pour calculer cette déformée statique. Plutôt que de résoudre

18. il ne s'agit pas réellement d'une charge puisqu'elle a les dimensions d'une masse. Pas question ceci dit de changer cette relation : la méthode ne fonctionne que si la sollicitation est exprimée en *kg*.

ce problème complexe, on peut essayer de donner une suite de solutions approchées en procédant par itérations.

On commence en donnant une forme approchée du mode propre $\phi_1^{(0)}$ (choisie arbitrairement, mais avec un peu de bon sens tout de même) qui est utilisée pour obtenir une première estimation $\mathbf{M} \phi_1^{(0)}$ du chargement statique. Il n'est pas nécessaire a priori que $\phi_1^{(0)}$ satisfasse les conditions d'appuis, mais c'est naturellement un plus. On peut alors calculer des valeurs approchées de la pulsation fondamentale $\omega_1^{(1)}$ et du mode propre fondamental $\phi_1^{(1)}$ en écrivant

$$\frac{1}{\left(\omega_1^{(1)}\right)^2} \mathbf{K} \phi_1^{(1)} = \mathbf{M} \phi_1^{(0)}. \quad (6.2.109)$$

Résoudre cette équation est immédiat puisqu'il s'agit d'une simple analyse statique linéaire. Si nécessaire, il est possible d'utiliser cette première estimation du mode fondamental pour obtenir une meilleure estimation des caractéristiques fondamentales

$$\frac{1}{\left(\omega_1^{(2)}\right)^2} \mathbf{K} \phi_1^{(2)} = \mathbf{M} \phi_1^{(1)}. \quad (6.2.110)$$

En pratique, le résultat de la première itération est souvent déjà largement suffisant. Ceci est illustré dans la suite à l'aide de quelques exemples.

On peut appliquer cette méthode au portique à trois étages, en partant de la même estimation du mode fondamental que précédemment

$$\phi_1^{(0)} = \langle 1/3 \quad 2/3 \quad 1 \rangle^T, \quad (6.2.111)$$

La résolution de (6.2.109) permet d'obtenir

$$\omega_1^{(1)} = 11.3 \text{ rad/s} \Rightarrow f_1^{(1)} = 1.80 \text{ Hz} \quad (6.2.112)$$

$$\phi_1^{(1)} = \langle 0.47 \quad 0.84 \quad 1.00 \rangle^T \quad (6.2.113)$$

qui sont déjà assez proches de la solution exacte du problème aux valeurs propres ($f_1 = 1.66 \text{ Hz}$ et $\phi_1 = \langle 0.5 \quad 0.866 \quad 1 \rangle^T$). Si on applique la seconde correction, en considérant maintenant que les forces d'inertie sont distribuées comme $\phi_1^{(1)}$, on obtient, par solution de (6.2.110)

$$\omega_1^{(2)} = 10.5 \text{ rad/s} \Rightarrow f_1^{(2)} = 1.67 \text{ Hz} \quad (6.2.114)$$

$$\phi_1^{(2)} = \langle 0.496 \quad 0.863 \quad 1.00 \rangle^T \quad (6.2.115)$$

qui forment une excellente estimation des valeurs exactes. $\square$

Comme second exemple, on peut considérer celui d'une poutre sur deux appuis, de portée L , raideur EI et masse linéique μ . Cet exemple nous montre qu'il n'est pas nécessaire de

connaître les expressions de **K** et **M** pour pouvoir appliquer cette méthode. Au chapitre 7, nous verrons que la pulsation fondamentale s'exprime rigoureusement par

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = \frac{9.87}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}. \quad (6.2.116)$$

Admettons que $\phi_1^{(0)}(x) = 1$, ce qui est peu opportun puisque cette fonction ne satisfait pas les conditions d'appui. Cette fonction peut cependant être utilisée pour la méthode puisqu'elle est normée à un maximum unitaire. L'interprétation de (6.2.109) au sens continu montre alors que $\frac{1}{(\omega_1^{(1)})^2} \phi_1^{(1)}(x)$ représente la déformée statique sous une masse uniformément répartie puisque $\mu \phi_1^{(0)}(x) = \mu = \text{cst}$. Cette déformée est obtenue en résolvant l'équation de l'élastique

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = \mu \quad (6.2.117)$$

où le second membre est bien une masse et non une force, de façon à obtenir le résultat bien connu

$$v = \frac{1}{(\omega_1^{(1)})^2} \phi_1^{(1)}(x) = \frac{5\mu L^4}{384EI} \frac{16}{5} \left(\frac{x^4}{L^4} - 2\frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right). \quad (6.2.118)$$

Puisque la fonction $\phi_1^{(1)}(x)$ doit être normée à un maximum unitaire, on peut donc écrire

$$\begin{cases} \frac{1}{(\omega_1^{(1)})^2} = \frac{5\mu L^4}{384EI} & \rightarrow & \omega_1^{(1)} = \frac{8.76}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \\ \phi_1^{(1)}(x) = \frac{16}{5} \left(\frac{x^4}{L^4} - 2\frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right). \end{cases} \quad (6.2.119)$$

Ce premier résultat n'est pas trop loin de la solution exacte $\frac{9.87}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$. Aussi on pourrait vérifier que la forme modale obtenue n'est pas trop éloignée de la forme modale exacte (un sinus à une demi onde). A nouveau, on peut utiliser cette première estimation de forme modale pour raffiner les approximations obtenues. En effet, en résolvant

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{16\mu}{5} \left(\frac{x^4}{L^4} - 2\frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right) \quad (6.2.120)$$

on obtient

$$v = \frac{1}{(\omega_1^{(2)})^2} \phi_1^{(2)}(x) = \frac{277\mu L^4}{26880EI} \frac{256}{1385} \left(17\frac{x}{L} - 28\frac{x^3}{L^3} + 14\frac{x^5}{L^5} - 4\frac{x^7}{L^7} + \frac{x^8}{L^8} \right), \quad (6.2.121)$$

soit

$$\begin{cases} \frac{1}{(\omega_1^{(2)})^2} = \frac{277\mu L^4}{26880EI} & \rightarrow & \omega_1^{(2)} = \frac{9.85}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \\ \phi_1^{(2)}(x) = \frac{256}{1385} \left(17\frac{x}{L} - 28\frac{x^3}{L^3} + 14\frac{x^5}{L^5} - 4\frac{x^7}{L^7} + \frac{x^8}{L^8} \right) \end{cases} \quad (6.2.122)$$

qui sont très proches de la solution exacte. $\square$

On pourrait aussi estimer la seconde fréquence propre et le mode associé pour la poutre sur deux appuis simples. Rigoureusement, la seconde pulsation s'écrit

$$\omega_2 = \frac{4\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = \frac{39.5}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (6.2.123)$$

et la forme modale correspondante est une sinusoïde à deux demi-ondes. Comme estimation de la forme modale, nous allons considérer la fonction $\phi_2^{(0)}(x) = 1$ sur $[0; L/2]$ et $\phi_2^{(0)}(x) = -1$ sur $[L/2; L]$, qui est un candidat honnête pour approcher une fonction positive sur la première demi-travée et négative sur l'autre. A nouveau, la pulsation fondamentale et le mode propre correspondant sont estimés à partir de l'équation de l'élastique

$$\begin{cases} EI \frac{d^4 v_1}{dx^4} = \mu & \text{pour } x \in [0; \frac{L}{2}] \\ EI \frac{d^4 v_2}{dx^4} = -\mu & \text{pour } x \in [\frac{L}{2}; L] \end{cases} \quad (6.2.124)$$

avec comme conditions limites $v_1(0) = 0$, $v_1''(0) = 0$, $v_2(L) = 0$, $v_2''(L) = 0$ et les quatre conditions sur la continuité C_3 de v_1 et v_2 en $x = L/2$. Après quelques développements, on obtient

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{5\mu L^4}{6144EI} \left(\frac{32x}{5L} - \frac{256x^3}{5L^3} + \frac{256x^4}{5L^4} \right) \\ v_2 &= \frac{5\mu L^4}{6144EI} \left(\frac{32}{5} - \frac{288x}{5L} + \frac{768x^2}{5L^2} - \frac{768x^3}{5L^3} + \frac{256x^4}{5L^4} \right). \end{aligned} \quad (6.2.125)$$

On peut vérifier que les fonctions entre parenthèses sont bien normées à un maximum unitaire, en valeur absolue. Elles représentent donc les expressions de $\phi_2^{(1)}$ sur $[0; L/2]$ et $[L/2; L]$ respectivement. Elles sont une très bonne approximation du sinus en deux demi-ondes. De plus, la pulsation propre est estimée par

$$\frac{1}{(\omega_2^{(1)})^2} = \frac{5\mu L^4}{6144EI} \rightarrow \omega_2^{(1)} = \frac{35.1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (6.2.126)$$

et est assez proche de la solution exacte. Une seconde itération serait laborieuse pour estimer plus précisément les caractéristiques du second mode propre, mais elle permettrait assurément d'améliorer le premier résultat obtenu. $\square$

En pratique, on s'arrête généralement à la première itération et on considère $\phi_i^{(0)}(x) = \pm 1$ comme estimation de la forme modale, le signe étant choisi en fonction de la forme modale que l'on espère approcher. En représentant par δ le déplacement maximal (en valeur absolue) obtenu sous ce chargement, la pulsation propre correspondant au mode investigué s'exprime alors par $\omega_i = 1/\sqrt{\delta}$.

6.2.3.3 Analyse en base modale

Maintenant que les caractéristiques modales de la structure ont été établies, nous allons voir comment ces caractéristiques et leurs propriétés pourront nous aider à réaliser l'analyse d'une structure.

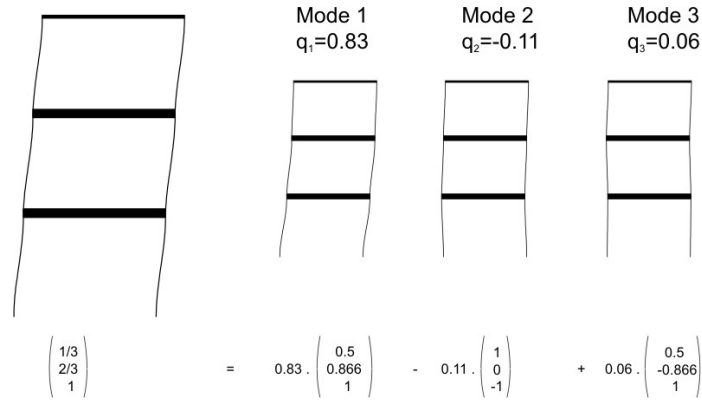


FIGURE 6.2.14 – Réponse du portique à trois étages calculée à l’aide de la méthode d’analyse dans le domaine temporel.

Projection des équations Les N modes propres d’une matrice de dimensions $N \times N$ forment une base de vecteurs linéairement indépendants. Ceci signifie donc qu’un vecteur $\mathbf{y}$ quelconque s’exprime de façon unique comme combinaison linéaire de ces N vecteurs indépendants

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^N q_i \phi_i = \Phi \mathbf{q} \quad (6.2.127)$$

où Φ est la matrice $N \times N$ regroupant tous les vecteurs propres. Donc,

$$\mathbf{q} = \Phi^{-1} \mathbf{y}. \quad (6.2.128)$$

Par exemple, la décomposition dans la base des modes propres du vecteur $\mathbf{y} = \langle 1/3 \quad 2/3 \quad 1 \rangle^T$ est représentée à la figure 6.2.14. Ce vecteur $\mathbf{y}$ a une forte composante dans le premier mode (0.83) et moindre dans les deux suivants. $\square$

Cette idée de décomposition d’un vecteur dans la base des modes propres peut être étendue à la solution de l’équation du mouvement, en disant qu’une telle décomposition existe à chaque instant t

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i = \Phi \mathbf{q}(t). \quad (6.2.129)$$

Le vecteur $\mathbf{q}(t)$ contient donc les coefficients de la combinaison des modes propres. Chacun de ses éléments est une fonction du temps. Lorsque les modes propres sont normés à un maximum unitaire, ces coefficients ont la signification d’amplitudes. Ce sont les *amplitudes modales*.

Nous venons d’introduire le changement de variable qui va permettre l’écriture de l’équation du mouvement dans la base modale. Grâce à la relation (6.2.129), nous

allons donc supprimer les inconnues $\mathbf{x}(t)$ et les remplacer par les nouvelles inconnues $\mathbf{q}(t)$. L'introduction de ce changement de variable dans l'équation du mouvement donne

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\Phi\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\Phi\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t). \quad (6.2.130)$$

Cette expression a toujours la même signification physique que précédemment : chacune des lignes de ce système d'équations traduit l'équilibre d'un noeud particulier de la structure. La seule différence, à ce stade, est que nous disons que l'équilibre est obtenu en donnant aux amplitudes modales les valeurs adéquates qui permettent de satisfaire l'équilibre, et non pas en fixant les déplacements nodaux.

La suite du raisonnement consiste à tirer parti du fait que les matrices généralisées $\mathbf{M}^* = \Phi^T \mathbf{M} \Phi$ et $\mathbf{K}^* = \Phi^T \mathbf{K} \Phi$ sont diagonales. On multiplie donc (6.2.130) par Φ^T de sorte à obtenir

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}(t) = \Phi^T \mathbf{p}(t),$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{q}(t) = \mathbf{p}^*(t) \quad (6.2.131)$$

où $\mathbf{p}^*(t) = \Phi^T \mathbf{p}(t)$ représentent les *forces généralisées*. On a projeté les équations du mouvement dans la base des modes propres. On n'écrit plus l'équilibre des noeuds de la structure, mais plutôt l'équilibre des déformées modales. Une équation du nouveau système traduit l'équilibre entre les efforts internes, d'amortissement, d'inertie et extérieurs lorsqu'on regarde la structure dans une forme strictement homothétique à un mode propre.

Les forces généralisées représentent bien une projection dans la base modale des forces appliquées aux noeuds. On les calcule à l'aide d'un produit scalaire (on parle donc de projection). Par exemple, la force généralisée dans le mode fondamental s'écrit

$$p_1^* = \phi_1^T \mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^N \phi_{i,1} p_i(t). \quad (6.2.132)$$

La force généralisée dans un mode est donc d'autant plus grande que les forces appliquées p_i ont le même signe que le mode propre à leurs points d'application.

Pour illustrer ceci, on peut calculer les forces généralisées dans le mode fondamental du portique à trois étages, pour les forces suivantes

$$F_A = \begin{Bmatrix} f(t) \\ f(t) \\ f(t) \end{Bmatrix}; \quad F_B = \begin{Bmatrix} f(t) \\ -f(t) \\ f(t) \end{Bmatrix}; \quad F_C = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.2.133)$$

Etant donné que le mode propre du mode fondamental vaut $\phi_1 = \langle 0.5, 0.866, 1.0 \rangle^T$, cf. (6.2.83), les forces généralisées correspondant à ces différents chargements valent

$$F_{1,A}^* = 2.366 f(t); \quad F_{1,B}^* = 0.634 f(t); \quad F_{1,C}^* = 0.5 f(t) \quad (6.2.134)$$

Il est évident que c'est le cas de charge A qui maximise la force généralisée dans le premier mode puisque les forces appliquées en chaque noeud sont en phase. On comprend aussi

naturellement que l'application de forces nodales évoluant en phase (chargement radial) favorise une réponse dans une forme semblable au premier mode. $\square$

Par propriété des modes propres, les matrices $\mathbf{K}^*$ et $\mathbf{M}^*$ intervenant dans l'équation du mouvement en base modale (6.2.131) sont diagonales. Quant à la matrice d'amortissement généralisée $\mathbf{C}^*$, on ne peut pas annoncer la même propriété en toute généralité. Etant donné que l'on ne possède généralement que peu d'information sur l'amortissement dans la structure, il est généralement admis de donner à $\mathbf{C}^*$ une forme simple¹⁹. On lui donne donc une forme diagonale, ce qui simplifie la résolution du système d'équations différentielles. En effet, le système

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{q}(t) = \mathbf{p}^*(t)$$

se résume donc à une juxtaposition d'équations indépendantes les unes des autres (un système découplé). Une équation générique s'écrit

$$M_{i,i}^* \ddot{q}_i(t) + C_{i,i}^* \dot{q}_i(t) + K_{i,i}^* q_i(t) = p_i^*(t) \quad (6.2.135)$$

ou encore

$$\ddot{q}_i(t) + 2\omega_i \xi_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{p_i^*(t)}{M_{i,i}^*}. \quad (6.2.136)$$

Cette relation est précisément l'équation canonique du système à un degré de liberté. Cette équation peut donc être résolue avec les techniques étudiées précédemment (temporel avec Duhamel, fréquentiel, temporel pas-à-pas). L'opération est répétée pour chaque mode (N fois au total donc). Quelque soit la méthode de résolution choisie, les amplitudes modales q_i dans chacun des modes peuvent être déterminées indépendamment les unes des autres. L'analyse en base modale revient donc à résoudre N équations différentielles à une inconnue plutôt qu'un système d'équations différentielles à N inconnues.

On revient ensuite aux déplacements des noeuds de la structure à l'aide du changement de variables (6.2.129) où les $q_i(t)$ et ϕ_i sont maintenant tous connus, et ceci clôturera l'analyse dynamique de la structure à plusieurs degrés de liberté.

La figure 6.2.15 représente les forces généralisées dans les trois modes propres. Etant donné que $p_1 = f(t)$, $p_2 = 0$ et $p_3 = 0.1 f(t)$, les forces généralisées s'expriment par

$$\begin{aligned} p_1^* &= 0.5p_1 + p_3 = 0.6f(t) \\ p_2^* &= p_1 - p_3 = 0.9f(t) \\ p_3^* &= 0.5p_1 + p_3 = 0.6f(t) \end{aligned} \quad (6.2.137)$$

où $f(t) = 10^6 \sqrt{2\pi} t e^{-50t}$. Ce n'est pas parce que le second étage n'est pas sollicité que la seconde force généralisée est nulle (la preuve!). Les modes propres intègrent

19. Attention, on ne parle ici que de l'amortissement structural. Ceci n'est pas d'application pour l'amortissement provenant de pistons ou de l'amortissement aérodynamique pour lesquels des modèles précis existent et doivent donc être considérés. Ceci sort du cadre du cours.

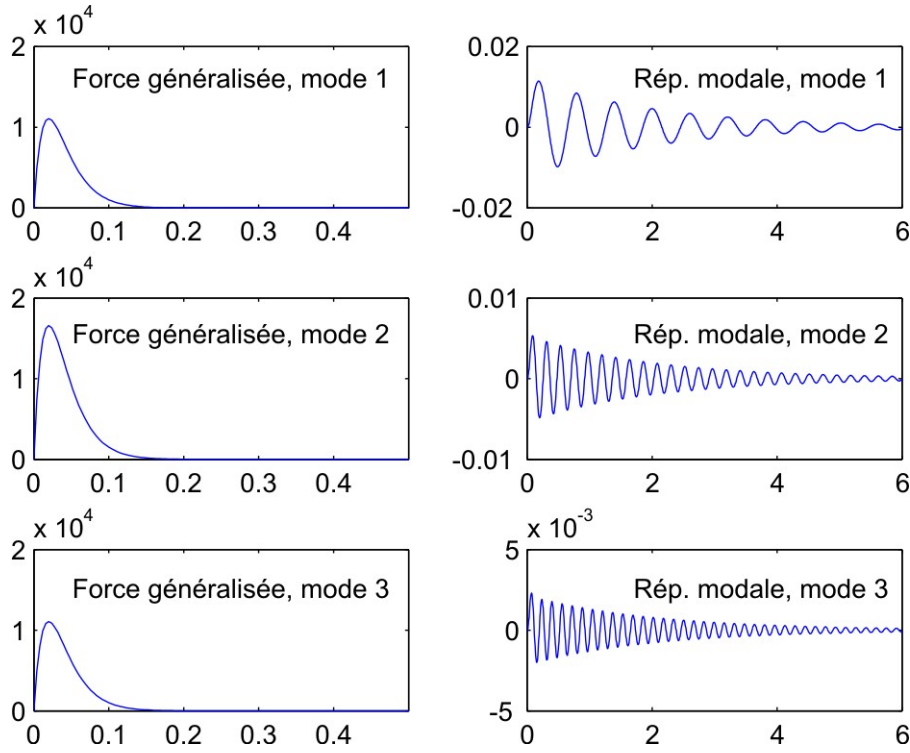


FIGURE 6.2.15 – Forces généralisées et amplitudes modales pour le portique à trois étages.

le comportement global du bâtiment. Il n'y a donc aucune correspondance entre le noeud i et le mode i . En réalité, le type de chargement assez particulier qui est considéré dans cet exemple est même tel que la force généralisée dans le second mode propre soit la plus importante. Avec un peu d'habitude, on peut facilement prévoir ce type de résultat. Il suffit de regarder dans quel(s) mode(s) les formes modales et les forces appliquées sont bien corrélées. En l'occurrence ici, la force sur le premier étage est importante et c'est dans le second mode que le déplacement du premier étage est le plus important.

La figure 6.2.15 représente également les réponses dans chacun des modes (les amplitudes modales q_i). Il s'agit à chaque fois de la réponse d'un oscillateur simple soumis à une charge de courte durée. Etant donné que la sollicitation est très courte par rapport à la période propre des modes 1, 2 et 3, la réponse s'apparente à une réponse impulsionnelle. On peut aussi constater que les périodes d'oscillation correspondent bien aux périodes propres calculées précédemment, cf. (6.2.84).

Lorsque les amplitudes modales $q_i(t)$ sont calculées, les réponses nodales peuvent être recalculées à l'aide du changement de variables (6.2.129). On obtient alors

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.5q_1(t) + q_2(t) + 0.5q_3(t) \\ x_2(t) &= 0.866q_1(t) - 0.866q_3(t) \\ x_3(t) &= q_1(t) - q_2(t) + q_3(t) \end{aligned} \quad (6.2.138)$$

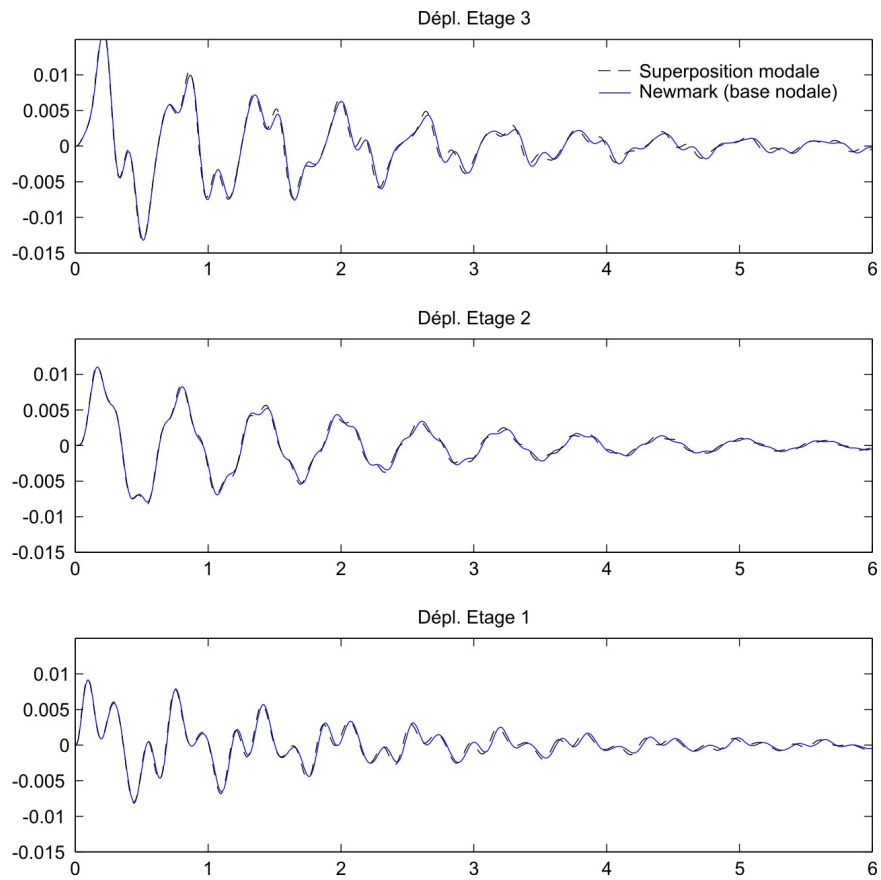


FIGURE 6.2.16 – Réponse dynamique calculée pour chacun des étages à l’aide de l’analyse en base modale, et comparaison avec le résultat de l’analyse en base nodale.

qui sont représentés à la figure 6.2.16. Les résultats de l'analyse en base nodale ont également été reportés sur cette figure de façon à simplifier la comparaison. La concordance est très bonne. La seule petite discordance vient du choix d'un pas de temps différent pour les deux méthodes. $\square$

L'amortissement structural Dans une analyse en base modale, faute d'information précise sur l'amortissement structural, on admet généralement que la matrice d'amortissement généralisée est diagonale. En outre, on sait que l'amortissement structural est généralement déterminé à l'aide d'un coefficient d'amortissement (sans dimensions) qui dépend du matériau constitutif de la structure. Etant donné que les équations sont découplées et qu'il faut résoudre une équation comme (6.2.136), la seule connaissance du coefficient d'amortissement suffit et on voit qu'il n'est pas nécessaire même d'établir la matrice d'amortissement généralisé dans cette approche. Eventuellement, dans cette approche modale, on pourrait attribuer facilement un coefficient d'amortissement relatif différent pour chaque mode, à condition de pouvoir justifier et quantifier les différences.

Dans l'approche en base nodale, nous avons vu qu'il était nécessaire de construire une matrice d'amortissement (pour pouvoir, par exemple, appliquer la méthode de Newmark-MDDL). Par souci de cohérence, il est important de construire une matrice d'amortissement qui, si on la projetait en base modale, donnerait une matrice d'amortissement généralisée diagonale. Une des méthodes (probablement la plus utilisée) consiste à exprimer la matrice d'amortissement comme une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (6.2.139)$$

de sorte que la matrice d'amortissement généralisé

$$\mathbf{C}^* = \Phi^T \mathbf{C} \Phi = \alpha \mathbf{M}^* + \beta \mathbf{K}^* \quad (6.2.140)$$

soit effectivement diagonale puisqu'elle s'exprime par une combinaison linéaire de $\mathbf{M}^*$ et $\mathbf{K}^*$ qui, elles, sont diagonales.

Ce choix a un impact sur l'évolution des coefficients d'amortissement modaux ξ_i . En effet, ils sont calculés par

$$\xi_i = \frac{C_{i,i}^*}{2M_{i,i}^* \omega_i} = \frac{\alpha M_{i,i}^* + \beta K_{i,i}^*}{2M_{i,i}^* \omega_i} = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2}. \quad (6.2.141)$$

Cette relation montre que, dès que l'on suppose que $\mathbf{C}$ prend la forme (6.2.139), les coefficients d'amortissement modaux s'alignent sur la combinaison d'une droite et d'une hyperbole. Dans cette formulation, il est donc par exemple impossible que tous les coefficients d'amortissement prennent la même valeur, alors que, dans l'approche

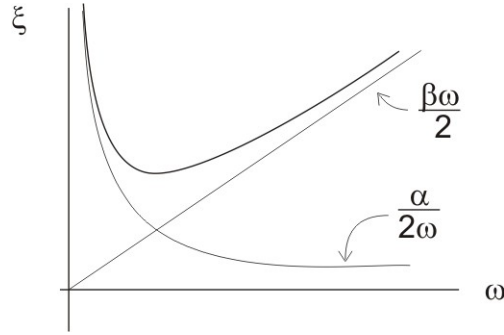


FIGURE 6.2.17 – Réponse du portique à trois étages calculée à l'aide de la méthode d'analyse dans le domaine temporel.

modale, il était possible de fixer indépendamment un coefficient d'amortissement pour chaque mode.

En pratique, les coefficients α et β sont calculés de façon à fixer le taux d'amortissement à une valeur choisie pour les deux modes i et j les plus représentatifs de la réponse

$$\begin{cases} \xi_i &= \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \\ \xi_j &= \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta\omega_j}{2} \end{cases} \quad (6.2.142)$$

à deux valeurs ξ_i et ξ_j données. Le plus souvent $\xi_i = \xi_j = \xi$ et i et j représentent les deux premiers modes propres pour que, au moins pour ceux-là, le coefficient d'amortissement soit bien estimé. L'inversion de ce système de deux équations à deux inconnues α et β donne

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} (\omega_i\xi_j - \omega_j\xi_i) \\ \beta &= \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \left(\frac{\xi_i}{\omega_j} - \frac{\xi_j}{\omega_i} \right). \end{cases} \quad (6.2.143)$$

Pour les modes autres que les modes i et j , on ne peut rien régler. Ils se verront attribuer un coefficient d'amortissement qui est calculable en fonction des valeurs obtenues pour α et β . Comme annoncé précédemment, la construction d'une matrice d'amortissement n'est utile que lorsque la résolution a lieu en base nodale.

Il existe des situations où un amortissement complémentaire doit être ajouté à l'amortissement structural : par exemple lorsque des pistons visqueux sont installés dans la structure (un véhicule amorti qui roule sur un tablier de pont, un TMD, des dispositifs anti-choc ou parasismiques, etc.), ou plus simplement lorsque la structure est soumise à l'effet du vent. Dans ces cas, il est nécessaire d'ajouter une (des) matrice(s) d'amortissement complémentaire(s). On obtient alors une matrice d'amortissement plus complète. Cette matrice plus complète peut naturellement être utilisée dans le cadre d'une analyse en base nodale pour laquelle aucune restriction n'a été formulée.

Par contre si l'analyse doit être réalisée en base modale, on perd une grosse partie du bénéfice du changement de variable puisque, de manière générale, il n'y a aucune raison pour que la matrice d'amortissement généralisée reste diagonale. Dans ce cas, deux “solutions” extrêmes sont souvent rencontrées

- soit considérer un système couplé (cf. résolution dans la base nodale : résolution d'un système couplé),
- soit négliger les éléments non-diagonaux de façon à retrouver un système non couplé.

Superposition modale La projection en base modale mène à résoudre

$$\ddot{q}_i(t) + 2\omega_i\xi_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{p_i^*(t)}{M_{i,i}^*} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N. \quad (6.2.144)$$

pour chacun des modes, a priori. Dans l'exemple précédent, nous avons pu constater que la réponse dans le troisième mode était significativement plus faible que celles des deux premiers modes. En réalité, on peut montrer que les modes les plus hauts (en fréquence) participent souvent moins à la réponse. Nous raisonnons dans la suite avec l'intégrale de Duhamel. Dans ce formalisme, la réponse dans un mode s'écrit

$$q_i(t) = \frac{1}{M_{i,i}^*\omega_{d,i}} \int_0^t p_i^*(\tau) e^{-\xi\omega_1(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau. \quad (6.2.145)$$

Dans le cadre où les modes propres sont normés à un maximum unitaire, les forces généralisées dans tous les modes sont du même ordre de grandeur. Il en est de même des masses généralisées. La solution de Duhamel montre donc que la solution dans un mode est (grossièrement) inversement proportionnelle à ω_i . Au lieu de résoudre les N équations différentielles à une inconnue pour chacun des modes, on se limite donc souvent à n'étudier que la réponse dans les M premiers modes propres et donc ainsi négliger les modes plus hauts pour lesquels $\omega_d \gg$. On écrit alors

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^M q_i(t) \phi_i = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (6.2.146)$$

où Φ représente maintenant une matrice rectangulaire (tronquée) de dimensions $N \times M$ et $\mathbf{q}$ est le vecteur des M amplitudes modales conservées. L'utilisation de cette méthode appelée superposition modale, met en évidence deux avantages majeurs de l'analyse en base modale : le découplage des équations du mouvement et la réduction (souvent très importante !) du nombre d'inconnues du problème.

Pour une structure symétrique, les modes propres se présentent souvent par alternance entre des modes pairs (symétriques) et impairs (anti-symétriques). Lorsque le chargement est symétrique, on doit s'attendre à ce que la réponse soit symétrique, et donc à ce que la réponse dans les modes impairs soit nulle. En plus de négliger les modes les plus hauts (par le raisonnement précédent), on peut aussi supprimer de

l'analyse une série de modes dont on sait qu'il n'apporteront rien à la réponse. De façon toute à fait générale, la méthode de la superposition modale consiste donc à ne conserver que la liste des $M \ll N$ modes qui participent à la réponse dynamique de la structure, qui ne sont donc pas nécessairement les M premiers.

Souvent, le choix de *la* liste des modes à conserver n'est pas évidente à deviner, du moins *a priori*. Cela relève aussi probablement de l'expérience, mais quelques remarques générales peuvent être formulées. Admettons que les forces appliquées sur la structure se trouvent dans une gamme de fréquences limitées $[0, f_{soll,max}]$, ce qui est souvent le cas dans le domaine du génie civil. Pour toutes les sollicitations déterministes, c'est naturellement satisfait (un piéton qui marche, un sportif qui court, un train qui roule). Quant aux sollicitations aléatoires comme le vent, les séismes, la houle, l'observation de ces phénomènes montre que le contenu fréquentiel est significativement décroissant aux hautes fréquences et peut être négligé à partir d'une fréquence $f_{soll,max}$. Si les forces (nodales) appliquées sur la structure se trouvent dans cette gamme de fréquences, il en est alors de même pour les forces généralisées. En se basant sur l'analyse dans le domaine fréquentiel pour laquelle la réponse s'exprime par

$$\mathcal{Q}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) \mathcal{P}^*(\Omega), \quad (6.2.147)$$

on peut voir qu'il convient de faire le tri sur les modes en négligeant ceux pour lesquels $\mathcal{H}(\Omega) \mathcal{P}^*(\Omega)$ est petit. On peut donc négliger les modes pour lesquels

- soit $\mathcal{H}(\Omega)$ est petit dans la zone $[0, f_{soll,max}]$; ce sont tous les modes qui répondent de façon quasi-statique et pour lesquels $f_{nat} \gtrsim 5f_{soll,max}$. Etant donné que la suite des raideurs modales $K_{i,i}^*$ est décroissante, ces modes aux plus hautes fréquences ont une amplitude très faible (réponse quasi-statique très raide). C'est l'argument que nous avons fait valoir précédemment avec les développements basés sur l'intégrale de Duhamel;
- soit la force généralisée $\mathcal{P}^*(\Omega)$ est petite pour le chargement et le mode considérés. C'est l'argument que nous avons fait valoir pour la poutre sur deux appuis avec un chargement symétrique. Ceci est également illustré à la figure 6.2.18 pour l'exemple du portique à trois étages. Plusieurs distributions de forces nodales sont envisagées et les forces généralisées correspondantes sont présentées. A cette figure l'exemple 3 est celui du chargement que nous avons étudié; les exemples 1 et 2 sont deux exemples de charges qui n'engendrent aucune sollicitation (et donc réponse) dans le mode 2.

On peut également laisser de côté des modes dont la réponse n'est pas négligeable, c'est-à-dire que $q_i(t)$ n'est pas négligeable, mais qui ne présentent pas d'effet sur la grandeur investiguée. Par exemple, pour le portique à trois étages, si on ne s'intéresse qu'au déplacement du second étage, il n'est pas nécessaire de calculer la réponse du second mode (quelque soient les forces appliquées) puisque ce mode ne participe pas à la réponse de l'étage intermédiaire.

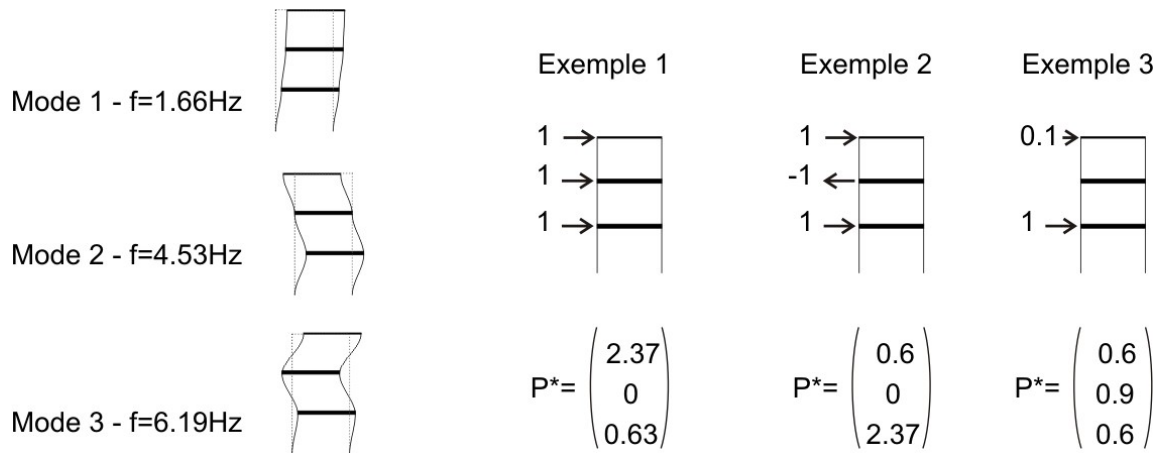


FIGURE 6.2.18 – Exemples de distributions de forces nodales et forces généralisées correspondantes.

La figure 6.2.19 représente les réponses obtenues pour chaque étage en ne conservant qu'un mode ($M = 1$) ou en ne conservant que deux modes ($M = 2$). Manifestement, l'option $M = 1$ suffit à représenter correctement la réponse du second étage et $M = 2$ suffit à représenter la réponse des étages 1 et 3. Ceci est conforme aux observations et discussions formulées jusqu'ici.

Accélération modale -

6.2.3.4 Analyse dans d'autres bases

-

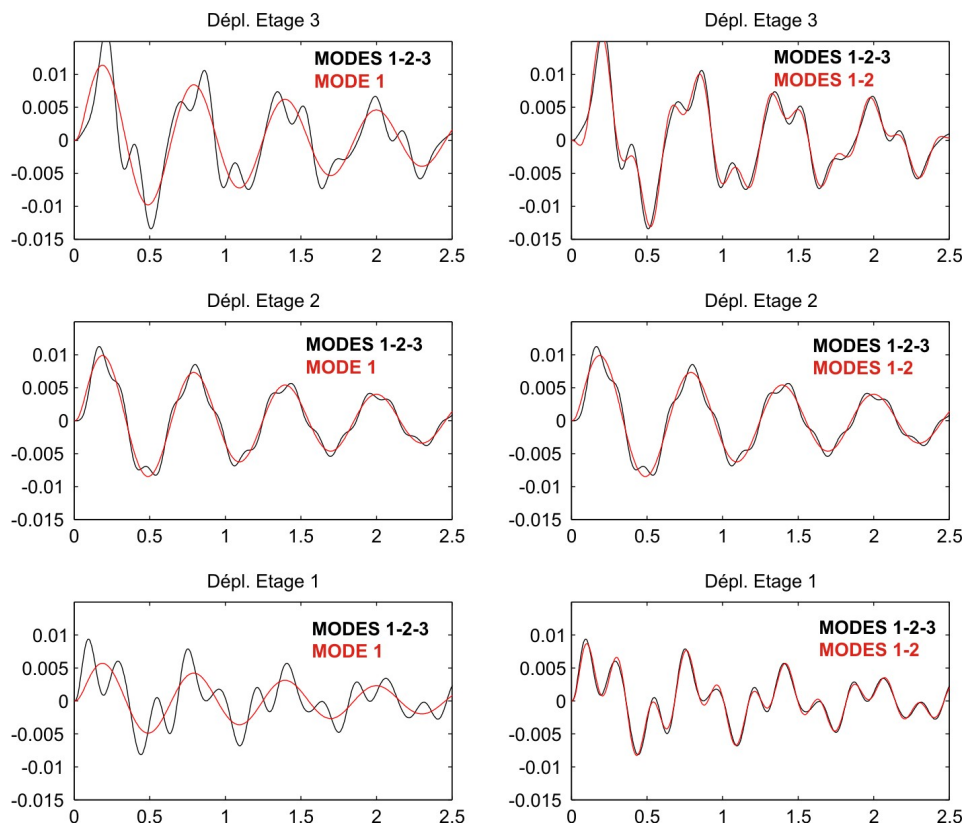


FIGURE 6.2.19 – Résultats de la superposition modale en ne conservant qu'un mode (à gauche) ou que deux modes (à droite).

Chapitre 7

Dynamique des systèmes continus

7.1 Equation du mouvement

Dans le cadre des vibrations transversales des poutres, l'équilibre entre les forces d'inertie, les efforts internes (effort tranchant et moment de flexion) et les efforts extérieurs appliqués mènent à l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = p(x, t). \quad (7.1.1)$$

Plutôt que d'avoir recours à la méthode des éléments finis pour numériser cette équation, il est possible de projeter analytiquement cette équation dans sa base modale¹. La démarche analytique est naturellement un peu plus complexe que le formalisme systématique de la méthode aux éléments finis mais ce prix à payer permet d'éviter une série de biais apportés par la discrétisation de la méthode aux éléments finis. Conceptuellement, on peut admettre ceci en se disant que passer directement dans la base modale à l'aide de développements analytiques doit probablement être plus "sain" que de (i) discrétiser la structure à l'aide d'éléments finis (ii) puis utiliser une seconde approche numérique (!) pour calculer les valeurs et formes propres.

L'objectif de cette section consiste donc à repousser au plus loin l'utilisation de méthodes numériques. La présentation s'articule essentiellement autour de l'établissement des caractéristiques propres de la structure étudiée, puisque la solution des équations modales découplées fait appel à des notions qui ont déjà été débattues lors de l'étude du système à un degré de liberté.

7.2 Modes propres

Exactement comme des modes propres et fréquences propres peuvent être définis pour un système discret, nous allons calculer les modes propres du système continu.

1. que nous avons également appelée ensemble de fonctions propres

Pour ce faire, on recherche les solutions de l'équation du mouvement (7.1.1) qui s'écrivent sous une forme à variables séparées

$$v(x, t) = \Phi(x) q(t) \quad (7.2.1)$$

et on considère le système non sollicité, c'est-à-dire $p(x, t) = 0$. L'introduction de cette solution particulière dans l'équation du mouvement donne

$$\Phi(x) \ddot{q}(t) + \frac{EI}{\mu} \Phi''''(x) q(t) = 0 \quad (7.2.2)$$

où le symbole $\dot{}$ représente une dérivée par rapport au temps t et le symbole $\prime$ représente une dérivée par rapport à x . On peut réécrire la relation précédente sous la forme

$$\frac{EI}{\mu} \frac{\Phi''''(x)}{\Phi(x)} = -\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} \quad (7.2.3)$$

en faisant apparaître une fonction du temps au membre de gauche et une fonction de l'abscisse curviligne x au membre de droite. Pour les mêmes raisons que celles évoquées lors de l'étude de structures discrètes (cf p. 130), la seule façon de satisfaire cette équation est que ses deux membres soient égaux à une valeur constante, soit, par exemple

$$\frac{EI}{\mu} \frac{\Phi''''(x)}{\Phi(x)} = -\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \omega^2. \quad (7.2.4)$$

Cette valeur pourrait valoir a priori n'importe quoi, tant que les deux relations sont satisfaites. On peut déjà deviner que cette constante ne peut prendre que certaines valeurs bien déterminées (mais il en existe une infinité) qui sont associées à des modes propres. Les *modes propres* $\Phi(x)$, appelés aussi *formes modales* (ce sont bel et bien des formes) s'obtiennent donc en résolvant

$$\Phi''''(x) - \frac{\mu\omega^2}{EI} \Phi(x) = 0, \quad (7.2.5)$$

alors que l'évolution au cours du temps des amplitudes $q(t)$ s'obtient en résolvant

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (7.2.6)$$

ce qui montre que, lorsque la poutre (non sollicitée!) vibre dans un mode propre, elle le fait avec une amplitude variant de façon sinusoïdale. Aussi l'interprétation de la variable ω introduite innocemment ci-avant est maintenant claire : il s'agit de la pulsation de vibration.

La solution générale de (7.2.5) est

$$\Phi(x) = A \sin kx + B \cos kx + C \sinh kx + D \cosh kx \quad (7.2.7)$$

où $k^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI}$ et où les constantes A , B , C et D doivent être déterminées en fonction des conditions limites. Ces conditions doivent nécessairement être au nombre de

quatre. Quelque soient ces conditions limites, on peut facilement se convaincre (en étudiant différentes configurations) qu'il existe toujours une combinaison linéaire de ces conditions, qui fait que la fonction $\Phi(x)$ ne peut être déterminée qu'à une constante près. Ceci est illustré ci-dessous. Aussi, la satisfaction des quatre conditions limites doit nécessairement impliquer une condition sur un des arguments du sin ou du cos. Cette condition implique nécessairement que k , et donc ω , prenne des valeurs discrètes bien distinctes. Il est plus facile de démontrer ceci à l'aide d'exemples que de façon générale. De façon pragmatique, on peut retenir que la satisfaction des conditions limites implique que la constante ω ne puisse pas prendre n'importe quelle valeur.

Pour une poutre simple sur deux appuis, les conditions limites sont

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= \Phi(L) = 0 \\ \Phi''(0) &= \Phi''(L) = 0.\end{aligned}\tag{7.2.8}$$

L'écriture de ces quatre conditions limites résulte en les relations suivantes

$$B = 0; \quad D = 0; \quad A \sin kL = 0; \quad C \sinh kL = 0\tag{7.2.9}$$

dont la seule qui est réellement intéressante (de façon à ne pas obtenir une solution non triviale) est $A \sin kL = 0$. Sa solution est $kL = i\pi$, soit

$$\omega = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}.\tag{7.2.10}$$

Nous venons donc de montrer que ω ne peut prendre que certaines valeurs particulières ω_i d'un ensemble infini de valeurs discrètes dissociées ($i = 1, \dots, \infty$). Dans la suite, nous écrirons ω_i pour indiquer qu'il s'agit de la $i^{\text{ème}}$ pulsation propre, et donc du $i^{\text{ème}}$ mode propre. En effet, un mode propre est associé à chaque pulsation propre. Puisque $B = C = D = 0$, des quatre termes, il reste

$$\Phi(x) = A \sin kx = A \sin \frac{i\pi x}{L}\tag{7.2.11}$$

Comme pour les systèmes discrets à plusieurs degrés de liberté, on constate que les modes propres sont définis à une constante près. On peut par exemple choisir de normer les modes propres à un maximum unitaire ($A = 1$, dans ce cas).□

Une propriété importante des modes propres est leur orthogonalité par rapport aux termes de masse et de raideur. En réalité, c'est pour cette raison qu'ils ont été calculés. A nouveau, la démonstration est similaire à ce qui est fait dans l'approche discrète. Pour deux modes i et j distincts (de pulsations propres distinctes au moins), on peut particulariser la relation (7.2.5)

$$\Phi_i''''(x) - \frac{\mu\omega_i^2}{EI}\Phi_i(x) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_j''''(x) - \frac{\mu\omega_j^2}{EI}\Phi_j(x) = 0.\tag{7.2.12}$$

En multipliant la première par Φ_j et la seconde par Φ_i , puis en intégrant sur x , on obtient

$$\begin{cases} \int_0^L EI\Phi_j\Phi_i''''dx &= \omega_i^2 \int_0^L \mu\Phi_i\Phi_jdx \\ \int_0^L EI\Phi_i\Phi_j''''dx &= \omega_j^2 \int_0^L \mu\Phi_i\Phi_jdx, \end{cases}\tag{7.2.13}$$

soit, en soustrayant membre à membre

$$\int_0^L EI\Phi_j\Phi_i'''' dx - \int_0^L EI\Phi_i\Phi_j'''' dx = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L \mu\Phi_i\Phi_j dx. \quad (7.2.14)$$

En intégrant deux fois par partie, on peut voir que les deux termes de gauche sont égaux, ce qui laisse leur différence égale à zéro. Puisque $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, il faut donc nécessairement que

$$\int_0^L \mu\Phi_i\Phi_j dx = 0 \quad \text{pour } i \neq j, \quad (7.2.15)$$

et, en remontant à l'équation précédente

$$\int_0^L EI\Phi_i\Phi_j'''' dx = 0 \quad \text{pour } i \neq j. \quad (7.2.16)$$

Ces deux relations démontrent l'orthogonalité des modes propres via la masse et la raideur du système (on généralise facilement le développement au cas où μ et EI ne sont pas des constantes).

Dans le cas de la poutre sur deux appuis, on peut facilement vérifier que

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi x}{L} dx &= \frac{L}{2} \delta_{ij} \\ \int_0^L \sin \frac{i\pi x}{L} \left(\sin \frac{j\pi x}{L} \right)'''' dx &= \frac{L}{2} \left(\frac{j\pi}{L} \right)^4 \delta_{ij} \end{aligned} \quad (7.2.17)$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker. $\square$

7.3 Analyse en base modale

Ces propriétés d'orthogonalité sont primordiales pour la projection des équations dans la base des modes propres. A nouveau, nous allons suivre une démarche similaire à ce qui est fait pour les systèmes discrets². On introduit le changement de variable

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) q_i(t) \quad (7.3.1)$$

puis on multiplie l'équation du mouvement par les formes modales, toutes considérées les unes après les autres, et on intègre sur le domaine de définition. De façon générique, pour le mode k , cela donne

$$\int_0^L \Phi_k(x) \left[\mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = p(x, t) \right] dx \quad (7.3.2)$$

2. dans le cadre des systèmes discrets, la projection était réalisée en changeant de variable (de $\mathbf{x}$ à $\mathbf{q}$) et en prémultipliant l'équation du mouvement par Φ^T

$$\int_0^L \Phi_k(x) \left[\mu \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + EI \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i''''(x) q_i(t) = p(x, t) \right] dx. \quad (7.3.3)$$

En réarrangeant un peu, on obtient

$$\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^L \mu \Phi_k(x) \Phi_i(x) dx \right)}_{M_i^* \delta_{ki}} \ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^L EI \Phi_k(x) \Phi_i''''(x) dx \right)}_{K_i^* \delta_{ki}} q_i(t) = p_k^*(t)$$

où apparaissent les *masses et raideurs généralisées* M_i^* et K_i^* définies par

$$M_i^* = \int_0^L \mu \Phi_i(x) \Phi_i(x) dx \quad (7.3.4)$$

$$K_i^* = \int_0^L EI \Phi_i(x) \Phi_i''''(x) dx. \quad (7.3.5)$$

et la *force généralisée* dans le mode k définie par

$$p_k^*(t) = \int_0^L \Phi_k(x) p(x, t) dx. \quad (7.3.6)$$

De tous les termes de la sommation, un seul terme subsiste en raison de l'orthogonalité des modes propres, si bien qu'il reste à résoudre

$$M_k^* \ddot{q}_k(t) + K_k^* q_k(t) = p_k^*(t) \quad k = 1, \dots, \infty \quad (7.3.7)$$

Nous avons donc transformé l'équation aux dérivées partielles, en un système dé-couplé (!) d'équations différentielles ordinaires. L'inconvénient est qu'il convient a priori d'en résoudre un nombre infini. Notre connaissance de l'analyse des systèmes discrets révèle cependant la possibilité de tronquer la représentation de la réponse à une liste de M modes sélectionnés (superposition modale).

Tout comme pour les systèmes discrets (pour lesquels il était difficile de construire une matrice d'amortissement $\mathbf{C}$), il n'est pas possible, pratiquement, d'introduire les termes d'amortissement dans l'équation continue (7.1.1). Pour cette raison, et parce que de toute façon l'amortissement est une grandeur que l'on ne peut que difficilement appréhender dans les applications du génie civil, on considère souvent que l'amortissement n'affecte pas le découplage modal. Cela signifie que les équations sont bel et bien résolues indépendamment les unes des autres. Simplement, un terme d'amortissement (modal) est ajouté lors de la résolution de chacune d'elles

$$M_k^* \ddot{q}_k(t) + 2\xi_k \sqrt{K_k^* M_k^*} \dot{q}_k(t) + K_k^* q_k(t) = p_k^*(t) \quad (7.3.8)$$

où les ξ_k sont les coefficients d'amortissement choisis.

En résumé, la résolution de l'équation aux dérivées partielles suit donc de la démarche suivante

1. calculer les modes propres de la structure,
2. calculer les masses et raideurs généralisées à l'aide des relations (7.3.4) et (7.3.5),
3. calculer les forces généralisées (7.3.6),
4. résoudre alors les systèmes à 1-DDL ainsi obtenus. On définit (souvent à l'avance) le nombre M de modes propres conservés pour le calcul et on obtient ainsi les réponses dans chacun des modes $q_i(t)$. Cette étape peut se faire de façon analytique (intégrale de Duhamel p.ex) ou de façon numérique (méthode pas-à-pas, p.ex);
5. revenir finalement aux déplacements des noeuds de la structure à l'aide du changement de variables initialement utilisé, c'est-à-dire

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^M \Phi_i(x) q_i(t). \quad (7.3.9)$$

Dans le cas particulier de la poutre sur deux appuis simples, les masses et raideurs généralisées valent :

$$\begin{aligned} M_i^* &= \int_0^L \mu \sin^2 \frac{i\pi x}{L} dx = \frac{\mu L}{2} \\ K_i^* &= \int_0^L EI \left(\frac{i\pi}{L} \right)^4 \sin^2 \frac{i\pi x}{L} dx = EI \left(\frac{i\pi}{L} \right)^4 \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

On peut également vérifier que

$$\frac{K_i}{M_i} = \frac{EI \left(\frac{i\pi}{L} \right)^4 \frac{L}{2}}{\frac{\mu L}{2}} = \omega_i^2 \quad (7.3.11)$$

7.4 Exemples

Vibrations libres d'une poutre encastree libre ?

$$\phi(0) = 0; \phi'(0) = 0 \rightarrow B + D = 0, A + C = 0 \quad (7.4.1)$$

$$\phi'''(L) = 0; \phi''''(L) = 0 \quad (7.4.2)$$

$$A(\sin kL + \sinh kL) = -B(\cos kL + \cosh kL) \quad (7.4.3)$$

$$A(\cos kL + \cosh kL) = -B(-\sin kL + \sinh kL) \quad (7.4.4)$$

$$kL = 1.88, 4.69, 7.85, \dots \quad (7.4.5)$$

Chapitre 8

Analyse dynamique stochastique

8.1 La théorie des probabilités

Une variable aléatoire est un nombre, résultat d'une expérience aléatoire telle le jet d'un dé à six faces, le tirage d'une boule de Lotto, la température à Scarborough le jour de Noël, le déplacement maximal annuel de la tour Taipei, etc. Le but de la théorie des probabilités est de caractériser statistiquement ces résultats scalaires d'expériences aléatoires. Ceci est généralement réalisé à l'aide de la densité de probabilité. Cette théorie recourt aussi largement aux notions de moyenne, variance ou écart-type introduites à l'occasion de la théorie des statistiques. Bien qu'ayant le même sens physique, ces grandeurs ne se rapportent cependant dans ce cadre ni à une population ni à un échantillon, mais permettent de représenter cette densité de probabilité (souvent de la paramétrer).

Afin d'introduire les notions de fonction et de densité de probabilité, considérons les disques de la figure 8.1.1. Ils sont tous deux munis d'une aiguille tournante fixée en leur centre. L'un est marqué de dix traits séparant des régions identiques numérotées de 1 à 10 (variable discrète) alors que l'autre est gradué en degrés de 0° à 360° (variable continue). L'expérience aléatoire consiste à faire tourner l'aiguille et à attribuer une valeur discrète (un nombre entier entre 1 et 10) ou continue (un angle entre 0° et 360°) à la variable aléatoire x .

Pour le premier disque, les dix nombres auront la même probabilité d'occurrence étant donné que les régions délimitées sont identiques. Cette probabilité est estimée par le rapport entre le nombre de résultats favorables et le nombre total de résultats équiprobables possibles. Par exemple, la probabilité que le résultat de cette première expérience soit égal à 2 s'exprime par

$$p(x = 2) = \frac{N_{fav}}{N_{tot}} = \frac{1}{10}. \quad (8.1.1)$$

Cette définition de la probabilité ne fait qu'exprimer autrement la tournure de phrase habituelle : ■ chaque nombre a une chance sur dix d'être obtenu ■. Une première

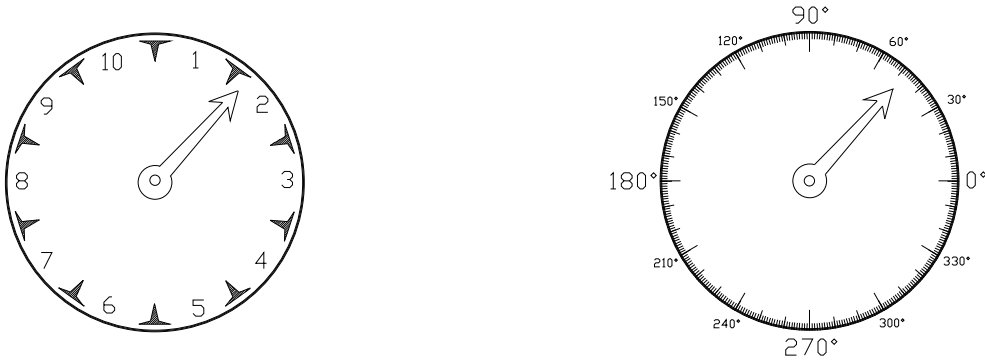


FIGURE 8.1.1 – Expériences aléatoires (résultat discret ou continu).

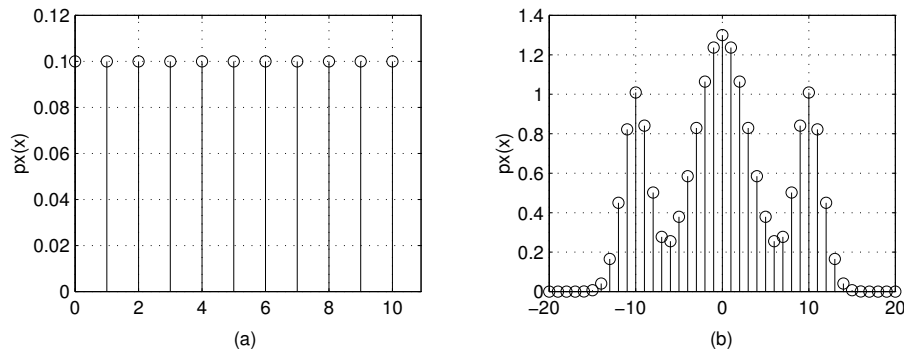


FIGURE 8.1.2 – (a) Fonction de probabilité de l'expérience 1 - (b) Fonction de probabilité quelconque.

façon de représenter cette variable aléatoire discrète est sa *fonction de probabilité* qui attribue à chaque résultat possible x_i sa probabilité d'occurrence

$$p_x(x_i) = p(x = x_i). \quad (8.1.2)$$

La figure 8.1.2 représente la fonction de probabilité de la variable aléatoire de la première expérience (variable uniforme). On constate effectivement que chaque nombre (1 à 10) a la même probabilité d'occurrence. Cette figure montre également un exemple plus général de fonction de probabilité. Dans ce cas, les résultats -10, 0 et 10 ont manifestement une plus grande probabilité d'occurrence.

Cette manière de définir les probabilités (8.1.2) implique que la somme des probabilités associées à chaque résultat possible soit égale à l'unité, ce qui exprime simplement

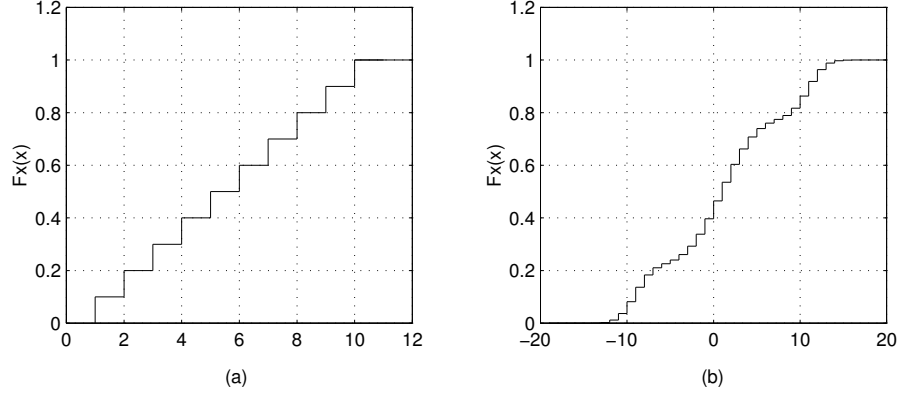


FIGURE 8.1.3 – (a) Fonction de répartition de l'expérience 1 - (b) Fonction de répartition quelconque.

le premier axiome de Kolmogorov

$$\sum_i p_x(x_i) = 1. \quad (8.1.3)$$

Une autre manière de caractériser la variable aléatoire est sa *fonction de répartition* qui attribue à chaque valeur a la probabilité que la variable aléatoire x lui soit inférieure

$$F_x(a) = p(x \leq a). \quad (8.1.4)$$

Vu sa définition, la fonction de répartition peut aussi s'écrire

$$F_x(a) = \sum_{i=-\infty}^a p(x = x_i) = \sum_{i=-\infty}^a p_x(x_i). \quad (8.1.5)$$

Cette formulation montre que la fonction de répartition est monotone, prenant les valeurs $F_x(a) = 0$ en $a = -\infty$ et $F_x(a) = 1$ en $a = +\infty$. A titre d'illustration, la figure (8.1.3) représente les fonctions de répartition associées aux fonctions de probabilité de la figure 8.1.2. Puisque les fonctions de probabilité sont définies en des valeurs discrètes, les fonctions de répartition sont des sommes de fonctions-échelons.

Concernant la seconde expérience aléatoire, la définition donnée de la fonction de probabilité n'a plus guère d'intérêt dans la mesure où le nombre de résultats équiprobables possibles devient infini. Par contre, la fonction de répartition garde tout son sens

$$F_x(a) = p(x \leq a). \quad (8.1.6)$$

La figure 8.1.4-b, homologue continu de la figure 8.1.3-a, indique la fonction de répartition de la seconde expérience aléatoire. Cette fonction vaut 0 pour des valeurs de a inférieures à 0° et vaut l'unité pour des valeurs de a supérieures à 360° . En effet, la probabilité d'obtenir un résultat d'une part inférieur à 0° est nulle et d'autre

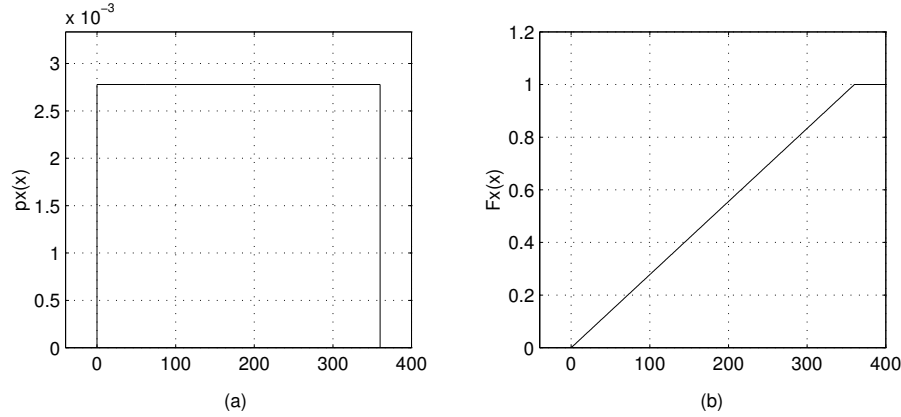


FIGURE 8.1.4 – (a) densité de probabilité de l'expérience 2 - (b) fonction de répartition de l'expérience 2.

part inférieur ou égal à 360° est unitaire (100%). Entre ces deux limites, la fonction évolue linéairement puisque le disque est gradué uniformément.

On définit alors la *densité de probabilité* (qui est l'équivalent continu de la fonction de probabilité) par

$$p_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}, \quad (8.1.7)$$

que l'on peut également écrire

$$F_x(a) = \int_{-\infty}^a p_x(x) dx. \quad (8.1.8)$$

Puisque la fonction de répartition est monotone croissante, la densité de probabilité est toujours positive.

L'interprétation physique de cette grandeur est assez simple puisque la densité de probabilité n'est qu'un passage à la limite de la fonction de probabilité. De toute façon, il suffit de considérer que

$$p_x(a) da = dF_x(a) = F_x(a+da) - F_x(a) = p(x \leq a+da) - p(x \leq a) = p(a \leq x \leq a+da) \quad (8.1.9)$$

et $p_x(a) da$ représente donc une probabilité relative que la variable aléatoire x se trouve entre a et $a + da$.

Dans les applications de la dynamique aléatoire, les variables traitées sont le plus souvent continues si bien que la fonction la plus souvent utilisée est la densité de probabilité. Cette fonction renferme une quantité d'information généralement trop importante de sorte qu'on lui préfère des grandeurs scalaires qui en sont dérivées. Dans ce but, on définit l'opérateur $E[\cdot]$, l'*espérance mathématique*, qui associe une quantité scalaire à une fonction quelconque de la variable aléatoire

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_x(x) dx. \quad (8.1.10)$$

On utilise cet opérateur de façon à définir une ensemble de grandeurs scalaires qui, bien qu'elles ne représentent pas strictement la fonction de probabilité, permettent cependant d'en tracer l'allure générale. Une façon habituelle de procéder consiste à utiliser l'espérance mathématique de x^n pour $n = 1, 2, \dots$. On obtient ainsi les moments¹

— d'ordre 1, la *moyenne* notée μ ou $\bar{x}$

$$E[x] = \mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_x(x) dx \quad (8.1.11)$$

qui n'est rien d'autre que le barycentre de la densité de probabilité ;

— d'ordre 2 : la *carré moyen*

$$E[x^2] = \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_x(x) dx. \quad (8.1.12)$$

On définit également les moments centrés² qui ont l'avantage de donner une meilleure représentation physique de la dispersion (ordre 2) et de la symétrie (ordre 3) autour de la moyenne :

— moment centré d'ordre 2 ou *variance*

$$E[(x - \mu)^2] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p_x(x) dx = \overline{x^2} - \mu^2 \quad (8.1.13)$$

Cette grandeur, toujours positive, est un indicateur de la dispersion autour de la moyenne. On utilise aussi souvent l'écart-type $\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \mu^2}$ qui a l'avantage d'avoir les mêmes unités que la moyenne ; l'écart-type rapporté à la moyenne donne une idée de la *dispersion* ou de l'*intensité* : $d = \frac{\sigma}{\mu}$;

— moment centré d'ordre 3

$$E[(x - \mu)^3] = \gamma_3 \sigma^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^3 p_x(x) dx \quad (8.1.14)$$

où γ_3 est le *coefficient de dissymétrie*.

La densité de probabilité et la fonction de répartition de la variable aléatoire gaussienne s'expriment par

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (8.1.15)$$

$$F_x(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (8.1.16)$$

Cette variable est caractérisée par les deux seuls paramètres μ et σ qui s'identifient à la moyenne et à l'écart-type. On peut vérifier ceci en introduisant l'expression de $p_x(x)$ dans

1. le moment d'ordre 0 est toujours égal à 1 (cf. premier axiome de Kolmogorov).
2. le moment centré d'ordre 1 est toujours égal à 0

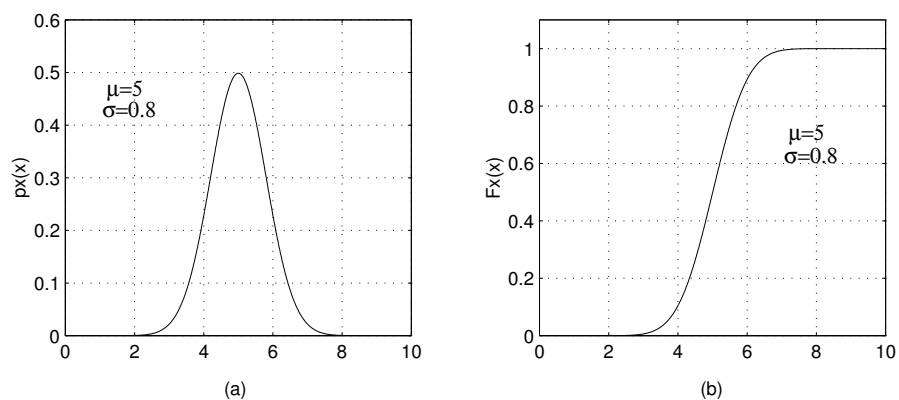


FIGURE 8.1.5 – (a) Densité de probabilité et (b) fonction de répartition d'une distribution gaussienne.

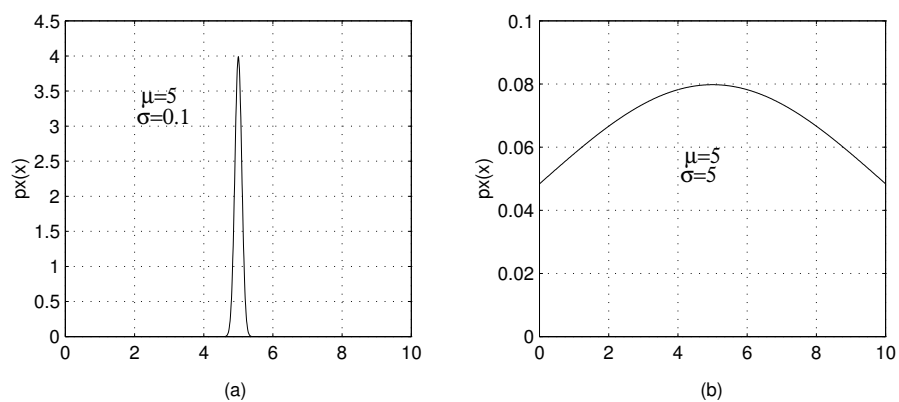


FIGURE 8.1.6 – Illustration de l'écart-type comme indicateur de dispersion autour de la moyenne.

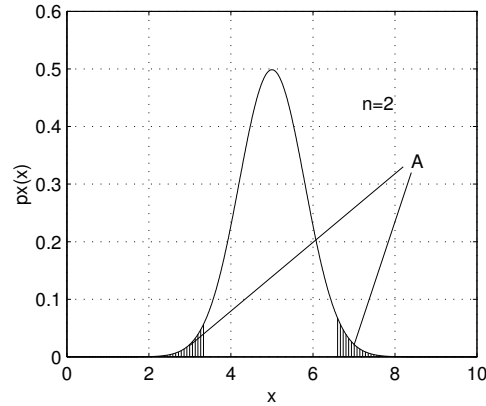


FIGURE 8.1.7 – illustration des fractiles ($n=2$).

(8.1.11) et (8.1.13). Dans le cas de la variable aléatoire gaussienne, le passage de la densité de probabilité aux moments d'ordre 1 et 2 s'effectue donc sans perte d'information. C'est en partie pour cette raison que la variable aléatoire gaussienne est largement utilisée ; cette propriété n'est évidemment pas une règle générale.

On constate également que, pour cette variable aléatoire, le *mode*, la *médiane* et la moyenne sont confondus. Le paramètre μ est donc également la valeur la plus probable mais aussi celle pour laquelle il y a une chance sur deux d'obtenir une valeur supérieure ou inférieure. La forme mathématique de l'expression indique aussi que σ représente effectivement une dispersion autour de la moyenne puisque si σ tend vers 0, la densité de probabilité $p_x(x)$ tend vers une fonction de Dirac centrée en $x = \mu$ alors que si σ tend vers l'infini, $p_x(x)$ tend vers une fonction constante, et nulle, cf. Fig. 8.1.6.

Lorsqu'on parle de la variable aléatoire gaussienne, on fait souvent référence aux probabilités que la variable aléatoire se trouve en dehors des intervalles du type $[\mu - n\sigma; \mu + n\sigma]$ (fractiles). Ces probabilités sont représentées graphiquement par la surface hachurée de la figure (8.1.7). L'utilité pratique de ceci réside en la constatation que, pour $n = 3$, la probabilité d'avoir une valeur en dehors de l'intervalle est très faible (tableau 8.1) si bien que l'on considère en pratique que $\mu - 3\sigma$ et $\mu + 3\sigma$ sont les valeurs minimales et maximales que la variable aléatoire puisse raisonnablement prendre. $\square$

n	$p_x(\mu - n\sigma \leq x \leq \mu + n\sigma)$	$1 - p_x(\mu - n\sigma \leq x \leq \mu + n\sigma)$
1	68,3 %	31,7 %
2	95,4 %	4,55 %
3	99,7 %	0,27 %

TABLE 8.1 – Probabilités associées aux limites de fractiles

Dans les problèmes traités en pratique, il est vraiment rare de pouvoir représenter le phénomène étudié à l'aide d'une seule variable. L'analyse dynamique d'un bâtiment ou d'un tablier de pont nécessite par exemple plusieurs modes de vibration pour une représentation correcte. Il est donc également nécessaire d'introduire les notions de

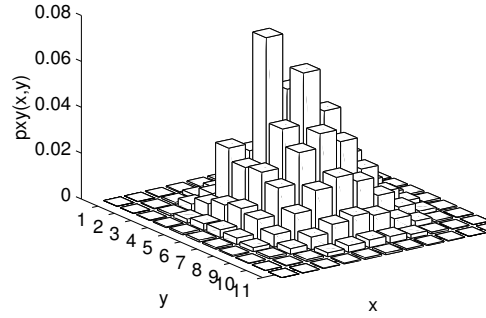


FIGURE 8.1.8 – Densité de probabilité conjointe de deux variables aléatoires discrètes.

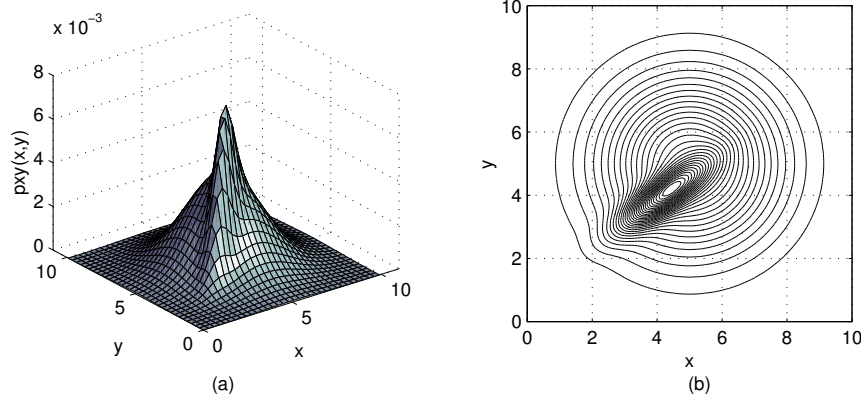


FIGURE 8.1.9 – Densité de probabilité conjointe entre deux variables aléatoires continues.

densité de probabilité conjointe entre plusieurs variables aléatoires.

Imaginons donc maintenant que le résultat de l'expérience aléatoire ne soit plus un seul nombre x , comme dans le cas du lancer des disques du paragraphe précédent, mais plutôt deux nombres x et y . Ces résultats peuvent à nouveau être discrets ou continus, ce qui mène à la distinction entre *fonction de probabilité conjointe* et *densité de probabilité conjointe*.

Etant donné que les variables traitées en pratique sont supposées continues, les détails ne sont pas donnés en ce qui concerne les variables discrètes ; seul un exemple de fonction de probabilité conjointe est représenté, cf Fig. 8.1.8. A chaque paire (x_i, y_i) est associé un bâtonnet dont la valeur représente la probabilité que x soit égal à x_i et que y soit égal à y_i . Lorsque les variables x et y sont continues, on parle de densité de probabilité conjointe et on représente cette fonction à l'aide d'une surface dans l'espace à trois dimensions. Le sens physique de cette fonction peut être simplement transposé du cas à une seule variable aléatoire

$$p_{xy}(a, b) da db = p(a \leq x \leq a + da \text{ et } b \leq y \leq b + db). \quad (8.1.17)$$

La densité de probabilité conjointe contient plus d'information que *les densités de probabilité marginales* (c'est-à-dire de x ou y seuls) dans la mesure où ces dernières fonctions peuvent être obtenues par intégration

$$\begin{aligned} p_x(a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{xy}(a, b) db \\ p_y(b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{xy}(a, b) da. \end{aligned} \quad (8.1.18)$$

La densité de probabilité conjointe permet également d'obtenir de nouvelles grandeurs prenant en compte la corrélation entre les variables x et y . Il s'agit des *densités de probabilité conditionnelles*

$$\begin{aligned} p_{x/y}(a, b) &= \frac{p_{xy}(a, b)}{p_y(b)} \\ p_{y/x}(a, b) &= \frac{p_{xy}(a, b)}{p_x(a)}. \end{aligned} \quad (8.1.19)$$

Elles représentent les densités de probabilité de la variable x (resp. y) lorsque y (resp. x) est fixé à une valeur connue b (resp. a). Si les deux variables aléatoires x et y sont indépendantes, la densité de probabilité de “ x lorsque y est connu” est indépendante de la valeur b prise par y . Elle est donc évidemment confondue avec la densité de probabilité marginale de la variable x définie par la relation 8.1.18. Ceci se traduit par

$$p_{x/y}(a, b) = \frac{p_{xy}(a, b)}{p_y(b)} = p_{x/y}(a) = p_x(a) \quad (8.1.20)$$

Si les variables aléatoires x et y sont indépendantes, la densité de probabilité conjointe s'exprime donc par

$$p_{xy}(a, b) = p_x(a)p_y(b). \quad (8.1.21)$$

Les quelques développements menés ci-dessus montrent que la densité de probabilité conjointe est une fonction qui renferme une quantité d'information assez importante. Tout comme la densité de probabilité d'une seule variable aléatoire, on lui préfère souvent des grandeurs scalaires représentatives des notions que l'on peut estimer. Elles sont définies à partir de l'opérateur d'espérance mathématique suivant

$$E[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) p_{xy}(x, y) dx dy. \quad (8.1.22)$$

Lorsque $f(x, y)$ n'est qu'une fonction de x ou de y , on retrouve l'espérance mathématique telle qu'elle a été définie à l'occasion des variables aléatoires simples. Par exemple

— la moyenne de x

$$\mu_x = E[x] = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{xy}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_x(x) dx, \quad (8.1.23)$$

— la moyenne de y

$$\mu_y = E[y] = \bar{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y p_{xy}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_x(y) dy, \quad (8.1.24)$$

— la variance de x

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 p_{xy}(x, y) dx dy, \quad (8.1.25)$$

— la variance de y

$$\sigma_y^2 = E[(y - \mu_y)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_y)^2 p_{xy}(x, y) dx dy. \quad (8.1.26)$$

Ces notions (moyennes et variances) ne permettent que de caractériser une seule variable aléatoire et non la corrélation existant entre plusieurs d'entre elles. Il est donc important de définir

— le *moment croisé* appelé aussi *corrélation*

$$E[xy] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy p_{xy}(x, y) dx dy, \quad (8.1.27)$$

— et *moment central croisé* appelé aussi *covariance* :

$$\sigma_{xy} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) p_{xy}(x, y) dx dy. \quad (8.1.28)$$

Contrairement aux variances de x et y , la covariance peut être négative. On lui préfère souvent le coefficient de corrélation adimensionnel ρ_{xy} défini par

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (8.1.29)$$

On peut démontrer grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz³ que ce coefficient est toujours compris entre -1 et 1 .

Lorsque plus de deux variables aléatoires sont considérées en même temps, les variances et covariances sont regroupées dans la matrice de covariance $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (8.1.30)$$

Le but de l'analyse stochastique est de définir de telles matrices par exemple, pour les efforts internes dans un élément ou pour les déplacements de ses extrémités. L'estimation de la matrice de covariance entière et non pas de ses éléments diagonaux

3. $\frac{(\vec{x} \bullet \vec{y})^2}{\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2} = \frac{(\sum_i x_i y_i)^2}{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2} \leq 1$

uniquement permet d'obtenir, en plus d'un effort extrême, une densité de probabilité conjointe entre éléments de réduction différents. Les termes hors diagonale permettent en effet d'apprécier la corrélation entre diverses variables aléatoires, et donc les valeurs concomitantes aux efforts extrêmes par exemple.

Dans certains cas, il peut également s'avérer intéressant de calculer des matrices de covariance entre efforts en différents endroits de la structure (par exemple, pour un portique, les moments maxima en pieds de colonnes se produisent-ils en même temps?) ou même entre efforts et déplacements (pour une poutre console, quelle est la relation entre le déplacement en tête et le moment d'encastrement?)

La densité de probabilité conjointe entre deux variables aléatoires gaussiennes centrées x et y s'écrit

$$p_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{x}{\sigma_x}\frac{y}{\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]}. \quad (8.1.31)$$

On vérifie aisément que les densités de probabilité marginales de x et y s'expriment respectivement par

$$\begin{aligned} p_x(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{xy}(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \\ p_y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{xy}(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}. \end{aligned} \quad (8.1.32)$$

A partir de celles-ci, il est alors possible de déterminer les densités de probabilité conditionnelles entre les variables x et y . Par exemple, la densité de probabilité de x lorsque y est fixé

$$p_{x/y}(x, y) = \frac{p_{xy}(x, y)}{p_y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-\left(x - \rho y \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}}$$

En comparant le résultat obtenu avec la formulation générale d'une densité de probabilité gaussienne, cf (8.1.16), on se rend compte qu'il ne s'agit en fait que d'une nouvelle variable aléatoire gaussienne dont la moyenne et l'écart-type sont donnés par

$$\begin{aligned} \mu &= \rho y \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \\ \sigma &= \sigma_x \sqrt{1-\rho^2}. \end{aligned} \quad (8.1.33)$$

En première ligne, la figure 8.1.10 schématise des densités de probabilités conjointes entre les variables aléatoires x et y pour différentes valeurs du coefficient de corrélation. Ensuite, pour chacun des cas de corrélation considérés, elle reprend les densités de probabilités conditionnelles obtenues pour x lorsque la valeur de y est fixée à $0.7\sigma_y$:

- $\rho = -0.8$: corrélation négative entre les variables x et y . Lorsque y est plus grand que sa moyenne, il y a plus de chance que x soit plus petit que sa moyenne ;
- $\rho = 0$: pas de corrélation. Quelle que soit la valeur prise par la variable aléatoire y , la densité de probabilité de x reste inchangée et égale à sa densité de probabilité marginale ;

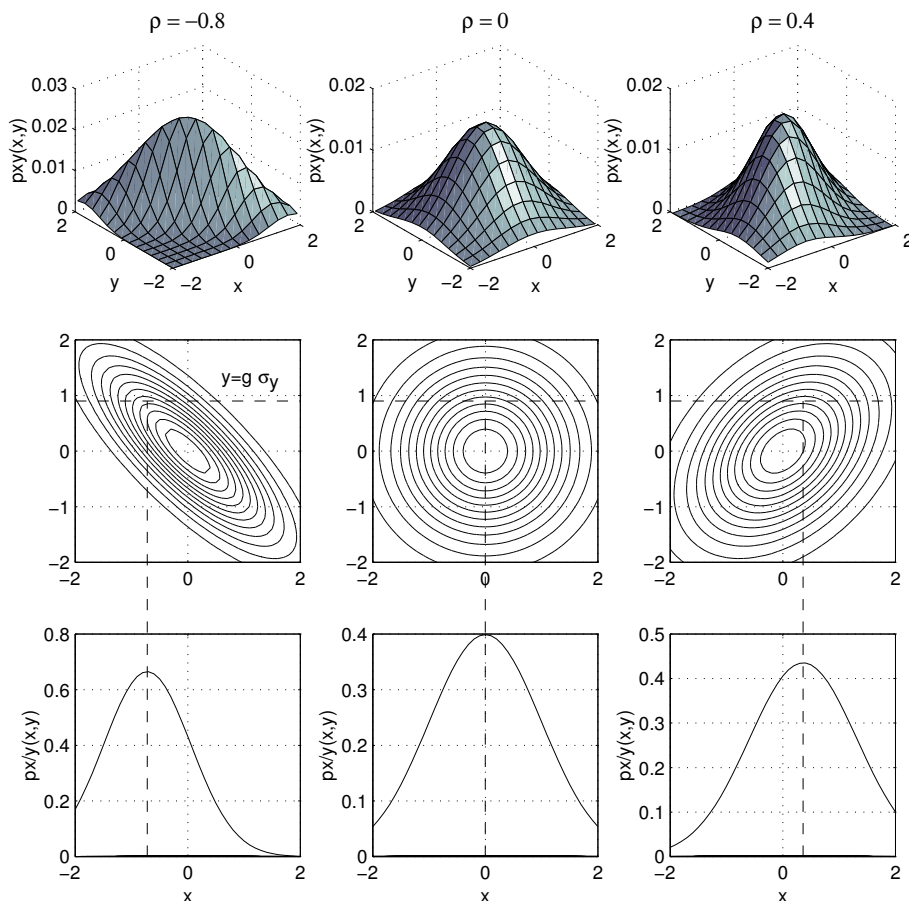


FIGURE 8.1.10 – Corrélation entre deux variables aléatoires gaussiennes.

— $\rho = 0.4$: corrélation positive entre les variables x et y . Lorsque y est plus grand que sa moyenne, il y a plus de chance que x le soit également.

On constate sur cette figure que plus la corrélation est grande entre les deux variables (en valeur absolue), plus la valeur de x est restreinte lorsque celle de y est fixée. Ceci est tout à fait conforme à l'intuition et est confirmé par la relation 8.1.33 qui fournit une variance d'autant plus faible que le coefficient de corrélation ρ s'approche de l'unité. $\square$

8.2 La théorie des processus aléatoires

Considérons maintenant que les résultats des expériences aléatoires ne sont plus des scalaires (variables aléatoires) mais plutôt des fonctions d'un ou plusieurs paramètres (processus aléatoires). Au lieu de tirer au sort une boule de Lotto, l'expérience consiste à tirer au sort une réponse dynamique en un point d'une structure, une évolution de la rugosité le long d'une route, une ordonnée du profil de la mer, une accélération du sol lors d'un tremblement de terre, une évolution au cours du temps

de la vitesse du vent en un point donné de l'espace, etc.

Chaque échantillon (relevé ou imaginable) d'une expérience aléatoire est unique en son genre. Quand on tire une boule de Lotto, une variable aléatoire, on n'en tire qu'une seule. Quand on mesure la vitesse du vent en un point pendant 10 minutes, un processus aléatoire, on n'a qu'une seule mesure. Il existe cependant des caractéristiques générales attribuables au résultat de l'expérience aléatoire, de façon que si l'on reproduisait l'expérience un grand nombre de fois et que l'on réalisait un traitement statistique de ces mesures, on pourrait obtenir une estimation *statistique* d'une grandeur *probabiliste* utilisée pour modéliser l'expérience. Par exemple, répéter le tir d'une boule de Lotto un grand nombre de fois permet de reproduire la densité de probabilité (à l'aide de l'histogramme statistique). Il existe donc une façon théorique de modéliser les résultats d'expériences. Dans ce cas, c'est la densité de probabilité. Exactement comme les variables aléatoires sont caractérisées par leur densité de probabilité, les processus aléatoires sont caractérisés par d'autres grandeurs mathématiques qui permettent de représenter leur nature probabiliste.

Ce modèle probabiliste est l'élément essentiel de l'analyse. Si on ne connaissait pas la fonction de probabilité associée au tirage d'une boule de Lotto, comment pourrait-on estimer nos chances de gagner ? notre intérêt à jouer ? comment pourrait-on simuler un tirage Lotto sur notre ordinateur ? Il est important de remarquer que, pour estimer nos chances de gagner au Lotto, on n'a pas besoin de simuler le tirage d'un grand nombre de boules, puis à réaliser un traitement statistique. Non, notre bonne connaissance de l'analyse combinatoire nous apprend directement à calculer cette probabilité, sans avoir à simuler un grand nombre d'échantillons.

Ce raisonnement fondamental peut être transposé aux processus aléatoires. Leur caractérisation à l'aide de grandeurs mathématiques va nous permettre de réaliser l'analyse de la structure, sans avoir à observer un seul échantillon. Cependant, pour observer ou mieux comprendre la finesse de la réponse dynamique, il peut être envisageable de simuler des échantillons de processus aléatoires, mais ceci n'est a priori pas nécessaire pour l'analyse probabiliste ! Dans ce cas, il faut que la description mathématique que nous allons donner des processus aléatoires en permette la génération, tout comme la connaissance de la densité de probabilité permet de simuler le tirage d'une boule de Lotto.

En guise de préliminaire, la figure 8.2.1 illustre des échantillons d'accélérogrammes (à gauche) et de vitesse de vent (à droite). On constate que les échantillons de chaque colonne ont effectivement quelque chose de semblable et on peut facilement percevoir qu'il existe une façon théorique de modéliser ces objets probabilistes. Cette figure montre par exemple que l'accélération du sol en un endroit donné est non stationnaire, que son enveloppe ainsi que son contenu fréquentiel sont plus ou moins constants. Par contre, la vitesse du vent peut être admise comme étant stationnaire (sur des durées suffisamment longues).

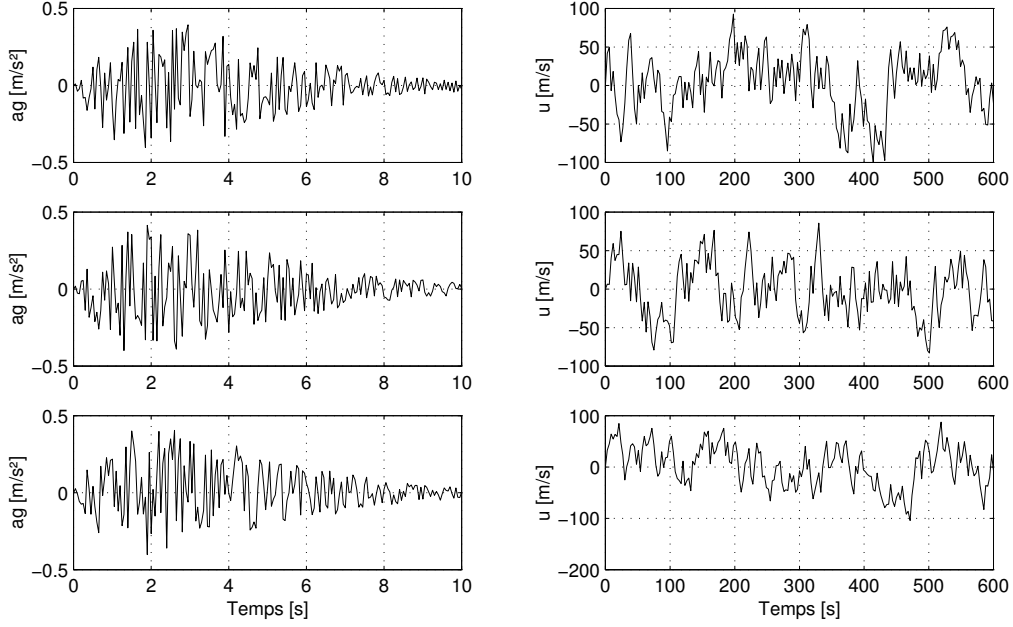


FIGURE 8.2.1 – Exemples d'échantillons de processus aléatoires (accélération du sol, vitesses de vent).

Caractérisation des processus aléatoires

Etant donné qu'un processus aléatoire n'est jamais qu'une succession de valeurs infiniment proches les unes des autres, il est tout à fait naturel d'essayer de les caractériser de la même manière que les variables aléatoires. Il paraît donc logique d'utiliser la *densité de probabilité de premier ordre* $p_x(x, t)$ qui est maintenant une fonction du temps puisque la densité peut éventuellement évoluer au cours du temps (cas d'un processus instationnaire). Comme dans le cas d'une variable aléatoire, $p_x(x, t)dx$ représente la probabilité que la fonction prenne une valeur comprise entre x et $x + dx$ à l'instant t .

La figure 8.2.2 montre par exemple la densité de probabilité de premier ordre d'un processus gaussien instationnaire dont la moyenne augmente et la variance diminue au cours du temps. La connaissance de cette fonction permet de déterminer un fuseau enveloppe en dehors duquel un échantillon du processus a peu de chance de se trouver. Il suffit de constater qu'en chaque instant il y a une probabilité de 0.997 (Tab. 8.1) que l'échantillon se trouve compris entre $\mu(t) - 3\sigma(t)$ et $\mu(t) + 3\sigma(t)$. Ceci permet d'obtenir le fuseau représenté en traits pointillés sur le graphique central⁴.

On comprend aisément que cette première densité de probabilité donne déjà une quantité d'information non négligeable sur le processus mais elle ne le caractérise pas encore suffisamment. C'est pour cette raison que l'on introduit la *densité de probabilité d'ordre deux* $p_x(x_1, t_1; x_2, t_2)$ telle que $p_x(x_1, t_1; x_2, t_2)dx_1dx_2$ représente

4. Nous verrons dans la suite qu'il existe des méthodes plus précises pour estimer les valeurs extrémales qu'un échantillon de processus aléatoire peut prendre

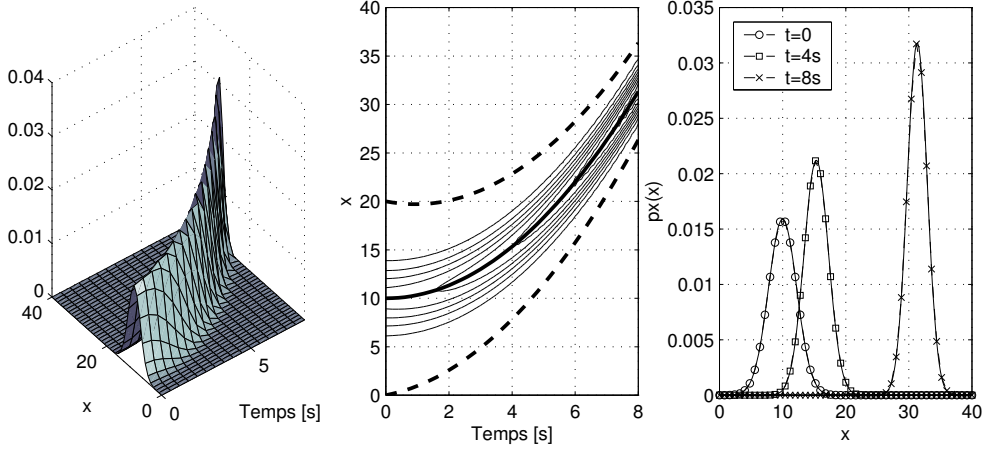


FIGURE 8.2.2 – Densité de probabilité de premier ordre (processus instationnaire).

la probabilité que x se trouve entre x_1 et $x_1 + dx_1$ à l'instant t_1 et entre x_2 et $x_2 + dx_2$ à l'instant t_2 . La caractérisation du processus aléatoire semble désormais se préciser petit à petit mais on imagine facilement qu'une caractérisation complète du processus nécessiterait de définir les densités de probabilité d'ordres de plus en plus élevés (jusqu'à l'infini, en principe).

Connaissant la densité de probabilité d'un certain ordre, il est toujours possible de retrouver les densités de probabilité d'un ordre inférieur par intégration. Par exemple, pour obtenir la densité de probabilité d'ordre 1 à partir de la densité de probabilité d'ordre 2, il suffit d'intégrer sur x_2

$$p_x(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2. \quad (8.2.1)$$

Cette définition est à rapprocher de la densité de probabilité conjointe de plusieurs variables aléatoires. En effet, ces deux notions permettent d'une part d'apprécier une éventuelle corrélation entre variables pour l'une ou entre valeurs prises par la fonction en différents instants pour l'autre. D'autre part, ce sont des notions très complètes puisqu'elle permettent par exemple de retrouver des densités de probabilité marginales (d'ordre inférieur).

Cette première manière de caractériser un processus aléatoire est très complète mais peu évidente à mettre en oeuvre en pratique. C'est la raison pour laquelle on se contente souvent de représenter les densités de probabilité de différents ordres en moyennant de façon à éliminer la dépendance par rapport à la fonction x . A l'instar de ce qui est fait pour les variables aléatoires, on définit des espérances mathématiques d'ordres 1 et 2 par

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_x(x, t) dx, \quad (8.2.2)$$

$$E[f(x_1, x_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) p_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (8.2.3)$$

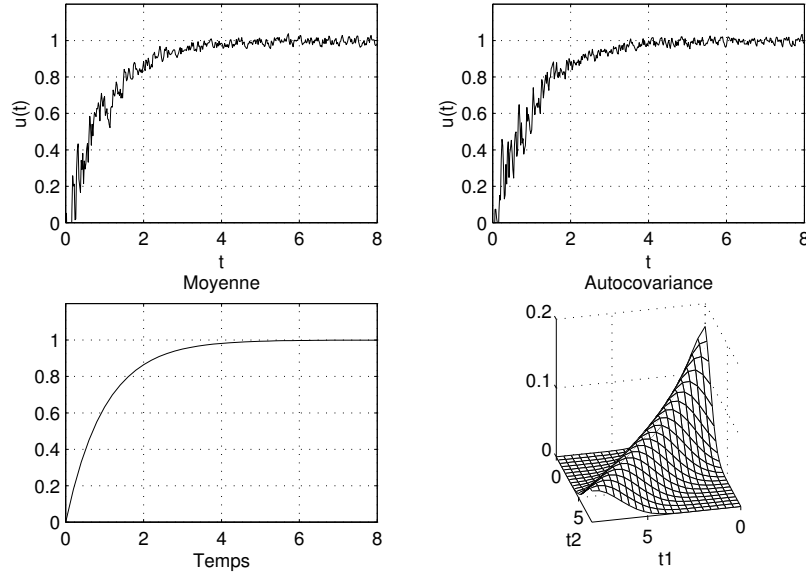


FIGURE 8.2.3 – Illustration de la moyenne et de l'autocovariance d'un processus instationnaire (les deux graphiques du dessus représentent des échantillons du processus).

On utilise ainsi assez régulièrement les fonctions moments d'ordre 1 comme la moyenne

$$\mu_x(t) = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_x(x, t) dx \quad (8.2.4)$$

qui est naturellement une fonction du temps maintenant. Une fonction qui joue un rôle essentiel dans la caractérisation des processus aléatoires est la *fonction d'autocorrélation*, la fonction moment d'ordre 2, définie par

$$E[x_1 x_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (8.2.5)$$

On définit également la *fonction d'autocovariance* qui est la fonction d'autocorrélation centrée

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[(x_1 - \mu(t_1))(x_2 - \mu(t_2))]. \quad (8.2.6)$$

La figure 8.2.3 représente une illustration des deux premières fonctions moments. L'évolution de la moyenne est conforme à l'intuition habituelle qu'elle donne. Quant à l'autocovariance, on constate qu'elle est d'autant plus grande que t_1 et t_2 sont faibles. En effet, les échantillons représentés ont une plus forte variabilité aux premiers instants. De plus, on remarque qu'elle prend des valeurs plus importantes dans le plan bissecteur des axes t_1 et t_2 , c'est-à-dire lorsque t_1 et t_2 sont proches. Il est en effet attendu que les valeurs d'un signal en deux instants différents soient fortement corrélées lorsque les deux instants considérés sont proches les uns des autres et moins corrélées dans le cas contraire.

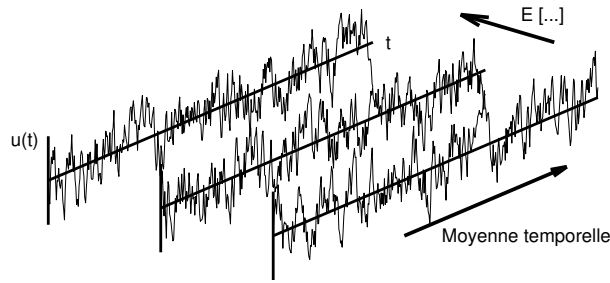


FIGURE 8.2.4 – Illustration de l'ergodicité.

Les deux premiers moments jouent un rôle particulièrement important dans la mesure où, en cas de processus gaussien, ils suffisent à caractériser entièrement le processus. De plus, les moments d'ordres plus élevés sont bien plus ardues à obtenir lors de l'identification et, lors d'essais, on ne sait généralement pas déterminer les caractéristiques d'ordres supérieurs à trois.

Pour les *processus stationnaires*, ces deux fonctions sont indépendantes d'un changement de l'origine du temps. Ainsi, $\mu_x(t) = \mu_x$ est une constante et $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\Delta t)$ devient une fonction du décalage temporel $\Delta t = t_2 - t_1$. Dans la suite des développements, nous nous limitons à l'étude de processus stationnaires. Il est également important de noter que les définitions données de la moyenne et de la fonction d'autocorrélation font intervenir les densités de probabilité inconnues a priori. Bien que ces relations en constituent la définition, les fonctions moment sont généralement utilisées autrement en pratique. En effet, les relations qui font appel à des moyennes d'ensemble (notée $E[\]$) sont peu faciles à utiliser. Au lieu de parcourir un ensemble d'échantillons et de relever la valeur de la fonction en un instant choisi, il serait préférable de ne considérer qu'un seul échantillon et de réaliser la moyenne en faisant varier cette fois le temps. Le *théorème d'ergodicité* postule que ces deux moyennes sont égales. Il s'agit là d'une hypothèse simplificatrice très importante mais qui est souvent posée pour les processus stationnaires.

La fonction d'autocorrélation calculée sur un échantillon d'un processus stationnaire par

$$R_{xx}(\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t + \Delta t)dt \quad (8.2.7)$$

est donc supposée représenter la fonction d'autocorrélation du processus aléatoire. Il s'agit d'une estimation statistique d'une grandeur probabiliste, au même titre qu'un histogramme d'une valeur aléatoire est utilisé pour approcher sa densité de probabilité.

L'équation (8.2.7) permet également d'interpréter plus facilement la notion de corrélation : $R_{xx}(\Delta t)$ prendra en effet des valeurs d'autant plus grandes que $x(t)$ et $x(t + \Delta t)$ ont des valeurs proches, c'est-à-dire sont corrélées. Par exemple pour un

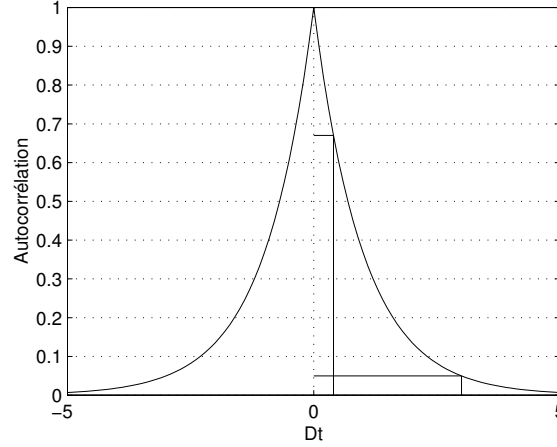


FIGURE 8.2.5 – Interprétation de la fonction d'autocorrélation (processus stationnaire).

processus aléatoire dont la fonction d'autocorrélation serait représentée par le dessin de la figure 8.2.5, on peut affirmer que la connaissance de la valeur de la fonction en l'instant t n'aidera presque en aucune manière à la connaissance de la valeur en $t + 3$. Par contre, la valeur prise en l'instant t influence dans une mesure certaine la valeur prise en $t + 0.5$.

Propriétés des fonctions moments

L'équation (8.2.7) est la forme habituelle sous laquelle est représentée la fonction d'autocorrélation. Comme annoncé, elle est bien plus maniable que la définition de base. De cette nouvelle forme, on peut par exemple déduire ces propriétés importantes :

- la valeur de la fonction d'autocorrélation à l'origine est égale à la variance (de l'échantillon)

$$R_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt = \sigma_x^2, \quad (8.2.8)$$

- la fonction d'autocorrélation est une fonction paire

$$R_{xx}(-\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t - \Delta t) dt = R_{xx}(\Delta t), \quad (8.2.9)$$

- pour un processus stationnaire, la fonction d'autocorrélation est maximale à l'origine. Cette propriété représente bien le sens physique que la corrélation doit faire passer : la fonction d'autocorrélation représente un certain pourcentage de certitude sur $x(t + \Delta t)$ lorsque $x(t)$ est connu.

$$|R_{xx}(\Delta t)| \leq R_{xx}(0) \quad (\text{conséquence de Cauchy-Schwartz}), \quad (8.2.10)$$

— les fonctions d'autocorrélation des dérivées de x sont estimées par

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\Delta t) = \frac{-d^2 R_{xx}(\Delta t)}{d\Delta t^2} \quad (8.2.11)$$

$$R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\Delta t) = \frac{d^4 R_{xx}(\Delta t)}{d\Delta t^4}. \quad (8.2.12)$$

Cette propriété est intéressante lorsqu'il s'agit par exemple de calculer la fonction d'autocorrélation de la vitesse ou l'accélération en un point lorsque l'on connaît celle de son déplacement. On peut démontrer ces relations en dérivant la fonction d'autocorrélation par rapport à Δt

$$\frac{dR_{xx}(\Delta t)}{d\Delta t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \dot{x}(t + \Delta t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t - \Delta t) \dot{x}(t) dt. \quad (8.2.13)$$

Une seconde dérivation donne

$$\frac{d^2 R_{xx}(\Delta t)}{d\Delta t^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \dot{x}(t - \Delta t) \dot{x}(t) dt = -R_{\dot{x}\dot{x}}(\Delta t) \quad (8.2.14)$$

et un raisonnement similaire permet d'obtenir la fonction d'autocorrélation de l'accélération.

Les densités spectrales de puissance

La fonction d'autocorrélation est définie non négative : quelle que soit la fonction complexe $h(t)$ définie sur l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\int_a^b \int_a^b R_{xx}(t_1, t_2) \overline{h(t_1)} h(t_2) dt_1 dt_2 \geq 0. \quad (8.2.15)$$

Ceci implique (théorème de Bochner) que la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation soit toujours positive. Cette fonction occupe un rôle majeur dans l'analyse stochastique des structures. Elle porte le nom de *densité spectrale de puissance*

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (8.2.16)$$

Il s'agit donc d'une fonction positive et réelle puisque la fonction d'autocorrélation est paire. Les deux fonctions $S_{xx}(\omega)$ et $R_{xx}(\tau)$ forment donc une paire de Fourier. La relation directe (8.2.16) et la transformée inverse

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (8.2.17)$$

forment les égalités du théorème de Wiener-Khintchine. Lorsque l'on remplace τ par 0 dans cette seconde équation, on obtient la propriété fondamentale de la densité spectrale de puissance (figure 8.2.6),

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = \sigma_x^2, \quad (8.2.18)$$

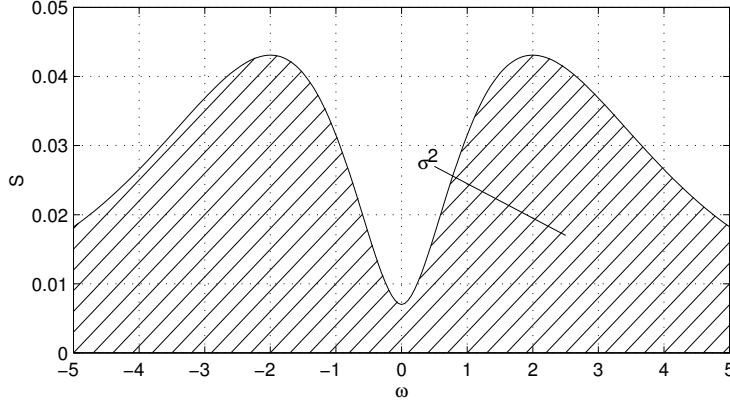


FIGURE 8.2.6 – Propriété fondamentale de la densité spectrale de puissance.

à savoir que l'intégrale de la densité spectrale de puissance sur le domaine des fréquences est égale à la variance du processus considéré⁵. Elle représente une distribution fréquentielle de l'énergie (la variance) contenue dans le processus aléatoire.

Par le théorème d'ergodicité, on peut estimer la densité spectrale de puissance d'un processus à partir d'un échantillon représentatif

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |X(\omega, T)|^2 \quad (8.2.19)$$

où les $X(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-i\omega t} dt$ représentent les transformées de Fourier tronquées de chacun des échantillons. Cette relation permet également d'interpréter la densité spectrale de puissance comme une répartition fréquentielle de l'énergie contenue dans le processus aléatoire. Il s'agit donc d'un moyen supplémentaire à la traditionnelle transformée de Fourier de la réponse pour caractériser le contenu fréquentiel d'un signal.

Les propriétés développées concernant les fonctions d'autocorrélation peuvent être transposées aux densités spectrales de puissance en prenant la transformée de Fourier membre à membre de la relation en question. Ainsi, par exemple, la relation entre le processus et sa dérivée devient

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\Delta t) = \frac{-d^2 R_{xx}(\Delta t)}{d\Delta t^2} \Rightarrow S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_{xx}(\omega), \quad (8.2.20)$$

$$R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\Delta t) = \frac{d^4 R_{xx}(\Delta t)}{d\Delta t^4} \Rightarrow S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_{xx}(\omega). \quad (8.2.21)$$

5. L'analyse au vent turbulent travaille avec des densités spectrales de puissance légèrement différentes. On peut d'ailleurs souvent constater une certaine confusion dans la littérature. Le plus simple pour introduire la différence consiste à mentionner cette propriété fondamentale ; pour les densités spectrales utilisées dans l'analyse au vent turbulent, elle s'exprime par $\sigma_x^2 = \int_0^{+\infty} S_{xx}(n) dn$. La variance du processus est donc obtenue en intégrant sur les fréquences et non pas sur les pulsations. De plus, afin de ne travailler qu'avec des fréquences positives (dont on perçoit mieux le sens physique), les bornes d'intégration sont 0 et $+\infty$. Jusqu'à la fin de ce chapitre, nous continuerons cependant d'utiliser les notations habituelles à la théorie des processus aléatoires.

On est généralement amené à définir les moments spectraux par la relation

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i S_{xx}(\omega) d\omega. \quad (8.2.22)$$

De cette définition, il découle que :

- le moment spectral d'ordre 0 s'identifie à la variance du processus (déplacement),
- le moment spectral d'ordre 2 s'identifie à la variance du processus dérivé (vitesse),
- le moment spectral d'ordre 4 s'identifie à la variance du processus dérivé deux fois (accélération) .

Ces notions seront amplement utilisées à l'occasion du calcul des probabilités de franchissement de seuil et des valeurs maximales.

Le processus aléatoire le plus simple du point de vue analytique est le bruit blanc. Il est défini par une densité spectrale de puissance constante

$$S_{xx}(\omega) = S_0. \quad (8.2.23)$$

Puisqu'elle est sa conjointe dans une paire de Fourier, la fonction d'autocorrélation associée est donc une impulsion de Dirac centrée à l'origine

$$R_{xx}(\Delta t) = 2\pi S_0 \delta(\Delta t). \quad (8.2.24)$$

Ce processus n'est pas physique puisqu'il est caractérisé par une variance infinie (intégrale de la densité spectrale de puissance). Cependant, sous certaines conditions, un processus réel peut être approché par un bruit blanc. Cette approximation ne peut être que locale si bien que globalement le processus réel ne sera pas d'énergie infinie. $\square$

Le processus à corrélation exponentielle, dit aussi de Ornstein-Uhlenbeck, est un autre exemple intéressant qui indique clairement les deux propriétés principales de la fonction d'autocorrélation, à savoir qu'elle est décroissante et que sa valeur en $\Delta t = 0$ représente la variance du processus

$$R_{xx}(\Delta t) = \sigma_x^2 e^{-\beta|\Delta t|}. \quad (8.2.25)$$

La densité spectrale de puissance associée à cette autocorrélation peut être obtenue à l'aide de la première relation de Wiener-Khintchine

$$S_{xx}(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi\beta} \frac{\beta^2}{\beta^2 + \omega^2}. \quad (8.2.26)$$

$\square$

Une autre processus aléatoire couramment utilisé est le *bruit blanc en bande limitée*, dont la densité spectrale de puissance est définie par

$$S(\omega) = \begin{cases} S_0 & \text{pour } \omega_0 - \Delta\omega < |\omega| < \omega_0 + \Delta\omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.2.27)$$

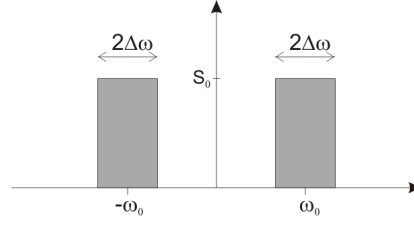


FIGURE 8.2.7 – Densités spectrales d'un bruit blanc en bande limitée.

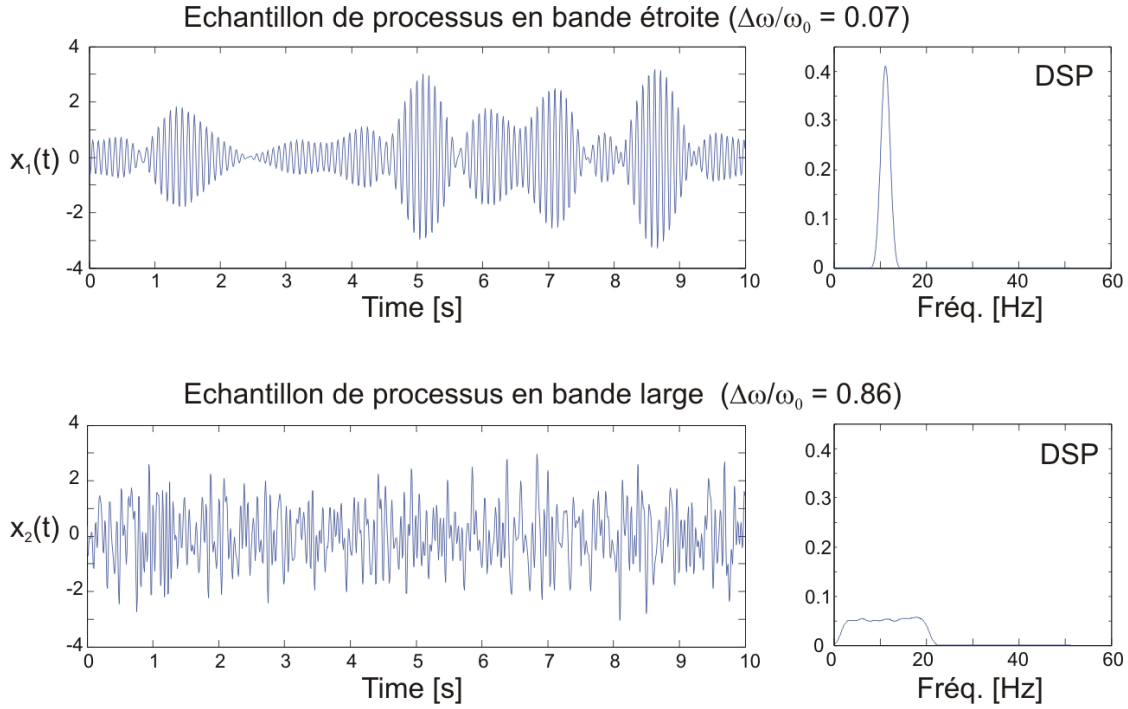


FIGURE 8.2.8 – Exemples d'échantillons de processus en bande limitée (étroit et large).

où $\Delta\omega$ représente la demi-largeur de bande. On peut calculer les moments spectraux de ce processus à l'aide de la relation (8.2.22) pour obtenir

$$\begin{aligned} m_0 &= \sigma^2 = 4\Delta\omega S_0 \\ m_2 &= 4\omega_0^2 \Delta\omega S_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega^2}{3\omega_0^2} \right) \\ m_4 &= 4\omega_0^4 \Delta\omega S_0 \left(1 + 2\frac{\Delta\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{5}\frac{\Delta\omega^4}{\omega_0^4} \right). \end{aligned} \quad (8.2.28)$$

La figure 8.2.8 représente des échantillons (générés) de ce genre de processus aléatoire. Ils présentent une forme plutôt harmonique pour $\Delta\omega \ll$ et plutôt erratique pour $\Delta\omega \gg$. $\square$

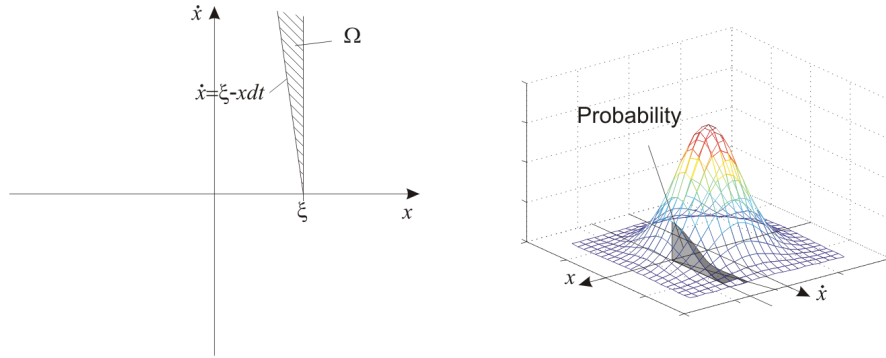


FIGURE 8.2.9 – Partie du plan de phase concernée par le passage par le seuil $x = \xi$.

Statistiques des franchissements de seuil

Admettons pour le moment que nous connaissons les moyennes et densités spectrales des déplacements en chaque point de la structure (c'est-à-dire également les variances, par intégration sur les fréquences). On peut ainsi obtenir la densité de probabilité (de premier ordre) du déplacement, supposé gaussien, en chaque noeud.⁶ Ceci permet donc, toujours sous l'hypothèse de variables gaussiennes, de reproduire des densités de probabilité conjointes entre différentes variables. Ces densités de probabilité ne suffisent pas car ce sont les valeurs maximales des efforts, déplacements et accélérations qui sont intéressantes pour le dimensionnement de la structure. Une première manière assez brutale consiste à utiliser la variance σ^2 calculée et à dire simplement que la probabilité d'avoir une valeur plus grande que $\mu + 3\sigma$ ou plus petite que $\mu - 3\sigma$ est égale à 0,3% (voir tableau 8.1). Cette méthode pourrait a priori donner une bonne idée de la valeur extrême mais reste à discuter dans la mesure où les fonctions étudiées sont continues et donc composées d'une infinité de valeurs, ce qui devrait donc mener à l'obtention d'un maximum infini.

Les statistiques des valeurs extrêmes développent des mathématiques qui permettent une approche plus fine des valeurs extrémales. Cette théorie repose sur les statistiques de franchissement de seuil d'une part et des valeurs maximales d'autre part.

Nous allons donc dans un premier temps déterminer la probabilité de franchissement du seuil $x = \xi$ avec une pente positive entre les instants t et $t + dt$. Si l'on considère un intervalle de temps dt suffisamment court, on peut supposer que chaque échantillon varie linéairement entre t et $t + dt$. Ainsi, la condition de franchissement du seuil est

$$\dot{x}(t) > \frac{\xi - x(t)}{dt}. \quad (8.2.29)$$

6. De manière plus complète, à partir des densités spectrales de puissance croisées, on peut également obtenir les covariances des déplacements en différents points, des efforts en différents points ou même des covariances croisées entre le déplacement en un certain point de la structure et l'effort en un autre endroit (par exemple, pour une poutre-console, la relation entre le déplacement à l'extrémité et le moment à l'encastrement).

Dans le plan $(x, \dot{x})$, la condition de franchissement avec pente positive entre t et $t + dt$ est donc représentée par la zone hachurée de la figure 8.2.9. La probabilité de franchissement du seuil $x = \xi$ avec pente positive p_ξ^+ s'obtient donc en intégrant la densité de probabilité conjointe entre x et $\dot{x}$ sur la zone hachurée

$$p_\xi^+ = \iint_{\Omega} p(x, \dot{x}) dx d\dot{x} = \int_0^\infty \int_{\xi - \dot{x}dt}^\xi p(x, \dot{x}) \underbrace{dx}_{\dot{x}dt} d\dot{x}. \quad (8.2.30)$$

Pour un intervalle de temps dt infiniment petit, on obtient (intégration par rapport à $\dot{x}$)

$$p_\xi^+ = \int_0^\infty \dot{x} dt p(\xi, \dot{x}) d\dot{x} = \nu_\xi^+ dt. \quad (8.2.31)$$

Puisque le processus est supposé stationnaire, il semble en effet assez logique que la probabilité de franchissement du seuil $x = \xi$ pendant l'intervalle de temps dt soit proportionnelle à dt ; si la durée d'observation est doublée, la probabilité de passage par le seuil choisi est également doublée. Le paramètre

$$\nu_\xi^+ = \int_0^\infty \dot{x} p(\xi, \dot{x}) d\dot{x} \quad (8.2.32)$$

qui a été introduit a la dimension d'une fréquence. Il représente la fréquence de passage⁷ du seuil ξ avec une pente positive. Cette formule est tout à fait générale et peut être particularisée dans le cas d'un processus gaussien centré, hypothèse que l'on formule habituellement. Dans ce cas, la densité de probabilité conjointe s'exprime par

$$p_{x\dot{x}}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{x}{\sigma_x}\frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}}} + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2}\right]} = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{\sigma_{\dot{x}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}} \quad (8.2.33)$$

ce qui correspond simplement au produit des densités de probabilité marginales puisque le déplacement et la vitesse ne sont pas corrélés ($\rho = 0$)⁸. Pour un processus gaussien, la fréquence de passage par le seuil $x = \xi$ s'exprime donc par

$$\nu_\xi^+ = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}} \underbrace{\int_0^\infty \dot{x} e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}} d\dot{x}}_{\sigma_{\dot{x}}^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (8.2.34)$$

Lorsque $\xi = 0$, on obtient la fréquence de passage par zéro avec une vitesse positive

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (8.2.35)$$

7. c'est-à-dire le nombre de passages par unité de temps

8. Nous voyons ici que les variances des vitesses ont également leur importance dans une analyse stochastique. Elles peuvent être estimées à partir de la formule 8.2.22

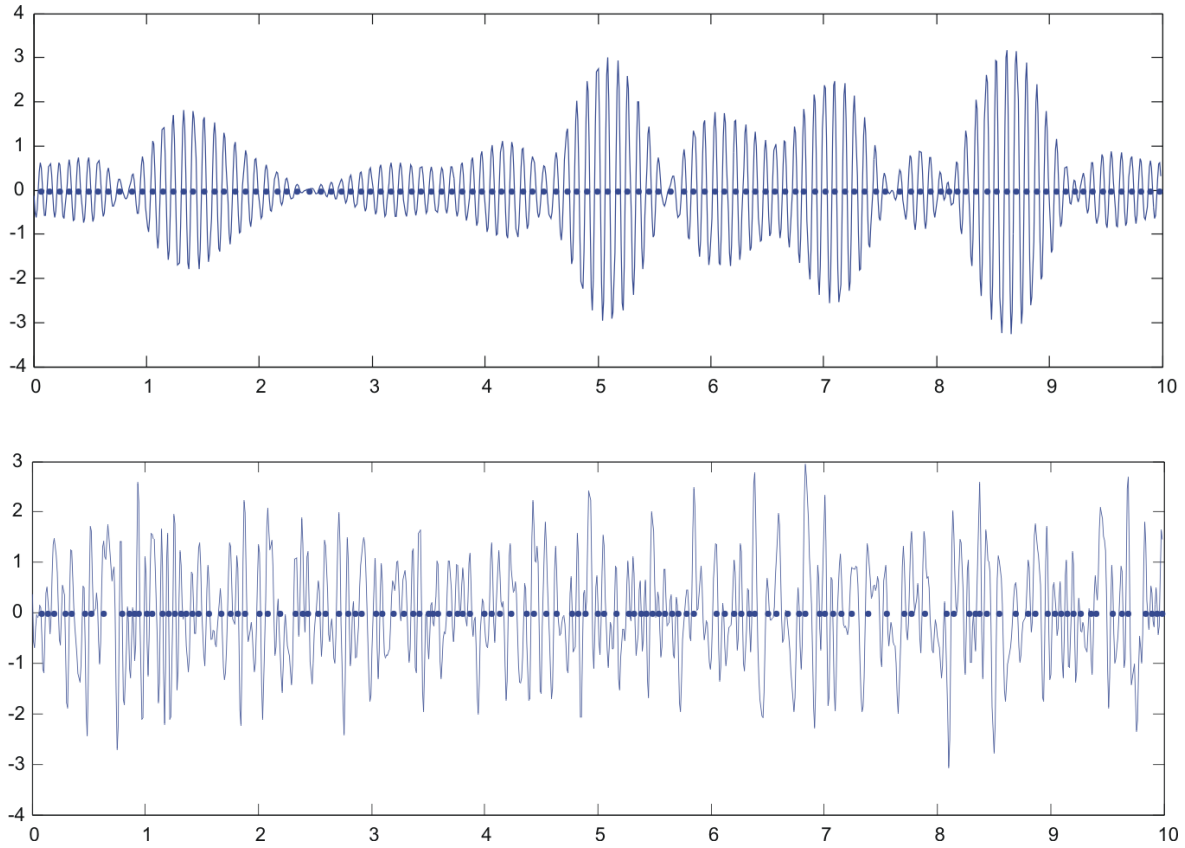


FIGURE 8.2.10 – Illustration de processus en bandes étroite et large : passages par zéro.

où m_2 et m_0 sont les moments spectraux définis au paragraphe précédent, cf. (8.2.22). Lorsqu'il s'agit d'un processus en bande étroite⁹, cette fréquence est très proche de la fréquence du pic. Etant donné que le contenu est pratiquement unifréquentiel, ce type de processus se rapproche d'une sinusoïde dont l'amplitude varie lentement au cours du temps (ce phénomène de battement provient des contributions des fréquences voisines) et passe donc environ une fois par zéro par période.

Pour un processus en bande large, le nombre moyen de passages par zéro doit être calculé sur une durée beaucoup plus longue pour en avoir une bonne estimation. Les passages par zéro sont dispersés moins uniformément et se produisent plutôt par groupes.

Pour l'exemple du processus en bande limitée dont les moments spectraux ont été calculés précédemment (p. 179), la fréquence de passage par zéro vaut

$$\nu_0^+ = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{\Delta\omega^2}{3\omega_0^2}}. \quad (8.2.36)$$

9. Processus dont la densité spectrale de puissance possède un pic marqué pour une seule fréquence, contrairement à un processus en bande large pour lequel le contenu fréquentiel est distribué entre plusieurs pics, ou sur une bande de fréquence beaucoup plus étendue

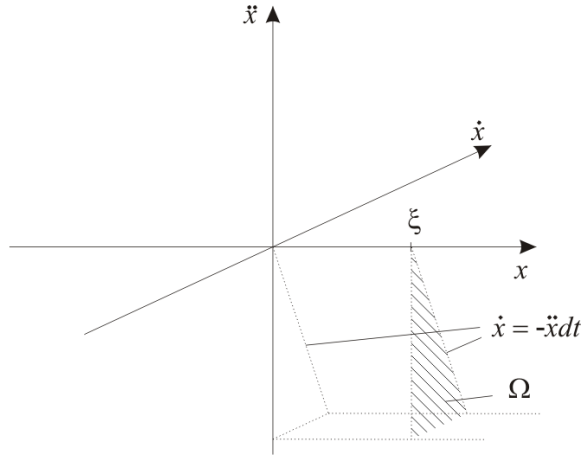


FIGURE 8.2.11 – Zone de l'espace de phase concernée par le passage par un maximum.

On retrouve donc bien le comportement limite $\nu_0^+ \simeq \frac{\omega_0}{2\pi}$ pour $\Delta\omega \ll \omega_0$. La figure 8.2.10 représente des échantillons de ce type de processus pour $\omega_0 = 70\text{rad/s}$, $\Delta\omega = 5\text{rad/s}$ et $\omega_0 = 70\text{rad/s}$, $\Delta\omega = 60\text{rad/s}$. $\square$

Statistiques des maxima

Après avoir estimé la fréquence de passage par un seuil $x = \xi$, essayons maintenant d'obtenir la fréquence de passage et la densité de probabilité des maxima relatifs. Par raccourcissement de langage, les termes *maximum/maxima* seront utilisés pour représenter les maxima relatifs alors que les maxima absolus seront appelés *extrema*. La condition d'occurrence d'un maximum, qu'il soit positif ou négatif, est que la vitesse s'annule et que l'accélération soit négative. Donc, pour qu'un maximum se produise entre t et $t + dt$, il faut que les trois conditions suivantes soient réunies

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) < 0, \\ \dot{x}(t) > 0, \\ \dot{x}(t + dt) < 0. \end{cases} \quad (8.2.37)$$

Supposons que l'intervalle de temps dt soit suffisamment petit que pour pouvoir y supposer une accélération constante. Dans ce cas, $\forall 0 \leq \tau \leq dt$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t + \tau) &= \ddot{x}(t) \\ \dot{x}(t + \tau) &= \dot{x}(t) + \tau \ddot{x}(t). \end{aligned} \quad (8.2.38)$$

Si bien que la troisième condition ci-dessus puisse aussi s'exprimer par

$$\dot{x}(t + dt) = \dot{x}(t) + dt \ddot{x}(t) < 0 \rightarrow \dot{x}(t) < |\ddot{x}(t)| dt. \quad (8.2.39)$$

De même que la densité de probabilité conjointe entre le déplacement et la vitesse nous a permis de calculer la fréquence de passage d'un seuil, la densité de probabilité

jointe entre le déplacement, la vitesse et l'accélération devrait nous permettre de calculer la probabilité d'occurrence d'un maximum entre les instants t et $t + dt$

$$p_m = \iiint_{V_m} p(x, \dot{x}, \ddot{x}) dx d\dot{x} d\ddot{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \int_0^{-\ddot{x}dt} p(x, \dot{x}, \ddot{x}) \underbrace{d\dot{x}}_{\ddot{x}dt} d\ddot{x} dx \quad (8.2.40)$$

où l'intégration est réalisée sur le volume satisfaisant les trois conditions. En supposant à nouveau que l'intervalle de temps dt est infiniment petit, on peut aussi écrire

$$p_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^0 \ddot{x} p(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x}}_{p_{\max}(x)} dx dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\max}(x) dx dt = \mu dt \quad (8.2.41)$$

où μ correspond à la probabilité d'avoir un maximum par unité de temps, c'est-à-dire la fréquence de passage par un maximum. Puisque l'intégrale de la fonction $p_{\max}(x)$ représente la probabilité d'avoir un maximum (par unité de temps), la fonction $p_{\max}(x)$ représente donc la probabilité d'avoir un maximum compris entre x et $x + dx$.

Mis à part l'hypothèse de stationnarité, les relations développées ici sont tout à fait générales et peuvent être particularisées au cas du processus gaussien centré dont la densité de probabilité conjointe entre trois variables s'exprime par

$$p(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 |\mathbf{S}|}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}} \quad (8.2.42)$$

où $\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}$ et $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & -m_2 \\ 0 & m_2 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$ représente la matrice de covariance reliant le déplacement, la vitesse et l'accélération. Les quatre éléments en haut et à gauche de cette matrice ont été utilisés pour le calcul de la probabilité de franchissement de seuil (pas de corrélation entre déplacement et vitesse). La densité de probabilité conjointe entre le déplacement, la vitesse et l'accélération devient donc

$$p(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 m_2 (m_0 m_4 - m_2^2)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^2}{m_2} + \frac{m_4 x^2 + 2m_2 x \ddot{x} + m_0 \ddot{x}^2}{m_0 m_4 - m_2^2} \right)}. \quad (8.2.43)$$

Le remplacement de cette relation dans (8.2.41) mène finalement à une fréquence de passage par un maximum

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (8.2.44)$$

et une densité de probabilité des maxima

$$p_{\max}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \varepsilon e^{-\frac{\eta^2}{2\varepsilon^2}} + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \eta e^{-\frac{\eta^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \eta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\} \quad (8.2.45)$$

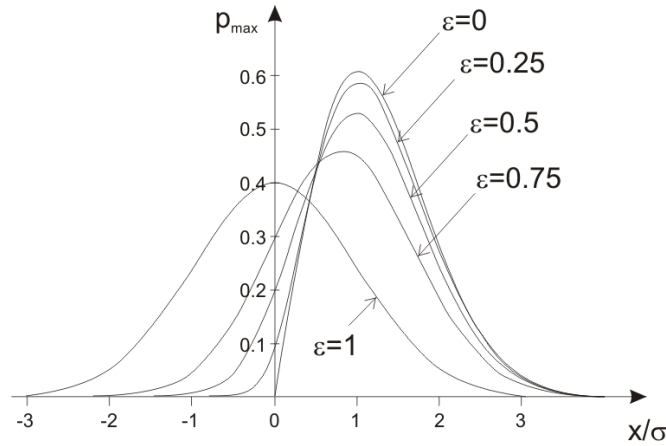


FIGURE 8.2.12 – Densité de probabilité des maxima (relatifs) en fonction du paramètre spectral du processus.

où $\eta = \frac{x}{\sqrt{m_0}}$ et $\varepsilon^2 = 1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} = 1 - \left(\frac{\nu_0^+}{\mu}\right)^2$ (paramètre spectral).

Le premier cas limite, $\varepsilon = 0$, correspond au processus en bande infiniment étroite (chaque échantillon est une sinusoïde) tel que la fréquence de passage par zéro à pente positive soit égal à la fréquence de passage par un maximum et aussi égal à la fréquence dominante n_{dom} ($m_2 = n_{dom}^2 m_0$ et $m_4 = n_{dom}^2 m_2$). Dans ce cas, la loi de densité de probabilité des maxima dégénère en une loi de Rayleigh : aucun maximum relatif n'est négatif et le maximum moyen (différent du maximum le plus probable dans ce cas!) est donné par

$$\overline{MAX} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{m_0} \approx 1.25 \sqrt{m_0}. \quad (8.2.46)$$

L'autre cas limite, $\varepsilon = 1$, correspond à un processus en bande large pour lequel la fréquence de passage par un maximum relatif est beaucoup plus grande que la fréquence de passage par zéro. Dans ce cas, les maxima sont nuls en moyenne. Leur distribution tend vers une distribution gaussienne dont l'écart-type correspond à celui du processus lui-même.

Le paramètre spectrale d'un processus en bande limitée s'exprime par

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\frac{\Delta \omega^2}{\omega_0^2} \left(15 + \frac{\Delta \omega^2}{\omega_0^2}\right)}{5 + 10 \frac{\Delta \omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\Delta \omega^4}{\omega_0^4}}}. \quad (8.2.47)$$

Il varie entre 0 et 2/3 du processus en bande étroite au processus en bande large, cf. Fig. 8.2.13. La fréquence de passage par un maximum (relatif) s'exprime par la relation

$$\mu = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{25 + 3 \frac{\Delta \omega^2}{\omega_0^2}}{15 + 5 \frac{\Delta \omega^2}{\omega_0^2}} \frac{\Delta \omega^2}{\omega_0^2}} \quad (8.2.48)$$

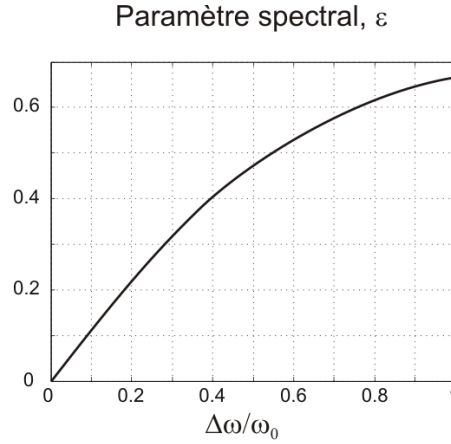


FIGURE 8.2.13 – Paramètre spectral du processus en bande limitée.

pour laquelle on peut constater que $\mu \simeq \frac{\omega_0}{2\pi}$ pour $\Delta\omega \ll$ (processus en bande étroite, un maximum par période). La figure 8.2.14 illustre le calcul des fréquences de passage par un maximum. Dans l'échantillon en bande étroite généré, on peut recenser 112 passages par un maximum pendant 10 secondes, ce qui correspond précisément avec la prédiction par la formule (8.2.48) où $\omega_0 = 70\text{rad/s}$, $\Delta\omega = 5\text{rad/s}$ ($\mu = 11.2\text{ Hz}$). Pour l'échantillon en bande large, il faut comparer 156 passages sur 10 secondes à une fréquence ($\mu = 16.0\text{ Hz}$) obtenue avec la relation (8.2.48) où $\omega_0 = 70\text{rad/s}$, $\Delta\omega = 60\text{rad/s}$, ce qui reste relativement précis. $\square$

Statistiques des valeurs extrêmes

Le paragraphe précédent vient d'expliquer comment obtenir la densité de probabilité des maxima relatifs ainsi que leur fréquence d'occurrence. Connaissant la durée du phénomène observé, on peut donc en déduire le nombre de fois où le processus passera par un maximum. Nous nous proposons maintenant de déterminer la densité de probabilité de l'extremum, c'est-à-dire du plus grand de ces maxima relatifs atteints. Admettons que la densité de probabilité des maxima relatifs soit connue et représentée par la fonction $p_{\max}(x)$. Pour rappel, la fonction de répartition qui y est associée s'exprime par

$$P_{\max}(a) = \int_{-\infty}^a p_{\max}(x)dx = \text{prob}(x \leq a). \quad (8.2.49)$$

Considérons un ensemble de n valeurs x_i , c'est-à-dire de n maxima relatifs et définissons une nouvelle variable $y^{(n)}$ comme étant le maximum de ces n valeurs, c'est-à-dire l'extremum

$$y^{(n)} = \max_{i=1,\dots,n} x_i. \quad (8.2.50)$$

A condition que les n maxima étudiés soient choisis indépendamment l'un de l'autre,

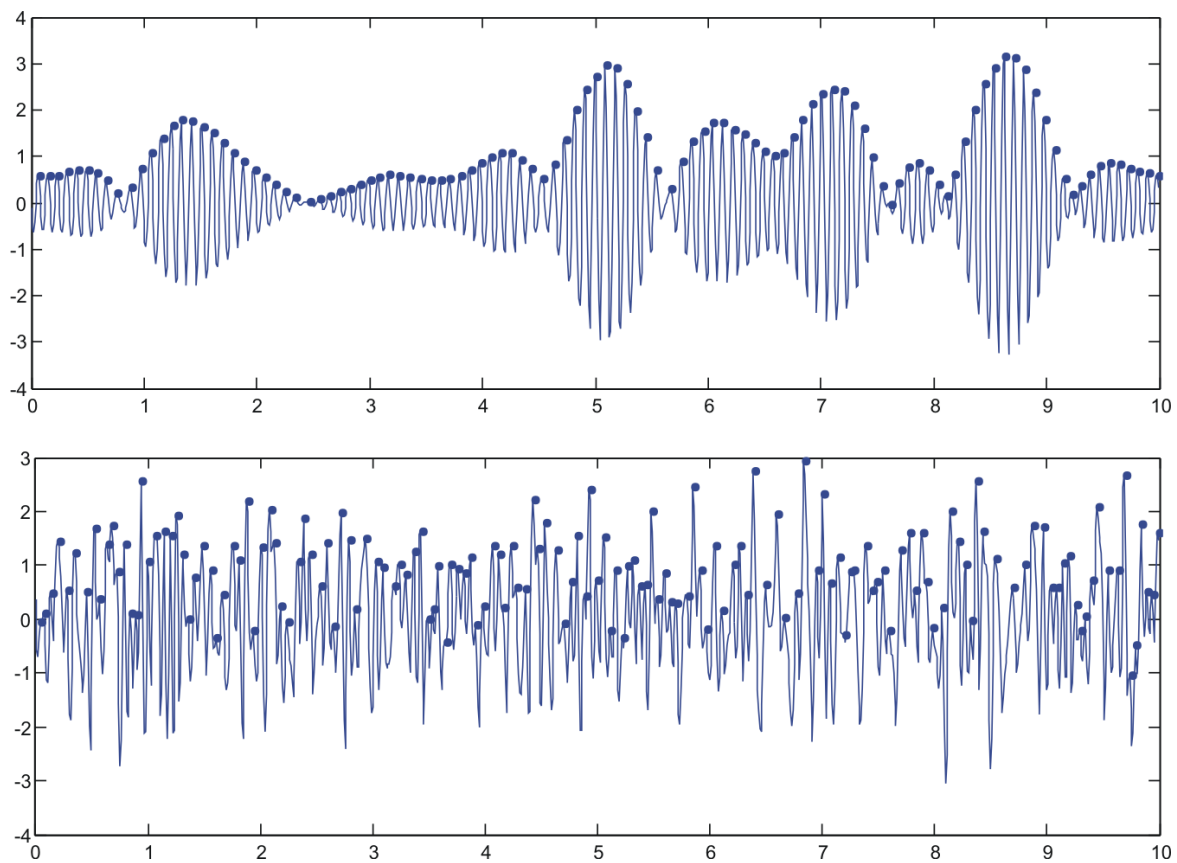


FIGURE 8.2.14 – Illustration de processus en bandes étroite et large : passages par un maximum.

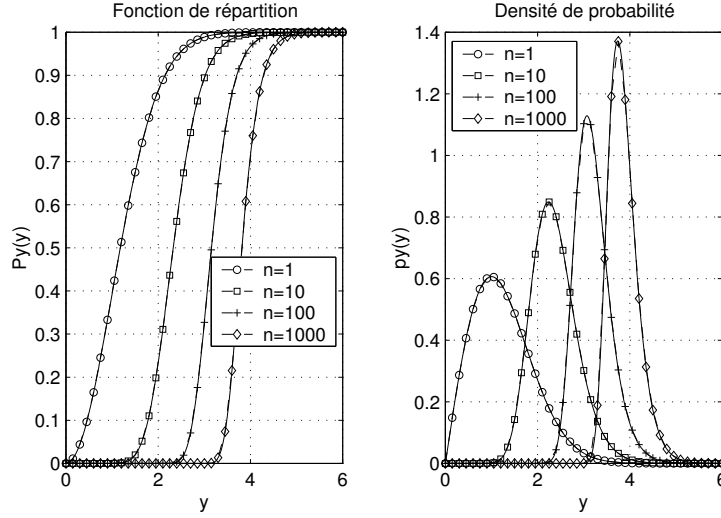


FIGURE 8.2.15 – Fonction de répartition et densité de probabilité de la variable y (maximum de n valeurs distribuées selon une loi de Rayleigh).

la fonction de répartition de cette nouvelle variable est donnée par :

$$P_{y^{(n)}}(a) = \text{prob}(y^{(n)} \leq a) = [P_{\max}(a)]^n. \quad (8.2.51)$$

En effet, pour que $y^{(n)}$ soit inférieur à une valeur fixée a , il faut que chacune des n valeurs x_i le soit aussi. A partir de la fonction de répartition, il est ensuite possible d'obtenir la densité de probabilité de l'extremum

$$p_{y^{(n)}}(a) = \frac{dP_{y^{(n)}}(a)}{da} = n [P_{\max}(a)]^{n-1} \frac{dP_{\max}(a)}{da} = n [P_{\max}(a)]^{n-1} p_x(x). \quad (8.2.52)$$

Imaginons le cas d'un processus gaussien centré et en bande étroite. Dans ce cas, nous avons vu au paragraphe précédent, cf (8.2.45), que la densité de probabilité des maxima relatifs dégénérât en une distribution de Rayleigh

$$p_{\max}(x) = \frac{x}{\sigma_x^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \leftrightarrow P_{\max}(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \quad (8.2.53)$$

La fonction de répartition du maximum des n valeurs et la densité de probabilité qui en est déduite sont données par :

$$\begin{aligned} P_{y^{(n)}}(a) &= [P_x(a)]^n = \left[1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}\right]^n \\ p_y(a) &= n \left[1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}\right]^{n-1} \frac{x}{\sigma_x^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}. \quad \square \end{aligned} \quad (8.2.54)$$

On constate sur le graphique de la figure 8.2.15 que l'on retrouve, pour une valeur de $n = 1$, la densité de probabilité des maxima relatifs, ce qui est effectivement

conforme à l'intuition. Plus la valeur de ce paramètre n augmente, plus le nombre de maxima considérés augmente et plus le pic est pointu.

De même que les moyennes et variances sont utilisées en pratique pour caractériser des densités de probabilités, lorsqu'il s'agit de valeurs extrêmes, d'autres grandeurs représentatives sont également utilisées :

- le maximum attendu $U^{(n)}$ sur une série de n maxima. Il est tel que : $P_x(U^{(n)}) = 1 - \frac{1}{n}$ et représente la valeur qui n'est dépassée en moyenne qu'une seule fois sur un ensemble de n valeurs ;
- le maximum le plus probable $\mu^{(n)}$ qui correspond à la valeur maximale de la densité de probabilité : $\left. \frac{dp_{y^{(n)}}(a)}{da} \right|_{a=\mu^{(n)}} = 0$;
- le maximum moyen sur n maxima $\overline{y^{(n)}} = \int_{-\infty}^{+\infty} yp_{y^{(n)}}(a)da$: il correspond à la valeur moyenne (au sens habituel) des n maxima relevés, c'est-à-dire au barycentre de la densité de probabilité ;
- la variance du maximum sur n maxima $[\sigma^{(n)}]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \overline{y^{(n)}})^2 p_{y^{(n)}}(a)da$: elle correspond à la variance (au sens habituel) des n maxima relevés ;
- l'augmentation logarithmique $\alpha^{(n)}$ qui mesure la vitesse à laquelle augmente la valeur du maximum attendu lorsque la taille de l'échantillon augmente : $\frac{1}{\alpha^{(n)}} = \frac{dU^{(n)}}{d \ln(n)} = n \frac{dU^{(n)}}{dn}$.

Pour l'exemple développé jusqu'ici (distribution de Rayleigh pour les maxima relatifs), on peut déterminer les valeurs prises par les grandeurs qui viennent d'être définies :

- le maximum attendu : $1 - e^{-\frac{U^{(n)2}}{2\sigma_x^2}} = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow U^{(n)} = \sqrt{2 \ln(n)} \sigma_x$
- les formes analytiques du maximum le plus probable et du maximum moyen sont trop compliquées à obtenir ; elles peuvent cependant être calculées numériquement. Le graphique de la figure 8.2.16 reprend l'évolution des trois maxima définis en fonction du nombre de maxima considérés. Il indique que le maximum moyen est toujours légèrement supérieur au maximum le plus probable. Ceci traduit l'asymétrie de la densité de probabilité autour de sa valeur maximale : tout comme la courbe de Rayleigh associée à $n = 1$, lorsque le nombre de maxima considérés est plus important, il y a toujours un peu plus de "matière" à droite du maximum de la courbe plutôt qu'à gauche ;
- l'augmentation logarithmique : $\alpha^{(n)} = \frac{1}{n \frac{dU^{(n)}}{dn}} = \frac{\sqrt{2 \ln(n)}}{\sigma_x}$

□

Ainsi que cela vient d'être mis en évidence dans l'exemple précédent, le calcul analytique des différentes moyennes définies devient rapidement compliqué. C'est pour cette raison que différentes fonctions asymptotiques ont été introduites. Ce sont des fonctions simples qui permettent d'approcher le comportement des densités de probabilité réelles dans le voisinage des différentes moyennes. On distingue ainsi les asymptotes de Gumbel, Frechet, Weibull ou encore Cramer.

Ces nouvelles fonctions introduites restent néanmoins assez compliquées à utiliser mais, pour de grandes valeurs du nombre n de maxima relatifs, les relations suivantes

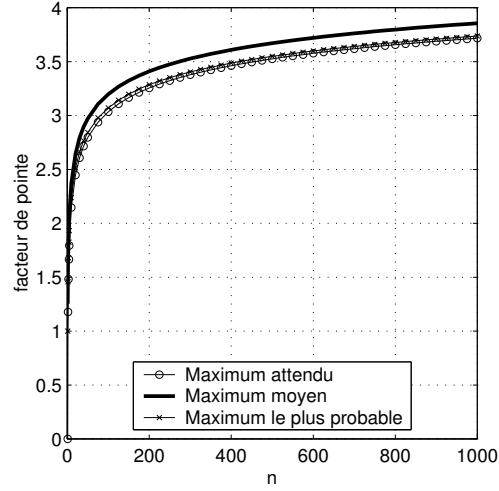


FIGURE 8.2.16 – Représentation des différents types d’extrema pour un processus en bande étroite.

fournissent des résultats assez précis :

$$\overline{y^{(n)}} = U^{(n)} + \frac{\gamma}{\alpha^{(n)}} \quad (8.2.55)$$

$$[\sigma^{(n)}]^2 = \frac{\pi}{6\alpha^{(n)}} \quad (8.2.56)$$

où γ est la constante d’Euler ($\gamma = 0.5772$).

Ces formules peuvent être appliquées à un processus gaussien centré dont la largeur de bande n’est pas nécessairement étroite ($\varepsilon \neq 0$). Au paragraphe précédent, nous avons déterminé que la densité de probabilité des maxima relatifs variait avec le paramètre spectral ε caractérisant le processus aléatoire :

$$p_{\max}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \varepsilon e^{-\frac{\eta^2}{2\varepsilon^2}} + \sqrt{1-\varepsilon^2} \eta e^{-\frac{\eta^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \eta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\} \quad (8.2.57)$$

La fonction de répartition associée à cette densité de probabilité s’obtient par intégration :

$$\begin{aligned} P_{\max}(\eta) &= \int_{-\infty}^{\eta} p_{\max}(\eta^*) d\eta^* = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sqrt{1-\varepsilon^2} \right) + \int_{-\infty}^{\frac{\eta}{\varepsilon}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1-\varepsilon^2} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \eta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\} \end{aligned} \quad (8.2.58)$$

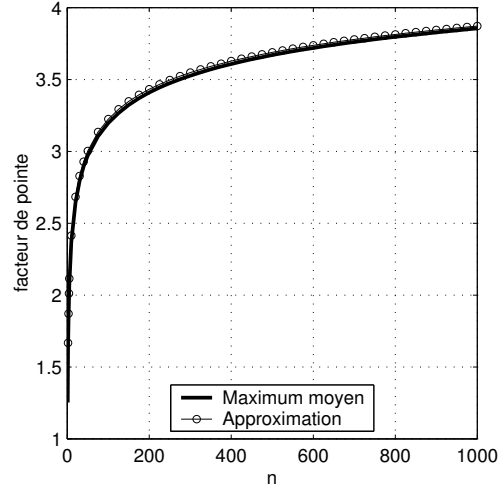


FIGURE 8.2.17 – Validité de l'approximation dans le cas d'un processus de Rayleigh.

Il est évident que la fonction $[P_{\max}(\eta)]^n$ devient encore plus compliquée à traiter analytiquement. C'est pour cette raison que les formules (8.2.55) et (8.2.56) sont utilisées dans ce cas. Les formes analytiques du maximum attendu $U^{(n)}$ et de l'augmentation logarithmique $\alpha^{(n)}$ qui interviennent dans ces relations sont difficiles à exprimer analytiquement. Ces deux grandeurs peuvent cependant être approchées à l'aide de développements asymptotique (en fonction du paramètre spectral ε)

$$\begin{aligned} U^{(n)} &= \sqrt{2 \ln(n\sqrt{1-\varepsilon^2})} \sqrt{m_0} \\ \alpha^{(n)} &= \frac{\sqrt{2 \ln(n\sqrt{1-\varepsilon^2})}}{\sqrt{m_0}}. \end{aligned} \quad (8.2.59)$$

Ces deux formules sont valables pour autant que l'on se trouve dans les limites

$$\begin{aligned} \varepsilon &< 0.9 \\ n &> 50. \end{aligned} \quad (8.2.60)$$

Lorsque le processus est en bande étroite ($\varepsilon = 0$), ces relations dégénèrent en les formes analytiques calculées à l'occasion de l'exemple précédent. Pour un processus stationnaire dont on examine un intervalle de temps de durée T , le nombre de maxima relatifs vaut

$$n = \mu T = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (8.2.61)$$

où μ représente la fréquence de passage par un maximum relatif, cf. (8.2.44). On déduit donc que

$$n\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} = T\nu_0^+ = n_0^+ \quad (8.2.62)$$

où ν_0^+ représente la fréquence de passage par zéro et n_0^+ représente le nombre de passages par zéro durant la période d'observation T . Le maximum moyen et son écart-type s'écrivent donc finalement sous la forme

$$\overline{y^{(n)}} = g \underbrace{\sqrt{m_0}}_{\sigma_x} \quad (8.2.63)$$

$$[\sigma^{(n)}]^2 = \frac{\pi \sqrt{m_0}}{6 \sqrt{2 \ln(T \nu_0^+)}} \quad (8.2.64)$$

où $g = \left[\sqrt{2 \ln(T \nu_0^+)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln(T \nu_0^+)}} \right]$ est appelé le facteur de pointe du processus aléatoire x . Ce facteur revêt une importance majeure puisqu'il permet de déterminer l'extremum moyen d'un processus aléatoire gaussien à partir de son écart-type uniquement. Etant donné que pour des valeurs importantes du nombre n de maxima relatifs observés, la densité de probabilité de l'extremum est une fonction fort pointue, le dimensionnement d'une structure dans les conditions extrêmes recourt généralement à l'utilisation de l'extremum moyen $\overline{y^{(n)}}$.

L'expression du facteur de pointe a été obtenue en supposant que :

$$P_{y^{(n)}}(a) = \text{prob}(y^{(n)} \leq a) = [P_x(a)]^n \quad (8.2.65)$$

Ceci revient à supposer que les maxima se produisent indépendamment l'un de l'autre (modèle de Poisson), ce qui n'est pas tout à fait vrai dans la mesure où les maxima considérés sont successifs. La discussion de cette hypothèse a mené à l'élaboration d'autres modèles de facteurs de pointes plus précis (VanMarcke, par exemple).

8.3 L'analyse dynamique stochastique

Dans ce paragraphe, nous allons développer les notions relatives à la résolution de l'équation du mouvement pour laquelle le membre de droite est un processus aléatoire. De même que pour les méthodes déterministes développées ci-dessus, la résolution peut s'effectuer dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel, le passage de l'un à l'autre s'effectuant à l'aide de la transformation de Fourier.

Les développements sont d'abord entrepris dans le domaine temporel car, pour une personne non familière avec ce type de problème, cela permet de le traiter de la même manière que pour l'analyse déterministe. D'autre part, cette manière de présenter les choses montre que la résolution déterministe habituelle peut être considérée comme un cas particulier de la méthode probabiliste.

8.3.1 Dans le domaine temporel

Etant donné que les efforts appliqués à la structure sont maintenant supposés être caractérisés par une densité spectrale de puissance ou, de façon équivalente, par une

fonction d'autocorrélation, l'équation du mouvement prend la forme suivante

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (8.3.1)$$

où cette fois les variables $\ddot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{p}$ sont des processus aléatoires. Dans ce cours nous allons nous limiter à l'analyse de systèmes à un degré de liberté et donc résoudre une équation du type

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = p \quad (8.3.2)$$

où q et p sont des processus aléatoires. Cela signifie que nous serons en mesure d'étudier soit la réponse de structures simples pouvant être modélisées par un seul degré de liberté, soit la réponse dans un mode d'une structure plus complexe. Par le principe d'extension qui nous a permis de passer du système 1-DDL au système M-DDL déterministe, les développements suivants peuvent être également étendus à l'analyse stochastique de systèmes M-DDL.

Afin de faire le lien avec l'approche déterministe, il est assez commode de se représenter l'ensemble Υ_p de toutes les sollicitations p possibles dont la densité spectrale de puissance correspond à la densité donnée. L'ensemble Υ_p représente donc le "chapeau" hors duquel les processus aléatoires p doivent être tirés.

Pour chacune de ces réalisations, l'équation du mouvement peut être résolue et une réponse particulière q peut être attribuée. En répétant l'opération sur l'infinité de sollicitations qui constituent Υ_p , on obtient alors une ensemble de réponses Υ_q . Les caractéristiques statistiques (la densité spectrale de puissance, essentiellement) communes à toutes les fonctions de Υ_q sont les grandeurs recherchées.

Analytiquement, chacune des réponses s'obtient à l'aide de l'intégrale de Duhamel

$$q(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (8.3.3)$$

où $h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi_1\omega_1 t} \sin \omega_d t$ représente la réponse impulsionnelle de cet oscillateur simple. La moyenne et la variance de la réponse dynamique q sont obtenues en moyennant sur tous les échantillons. On définit pour ce faire l'opérateur $\mathcal{E}$ qui représente une espérance mathématique réalisée à travers l'échantillonnage. En appliquant cet opérateur à q , on obtient

$$\mathcal{E}[q(t)] = \mu_q(t) = \int_0^t \mathcal{E}[p(\tau)] h(t - \tau) d\tau, \quad (8.3.4)$$

soit

$$\mu_q(t) = \int_0^t \mu_p(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (8.3.5)$$

De même, l'application de l'opérateur $\mathcal{E}$ à

$$\begin{aligned} q(t_1)q(t_2) &= \int_0^{t_1} p(\tau_1) h(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \int_0^{t_2} p(\tau_2) h(t_2 - \tau_2) d\tau_2 \\ &= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} p(\tau_1) p(\tau_2) h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

donne

$$\mathcal{E} [q(t_1)q(t_2)] = \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \mathcal{E} [p(\tau_1)p(\tau_2)] h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (8.3.6)$$

Le facteur $\mathcal{E} [p(\tau_1)p(\tau_2)]$ correspond à la seconde fonction moment du processus aléatoire de sollicitation. Cette formule établit donc la relation entre les fonctions moments de la sollicitation extérieure et de la réponse dynamique. C'est l'équivalent stochastique de l'équation de Duhamel qui donne la relation déterministe entre sollicitation et réponse.

Dans le contexte d'une sollicitation stationnaire, le facteur $\mathcal{E} [p(\tau_1)p(\tau_2)]$ correspond à la fonction d'autocorrélation et s'exprime en fonction de $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$ uniquement. Pour autant que la sollicitation soit stationnaire, on peut donc écrire

$$\mathcal{E} [q(t_1)q(t_2)] = \int_0^{t_1} \int_{\tau_1 - t_2}^{\tau_1} R_p(\Delta\tau) h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_1 + \Delta\tau) d\Delta\tau d\tau_1. \quad (8.3.7)$$

En particulier pour $t_1 = t_2$, on retrouve le moment d'ordre 2 de la réponse

$$\overline{q^2}(t) = \int_0^t \int_{\tau_1 - t}^{\tau_1} R_p(\Delta\tau) h(t - \tau_1) h(t - \tau_1 + \Delta\tau) d\Delta\tau d\tau_1. \quad (8.3.8)$$

Il est important de remarquer que, même si la sollicitation est stationnaire, les caractéristiques statistiques de la réponse varieront dans le temps. On peut comprendre ceci en admettant que la structure part d'une condition initiale déterministe et rentre en vibration sous l'effet du chargement aléatoire. Après un instant très court (vis-à-vis de la constante de temps du système), les déplacements seront très probablement plus faibles qu'après un laps de temps beaucoup plus long. Cela se traduit en termes de probabilités par un carré moyen $\overline{q^2}$ plus faible aux premiers instants qu'après un temps assez long.

Prenons l'exemple d'un oscillateur à un degré de liberté sollicité par un bruit blanc centré ($\mu_p = 0$) d'intensité S_0 . La fonction d'autocorrélation associée à un bruit blanc est une fonction de Dirac centrée en $\Delta\tau = 0$ et d'intensité $R_p = 2\pi S_0$. Puisque la sollicitation moyenne est nulle, il en est de même de la réponse moyenne, cf. (8.3.5). Le carré moyen de la réponse s'identifie donc à sa variance et s'exprime par

$$\sigma_q^2(t) = \int_0^t \int_{\tau_1 - t}^{\tau_1} R_p \delta(\Delta\tau) h(t - \tau_1) h(t - \tau_1 + \Delta\tau) d\Delta\tau d\tau_1. \quad (8.3.9)$$

En raison de la fonction de Dirac, l'intégration sur $\Delta\tau$ est triviale¹⁰, et donne

$$\sigma_q^2(t) = R_p \int_0^t h^2(t - \tau_1) d\tau_1. \quad (8.3.10)$$

10. puisque $\tau_1 \in [0, t]$, $\tau_1 - t \in [-t, 0]$ et le domaine d'intégration de $\tau_1 - t$ à τ_1 couvre nécessairement la plage singulière du Dirac

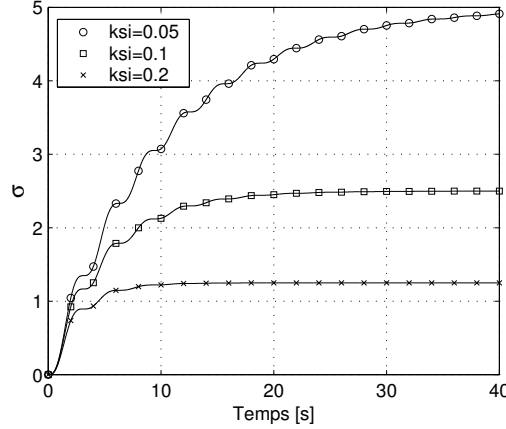


FIGURE 8.3.1 – Réponse transitoire d'un oscillateur soumis à un bruit blanc et partant du repos (représentation temporelle).

En remplaçant $h(t)$ par son expression pour l'oscillateur simple, on obtient après quelques développements l'expression du carré moyen de la réponse

$$\sigma_q^2(t) = \frac{R_p}{4\xi_1\omega_1^3m^2} \left[1 - e^{-2\xi_1\omega_1 t} \left(\frac{1}{1 - \xi_1^2} - \frac{\xi_1^2}{1 - \xi_1^2} \cos(2\omega_d t) + \frac{\xi_1}{\sqrt{1 - \xi_1^2}} \sin(2\omega_d t) \right) \right]. \quad (8.3.11)$$

Cette formule permet de retrouver la constante de temps caractéristique du système $\frac{1}{2\xi_1\omega_1}$ (coefficients de l'argument de l'exponentielle). Elle donne une idée du temps nécessaire avant d'obtenir la stabilisation du système. Ceci est conforté par les courbes de la figure 8.3.1 qui indiquent une période de mise en régime d'autant plus importante que le coefficient d'amortissement relatif est faible. La variance est exprimée par une exponentielle modulée par des sinus et cosinus. C'est de ces dernières fonctions que proviennent les oscillations autour de l'exponentielle. Leur période est égale à la moitié de la période propre du système, ce qui est logique puisque la variance est une grandeur qui "gomme" les signes : dans le cas d'une oscillation harmonique, ce qu'il se passe entre 0 et $T/2$ est identique en valeur absolue à ce qu'il se passe entre $T/2$ et T . On remarque également que l'amplitude des oscillations autour de l'exponentielle est d'autant plus faible que l'amortissement ξ_1 est grand ; il en est de même de l'écart-type maximum, ce qui semble être conforté par un avis intuitif.

Après un laps de temps suffisamment important, la variance de la réponse se stabilise autour de la valeur

$$\sigma_q^2(t) = \frac{R_p}{4\xi_1\omega_1^3m^2} = \frac{\pi S_0\omega_1}{2\xi_1k^2}. \quad (8.3.12)$$

La figure 8.3.1 représente clairement la non stationnarité de la réponse, bien que la sollicitation soit stationnaire. Il s'agit de l'équivalent probabiliste de la réponse d'une structure à une sollicitation harmonique pour laquelle il existe également un terme transitoire s'atténuant au cours du temps. En déterministe comme en stochastique, c'est généralement la partie stationnaire (stabilisée) de la réponse qui est intéressante. L'analyse probabiliste dans le domaine temporel est donc un outil puissant, mais qui fournit une quantité d'information parfois trop importante. A moins de vouloir calculer effectivement une réponse

transitoire, cette méthode temporelle n'est guère commode car l'état stationnaire ne peut pas être estimé directement. $\square$

8.3.2 Dans le domaine fréquentiel

De l'étude déterministe des structures à un degré de liberté, on a pu apprendre que l'approche fréquentielle permet de ne conserver que la composante stationnaire de la réponse. Cette approche semble donc être l'approche la plus adaptée pour ne déterminer que l'état stabilisé de la réponse.

Dans le domaine fréquentiel, l'analyse déterministe se résume à

$$\mathcal{Q}(\omega) = \mathcal{H}(\omega) \mathcal{P}(\omega) \quad (8.3.13)$$

où $\mathcal{H}$ est la fonction de transfert et $\mathcal{P}$ est la transformée de Fourier de la sollicitation. Partant de l'estimation statistique de la densité spectrale de puissance, cf. (8.2.19), on peut écrire

$$\begin{aligned} S_q(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |\mathcal{Q}(\omega, T)|^2 = |\mathcal{H}(\omega)|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |\mathcal{P}(\omega, T)|^2 \\ &= |\mathcal{H}(\omega)|^2 S_p(\omega). \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

Cette relation montre que la densité spectrale de la réponse d'un oscillateur simple s'obtient en multipliant la densité spectrale de la sollicitation par la norme au carré de la fonction de transfert. Connaissant maintenant la densité spectrale de puissance des déplacements de la structure, il est facile d'obtenir les variances ou autres moments spectraux (par intégration sur les fréquences). Puisque l'on sait également que la densité spectrale de puissance contient toute l'information nécessaire à l'estimation des grandeurs extrémales, les valeurs de dimensionnement peuvent être obtenues comme un sous-produit immédiat des moments spectraux.

La densité spectrale de la réponse de l'oscillateur simple sollicité par un bruit blanc d'intensité S_0 s'écrit (cf Fig. 8.3.2)

$$S_q(\omega) = S_0 |H(\omega)|^2 = \frac{S_0}{k^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\xi_1 \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}. \quad (8.3.15)$$

La variance du déplacement de l'oscillateur s'obtient par intégration de la densité spectrale sur les fréquences

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{S_0}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\xi_1 \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} d\omega = \frac{\pi S_0 \omega_1}{2\xi_1 k^2}. \quad (8.3.16)$$

Cette relation est identique à celle obtenue lors de la résolution dans le domaine temporel. Le chemin utilisé pour y arriver est cependant différent dans la mesure où cette fois, l'état stabilisé du système a pu être directement calculé. $\square$

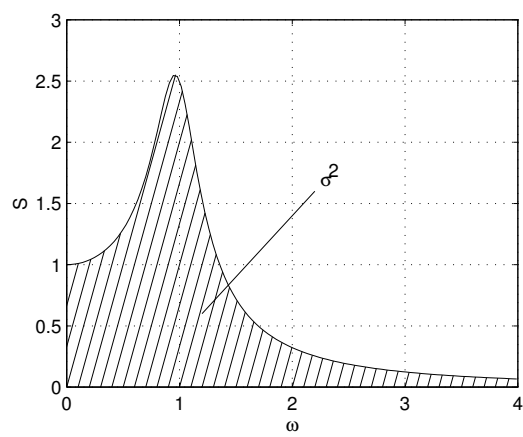


FIGURE 8.3.2 – Réponse d'un oscillateur soumis à un bruit blanc (représentation fréquentielle).

Chapitre 9

Analyse sismique et spectres de réponses

9.1 Généralités sur les séismes

Under progress

Chapitre 10

Vibrations et structures du génie civil

10.1 Structures soumises à des sollicitations de vent

10.1.1 Généralités sur le vent

Under progress

10.2 Structures soumises à des sollicitations explosives

10.2.1 Généralités sur les impacts et explosions

10.3 Structures soumises à des sollicitations mobiles

10.3.1 Généralités sur le chargement de piéton

Under progress

10.4 Structures soumises à des sollicitations de piétons

10.4.1 Généralités sur le chargement de piéton

Under progress

10.5 Amortissement de structures

10.5.1 Généralités sur le chargement de piéton

Under progress

10.6 Pathologies vibratoires des soumises

10.6.1 Généralités sur le chargement de piéton

Under progress

10.7 Dynamique des câbles

10.8 Introduction

xxx

Bibliography

Index

A

Analyse, 50

D

Déterminisme, 51

E

Exercices, 59, 72, 103

Q

Quasi-statique, 50