

QUESTIONS SPECIALES
DE
TECHNOLOGIE

J.F. DEBONGNIE

2003

ISBN 2-9600313-1-8

© J.F. Debongnie, 2001
Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées,
Institut de Mécanique
Chemin des Chevreuils, 1
B-4000 Liège

Tous droits réservés.
Toute reproduction, même partielle, sous quelque forme ou sur quelque support que ce soit,
est strictement interdite.

D/2001/0480/26

1. Flexion plastique d'une poutre

Dans le domaine élastique, une poutre soumise à la flexion subit des contraintes (fig. 1)

$$\sigma = \frac{M y}{I}$$

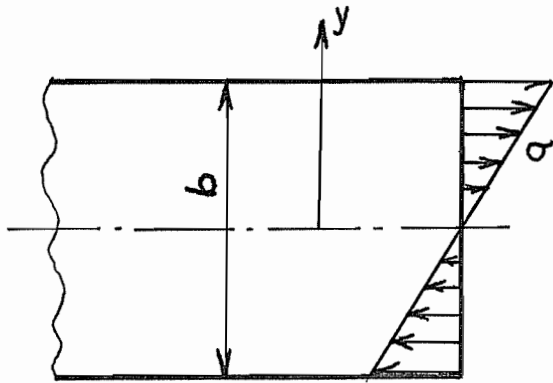


fig 1 - distribution élastique des contraintes

Pour de plus grands moments, on voit apparaître la plasticité. Nous admettrons que celle-ci se manifeste par un palier infiniment long (modèle de Prandtl, fig. 2). Dès lors, si l'on admet que la relation de compatibilité s'exprime

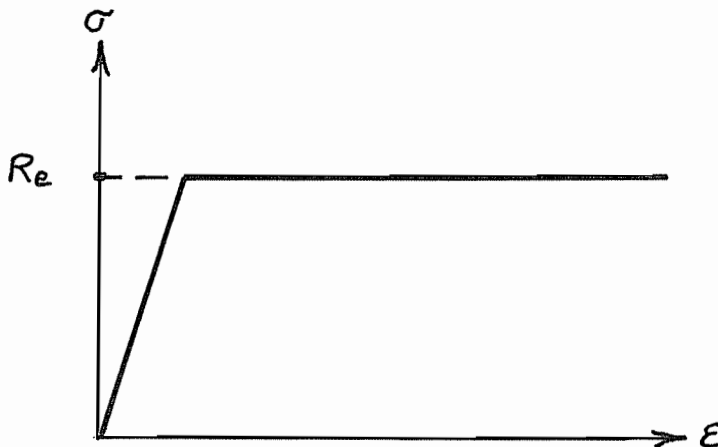


fig. 2 - Plasticité à la Prandtl

toujours par la loi

$$\varepsilon = \chi y ,$$

χ étant la courbure, on obtient

$$|\sigma| = \begin{cases} |E\chi y| & \text{si } < Re \\ Re & \text{sinon} \end{cases}$$

(voir fig. 3)

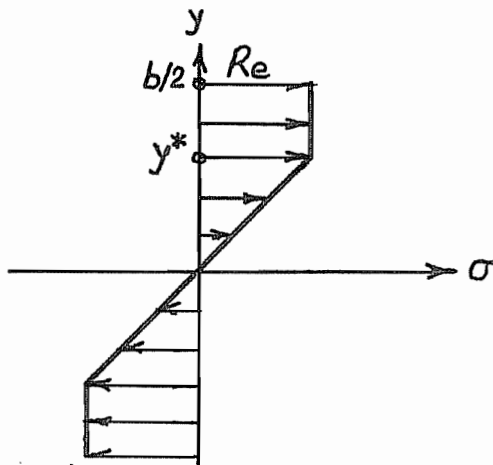


fig. 3 - distribution élasto-plastique des contraintes en flexion

La séparation entre la zone élastique et la zone plastique se situe en

$$y^* = \pm \frac{Re}{E\chi} \quad (1)$$

On peut faire disparaître la courbure en notant

$$\sigma = Re \frac{y}{y^*} \quad \text{dans la zone élastique}$$

$$\sigma = \pm Re \quad \text{dans la zone plastique}$$

Le moment vaut alors, par unité de largeur de la poutre,

$$\begin{aligned} M' &= 2 \int_0^{y^*} Re \left(\frac{y}{y^*} \right) y \, dy + 2 \int_{y^*}^{b/2} Re \, y \, dy \\ &= Re \left(\frac{b^2}{4} - \frac{y^{*2}}{3} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Ce moment est une fonction décroissante de y^* . Le moment maximal correspond à $y^* = 0$ et vaut

$$M' = Re \frac{b^2}{4} .$$

c'est ce qu'on appelle le *moment plastique (ultime)*. On le note souvent M'_p .

On objectera que c'est une fiction, car le rapprochement des deux équations (1) et (2) donne

$$\frac{M'}{M'_p} = 1 - \frac{4 y^{*2}}{3 b^2} = 1 - \frac{4 Re^2}{3 (E\chi b)^2} ,$$

c'est-à-dire que l'on n'a $M' = M'_p$ que pour $\chi = \infty$. Examinons la question de plus près. Dans le domaine élastique, on a

$$\frac{M'}{M'_p} = \frac{1}{3} \frac{E\chi b}{Re}$$

Ceci mène au diagramme de la figure 4, donnant M'/M'_p en fonction de la variable $E\chi b/Re$.

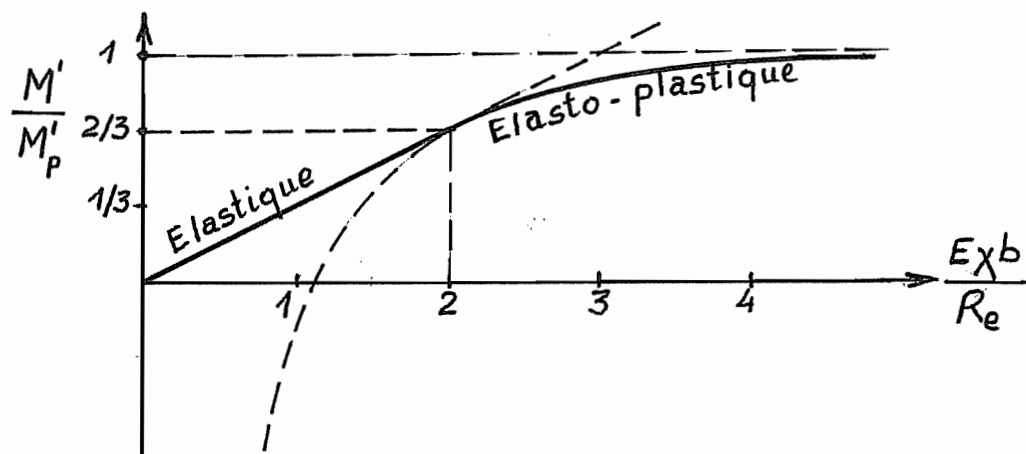


Fig. 4 - Diagramme moment-courbure en variables sans dimension

En fait, on a

$$\frac{4}{3} \left(\frac{Re}{E\chi b} \right)^2 = 10^{-2}$$

pour

$$\chi b = \frac{Re}{E} \cdot 10 \sqrt{4/3} = 11,55 Re/E$$

Dans le cas d'un acier courant,

$$Re = 250 \text{ MPa} \quad , \quad E = 210 \ 000 \text{ MPa}$$

ce qui donne

$$\chi b = 11,55 \cdot \frac{250}{210 \ 000} = 0,01375$$

soit un rayon de courbure

$$1/\chi = b/0,01375 = 72,75 b$$

A partir de cette valeur, on peut sans grande erreur assimiler le moment au moment plastique ultime.

2. Retour élastique

lorsque le moment de flexion est relâché, on assiste à un retour élastique. Il s'agit (fig. 5) d'une distribution de contraintes élastiques de la forme

$$\sigma_r = - E \chi_r y$$

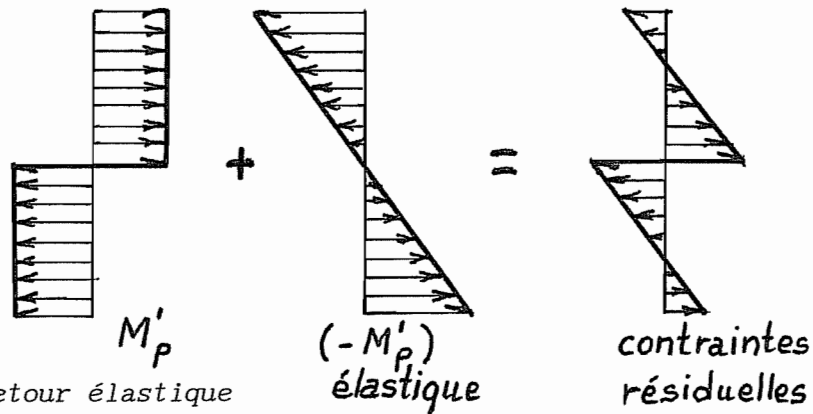


Fig. 5 - Retour élastique

telles que

$$\int_{-b/2}^{b/2} \sigma_r y dy = - M'_p$$

soit

$$E \chi_r \frac{b^3}{12} = Re \frac{b^2}{4}$$

ce qui donne une perte de courbure

$$\chi_r = \frac{3 Re}{E b}$$

Dès lors, pour obtenir une courbure χ , il faut fléchir à la courbure

$$\chi_{matrice} = \chi + \chi_r = \chi + \frac{3 Re}{E b}$$

Après mise à forme, il subsiste des contraintes résiduelles, qui ont des maxima sur les peaux et sur la fibre neutre. Sur cette dernière,

$$\sigma_{rés} (0_{\pm}) = \pm Re .$$

Sur les peaux, on a, en $y = \pm b/2$,

$$\sigma_{rés} = \pm Re \mp E \chi_r b/2 = \pm [Re - E \frac{3Re b}{E b 2}] = \mp \frac{1}{2} Re .$$

Ces contraintes résiduelles peuvent être gênantes en fatigue.

3. Effort de pliage d'une tôle

En négligeant les frottements sur les bords de la matrice (fig. 6), il faudra fournir une effort F capable de produire le moment plastique.

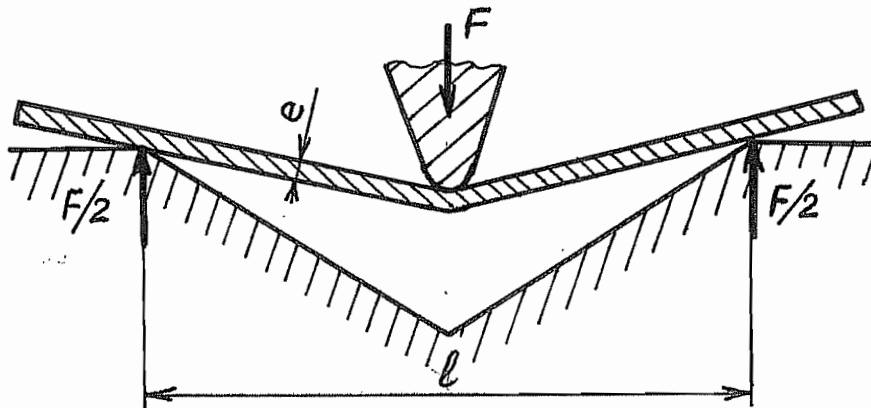


Fig. 6 - Pliage en V

Par unité de largeur de la tôle, ce moment vaut

$$M'_p = Re \frac{e^2}{4} .$$

Le moment de la force F' par unité de largeur est donné par

$$M' = F' l/4$$

Il faudra donc, par unité de largeur de la tôle, un effort

$$F' = Re \frac{e^2}{l} .$$

Dans le cas où il y a du frottement, on peut raisonner comme suit : en négligeant l'épaisseur du corps plié, pour un angle α , la charge F s'est

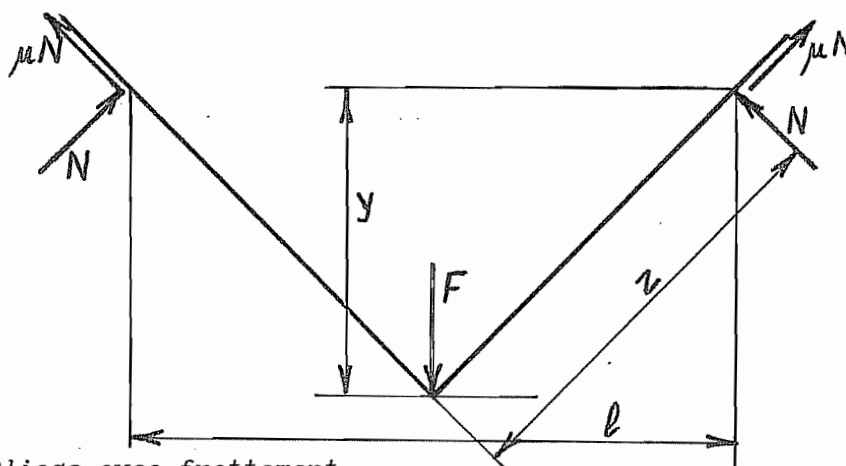


Figure 7 - Pliage avec frottement

enfoncée (fig 7) de

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

En outre, on a

$$z = \frac{1}{2 \cos \alpha}$$

Le travail virtuel de la force F vaut

$$F \delta y = F \frac{1}{2} \frac{\delta \alpha}{\cos^2 \alpha} .$$

Celui des forces de frottement vaut quant à lui

$$2 \mu N \delta z = \mu N \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha \delta \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Enfin, le travail plastique est donné par

$$M_p \cdot 2 \delta \alpha$$

On a donc

$$F \frac{1}{2} \frac{\delta \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \mu N \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha \delta \alpha}{\cos^2 \alpha} + 2 M_p \delta \alpha$$

soit, en divisant par $\frac{1}{2} \frac{\delta \alpha}{\cos^2 \alpha}$,

$$F = 2 \mu N \sin \alpha + \frac{4 M_p}{1} \cos^2 \alpha .$$

On obtient la valeur de N en exprimant l'équilibre vertical :

$$F = 2 N \cos \alpha + 2 \mu N \sin \alpha$$

soit

$$N = \frac{F}{2(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}$$

et

$$2 \mu N \sin \alpha = \frac{\mu F \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} .$$

Par conséquent,

$$F - \frac{\mu F \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = \frac{4 M_p}{1} \cos^2 \alpha$$

soit

$$F \frac{\cos \alpha + \mu \sin \alpha - \mu \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = 4 \frac{M_p}{1} \cos^2 \alpha$$

ce qui donne

$$F = 4 \frac{M_p}{I} (\cos^2 \alpha + \mu \sin \alpha \cos \alpha) = 2 \frac{M_p}{I} (1 + \cos 2\alpha + \mu \sin 2\alpha)$$

Cette force est maximale pour

$$0 = \frac{dF}{d\alpha} = 2 \frac{M_p}{I} (-2 \sin 2\alpha + 2 \mu \cos 2\alpha)$$

ce qui donne

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \mu .$$

Comme

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2}} = \frac{1}{(1 + \mu^2)^{1/2}}$$

et

$$\sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2}} = \frac{\mu}{(1 + \mu^2)^{1/2}}$$

ce maximum vaut

$$2 \frac{M_p}{I} \left[1 + \frac{1 + \mu^2}{(1 + \mu^2)^{1/2}} \right] = 2 \frac{M_p}{I} \left[1 + (1 + \mu^2)^{1/2} \right]$$

On obtient donc finalement

$$F'_{\max} = \operatorname{Re} \frac{e^2}{I} \cdot \frac{1}{2} [1 + (1 + \mu^2)^{1/2}] ,$$

valeur assez peu différente de $\operatorname{Re} e^2/I$.

Des considérations analogues permettent de traiter le pliage en U : le moment au droit du pliage vaut (fig. 8)

$$M' = \frac{F' e}{2}$$

Il vient donc

$$\frac{F' e}{2} = M'_p = \operatorname{Re} \frac{e^2}{4}$$

d'où

$$F' = \operatorname{Re} \frac{e}{2} .$$

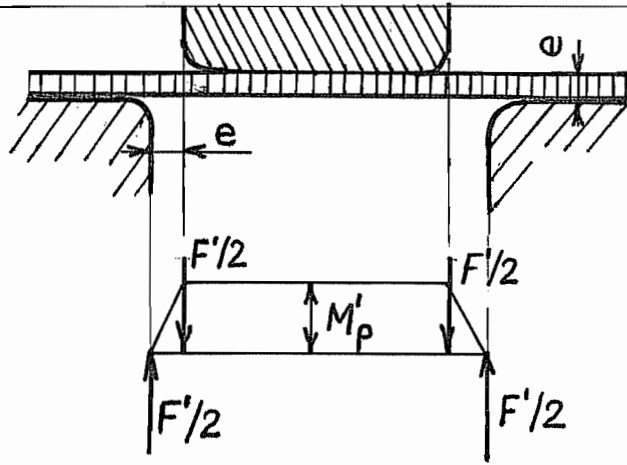


Figure 8 : pliage en U

On peut aussi raisonner par une voie énergétique : Le travail virtuel de la force appliquée est donné par (fig. 9)

$$\delta \mathcal{T}' = F' \delta y = F' e \delta \alpha$$

Le travail virtuel de déformation vaut

$$\delta \mathcal{T}'_{\text{déf}} = 2 M'_p \delta \alpha = Re \frac{e^2}{4} \delta \alpha$$

L'égalisation de ces deux travaux virtuels donne encore

$$F' = Re \frac{e}{2} .$$

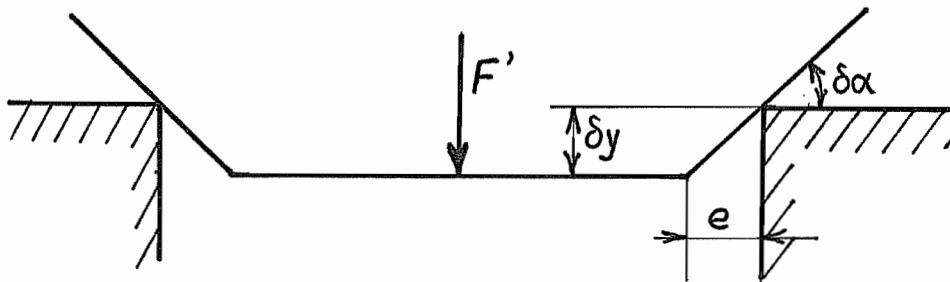


Fig. 9 - Pliage en U : Méthode des travaux virtuels

On peut aller plus loin dans cette voie : comme le montre la figure 10, l'enfoncement y est donné par

$$y = e \operatorname{tg} \alpha$$

On a donc

$$\delta y = \frac{e}{\cos^2 \alpha} \delta \alpha$$

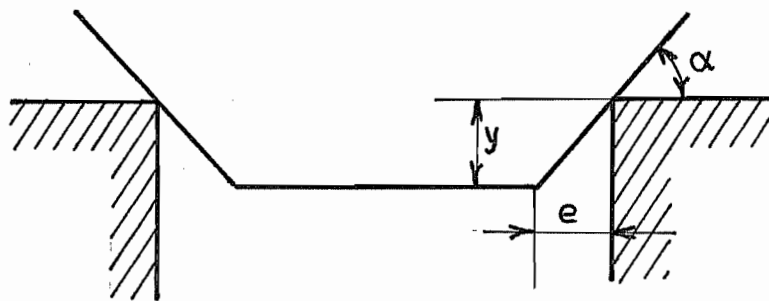


Fig. 10 - Pliage en U : étude du processus en cours

L'égalité des travaux virtuels mène donc à

$$F' \frac{e}{\cos^2 \alpha} \delta \alpha = \text{Re} \frac{e^2}{2} \delta \alpha$$

soit

$$F' = \text{Re} \frac{e}{2} \cos^2 \alpha = \text{Re} \frac{e}{2} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Cette loi est représentée à la figure 11. On constate, ce qui est bien

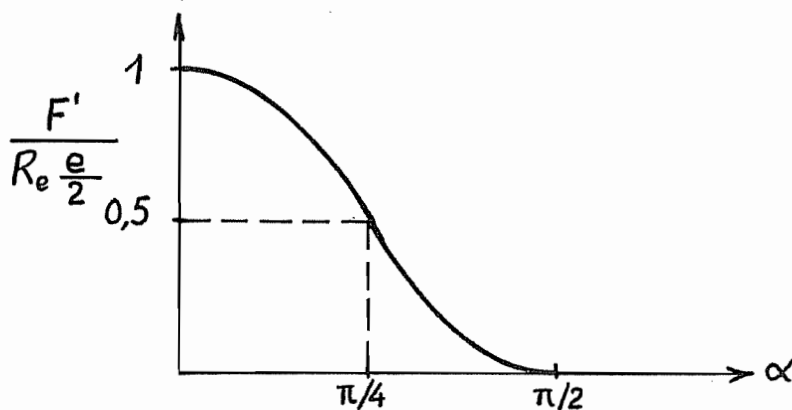


fig. 11 - Evolution de l'effort au cours du pliage en U

naturel, que l'effort tend vers zéro lorsque $\alpha \rightarrow \pi/2$. Ceci, naturellement, en négligeant les frottements.

4. Remarques sur l'application de ces formules

Les matériaux réels présentent rarement une plasticité idéale. La figure 12 donne deux diagrammes caractéristiques.

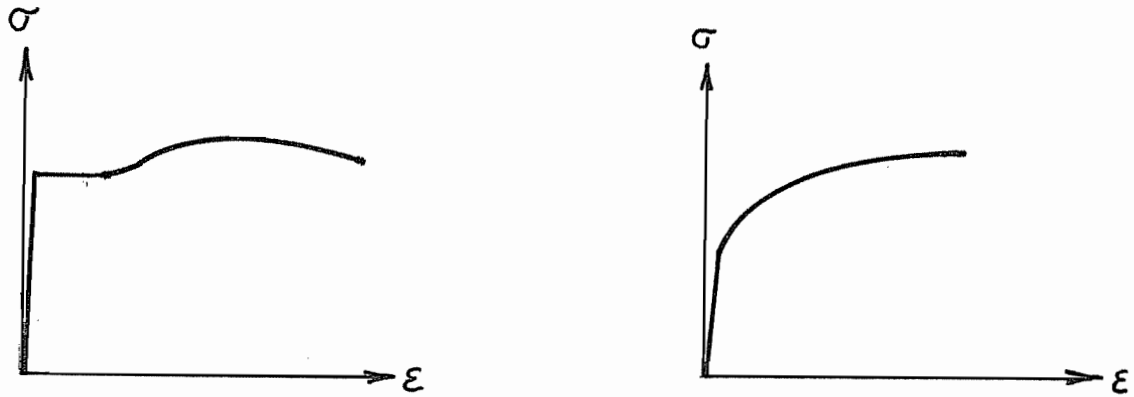


Fig. 12 - Courbes typiques de plasticité

Ceci invalide théoriquement nos conclusions. Cependant, on utilise fréquemment l'une des approximations suivantes :

(i) On remplace la limite élastique R_e par la limite de rupture R_m , ce qui va dans le sens de la sécurité si l'on s'intéresse à dimensionner la machine capable de réaliser le processus. Cette approche est très utilisée en Allemagne.

(ii) On choisit une contrainte moyenne représentant bien le processus, située entre R_e et R_m . Nous verrons un exemple de cette façon de faire lors de l'étude du laminage (chapitre 3)

CHAPITRE 2 - THÉORIE DE L'ÉCOULEMENT PLASTIQUE

1. Généralités

Un grand nombre de problèmes de formage se ramènent à des écoulements plastiques. Nous en ferons une description eulérienne. Nous noterons σ_{ij} les contraintes et ϑ_{ij} les vitesses de déformation

$$\vartheta_{ij} = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) ,$$

où les u_i sont les vitesses. Nous noterons en outre

$$\|\vartheta\| = (\vartheta_{ij} \vartheta_{ij})^{1/2} , \quad \|\sigma\| = (\sigma_{ij} \sigma_{ij})^{1/2} .$$

Dans tout ce qui suit, nous distinguerons ϑ_{ij} de ϑ_{ji} et σ_{ij} de σ_{ji} . Nous adopterons le modèle rigide/parfaitement plastique (sans écrouissage).

2. Fonction de dissipation

La puissance de dissipation par unité de volume ou densité de puissance de déformation est donnée par $\sigma_{ij} \vartheta_{ij}$. L'écoulement plastique parfait est caractérisé par les axiomes suivants :

H1 : Lors de l'écoulement, la densité de puissance de déformation ne dépend que des vitesses de déformation :

$$\sigma_{ij} \vartheta_{ij} = d(\vartheta)$$

La fonction $d(\vartheta)$, appelée *fonction de dissipation*, est continue et jouit des propriétés suivantes :

$$H2 : d(\lambda\vartheta) = \lambda d(\vartheta) \quad (\text{homogénéité})$$

$$H3 : d(\vartheta) > 0 \text{ pour } \vartheta \neq 0 \quad (\text{positivité})$$

En outre, et ceci définit les conditions de déformation,

H4 : Un état de contrainte ne peut jamais vérifier

$$\sigma_{ij} \vartheta_{ij} > d(\vartheta)$$

pour un quelconque état de vitesses de déformation ϑ .

De ces hypothèses, on déduit immédiatement la proposition suivante, qui nous sera utile par la suite : *la fonction $d(\vartheta)$ est définie positive, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que*

$$d(\vartheta) \geq \alpha \|\vartheta\| .$$

En effet, sur la sphère $\{\vartheta \mid \|\vartheta\| = 1\}$, la fonction $d(\vartheta)$ est continue et

bornée inférieurement par zéro (H3). Comme cette sphère est compacte, la fonction $d(\vartheta)$ y *atteint* en un point ϑ_0 sa meilleure borne inférieure :

$$d(\vartheta_0) = \inf_{\|\vartheta\| = 1} d(\vartheta) = \alpha$$

Cette borne ne peut être nulle, car sur la sphère, $\vartheta \neq 0$. Donc, $\alpha > 0$. Dès lors, pour ϑ quelconque $\neq 0$,

$$d\left(\frac{\vartheta}{\|\vartheta\|}\right) \geq \alpha$$

car $\vartheta/\|\vartheta\|$ est de norme unitaire. Or, cela équivaut à

$$\frac{1}{\|\vartheta\|} d(\vartheta) \geq \alpha$$

soit à

$$d(\vartheta) \geq \alpha \|\vartheta\|$$

comme annoncé.

3. Ensemble d'admissibilité plastique

La condition H4 conduit immédiatement à la notion de contrainte plastiquement admissible. Il faudra en effet que les contraintes vérifient

$$\sigma_{ij} \vartheta_{ij} \leq d(\vartheta) \tag{1}$$

pour tout ϑ . Comme les deux membres sont homogènes en ϑ , il suffit de vérifier la condition pour tout ϑ de norme unitaire. L'ensemble des contraintes plastiquement admissibles est donc

$$S = \bigcap_{\|\vartheta\| = 1} \{ \sigma \mid \sigma_{ij} \vartheta_{ij} \leq d(\vartheta) \}$$

Cet ensemble jouit des propriétés suivantes :

(a) $S \neq \emptyset$, car il contient toujours au moins l'élément $\sigma = 0$ pour lequel

$$\sigma_{ij} \vartheta_{ij} = 0 < d(\vartheta)$$

(b) S est convexe. En effet, si $\sigma \in S$ et $\tau \in S$, on a pour tout ϑ

$$\sigma_{ij} \vartheta_{ij} \leq d(\vartheta) \quad , \quad \tau_{ij} \vartheta_{ij} \leq d(\vartheta)$$

et pour $\lambda \in [0,1]$,

$$[(1 - \lambda) \sigma_{ij} + \lambda \tau_{ij}] \vartheta_{ij} \leq (1 - \lambda) d(\vartheta) + \lambda d(\vartheta) = d(\vartheta).$$

(c) S est absorbant, c'est-à-dire qu'il contient un homothétique $\lambda\sigma$, avec $\lambda > 0$, de tout σ .

En effet, supposons le contraire. Dans cette hypothèse, il existe un σ tel que $\lambda \sigma_{ij} \vartheta_{ij} > d(\vartheta)$ pour tout $\lambda > 0$. En d'autres termes, pour un ϑ au moins,

$$\lambda \sigma_{ij} \vartheta_{ij} > d(\vartheta) \quad \forall \lambda > 0,$$

ce qui implique par l'inégalité de Schwarz-Cauchy

$$d(\vartheta) < \lambda \|\sigma\| \|\vartheta\|$$

et, par la propriété de positive définition de la fonction de dissipation,

$$\alpha \|\vartheta\| \leq d(\vartheta) < \lambda \|\sigma\| \|\vartheta\|$$

soit

$$\alpha < \lambda \|\sigma\|.$$

En choisissant $\lambda_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\|\sigma\|}$

avec n positif arbitraire, on obtient

$$0 < \alpha < \frac{1}{n}$$

pour tout n , ce qui est absurde.

(d) Il est fermé, comme intersection des fermés $\{\sigma \mid \sigma_{ij} \vartheta_{ij} \leq d(\vartheta)\}$.

4. Critère normalisé de plasticité

Il est facile de montrer que les contraintes intérieures à S correspondent aux états rigides et qu'il n'y a écoulement plastique que sur la frontière de S .

En effet, soit $\sigma \in \overset{\circ}{S}$. L'intérieur de S est un ouvert. Il existe donc une boule centrée en σ , de rayon ε , entièrement contenue dans $\overset{\circ}{S}$ (fig. 1).

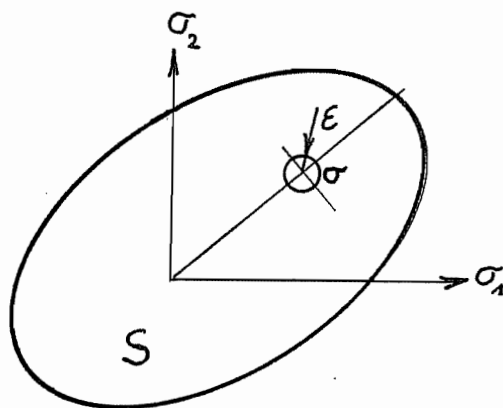


Figure 1 - σ intérieur à S

Si donc

$$\sigma_{ij} \vartheta_{ij} = d(\vartheta) ,$$

on a encore

$$\sigma(1 + \frac{\varepsilon}{\|\sigma\|}) \in S$$

et

$$\sigma_{ij} (1 + \frac{\varepsilon}{\|\sigma\|}) \vartheta_{ij} = (1 + \frac{\varepsilon}{\|\sigma\|}) d(\vartheta) > d(\vartheta),$$

ce qui est contradictoire.

Ceci suggère la construction d'une fonction $\phi(\sigma)$ qui mesure la position de σ , dans ou hors de S . Sur la frontière, nous poserons $\phi(\sigma) = k$, nombre positif choisi d'avance. Soit alors (fig. 2) un état de contrainte figuré dans

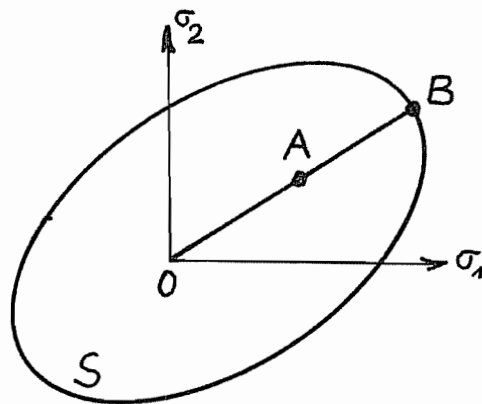


Figure 2 - Notion de sécurité

l'espace des contraintes par le vecteur OA . Sa sécurité par rapport à la plasticité se mesure par le rapport

$$s = \frac{OB}{OA}$$

où OB est l'homothétique de OA qui se trouve tout juste sur la frontière. On a donc

$$OB = s OA$$

et s peut être défini par

$$s = \sup \{ \lambda \mid \lambda > 0 \text{ et } \lambda \sigma \in S \} .$$

On obtient un critère de plasticité en considérant la fonction

$$\phi(\sigma) = \frac{k}{s} .$$

- Pour
- $\phi(\sigma) = k$, on se trouve à l'état plastique
 - $\phi(\sigma) < k$, on a une sécurité $s = k/\phi(\sigma) > 1$: état rigide
 - $\phi(\sigma) > k$, on est en dehors de S : état interdit.

Le critère de plasticité ainsi défini jouit des propriétés suivantes:

- (a) $\phi(\sigma) \geq 0$ pour $\sigma \neq 0$, $\phi(\sigma) = 0$ (positivité)
 (b) $\phi(\lambda\sigma) = \lambda \phi(\sigma)$ pour $\lambda > 0$ (homogénéité)
 (c) $\phi(\sigma + \tau) \leq \phi(\sigma) + \phi(\tau)$ (inégalité triangulaire)

Démontrons ces trois propriétés

- (a) est évidente
- (b) : La sécurité de $\lambda\sigma$ est en effet $1/\lambda$ celle de σ .
- (c) résulte de la convexité de S. En effet, posons

$$\alpha = \phi(\sigma)/k \quad \text{et} \quad \beta = \phi(\tau)/k$$

Il est clair que

$$\phi(\sigma/\alpha) = k \quad \text{et} \quad \phi(\tau/\beta) = k,$$

donc

$$\sigma/\alpha \in S \quad \text{et} \quad \tau/\beta \in S$$

La convexité de S entraîne encore

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{\sigma}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{\tau}{\beta} \in S$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{\sigma + \tau}{\alpha + \beta} \in S$$

et se traduit algébriquement par

$$\phi\left(\frac{\sigma + \tau}{\alpha + \beta}\right) \leq k$$

Or, ceci revient à écrire

$$\phi(\sigma + \tau) \leq k (\alpha + \beta) = \phi(\sigma) + \phi(\tau) .$$

5. Loi de normalité

Il résulte des axiomes que pour tout $\sigma \in S$, on a $\sigma_{ij} \vartheta_{ij} \leq d(\vartheta)$ et que l'égalité correspond à l'écoulement plastique. Donc

$$d(\vartheta) = \sup_{\sigma \in S} \sigma_{ij} \vartheta_{ij} .$$

Nous savons en outre que ce maximum s'obtient pour $\sigma \in S$, soit $\phi(\sigma) = k$. Supposons la fonction $\phi(\sigma)$ différentiable. Il s'agit donc de trouver le maximum de $\sigma_{ij} \vartheta_{ij}$ moyennant la condition $\phi(\sigma) = k$. Un tel problème d'extrémum lié se traite classiquement à l'aide d'un multiplicateur lagrangien λ :

$$\sigma_{ij} \vartheta_{ij} - \lambda (\phi(\sigma) - k) \quad \text{stat} \\ \sigma, \lambda$$

Dérivant par rapport aux contraintes, on obtient les conditions

$$\vartheta_{ij} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}$$

appelées *conditions de normalité*. Elles expriment que la vitesse de déformation est dirigée selon la normale à la surface-limite $\phi(\sigma) = k$ au point σ représentant les contraintes (fig. 3).

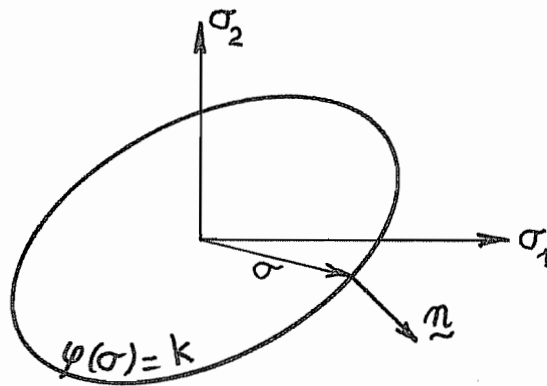


Figure 3 - Loi de normalité

On notera que le coefficient λ est positif. En effet, lors de l'écoulement, on a

$$0 < d(\vartheta) = \sigma_{ij} \vartheta_{ij} = \lambda \sigma_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \phi(\sigma) = \lambda k$$

en vertu de la propriété d'homogénéité de ϕ . Comme ϕ est positive, on devra avoir $\lambda > 0$.

●● Ici, nous avons fait usage du *théorème d'Euler*: Si une fonction $f(\mathbf{x})$ est homogène d'ordre p , c'est-à-dire $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$ pour $\lambda > 0$, alors on a l'identité

$$p f(\mathbf{x}) = \sum_i x_i D_i f(\mathbf{x})$$

La démonstration de ce théorème est très simple : en dérivant par rapport à λ la relation de définition

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x}) ,$$

on obtient

$$p \lambda^{p-1} f(\mathbf{x}) = \sum_i x_i D_i f(\lambda \mathbf{x}) .$$

Il suffit de poser $\lambda = 1$ pour obtenir

$$p f(\mathbf{x}) = \sum_i x_i D_i f(\mathbf{x})$$

comme annoncé. ●●

Pratiquement, il existe des critères qui ne sont pas différentiables partout, comme celui de Tresca, qui possède des angles. Pour pouvoir traiter convenablement ces cas-là, nous partirons d'une démonstration *géométrique* et non plus algébrique de la loi de normalité. Supposons (figure 4) que pour un ϑ

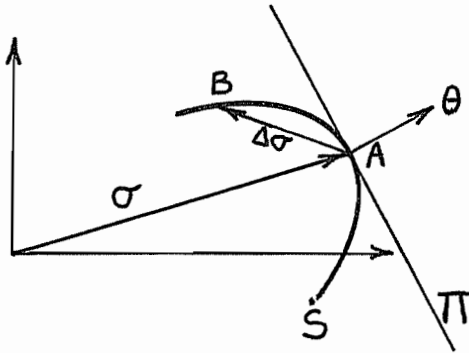


Figure 4 : forme géométrique de la loi de normalité

quelconque, l'état de contrainte soit σ . Il réalise le maximum du produit scalaire $\sigma_{ij} \vartheta_{ij}$ pour $\sigma \in S$. En d'autres termes, pour tout $\sigma + \Delta\sigma$ situé sur S , on doit avoir

$$(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) \vartheta_{ij} \leq \sigma_{ij} \vartheta_{ij},$$

ce qui implique

$$\Delta\sigma_{ij} \vartheta_{ij} \leq 0 .$$

Cela signifie que tout point B de S , hormis A qui représente σ , doit être situé du côté de l'origine par rapport au plan Π orthogonal au vecteur ϑ ou, à la rigueur, dans ce plan Π . Dans le cas où S possède un plan tangent, cette condition n'est réalisée que si Π est ce plan tangent : c'est la loi de normalité. Dans le cas où il existe un angle (fig. 5), ϑ peut être perpendiculaire à tout plan qui ne coupe pas la surface en dehors du point A.

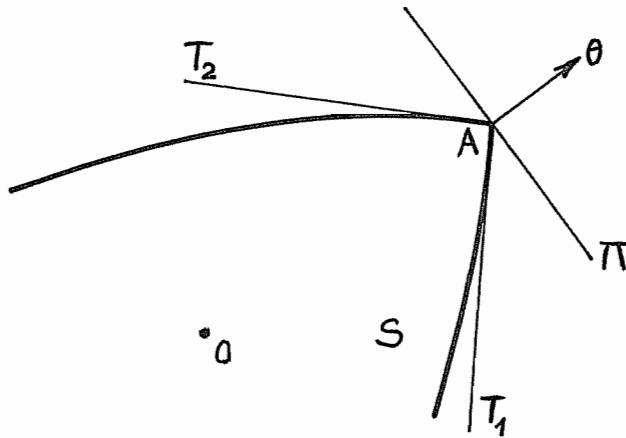


Figure 5 - Cas d'un critère à angle

Considérons par exemple le critère de Tresca (fig. 6). Dans les parties rectilignes, la normale est bien définie. Aux angles, toutes les directions comprises entre les deux directions extrêmes correspondant aux deux normales sont possibles. Soient \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 ces deux normales. On a donc

$$\vartheta = \alpha \mathbf{n}_1 + \beta \mathbf{n}_2 \quad , \quad \alpha \text{ et } \beta \geq 0 .$$

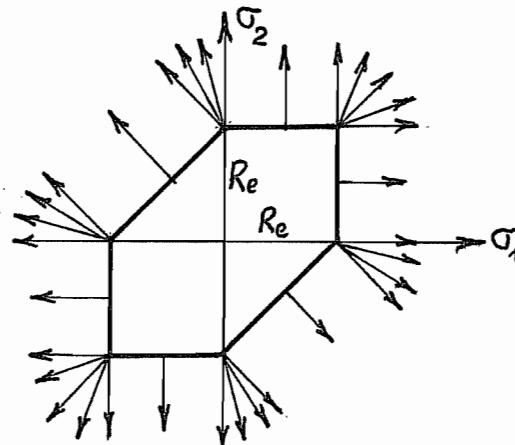


Figure 6 - Critère de Tresca

6. Directions de déformation interdites

Nous ajouterons à ce stade une hypothèse supplémentaire :

H5 : La déformation plastique est incompressible.

Cette hypothèse correspond à une constatation *expérimentale*. En vertu de la loi de normalité, la condition d'incompressibilité implique

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ii}} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{11}} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{22}} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{33}} = 0 .$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles de ϕ , que l'on peut résoudre

de la manière suivante : cherchons dans l'espace des contraintes les surfaces $\phi = \text{constante}$. Elles sont données par l'équation

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{11}} d\sigma_{11} + \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{22}} d\sigma_{22} + \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{33}} d\sigma_{33} + \sum_{i \neq j} \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0,$$

à laquelle il faut ajouter la condition

$$0 = \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{11}} + \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{22}} + \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{33}}.$$

Ajoutant dp fois la seconde équation à la première, on obtient

$$\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{11}} (d\sigma_{11} + dp) + \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{22}} (d\sigma_{22} + dp) + \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{33}} (d\sigma_{33} + dp) + \sum_{i \neq j} \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0,$$

ce qui est certainement vérifié si

$$\begin{cases} d\sigma_{11} = -dp & ; & d\sigma_{22} = -dp & ; & d\sigma_{33} = -dp & ; \\ d\sigma_{ij} = 0 & , & i \neq j \end{cases}$$

Dès lors, pour $d\sigma_{ij} = -dp \delta_{ij}$, on a $d\phi = 0$. En d'autres termes, la fonction ϕ ne varie pas lorsque l'on soustrait un état de contrainte hydrostatique à l'état actuel :

$$\phi(\sigma) = \phi(\sigma - p\delta).$$

On peut évidemment choisir *a priori* la valeur de p , par exemple en posant

$$p = \frac{1}{3} \sigma_{11} \delta_{ij},$$

ce qui donne

$$\sigma_{ij} - p \delta_{ij} = \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \delta_{ij} \right) = \hat{\sigma}_{ij},$$

en notant $\hat{\sigma}_{ij}$ le *déviateur* des contraintes. Par conséquent, on peut écrire

$$\phi(\sigma) = \Phi(\hat{\sigma}),$$

c'est-à-dire que la fonction σ ne dépend que du déviateur des contraintes.

7. Critère de von Mises

Le plus simple des critères homogènes positifs ne dépendant que du déviateur des contraintes est

$$\phi(\sigma) \equiv \|\hat{\sigma}\| \equiv \left(\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} \sigma_{jj} \right)^{1/2} = k.$$

C'est le *critère de von Mises*. Explicitement, on a

$$\begin{aligned}\phi^2(\sigma) &= \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{23}^2 - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 \\ &= \frac{2}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{13}^2 + 3\sigma_{23}^2) .\end{aligned}$$

Etablissons la relation entre k et les limites habituelles. Tout d'abord, en traction simple, la plasticité correspond à

$$\phi(\sigma) = \sigma_{11} \sqrt{2/3} = k$$

et il est d'usage de noter Re la contrainte σ_{11} atteinte. Par conséquent,

$$k = Re \sqrt{2/3} .$$

En cisaillement pur, la limite est habituellement notée τ_0 et on a

$$\phi(\sigma) = \sqrt{2/3} \cdot \sqrt{3} \tau_0^2 = k$$

ce qui donne

$$k = \tau_0 \sqrt{2}$$

et

$$\tau_0 = Re/\sqrt{3} .$$

Quant à la loi de normalité, elle s'écrit

$$\vartheta_{ij} = \lambda \frac{\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \delta_{ij}}{\phi(\sigma)} = \frac{\lambda}{k} (\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \delta_{ij}) = \mu (\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \delta_{ij}) .$$

Pour obtenir la fonction de dissipation correspondante, notons que, lors de l'écoulement,

$$\vartheta_{ij} \vartheta_{ij} = \frac{\lambda^2}{k^2} (\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \delta_{ij}) (\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \delta_{ij}) = \frac{\lambda^2}{k^2} \cdot k^2 = \lambda^2 ,$$

ce qui donne

$$\lambda = \|\vartheta\| .$$

On a donc

$$d(\vartheta) = \sigma_{ij} \vartheta_{ij} = \lambda \sigma_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \phi(\sigma) = \lambda k = k \|\vartheta\| .$$

8. Démarche inverse

Le concept premier de tout ce qui précède est la notion de fonction de dissipation, et c'est à partir de là que nous avons établi l'existence d'un critère normalisé $\phi(\sigma)$, ainsi que ses propriétés. Il est également possible,

et équivalent, d'adopter le critère comme notion première. Traçons brièvement les étapes d'une telle démarche.

A) On se donne un critère ϕ continu et vérifiant les conditions suivantes :

- $\phi(\sigma) \geq 0$ si $\sigma \neq 0$, $\phi(0) = 0$ (positivité)
- $\phi(\lambda\sigma) = \lambda \phi(\sigma)$ pour $\lambda > 0$ (homogénéité)
- $\phi(\sigma + \tau) \leq \phi(\sigma) + \phi(\tau)$ (inégalité triangulaire)

B) On appelle *plastiquement admissibles* les champs de contrainte appartenant à

$$S = \{ \sigma \mid \phi(\sigma) \leq k \}$$

Il est facile de vérifier que S a les propriétés suivantes :

- $S \neq \emptyset$, car $\phi(0) = 0 \leq k$ donc $\sigma = 0 \in S$
- S est fermé car ϕ est continue
- S est convexe car si $\sigma \in S$ et $\tau \in S$, on a $\phi(\sigma) \leq k$ et $\phi(\tau) \leq k$ ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \phi[(1 - \lambda)\sigma + \lambda \tau] &\leq \phi[(1 - \lambda)\sigma] + \phi(\lambda\tau) = (1 - \lambda)\phi(\sigma) + \lambda\phi(\tau) \\ &\leq (1 - \lambda)k + \lambda k = k \end{aligned}$$

- S est absorbant car $\forall \sigma \neq 0$, $\frac{k}{\phi(\sigma)} \sigma$ vérifie

$$\phi\left(\frac{k}{\phi(\sigma)} \sigma\right) = k \frac{\phi(\sigma)}{\phi(\sigma)} = k$$

C. On pose comme principe que lors d'un écoulement plastique, σ s'ajuste sur S pour que $\sigma_{ij} \vartheta_{ij}$ soit maximal.

On définit alors la fonction de dissipation par

$$d(\vartheta) = \sup_{\sigma \in S} \sigma_{ij} \vartheta_{ij}$$

Cette fonction

- ne dépend que de ϑ ($\equiv H1$)
- vérifie $d(\lambda\vartheta) = \sup_{\sigma \in S} \sigma_{ij} \lambda\vartheta_{ij} = \lambda \sup_{\sigma \in S} \sigma_{ij} \vartheta_{ij} = \lambda d(\vartheta)$ ($\equiv H2$)
- vérifie $d(\vartheta) > 0$ si $\vartheta \neq 0$. Il suffit en fait de montrer qu'il existe un $\sigma \in S$ tel que $\sigma_{ij} \vartheta_{ij} > 0$. Posons $\sigma_{ij} = \lambda \vartheta_{ij}$. Pour $\lambda > 0$ bien choisi, $\lambda\vartheta_{ij} \in S$ (car S est absorbant). Pour ce σ , on a bien

$$\sigma_{ij} = \lambda\vartheta_{ij} \vartheta_{ij} > 0 \quad (\equiv H3)$$

Les deux approches sont donc équivalentes.

9. Une application élémentaire de la fonction de dissipation

On peut, à l'aide de la fonction de dissipation, se faire une idée de la puissance dans les écoulements en filières. Soit x la coordonnée tracée sur l'axe de la filière (fig. 7) la courbure de cet axe est supposée négligeable.

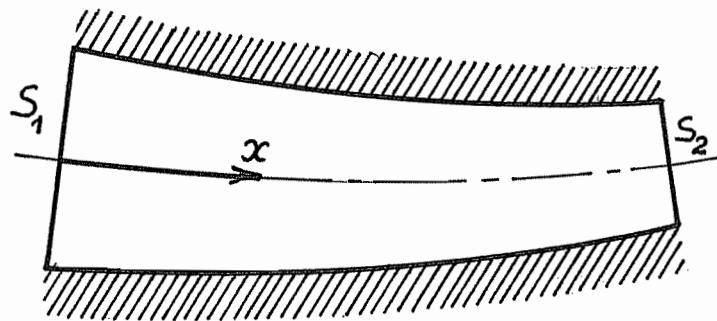


Fig. 7 - Filière

En outre, les variations de section sont supposées lentes, de sorte que le cisaillement soit faible. Tout frottement sur les parois est négligé.

La vitesse selon x est supposée uniforme sur chaque section orthogonale à l'axe x . Elle vaut donc

$$u = Q/S$$

où Q est le débit, et S la section. On a donc

$$\vartheta_x = - \frac{Q}{S^2} \frac{dS}{dx} .$$

par ailleurs, l'incompressibilité implique

$$\vartheta_y + \vartheta_z = - \vartheta_x .$$

Nous admettrons que l'on a partout

$$\vartheta_y = - \alpha \vartheta_x \quad , \quad \vartheta_z = - (1 - \alpha) \vartheta_x .$$

Le cas $\alpha = 1$ correspond à un aplatissement plan ; le cas $\alpha = 1/2$, à une filière de révolution. Entre les deux, on peut imaginer toutes les combinaisons possibles. Puisque nous négligeons les vitesses de cisaillement,

$$\begin{aligned} \|\vartheta\| &= (\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2)^{1/2} = \sqrt{1 + \alpha^2 + (1 - \alpha)^2} |\vartheta_x| \\ &= \sqrt{2 + 2\alpha^2 - 2\alpha} |\vartheta_x| \end{aligned}$$

La puissance dissipée vaut

$$D(\vartheta) = \int_V d(\vartheta) dV = \tau_0 \sqrt{2} \sqrt{2 + 2\alpha^2 - 2\alpha} \int_0^1 dx \int_S |\vartheta_x| dS$$

$$= 2 \tau_0 \sqrt{1 + \alpha^2 - \alpha} \int_0^1 \frac{Q}{S} \left| \frac{dS}{dx} \right| dx .$$

On a normalement $dS/dx < 0$, donc

$$\int_0^1 \frac{Q}{S} \left| \frac{dS}{dx} \right| dx = - \int_0^1 \frac{Q}{S} \frac{dS}{dx} dx = Q \ln \frac{S_1}{S_2} .$$

Au total,

$$D = 2 \sqrt{1 + \alpha^2 - \alpha} \tau_0 Q \ln \frac{S_1}{S_2} .$$

Dans le cas d'une *filière de révolution*, $\alpha = 1/2$ et

$$1 + \alpha^2 - \alpha = 3/4 ,$$

ce qui donne

$$D = \tau_0 \sqrt{3} Q \ln (S_1/S_2) = Re Q \ln (S_1/S_2)$$

Quand il s'agit d'un *aplatissement plan*, $\alpha = 1$ et

$$1 + \alpha^2 - \alpha = 1 ,$$

ce qui conduit à

$$D = 2 \tau_0 Q \ln (S_1/S_2) .$$

En pratique, il existe une dissipation supplémentaire à l'entrée, à la sortie, et du fait des frottements. La puissance calculée ci-dessus constitue ce que l'on appelle le *terme principal*. Il n'est pas rare que l'on écrive

$$P = D/\eta$$

η étant un *rendement*.

10. Critère de Tresca

Le critère de Tresca ne s'exprime aisément qu'en axes principaux de contrainte. Il correspond alors à

$$\phi(\sigma) \equiv \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \} = k$$

C'est bien une fonction du déviateur des contraintes, car

$$|(\sigma_1 - p) - (\sigma_2 - p)| = |\sigma_1 - \sigma_2| \quad , \text{ etc...}$$

En traction pure, on a

$$\phi(\sigma) = \max \{ \text{Re}, 0, 0 \} = \text{Re},$$

donc

$$k = \text{Re}$$

Le cisaillement pur correspond à

$$\sigma_1 = \tau_0 \quad , \quad \sigma_2 = 0 \quad , \quad \sigma_3 = -\tau_0 \quad ,$$

ce qui donne

$$\phi(\sigma) = \max \{ \tau_0, \tau_0, 2\tau_0 \} = 2\tau_0$$

et donc,

$$\tau_0 = k/2 = \text{Re}/2$$

La détermination de la fonction de dissipation est un peu plus délicate. Partons de l'expression générale

$$d(\vartheta) = \sup_{\sigma \in S} (\sigma_1 \vartheta_1 + \sigma_2 \vartheta_2 + \sigma_3 \vartheta_3) \quad .$$

La condition d'incompressibilité

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 = 0$$

implique

$$\vartheta_3 = -(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

et

$$d(\vartheta) = \sup_{\vartheta \in S} [(\sigma_1 - \sigma_3)\vartheta_1 + (\sigma_2 - \sigma_3)\vartheta_2] \quad ,$$

l'appartenance à S étant définie par les conditions

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \in [-\text{Re}, +\text{Re}]$$

$$(\sigma_2 - \sigma_3) \in [-\text{Re}, +\text{Re}]$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_2 - \sigma_3) \in [-\text{Re}, +\text{Re}] \quad .$$

Quitte à renuméroter les vitesses de déformation principales, on peut supposer que ϑ_1 et ϑ_2 ont le même signe au sens large, l'une des deux, soit ϑ_2 , étant éventuellement nulle. Alors,

$$|\vartheta_3| = |\vartheta_1 + \vartheta_2| = \max(|\vartheta_1|, |\vartheta_2|, |\vartheta_3|)$$

Le maximum de la densité de puissance est visiblement obtenu pour

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = (\sigma_2 - \sigma_3) = \operatorname{Re} \operatorname{sign}(\vartheta_1)$$

ce qui donne

$$d(\vartheta) = \operatorname{Re} |\vartheta_1 + \vartheta_2| = \operatorname{Re} |\vartheta_3| = \operatorname{Re} \max_i |\vartheta_i|$$

Une expression équivalente est

$$d(\vartheta) = \frac{\operatorname{Re}}{2} (|\vartheta_1| + |\vartheta_2| + |\vartheta_3|)$$

car

$$|\vartheta_1| + |\vartheta_2| = |\vartheta_1 + \vartheta_2| = |\vartheta_3| .$$

Dans le même ordre d'idées, on notera que

$$(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_3 - \sigma_1) = 0 ;$$

en reproduisant le raisonnement fait ci-dessus pour les vitesses de déformation, on obtient la forme suivante, peu connue semble-t-il, du critère de Tresca :

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{2} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_3 - \sigma_1|) = \operatorname{Re}$$

11. Filière idéale, par le critère de Tresca

Nous conservons les mêmes hypothèses que dans la section 9 :

$$u = Q/S$$

$$\vartheta_x = - \frac{Q}{S^2} \frac{dS}{dx}$$

$$\vartheta_y = - (1 - \alpha) \vartheta_x \quad , \quad \vartheta_z = - \alpha \vartheta_x \quad , \quad \alpha \in [0, 1].$$

Il est clair que dans ces conditions, la plus grande vitesse de déformation en valeur absolue est ϑ_x , si bien que

$$d(\vartheta) = \operatorname{Re} \vartheta_x$$

et

$$D(\vartheta) = \operatorname{Re} \int_0^1 dx \int_S (- \frac{Q}{S^2} \frac{dS}{dx}) dx = -\operatorname{Re} Q \int_0^1 \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} dx = \operatorname{Re} Q \ln(S_1/S_2) ,$$

indépendamment du paramètre α . A ce point de vue, les résultats obtenus à partir du critère de Tresca diffèrent de ceux que donne le critère de von Mises.

12. Différence entre les dissipations calculées par les deux critères

En notant comme ci-dessus ϑ_3 la plus grande vitesse de déformation principale en valeur absolue, on peut toujours écrire

$$\vartheta_1 = -\alpha \vartheta_3 \quad , \quad \vartheta_2 = -(1-\alpha) \vartheta_3 \quad , \quad \alpha \in [0, 1].$$

Le critère de von Mises donne alors

$$d_{VM}(\vartheta) = \text{Re} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2} = \text{Re} \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1 + \alpha^2 - \alpha} \cdot |\vartheta_3|$$

tandis que le critère de Tresca conduit simplement à

$$d_T(\vartheta) = \text{Re} |\vartheta_3|$$

Le rapport entre ces deux expressions est donné par

$$\frac{d_{VM}(\vartheta)}{d_T(\vartheta)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \alpha^2 - \alpha}$$

Le trinôme sous le radical admet un maximum pour $\alpha = 1/2$. pour cette valeur,

$$\frac{d_{VM}(\vartheta)}{d_T(\vartheta)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3}{4}} = 1 \quad .$$

Le maximum du rapport des fonctions de dissipation correspond à $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Il vaut

$$\frac{d_{VM}(\vartheta)}{d_T(\vartheta)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cong 1,155 \quad .$$

Donc pour un champ de vitesses donné, on a toujours

$$1 \leq \frac{d_{VM}(\vartheta)}{d_T(\vartheta)} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cong 1,155 \quad .$$

Le critère de von Mises conduit donc à une dissipation toujours supérieure ou égale à celle que donnerait le critère de Tresca. La différence est au plus de 15,5 % .

CHAPITRE 3 - PROBLÈMES EN ÉTAT PLAN DE DÉFORMATION

1. Equations générales

L'état plan de déformation est caractérisé par $\vartheta_z = 0$. Dans les axes principaux, le critère de von Mises s'écrit en général

$$\phi(\sigma) = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2} = \text{Re } \sqrt{2} \quad .$$

Dans le cas présent,

$$\vartheta_z = \mu \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_z} = \frac{\mu}{\text{Re} \sqrt{2}} (2\sigma_z - 2\sigma_x + 2\sigma_z - 2\sigma_y) = \lambda [\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$$

ce qui implique

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y)$$

et

$$\sigma_x - \sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \quad ; \quad \sigma_y - \sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \quad ,$$

dont on déduit

$$\phi(\sigma) = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2} = \text{Re } \sqrt{2}$$

soit

$$|\sigma_x - \sigma_y| = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Re} = \text{Re}^* = 2 \tau_0 \quad .$$

Les vitesses de déformation sont alors de la forme

$$\vartheta_x = \lambda \text{sign}(\sigma_x - \sigma_y)$$

$$\vartheta_y = \lambda \text{sign}(\sigma_y - \sigma_x)$$

Il est clair que

$$\vartheta_x + \vartheta_y = 0 \quad .$$

2. Forgeage plan

2.1 - Cinématique (fig. 1)

Les vitesses verticales sont supposées de la forme

$$v = -V \frac{y}{h}$$

ce qui entraîne

$$\vartheta_y = -V/h$$

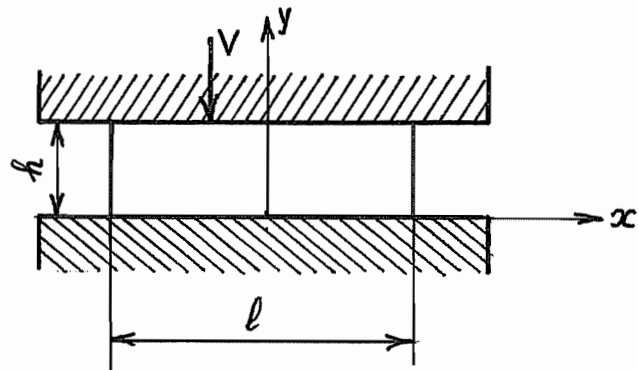


Fig. 1 - Forgeage plan

On déduit de l'incompressibilité

$$\vartheta_x = -\vartheta_y = V/h$$

d'où, par symétrie,

$$u = \frac{Vx}{h} .$$

Comme ϑ_x est positif, la condition de plasticité s'écrit

$$\sigma_x - \sigma_y = 2 \tau_0 .$$

2.2 - Cas du frottement coulombien

Examinons les conditions d'équilibre dans le cas d'un frottement coulombien. Il suffit, par symétrie, de considérer le cas $x > 0$. On a (fig.2)

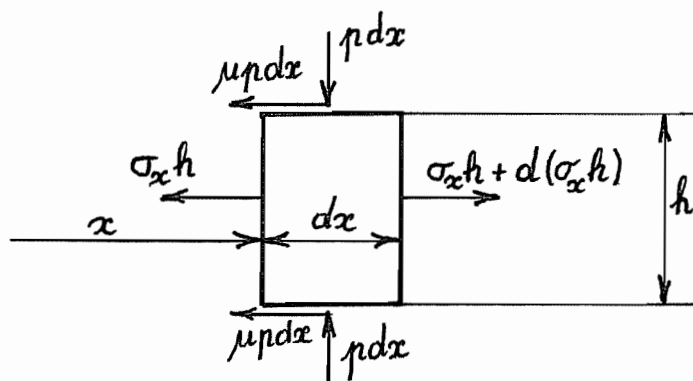


Fig. 2 - Forgeage plan avec frottement coulombien

$$\sigma_y = -p$$

$$h \frac{d\sigma_x}{dx} = 2 \mu p = -2 \mu \sigma_y .$$

Tenant compte de la condition de plasticité

$$-\sigma_y = 2\tau_0 - \sigma_x ,$$

on obtient

$$h \frac{d\sigma_x}{dx} = 4 \mu \tau_0 - 2 \mu \sigma_x$$

soit

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2\mu}{h} \sigma_x = \frac{4\mu}{h} \tau_0 .$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$\sigma_x = A \exp\left(-\frac{2\mu}{h} x\right) .$$

Une solution particulière de l'équation complète est donnée par

$$\sigma_x = 2 \tau_0 .$$

On a donc

$$\sigma_x = 2 \tau_0 + A \exp\left(-\frac{2\mu}{h} x\right)$$

avec la condition de bord

$$\sigma_x(1/2) = 0 ,$$

soit

$$2 \tau_0 + A \exp\left(-\frac{2\mu}{h} \frac{1}{2}\right) = 0 ,$$

ce qui donne

$$A = -2 \tau_0 \exp\left(\frac{2\mu}{h} \frac{1}{2}\right) .$$

Il vient donc

$$\sigma_x = 2 \tau_0 \left\{1 - \exp\left[\frac{2\mu}{h} \left(\frac{1}{2} - x\right)\right]\right\}$$

et

$$\sigma_y = \sigma_x - 2 \tau_0 = -2 \tau_0 \exp\left[\frac{\mu}{h}(1 - 2x)\right] = -p .$$

Cette expression est valable pour $x > 0$. Pour $x < 0$, il faut remplacer x par $|x|$. En posant

$$\gamma = \frac{\mu l}{h} \quad ,$$

on a encore

$$\frac{p}{2\tau_0} = \exp\left[\gamma\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right]$$

Cette répartition de pression est représentée en fig. 3

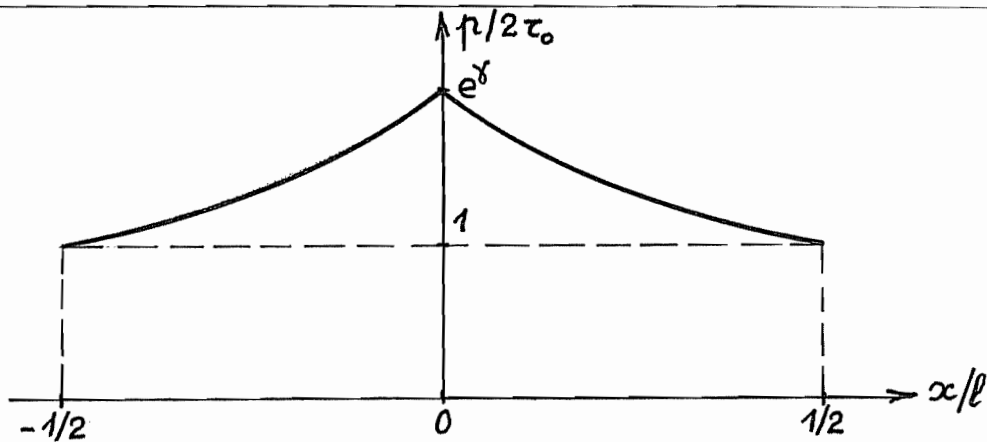


Fig. 3 - Répartition de la pression dans le cas d'un frottement coulombien

On remarquera la pointe de pression au centre, bien connue dans ce genre de problème sous le nom de *colline de frottement* (*friction hill*).

la force nécessaire pour assurer le forgeage vaut, par unité de longueur dans la direction z ,

$$F' = \int_{-1/2}^{+1/2} p \, dx = 2 \int_0^{1/2} p \, dx \quad .$$

Il est plus parlant d'utiliser la *pression moyenne*

$$p_m = F' / l$$

On a

$$\frac{p_m}{2\tau_0} = \frac{1}{l} 2 \int_0^{1/2} \frac{p}{2\tau_0} \, dx = \frac{2}{l} \int_0^{1/2} \exp\left(-2\gamma \frac{x}{l}\right) \, dx = \frac{2}{l} e^\gamma \cdot \frac{1}{2\gamma} (1 - e^{-\gamma})$$

soit

$$\frac{p_m}{2\tau_0} = \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} \quad .$$

Sachant que

$$e^\gamma = 1 + \gamma + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^3}{3!} + \dots$$

on a

$$\frac{e^\gamma - 1}{\gamma} = 1 + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{3!} + \dots$$

Ainsi, pour les faibles valeurs de γ , on a

$$\frac{p_m}{2\tau_0} \cong 1 + \frac{\gamma}{2} .$$

Mais $p_m/(2\tau_0)$ croît exponentiellement lorsque γ grandit, comme l'illustre le tableau suivant :

$\gamma = \frac{\mu l}{h}$	$\frac{p_m}{2\tau_0}$
0	1
0,1	1,052
0,2	1,107
0,5	1,297
1	1,718
2	3,195
5	29,48
10	2203
∞	∞

2.3 - Cas du frottement collant

Posons-nous le même problème avec un frottement collant. On a toujours

$$\sigma_y = -p$$

mais ici,

$$h \frac{d\sigma_x}{dx} = 2 \tau_0$$

Ceci entraîne immédiatement

$$\sigma_x = A + \frac{2\tau_0}{h} x$$

et, tenant compte de la condition de bord $\sigma_x = 0$ en $x = l/2$, on obtient

$$\sigma_x = \frac{2\tau_0}{h} \left(x - \frac{l}{2} \right) .$$

Il en découle

$$p = 2\tau_0 - \sigma_x = \frac{2\tau_0}{h} \left(h + \frac{1}{2} - x \right)$$

soit

$$\frac{p}{2\tau_0} = 1 + \frac{1 - 2x}{2h} .$$

Cette expression est valable pour $x > 0$. Pour $x < 0$, il faut remplacer x par $|x|$. La distribution de pression est ici en forme de toit à double pente. La valeur moyenne de la pression est donnée par

$$\frac{p_m}{2\tau_0} = 1 + \frac{1}{4h} .$$

La progression en fonction de $1/h$ est donc moins rapide que dans le cas d'un frottement coulombien. Pour le forgeage à chaud, l'expression obtenue dans le cas du frottement collant est plus réaliste.

2.4 Forgeage plan avec frottement collant : approche énergétique

A partir des équations cinématiques obtenues dans la section 2.1, on peut directement calculer la puissance de déformation par unité de longueur selon z

$$D' = \int_{-1/2}^{+1/2} dx \int_0^h \tau_0 \sqrt{2} \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} dz = 2 \tau_0 h l \frac{V}{h} = 2 \tau_0 l V .$$

Dans l'approche énergétique, il est possible de tenir compte d'un frottement collant : La puissance de frottement vaut alors

$$P'_f = 2 \tau_0 \int_{-1/2}^{+1/2} |u| dx = 4 \tau_0 \frac{V}{h} \int_0^{1/2} x dx = 2 \tau_0 V \frac{1}{4h}$$

La puissance totale vaut donc

$$P' = D' + P'_f = 2\tau_0 V l \left(1 + \frac{1}{4h} \right) = F' V$$

d'où

$$F' = 2 \tau_0 l \left(1 + \frac{1}{4h} \right)$$

et

$$\frac{p_m}{2\tau_0} = 1 + \frac{1}{4h} .$$

On retrouve donc le même résultat que précédemment, mais par une voie beaucoup plus simple. Observons encore, et ceci est général, que le débit sous la presse vaut, par unité de longueur,

$$Q' = V l$$

et que

$$p_m = P'/Q' = P/Q .$$

3. Laminage à froid

3.1 - Considérations physiques

Dans le processus de laminage, l'épaisseur de la tôle décroît progressivement de sa valeur d'entrée h_1 à sa valeur de sortie h_2 . Dans la mesure où la tôle est suffisamment large, on peut considérer que la déformation est plane, car le frottement dans la direction de l'axe des rouleaux empêche la déformation latérale. Soit (fig. 4) Q' le débit de tôle

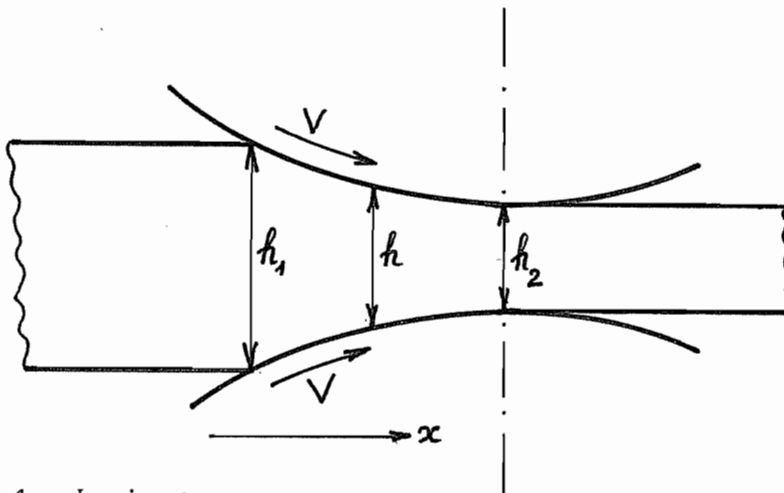


Fig. 4 - Laminage

par unité de largeur de celle-ci. La vitesse de la tôle est donc donnée par

$$v = Q'/h$$

Elle croît depuis l'entrée jusqu'à la sortie. Au contraire, la vitesse horizontale du rouleau, dans le petit arc de laminage, peut être considérée comme constamment égale à la vitesse périphérique du rouleau V . Il ne peut donc y avoir adhérence entre le rouleau et la tôle en tout point. Mais pour que le processus soit stable, il doit y avoir adhérence sur une génératrice donnée, sans quoi la vitesse de la tôle n'est pas définie (fig. 5)

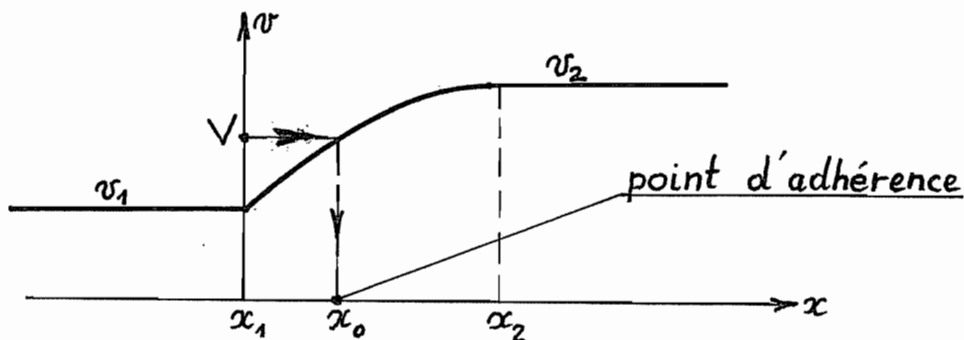


Fig. 5 - Vitesse de la tôle et vitesse du rouleau

En amont de la génératrice d'adhérence, on a $v < V$ et le rouleau entraîne la tôle par des efforts de frottement dirigés vers l'aval. C'est ce que nous appellerons la zone d'entrée. En aval du point d'adhérence, le rouleau freine la tôle : c'est la zone de sortie (fig. 6).

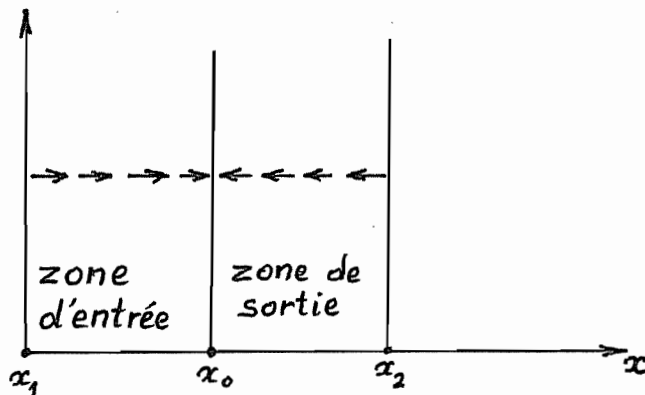


Figure 6 : sens des efforts de frottement

3.2 - Equations du laminage à froid

La figure 7 représente les conditions d'équilibre avec, conventionnellement, les efforts de frottement dans le sens qui correspond à la zone d'entrée.

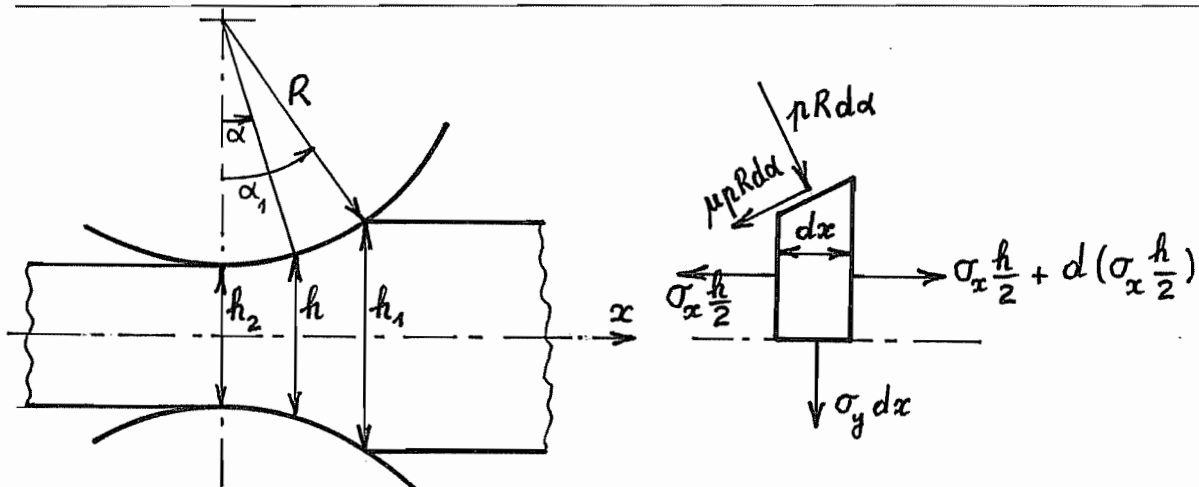


Figure 7 - Conditions d'équilibre

• Equilibre vertical

$$\sigma_y dx + p R \cos \alpha d\alpha + \mu p R \sin \alpha d\alpha = 0$$

et comme

$$dx = R \cos \alpha d\alpha,$$

on obtient

$$\sigma_y + p (1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) = 0$$

Ordinairement, $\mu \operatorname{tg} \alpha \ll 1$, par exemple,

$$\mu = 0,07 \quad , \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,1 \quad \text{d'où} \quad \mu \operatorname{tg} \alpha = 0,007 .$$

On peut donc écrire sans grande erreur

$$\sigma_y \cong -p$$

● *Equilibre horizontal*

$$d\left(\sigma_x \frac{h}{2}\right) + p R \sin \alpha \, d\alpha - \mu p R \cos \alpha \, d\alpha = 0$$

soit

$$d\left(\sigma_x \frac{h}{2}\right) = -p R (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \, d\alpha$$

Cette équation est due à von Karmann [2].

● *Condition de plasticité*

Il est clair que $\varphi_x > 0$, $\varphi_y < 0$. Par conséquent, la condition de plasticité s'écrit

$$\sigma_x - \sigma_y = 2 \tau_0$$

Tenant compte de la condition $\sigma_y = -p$, on a donc

$$\sigma_x = 2 \tau_0 - p .$$

Introduisons ce résultat dans l'équation d'équilibre horizontal. Il vient, après changement de signe et division par $d\alpha$,

$$-2 \tau_0 \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{d}{d\alpha} \left(p \frac{h}{2}\right) = p R (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \, d\alpha$$

La demi-épaisseur $h/2$ est donnée par

$$\frac{h}{2} = \frac{h_2}{2} + R (1 - \cos \alpha) ,$$

si bien que

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{h}{2}\right) = R \sin \alpha$$

Introduisant ce résultat dans l'équation d'équilibre, on obtient

$$-2 \tau_0 R \sin \alpha + \frac{h}{2} \frac{dp}{d\alpha} + p R \sin \alpha = p R (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

ce qui équivaut à

$$\frac{h}{2} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{p}{2\tau_0} \right) + \mu \frac{p}{2\tau_0} R \cos \alpha - R \sin \alpha = 0 .$$

Généralement, l'angle α est relativement petit et on peut écrire sans grande erreur

$$\cos \alpha \cong 1 \quad , \quad \sin \alpha \cong \alpha$$

$$\frac{h}{2} = \frac{h_2}{2} + R (1 - \cos \alpha) \cong \frac{h_2}{2} + R \frac{\alpha^2}{2} \quad ,$$

ce qui donne

$$\left(\frac{h_2}{2} + R \frac{\alpha^2}{2} \right) \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{p}{2\tau_0} \right) + \mu R \frac{p}{2\tau_0} - R \alpha = 0 .$$

Il est utile de donner à cette équation une forme sans dimension qui fera apparaître les paramètres fondamentaux du problème. Posons d'abord

$$y = \frac{p}{2\tau_0} .$$

On obtient

$$\left(\frac{h_2}{2} + R \frac{\alpha^2}{2} \right) \frac{dy}{d\alpha} + \mu R y = R \alpha .$$

Multiplions par $2/h_2$:

$$\left(1 + \frac{R}{h_2} \alpha^2 \right) \frac{dy}{d\alpha} + \frac{2\mu R}{h_2} y = \frac{2R}{h_2} \alpha$$

et effectuons le changement de variable

$$\beta = \alpha \sqrt{R/h_2}$$

Il en découle

$$\alpha = \sqrt{h_2/R} \beta \quad , \quad d\alpha = \sqrt{h_2/R} d\beta \quad ,$$

ce qui ramène l'équation à

$$(1 + \beta^2) \sqrt{R/h_2} \frac{dy}{d\beta} + 2 \mu \frac{R}{h_2} y = 2 \sqrt{R/h_2} \beta .$$

Une simple division par $\sqrt{R/h_2}$ conduit à

$$(1 + \beta^2) \frac{dy}{d\beta} + 2 \mu \sqrt{R/h_2} y = 2 \beta$$

Notant enfin

$$v = 2 \mu \sqrt{R/h_2} \quad ,$$

on obtient l'équation

$$(1 + \beta^2) \frac{dy}{d\beta} + \nu y = 2\beta$$

Cette équation est due à Nadai [3]. L'équation homogène associée s'écrit encore

$$\frac{dy}{y} = -\nu \frac{d\beta}{1 + \beta^2}$$

dont la solution générale est

$$\ln y_h = -\nu \operatorname{arctg} \beta + \ln C$$

soit

$$y_h = C \exp(-\nu \operatorname{arctg} \beta) \equiv C Y_h(\beta ; \nu) .$$

On obtient une solution particulière par la méthode de variation des constantes de Lagrange : on pose

$$y_p = A(\beta) \exp(-\nu \operatorname{arctg} \beta) .$$

Comme

$$\frac{dy_p}{d\beta} = A'(\beta) \exp(-\nu \operatorname{arctg} \beta) - A(\beta) \exp(-\nu \operatorname{arctg} \beta) \frac{\nu}{1 + \beta^2}$$

Il vient

$$(1 + \beta^2) \frac{dy_p}{d\beta} + \nu y_p = (1 + \beta^2) A'(\beta) \exp(-\nu \operatorname{arctg} \beta) = 2\beta$$

soit

$$A'(\beta) = \exp(\nu \operatorname{arctg} \beta) \cdot \frac{2\beta}{1 + \beta^2}$$

et

$$A(\beta) = \int_0^\beta \exp(\nu \operatorname{arctg} \gamma) \frac{2\gamma}{1 + \gamma^2} d\gamma .$$

La solution particulière est donc

$$y_p = \exp(-\nu \operatorname{arctg} \beta) \int_0^\beta \exp(\nu \operatorname{arctg} \gamma) \frac{2\gamma}{1 + \gamma^2} d\gamma \equiv Y_p(\beta ; \nu) .$$

La solution complète s'écrit finalement

$$y_e = y_h + y_p = C Y_h(\beta ; \nu) + Y_p(\beta ; \nu) .$$

Ceci est valable pour la zone d'entrée. Dans la zone de sortie où, rappelons-le, la tôle va plus vite que le rouleau, il faut remplacer ν par $(-\nu)$, ce qui donne, en changeant le nom de la constante multiplicative,

$$y_s = D Y_h(\beta ; -\nu) + Y_p(\beta ; -\nu) .$$

Examinons les conditions aux limites. A la sortie, on a $\sigma_x = 0$, donc $p = 2 \tau_0$, soit $y = 1$. Puisque la sortie correspond à $\beta = 0$, que $Y_h(0, -\nu) = 1$, et que $Y_p(0 ; -\nu) = 0$, on obtient

$$y_s(\beta) = Y_h(\beta ; -\nu) + Y_p(\beta ; -\nu).$$

A l'entrée, qui correspond à $\beta_1 = \sqrt{R/h_2} \alpha_1$, on a de même

$$y_e(\beta_1) = C Y_h(\beta_1 ; \nu) + Y_p(\beta_1 ; \nu) = 1,$$

soit

$$C = \frac{1}{Y_h(\beta_1 ; \nu)} [1 - Y_p(\beta_1 ; \nu)] .$$

Il vient donc

$$y_e(\beta) = \frac{1 - Y_p(\beta_1 ; \nu)}{Y_h(\beta_1 ; \nu)} Y_h(\beta ; \nu) + Y_p(\beta ; \nu) .$$

La transition entre les deux zones se fait en un angle β_0 tel que $\sigma_x(\beta_{0-}) = \sigma_x(\beta_{0+})$, ce qui revient à dire $y_s(\beta_0) = y_e(\beta_0)$. En cet angle, la vitesse de la tôle est égale à celle du rouleau.

3.3 - Intervalles de variation de β et ν

Une valeur raisonnable de R/h_2 est de l'ordre de 100. Il en est de même de $R/(\Delta h)$. L'angle α a sa valeur maximale donnée par

$$h_2 + R \alpha_1^2 = h_1$$

soit

$$\alpha_1 = \sqrt{\Delta h/R} .$$

Il y correspond

$$\beta_1 = \sqrt{R/h_2} \alpha_1 = \sqrt{\Delta h/h_2} = \mathcal{O}(1) .$$

Quant à ν , il est donné par $2 \sqrt{R/h_2} \mu = \mathcal{O}(2 \times 10 \times 0,1) = \mathcal{O}(2)$. Nous établissons donc des tables de Y_h , Y_p et y_s pour ν entre -2 et +2 et β entre 0 et 1.

Table de $Y_h(\beta; \nu) = \exp(-\text{varctg}\beta)$

β	ν	-2	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	
0	1	1,221	1,197	1,173	1,150	1,127	1,105	1,083	1,062	1,041	1,020	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,1	1,221	1,197	1,173	1,150	1,127	1,105	1,083	1,062	1,041	1,020	1	0,9803	0,9609	0,9420	0,9234	0,9051	0,8873	0,8698	0,8526	0,8358	0,8193		
0,2	1,484	1,427	1,371	1,318	1,267	1,218	1,171	1,126	1,082	1,040	1	0,9613	0,9241	0,8833	0,8539	0,8209	0,7891	0,7585	0,7292	0,7010	0,6738		
0,3	1,791	1,690	1,594	1,504	1,419	1,338	1,263	1,191	1,124	1,060	1	0,9434	0,8900	0,8396	0,7920	0,7472	0,7049	0,6650	0,6273	0,5918	0,5583		
0,4	2,140	1,984	1,838	1,704	1,579	1,463	1,356	1,256	1,164	1,079	1	0,9267	0,8588	0,7959	0,7376	0,6835	0,6334	0,5870	0,5440	0,5041	0,4672		
0,5	2,528	2,304	2,100	1,914	1,744	1,590	1,449	1,321	1,204	1,097	1	0,9114	0,8307	0,7572	0,6901	0,6290	0,5733	0,5225	0,4762	0,4341	0,3956		
0,6	2,947	2,645	2,374	2,131	1,913	1,717	1,541	1,383	1,241	1,114	1	0,8976	0,8056	0,7231	0,6490	0,5825	0,5228	0,4693	0,4212	0,3780	0,3393		
0,7	3,392	3,002	2,657	2,351	2,081	1,842	1,630	1,443	1,277	1,130	1	0,8850	0,7833	0,6932	0,6135	0,5430	0,4805	0,4253	0,3764	0,3331	0,2948		
0,8	3,855	3,369	2,943	2,572	2,247	1,964	1,716	1,499	1,310	1,144	1	0,8738	0,7635	0,6671	0,5829	0,5093	0,4450	0,3888	0,3397	0,2968	0,2594		
0,9	4,330	3,740	3,230	2,790	2,409	2,081	1,797	1,552	1,341	1,158	1	0,8637	0,7456	0,6442	0,5564	0,4806	0,4150	0,3585	0,3096	0,2674	0,2309		
1	4,810	4,111	3,514	3,003	2,566	2,193	1,874	1,602	1,369	1,170	1	0,8546	0,7304	0,6242	0,5335	0,4559	0,3897	0,3330	0,2846	0,2432	0,2079		

Table de $Y_p(\beta; v) = \exp(-\text{varctg}\beta) \int_0^\beta \exp(\text{varctg}\gamma) \frac{2\gamma}{1+\gamma^2} d\gamma$

β	v	-2	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,0107	0,0106	0,0105	0,0104	0,0104	0,0104	0,0103	0,0102	0,0102	0,0101	0,0100	0,0100	0,0099	0,0098	0,0098	0,0097	0,0096	0,0096	0,0095	0,0094	0,0094	0,0093
0,2	0,0449	0,0443	0,0437	0,0431	0,0425	0,0419	0,0414	0,0408	0,0403	0,0397	0,0392	0,0387	0,0382	0,0377	0,0372	0,0368	0,0363	0,0363	0,0359	0,0354	0,0350	0,0345
0,3	0,1056	0,1033	0,1012	0,0991	0,0971	0,0951	0,0932	0,0914	0,0896	0,0879	0,0862	0,0845	0,0829	0,0814	0,0799	0,0784	0,0770	0,0770	0,0756	0,0743	0,0730	0,0717
0,4	0,1940	0,1886	0,1834	0,1784	0,1736	0,1690	0,1645	0,1603	0,1562	0,1522	0,1484	0,1448	0,1412	0,1378	0,1346	0,1314	0,1284	0,1284	0,1254	0,1226	0,1199	0,1173
0,5	0,3101	0,2994	0,2892	0,2795	0,2702	0,2614	0,2530	0,2450	0,2374	0,2301	0,2231	0,2165	0,2102	0,2041	0,1983	0,1927	0,1874	0,1874	0,1824	0,1775	0,1728	0,1683
0,6	0,4526	0,4340	0,4160	0,4001	0,3845	0,3698	0,3559	0,3428	0,3304	0,3186	0,3075	0,2969	0,2869	0,2774	0,2684	0,2598	0,2516	0,2516	0,2439	0,2365	0,2295	0,2227
0,7	0,6187	0,5897	0,5626	0,5373	0,5135	0,4913	0,4704	0,4508	0,4324	0,4151	0,3988	0,3834	0,3690	0,3554	0,3425	0,3304	0,3189	0,3189	0,3081	0,2978	0,2881	0,2788
0,8	0,8054	0,7633	0,7242	0,6879	0,6541	0,6227	0,5935	0,5622	0,5407	0,5169	0,4947	0,4739	0,4544	0,4361	0,4190	0,4029	0,3877	0,3877	0,3735	0,3601	0,3474	0,3355
0,9	1,009	0,9513	0,8980	0,8488	0,8034	0,7615	0,7226	0,6866	0,6532	0,6222	0,5933	0,5665	0,5415	0,5182	0,4964	0,4760	0,4570	0,4570	0,4392	0,4224	0,4067	0,3919
1	1,226	1,150	1,081	1,017	0,9587	0,9050	0,8556	0,8100	0,7639	0,7291	0,6931	0,6599	0,6290	0,6004	0,5737	0,5489	0,5258	0,5258	0,5043	0,4841	0,4653	0,4476

Table de $y_s(\beta; v) = Y_p(\beta; -v) + Y_h(\beta; -v)$

β	v	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,1	1,010	1,030	1,051	1,072	1,093	1,115	1,137	1,160	1,183	1,207	1,231	1,231
0,2	1,040	1,080	1,122	1,167	1,212	1,260	1,310	1,361	1,415	1,471	1,529	1,529
0,3	1,086	1,148	1,213	1,282	1,356	1,433	1,516	1,603	1,695	1,793	1,897	1,897
0,4	1,148	1,231	1,321	1,417	1,520	1,632	1,752	1,882	2,022	2,172	2,334	2,334
0,5	1,223	1,327	1,441	1,566	1,702	1,851	2,015	2,193	2,389	2,603	2,838	2,838
0,6	1,308	1,433	1,572	1,726	1,897	2,087	2,297	2,531	2,791	3,079	3,400	3,400
0,7	1,399	1,545	1,709	1,893	2,100	2,333	2,595	2,889	3,220	3,592	4,011	4,011
0,8	1,495	1,661	1,851	2,061	2,309	2,586	2,901	3,260	3,668	4,132	4,661	4,661
0,9	1,593	1,780	1,994	2,239	2,520	2,842	3,212	3,639	4,128	4,691	5,339	5,339
1	1,693	1,899	2,133	2,412	2,730	3,098	3,525	4,020	4,595	5,261	6,036	6,036

3.4 - Force de séparation des rouleaux

Par unité de largeur de la tôle, c'est

$$F' = \int_0^{\alpha_1} |\sigma_y| d(R \sin \alpha) \cong \int_0^{\alpha_1} p R \cos \alpha d\alpha \cong R \int_0^{\alpha_1} p d\alpha .$$

On peut exprimer cette grandeur sous la forme

$$F' = R \cdot 2\tau_0 \sqrt{h_2/R} \int_0^{\beta_1} y d\beta = 2 \tau_0 \sqrt{h_2 R} \int_0^{\beta_1} y d\beta$$

3.5 - Puissance de laminage

Si V est la vitesse périphérique des rouleaux, la puissance par unité de largeur de la tôle est donnée par

$$P' = 2 \int_0^{\alpha_1} \tau V R d\alpha ,$$

où $\tau = -\mu p$ pour $0 < \alpha < \alpha_0$ et $\tau = \mu p$ pour $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$, ce qui donne

$$P' = 2 R V \left[-\int_0^{\alpha_0} \mu p d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \mu p d\alpha \right] .$$

Notant que

$$\mu = \frac{v}{2} \sqrt{h_2/R} \quad , \quad d\alpha = \sqrt{h_2/R} d\beta \quad , \quad p = 2\tau_0 y \quad ,$$

on obtient

$$P' = 2 R V \tau_0 \frac{h_2}{R} v \left[-\int_0^{\beta_0} y d\beta + \int_{\beta_0}^{\beta_1} y d\beta \right]$$

soit

$$P' = 2 \tau_0 h_2 V v \left[-\int_0^{\beta_0} y d\beta + \int_{\beta_0}^{\beta_1} y d\beta \right] .$$

3.6 - Vitesse de la tôle

Notant $h_0 = h(\alpha_0)$, on a

- à l'entrée : $v_1 = V \frac{h_0}{h_1}$

- à la sortie : $v_2 = V \frac{h_0}{h_2}$

3.7 - Exemple

Largeur de la tôle.....254 mm
 Epaisseur initiale.....3,175 mm
 Epaisseur finale.....2,54 mm
 Coefficient de frottement.....0,1
 Vitesse du rouleau.....30,48 m/min
 Rayon du rouleau.....254 mm
 Matériau de la tôle : $R_{0,2} = 210$ MPa, $R_m = 350$ MPa, pour $A = 0,2$

● *Détermination de τ_0 .*

Nous prendrons une moyenne. La déformation finale est

$$\varepsilon = \frac{3,175 - 2,54}{2,54} = 0,2.$$

On choisit la valeur moyenne

$$R_e = R_{0,2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{A} (R_m - R_{0,2}) = 280 \text{ MPa.}$$

A cette valeur correspond

$$2 \tau_0 = 2 \frac{R_e}{\sqrt{3}} = 323,4 \text{ MPa.}$$

● *Géométrie*

$$\alpha_1 = \sqrt{\Delta h/R} = \sqrt{\frac{3,175 - 2,54}{254}} = 0,05 \text{ rad}$$

$$\sqrt{R/h_2} = \sqrt{\frac{254}{2,54}} = 10$$

$$\beta_1 = 10 \alpha_1 = 0,5$$

$$\nu = 2 \mu \sqrt{R/h_2} = 2 \cdot 0,1 \cdot 10 = 2.$$

● *Solution à la sortie .*

$$Y_p(0,5 ; 2) = 0,1683$$

$$Y_h(0,5 ; 2) = 0,3956$$

$$C = \frac{1 - Y_p(0,5 ; 2)}{Y_h(0,5 ; 2)} = \frac{1 - 0,1683}{0,3956} = 2,102$$

$$y_e(\beta) = 2,102 Y_h(\beta ; 2) + Y_p(\beta ; 2)$$

Ceci donne le tableau suivant :

β	$Y_h(\beta;2)$	$2,102 Y_h(\beta;2)$	$Y_p(\beta;2)$	y_e	$y_s(\beta;2)$
0	1	2,102	0	2,102	1
0,1	0,8193	1,722	0,0093	1,731	1,231
0,2	0,6738	1,417	0,0345	1,452	1,529
0,3	0,5583	1,174	0,0717	1,246	1,897
0,4	0,4672	0,9822	0,1173	1,100	2,334
0,5	0,3956	0,8317	0,1683	1	2,838

On trace les courbes de y_e et y_s en fonction de β , ce qui permet de trouver leur point d'intersection β_0 (fig. 8). On trouve : $\beta_0 = 0,187$.

• Force de séparation des rouleaux

$$2 \tau_0 L \sqrt{h_2 R} = 323,4 \cdot 254 \cdot \sqrt{2,54 \cdot 254} = 2,086 \cdot 10^6 \text{ N}$$

On calcule numériquement $\int_0^1 y d\beta$ par la formule des trapèzes, avec un intervalle $\Delta\beta = 0,1$. Ceci se fait le plus simplement sous forme de tableau :

β	y	contribution
0	1	0,5
0,1	1,231	1,231
0,2	1,452	1,452
0,3	1,246	1,246
0,4	1,100	1,100
0,5	1	0,5

$$\Sigma = 6,029$$

$$\int = \Sigma \cdot \Delta\beta = 6,029 \cdot 0,1 = 0,6029$$

Donc

$$F = 2,086 \cdot 10^6 \cdot 0,6029 = \underline{1,258 \cdot 10^6 \text{ N}}$$

• Puissance de laminage

Attention à la cohérence des unités en calculant

$$2\tau_0 L h_2 V \nu = 323,4 \cdot 10^6 \cdot 0,254 \cdot 2,54 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{30,48}{60} = 212 \text{ 000 W}$$

Il faut calculer

$$-\int_0^{\beta_0} y d\beta + \int_{\beta_0}^1 y d\beta = -I + II$$

On utilise la formule du trapèze à intervalles variables :

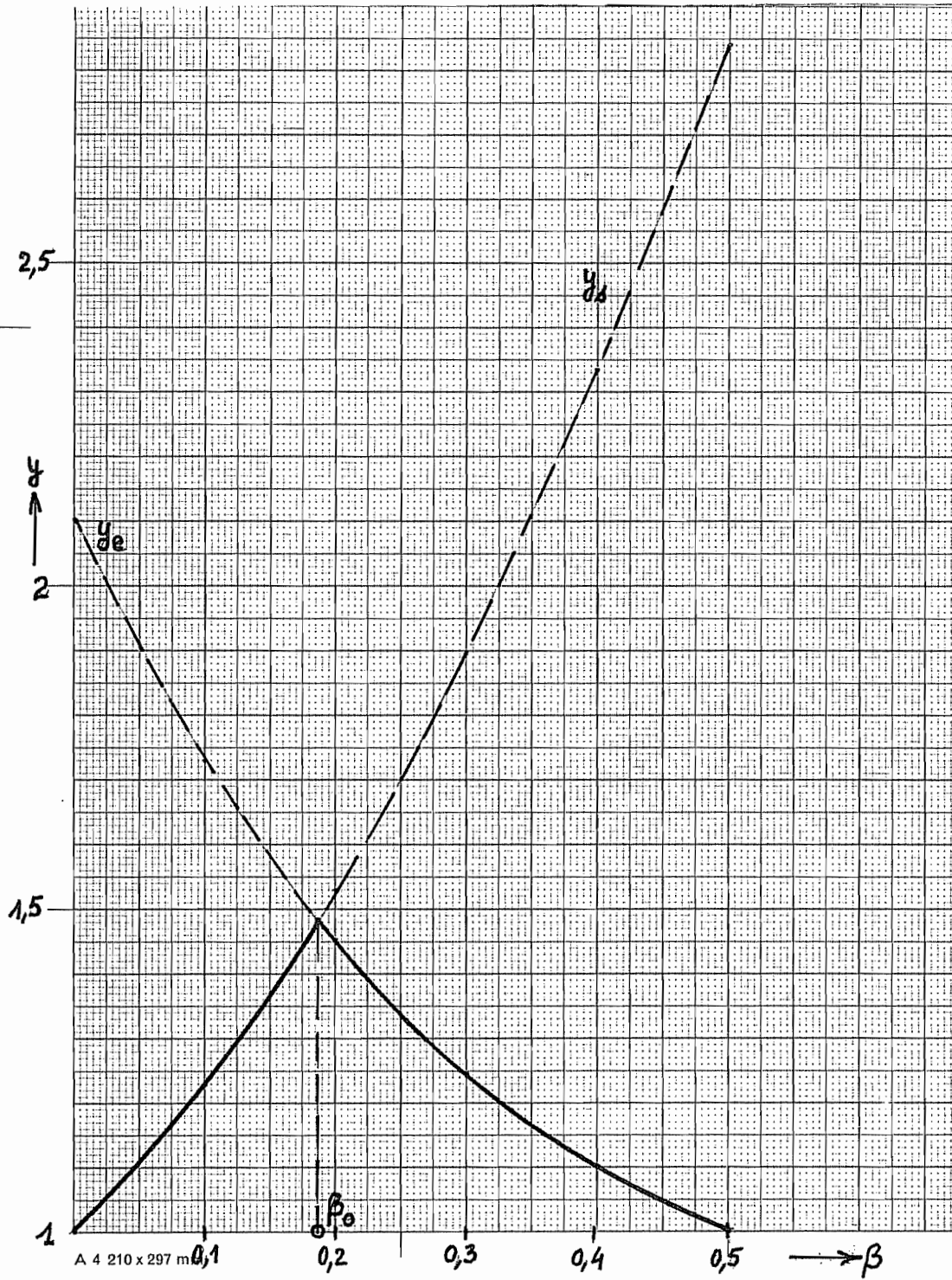


Fig. 8 : graphe de y_e et y_s en fonction de β et détermination de β_0

Calcul de I

β	$\Delta\beta$	y	y_{moy}	$y_{\text{moy}} \Delta\beta$
0		1		
0,1	0,1	1,231	1,116	0,1116
0,187	0,087	1,48	1,356	0,1180

$$I = 0,2296$$

Calcul de II

β	$\Delta\beta$	y	y_{moy}	$y_{\text{moy}} \Delta\beta$
0,187		1,48		
0,2	0,013	1,452	1,466	0,01906
0,3	0,1	1,246	1,349	0,1349
0,4	0,1	1,100	1,173	0,1173
0,5	0,1	1	1,050	0,1050

$$II = 0,3763$$

On a donc

$$II - I = 0,3763 - 0,2296 = 0,1467$$

et

$$P = 0,1467 \cdot 212\,000 = \underline{31\,090\text{ W}}$$

• *Vitesse de la tôle*

$$\text{En } \beta_0 = 0,187, \quad h_0 = h_2 (1 + \beta_0^2) = 2,54 \cdot (1 + (0,187)^2) = 2,629 \text{ mm}$$

Dès lors,

$$Q' = V \cdot h_0 = 30,48 \cdot 2,629 \cdot 10^{-3} = 80,13 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{min}$$

$$v_1 = Q'/h_1 = 80,13/3,175 = 25,24 \text{ m/min}$$

$$v_2 = Q'/h_2 = 80,13/2,54 = 31,55 \text{ m/min.}$$

3.8 - *La colline de frottement (friction hill)*

On remarquera la pointe de pression à l'angle d'adhérence. Ce phénomène est connu dans la littérature sous le nom de *colline de frottement (friction hill)*.

3.9 - Condition d'agrippage

Pour pouvoir agripper la tôle sans effort extérieur supplémentaire, il faut que le rouleau fournisse un effort d'entrée horizontal dans le sens de la marche. Or (fig. 9), cet effort vaut

$$- F_n \sin \alpha_1 + F_t \cos \alpha_1 = F_n (\mu \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1) .$$

Cet effort sera positif si

$$\mu > \operatorname{tg} \alpha_1 .$$

On ne peut donc agripper la tôle à un angle supérieur à l'angle de frottement ϕ .

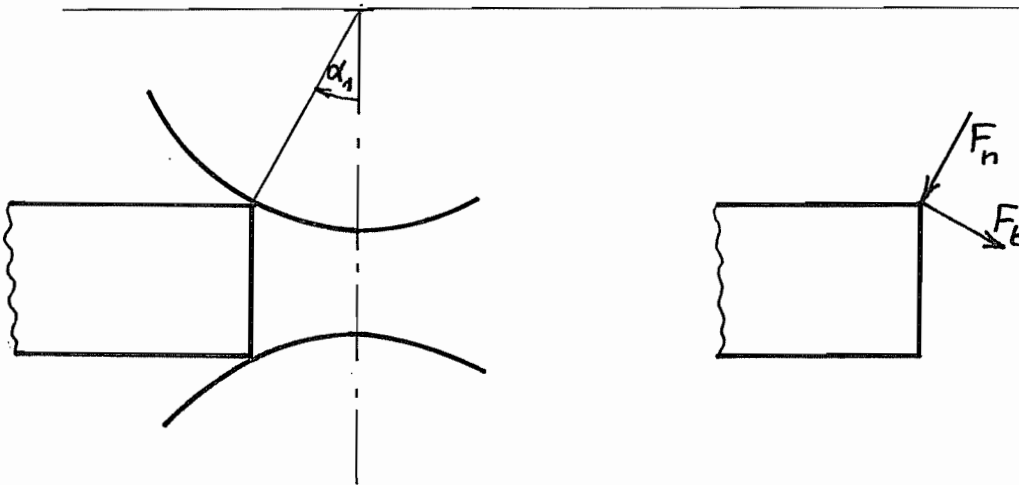


Figure 9 : Condition d'agrippage

3.10 - Condition de stabilité du processus

La solution développée ci-dessus suppose que les courbes de y_s et y_e se rencontrent en un angle intermédiaire entre 0 et β_1 . Or, y_e est une combinaison de Y_h et Y_p de la forme $A Y_h + Y_p$, choisie manière à valoir l'unité en β_1 . En allant de β_1 à zéro, Y_p décroît, tandis que Y_h croît. On peut donc imaginer que y_e décroisse. Dès lors, si y_e n'excède pas l'unité avant $\beta = 0$, il n'y aura pas de point d'adhérence, et la vitesse de la tôle sera indéterminée. Dans ce cas, le processus est *instable*. L'état limite, assurant tout juste la stabilité, est celui où $y_e(0) = 1$ (fig. 10)

Comme

$$y_e = C Y_h(\beta ; \nu) + Y_p(\beta ; \nu)$$

et comme

$$Y_h(0 ; \nu) = 1 \quad \text{et} \quad Y_p(0 ; \nu) = 0,$$

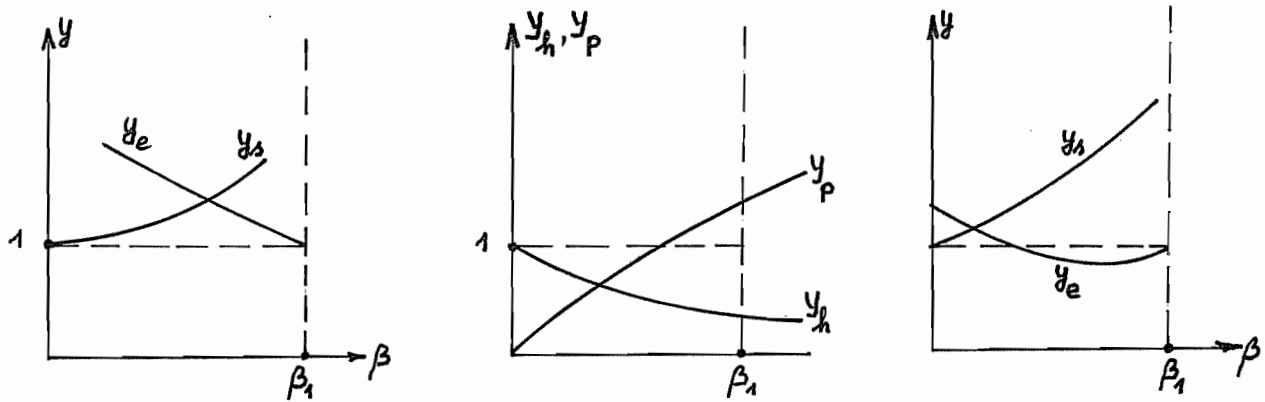


Figure 10 - Condition de stabilité

la condition est

$$C \equiv \frac{1 - Y_p(\beta_1; \nu)}{Y_h(\beta_1; \nu)} > 1$$

soit

$$1 - Y_p(\beta_1; \nu) > Y_h(\beta_1; \nu)$$

ou encore

$$\rho(\beta_1; \nu) = Y_h(\beta_1; \nu) + Y_p(\beta_1; \nu) < 1 .$$

On obtient donc la limite de stabilité $\beta_{1\max}(\nu)$ en résolvant numériquement l'équation

$$\rho(\beta_{1\max}(\nu); \nu) = 1 .$$

Les résultats sont :

ν	$\beta_{1\max}$
0	0
0,2	0,2
0,4	0,4
0,6	0,6
0,8	0,7957
1	0,9897
1,2	1,179
1,4	1,364
1,6	1,543
1,8	1,715
2	1,882

La limite de stabilité est donc *très légèrement inférieure* à ν , ce qui revient à dire que

$$\alpha_{1\max} \cong 2\mu .$$

On notera que le laminage peut être stable sans pour autant que l'agrippage sans effort extérieur soit possible.

3.11 - Puissance de déformation

La puissance calculée ci-dessus compte deux termes : la puissance dépensée à déformer la tôle, P_d , et la puissance perdue par frottement, P_f . La puissance de déformation vaut (en négligeant toujours le cisaillement)

$$P_d = \int_V (\sigma_x \varphi_x + \sigma_y \varphi_y) dV = \int_V (\sigma_x - \sigma_y) \varphi_x dV = 2\tau_0 \int_V \varphi_x dV .$$

Si Q' est le débit de la tôle par unité de largeur, on a

$$u = Q' / h$$

donc

$$\varphi_x = - \frac{Q}{h^2} \frac{dh}{dx}$$

et

$$P'_d = - 2\tau_0 \int_0^l \frac{Q'}{h^2} \frac{dh}{dx} h dx = 2 \tau_0 Q' \ln \frac{h_1}{h_2} .$$

Dans cette expression, le débit se calcule par

$$Q' = h_0 \cdot V ,$$

où h_0 est l'épaisseur de la tôle au point d'adhérence.

Calculons cette puissance dans le cas de l'application ci-dessus. On a

$$\begin{aligned} P_d &= 2\tau_0 L h_0 V \ln (h_1/h_2) = \\ &= 323,4 \cdot 10^6 \cdot 0,254 \cdot 2,629 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{30,48}{60} \cdot \ln \frac{3,175}{2,54} = \underline{24\ 480\ W} . \end{aligned}$$

La puissance perdue par frottement des rouleaux sur la tôle vaut donc

$$P_f = P - P_d = 31\ 090 - 24\ 480 = \underline{6\ 610\ W}$$

Le rendement de l'opération est donc

$$\eta = \frac{P_d}{P} = \frac{24480}{31090} = \underline{0,7874} .$$

3.12 - Calcul direct de la puissance perdue par frottement

La puissance de frottement peut se calculer directement par

$$P'_f = 2 \int_0^{\alpha_1} |\mu| p |v - V| R d\alpha$$

où v est la vitesse de la tôle et $V = \omega R$ est la vitesse périphérique du rouleau. Comme $v < V$ à l'entrée et $v > V$ à la sortie, on obtient

$$\begin{aligned} P'_f &= 2 |\mu| R \left[\int_0^{\alpha_0} p (v - V) d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} p (V - v) d\alpha \right] \\ &= 2 |\mu| R V \left[\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} p d\alpha - \int_0^{\alpha_0} p d\alpha \right] + 2 |\mu| R \left[\int_0^{\alpha_0} p v d\alpha - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} p v d\alpha \right] \end{aligned}$$

On reconnaît dans le premier terme l'expression de P trouvée en 3.5. Examinons le second terme : en posant $\mu = -|\mu|$ dans la zone de sortie et $\mu = |\mu|$ dans la zone d'entrée, on obtient

$$- 2 \int_0^{\alpha_1} \mu p v R d\alpha .$$

Avec les mêmes conventions, nous avons écrit en 3.2

$$\left(\frac{h}{2} + R \frac{\alpha^2}{2} \right) \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{p}{2\tau_0} \right) + \mu R \frac{p}{2\tau_0} - R \alpha = 0 ,$$

ce qui implique

$$- \mu p R v = - 2\tau_0 R v \alpha + \left(\frac{h}{2} + R \frac{\alpha^2}{2} \right) v \frac{dp}{d\alpha} .$$

On remarquera en outre que le groupement

$$\left(\frac{h}{2} + R \frac{\alpha^2}{2} \right) v = v \frac{h}{2} = Q'$$

est constant. On a donc

$$- 2 \int_0^{\alpha_1} \mu p R v d\alpha = - 4\tau_0 \int_0^{\alpha_1} R v \alpha d\alpha + Q' \int_0^{\alpha_1} \frac{dp}{d\alpha} d\alpha .$$

Mais le dernier terme se réduit à

$$Q' [p(\alpha_1) - p(0)] = Q' (2\tau_0 - 2\tau_0) = 0 .$$

Il ne reste donc plus que

$$\begin{aligned}
 -4\tau_0 \int_0^{\alpha_1} Rv\alpha d\alpha &= -2\tau_0 \int_0^{\alpha_1} \frac{Q' \cdot 2R\alpha}{h_2 + R\alpha^2} d\alpha = -2\tau_0 Q' \int_0^{\alpha_1} \frac{d(h_2 + R\alpha^2)}{h_2 + R\alpha^2} \\
 &= -2\tau_0 Q' \ln \frac{h_1}{h_2} = -P'_d
 \end{aligned}$$

On constate que le bilan est correct :

$$P_f = P - P'_d .$$

4. Théorie élémentaire du laminage

Une théorie élémentaire du laminage s'obtient en admettant que la pression appliquée par les rouleaux a partout la même valeur p_m . Cette valeur est prise de l'ordre de

$$p_m \cong 1,2 \cdot (2\tau_0) .$$

Bien que simpliste et, par essence, incapable de déterminer la distribution réelle des pressions, cette théorie permet d'obtenir rapidement des résultats réalistes en ordre de grandeur.

4.1 - Angle d'adhérence

On obtient l'angle d'adhérence α_0 en exprimant que la force horizontale F_x appliquée à la tôle est nulle. Cette force s'exprime (fig. 11) par

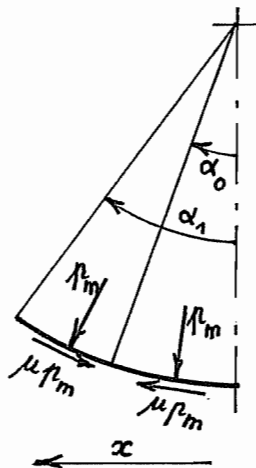


Fig. 11 - Détermination de l'angle d'adhérence dans la théorie élémentaire

$$F'_x = \int_0^{\alpha_0} (p_m \sin \vartheta + \mu p_m \cos \vartheta) R d\vartheta + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (p_m \sin \vartheta - \mu p_m \cos \vartheta) R d\vartheta = 0$$

soit

$$p_m R [(1 - \cos \alpha_0) + \mu \sin \alpha_0 + (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_1) - \mu(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_0)] = 0$$

ce qui implique

$$1 - \cos \alpha_1 + 2 \mu \sin \alpha_0 - \mu \sin \alpha_1 = 0$$

soit

$$\sin \alpha_0 = \frac{\cos \alpha_1 + \mu \sin \alpha_1 - 1}{2 \mu} .$$

4.2 - Force de séparation des rouleaux

On obtient directement

$$F'_z \cong \int_0^{\alpha_1} p R d\vartheta = p_m R \alpha_1 .$$

Notant que

$$h_1 = h_2 + R \alpha_1^2$$

on a

$$\Delta h = h_1 - h_2 = R \alpha_1^2$$

soit

$$R \alpha_1 = \sqrt{R \Delta h} .$$

Il vient donc

$$F'_z = p_m \sqrt{R \Delta h} .$$

4.3 - Puissance de laminage

$$\begin{aligned} P' &= \int_0^{\alpha_1} 2 \tau V R d\vartheta = 2 \mu p_m V R \left[- \int_0^{\alpha_0} d\vartheta + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\vartheta \right] \\ &= 2 \mu p_m V R (\alpha_1 - 2 \alpha_0) = 2 \mu p_m V R \alpha_1 \left(1 - \frac{2\alpha_0}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

soit finalement, en tenant compte de la valeur de F'_z ,

$$P' = 2 \mu V F'_z \left(1 - \frac{2\alpha_0}{\alpha_1}\right)$$

4.4 La puissance est-elle positive ?

Physiquement, la puissance *doit* être positive. Mais le présent modèle assure-t-il cette condition ? Il s'agit de vérifier que l'on a bien

$$\alpha_0 < \alpha_1/2 .$$

En introduisant l'angle de frottement ϕ , on transforme la relation donnant α_0 en

$$\begin{aligned} \sin \alpha_0 &= \frac{\cos \alpha_1 \cos \phi + \sin \alpha_1 \sin \phi - \cos \phi}{2 \sin \phi} \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha_1 - \frac{\cos \phi (1 - \cos \alpha_1)}{2 \sin \phi} < \frac{1}{2} \sin \alpha_1 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sin \alpha_1 > 2 \sin \alpha_0 \geq 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = \sin 2\alpha_0$$

ce qui montre que

$$\alpha_1 > 2\alpha_0 .$$

4.5 - Condition de stabilité du processus

La vitesse de la tôle ne sera définie que si

$$0 < \alpha_0 < \alpha_1 .$$

Nous savons déjà que $\alpha_0 < \alpha_1/2$. Donc une violation de la condition de stabilité ne peut correspondre qu'à $\alpha_0 \leq 0$. (Dans ce cas, il n'y a plus de zone de sortie et les rouleaux patinent sur la tôle.) La recherche de la limite de stabilité se ramène donc à examiner quand $\alpha_0 = 0$, ce qui se traduit par la condition

$$\cos \alpha_1 + \mu \sin \alpha_1 = 1$$

soit

$$\mu \sin \alpha_1 = 1 - \cos \alpha_1$$

ou

$$2 \mu \sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2} = 2 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}$$

ou encore

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \mu = \operatorname{tg} \phi .$$

La condition de stabilité est donc

$$\alpha_1 < 2 \phi .$$

4.6 - Exemple

Reprenons l'exemple de la section 3.7. On a

$$p_m = 1,2 \cdot 2\tau_0 = 1,2 \cdot 323,4 = 388,1 \text{ MPa}$$

$$\alpha_1 = 0,05 \text{ rad}$$

$$\mu = 0,1$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{\cos \alpha_1 + \mu \sin \alpha_1 - 1}{2 \mu} = 0,01874$$

$$\alpha_0 = \underline{0,01874} \quad [\text{au lieu de } 0,0187 \text{ , } + 0,2 \text{ \%}]$$

$$L = 254 \text{ mm} \quad ; \quad R = 254 \text{ mm}$$

$$\Delta h = 3,175 - 2,54 = 0,6350 \text{ mm}$$

$$F_z = p_m L \sqrt{R \Delta h} = 388,1 \cdot 254 \cdot \sqrt{254 \cdot 0,6350} = \underline{1,252 \cdot 10^6 \text{ N}}$$

$$[\text{au lieu de } 1,258 \cdot 10^6 \text{ N} \quad , \quad - 0,5 \text{ \%}]$$

$$P = 2 \mu F_z V \left(1 - \frac{2\alpha_0}{\alpha_1}\right) = 2 \cdot 0,1 \cdot 1,252 \cdot 10^6 \cdot \frac{30,48}{60} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 0,01874}{0,05}\right) =$$

$$= \underline{31 \ 850 \text{ W}} \quad [\text{au lieu de } 31 \ 090 \text{ W} \quad , \quad + 2 \text{ \%}]$$

On constate que ces résultats approchés sont très réalistes. De plus, la formule de F_z fait apparaître que la force de séparation des rouleaux dépend en fait de la largeur et du groupement $\sqrt{R \Delta h}$.

5. Bibliographie relative au laminage

- [1] L. R. UNDERWOOD - *The Rolling of Metals*, vol. 1
Chapman & Hall, London, 1950
- [2] Th. von KARMAN - "On the Theory of Rolling"
Z. ang. Math. u. Mech., vol 5, 1925, pp. 139-141
- [3] A. NADAI - "The forces required for rolling steel strip under tension"
Journal of applied mechanics, june 1939, pp. A54 - A62

CHAPITRE 4 - PROBLÈMES EN ÉTAT PLAN DE CONTRAINTE

1. Critère de Tresca

L'état de contrainte plan est caractérisé par la condition $\sigma_z = 0$. En termes des contraintes principales, on a alors par le critère de von Mises

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_1^2 + 2 \sigma_2^2 - 2 \sigma_1 \sigma_2 = 6 \tau_0^2$$

soit

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = 3 \tau_0^2 = Re^2.$$

Il est souvent plus simple d'utiliser le critère de Tresca

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \} = Re,$$

qui se ramène ici à

$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} = Re$$

Utilisé comme tel, le critère de Tresca mène toujours à une *puissance dissipée trop faible*, car comme $S_T \subset S_{VM}$ (fig. 1), on a

$$d_T(\vartheta) = \sup_{\sigma \in S_T} \sigma_{ij} \vartheta_{ij} \leq \sup_{\sigma \in S_{VM}} \sigma_{ij} \vartheta_{ij} = d_{VM}(\vartheta).$$

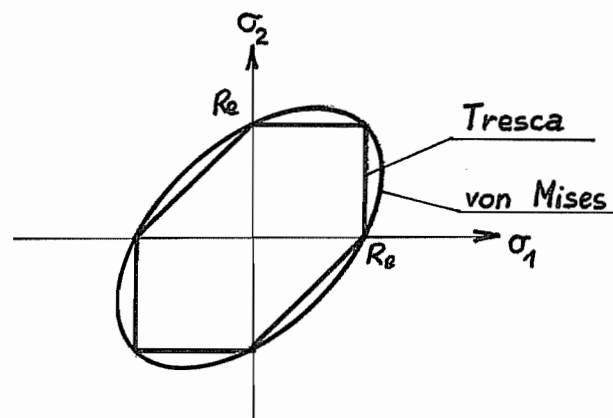


Figure 1 - Critères de Tresca et de von Mises

On remarquera que le *critère de Tresca enveloppe*, défini par

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \} = 2 \tau_0 = \frac{2 Re}{\sqrt{3}}$$

est quant à lui tangent extérieurement au critère de von Mises (fig. 2).

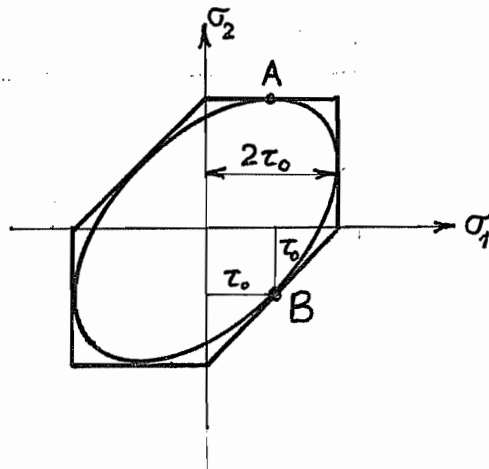


Figure 2 - Critère de Tresca enveloppe

Pour le point B, correspondant à du cisaillement pur, c'est évident. Pour le point A, notons que sur la courbe limite de von Mises, on a

$$2 \sigma_1 d\sigma_1 + 2 \sigma_2 d\sigma_2 - \sigma_1 d\sigma_2 - \sigma_2 d\sigma_1 = 0$$

donc, au point A où $d\sigma_2 = 0$,

$$(2 \sigma_1 - \sigma_2) d\sigma_1 = 0,$$

ce qui implique

$$\sigma_1 = \sigma_2/2 .$$

En ce point, on a donc

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \frac{\sigma_2^2}{4} + \sigma_2^2 - \frac{\sigma_2^2}{2} = \frac{3}{4} \sigma_2^2 = Re^2$$

soit

$$\sigma_2 = \frac{2 Re}{\sqrt{3}} = 2 \tau_0 .$$

L'utilisation du critère de Tresca enveloppe, c'est-à-dire la substitution de $2\tau_0$ à Re dans le critère de Tresca mène donc à une *surestimation de la puissance dissipée*. En d'autres termes,

$$D_{Tresca} \leq D_{von Mises} \leq \frac{2\tau_0}{Re} D_{Tresca} \cong 1,155 D_{Tresca}$$

Bien plus, en choisissant la valeur intermédiaire

$$Re^{**} = 1,078 Re$$

comme limite dans le critère de Tresca, on peut garantir une erreur sur la

puissance inférieure à 7,8%, par excès ou par défaut.

Dans les problèmes de dimensionnement des machines, il est prudent de se placer du côté du maximum de la puissance. On remplacera donc Re par $2\tau_0$. Cependant, dans les développements qui suivent, nous écrirons Re , en conformité avec le critère de Tresca classique.

2. Direction des vitesses de déformation

Sur les parties linéaires de la courbe limite, la normale est bien définie et figure la direction du vecteur $(\vartheta_1, \vartheta_2)$. C'est le cas des points A, C et D

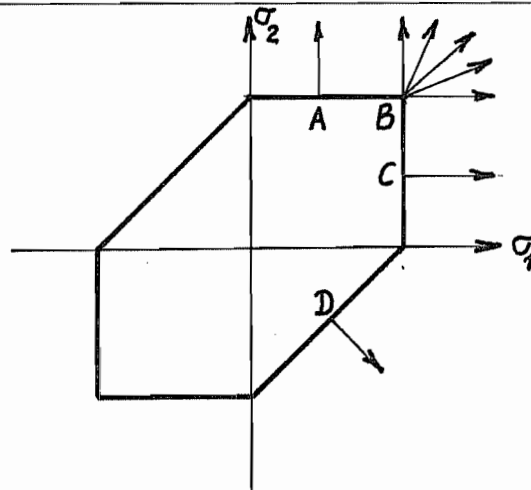


Figure 3 - Les vitesses de déformation

de la figure 3. En un angle, les vitesses de déformation peuvent avoir toutes les directions comprises entre la normale à gauche et la normale à droite (Point B).

La troisième vitesse de déformation dépend des deux autres par la relation

$$\vartheta_3 = -(\vartheta_1 + \vartheta_2) .$$

3. Emboutissage cylindrique

3.1 - Hypothèses générales (fig. 4)

Lors de l'emboutissage, il y a déformation dans le flan et dans la zone d'entrée. La zone cylindrique, quant à elle, doit rester élastique pour permettre le tirage. Bien qu'il existe des pressions transversales, dans le flan du fait du serre-flan, et dans la zone d'entrée pour équilibrer la force de tirage, ces pressions restent faibles par rapport aux contraintes membranaires. On peut donc sans grande erreur admettre qu'il s'agit d'un *état plan de contrainte*. Nous utiliserons le critère de Tresca, qui mène à la théorie la plus simple. Dans tout l'exposé, la raideur de flexion sera supposée négligeable.

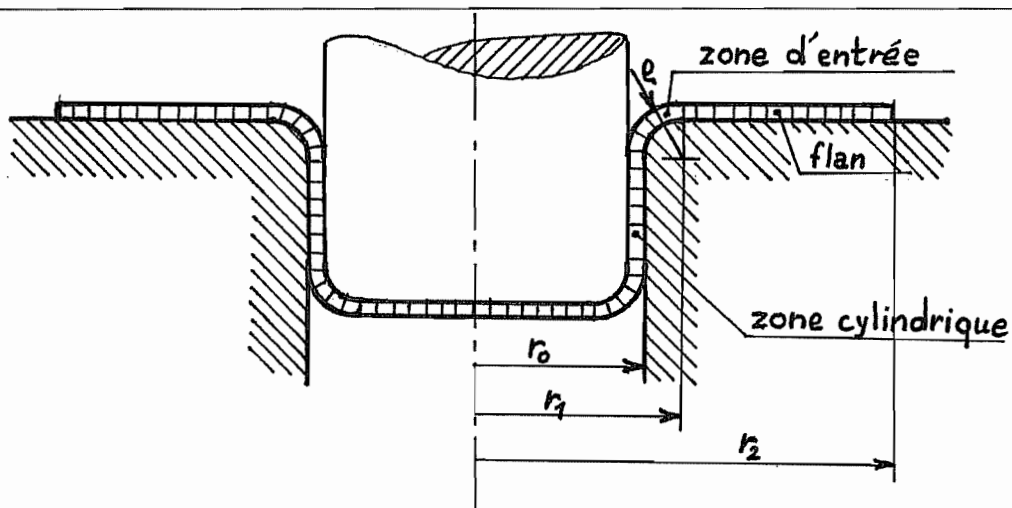


Figure 4 - Emboutissage cylindrique

3.2 - Etude du flan

Etant donné la vitesse radiale $u(r)$ (négative !), on a

$$\vartheta_r = \frac{du}{dr} \quad , \quad \vartheta_\phi = \frac{u}{r} .$$

La relation entre ϑ_r et ϑ_ϕ découle de la loi de normalité. Pour cela, il faut déterminer le point de fonctionnement dans le plan de contrainte (fig. 5)

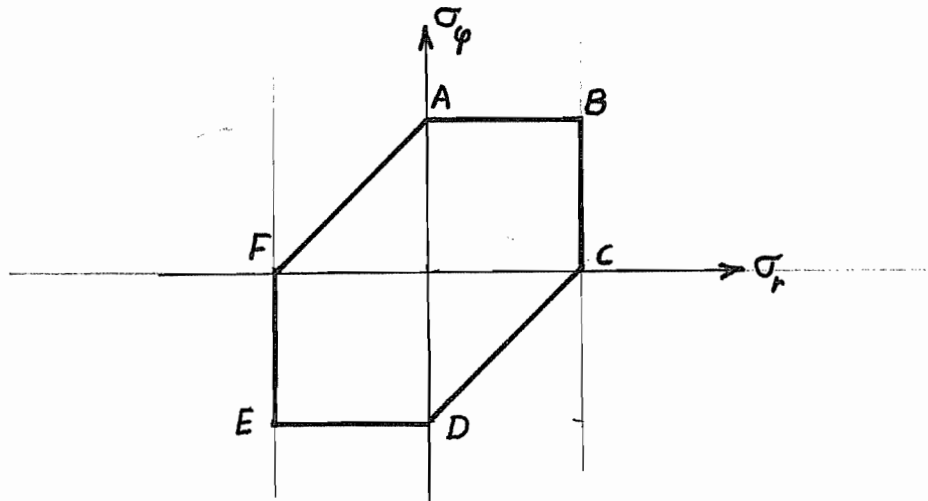


Figure 5 - Détermination des fonctionnements possibles

Comme u est négatif, on a $\vartheta_\phi < 0$, ce qui limite le choix aux branches CD et DE. La branche DE est à proscrire, car elle correspond à

$$\vartheta_\phi = -\lambda, \quad \vartheta_r = 0 \quad , \quad \vartheta_\phi = \lambda ,$$

soit un épaissement de la tôle sans déformation radiale. Le seul cas viable

est la branche CE, où

$$\vartheta_r = \lambda, \quad \vartheta_\phi = -\lambda, \quad \vartheta_3 = 0.$$

On obtient ainsi une déformation sans variation d'épaisseur. Le champ de vitesse est donc régi par la condition

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0$$

soit

$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}$$

ce qui donne

$$u(r) = u(r_1) \frac{r_1}{r}.$$

En outre, les contraintes vérifient

$$\sigma_r - \sigma_\phi = Re.$$

Examinons à présent les conditions d'équilibre. En notant t l'épaisseur de la tôle et μ le coefficient de frottement, on a visiblement (fig. 6), puisque la tôle frotte sur ses deux faces sous une pression p donnée par le serre-flan,

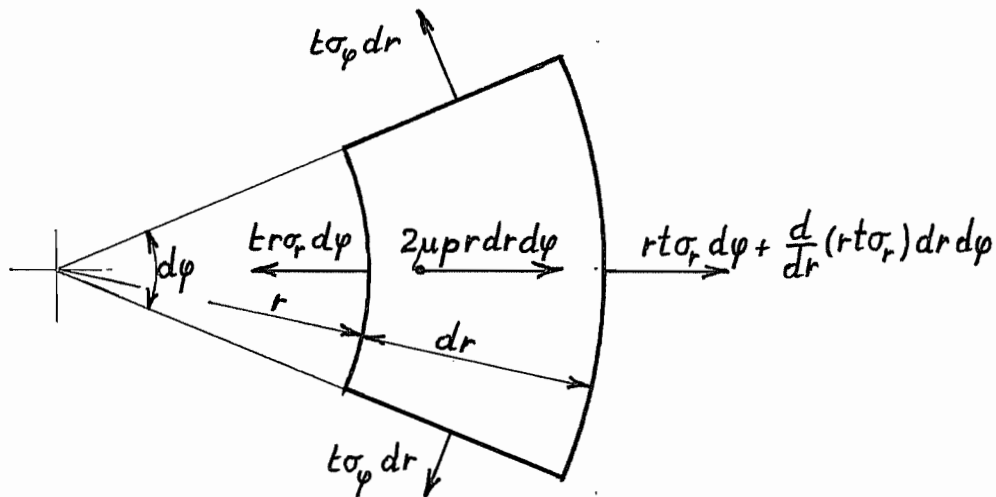


Figure 6 - Equilibre d'un secteur du flan

$$\frac{d}{dr}(r t \sigma_r) dr d\phi - 2 t \sigma_\phi dr \frac{d\phi}{2} + 2 \mu p r dr d\phi = 0$$

soit

$$\frac{d(r \sigma_r)}{dr} - \sigma_\phi + \frac{2\mu}{t} p r = 0$$

Développons le premier terme : il vient

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + (\sigma_r - \sigma_\phi) + \frac{2\mu}{t} pr = 0 .$$

Or, $\sigma_r - \sigma_\phi = Re$. Après division par r , on obtient donc

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{Re}{r} + \frac{2\mu}{t} p = 0 .$$

Intégrons en tenant compte de la condition $\sigma_r(r_2) = 0$. Il vient

$$\sigma_r = Re \ln \frac{r_2}{r} + \frac{2\mu p}{t} (r_2 - r) .$$

la contrainte radiale est donc maximale en $r = r_1$, où elle vaut

$$\sigma_r(r_1) = Re \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{2\mu p}{t} (r_2 - r_1) .$$

Quant à la contrainte tangentielle, elle vaut

$$\sigma_\phi = \sigma_r - Re .$$

Elle vaut $(-Re)$ à la périphérie et décroît en valeur absolue vers le centre.

3.3 - Critique des résultats précédents

Le critère de Tresca mène à la condition que l'épaisseur du flan reste constante lors du travail. Qu'en est-il si l'on utilise le critère de von Mises ? En $r = r_2$, on se trouve au point A de la figure 7, où $|\vartheta_r| < |\vartheta_\phi|$, ce qui implique

$$\vartheta_r + \vartheta_\phi = |\vartheta_r| - |\vartheta_\phi| < 0 \quad \text{donc} \quad \vartheta_z > 0 .$$

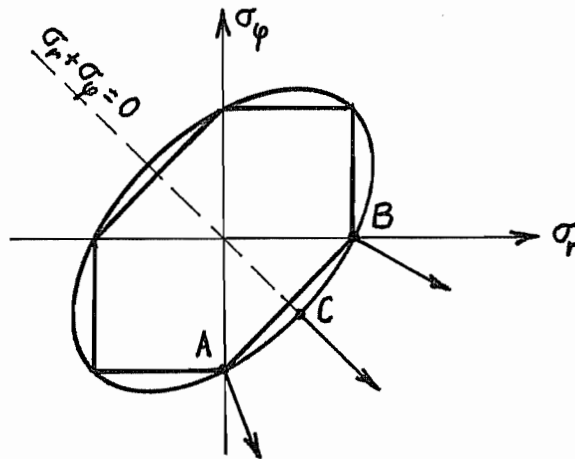


Figure 7 - Direction des déformations par von Mises

Lorsque l'on se rapproche du centre, l'état de contrainte se caractérise par une croissance de σ_r et au point C où $\sigma_r + \sigma_\phi = 0$, on a $\vartheta_z = 0$. Au-delà du point C, $\vartheta_z < 0$. On a donc tout lieu de soupçonner que le flan prend une forme semblable à la figure 8. Si l'on admet que le flan prend une forme pareille,

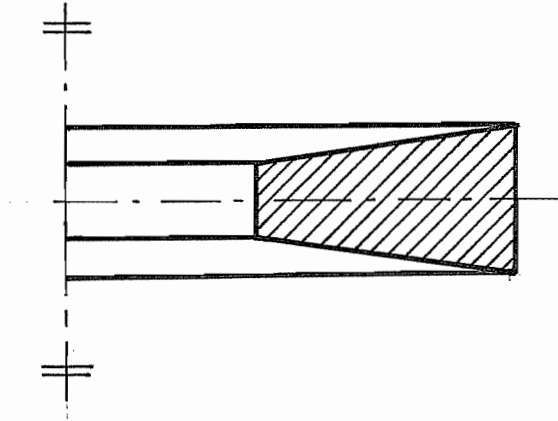


Figure 8 - Forme probable du flan, par le critère de von Mises

il ne peut y avoir de frottement que sur la périphérie et, pour $r < r_1$, l'équilibre est homogène :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0 ,$$

avec, en r_2 , la condition

$$2 \pi r_2 t \sigma_r(r_2) = 2 \mu P$$

où P est la force totale appliquée au serre-joint. Ceci donne

$$\sigma_r(r_2) = \frac{\mu P}{\pi r_2 t} .$$

En admettant que

$$\sigma_r - \sigma_\phi \cong Re ,$$

on a donc

$$\sigma_r = \sigma_r(r_2) - Re \ln \frac{r}{r_2} .$$

C'est ce que nous appellerons *solution de Tresca corrigée* (T.C.). Pour décider de sa validité, nous développerons une solution fondée sur le critère de von Mises.

3.4 - Par le critère de von Mises

Dans le critère de von Mises

$$\sigma_r^2 + \sigma_\phi^2 - \sigma_r \sigma_\phi = Re^2,$$

supposons σ_ϕ donnée. On peut en déduire σ_r par l'équation

$$\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\phi - (Re^2 - \sigma_\phi^2) = 0$$

dont les solutions sont

$$\sigma_r = \frac{\sigma_\phi \pm \sqrt{4 Re^2 - 3 \sigma_\phi^2}}{2}$$

Ceci suggère de poser

$$\sigma_\phi = \frac{2 Re}{\sqrt{3}} \cos \psi = 2 \tau_0 \cos \psi, \quad (1)$$

ce qui donne

$$\sigma_r = \tau_0 \cos \psi \pm Re |\sin \psi| = \tau_0 (\cos \psi \pm \sqrt{3} |\sin \psi|)$$

On remarquera que cette solution générale peut être mise sous la forme équivalente

$$\sigma_r = \tau_0 (\cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi) \quad (2)$$

en faisant varier ψ de 0 à 2π . Cependant, nous pouvons limiter le champ des recherches à partir des considérations suivantes (fig.9)

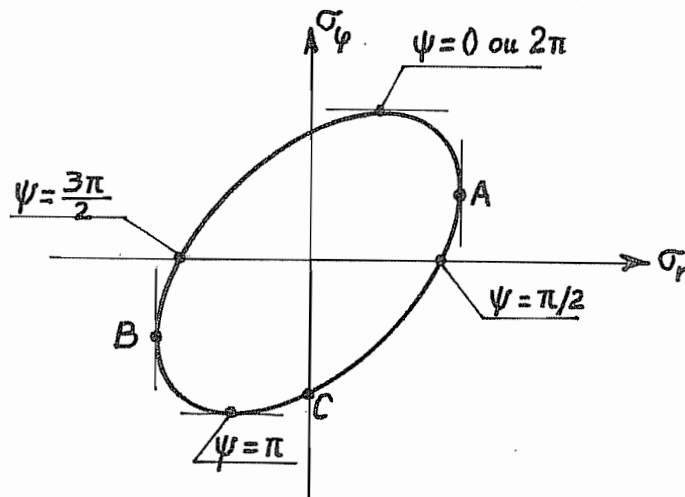


Figure 9 - Variation de σ_r et σ_ϕ en fonction de ψ .

• $\sigma_\phi = u/r$ doit être *négatif*, ce qui nous ramène à l'arc ACB, limité par les extrema de σ_r . Ceux-ci correspondent à

$$\frac{d\sigma_r}{d\psi} = \tau_0 (-\sin \psi + \sqrt{3} \cos \psi) = 0$$

soit

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{3}$$

ce qui correspond à

$$\psi = \begin{cases} \pi/3 \\ \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

Ainsi, on a certainement

$$\frac{\pi}{3} \leq \psi \leq \frac{4\pi}{3} .$$

• L'effort moteur est σ_r , et doit donc être positif. Ceci impose

$$\cos \psi \geq -\sqrt{3} \sin \psi ,$$

soit

$$\operatorname{tg} \psi \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} .$$

La butée est donc le point C, qui correspond à

$$\psi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} .$$

Au total, on doit donc avoir

$$\frac{\pi}{3} \leq \psi \leq \frac{5\pi}{6} . \quad (3)$$

Les expressions (1) et (2) impliquent

$$\sigma_r - \sigma_\phi = \tau_0 (-\cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi)$$

et

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \tau_0 (-\sin \psi + \sqrt{3} \cos \psi) \frac{d\psi}{dr}$$

L'équation d'équilibre s'écrit donc

$$0 = \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = \tau_0 \left\{ (-\sin \psi + \sqrt{3} \cos \psi) \frac{d\psi}{dr} + \frac{-\cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi}{r} \right\} ,$$

ce qui équivaut à

$$-\frac{\sin \psi - \sqrt{3} \cos \psi}{\cos \psi - \sqrt{3} \sin \psi} = \frac{dr}{r}.$$

La solution de cette équation est

$$\ln r = \ln C - f(\psi) \tag{4}$$

avec

$$f(\psi) = \int \frac{\sin \psi - \sqrt{3} \cos \psi}{\cos \psi - \sqrt{3} \sin \psi} d\psi.$$

Pour calculer cette primitive, notons que

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3},$$

ce qui permet d'écrire

$$\sin \psi - \sqrt{3} \cos \psi = \frac{\sin \psi \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos \psi}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin(\psi - \frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{3}}$$

et

$$\cos \psi - \sqrt{3} \sin \psi = \frac{\cos \psi \cos \frac{\pi}{3} - \sin \psi \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\cos(\psi + \frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{3}}.$$

Dès lors,

$$\frac{\sin \psi - \sqrt{3} \cos \psi}{\cos \psi - \sqrt{3} \sin \psi} = \frac{\sin(\psi - \frac{\pi}{3})}{\cos(\psi + \frac{\pi}{3})}.$$

Mais comme

$$\sin(\psi - \frac{\pi}{3}) = \sin(\psi + \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}) = \sin(\psi + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{2\pi}{3} - \cos(\psi + \frac{\pi}{3}) \sin \frac{2\pi}{3},$$

on a encore

$$\frac{\sin(\psi - \frac{\pi}{3})}{\cos(\psi + \frac{\pi}{3})} = \cos \frac{2\pi}{3} \operatorname{tg}(\psi + \frac{\pi}{3}) - \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}(\psi + \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned} f(\psi) &= -\frac{1}{2} \int \operatorname{tg}(\psi + \frac{\pi}{3}) d\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} \psi \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \cos(\psi + \frac{\pi}{3}) \right| - \frac{\sqrt{3}}{2} \psi, \end{aligned}$$

si bien que

$$\ln r = \ln C - \frac{1}{2} \ln \left| \cos\left(\psi + \frac{\pi}{3}\right) \right| + \frac{\sqrt{3}}{2} \psi$$

ce qui revient à écrire

$$r = C g(\psi) \tag{5}$$

avec

$$g(\psi) = \frac{\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \psi\right)}{\left| \cos\left(\psi + \frac{\pi}{3}\right) \right|^{1/2}} \tag{6}$$

Ceci fournit la solution du problème sous forme paramétrique. Si l'on trace le diagramme de σ_r/τ_0 en fonction de g , la solution est facile à déterminer par voie graphique (fig. 10) : connaissant $\sigma_r(r_2)/\tau_0$, on en déduit g_2 ; de là,

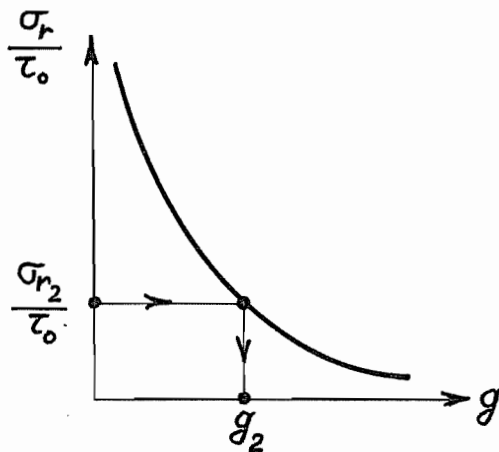


Figure 10 - Détermination de g_2

pour r quelconque, on a

$$g = g_2 \frac{r}{r_2} ,$$

ce qui permet de déterminer σ_r/τ_0 .

Pour tracer ce diagramme, on établit d'abord une table de $g(\psi)$ et de

$$\sigma_r/\tau_0 = \cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi .$$

On peut compléter ce tableau par

- $\sigma_\phi/\tau_0 = 2 \cos \psi$

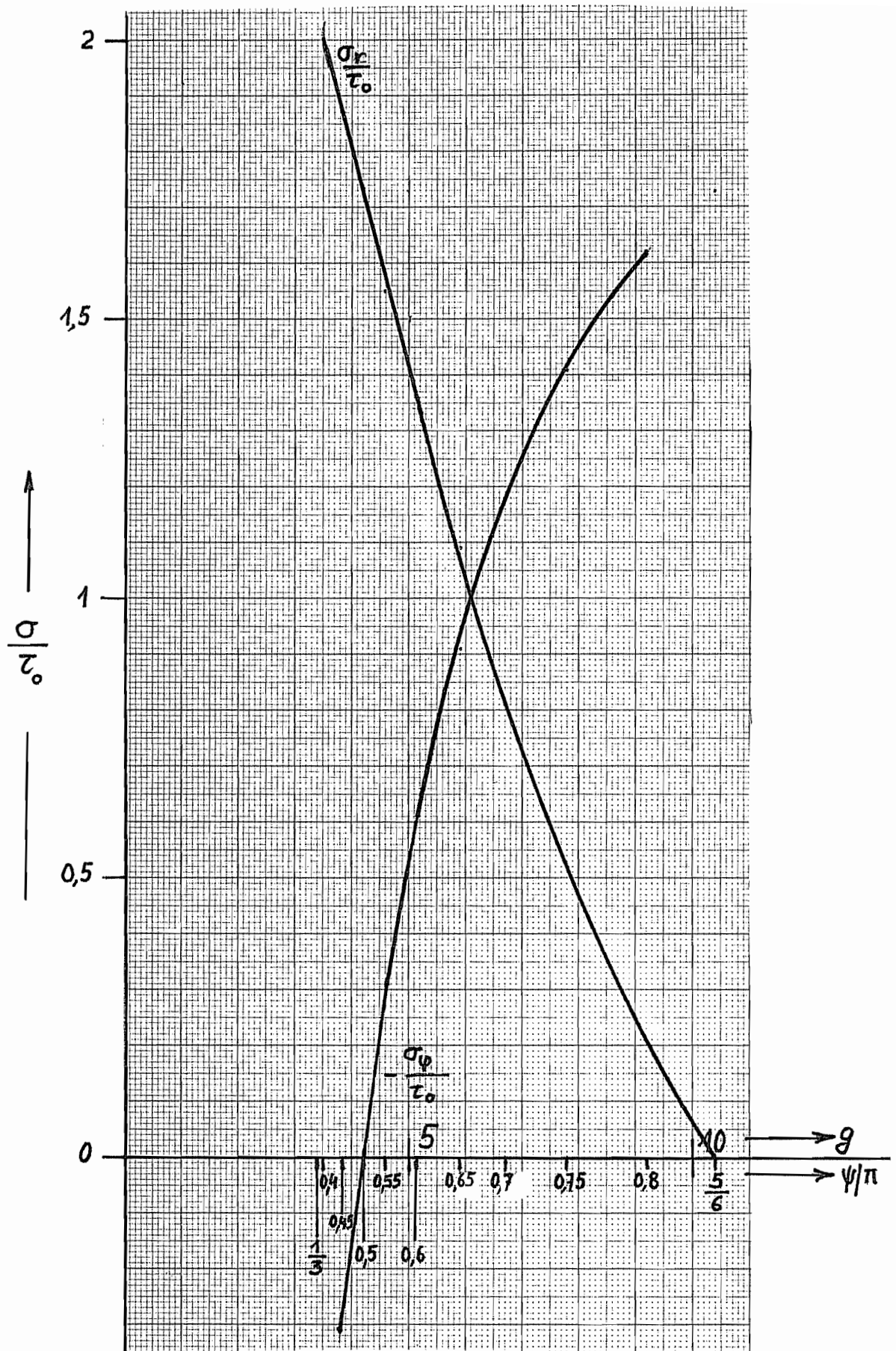


Figure 11 - Diagramme de σ_r/τ_0 et σ_ϕ/τ_0 en fonction de g

• Une mesure des vitesses de déformation :

$$\vartheta_r = \lambda(2\sigma_r - \sigma_\phi) = \lambda\tau_0 \cdot 2\sqrt{3} \sin \psi = \lambda^* \cdot 2 \sin \psi = \lambda^* \vartheta_r^*$$

avec

$$\lambda^* = \lambda\tau_0\sqrt{3}$$

$$\vartheta_\phi = \lambda(2\sigma_\phi - \sigma_r) = \lambda\tau_0 (3 \cos \psi - \sqrt{3} \sin \psi) = \lambda^* \vartheta_\phi^*$$

$$\vartheta_z = -(\vartheta_r + \vartheta_\phi) = -\lambda^* \vartheta_z^*$$

ψ/π	$g(\psi)$	σ_r/τ_0	σ_ϕ/τ_0	ϑ_z^*	ϑ_ϕ^*	ϑ_r^*
1/3	3,502	2,000	1,000	-1,732	0	1,732
0,35	3,512	1,997	0,9080	-1,677	-0,1047	1,782
0,4	3,630	1,956	0,6180	-1,486	-0,4158	1,902
0,45	3,859	1,867	0,3129	-1,259	-0,6548	1,964
0,5	4,188	1,732	0	-1,000	-1,000	2,000
0,55	4,622	1,554	-0,3129	-0,7167	-1,259	1,975
0,6	5,173	1,338	-0,6180	-0,4158	-1,486	1,902
0,65	5,866	1,089	-0,9080	-0,1047	-1,677	1,782
0,7	6,734	0,8135	-1,176	0,2091	-1,827	1,618
0,75	7,829	0,5176	-1,414	0,5176	-1,932	1,414
0,8	9,224	0,2091	-1,618	0,8135	-1,989	1,176
5/6	10,37	0	-1,732	1,000	-2,000	1,000

3.5 - Discussion

Il est aisé de voir que $g(\psi)$ a un minimum pour $\psi = \pi/3$. En effet,

$$\frac{dg}{d\psi} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \exp(\frac{\sqrt{3}}{2}\psi) \cdot |\cos(\psi + \frac{\pi}{3})|^{1/2} + \exp(\frac{\sqrt{3}}{2}\psi) \cdot \frac{1}{2} |\cos(\psi + \frac{\pi}{3})|^{-1/2} \cdot \text{sign} \cos(\psi + \frac{\pi}{3}) \cdot \sin(\psi + \frac{\pi}{3})}{|\cos(\psi + \frac{\pi}{3})|}$$

et cette dérivée est nulle pour

$$\sqrt{3} \cos(\psi + \frac{\pi}{3}) = -\sin(\psi + \frac{\pi}{3})$$

soit

$$\text{tg}(\psi + \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} = \text{tg}(\frac{2\pi}{3})$$

ce qui revient à dire $\psi = \pi/3$. Ceci fixe un rayon minimal, correspondant à

$$g_{\min} = 3,502 .$$

Dès lors, comme $\sigma_r = 0$ pour

$$g_{\max} = 10,37,$$

on doit toujours avoir

$$r_1/r_2 > \frac{3,502}{10,37} = 0,3377 .$$

Par le critère de Tresca, on obtient la condition

$$r_1/r_2 > e^{-1} = 0,3679 ,$$

ce qui est un peu plus sévère. En présence d'un serre-flan, on peut dresser le tableau suivant :

$\sigma_r(r_2)/\tau_0$	$g(r_2)$	$(r_1/r_2)_{\min}$
0	10,37	0,3377
0,2	9,25	0,3786
0,4	8,3	0,4219
0,6	7,5	0,4669
0,8	6,75	0,5188
1	6,1	0,5741
1,2	5,55	0,6310
1,4	5,0	0,7004
1,6	4,5	0,7782
1,8	4,0	0,8755
2	3,502	1,000

Par ailleurs, l'examen de ϑ_z^* montre bien le gonflement à la périphérie, comme prévu.

3.6 - Calcul des vitesses dans la solution von Mises

Nous savons que

$$\frac{du}{dr} = \lambda^* \cdot 2 \sin \psi$$

et

$$\frac{u}{r} = \lambda^* (\sqrt{3} \cos \psi - \sin \psi) = 2 \lambda^* \sin \left(\frac{\pi}{3} - \psi \right)$$

Dès lors,

$$\frac{\frac{du}{dr}}{\frac{u}{r}} = - \frac{\sin \psi}{\sin(\psi - \frac{\pi}{3})} \quad (7)$$

soit

$$\frac{du}{u} = - \frac{\sin \psi}{\sin(\psi - \frac{\pi}{3})} \frac{dr}{r} .$$

Mais nous savons que

$$\frac{dr}{r} = - \frac{\sin(\psi - \frac{\pi}{3})}{\cos(\psi + \frac{\pi}{3})} d\psi$$

ce qui donne

$$\frac{du}{u} = \frac{\sin \psi}{\cos(\psi + \frac{\pi}{3})} d\psi .$$

Notant que

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \sin(\psi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \sin(\psi + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos(\psi + \frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{1}{2} \sin(\psi + \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\psi + \frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

on trouve

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{2} \frac{\sin(\psi + \frac{\pi}{3})}{\cos(\psi + \frac{\pi}{3})} d\psi - \frac{\sqrt{3}}{2} d\psi ,$$

ce qui s'intègre en

$$\ln u = - \frac{1}{2} \ln |\cos(\psi + \frac{\pi}{3})| - \frac{\sqrt{3}}{2} \psi + \ln C_1 ,$$

soit

$$u = C_1 \frac{\exp(-\frac{\sqrt{3}}{2} \psi)}{|\cos(\psi + \frac{\pi}{3})|^{1/2}}$$

Tenant compte de l'expression (6) de la fonction g, on a donc

$$u.g = \frac{C_1}{|\cos(\psi + \frac{\pi}{3})|}$$

soit

$$u = \frac{C_1}{g |\cos(\psi + \frac{\pi}{3})|} .$$

Nous savons d'autre part que $r = Cg$, ce qui donne, en posant $C_2 = C_1/C$,

$$\vartheta_\phi = \frac{u}{r} = \frac{C_2}{g^2 |\cos(\psi + \frac{\pi}{3})|} .$$

La relation (7) nous permet d'en déduire

$$\vartheta_r = - \frac{\sin \psi}{\sin(\psi - \frac{\pi}{3})} \vartheta_\phi$$

et

$$\vartheta_z = - (\vartheta_r + \vartheta_\phi)$$

On obtient ainsi le tableau suivant :

ψ/π	$g=r/C$	$ \cos(\psi+\frac{\pi}{3}) $	$-\frac{u}{C_1}$	ϑ_ϕ/C_2	$\frac{\sin \psi}{\sin(\psi-\frac{\pi}{3})}$	ϑ_r/C_2	ϑ_z/C_2
1/3	3,502	0,5	0,5711	-0,1631	∞	∞	$-\infty$
0,35	3,512	0,5446	0,5228	-0,1489	17,02	2,534	-2,385
0,4	3,630	0,6691	0,4117	-0,1134	4,574	0,5187	-0,6321
0,45	3,859	0,7771	0,3335	-0,0864	2,756	0,2382	-0,3246
0,5	4,188	0,8660	0,2757	-0,0658	2	0,1317	-0,0659
0,55	4,622	0,9336	0,2317	-0,0501	1,569	0,0787	-0,0286
0,6	5,173	0,9781	0,1976	-0,0382	1,280	0,0489	-0,0107
0,65	5,866	0,9986	0,1707	-0,0291	1,062	0,0309	-0,0018
0,7	6,734	0,9945	0,1493	-0,0222	0,8856	0,0196	+0,0025
0,75	7,829	0,9659	0,1322	-0,0169	0,7321	0,0124	+0,0045
0,8	9,224	0,9135	0,1187	-0,0129	0,5910	0,0076	+0,0053
5/6	10,37	0,8660	0,1114	-0,0107	0,5	0,0054	+0,0054

On constate donc bien que le flan tend à se gonfler à sa périphérie et à s'amincir au centre.

3.7 - Etude de la zone d'entrée

Etudions un petit élément de tôle délimité par des cercles principaux (fig. 12). Les deux rayons principaux sont ρ , rayon de la matrice et $R_\phi = \frac{r}{\cos \alpha}$.

- Les contraintes azimutales σ_ϕ ont une résultante suivant la normale donnée par (fig. 13)

$$- 2 t \sigma_\phi \rho d\alpha \frac{d\phi}{2} = - \rho t \sigma_\phi d\alpha d\phi$$

- les contraintes méridiennes σ_α , une résultante normale (fig. 14)

$$2 t \sigma_\alpha R_\phi d\phi \frac{d\alpha}{2} = R_\phi t \sigma_\alpha d\alpha d\phi$$

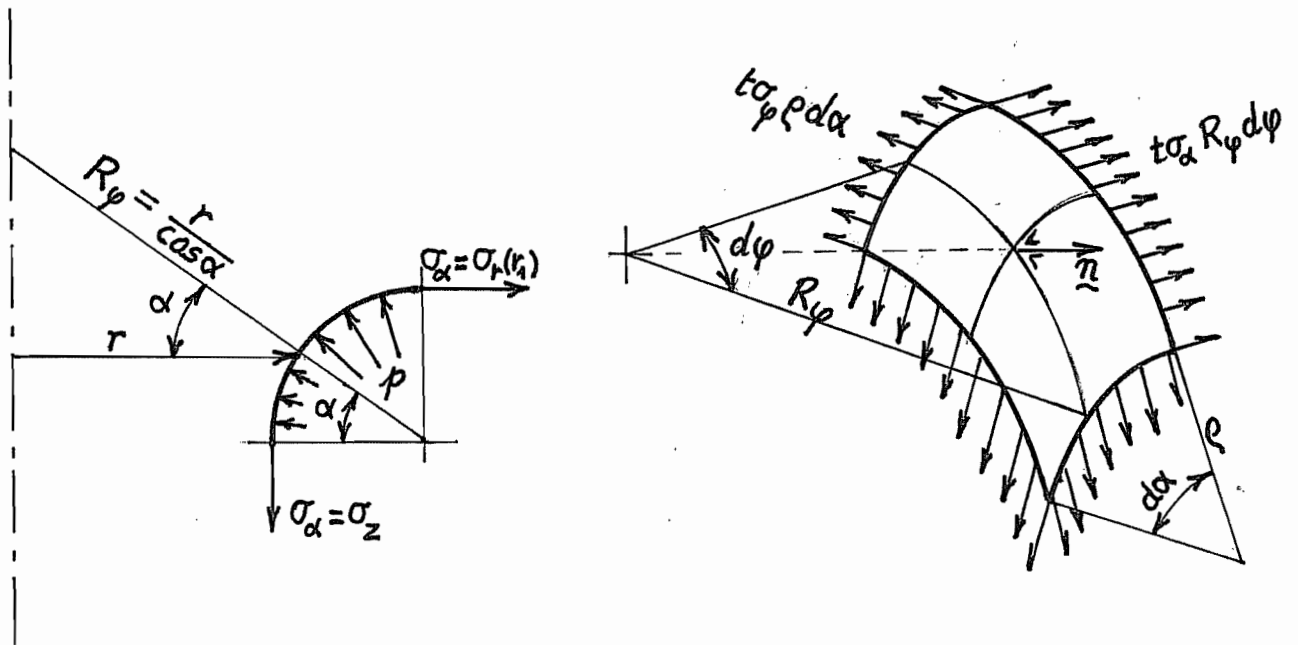


Fig. 12 - Equilibre d'un élément de tôle

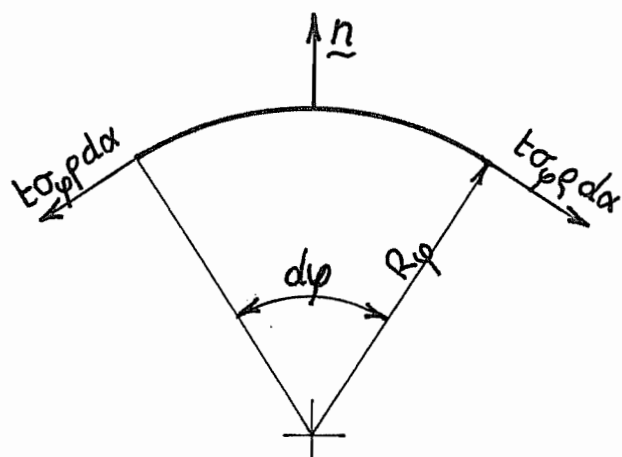


Fig. 13 - Résultante normale des contraintes azimutales

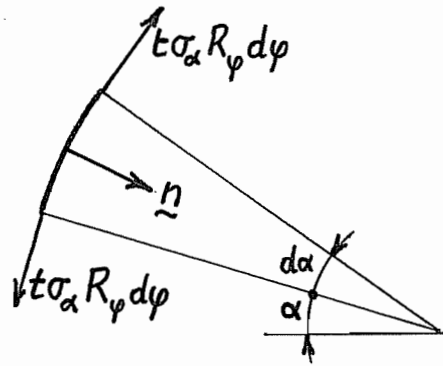


Fig. 14 - Résultante normale des contraintes méridiennes

Elles équilibrent ensemble une pression dont la résultante est $p R_\phi d\phi \rho d\alpha$:

$$p R_\phi \rho d\alpha d\phi = t R_\phi \sigma_\alpha d\alpha d\phi - t \rho \sigma_\phi d\alpha d\phi ,$$

ce qui donne donc

$$p = t \left(\frac{\sigma_\alpha}{\rho} - \frac{\sigma_\phi}{R_\phi} \right)$$

Notant que

$$\sigma_\alpha - \sigma_\phi = Re ,$$

soit

$$-\sigma_\phi = Re - \sigma_\alpha ,$$

on a encore

$$p = t \left(\frac{\sigma_\alpha}{\rho} + \frac{Re}{R_\phi} - \frac{\sigma_\alpha}{R_\phi} \right)$$

soit

$$p = \frac{t}{\rho} \left(\sigma_\alpha - \sigma_\alpha \frac{\rho \cos \alpha}{r} + Re \frac{\rho \cos \alpha}{r} \right)$$

A ce stade, nous remarquerons que d'habitude, $\rho \ll r$, si bien que le deuxième terme du second membre est négligeable devant le premier. En outre, dans la zone d'entrée, σ_α est déjà fort proche de Re , ce qui permet également de négliger le troisième terme devant le premier. Du reste, le deuxième et le troisième terme se compensent dans une certaine mesure. Nous retiendrons donc l'approximation suivante :

$$p \cong \sigma_{\alpha} \frac{t}{\rho}$$

où l'on retrouve d'ailleurs la célèbre formule des chaudières. Pour obtenir la distribution des contraintes σ_{α} en fonction de l'angle α , nous ferons le bilan des puissances sur un élément d'angle $d\alpha$ (fig. 15). Le débit de matière étant

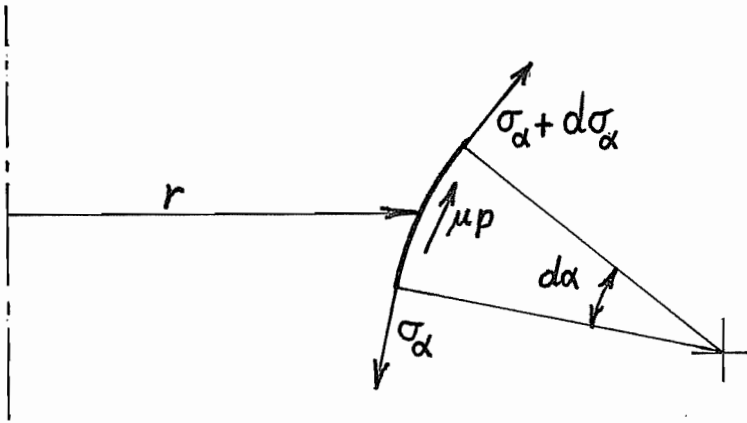


Figure 15 - Schéma d'un élément d'angle $d\alpha$

noté Q , la vitesse tangentielle en dépend par la relation

$$u = \frac{Q}{2 \pi r t} .$$

Cela étant, nous écrirons

$$dP_{\text{traction}} = dP_{\text{retenue}} + dP_{\text{déformation}} + dP_{\text{frottement}}$$

avec

- $dP_{\text{traction}} = Q \sigma_{\alpha}$
- $dP_{\text{retenue}} = Q (\sigma_{\alpha} + d\sigma_{\alpha})$
- $dP_{\text{déformation}} = 2\pi r t \rho d\alpha \cdot \text{Re. } |\vartheta|_{\text{max}}$,

par la formule de la fonction de dissipation du critère de Tresca. Comme

$$|\vartheta|_{\text{max}} = \vartheta_{\alpha} = -\vartheta_{\phi} ,$$

cela donne

$$- 2\pi r t \rho d\alpha \text{ Re } \vartheta_{\phi} .$$

Mais (fig. 16)

$$\vartheta_\phi = \dot{r}/r = -\frac{1}{r} u \sin \alpha = -\frac{Q}{2\pi r^2 t} \sin \alpha$$

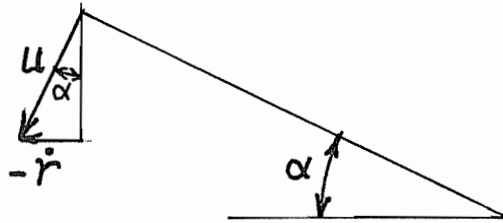


Figure 16 - Détermination de ϑ_ϕ

Il en découle

$$dP_{\text{déformation}} = Q \frac{\rho}{r} \operatorname{Re} \sin \alpha \, d\alpha.$$

- $dP_{\text{frottement}} = \mu p u 2\pi r \rho d\alpha = \mu p \frac{Q}{t} \rho d\alpha$

Tenant compte de la relation $\sigma_\alpha = p \frac{\rho}{t}$, on obtient

$$dP_{\text{frottement}} = \mu Q \sigma_\alpha \, d\alpha.$$

Le bilan s'écrit donc

$$Q \sigma_\alpha = Q (\sigma_\alpha + d\sigma_\alpha) + Q \frac{\operatorname{Re} \rho}{r} \sin \alpha \, d\alpha + \mu Q \sigma_\alpha \, d\alpha$$

soit après simplification et division par $Q \, d\alpha$,

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} + \mu \sigma_\alpha = - \operatorname{Re} \frac{\rho}{r} \sin \alpha .$$

Il nous reste à expliciter r en fonction de l'angle α (fig. 17) :

$$r = r_1 - \rho \cos \alpha ,$$

ce qui donne

$$\frac{\rho}{r} \sin \alpha = \frac{\rho \sin \alpha}{r_1 - \rho \cos \alpha} = \frac{\frac{\rho}{r_1} \sin \alpha}{1 - \frac{\rho}{r_1} \cos \alpha} .$$

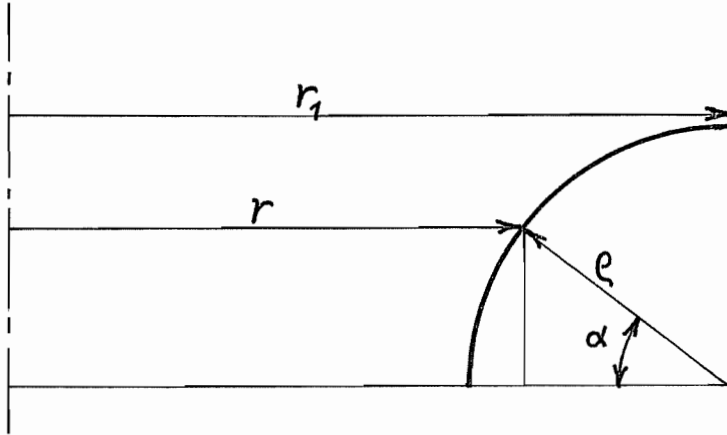


Figure 17 - Expression de r en fonction de l'angle α

L'équation s'écrit donc finalement

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} + \mu \sigma_\alpha = - \operatorname{Re} \frac{\frac{\rho}{r_1} \sin \alpha}{1 - \frac{\rho}{r_1} \cos \alpha} .$$

L'équation homogène associée admet pour solution générale

$$\sigma_{\alpha_h} = C e^{-\mu\alpha} .$$

Cherchons une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$$\sigma_{\alpha_p} = A(\alpha) e^{-\mu\alpha} .$$

On obtient

$$A'(\alpha) e^{-\mu\alpha} = - \operatorname{Re} \frac{\frac{\rho}{r_1} \sin \alpha}{1 - \frac{\rho}{r_1} \cos \alpha} ,$$

soit

$$A(\alpha) = - \operatorname{Re} \int_0^\alpha e^{\mu\beta} \frac{\frac{\rho}{r_1} \sin \beta}{1 - \frac{\rho}{r_1} \cos \beta} d\beta .$$

La solution générale de l'équation complète est donc

$$\sigma_{\alpha} = e^{-\mu\alpha} \left[C - \operatorname{Re} \int_0^{\alpha} e^{\mu\beta} \frac{\frac{\rho}{r_1} \sin \beta}{1 - \frac{\rho}{r_1} \cos \beta} d\beta \right] .$$

Pour $\alpha = \pi/2$, on a la condition $\sigma_{\alpha} = \sigma_r(\rho_1)$, c'est-à-dire, en posant

$$X\left(\mu, \frac{\rho}{r_1}\right) = \int_0^{\pi/2} e^{\mu\beta} \frac{\frac{\rho}{r_1} \sin \beta}{1 - \frac{\rho}{r_1} \cos \beta} d\beta ,$$

$$\sigma_r(r_1) = e^{-\mu\pi/2} [C - \operatorname{Re} X] .$$

On en déduit

$$C = \sigma_r(r_1) e^{\mu\pi/2} + \operatorname{Re} X$$

Ceci permet d'obtenir la contrainte axiale dans la virole σ_z :

$$\sigma_z = \sigma_{\alpha}(0) = C = \sigma_r(r_1) e^{\mu\pi/2} + \operatorname{Re} X ,$$

soit explicitement :

$$\sigma_z = e^{\mu\pi/2} \left[\operatorname{Re} \ln \frac{r_2}{r_1} + \sigma_r(r_2) \right] + \operatorname{Re} X .$$

Il nous reste à évaluer X. Pour $\mu = 0$, on a visiblement

$$X(0, \rho/r_1) = \ln \frac{1}{1 - \frac{\rho}{r_1}} = \ln \frac{r_1}{r_0} .$$

Pour $\mu \neq 0$, on peut dresser le tableau suivant :

$\mu \rightarrow$ $\rho/r_1 \downarrow$	0	0,05	0,1	0,15
0	0	0	0	0
0,05	0,05129	0,05392	0,05670	0,05964
0,1	0,1054	0,1107	0,1164	0,1224
0,15	0,1625	0,1707	0,1794	0,1886
0,2	0,2231	0,2343	0,2462	0,2587

Une bonne approximation de X est donnée, pour $0 \leq \mu \leq 0,15$ et $0 \leq \rho/r_1 \leq 0,2$, par la formule simple

$$X\left(\mu, \frac{\rho}{r_1}\right) \cong (1 + 1,07 \mu) \cdot \ln \frac{1}{1 - \frac{\rho}{r_1}} .$$

Dans l'intervalle précité, elle conduit à moins de 0,7% d'erreur.

La contrainte σ_z doit être inférieure à Re, sans quoi le poinçon ne pourra pas tirer la tôle. Il faut donc que

$$e^{\mu\pi/2} [\text{Re} \ln \frac{r_2}{r_1} + \sigma_r(r_2)] + \text{Re} X < \text{Re}$$

soit

$$e^{\mu\pi/2} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\sigma_r(r_2)}{\text{Re}} \right] + X < 1$$

C'est la *condition de réalisabilité de l'emboutissage*.

3.8 - Force d'emboutissage

La force nécessaire pour réaliser l'emboutissage vaut

$$F = 2\pi r_0 t \sigma_z .$$

En l'absence de frottement,

$$\sigma_z = \text{Re} \ln \frac{r_2}{r_1} + \text{Re} X$$

avec

$$X = \ln \frac{r_1}{r_0} ,$$

ce qui donne

$$\sigma_z = \text{Re} \ln \frac{r_2}{r_0} .$$

Ce cas, bien qu'irréaliste, sert souvent de référence, ainsi que nous le verrons dans la section 4.1. La *puissance* d'emboutissage en l'absence de frottement vaut

$$P_{\mu=0} = \sigma_z Q = \text{Re} Q \ln \frac{r_2}{r_0}$$

et comme les sections d'entrée et de sortie sont données par

$$S_{\text{entrée}} = 2\pi r_2 t , \quad S_{\text{sortie}} = 2\pi r_0 t ,$$

on a encore

$$P_{\mu=0} = \text{Re } Q \ln \frac{S_{\text{entrée}}}{S_{\text{sortie}}},$$

comme on pouvait s'y attendre.

3.9 - Remarque : Pression du serre-flan

- D'après Siebel [5], la pression sur le serre-flan se détermine par

$$\frac{p}{\text{Re}} = c \left[\left(\frac{D}{d} - 1 \right)^2 + 5 \cdot 10^{-3} \frac{d}{t} \right]$$

où

D est le diamètre extérieur du flan,
d est son diamètre intérieur,
t est son épaisseur

Le coefficient c varie entre $2 \cdot 10^{-3}$ et $3 \cdot 10^{-3}$ (moyenne : $2,5 \cdot 10^{-3}$)

- D'après Cook [1],

- l'instabilité est possible si $r_2 - r_1 > 4t$

- la "pression" définie par $p^* = \frac{P}{\pi r_2^2}$ est donnée par

$$p^* = (0,02 \dots 0,08) \tau_0 \text{ soit } (0,01 \dots 0,04) \text{Re}.$$

Ceci donne

$$\sigma_r(r_2) = \frac{\mu P}{\pi r_2 t} = \mu p^* \frac{r_2}{t}$$

et

$$\frac{\sigma_r(r_2)}{\text{Re}} = y_2 = (0,01 \dots 0,04) \mu \frac{r_2}{t}$$

Exemple : prenant la valeur 0,02, $r_2 = 100 \text{ mm}$, $t = 1 \text{ mm}$, $\mu = 0,1$,

$$y_2 = 0,02 \cdot 0,1 \cdot \frac{100}{1} = 0,2.$$

3.10 - Exemple d'application

Soient $\mu = 0,1$, $r_1 = 50 \text{ mm}$, $p^*/\text{Re} = 0,02$, $t = 1 \text{ mm}$, $\rho = 5 \text{ mm}$. Quelle est la plus grande valeur possible pour r_2 ?

On a

$$\frac{\sigma_r(r_2)}{Re} = 0,02 \cdot 0,1 \cdot \frac{r_2}{1 \text{ mm}} = 0,002 \cdot \frac{r_2}{\text{mm}} = 0,002 \cdot 50 \cdot \frac{r_2}{r_1} = 0,1 \frac{r_2}{r_1}$$

La condition de réalisabilité du processus s'écrit donc

$$e^{\mu\pi/2} [\ln(r_2/r_1) + 0,1 (r_2/r_1)] + X = 1$$

avec

$$e^{\mu\pi/2} = 1,170 \quad e^{-\mu\pi/2} = 0,8546$$

$$X \cong (1 + 1,07 \mu) \ln \frac{1}{1 - \frac{\rho}{r_1}} = 1,107 \ln \frac{1}{0,9} = 0,1166$$

Il faut donc que

$$\ln(r_2/r_1) + 0,1 (r_2/r_1) < 0,8546 (1 - 0,1166) = 0,7549$$

L'égalité, qui fixe la borne supérieure, est obtenue par

$$r_2/r_1 = \underline{1,780} \quad \text{soit} \quad r_2 = \underline{89,02 \text{ mm}}$$

En l'absence de frottement, on aurait eu la condition

$$1 \cdot [\ln(r_2/r_1) + 0] + X < 1$$

avec

$$X = \ln \frac{1}{1 - \frac{\rho}{r_1}} = \ln \frac{1}{0,9} = 0,1054$$

La valeur limite aurait donc été donnée par

$$\ln(r_2/r_1) = 1 - 0,1054 = 0,8946$$

soit

$$r_2/r_1 = \underline{2,446} \quad \text{et} \quad r_2 = \underline{122,3 \text{ mm}}$$

3.11 - Emboutissage avec retournement (fig. 18)

Il faut dans ce cas décomposer en *trois* zones :

- Zone I

Dans cette zone torique, on retrouve l'équation développée plus haut pour la zone d'entrée, à savoir

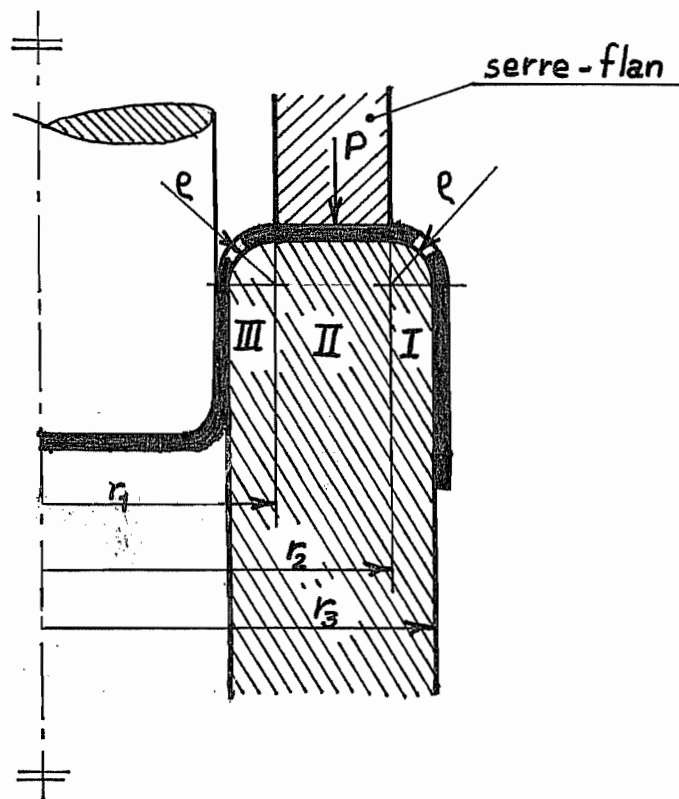


Figure 18 - Emboutissage avec retournement

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} + \mu \sigma_{\alpha} = - \operatorname{Re} \frac{\frac{\rho}{r_2} \sin \alpha}{1 - \frac{\rho}{r_2} \cos \alpha}$$

La solution de cette équation est

$$\sigma_{\alpha} = e^{-\mu\alpha} \left[C - \operatorname{Re} \int_{\pi/2}^{\alpha} e^{\mu\beta} \frac{\frac{\rho}{r_2} \sin \beta}{1 - \frac{\rho}{r_2} \cos \beta} d\beta \right]$$

Pour $\alpha = \pi$, c'est-à-dire à l'entrée du tore, on a $\sigma_\alpha = 0$, donc

$$C = \operatorname{Re} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{\mu\beta} \frac{\frac{\rho}{r_2} \sin \beta}{1 - \frac{\rho}{r_2} \cos \beta} d\beta$$

En $\alpha = \pi/2$, sortie du tore, il vient

$$\sigma_\alpha = e^{-\mu\pi/2} C = \operatorname{Re} Y(\mu, \rho/r_2)$$

avec

$$Y(\mu, \rho/r_2) = \int_{\pi/2}^{\pi} e^{\mu(\beta - \frac{\pi}{2})} \frac{\frac{\rho}{r_2} \sin \beta}{1 - \frac{\rho}{r_2} \cos \beta} d\beta .$$

• Zone II

A l'entrée de cette zone plane, la pression sur le serre-flan induit un saut de contrainte radiale

$$\Delta\sigma_{r_2} = \mu \frac{P}{\pi r_2 t} = Z \operatorname{Re},$$

avec

$$Z = \frac{\mu P}{\pi r_2 t \operatorname{Re}}$$

Pour le reste, c'est comme un flan classique et

$$\frac{\sigma_r}{\operatorname{Re}} = Y + Z + \ln \frac{r_2}{r} .$$

En $r = r_1$,

$$\frac{\sigma_{r_1}}{\operatorname{Re}} = Y + Z + \ln \frac{r_2}{r_1} .$$

• Zone III

Dans cette zone torique, l'équation de la zone d'entrée classique s'applique et la contrainte dans la virole est donc donnée par

$$\frac{\sigma_z}{\operatorname{Re}} = e^{\mu\pi/2} \frac{\sigma_{r_1}}{\operatorname{Re}} + X = e^{\mu\pi/2} [Y + Z + \ln \frac{r_2}{r_1}] + X .$$

Cette valeur doit être inférieure à 1 pour que le processus soit réalisable.

La solution effective de ce problème nécessite le calcul de Y. Pour $\mu = 0$,

$$Y = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\frac{\rho}{r_2} \sin \beta}{1 - \frac{\rho}{r_2} \cos \beta} d\beta = \ln \left(1 + \frac{\rho}{r_2} \right) = \ln \frac{r_3}{r_2}$$

Pour $\mu \neq 0$, on peut dresser le tableau suivant :

$\mu \rightarrow$ $\rho/r_2 \downarrow$	0	0,05	0,1	0,15
0	0	0	0	0
0,05	0,04879	0,05020	0,05167	0,05319
0,1	0,09531	0,09804	0,1009	0,1038
0,15	0,1398	0,1437	0,1479	0,1522
0,2	0,1823	0,1875	0,1928	0,1984

On a approximativement, dans les limites envisagées dans le tableau,

$$Y \cong \ln \left(1 + \frac{\rho}{r_2} \right) \cdot (1 + 0,59 \mu) .$$

Exemple

Pour les données suivantes,

$$\mu = 0,1 ; r_1 = 50 \text{ mm} ; r_2 = 60 \text{ mm} ; t = 1 \text{ mm} ; \rho = 10 \text{ mm}$$

$$P = 0,02 \text{ Re} \cdot \pi r_2^2 ,$$

on a successivement

$$\rho/r_2 = 1/6$$

$$Y \cong \ln(7/6) \cdot (1 + 0,59 \cdot 0,1) = 0,1632$$

$$\rho/r_1 = 1/5$$

$$X \cong \ln(5/4) \cdot (1 + 1,07 \cdot 0,1) = 0,2470$$

$$Z = \frac{\mu P}{\pi r_2 t \text{Re}} = 0,02 \cdot 0,1 \cdot (r_2/t) = 0,02 \cdot 0,1 \cdot \frac{60}{1} = 0,1200$$

$$\ln(r_2/r_1) = \ln(6/5) = 0,1823$$

$$e^{\mu\pi/2} = e^{0,1 \cdot \pi/2} = 1,170$$

$$\frac{\sigma_z}{\text{Re}} = 1,170 (0,1632 + 0,1200 + 0,1823) + 0,2470 = \underline{0,7917}$$

4. Quelques données pratiques concernant l'emboutissage

4.1 - Force d'emboutissage

L'école allemande se fonde sur la formule de l'emboutissage sans frottement,

$$\sigma_z = Re \ln \frac{D}{d}$$

où D est le diamètre du flan et d, celui de la virole, et la corrige par un coefficient de rendement η :

$$\sigma_z = \frac{Re}{\eta} \ln \frac{D}{d} .$$

Dans cette formule, Re doit être entendu comme la *moyenne de la limite élastique au cours du travail*. On se place en sécurité en la remplaçant par Rm. Le rendement varie entre 0,5 et 0,65. La force d'emboutissage est donc

$$F_z = \pi dt \sigma_z = \frac{\pi dt}{\eta} Rm \ln \frac{D}{d} .$$

En posant $\eta = 0,628$, on obtient

$$F_z = 5 dt Rm \ln \frac{D}{d} \quad (\text{Formule allemande})$$

Les Américains partent du principe que la contrainte dans la virole ne peut dépasser Rm. En prenant un coefficient de sécurité supplémentaire 1,15, on obtient

$$F_z \leq \pi dt . 1,15 Rm = 3,613 Rm dt \quad (\text{Formule américaine})$$

Comparons ces deux formules. En se limitant à $d/D = 0,55$, on a par la formule allemande

$$F_z = 5 Rm dt \ln\left(\frac{1}{0,55}\right) = 2,989 Rm dt$$

soit 20% de moins que la formule américaine. Cette dernière a cependant le mérite de s'appliquer directement au cas d'un emboutissage non cylindrique, sous la forme

$$F_z \leq 1,15 Rm . t . \ell$$

où ℓ est le périmètre de l'embouti.

4.2 - Rayon de la matrice

On cite souvent la valeur préconisée par Kaczmarek [7] :

$$r = 0,8 \sqrt{(D - d) t}$$

Elle s'applique pour l'emboutissage de l'acier. Pour les alliages d'aluminium, on préfère la valeur un peu plus grande

$$r = 0,9 \sqrt{(D - d) t}$$

La valeur *minimale admissible* est, selon des recherches un peu plus récentes (1966)

$$\frac{r}{\text{mm}} = 0,035 \left[50 + \frac{D - d}{\text{mm}} \right] \sqrt{\frac{t}{\text{mm}}}$$

4.3 - Rayon du poinçon

Il ne peut jamais être inférieur à celui de la matrice. En pratique, on le prend 3 à 5 fois plus grand.

4.4 - Jeu entre le poinçon et la matrice

Oehler et Kaiser [2] proposent la formule

$$j = t \left[1 + \frac{R_m}{1000 \text{ MPa}} \left(\frac{D}{d} - 1 \right)^3 \right]$$

4.5 - Quand faut-il un serre-flan ?

Tout dépend du rapport D/t :

- D/t ≥ 200.....Grande instabilité. Serre-flan indispensable
- 66 ≤ D/t < 200.....Instabilité modérée. Faible force sur le serre-flan
- 40 ≤ D/t < 66.....Instabilité très faible. On peut se passer de serre-flan si d/D est grand.
- D/t < 40.....Pas d'instabilité

Citons encore le tableau suivant, valable pour les aciers doux [6] :

Aciers à faible carbone		
D/t		
Simple action (pas de serre-flan)	Double action (serre-flan)	(d/D) _{min}
	660	0,7
66	500	0,65
	330	0,6
50	250	0,55
40	200	0,525

4.6 - Pression sur le serre-flan

Voir section 3.9

4.7 - Joncs

Soit à emboutir une boîte rectangulaire. Sur les bords droits, il faut peu d'effort pour faire avancer le métal, car la déformation se résume à de la flexion. Le métal y va "trop vite" et on obtient le défaut représenté en figure 19.

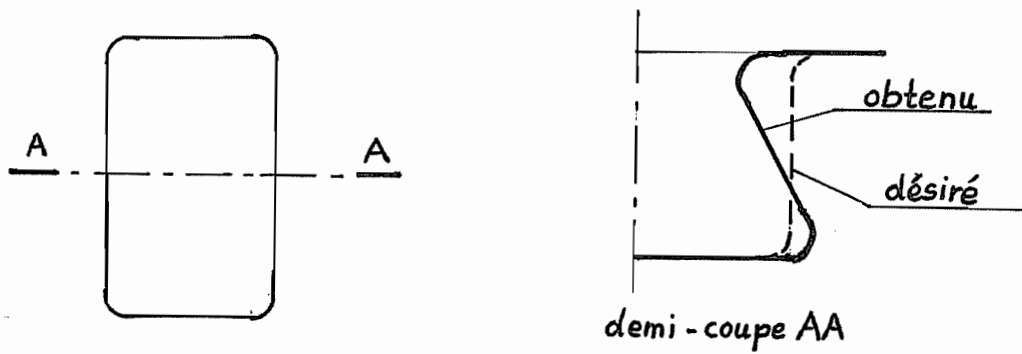


Figure 19 - Défaut apparaissant lors de l'emboutissage d'une boîte rectangulaire

Un remède consiste à ralentir la marche de la tôle à l'aide de joncs, sur les parties rectilignes seulement (fig. 20).

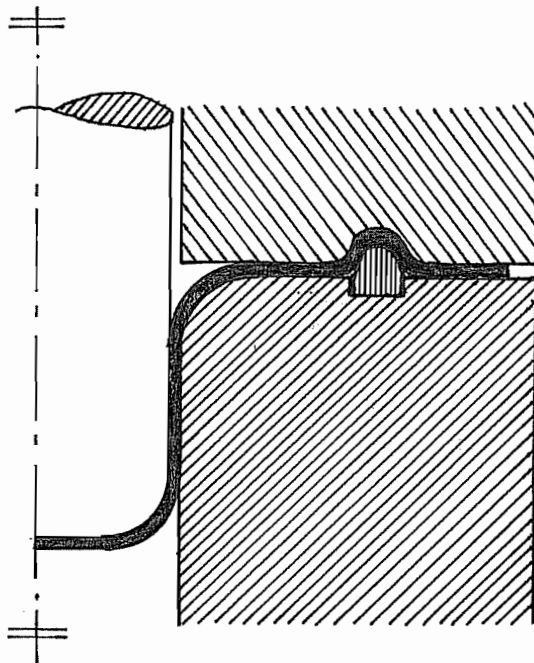


Figure 20 - Jonc

Le jonc produit un effet de courroie : dans le cas de la figure 21, on a

$$\sigma_1 = \sigma_0 e^{\mu\alpha/2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 e^{\mu\alpha}$$

$$\sigma_3 = \sigma_2 e^{\mu\alpha/2}$$

et au total,

$$\sigma_3 = \sigma_0 e^{2\mu\alpha}$$

Il s'agit donc d'une *mutiplication* de l'effort.

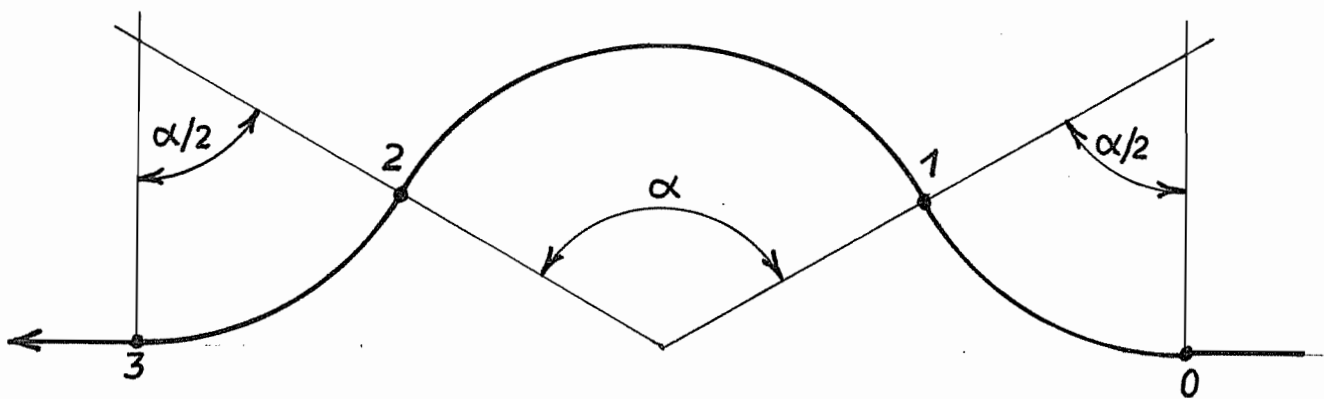


Figure 21 - Effet du jonc

Ainsi, pour $\mu = 0,1$ et $\alpha = 150^\circ = 2,618$ rad, on obtient

$$e^{2\mu\alpha} = 1,688.$$

4.8 - Vitesse optimale de l'emboutissage

A trop grande vitesse, le matériau se raidit. On conseille les vitesses suivantes :

Zn, inox	200 mm/s
Ac doux.....	280 mm/s
Aluminium.....	500 mm/s
Laiton.....	750 mm/s

5. Bibliographie relative à l'emboutissage

- [1] N. COOK - *Manufacturing Analysis*
Addison - Wesley, Reading, Massachussets, 1966

- [2] OEHLER/KAISER - *Schnitt-, Stanz- und Ziehwerkzeuge*
5. édition, Springer, Berlin, 1966
- [3] B. WASSILEFF - *Emboutissage*
Dunod, Paris, 1970
- [4] D.F. EARY, E.A. REED - *Techniques of pressworking sheet metal*
2e édition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974
- [5] E. SIEBEL - "Ueber die Faltenbildung beim Tiefziehen"
Mitt. Forsch. Ges. Blechverarb. Nr 4, 15 fev.1953, p.55
- [6] E.V. CRANE - *Plastic Working in Press*
Wiley, N.Y., 1944
- [7] E. KACZMAREK - *Pratique des travaux à la presse*
Dunod, Paris, 1964

CHAPITRE 5 - PRINCIPES D'EXTREMUM

1. Principe des puissances virtuelles

Soit un volume V limité par une surface S . Nous noterons $f_i dV$ les forces élémentaires de volume et $t_i dS$ les forces élémentaires de surface. *L'équilibre est réalisé si pour toute variation δu du champ de vitesses, on a*

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \vartheta_{ij} dV = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_S \bar{t}_i \delta u_i dS$$

C'est le *principe des vitesses virtuelles*, qui peut être considéré comme la définition la plus générale de l'équilibre. En effet, ce principe garde un sens par exemple si les contraintes et les vitesses de déformation sont de carré intégrable et, plus généralement, dans tous les cas où $\sigma_{ij} \delta \vartheta_{ij}$ est intégrable dans V . Montrons que dans le cas où ces champs sont réguliers, on retrouve bien les équations locales d'équilibre. On a d'abord

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) dV &= \int_V \sigma_{ji} D_j \delta u_i dV \\ &= \int_S n_j \sigma_{ji} \delta u_i dS - \int_V (D_j \sigma_{ji}) \delta u_i dV \end{aligned}$$

Considérons d'abord des champs de vitesses *réguliers et nuls sur la frontière*. Pour ceux-ci, on a

$$\int_V (D_j \sigma_{ji} + f_i) \delta u_i dV = 0 \quad ,$$

avec δu_i arbitraire, ce qui, en vertu d'un théorème de l'analyse, suffit à prouver que

$$D_j \sigma_{ji} + f_i = 0 \quad \text{p.p. dans } V$$

Cela étant, pour δu régulier mais arbitraire, non nul sur une partie au moins de la frontière, on a

$$\int_S (n_j \sigma_{ji} - t_i) \delta u_i dS + \int_V 0 \cdot \delta u_i dV = 0 \quad ,$$

ce qui, vu l'arbitraire de δu , entraîne

$$n_j \sigma_{ji} = t_i \quad \text{sur } S.$$

2. Expression des contraintes plastiques à partir des vitesses

On a, chaque fois que $\vartheta_{ii} = 0$,

$$d(\vartheta) = \frac{\partial d}{\partial \vartheta_{ij}} \vartheta_{ij} = \sigma_{ij} \vartheta_{ij} ,$$

soit

$$\left(\frac{\partial d}{\partial \vartheta_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \vartheta_{ij} = 0$$

Cela signifie que le vecteur à 9 dimensions $\left\{ \frac{\partial d}{\partial \vartheta_{ij}} - \sigma_{ij} \right\}$ est orthogonal au plan $\{ \vartheta \mid \vartheta_{ii} = 0 \}$. La normale à ce plan est $(1, 1, 1, 0, 0, \dots)$, c'est-à-dire $\{ \delta_{ij} \}$. Par conséquent,

$$\frac{\partial d}{\partial \vartheta_{ij}} - \sigma_{ij} = p \delta_{ij} ,$$

avec p quelconque. On a donc en général

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial d}{\partial \vartheta_{ij}} - p \delta_{ij} .$$

Le premier terme représente les contraintes dissipatives. Le second peut être interprété comme une *réaction* aux forces qui tendent à rompre la condition d'incompressibilité.

3. Principe de stationnarité de la dissipation totale, en l'absence de frottements

Sur la frontière S d'un corps, nous distinguerons deux parties S_u et S_t , et nous supposerons que les vitesses sont imposées sur S_u :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } S_u ,$$

tandis que sur S_t , on impose les tractions de surface :

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{sur } S_t .$$

Nous appellerons *dissipation totale* la fonctionnelle

$$J(\mathbf{u}) = \int_V [d(\vartheta) - f_i u_i] dV - \int_{S_t} \bar{t}_i u_i dS .$$

Proposons-nous de chercher le champ de vitesses *incompressible et égal* à $\bar{\mathbf{u}}$ sur S_u qui rend $J(\mathbf{u})$ stationnaire. Pour vérifier les conditions aux limites sur S_u , il suffit évidemment de poser $\delta \mathbf{u} = 0$ sur S_u . Par contre, la condition d'incompressibilité est gênante, car elle mène à un problème d'extremum lié. La technique classique pour résoudre ce genre de problème consiste à utiliser des multiplicateurs lagrangiens. A chaque condition ponctuelle $D_i u_i = 0$, on associera un multiplicateur $(-p)$, puis on sommerá sur tout le volume, ce qui

mène au potentiel additionnel

$$- \int_V p D_i u_i dV.$$

On écrira donc

$$\delta J^*(\mathbf{u}, p) = \delta \left\{ \int_V [d(\vartheta) - f_i u_i] dV - \int_{S_t} \bar{t}_i u_i dS - \int_V p D_i u_i dV \right\}$$

pour tout champ $\delta \mathbf{u}$ nul sur S_u et tout champ de multiplicateurs δp .

Varions d'abord les vitesses : on a

$$\delta J^* = \int_V \left[\frac{\partial d}{\partial \vartheta_{ij}} \delta \vartheta_{ij} - f_i \delta u_i \right] dV - \int_{S_t} \bar{t}_i \delta u_i dS - \int_V p D_i \delta u_i dV .$$

Une intégration par parties donne

$$\delta J^* = \int_V \left[-D_j \left(\frac{\partial d}{\partial \vartheta_{ij}} - p \delta_{ij} \right) - f_i \right] \delta u_i dV - \int_{S_t} \left[\bar{t}_i - n_j \left(\frac{\partial d}{\partial \vartheta_{ij}} - p \delta_{ij} \right) \right] \delta u_i dS = 0 ,$$

ce qui mène aux conditions

$$D_j \left(\frac{\partial d}{\partial \vartheta_{ij}} - p \delta_{ij} \right) + f_i = 0 \quad \text{dans } V$$

$$n_j \left(\frac{\partial d}{\partial \vartheta_{ij}} - p \delta_{ij} \right) = \bar{t}_i \quad \text{sur } S_t .$$

On reconnaît les équations d'équilibre, avec

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial d}{\partial \vartheta_{ij}} - p \delta_{ij}$$

comme annoncé dans la section 2.

Quant à la variation de p , elle mène simplement à la condition

$$D_i u_i = 0 .$$

Ainsi, le champ de vitesses réel rend stationnaire la fonctionnelle dissipation totale.

4. Caractère minimal de la dissipation totale

Nous allons renforcer ce résultat en montrant qu'en fait, le champ de vitesses réel *minimalise* la dissipation totale. Soit en effet \mathbf{u} la solution réelle et \mathbf{u}^* un autre champ de vitesses incompressible vérifiant $\mathbf{u}^* = \bar{\mathbf{u}}$ sur S_u . on a

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}^*) = \int_V d(\vartheta^*) dV - \int_V f_i u_i^* dV - \int_{S_t} \bar{t}_i u_i^* dS \\ J(\mathbf{u}) = \int_V d(\vartheta) dV - \int_V f_i u_i dV - \int_{S_t} \bar{t}_i u_i dS \end{cases}$$

Soustrayons ces deux relations en notant que le champ de vitesses

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}$$

est une variation incompressible nulle sur S_u . On obtient

$$J(\mathbf{u}^*) - J(\mathbf{u}) = \int_V [d(\vartheta^*) - d(\vartheta)] dV - \int_V f_i \delta u_i dV - \int_{S_t} \bar{t}_i \delta u_i dS$$

En notant σ et σ^* les champs de contrainte correspondant respectivement aux champs \mathbf{u} et \mathbf{u}^* , on peut donner à l'intégrand $[d(\vartheta^*) - d(\vartheta)]$ le développement télescopique suivant :

$$\begin{aligned} d(\vartheta^*) - d(\vartheta) &= d(\vartheta^*) - \sigma_{ij} \vartheta_{ij}^* + \sigma_{ij} \vartheta_{ij}^* - \sigma_{ij} \vartheta_{ij} \\ &= d(\vartheta^*) - \sigma_{ij} \vartheta_{ij}^* + \sigma_{ij} \delta \vartheta_{ij} \\ &= [d(\vartheta^*) - \sigma_{ij} \vartheta_{ij}^*] + \delta d . \end{aligned}$$

Or, nous savons que

$$\int_V \delta d dV - \int_V f_i \delta u_i dV - \int_{S_t} \bar{t}_i \delta u_i dS = 0 .$$

Il reste donc

$$J(\mathbf{u}^*) - J(\mathbf{u}) = \int_V [d(\vartheta) - \sigma_{ij} \vartheta_{ij}^*] dV .$$

Il est clair que σ est élément de l'ensemble S des contraintes plastiquement admissibles. Dès lors,

$$\sigma_{ij} \vartheta_{ij}^* \leq \max_{\tau \in S} \tau_{ij} \vartheta_{ij}^* = d(\vartheta^*) .$$

Il en découle

$$J(\mathbf{u}^*) - J(\mathbf{u}) \geq 0 .$$

Nous avons donc montré que *le champ de vitesses réel minimise la dissipation totale.*

Corollaire - Toute analyse approchée consistant à calculer la dissipation totale à partir d'un champ de vitesses pré-supposé mène à *surestimer* cette fonctionnelle (*méthode de Rayleigh*). A partir d'un champ contenant des

paramètres, il convient de choisir ceux-ci de manière à *minimiser* la dissipation totale (*méthode de Rayleigh-Ritz*).

Remarque - Le principe des puissances virtuelles implique

$$\int_V d(\vartheta) dV = \int_V f_i u_i dV + \int_{S_t} \bar{t}_i u_i dS + \int_{S_u} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS$$

soit

$$J(\mathbf{u}) = \int_{S_u} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS$$

On a donc, pour un champ de vitesses approché \mathbf{u}^* ,

$$J(\mathbf{u}^*) \geq \int_{S_u} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS .$$

5. Analyse statiquement admissible en l'absence de frottements

Un champ de contraintes *statiquement admissible* σ^* est un champ de contraintes vérifiant les conditions

$$D_j \sigma_{ji}^* + f_i = 0 \quad \text{dans } V$$

$$n_j \sigma_{ji}^* = \bar{t}_i \quad \text{sur } S_t$$

ou, plus généralement, la condition variationnelle

$$\int_V \sigma_{ij}^* \delta \vartheta_{ij} dV = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_{S_t} \bar{t}_i \delta u_i dS$$

pour tout $\delta \mathbf{u}$ nul sur S_u . Le principe des travaux virtuels, écrit avec le champ de vitesses réel, donne alors

$$\int_V \sigma_{ij}^* \vartheta_{ij} dV = \int_V f_i u_i dV + \int_{S_t} \bar{t}_i u_i dS + \int_{S_u} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS .$$

Supposons en outre σ^* *plastiquement admissible*, c'est-à-dire qu'en chaque point,

$$\sigma^* \in S .$$

On a alors

$$\sigma_{ij}^* \vartheta_{ij} \leq \max_{\tau \in S} \tau_{ij} \vartheta_{ij} = d(\vartheta) ,$$

ce qui implique

$$\int_V d(\vartheta) dV \geq \int_V f_i u_i dV + \int_{S_t} \bar{t}_i u_i dS + \int_{S_u} n_j \sigma_{ji}^* \bar{u}_i dS$$

soit

$$J(\mathbf{u}) = \int_V [d(\vartheta) - f_i u_i] dV - \int_{S_t} \bar{t}_i u_i dS \geq \int_{S_u} n_j \sigma_{ji}^* \bar{u}_i dS$$

ou encore,

$$\int_{S_u} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS \geq \int_{S_u} n_j \sigma_{ji}^* \bar{u}_i dS .$$

Ainsi, la dissipation totale (travail des déplacements imposés) calculée à partir d'un champ de contraintes statiquement et plastiquement admissible est sous-estimée.

6. Application au génie civil

En génie civil, on s'intéresse à la valeur de la force appliquée qui provoque la plasticité. Notant (fig. 1) \bar{u} la vitesse conjuguée à la force F ,

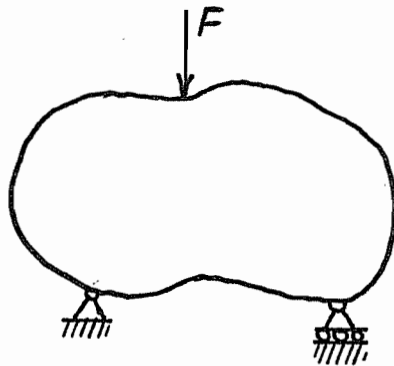


Figure 1 - Analyse des structures

ce qui signifie que la puissance vaut $F \cdot \bar{u}$, on peut imaginer deux types d'analyse :

- *Analyse cinématiquement admissible*

On se donne un champ de vitesses nul aux appuis, et égal à \bar{u} au droit de la force F . On calcule

$$J(\mathbf{u}) = \int_V d(\vartheta) dV .$$

On peut alors affirmer que la force nécessaire pour amorcer le mécanisme, dite force de ruine, vérifie

$$F_{\text{ruine}} \cdot \bar{u} \leq J(\mathbf{u})$$

soit

$$F_{\text{ruine}} \leq \frac{J(\mathbf{u})}{\bar{u}}$$

Le second membre constitue une *borne supérieure* de la charge de ruine plastique.

• *Analyse statiquement et plastiquement admissible*

On se donne un champ de contraintes en équilibre et plastiquement admissible, correspondant à une charge F^* non nulle. Alors, on peut affirmer que

$$F^* \cdot \bar{u} \leq F_{\text{ruine}} \cdot \bar{u}$$

soit

$$F_{\text{ruine}} \geq F^*$$

Le second membre constitue donc une *borne inférieure* de la charge de ruine.

Il est clair que pour le constructeur qui veut se mettre à l'abri de la ruine, l'approche statiquement admissible est préférable, car elle mène à une charge de ruine sous-évaluée, *ce qui va dans le sens de la sécurité*.

7. Application au formage

Imaginons un cas typique de formage (fig. 2) : la force appliquée F doit

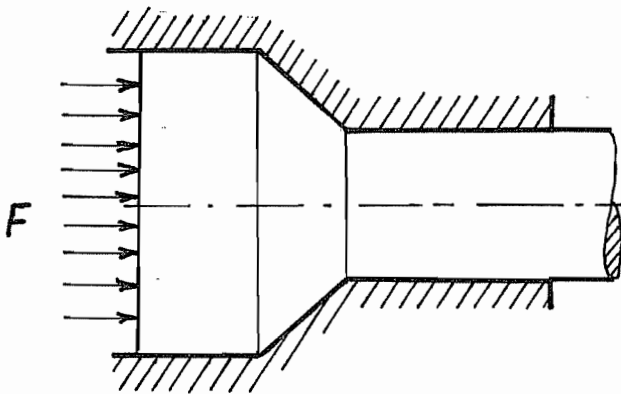


Figure 2 - Formage

être capable de produire le mouvement. La sécurité consiste, pour le concepteur de la machine, à *surestimer* cette force nécessaire à la propulsion. Par conséquent, l'approche *cinématiquement admissible* est très utile pour dimensionner la machine à former.

Cependant, les développements précédents ont fait totalement abstraction du frottement. C'est un des points délicats de cette approche : comme on n'a pas directement accès aux contraintes, il n'est pas possible d'introduire simplement un frottement coulombien. Néanmoins, il est aisément possible d'y introduire un frottement à la Tresca.

8. Frottement à la Tresca

Nous distinguerons à présent sur la surface trois parties :

- S_u où les vitesses sont imposées
- S_t où les forces sont imposées
- S_f où il y a frottement sur une paroi ($n_i u_i = \bar{u}_n$ imposé !)

Le frottement sera représenté par une contrainte de cisaillement τ_f fixée d'avance, opposée au mouvement. La puissance de τ_f sur l'élément de surface dS est donc

$$- \tau_f \|\mathbf{u}_t\| dS$$

où \mathbf{u}_t est la vitesse tangentielle, définie par

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} .$$

Dans ces conditions, on peut généraliser le principe de minimum de la dissipation totale en posant

$$J(\mathbf{u}) = \int_V d(\vartheta) dV - \int_V f_i u_i dV - \int_{S_t} \bar{t}_i u_i dS + \int_{S_f} \tau_f \|\mathbf{u}_t\| dS$$

Montrons d'abord que le champ de vitesses réel rend cette fonctionnelle stationnaire. On peut reproduire les raisonnements tenus en l'absence de frottement. La seule différence est le terme sur S_f dont la variation se calcule comme suit :

$$\delta \int_{S_f} \tau_f \|\mathbf{u}_t\| dS = \int_{S_f} \tau_f \delta \|\mathbf{u}_t\| dS$$

et tout se ramène à calculer $\delta \|\mathbf{u}_t\|$. On a

$$\delta \|\mathbf{u}_t\| = \delta (\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_t}) = \frac{\mathbf{u}_t \cdot \delta \mathbf{u}_t}{\|\mathbf{u}_t\|} .$$

Notant que

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad \text{et} \quad \delta \mathbf{u}_t = \delta \mathbf{u} - (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} ,$$

on a

$$\mathbf{u}_t \cdot \delta \mathbf{u}_t = \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})$$

et comme $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, il reste

$$[\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] \cdot \delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_t \cdot \delta \mathbf{u}$$

Il vient donc

$$\delta \int_{S_f} \tau_f \delta \|\mathbf{u}_t\| dS = \int_{S_f} \tau_f \frac{(\mathbf{u}_t)_i}{\|\mathbf{u}_t\|} \delta u_i dS ,$$

ce qui devra compenser le terme de surface provenant de l'intégration par parties des termes d'intérieur, à savoir

$$\int_V n_j \sigma_{ji} \delta u_i dS .$$

On est donc conduit à la condition

$$n_j \sigma_{ji} = - \tau_f \frac{(\mathbf{u}_t)_i}{\|\mathbf{u}_t\|}$$

signifiant que la traction de surface est τ_f , orientée dans le sens opposé à la vitesse tangentielle. Ainsi, la condition de stationnarité de la dissipation totale correspond encore à l'équilibre.

9. Minimum de la dissipation totale en présence d'un frottement à la Tresca

Nous reproduisons le raisonnement de la section 4 : soit \mathbf{u}^* un champ de vitesses incompressible et vérifiant $\mathbf{u}^* = \bar{\mathbf{u}}$ sur S_u et $u_n = \bar{u}_n$ sur S_f . On a

$$\left\{ \begin{array}{l} J(\mathbf{u}^*) = \int_V d(\varphi^*) dV - \int_V f_i u_i^* dV - \int_{S_t} \bar{t}_i u_i^* dS + \int_{S_f} \tau_f \|\mathbf{u}_t^*\| dS \\ J(\mathbf{u}) = \int_V d(\varphi) dV - \int_V f_i u_i dV - \int_{S_t} \bar{t}_i u_i dS + \int_{S_f} \tau_f \|\mathbf{u}_t\| dS \end{array} \right.$$

Soustrayons ces relations et notons $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}$. On obtient

$$J(\mathbf{u}^*) - J(\mathbf{u}) = \int_V [d(\varphi^*) - d(\varphi)] dV - \int_V f_i \delta u_i dV - \int_{S_t} \bar{t}_i \delta u_i dS + \int_{S_f} \tau_f [\|\mathbf{u}_t^*\| - \|\mathbf{u}_t\|] dS$$

On procède comme en section 4 pour la première intégrale, ce qui donne

$$\int_V [d(\vartheta^*) - d(\vartheta)] dV = \int_V [d(\vartheta^*) - \sigma_{ij} \vartheta_{ij}^*] dV + \int_V \delta d dV \quad \bullet$$

Transformons d'autre part l'intégrale sur S_f : on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_t^*\| - \|\mathbf{u}_t\| &= \frac{\|\mathbf{u}_t^*\| \|\mathbf{u}_t\| - \|\mathbf{u}_t\|^2}{\|\mathbf{u}_t\|} \\ &= \frac{\|\mathbf{u}_t^*\| \|\mathbf{u}_t\| - \mathbf{u}_t^* \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t^* \cdot \mathbf{u}_t - \|\mathbf{u}_t\|^2}{\|\mathbf{u}_t\|} \\ &= \frac{\|\mathbf{u}_t^*\| \|\mathbf{u}_t\| - \mathbf{u}_t^* \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \cdot \delta \mathbf{u}_t}{\|\mathbf{u}_t\|} \end{aligned}$$

si bien que

$$\int_{S_f} \tau_f [\|\mathbf{u}_t^*\| - \|\mathbf{u}_t\|] dS = \int_{S_f} \tau_f \frac{\|\mathbf{u}_t^*\| \|\mathbf{u}_t\| - \mathbf{u}_t^* \cdot \mathbf{u}_t}{\|\mathbf{u}_t\|} dS + \int_{S_f} \tau_f \delta \|\mathbf{u}_t\| dS \quad \bullet\bullet$$

Rassemblant les résultats \bullet et $\bullet\bullet$ et notant que la variation première est nulle, on obtient

$$J(\mathbf{u}^*) - J(\mathbf{u}) = \int_V [d(\vartheta^*) - \sigma_{ij} \vartheta_{ij}^*] dV + \int_{S_f} \tau_f \frac{\|\mathbf{u}_t^*\| \|\mathbf{u}_t\| - \mathbf{u}_t^* \cdot \mathbf{u}_t}{\|\mathbf{u}_t\|} dS .$$

Le premier terme est positif, par le même argument qu'en section 4. Quant au second, il est également positif en vertu de l'inégalité de Schwarz-Cauchy

$$|\mathbf{u}_t^* \cdot \mathbf{u}_t| \leq \|\mathbf{u}_t^*\| \|\mathbf{u}_t\| .$$

Au total, nous avons donc bien $J(\mathbf{u}^*) \geq J(\mathbf{u})$. En d'autres termes, *le champ de vitesses réel minimise la dissipation totale*. En outre, comme la variation première de cette fonctionnelle est nulle à la solution, *une erreur du premier ordre sur le champ de vitesses n'entraîne qu'une erreur du second ordre sur la dissipation totale*.

10. Champs de vitesses discontinus

Les conditions d'applicabilité du principe de minimum de la dissipation totale sont

- l'incompressibilité
- le caractère fini de ladite puissance.

Imaginons une portion de surface dS normale à l'axe 1 (fig. 1). Notons du signe + la face située du côté de la pointe de flèche de cet axe et du signe - l'autre face. On ne peut avoir $u_{1+} \neq u_{1-}$, car cela contreviendrait à

la condition de conservation du flux

$$\operatorname{div}_S \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) = u_{1+} - u_{1-} = 0 .$$

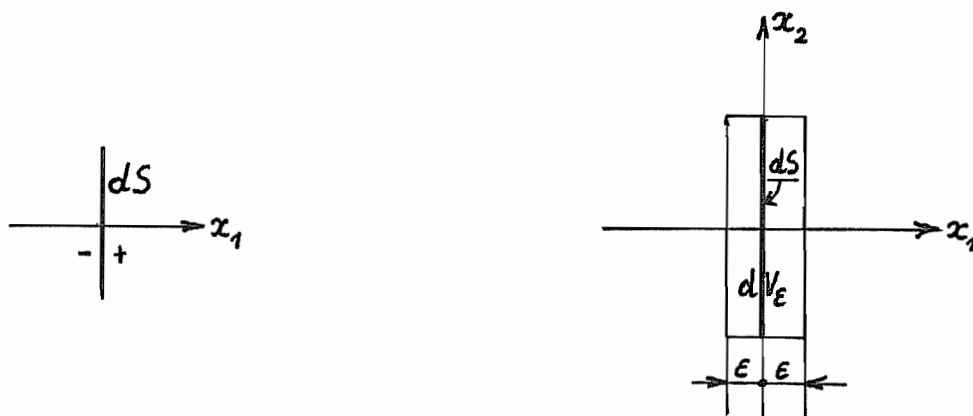


Figure 4 - Élément de surface de discontinuité

Par contre, on peut très bien imaginer un saut des vitesses tangentielles u_2 et u_3 . Supposons que la composante u_2 varie rapidement sur un faible intervalle de longueur 2ε . On a donc

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = \frac{1}{2} D_1 u_2$$

et

$$\|\varphi\| = \sqrt{\varphi_{12}^2 + \varphi_{21}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} |D_1 u_2| .$$

Quitte à modifier l'orientation de l'axe 1, on peut supposer u_2 croissant, ce qui implique

$$\|\varphi\| = \frac{1}{\sqrt{2}} D_1 u_2 .$$

Par conséquent, dans le cadre du critère de von Mises,

$$\int_{dV_\varepsilon} k \|\varphi\| dV = \frac{k}{\sqrt{2}} dS \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} D_1 u_2 dx_1 = \tau_0 [u_2(0 + \varepsilon) - u_2(0 - \varepsilon)] dS$$

et pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient une dissipation

$$\tau_0 [u_2(0_+) - u_2(0_-)] = \tau_0 |\Delta u_2| dS .$$

Ainsi, le long d'une surface intérieure du corps, il peut exister des discontinuités tangentielles des vitesses, qui conduisent à une puissance

$$D_{\text{discontinuité}} = \tau_0 \int_S \|\Delta \mathbf{u}_t\| dS .$$

Le même résultat peut être obtenu dans le cadre du critère de Tresca. Dans ce cas, les valeurs principales des vitesses de déformation sont

$$\varphi_1 = \varphi_{12} \quad , \quad \varphi_2 = -\varphi_{12} \quad , \quad \varphi_3 = 0$$

et la plus grande d'entre elles vaut $\frac{1}{2} D_1 u_2$. On a donc

$$d(\varphi) = \frac{\text{Re}}{2} |D_1 u_2| = \tau_0 |D_1 u_2| ,$$

soit formellement le même résultat à ceci près, bien entendu, que la relation entre τ_0 et Re est différente.

11. Unicité de la solution en l'absence de frottement

La solution d'un problème plastique sans frottement est-elle unique ? La question revient à savoir s'il existe plus d'une solution menant au même minimum de la dissipation. Soient \mathbf{u} et \mathbf{u}^* deux solutions, auxquelles correspondent les champs de contraintes σ et σ^* . Nous savons que

$$J(\mathbf{u}^*) - J(\mathbf{u}) = \int_V [d(\varphi^*) - \sigma_{ij}^* \varphi_{ij}^*] dV$$

et que l'intégrand est toujours positif ou nul. Si $J(\mathbf{u}^*) = J(\mathbf{u})$, il faudra donc que cet intégrand soit nul presque partout. Or, cela s'écrit encore

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \varphi_{ij}^* = 0 .$$

• Une première solution est $(\sigma^* - \sigma) = p \delta$, puisque les vitesses de déformation sont incompressibles. Mais comme les deux champs de contraintes vérifient les mêmes conditions d'équilibre, on a

$$D_j (\sigma_{ji}^* - \sigma_{ji}) = D_i p = 0 \text{ dans } V$$

$$n_j (\sigma_{ji}^* - \sigma_{ji}) = n_i p = 0 \text{ sur } S_t$$

ce qui entraîne $p = 0$.

• On peut encore imaginer que $\sigma^* - \sigma$ soit orthogonal à φ^* , ce qui suppose que la surface limite des contraintes possède des faces planes. C'est le cas du critère de Tresca.

• On peut enfin imaginer que $\sigma^* = \sigma$, ce qui signifie qu'à σ , on peut associer les deux vitesses de déformation φ et φ^* . Ceci n'est possible que dans le cas d'une surface limite présentant des angles, ce qui est encore le cas du critère de Tresca.

On arrive donc à la conclusion que le critère de von Mises mène à une solution unique, *mais que ce n'est pas nécessairement le cas avec le critère de Tresca.*

Il existe d'ailleurs, dans le cas du critère de Tresca, un contre-exemple particulièrement simple : soit un bloc parallélépipédique comprimé entre deux plateaux parfaitement lubrifiés (fig. 5). On a

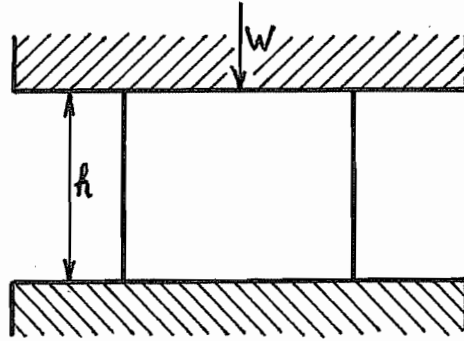


Figure 5 - Bloc comprimé entre deux plateaux

$$\vartheta_3 = -\frac{W}{h}$$

et l'état de contrainte est de la forme

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -Re.$$

On a donc

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Re \quad \text{et} \quad \sigma_2 - \sigma_3 = Re,$$

c'est-à-dire que l'on se trouve au point A de la figure 6, où les vitesses de déformation ont pour expression générale

$$\vartheta_1 = \alpha \geq 0, \quad \vartheta_2 = \beta \geq 0,$$

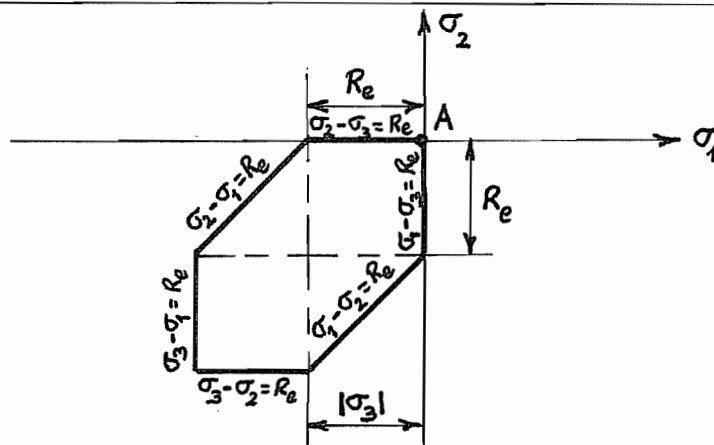


Figure 6 - Détermination des vitesses de déformation

avec la condition

$$\alpha + \beta + \vartheta_3 = 0 .$$

Visiblement, ϑ_3 est la plus grande vitesse de déformation en valeur absolue. Dès lors, *quels que soient α et β , on obtient la même dissipation totale, à savoir*

$$D = V.Re. |\vartheta_3| .$$

12. Le principe du plus court chemin

Considérons un bloc cylindrique de base quelconque simplement connexe, qui est forgé entre deux plateaux (fig. 7). On néglige l'effet de tonneau. Le frottement répond au modèle de Tresca. On se propose de déterminer le champ des vitesses et l'effort de forgeage, en adoptant le critère de Tresca.

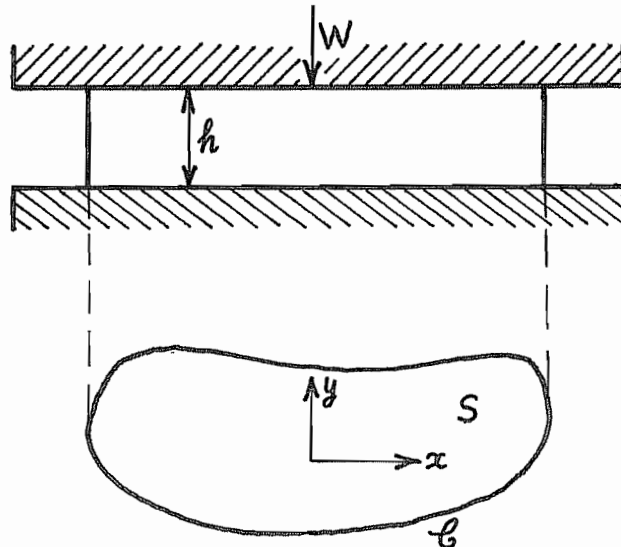


Figure 7 - Forgeage d'une pièce cylindrique de base quelconque

12.1 - Formulation du problème

La puissance totale se compose de la puissance de déformation P_d et de la puissance de frottement P_f :

$$J = P_d + P_f .$$

Pour la première, on note que $\vartheta_z = -\frac{W}{h}$ et on suppose que les deux autres déformations principales ϑ_1 et ϑ_2 sont positives. Dans le cadre de cette hypothèse qui, nous le verrons, limite les formes possibles de la base du cylindre, la plus grande vitesse de déformation en valeur absolue est ϑ_z et on a

$$P_d = \text{Re } S h \frac{W}{h} = \text{Re } S W ,$$

indépendamment des champs de vitesses u et v . La puissance de frottement est donnée par

$$P_f = 2 \tau_f \int_S \sqrt{u^2 + v^2} dS .$$

W étant une donnée du problème, il est clair que la minimisation portera sur P_f uniquement. Les champs de vitesses u et v sont liés par la condition d'incompressibilité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{W}{h} .$$

Nous écrirons donc le principe variationnel

$$K(u, v, \lambda) = \int_S \sqrt{u^2 + v^2} dS - \int \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{W}{h} \right) dS \quad \text{stat} .$$

u, v, λ

12.2 - Obtention des équations et des conditions aux limites

Variant u , on obtient

$$\int_S \frac{u \delta u}{\sqrt{u^2 + v^2}} dS - \int_{\mathcal{C}} \lambda n_x \delta u ds + \int_S \frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta u dS = 0 ,$$

ce qui mène à l'équation

$$\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} = - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad \text{dans } S \tag{E1}$$

assortie de la condition de bord

$$\lambda n_x = 0 \quad \text{sur } \mathcal{C} \tag{B1}$$

On trouverait de même en variant v , l'équation

$$\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad \text{dans } S \tag{E2}$$

avec, sur le bord,

$$\lambda n_y = 0 \quad \text{sur } \mathcal{C} \quad (\text{B2})$$

les deux équations E1 et E2 expriment que la direction de la vitesse dérive d'un potentiel λ . Ce potentiel vérifie sur le bord

$$\lambda^2 n_x^2 + \lambda^2 n_y^2 = \lambda^2 = 0 ,$$

donc

$$\lambda = 0 \quad \text{sur } \mathcal{C} .$$

En outre, le gradient de ce potentiel est de norme unitaire :

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 = \frac{u^2 + v^2}{u^2 + v^2} = 1 .$$

12.3 Solution de ces équations

Il est assez aisé de trouver une fonction λ qui vérifie ces conditions : il s'agit de

$$\lambda(x, y) = d((x, y), \mathcal{CS})$$

c'est-à-dire la distance du point (x, y) à la frontière (fig. 8). (S étant ouvert, \mathcal{CS} est fermé, si bien que la distance est parfaitement déterminée.)

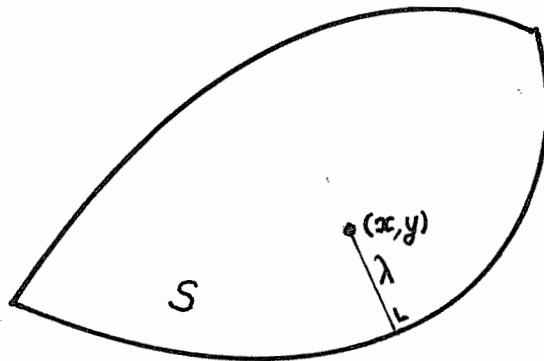


Figure 8 - Distance au complémentaire de S

Les figures 9, 10 et 11 représentent les iso- λ pour un rectangle, une anse de panier et un croissant. Les équations E1 et E2 expriment que la direction de la vitesse est le gradient de λ , c'est-à-dire la direction du plus court chemin vers la frontière. C'est le *principe du plus court chemin*, énoncé pour la première fois par Preußler [1] et repris par Siebel [2].

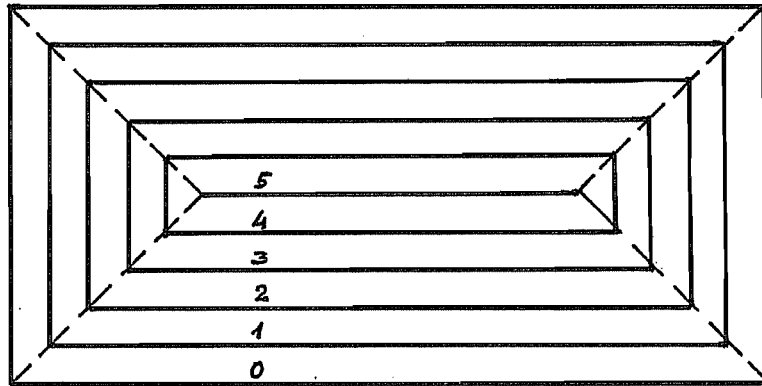


Figure 9 - iso- λ d'un rectangle

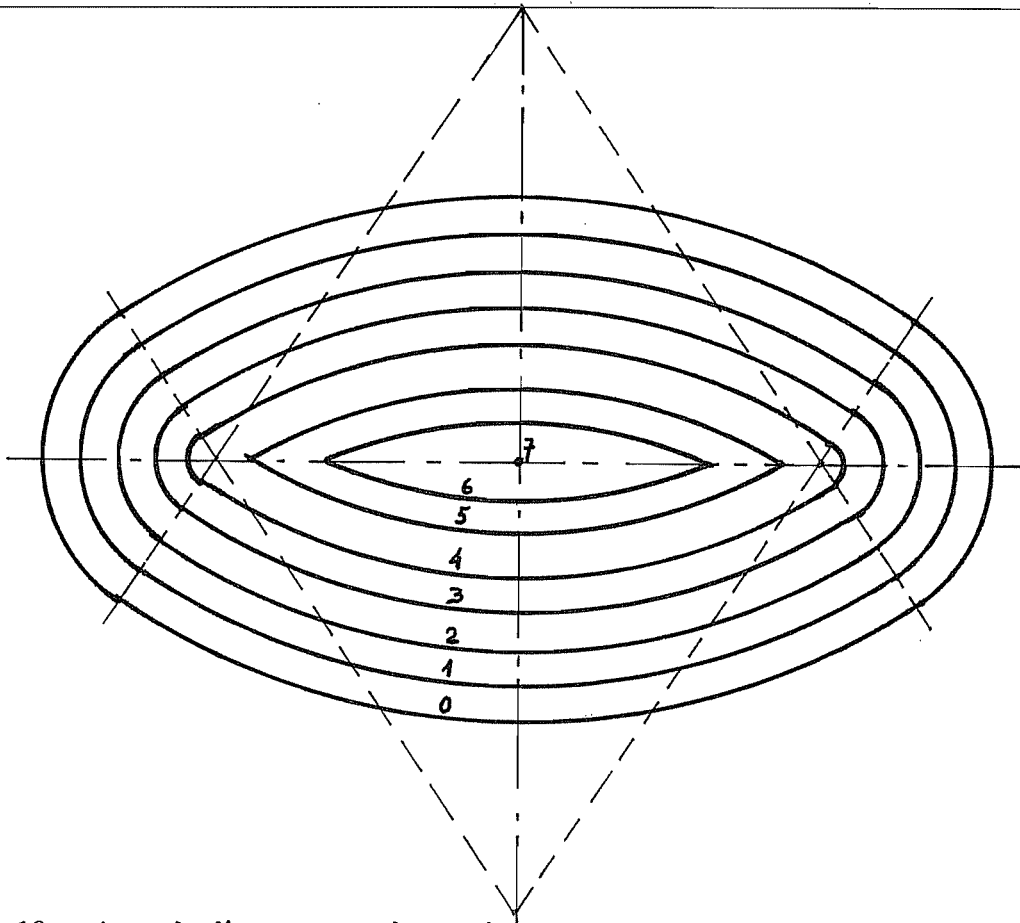


Figure 10 - iso - λ d'une anse de panier

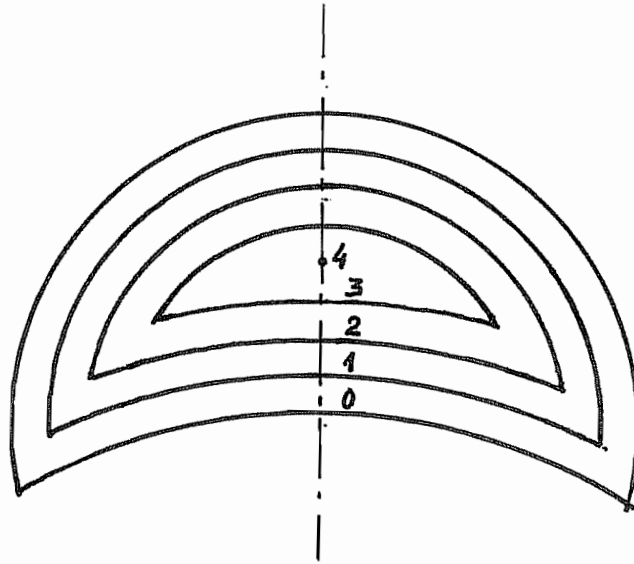


Figure 11 - iso- λ d'un croissant

12.4 - Détermination du champ des vitesses dans le cas du rectangle

La connaissance de la fonction λ permet non seulement de déterminer la direction de la vitesse, mais encore sa grandeur. Nous examinerons d'abord le cas simple du rectangle. On y distingue 4 zones où les directions des vitesses sont celles qu'indique la figure 12. A la frontière commune de deux zones, la

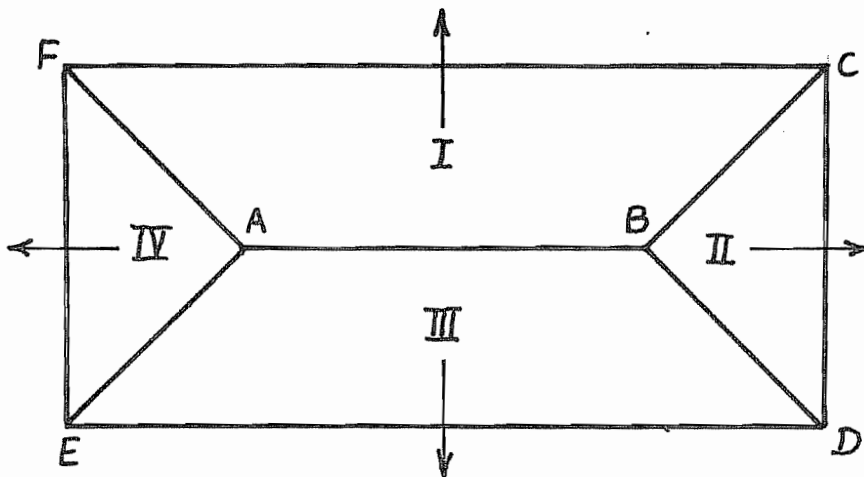


Figure 12 - Direction des vitesses dans un rectangle

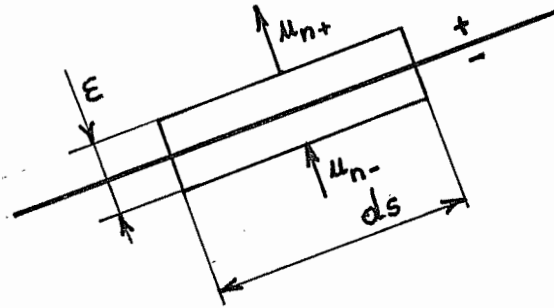


Figure 13 - Condition cinématique à la frontière commune de deux zones

vitesse normale doit être continue, puisque la condition d'incompressibilité implique (fig. 13)

$$u_{n+} ds - u_{n-} ds = \frac{W}{h} \varepsilon ds \rightarrow 0 \quad \text{pour } \varepsilon \rightarrow 0 .$$

Or, à la frontière AB des deux zones I et III, les vitesses normales sont opposées. Elles ne peuvent donc être que nulles. La composante tangentielle étant nulle, la vitesse est nulle sur AB. De même, sur BC, les vitesses normales sont de sens opposé, comme l'indique la direction des vitesses. Il faut donc encore que la vitesse soit nulle sur BC. On vérifie aisément qu'il en est de même sur toutes les frontières intérieures.

Cela étant, considérons une zone où les vitesses ont toutes la même direction. Quitte à effectuer un changement d'axes, on peut supposer que cette direction est l'axe des x. On a alors (fig. 14)

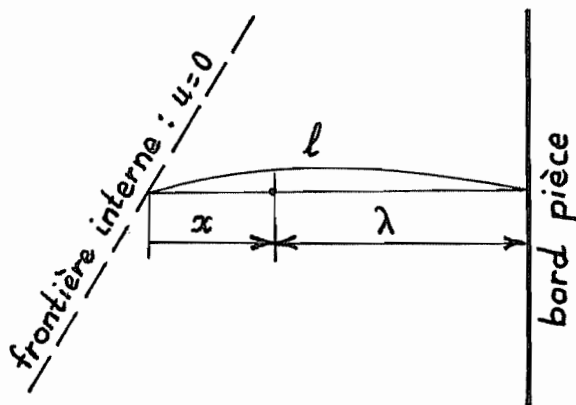


Figure 14 - Détermination des vitesses (bord droit)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{W}{h}$$

soit

$$u = \frac{W}{h} x = \frac{W}{h} (\ell - \lambda)$$

où ℓ est la distance de la frontière interne au bord. Sur ce dernier, on a donc

$$u = \frac{W}{h} \ell$$

Nous sommes à présent en mesure de tracer le champ des vitesses sur le bord du rectangle (fig. 15)

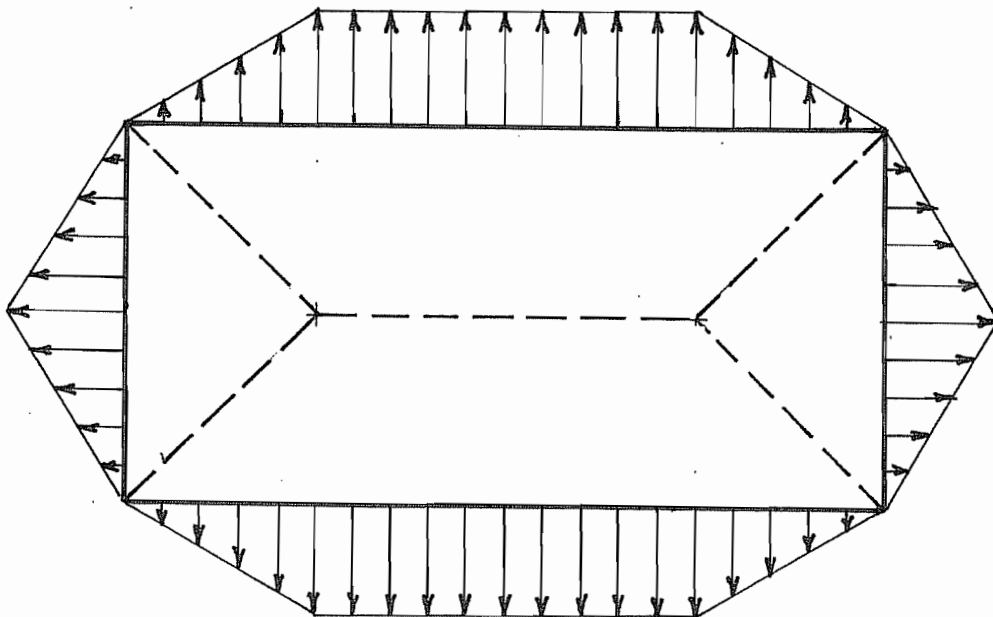


Figure 15 - Champ de vitesses au bord d'un rectangle comprimé

A partir de là, on peut théoriquement, en procédant pas à pas, obtenir les formes successives de la pièce.

12.5 - Détermination des vitesses dans le cas d'iso- λ courbes

Des iso- λ courbes peuvent toujours, sur un arc assez petit, être assimilées à des cercles. Selon que la pièce est convexe ou concave, on aura des vitesses centrifuges ou centripètes.

- Vitesses centrifuges (fig. 16)

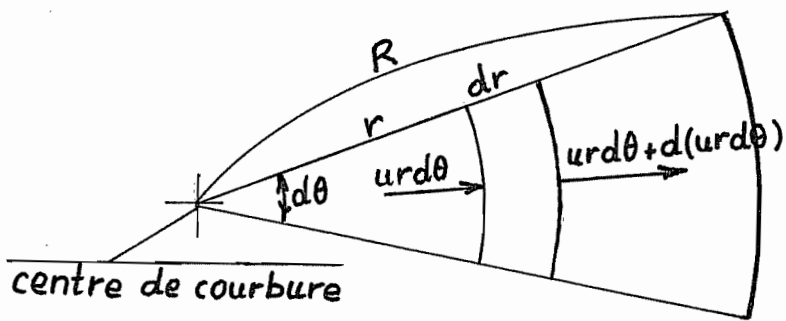


Figure 16 - Vitesses centrifuges

La condition d'incompressibilité s'écrit

$$d(ur d\theta) = \frac{W}{h} r d\theta dr$$

soit

$$\frac{d(ur)}{dr} = \frac{W}{h} r ,$$

équation dont la solution s'écrit

$$ur = \frac{W}{h} \frac{r^2}{2} - C$$

soit

$$u = \frac{W}{h} \frac{r}{2} - \frac{C}{r}$$

Soit R le rayon correspondant au bord. On a donc $r = R - \lambda$ et

$$u = \frac{W}{h} \frac{R - \lambda}{2} - \frac{C}{R - \lambda} .$$

Soit alors ℓ la valeur de λ correspondant à la frontière intérieure de la zone. Si $\ell = R$, le second terme disparaît ; dans le cas contraire, on a

$$0 = \frac{W}{h} \frac{R - \ell}{2} - \frac{C}{R - \ell}$$

ce qui donne

$$C = \frac{W}{h} \frac{(R - \ell)^2}{2}$$

et

$$u = \frac{W}{h} \left[(R - \lambda) - \frac{(R - \ell)^2}{R - \lambda} \right] .$$

Sur la frontière,

$$u = \frac{W}{2h} \left[R - \frac{(R - \ell)^2}{R} \right]$$

• Vitesses centripètes (fig. 18)

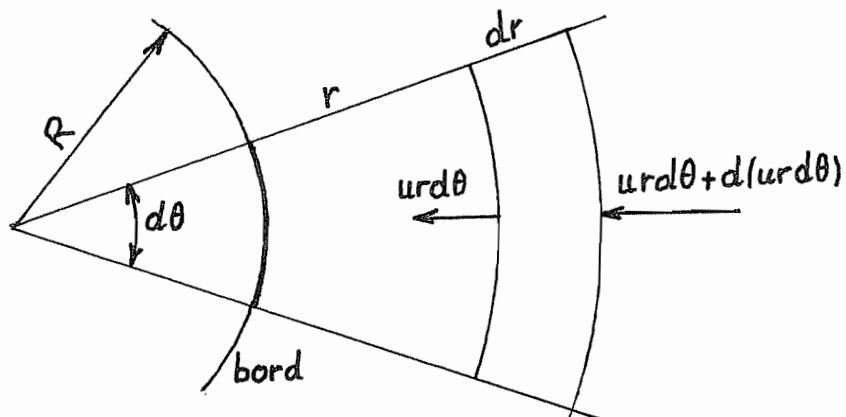


Figure 18 - Vitesses centripètes

Il faut alors écrire $u = -u_r$ avec

$$\frac{d}{dr} (ru_r) = \frac{W}{h} r$$

La solution est encore

$$u_r = \frac{W}{h} \frac{r}{2} - \frac{C}{r}$$

et si r_0 correspond à la frontière intérieure,

$$u_r = \frac{W}{2h} \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) .$$

Mais alors,

$$\vartheta_{\vartheta} = \frac{u_r}{r} = \frac{W}{2h} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) < 0$$

car $r < r_0$. Or, ceci contredit l'hypothèse fondamentale que les vitesses de déformation dans le plan xOy sont positives. Le principe du plus court chemin ne s'applique donc pas dans les cas de concavité et sa validité est restreinte aux surfaces S convexes.

12.6 - Effort de forgeage

La variation première de la fonctionnelle $K(u, v, \lambda)$ pour $\delta u = u$, $\delta v = v$ et $\delta \lambda = 0$ fournit la condition

$$\int_S \frac{u^2 + v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} dS - \int_S \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dS = 0$$

ce qui, vu la condition d'incompressibilité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{W}{h} ,$$

implique

$$\int_S \sqrt{u^2 + v^2} dS = \frac{W}{h} \int_S \lambda dS .$$

La puissance vaut donc

$$J = \text{Re } S W + 2 \tau_f \frac{W}{h} \int_S \lambda dS = F W$$

ce qui donne

$$F = \text{Re } S + 2 \tau_f \frac{1}{h} \int_S \lambda dS$$

et pour la pression moyenne,

$$\frac{p_m}{\text{Re}} = \frac{F}{\text{Re } S} = 1 + \frac{2\tau_f}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{hS} \int_S \lambda dS$$

12.7 - Effort de forgeage d'un rectangle

Dans le cas du rectangle, on a (fig. 19)

$$\begin{aligned} \int_S \lambda dS &= \frac{1}{2} (a - b) \cdot b \cdot \frac{b}{2} + 2b \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4} ab^2 \left(1 - \frac{b}{3a} \right) \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{S} \int_S \lambda dS = \frac{1}{4} b \left(1 - \frac{b}{3a} \right) .$$

Il vient donc

$$\frac{p_m}{Re} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_f}{Re} \frac{b}{h} \left(1 - \frac{b}{3a}\right)$$

Pour $\frac{b}{a} \rightarrow 0$, on retrouve le résultat obtenu au chapitre 3, section 2.3.

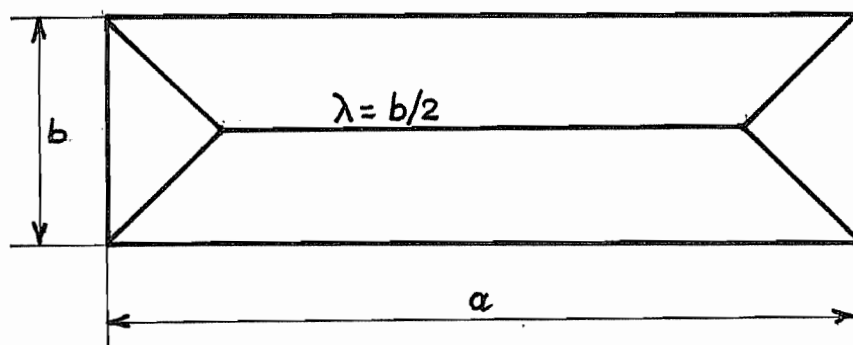


Figure 19 - Cas du rectangle

12.8 - Effort de forgeage d'un cercle

Pour un cercle, $\lambda = R - r$, $\lambda_{\max} = R$ et

$$\int_S \lambda \, dS = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{1}{3} \pi R^3$$

d'où

$$\frac{1}{S} \int_S \lambda \, dS = \frac{R}{3}$$

On a donc

$$\frac{p_m}{Re} = 1 + \frac{2\tau_f}{Re} \frac{R}{3h}$$

12.9 - Unicité de la solution

Nous avons trouvé la fonction λ , distance au bord, comme solution des équations E1, E2, B1, B2. Mais est-ce la seule ? Pour répondre à cette question, imaginons qu'il existe une autre fonction μ vérifiant les conditions

$$|\text{grad } \mu| = 1 \quad \text{dans } S$$

$$\mu \geq 0$$

$$\mu = 0 \quad \text{sur } \mathcal{C}.$$

Soit alors (fig. 20) un point $A \in S$. Notons AC la ligne de plus grande pente de la fonction μ à partir de A , vers le bord. A priori,

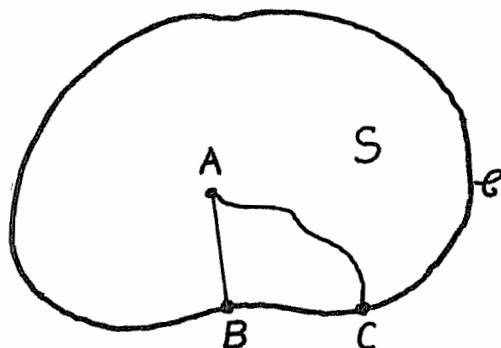


Figure 20 - Unicité de λ

$$\text{longueur}(AC) \geq d(A, \partial S) = \lambda(A)$$

Dès lors,

$$\mu(A) = \int_{CA} \text{grad } \mu \cdot ds = \int_{CA} ds = \text{longueur}(AC) \geq \lambda(A) .$$

D'autre part, soit B le point du contour tel que le segment AB réalise la distance de A à ∂S . On a encore

$$\mu(A) = \int_{BA} \text{grad } \mu \cdot ds \leq \int_{BA} |\text{grad } \mu| ds \leq \int_{BA} ds = \lambda(A)$$

Donc

$$\lambda(A) \leq \mu(A) \leq \lambda(A)$$

ce qui revient à dire que les deux fonctions sont égales.

13. Bibliographie

- [1] H. PREUSSLER - "Zur Frage der bildsamen Formänderung"
Stahl und Eisen, **45**, n° 34, pp. 1422-1428, 1925
- [2] E. SIEBEL - *Le façonnage des métaux par déformation plastique*
Dunod, Paris et Liège, 1936

CHAPITRE 6 - PROBLÈMES SPATIAUX

1. Tréfilage conique

1.1 - Introduction

Nous parlerons de *tréfilage conique* pour désigner le cas où la matrice est un cône (non nécessairement circulaire), voir fig. 1.

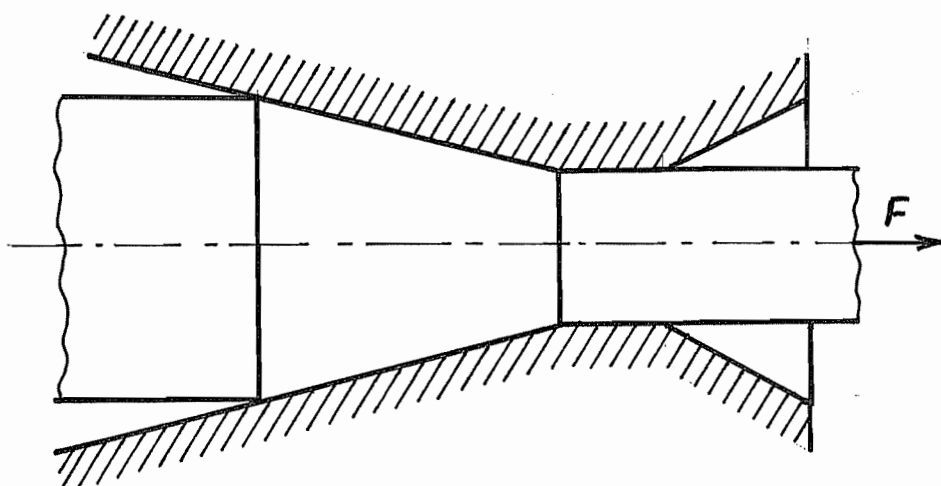


Figure 1 - Tréfilage conique

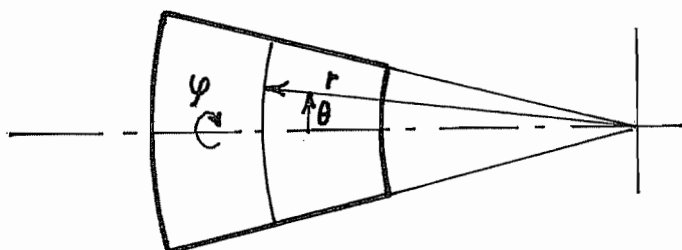


Figure 2 - Coordonnées

Suivant en cela l'approche de Sachs [1], nous noterons r la distance d'un point quelconque au sommet du cône (fig. 2). L'angle solide du cône sera désigné par ω , ce qui signifie que la surface interceptée par le cône sur la sphère de rayon r a pour aire

$$S(r) = \omega r^2 .$$

En outre, la sphère de rayon r découpe sur le cône un contour de périmètre Kr , K étant un coefficient propre au cône.

1.2 - Distribution des vitesses

Nous ferons l'hypothèse que dans la zone plastique, la vitesse est toujours dirigée vers le centre du cône. En coordonnées sphériques, on a donc

$$u_r = u = -\frac{Q}{\omega r^2}, \quad u_\vartheta = 0, \quad u_\phi = 0.$$

Il en découle directement

$$\vartheta_r = \frac{d(r + udt) - dr}{dr dt} = \frac{du}{dr} = \frac{2Q}{\omega r^3}.$$

Par ailleurs, la longueur d'un élément de circonférence tracé sur une sphère de rayon r à un instant donné est de la forme Ar . Après un temps dt , cette longueur devient $A(r + udt)$, ce qui donne

$$\vartheta_\vartheta = \vartheta_\phi = \frac{A(r + udt) - Ar}{Ar dt} = \frac{u}{r} = -\frac{Q}{\omega r^3} = -\frac{1}{2} \vartheta_r.$$

Des relations

$$\sigma_r = k \frac{\vartheta_r}{\|\vartheta\|} - p$$

$$\sigma_\vartheta = k \frac{\vartheta_\vartheta}{\|\vartheta\|} - p$$

$$\sigma_\phi = k \frac{\vartheta_\phi}{\|\vartheta\|} - p$$

avec $\vartheta_\vartheta = \vartheta_\phi$, on déduit

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta.$$

L'état de contrainte régnant dans une surface sphérique est donc isotrope. Cette remarque permet de réduire le critère de von Mises à

$$\frac{1}{2} [(\sigma_r - \sigma_\vartheta)^2 + (\sigma_r - \sigma_\vartheta)^2] = Re^2$$

soit

$$|\sigma_r - \sigma_\vartheta| = Re.$$

Comme

$$\sigma_r - \sigma_\vartheta = k \frac{\vartheta_r - \vartheta_\vartheta}{\|\vartheta\|} > 0,$$

on a en fait

$$\sigma_r - \sigma_\vartheta = Re.$$

En conclusion,

$$\sigma_{\vartheta} = \sigma_{\phi} = \sigma_r - \text{Re} .$$

La pression sur les parois est constamment égale à

$$p_{\text{paroi}} = - n_{\vartheta}^2 \sigma_{\vartheta} - n_{\phi}^2 \sigma_{\phi} = (\text{Re} - \sigma_r) (n_{\vartheta}^2 + n_{\phi}^2) = \text{Re} - \sigma_r .$$

Par conséquent, la contrainte de frottement sur la paroi a pour grandeur

$$\tau_{\text{paroi}} = \mu p_{\text{paroi}} = \mu (\text{Re} - \sigma_r) .$$

1.3 - Distribution de σ_r

Pour établir la distribution de σ_r , nous ferons le bilan des puissances dans la tranche $(r, r + dr)$:

- *Puissance de traction* : $dP_t = Q \sigma_r$

- *Puissance de retenue* : $dP_r = Q (\sigma_r + d\sigma_r)$

- *Puissance de déformation* :

$$\|\vartheta\| = \vartheta_r \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \vartheta_r \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$d = \tau_0 \sqrt{2} \|\vartheta\| = \tau_0 \sqrt{3} \vartheta_r = \text{Re} \vartheta_r = \frac{2 \text{Re} Q}{\omega r^3}$$

$$dD = d \cdot \omega r^2 dr = 2 \text{Re} Q \frac{dr}{r} .$$

- *Puissance de frottement* :

$$dP_f = \mu (\text{Re} - \sigma_r) |u| dS_{\text{lat}}$$

où

$$dS_{\text{lat}} = \text{périmètre} \cdot dr = Kr dr$$

et

$$|u| = \frac{Q}{\omega r^2} .$$

Donc

$$dP_f = \mu (\text{Re} - \sigma_r) \frac{KQ}{\omega r} dr .$$

Le bilan s'écrit donc

$$dP_t = dP_r + dD + dP_f$$

soit

$$Q \sigma_r = Q (\sigma_r + d\sigma_r) + 2 \operatorname{Re} Q \frac{dr}{r} + \mu (\operatorname{Re} - \sigma_r) \frac{KQ}{\omega} \frac{dr}{r} .$$

Divisant par Qdr , on obtient

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\mu K}{\omega r} \sigma_r = - \frac{\operatorname{Re}}{r} \left(2 + \frac{\mu K}{\omega} \right) .$$

L'introduction du nombre sans dimension

$$B = \frac{\mu K}{2\omega}$$

permet d'écrire cette équation sous la forme

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2B}{r} \sigma_r = - 2 \frac{\operatorname{Re}}{r} (1 + B) .$$

L'équation homogène associée, qui s'écrit

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 2B \frac{dr}{r} ,$$

admet pour solution générale

$$\sigma_{r_h} = C r^{2B} .$$

Quant à l'équation complète, elle admet visiblement pour solution particulière

$$\sigma_{r_p} = \operatorname{Re} \frac{1 + B}{B} .$$

La solution générale de l'équation complète est donc

$$\sigma_r = C r^{2B} + \operatorname{Re} \frac{1 + B}{B} .$$

Notons σ_{r_1} la contrainte radiale à l'entrée de la filière. On a donc

$$\sigma_{r_1} = C r_1^{2B} + \operatorname{Re} \frac{1 + B}{B}$$

ce qui fournit

$$C = \sigma_{r_1} r_1^{-2B} - \operatorname{Re} \frac{1 + B}{B} r_1^{-2B} .$$

Il en découle

$$\sigma_r = \sigma_{r_1} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{2B} + \operatorname{Re} \frac{1 + B}{B} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^{2B} \right] .$$

Comme la surface en r vaut $S = \omega r^2$, on a encore

$$\sigma_r = \sigma_{r_1} \left(\frac{S}{S_1}\right)^B + \text{Re} \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{S}{S_1}\right)^B\right].$$

En particulier, à la sortie,

$$\sigma_{r_2} = \sigma_{r_1} \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^B + \text{Re} \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^B\right].$$

1.4 - Examen des conditions aux limites

Sachs [1] considérait que l'essentiel du travail se fait dans la partie conique. Il admettait donc $\sigma_{r_1} = 0$ et il déduisait la contrainte de traction σ à la sortie par la condition de conservation de la puissance :

$$\sigma Q = \sigma_{r_2} Q,$$

soit

$$\sigma = \sigma_{r_2} = \text{Re} \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^B\right] \quad (\text{Sachs, 1928}).$$

Le processus n'est évidemment réalisable que si $\sigma < \text{Re}$, ce qui fixe une limite inférieure au rapport S_2/S_1 .

En 1940, Körber et Eichinger [2] ont fait remarquer que l'entrée et la sortie de la filière supposent une réorientation des vitesses, ce qui nécessite un travail *secondaire* ou *marginal (redundant work)*. Ils proposent de le considérer comme une discontinuité des vitesses tangentielles. C'est ce que l'on appelle l'*effet de Körber et Eichinger*. Examinons d'abord l'entrée (fig. 3). la discontinuité de vitesse est nécessairement tangente à la sphère.

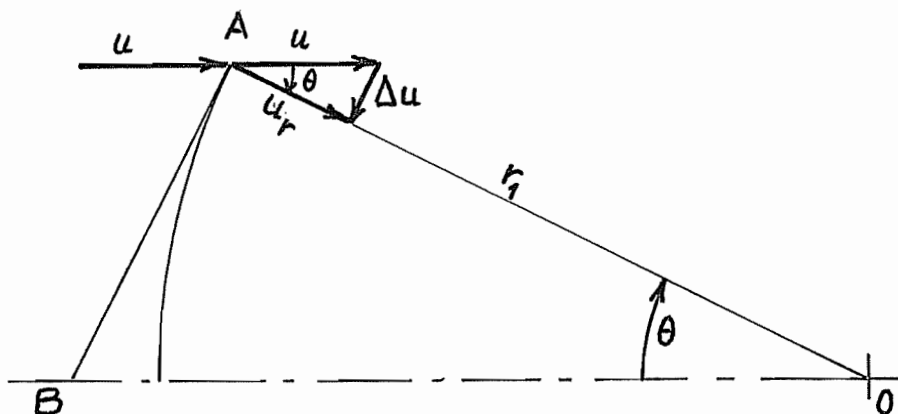


Figure 3 - Discontinuité à l'entrée

On a

$$\frac{\Delta u}{u_r} = \frac{AB}{OA} = \operatorname{tg} \vartheta$$

donc

$$\Delta u = u_r \operatorname{tg} \vartheta .$$

La puissance d'entrée est donc

$$P_e = \int_{S_1} \tau_0 |\Delta u| dS = \tau_0 u_r \int_{S_1} \operatorname{tg} \vartheta dS = \tau_0 Q \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \operatorname{tg} \vartheta dS = \tau_0 Q \beta$$

où

$$\beta = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \operatorname{tg} \vartheta dS .$$

On remarquera que ce nombre est indépendant de r_1 .

Le travail P_e doit être fourni par les tractions radiales σ_{r_1} , ce qui implique

$$\sigma_{r_1} Q = P_e = \tau_0 Q \beta$$

et, par conséquent,

$$\sigma_{r_1} = \tau_0 \beta .$$

A la sortie (fig. 4), la situation est semblable et on a encore

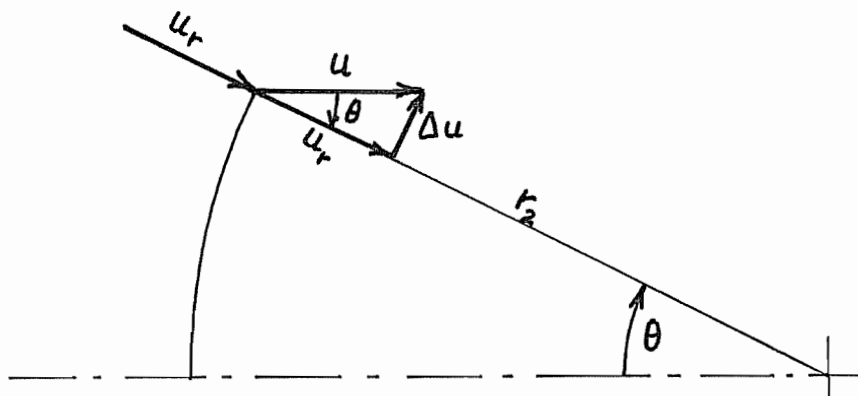


Figure 4 - Discontinuité à la sortie

$$P_s = \tau_0 Q \beta .$$

Il en découle

$$\sigma Q = \sigma_{r_2} Q + P_s$$

soit

$$\sigma = \sigma_{r_2} + \tau_0 \beta .$$

Au total, on obtient

$$\sigma = \tau_0 \beta + \sigma_{r_2} = \tau_0 \beta + \sigma_{r_1} \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^B + \operatorname{Re} \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^B\right]$$

soit

$$\sigma = \tau_0 \beta \left[1 + \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^B\right] + \operatorname{Re} \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^B\right]$$

La présente formule est très légèrement différente de celle de Körber et Eichinger qui se contentent en fait d'une approximation un peu plus grossière.

1.5 - Cas de la matrice de révolution

La plupart des résultats de la littérature concernent le cas simple mais important où la matrice est un cône de révolution de demi-angle α . Dans ce cas, on a

$$\omega = 2\pi \int_0^\alpha \sin \vartheta \, d\vartheta = 2\pi (1 - \cos \alpha)$$

et K , périmètre en $r = 1$, vaut (fig. 5)

$$K = 2\pi \sin \alpha$$

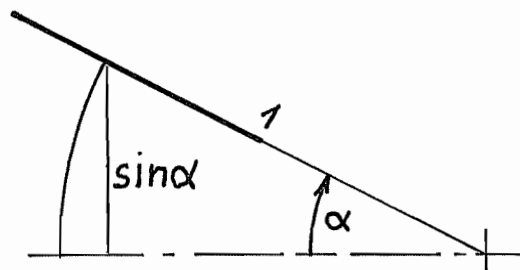


Figure 5 - Détermination de K

Il en découle

$$B = \frac{\mu K}{2\omega} = \frac{\mu \sin \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{\mu}{2} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\mu}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} .$$

Il nous reste à calculer

$$\beta = \frac{1}{S} \int_S \operatorname{tg} \vartheta \, dS .$$

On sait que

$$S = 2\pi r^2 (1 - \cos \alpha) .$$

Par ailleurs,

$$\int_S \operatorname{tg} \vartheta \, dS = 2\pi \int_0^\alpha \operatorname{tg} \vartheta \cdot r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta = 2\pi r^2 \int_0^\alpha \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} \, d\vartheta .$$

Il vient donc

$$\beta = \frac{1}{1 - \cos \alpha} \int_0^\alpha \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} \, d\vartheta .$$

Calculons l'intégrale. On a

$$\int_0^\alpha \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} \, d\vartheta = \int_0^\alpha \frac{1}{\cos \vartheta} \, d\vartheta - \int_0^\alpha \cos \vartheta \, d\vartheta = I - II .$$

On a visiblement

$$II = \sin \alpha .$$

Pour I,

$$\int_0^\alpha \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta} = \int_0^\alpha \frac{\cos \vartheta \, d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \int_0^{\sin \alpha} \frac{d(\sin \vartheta)}{1 - \sin^2 \vartheta} = \int_0^{\sin \alpha} \frac{du}{1 - u^2}$$

Or,

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{A}{1 - u} + \frac{B}{1 + u} = \frac{A + B + (A - B)u}{1 - u^2} .$$

Par identification, on trouve

$$A + B = 1 \quad , \quad A - B = 0 \quad ,$$

soit

$$A = B = 1/2 .$$

On obtient donc

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\sin \alpha} \frac{du}{1-u} + \frac{1}{2} \int_0^{\sin \alpha} \frac{du}{1+u} = -\frac{1}{2} \int_0^{\sin \alpha} \frac{du}{u-1} + \frac{1}{2} \int_0^{\sin \alpha} \frac{du}{u+1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \alpha}{\sin \alpha - 1} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

On notera que

$$1 + \sin \alpha = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

et

$$1 - \sin \alpha = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Il vient donc

$$I = \ln \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \ln \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \ln \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Au total, on obtient

$$\beta = \frac{1}{1 - \cos \alpha} \left[\ln \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} - \sin \alpha \right]$$

Cette expression est rigoureuse, et nous aurons à l'employer lors de l'étude de l'extrusion. Mais dans le cas du tréfilage, l'angle α n'est que de quelques degrés, et on peut approcher β comme suit. Tout d'abord, rappelons les développements

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$$

qui, soustraits, donnent

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3} + \dots$$

donc

$$\ln \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} + \dots$$

Par ailleurs,

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \cong 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 2 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$$

Enfin,

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \cong 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

On a donc, en notant $t = \operatorname{tg}(\alpha/2)$,

$$\beta \cong \frac{2t + \frac{2}{3} t^3 - 2t + 2 t^3}{2t^2} = \frac{\frac{8}{3} t^3}{2 t^2} = \frac{4}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} .$$

(Une approximation souvent valable est

$$\beta \cong \frac{2}{3} \alpha \quad .)$$

A partir de ce résultat, on peut finalement écrire la contrainte de traction sous la forme

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^B \right] + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left[1 + \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^B \right] \right\} ,$$

où l'on notera que

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} \cong 0,7698 .$$

1.6 - Recherche de l'angle optimal

Pour un même coefficient d'étirage $\mathcal{E} = S_1/S_2$, on peut utiliser des filières d'angle différent. La contrainte de traction σ sera modifiée en conséquence. La question qui se pose est de choisir l'angle pour lequel elle est minimale : c'est ce que l'on appelle l'angle optimal. L'expression de σ étant une fonction assez complexe de cet angle, il est nécessaire de la simplifier quelque peu. On a

$$\mathcal{E}^{-B} = \exp (- B \ln \mathcal{E}) .$$

Nous supposons que le groupement

$$X = B \ln \mathcal{E}$$

est suffisamment petit pour que l'on puisse écrire

$$\exp (- X) = 1 - X + \frac{X^2}{2} \dots \cong 1 - X .$$

La théorie des séries alternées montre que le reste de la série est majoré par le premier terme négligé. Nous supposons donc que

$$\frac{X^2}{2} \ll 1 - X .$$

Dans le cadre de cette hypothèse, on a

$$1 - \varepsilon^{-B} \cong B \ln \varepsilon$$

et

$$1 + \varepsilon^{-B} \cong 2 - B \ln \varepsilon .$$

De plus, comme

$$B = \frac{\mu}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} ,$$

on a

$$\tg \frac{\alpha}{2} = \frac{\mu}{2B}$$

et

$$\sigma \cong \operatorname{Re} \left\{ (1 + B) \ln \varepsilon + \frac{4}{3\sqrt{3}} \mu \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{2} \ln \varepsilon \right) \right\} .$$

Cherchons la valeur de B qui minimise σ :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial B} = \operatorname{Re} \left\{ \ln \varepsilon - \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{\mu}{B^2} \right\} = 0 ,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{B^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{1}{\mu} \ln \varepsilon .$$

Cela équivaut à

$$\tg^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\mu^2}{4B^2} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \mu \ln \varepsilon$$

soit

$$\left(\tg \frac{\alpha}{2} \right)_{\text{opt}} = \sqrt{0,3248 \mu \ln (S_1/S_2)}$$

Pour valider cette expression, il reste à vérifier que

$$X^2 \ll 1 - X .$$

On notera que pour la valeur optimale de α ,

$$X = \frac{\mu}{2 \tg \frac{\alpha}{2}} \ln \varepsilon = \frac{\frac{\mu}{2} \ln \varepsilon}{\sqrt{0,3248 \mu \ln \varepsilon}} = \sqrt{0,7698 \mu \ln \varepsilon} = 1,540 \left(\tg \frac{\alpha}{2} \right)_{\text{opt}}$$

Généralement, α_{opt} ne dépasse pas 0,2 rad, ce qui correspond à $X \cong 0,15$ et

$$X^2 = 0,0225 \ll 1 - 0,15 = 0,85 .$$

1.7 - Exemple - Soit à obtenir un coefficient d'étirage $\mathcal{E} = 1,25$. Le coefficient de frottement vaut 0,05. Déterminer l'angle optimal et calculer la contrainte de traction. Le processus est-il réalisable ?

● Angle optimal

$$\left(\text{tg} \frac{\alpha}{2}\right)_{\text{opt}} = \sqrt{0,3248 \cdot 0,05 \cdot \ln(1,25)} = 0,06020$$

$$\alpha_{\text{opt}}/2 = 3,445^\circ \quad ; \quad \alpha_{\text{opt}} = \underline{6,890^\circ}$$

On vérifie que

$$X = 1,540 \left(\text{tg} \frac{\alpha}{2}\right)_{\text{opt}} = 1,540 \cdot 0,06020 = 0,09271$$

donc

$$X^2 = 0,008595 \ll 1 - X = 0,90729$$

● Contrainte de traction

$$B = \frac{\mu}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} \cdot \frac{1}{0,06020} = 0,4153$$

$$\frac{1+B}{B} = 3,408$$

$$\left(S_2/S_1\right)^B = (0,8)^{0,4153} = 0,9115$$

$$\frac{1+B}{B} [1 - (S_2/S_1)^B] = 3,408 [1 - 0,9115] = 0,3016$$

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} \text{tg} \frac{\alpha}{2} [1 + (S_2/S_1)^B] = 0,08858$$

$$\sigma/Re = 0,3016 + 0,08858 = \underline{0,3902} < 1 \quad : \text{ le processus est réalisable.}$$

1.8 - Approche de Siebel

Siebel a proposé de remplacer le frottement coulombien sur la paroi par un frottement à la Tresca avec

$$\tau_f = \mu Re.$$

Nous savons qu'en réalité, la contrainte de frottement est donnée par

$$\tau = \mu (Re - \sigma_r) .$$

L'approximation de Siebel a donc pour effet d'exagérer la perte par frottement et donc également la contrainte de traction σ , ce qui va dans le sens de la sécurité. Elle permet une formulation énergétique particulièrement simple. On a en effet le bilan suivant :

- *Puissance principale de déformation*

$$P_d = \text{Re } Q \ln (S_1/S_2)$$

- *Puissance marginale de déformation*

$$P_{dm} = 2 \tau_0 \beta Q = \frac{8 \tau_0}{3} \text{tg } \frac{\alpha}{2} Q$$

- *Puissance de frottement*

$$P_f = \int_{S_{lat}} \tau_f u \, dS = \tau_f \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{\omega r^2} \cdot Kr \cdot dr = \frac{\tau_f QK}{\omega} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau_f QK}{2\omega} \ln(S_1/S_2)$$

avec

$$\frac{K}{2\omega} = \frac{1}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} .$$

En posant $\tau_f = \mu \text{Re}$, cela donne

$$P_f = \text{Re } Q \frac{\mu}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} \ln(S_1/S_2) .$$

Au total, il vient donc

$$P = \text{Re } Q \left[\ln \frac{S_1}{S_2} \left(1 + \frac{\mu}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{8}{3} \frac{\tau_0}{\text{Re}} \text{tg } \frac{\alpha}{2} \right]$$

soit, pour de faibles angles α ,

$$\frac{\sigma}{\text{Re}} = \frac{P}{\text{Re } Q} = \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) \ln \frac{S_1}{S_2} + \frac{4}{3} \frac{\tau_0}{\text{Re}} \alpha .$$

C'est la *formule de Siebel* [3]. Cet auteur pose $\tau_0 = \text{Re}/2$, en accord avec le critère de *Tresca*. Il obtient l'angle optimum en dérivant par rapport à α , ce qui donne

$$-\frac{\mu}{\alpha^2} \ln \frac{S_1}{S_2} + \frac{4}{3} \frac{\tau_0}{\text{Re}} = 0,$$

soit

$$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{3}{4} \mu \frac{\text{Re}}{\tau_0} \ln(S_1/S_2)}$$

c'est-à-dire

$$\alpha_{\text{opt}} = \sqrt{1,5 \mu \ln(S_1/S_2)} \quad \text{par le critère de Tresca}$$

$$\alpha_{\text{opt}} = \sqrt{1,299 \mu \ln(S_1/S_2)} \quad \text{par le critère de von Mises.}$$

Dans le cas de l'exemple précédent, on obtiendrait

$$\alpha_{\text{opt}} = 7,411^\circ \quad (\text{Tresca})$$

$$\alpha_{\text{opt}} = 6,897^\circ \quad (\text{von Mises})$$

On constate que dans ce dernier cas, on obtient pratiquement la même valeur qu'auparavant [6,890°]

1.9 - Problème

Johnson et Mellor [4] disent "It was also established from further tests that, all other things being equal, the greater the friction, the lower the die pressure". Justifier cette constatation à la lumière du modèle théorique.

Suggestion : Pour μ croissant, on a nécessairement de plus grandes valeurs de σ_r . Or,

$$p = Re - \sigma_r$$

1.10 - Mesure du coefficient de frottement en tréfilage.

Le coefficient de frottement moyen en filage peut être mesuré par le dispositif suivant, proposé par Wistreich et Yang en 1961 [7]. Il s'agit d'une filière fendue, permettant de mesurer simultanément l'effort de séparation des deux demi-filières et l'effort axial (fig. 6)

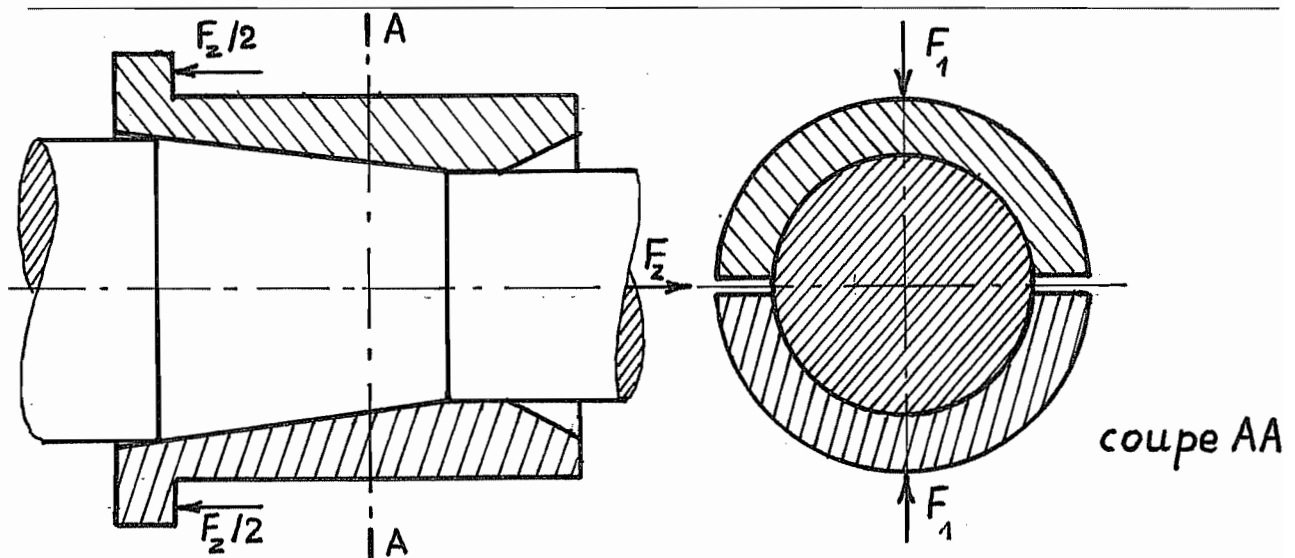


Figure 6 - Mesure du coefficient de frottement en tréfilage

Calculons l'effort de séparation F_1 . La composante radiale des tractions de surface agissant sur un élément de surface $ds.Rd\phi$ de la filière vaut (fig 7)

$$p (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) ds.Rd\phi .$$

Sa composante verticale est, en choisissant la verticale comme origine de l'angle ϕ ,

$$p (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) ds. R \cos \phi d\phi$$

On a donc

$$\begin{aligned} F_1 &= (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi . \int_0^1 p R ds \\ &= 2 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \int_0^1 p R ds. \end{aligned}$$

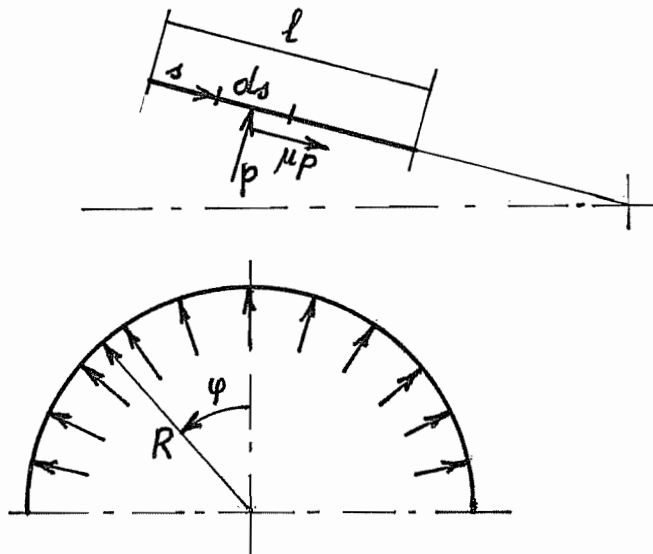


Figure 7 - Calcul de F_1 et F_z

La force axiale agissant sur un élément $ds.Rd\phi$ vaut quant à elle

$$p (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) ds.Rd\phi .$$

En intégrant sur la filière, on obtient

$$F_z = 2\pi (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) \int_0^1 p R ds$$

On a donc

$$\frac{F_z}{\pi F_1} = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}$$

soit

$$(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) \frac{F_z}{\pi F_1} = \operatorname{tg} \alpha + \mu$$

ce qui donne

$$\mu = \frac{\frac{F_z}{\pi F_1} - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{F_z}{\pi F_1} \operatorname{tg} \alpha} .$$

En introduisant l'angle auxiliaire ξ défini par

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{F_z}{\pi F_1} ,$$

cela donne

$$\mu = \frac{\operatorname{tg} \xi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \xi \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} (\xi - \alpha)$$

2. Extrusion

2.1 - Introduction

A l'inverse du tréfilage, l'extrusion consiste à *presser* un lopin dans une matrice pour réduire sa section. On distingue

- l'*extrusion directe* (fig. 8) où le métal se dirige dans le même sens que le piston

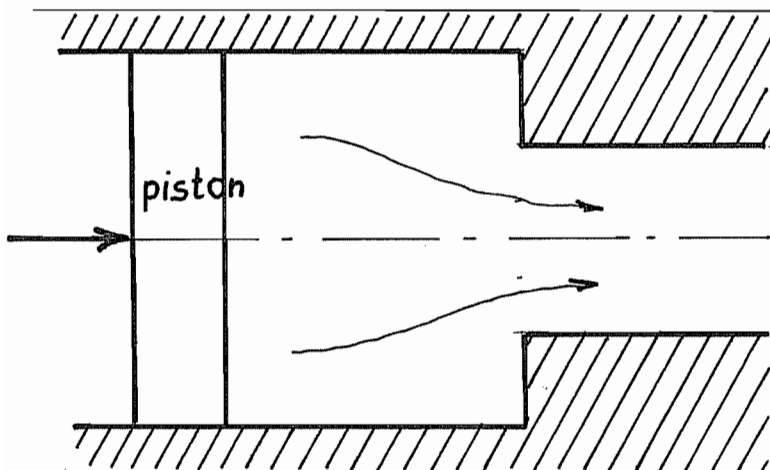


Figure 8 - Extrusion directe

- l'extrusion inverse (fig. 9), où le mouvement du métal est opposé à celui du piston.

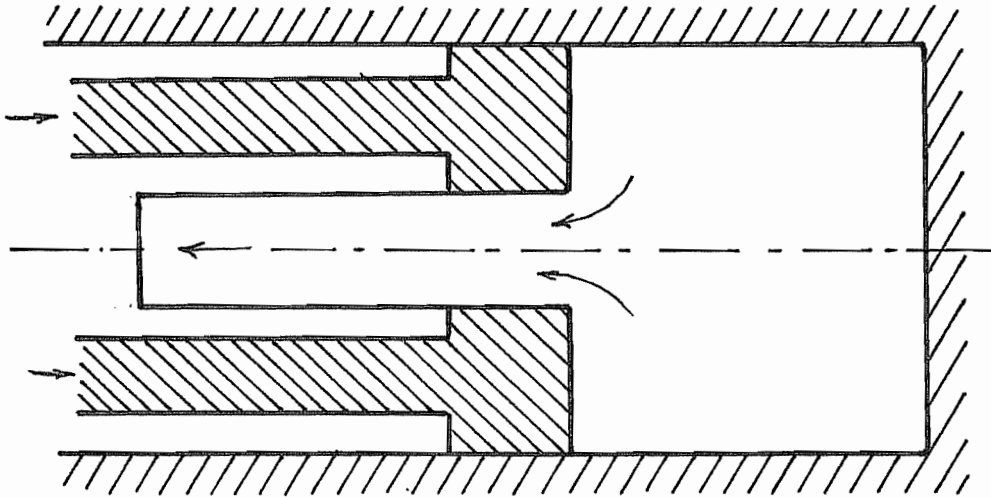


Figure 9 - Extrusion inverse

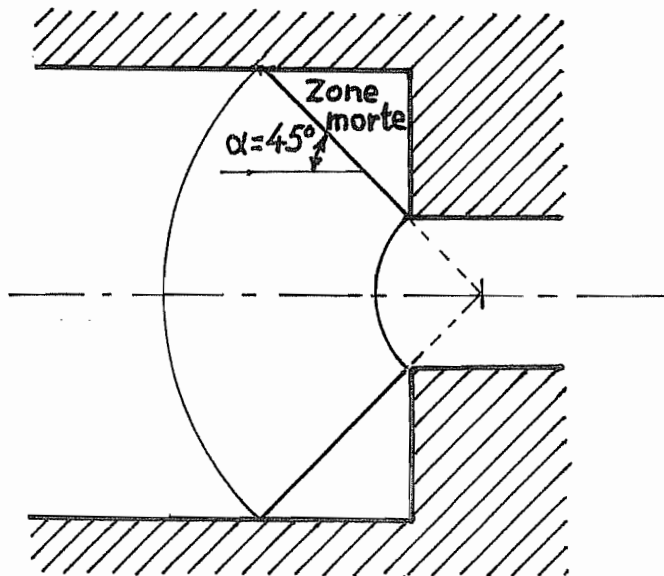


Fig. 10 - Analyse de la déformation plastique

2.2 - Analyse de la déformation plastique

On admet généralement qu'il existe, au voisinage de la filière, une zone morte délimitée par un cône de demi-angle égal à 45° (fig. 10). Le processus est alors analogue à celui d'un tréfilage avec frottement collant sur la paroi. La puissance se compose donc des termes suivants (voir section 1.8) :

- Puissance principale de déformation

$$P_d = Re Q \ln \epsilon \quad (\epsilon = S_1/S_2 = \text{coefficient d'étirage})$$

● *Puissance de frottement sur les parois*

$$P_f = \tau_0 Q \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \ln \varepsilon = \operatorname{Re} Q \frac{1}{2 \sqrt{3} \cdot 0,4142} \ln \varepsilon = 0,6969 \operatorname{Re} Q \ln \varepsilon$$

● *Puissance de déviation à l'entrée et à la sortie*

$$P_{\text{dév}} = 2 \tau_0 \beta Q$$

Il faut ici utiliser la formule exacte de β , car l'angle α est loin d'être petit :

$$\beta = \frac{1}{1 - \cos \alpha} \left[\ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - \sin \alpha \right] = 0,5950$$

Donc

$$P_{\text{dév}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0,5950 \operatorname{Re} Q = 0,6870 \operatorname{Re} Q .$$

Au total, il vient donc

$$P = \operatorname{Re} Q (0,6870 + 1,6969 \ln \varepsilon) .$$

La pression à appliquer à l'entrée de la zone de déformation est donc

$$\frac{p}{\operatorname{Re} Q} = \frac{P}{\operatorname{Re} Q} = 0,6870 + 1,697 \ln \varepsilon .$$

2.3 - *Frottements supplémentaires dans le cas de l'extrusion directe (fig.11)*

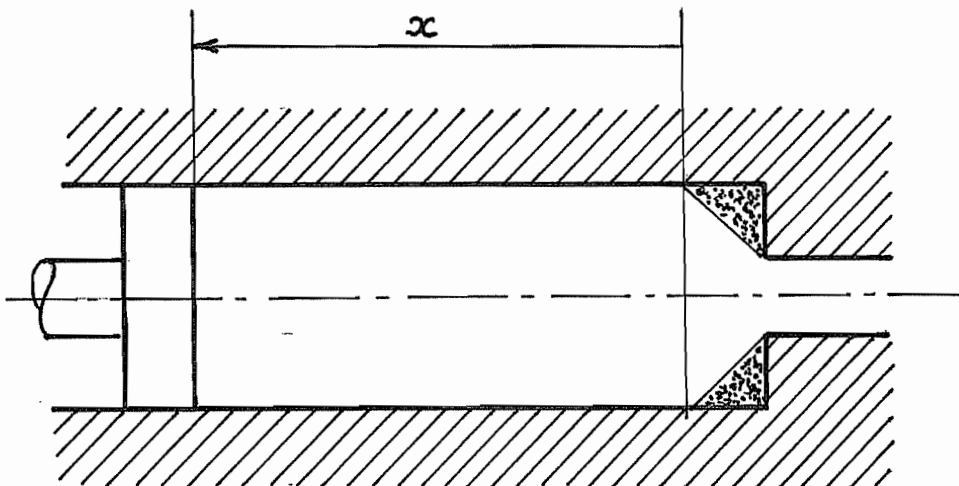


Figure 11 - *Frottements supplémentaires dans le cas de l'extrusion directe*

Un rapide calcul montre que la pression calculée ci-dessus est dans le domaine plastique dès que

$$\ln \varepsilon \geq \frac{1 - 0,6870}{1,697} = 0,1844$$

soit $\varepsilon \geq 1,203$, ce qui est une valeur très faible. Par conséquent, la partie non déformée du lopin ne peut être que dans un état de contrainte *hydrostatique* et ce sont les parois qui empêchent l'écrasement du lopin. Il y a donc nécessairement du frottement sur les parois. Si l'on adopte un frottement à la Tresca, on a alors (fig. 12)

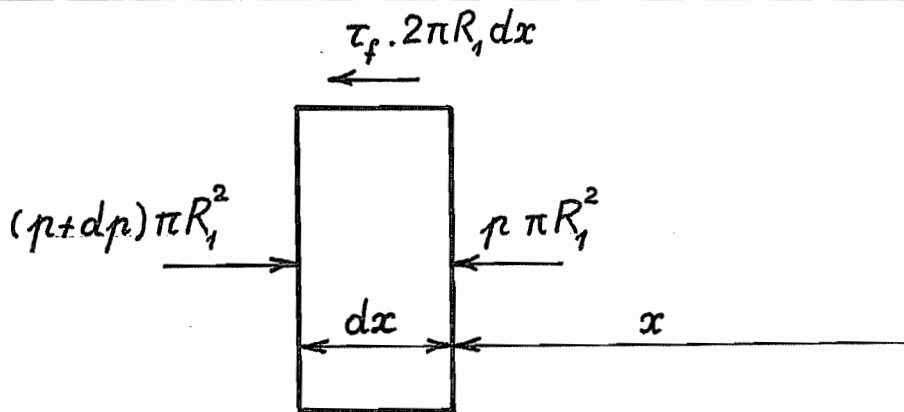


Figure 12 - équilibre du lopin

$$dp \cdot \pi R_1^2 = \tau_f \cdot 2\pi R_1 dx$$

soit

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2\tau_f}{R_1} dx.$$

Il en découle un supplément de pression au piston

$$\Delta p = \frac{2\tau_f}{R_1} x$$

pour la position x du piston calculée à partir de la fin des zones mortes. Dès lors, tant que le piston n'entame pas lesdites zones mortes, la pression motrice diminue au cours du travail.

2.4 - Frottements supplémentaires dans le cas de l'extrusion inverse

Dans le cas de l'extrusion inverse, fig. 13, le lopin est fixe dans la matrice, mais la zone morte frotte le long des parois. Sa longueur étant $(R_1 - R_2)$, il en résulte une puissance de frottement

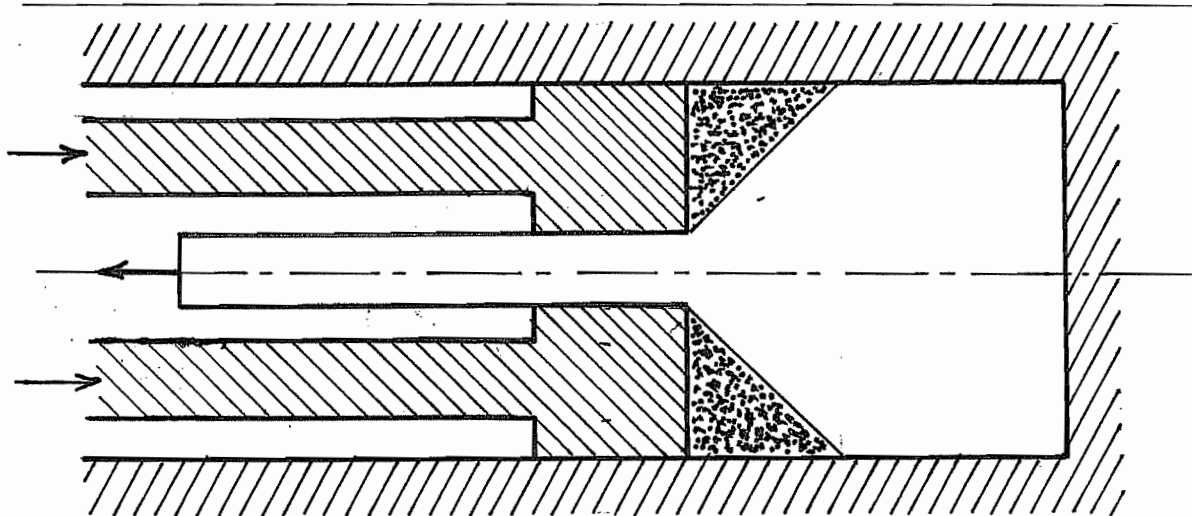


Figure 13 - Frottements supplémentaires en extrusion inverse

$$\Delta P = \tau_f (R_1 - R_2) \cdot 2\pi R_1 \cdot V$$

Le débit de métal étant

$$Q = \pi (R_1^2 - R_2^2) V ,$$

cela donne un supplément de pression motrice

$$\Delta p = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{\tau_f (R_1 - R_2) \cdot 2\pi R_1 \cdot V}{\pi (R_1^2 - R_2^2) \cdot V} = 2 \tau_f \frac{R_1}{R_1 + R_2} .$$

Ici, l'effort reste constant pendant le travail, tant que la zone morte n'est pas entamée.

2.5 - Phase non stationnaire

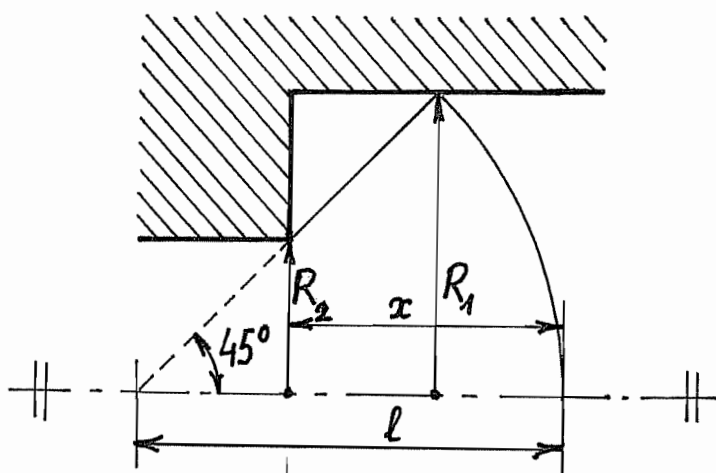


Figure 14 - Phase non stationnaire

Lorsque la distance entre le piston et la matrice devient trop faible, le mécanisme de déformation décrit ci-dessus cesse d'être possible. La valeur limite de la distance x entre la filière et le piston se détermine (fig. 14) par le fait que la sphère délimitant la zone de déformation touche le piston. On a alors

$$R_1 = l \sin(45^\circ) = l/\sqrt{2} ,$$

et

$$l = R_1 \sqrt{2}$$

ce qui signifie que la distance x du piston à la filière vaut

$$x = R_1 \sqrt{2} - R_2 .$$

A ce moment, l'écoulement stationnaire entre le piston et la filière cesse d'être possible. Nous n'étudierons pas la phase non stationnaire dans ce cas précis, car elle a relativement peu d'intérêt. Par contre, nous devons l'étudier pour l'extrusion des godets.

2.6 - Formule de Johnson

Sur base d'expériences sur des extrusions bien lubrifiées, Johnson [4] a obtenu la formule empirique suivante :

$$\frac{p_m}{Re} = 0,8 + 1,5 \ln \varepsilon$$

qui est assez voisine de la nôtre, comme le montre le tableau ci-dessous :

ε	valeurs de p_m/Re		
	Johnson	présente analyse	$\Delta\%$
2	1,840	1,863	+ 1,3
3	2,448	2,551	+ 4,2
5	3,214	3,418	+ 6,3
8,333	3,980	4,285	+ 7,7
16,67	5,020	5,462	+ 8,8

Nous obtenons donc des résultats légèrement supérieurs à ceux de Johnson, ce qui était prévisible, car notre analyse est du type cinématiquement admissible, avec un choix arbitraire de l'angle α .

2.7 - Solution plus fine

On peut raffiner la solution précédente en choisissant l'angle α qui rend la puissance minimale. rappelons que

$$\frac{P}{Re Q} = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right) \ln \varepsilon + \frac{2}{\sqrt{3}} \beta$$

avec

$$\beta = \frac{1}{1 - \cos \alpha} \left(\ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - \sin \alpha \right).$$

Pour des angles allant jusqu'à 60°, l'expression approchée

$$\beta \cong \frac{4}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$$

conduit à une erreur inférieure à 0,9 % , ainsi que le montre le tableau ci-dessous :

α (°)	0	10	20	30	40	50	60
β	0	0,1170	0,2381	0,3680	0,5134	0,6849	0,9019
β approché	0	0,1171	0,2388	0,3701	0,5174	0,6893	0,8981
Δ %	-	0,07	0,2	0,5	0,9	0,6	-0,4

En adoptant cette approximation et en notant, pour alléger les écritures,

$$t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

on a donc

$$\frac{P}{\operatorname{Re} Q} = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{t}\right) \ln \varepsilon + \frac{8}{3\sqrt{3}} t + \frac{4}{3\sqrt{3}} t^3.$$

Annulons la dérivée de cette expression par rapport à t. Il vient, après multiplication par $\sqrt{3}/4$,

$$-\frac{1}{8} \ln \varepsilon \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{2}{3} + t^2 = 0,$$

ce qui équivaut à

$$t^4 + \frac{2}{3} t^2 - \frac{1}{8} \ln \varepsilon = 0.$$

La solution de cette équation bicarrée est

$$t^2 = -\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{8} \ln \varepsilon},$$

ce qui permet d'établir le tableau suivant

ε	$\ln \varepsilon$	t	α (°)	$\frac{P}{\operatorname{Re} Q}$				
				prés. an.	Johnson	Δ %	ajusté	Δ %
2	0,6931	0,3337	33,72	1,781	1,840	3,3	1,890	6,1
3	1,099	0,4063	39,10	2,466	2,449	-0,7	2,469	0,1
5	1,609	0,4749	43,53	3,251	3,214	-1,1	3,196	-1,7
10	2,303	0,5461	47,52	4,264	4,255	-0,2	4,186	-1,8
20	2,996	0,6029	50,33	5,234	5,294	1,1	5,175	-1,1
50	3,912	0,6643	53,03	6,478	6,668	2,9	6,482	-0,7
100	4,605	0,7038	54,51	7,394	7,708	4,2	7,470	1,0

On constate que dans l'intervalle considéré par Johnson, soit

$$2 \leq \varepsilon \leq 16,67 \quad ,$$

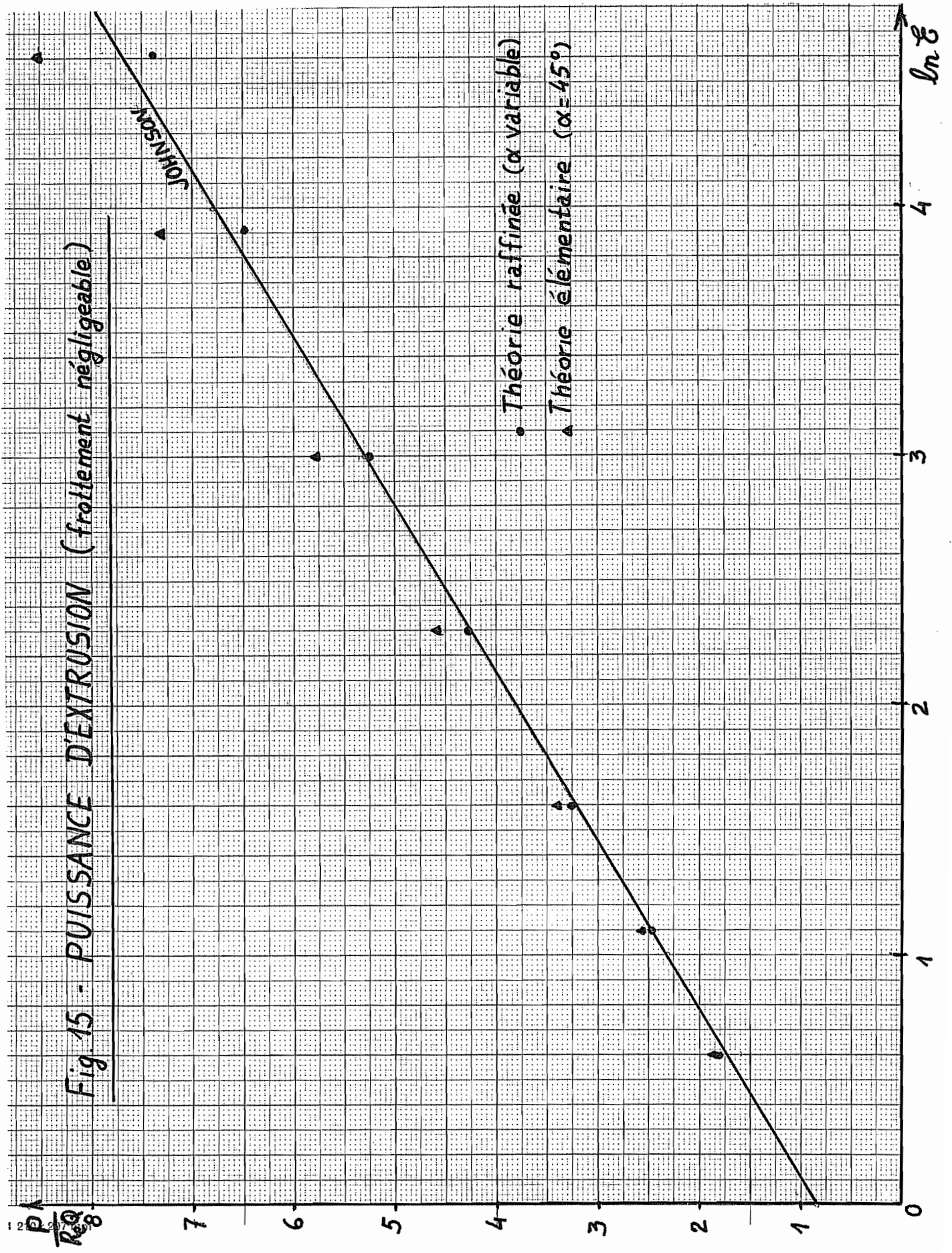
nos résultats théoriques sont en bonne concordance avec sa formule. Un ajustement de nos résultats dans l'intervalle

$$2 \leq \varepsilon \leq 100$$

donne la formule

$$\frac{P}{\text{Re } Q} \cong 0,9010 + 1,427 \ln \varepsilon$$

qui convient mieux pour les très grandes valeurs du coefficient d'étirage ε (voir figure 15).



3. Extrusion inverse d'un godet

3.1 - Introduction

Nous nous intéresserons à la fabrication de godets. Le processus est le suivant : un piston presse sur une pastille et l'oblige à sortir sous forme d'un cylindre (fig. 16). C'est ainsi que l'on fabrique des godets de piles. Pour fixer les idées, la cadence est de 80 à 150 coups par minute et l'extrusion proprement dite dure $6 \cdot 10^{-2}$ s [5]. Nous ferons de ce problème une analyse cinématiquement admissible (borne supérieure).

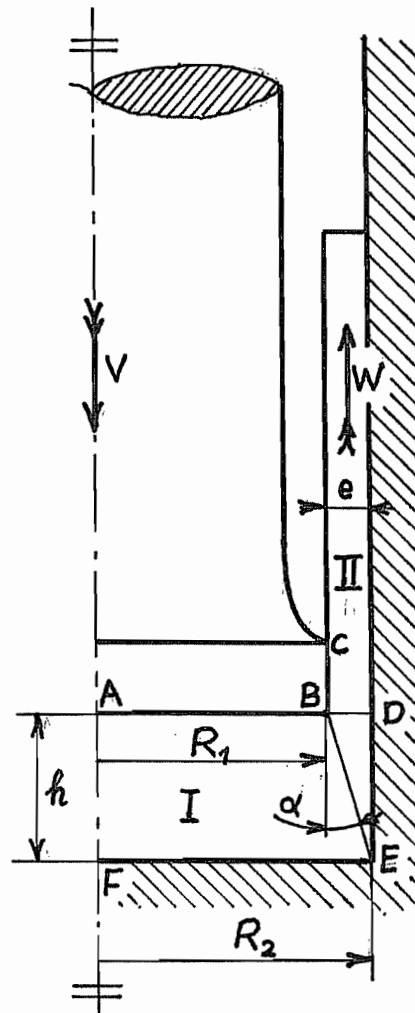


Figure 16 - Extrusion de godets

3.2 - Champ des vitesses

Nous admettrons que dans la zone de sortie II, la vitesse est uniformément égale à W . Dans la zone I (fig. 17), nous admettrons que

$$u_z = w(z)$$

$$u_r = u(r, z)$$

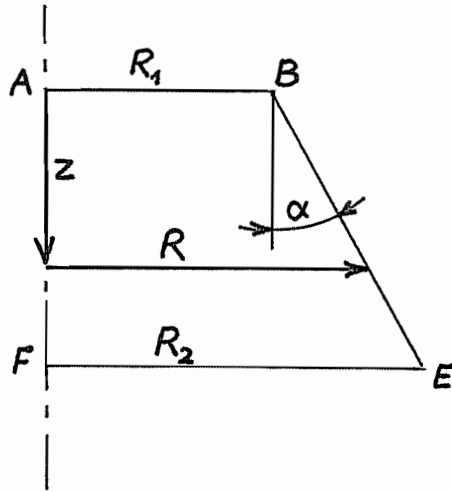


Figure 17 : Système d'axes

La condition d'incompressibilité s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{dw}{dz} = 0$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) = - r \frac{dw}{dz} .$$

Intégrons : il vient

$$ru = - \frac{r^2}{2} \frac{dw}{dz}$$

soit

$$u = - \frac{r}{2} \frac{dw}{dz} \tag{1}$$

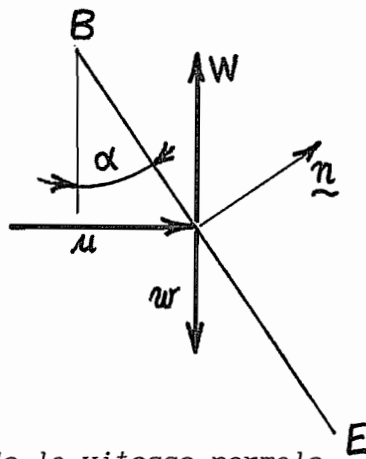


Fig. 18 - Continuité de la vitesse normale

Une deuxième condition s'obtient en exprimant la continuité de la vitesse normale à l'interface BE (fig. 18) :

$$w_n = u \cos \alpha - w \sin \alpha = W \sin \alpha ,$$

ce qui implique

$$u - w \operatorname{tg} \alpha = W \operatorname{tg} \alpha$$

avec (fig. 17)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dR}{dz} .$$

Tenant compte de l'expression (1) de u , écrite en $r = R$, on obtient

$$-\frac{R}{2} \frac{dw}{dz} - w \frac{dR}{dz} = W \frac{dR}{dz} \quad (2)$$

L'équation homogène associée à (2) s'écrit

$$\frac{dw}{w} = -2 \frac{dR}{R}$$

et a pour solution générale

$$w_h = C/R^2 . \quad (3)$$

Par ailleurs, il est clair que l'équation (2) admet la solution particulière

$$w_p = -W . \quad (4)$$

Il vient donc

$$w = w_h + w_p = \frac{C}{R^2} - W .$$

Comme $w = 0$ en $R = R_2$, on a $C = W R_2^2$, soit

$$w = W \left(\frac{R_2^2}{R^2} - 1 \right) \quad (5)$$

En particulier, pour $R = R_1$, on obtient

$$V = W \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1 \right)$$

ce qui donne bien

$$Q = \pi R_1^2 V = \pi (R_2^2 - R_1^2) W ,$$

expression de la conservation du flux.

De la structure (5) du déplacement w , on déduit

$$\frac{dw}{dz} = W \left(-2 \frac{R_2^2}{R^3} \frac{dR}{dz} \right) = -2 W \frac{R_2^2}{R^3} \operatorname{tg} \alpha$$

et, par (2),

$$u = -\frac{r}{2} \frac{dw}{dz} = W \frac{R_2^2 r}{R^3} \operatorname{tg} \alpha \quad (6)$$

3.3 - Puissance de déformation dans la zone I

Les vitesses de déformation sont

$$\vartheta_z = \frac{dw}{dz} = -2 W \frac{R_2^2}{R^3} \operatorname{tg} \alpha$$

$$\vartheta_r = \frac{\partial u}{\partial r} = W \frac{R_2^2}{R^3} \operatorname{tg} \alpha$$

$$\vartheta_\vartheta = \frac{u}{r} = W \frac{R_2^2}{R^3} \operatorname{tg} \alpha$$

$$\vartheta_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{3}{2} W \frac{R_2^2 r}{R^4} \operatorname{tg}^2 \alpha = -W \frac{R_2^2}{R^3} \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{3}{2} \frac{r}{R} \operatorname{tg} \alpha .$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|\vartheta\| &= [\vartheta_r^2 + \vartheta_\vartheta^2 + \vartheta_z^2 + 2 \vartheta_{rz}^2]^{1/2} \\ &= W \frac{R_2^2}{R^3} \operatorname{tg} \alpha \left[1 + 1 + 4 + \frac{9}{2} \frac{r^2}{R^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \right]^{1/2} \\ &= W \frac{R_2^2}{R^3} \operatorname{tg} \alpha \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{4} \left(\frac{r}{R} \operatorname{tg} \alpha \right)^2} \end{aligned}$$

Intégrons cette expression sur le cercle de rayon R . On a

$$2\pi \int_0^R \|\vartheta\| r dr = 2\pi W \frac{R_2^2}{R^3} \operatorname{tg} \alpha \sqrt{6} \cdot \int_0^R r \sqrt{1 + \frac{3}{4} \left(\frac{r}{R} \operatorname{tg} \alpha \right)^2} dr$$

avec

$$\mathfrak{J} = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{3}{4} \left(\frac{r}{R} \operatorname{tg} \alpha\right)^2} r \, dr .$$

Cette intégrale se calcule aisément en posant

$$\phi = 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{r}{R} \operatorname{tg} \alpha\right)^2 ,$$

ce qui donne

$$d\phi = \frac{3}{2} \frac{r}{R^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \, dr \quad , \quad r \, dr = \frac{2}{3} \frac{R^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} d\phi .$$

Par ailleurs, il est clair que ϕ varie entre 1 et $(1 + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha)$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \frac{2}{3} \frac{R^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \int_1^{1 + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha} \phi^{1/2} d\phi = \frac{2}{3} \frac{R^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \left[\frac{\phi^{3/2}}{3/2} \right]_1^{1 + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ &= \frac{4}{9} \frac{R^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \left[\left(1 + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha\right)^{3/2} - 1 \right] . \end{aligned}$$

A ce stade, notons que pour les petites valeurs de $\operatorname{tg} \alpha$, on a

$$\frac{\left(1 + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha\right)^{3/2} - 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cong \frac{1 + \frac{9}{8} \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{9}{8}$$

et

$$\mathfrak{J} \cong \frac{R^2}{2} .$$

Pour une valeur quelconque de l'angle α , nous écrivons donc

$$\mathfrak{J} = \frac{R^2}{2} f(\alpha) \tag{7}$$

avec

$$f(\alpha) = \frac{\left(1 + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha\right)^{3/2} - 1}{\frac{9}{8} \operatorname{tg}^2 \alpha} \tag{8}$$

La fonction $f(\alpha)$ vaut l'unité pour $\alpha = 0$ et varie relativement peu tant que l'angle α est modéré, ainsi que le montrent le tableau ci-dessous et la figure 19.

α (°)	$f(\alpha)$
0	1
5	1,001
10	1,006
20	1,024
30	1,060
40	1,122
45	1,169
50	1,232
60	1,440
70	1,907
80	3,452
89	33,10
90	∞

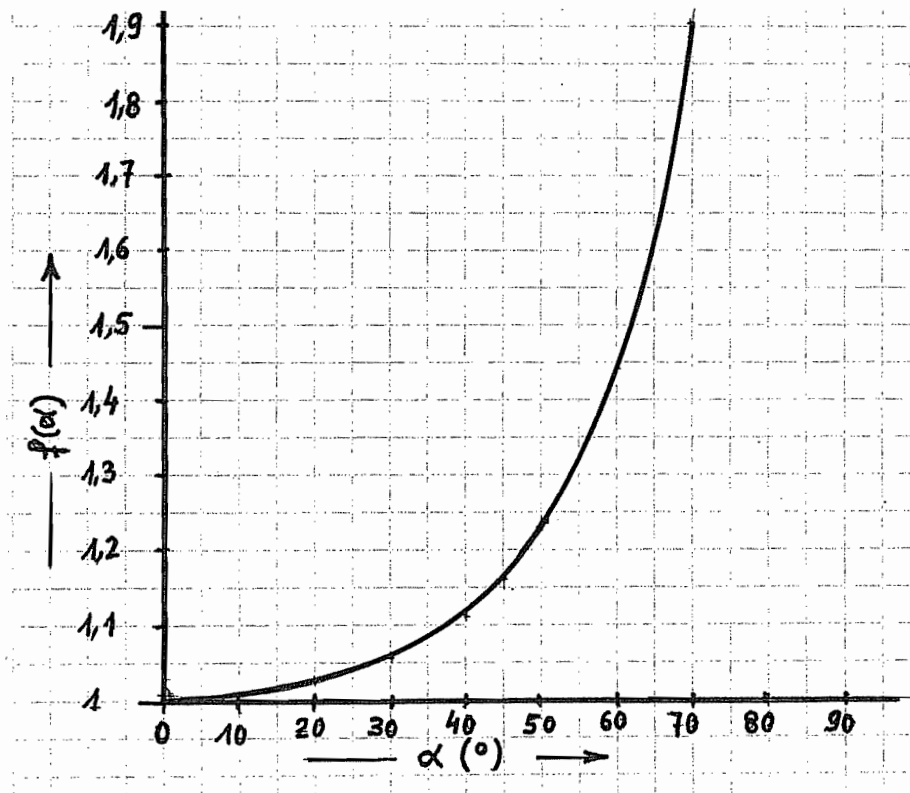


Figure 19 - Graphe de $f(\alpha)$

Il vient donc

$$2\pi \int_0^R \|\varphi\| r dr = \pi W \frac{R^3}{R} \operatorname{tg}\alpha \sqrt{6} f(\alpha) .$$

Il nous reste à intégrer selon z :

$$\int_I \|\varphi\| dV = \pi W R^3 \sqrt{6} f(\alpha) \int_0^h \frac{dz \operatorname{tg}\alpha}{R} ,$$

où l'on remarque que $(dz \operatorname{tg} \alpha)$ n'est autre que dR , si bien que

$$\int_0^h \frac{dz \operatorname{tg} \alpha}{R} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R} = \ln \frac{R_2}{R_1} .$$

Finalement,

$$P_I = \tau_0 \sqrt{2} \int_I \|\vartheta\| dV = 2\tau_0 \sqrt{3} f(\alpha) \pi R_2^2 W \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (9)$$

3.4 - Puissance de déformation à l'interface BE

La figure 20 servira de support au calcul du saut de vitesse tangentielle. Du côté de la zone I, on a

$$u_{t_I} = -w \cos \alpha - u \sin \alpha .$$

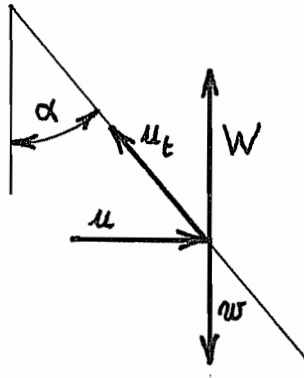


Figure 20 - Discontinuité de la vitesse tangentielle

Du côté II,

$$u_{t_{II}} = W \cos \alpha .$$

Soustrayant, on obtient

$$\Delta u_t = u_{t_{II}} - u_{t_I} = (W + w) \cos \alpha + u \sin \alpha .$$

Tenant compte des expressions (5) et (6) des vitesses, on trouve

$$\Delta u_t = W \cos \alpha + W \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1 \right) \cos \alpha + W \frac{R_2^2}{R_1^2} \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha$$

$$= W \frac{R_2^2}{R^2} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha \right) = W \frac{R_2^2}{R^2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} .$$

Il nous faut alors calculer

$$\tau_0 \int_{BE} |\Delta u_t| dS$$

avec (fig. 21)

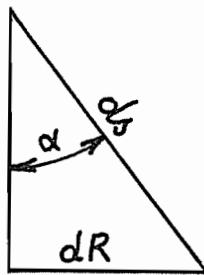


Figure 21 - Géométrie de l'interface

$$dS = 2\pi R ds \quad , \quad ds = \frac{dR}{\sin \alpha} .$$

Cela donne

$$P_{BE} = \tau_0 \int_{R_1}^{R_2} W \frac{R_2^2}{R^2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{2\pi R dR}{\sin \alpha} = \frac{2\pi \tau_0 W R_2^2}{\sin \alpha \cos \alpha} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (10)$$

3.5 - Frottement sur la face inférieure du piston

Nous admettrons qu'il s'agit d'un frottement à la Tresca, caractérisé par une contrainte tangentielle τ_{fp} . Par (6), le déplacement vaut

$$u = W \frac{R_2^2}{R_1^3} r \operatorname{tg} \alpha .$$

On a donc

$$P_{AB} = \tau_{fp} \int_0^{R_1} W \frac{R_2^2}{R_1^3} r \operatorname{tg} \alpha 2\pi r dr = \frac{2}{3} \pi \tau_{fp} W R_2^2 \operatorname{tg} \alpha \quad (11)$$

3.6 - Frottement sur le fond de la matrice

Nous distinguerons la contrainte de frottement sur la matrice et sur le piston, car on peut très bien imaginer qu'ils soient faits de matériaux différents. Nous noterons en conséquence τ_{fm} la contrainte de frottement sur la matrice. Comme la vitesse sur le fond est donnée par

$$u = W \frac{r}{R_2} \operatorname{tg} \alpha,$$

on a

$$P_{FE} = \tau_{fm} \int_0^{R_2} W \frac{r}{R_2} \operatorname{tg} \alpha 2\pi r \, dr = \frac{2}{3} \pi \tau_{fm} W R_2^2 \operatorname{tg} \alpha \quad (12)$$

3.7 - Frottement sur la partie cylindrique de la matrice

La vitesse étant W , on calcule aisément

$$P_{ED} = \tau_{fm} W 2\pi R_2 h \quad (13)$$

3.8 Puissance totale, effort au piston et pression moyenne sur le piston

La puissance totale est

$$P = P_I + P_{BE} + P_{AB} + P_{FE} + P_{ED}$$

$$= \tau_0 W \cdot 2\pi R_2^2 \left[(\sqrt{3} f(\alpha) + \frac{2}{\sin 2\alpha}) \ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{3} \frac{\tau_{fm} + \tau_{fp}}{\tau_0} \operatorname{tg} \alpha + \frac{\tau_{fm}}{\tau_0} \frac{h}{R_2} \right]$$

On en déduit la force au piston par la relation

$$F = \frac{P}{V},$$

avec

$$V = W \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2}$$

Tenant compte du fait que $Re = \tau_0 \sqrt{3}$, il vient

$$F = 2\pi Re \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[\left(f(\alpha) + \frac{2}{\sqrt{3} \sin 2\alpha} \right) \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{3} \frac{\tau_{fp} + \tau_{fm}}{Re} \operatorname{tg} \alpha + \frac{\tau_{fm}}{Re} \frac{h}{R_2} \right] \quad (14)$$

ce qui mène à la pression moyenne

$$\begin{aligned}
p_m &= \frac{F}{\pi R_1^2} \\
&= 2 \operatorname{Re} \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[(f(\alpha) + \frac{2}{\sqrt{3} \sin 2\alpha}) \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{3} \frac{\tau_{fp} + \tau_{fm}}{\operatorname{Re}} \operatorname{tg} \alpha + \frac{\tau_{fm}}{\operatorname{Re}} \frac{h}{R_2} \right] \quad (15)
\end{aligned}$$

3.9 - Simplification pour le cas des grands coefficients d'étirage

Lorsque le coefficient d'étirage

$$\varepsilon = \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

est grand, on peut écrire

$$R_2 = R_1 + e$$

avec

$$\varepsilon = \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{R_1^2}{2 R_1 e + e^2} \gg 1$$

ce qui implique $e/R_1 \ll 1$. Nous noterons alors R pour R_1 . Il est clair que dans ce cadre,

$$\varepsilon \cong \frac{R}{2e}.$$

On a alors

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{e}{R} \right) \cong \frac{e}{R}$$

et, en adoptant les notations du type coefficient de frottement à la Tresca

$$\lambda_p = \frac{\tau_{fp}}{\operatorname{Re}}, \quad \lambda_m = \frac{\tau_{fm}}{\operatorname{Re}},$$

on obtient à partir de (15)

$$\begin{aligned}
p_m &\cong 2 \operatorname{Re} \frac{R}{2e} \left[(f(\alpha) + \frac{2}{\sqrt{3} \sin 2\alpha}) \frac{e}{R} + \frac{1}{3} (\lambda_p + \lambda_m) \operatorname{tg} \alpha + \lambda_m \frac{h}{R} \right] \\
&\cong \operatorname{Re} \left[(f(\alpha) + \frac{2}{\sqrt{3} \sin 2\alpha}) + \frac{1}{3} (\lambda_p + \lambda_m) \frac{R}{e} \operatorname{tg} \alpha + \lambda_m \frac{h}{e} \right]
\end{aligned}$$

On notera (fig. 22) que

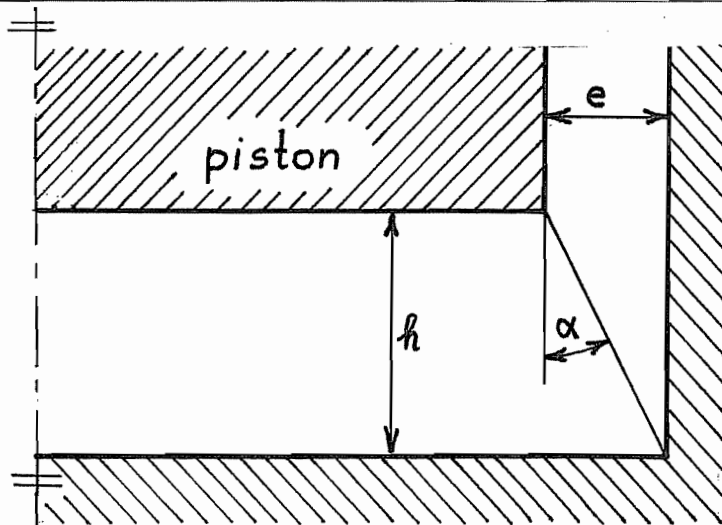


Figure 22 - Relation entre α et h

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e}{h} \quad , \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{h}{e} .$$

Il est raisonnable d'admettre que le processus s'arrête pour $h = e$, ce qui correspond à $\operatorname{tg} \alpha = 1$, c'est-à-dire à $\alpha = 45^\circ$. Or, pour $\alpha \leq 45^\circ$, la fonction $f(\alpha)$ est très correctement approchée par l'expression simple

$$f(\alpha) \cong 1 + 0,17 \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + 0,17 \left(\frac{e}{h}\right)^2 .$$

Par ailleurs,

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \frac{e}{h}}{1 + \frac{e^2}{h^2}} = \frac{2}{\frac{h}{e} + \frac{e}{h}}$$

Il vient donc

$$\frac{p_m}{Re} \cong 1 + 0,17 \left(\frac{e}{h}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{h}{e} + \frac{e}{h}\right) + \frac{1}{3} (\lambda_p + \lambda_m) \frac{R}{e} \frac{e}{h} + \lambda_m \frac{h}{e} \quad (16)$$

3.10 - Exemple - On désire réaliser des godets de 0,3 mm d'épaisseur, d'un rayon de 1 cm, la virole ayant une longueur de 5,5 cm. Le matériau a une limite élastique de 200 MPa. Déterminer

1) L'épaisseur de la pastille servant de brut

2) La courbe de l'effort en fonction de h/e , en supposant que $\lambda_m = \lambda_p = \lambda$, λ prenant les 5 valeurs suivantes : 0 ; 0,03 ; 0,1 ; 0,25 ; $1/\sqrt{3}$.

Solution

• Hauteur de la pastille

Le volume du brut est

$$V = \pi R^2 h_0 .$$

Le volume final est

$$V = V_{\text{fond}} + V_{\text{virole}} = \pi R^2 e + 2\pi R e l$$

L'égalisation de ces deux volumes donne

$$h_0 = e \left(1 + \frac{2l}{R} \right) = 0,2 \left(1 + 2 \frac{5,5}{1} \right) = 0,3.12 = \underline{3,6 \text{ mm}}$$

• *Calcul des efforts*

Le point de départ est

$$h_0/e = \frac{3,6}{0,3} = 12 .$$

Nous avancerons par pas égaux à l'épaisseur: On a

$$\frac{R}{e} = \frac{10}{0,3} = 33.$$

Il vient donc

$$\frac{p_m}{Re} = A + \lambda B$$

avec

$$A = 1 + 0,17 \left(\frac{e}{h} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{h}{e} + \frac{e}{h} \right)$$

$$B = 22 \frac{e}{h} + \frac{h}{e} .$$

On obtient le tableau suivant :

h/e	$\frac{p_m}{Re}$						
	A	B	$\lambda = 0$	$\lambda = 0,03$	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,25$	$\lambda = 1/\sqrt{3}$
12	7,977	13,83	7,977	8,392	9,361	11,44	15,96
11	7,405	13,00	7,405	7,795	8,705	10,65	14,91
10	6,833	12,20	6,833	7,199	8,053	9,883	13,88
9	6,262	11,44	6,262	6,606	7,407	9,124	12,87
8	5,694	10,75	5,694	6,016	6,769	8,381	11,90
7	5,127	10,14	5,127	5,432	6,142	7,663	10,98
6	4,565	9,667	4,565	4,855	5,532	6,982	10,15
5	4,009	9,400	4,009	4,291	4,949	6,359	9,436
4	3,464	9,500	3,464	3,749	4,414	5,839	8,949
3	2,943	10,33	2,943	3,253	3,977	5,527	8,909
2	2,486	13,00	2,486	2,876	3,786	5,736	9,991
1	2,325	23,00	2,325	3,015	4,625	8,075	15,60

Ces résultats sont représentés en figure 23. On notera que l'effet des frottements est très important.

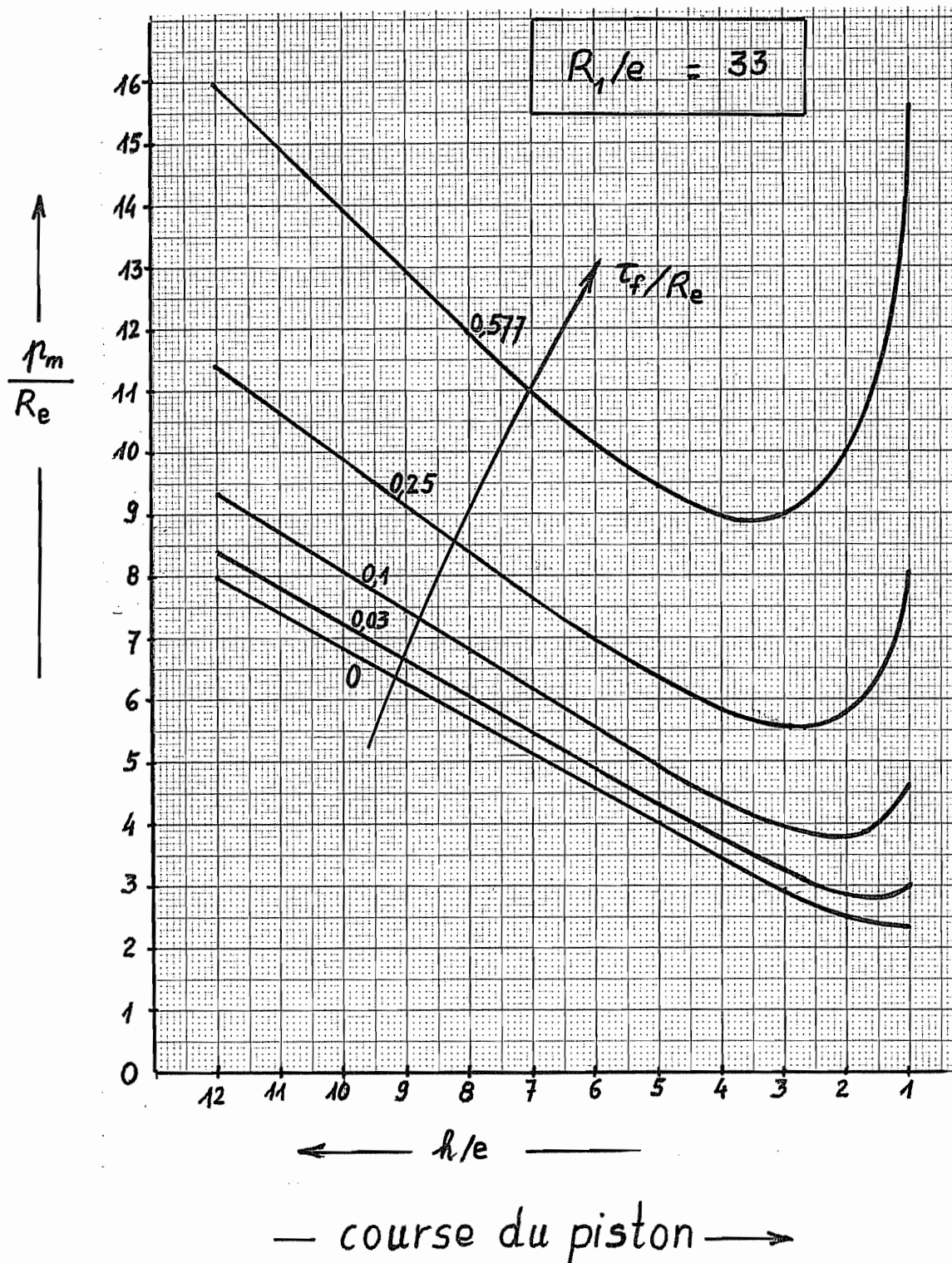


Figure 23 - Pression moyenne sur le piston, en fonction de la course

3.11 - Amélioration de la solution pour les grandes valeurs de h/e .

Les très grandes valeurs des efforts calculés ci-dessus pour h/e grand sont surprenantes dans le cadre d'une extrusion inverse. En fait, la cinématique évoquée ci-dessus n'est pas réaliste, car on conçoit bien que pour de faibles valeurs de l'angle α , le frottement interne empêchera la sortie de la zone II. On peut imaginer un autre mécanisme, où le métal ne s'écoule que sur une hauteur h^* , avec frottement collant sur une zone morte (fig. 24). La

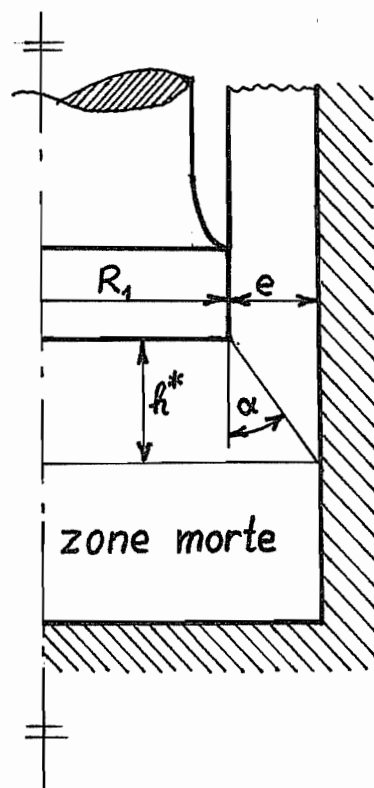


Figure 24 : Cinématique modifiée

puissance est alors celle qui correspond à une pastille d'épaisseur h^* avec, sur le fond, une contrainte de frottement τ_0 . On aura donc

$$\frac{p_m}{Re} = 1 + 0,17 \left(\frac{e}{h^*}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{h^*}{e} + \frac{e}{h^*}\right) + \frac{1}{3} \left(\lambda_p + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{R}{e} \frac{e}{h^*} + \lambda_m \frac{h^*}{e} \quad (17)$$

La valeur de h^* sera choisie de manière à minimiser la puissance. Nous négligerons, dans la recherche de l'optimum, le petit terme $0,17 (e/h^*)^2$ qui a peu d'influence. Il vient ainsi

$$\frac{\partial}{\partial \left(\frac{h^*}{e}\right)} \frac{p_m}{Re} \cong \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{e^2}{h^{*2}}\right) - \frac{1}{3} \left(\lambda_p + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{R}{e} \frac{e^2}{h^{*2}} + \lambda_m = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{h^*}{e} = \left(\frac{1 + \frac{R}{3e} (1 + \lambda \sqrt{3})}{1 + \lambda \sqrt{3}} \right)^{1/2} \quad (18)$$

Cette valeur étant déterminée, on calcule p_m/Re par (17). Cette formule est à utiliser chaque fois que $h^* < h$ et que la valeur correspondante de p_m/Re est inférieure à la valeur donnée par (16).

3.12 - Retour à l'exemple précédent

Dans le cas de l'exemple précédent, on a

$$\frac{R}{e} = 11$$

et par conséquent,

$$\frac{h^*}{e} = \left(\frac{12 + 11 \sqrt{3} \lambda}{1 + \sqrt{3} \lambda} \right)^{1/2}$$

Cette valeur étant connue, on calcule

$$\frac{p_m}{Re} = 1 + 0,17 \left(\frac{e}{h^*} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{h^*}{e} + 12 \frac{e}{h^*} \right) + \lambda \left(11 \frac{e}{h^*} + \frac{h^*}{e} \right),$$

ce qui donne le tableau suivant :

λ	0	0,03	0,10	0,25	0,5774
$\frac{h^*}{e}$	3,479	3,366	3,467	3,451	3,427
$\frac{p_m}{Re}$	5,032	5,235	5,699	6,701	8,883

La solution ainsi corrigée est représentée en figure 25.

3.13 - Comparaison avec la littérature

Les courbes obtenues sont en bon accord qualitatif avec le comportement indiqué par Johnson et Mellor [4], qui est représenté en figure 26. Rappelons que ces auteurs donnent, pour le cas d'une extrusion bien lubrifiée, la formule

$$\frac{p_m}{Re} = 0,8 + 1,5 \ln \frac{S_1}{S_2}$$

pour la phase stationnaire. Dans notre cas, cette formule devient

$$\frac{p_m}{Re} = 0,8 + 1,5 \ln \frac{R}{2e} = 0,8 + 1,5 \ln \frac{33}{2} = 5,005 .$$

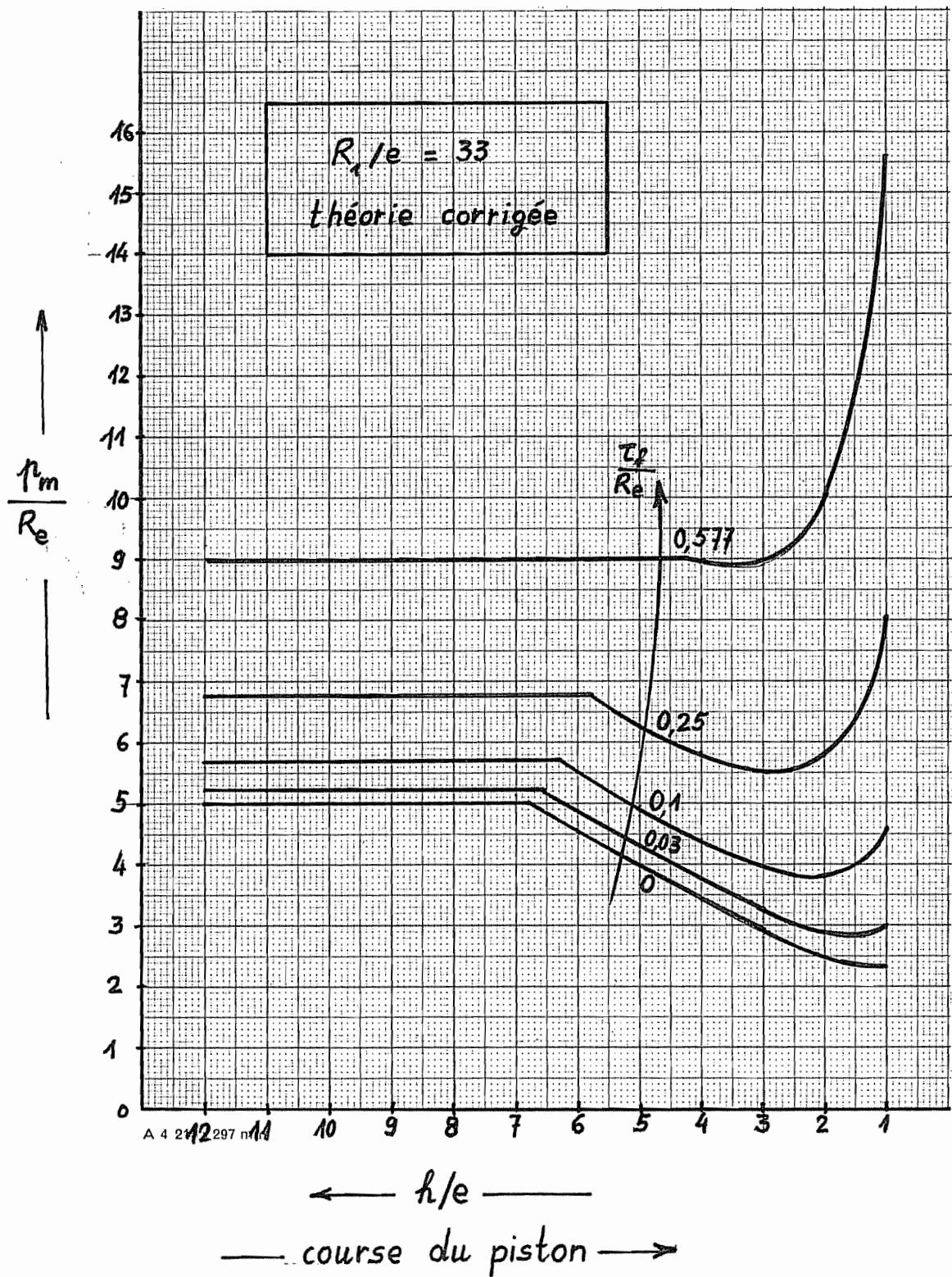


Figure 25 - Résultats de la théorie corrigée

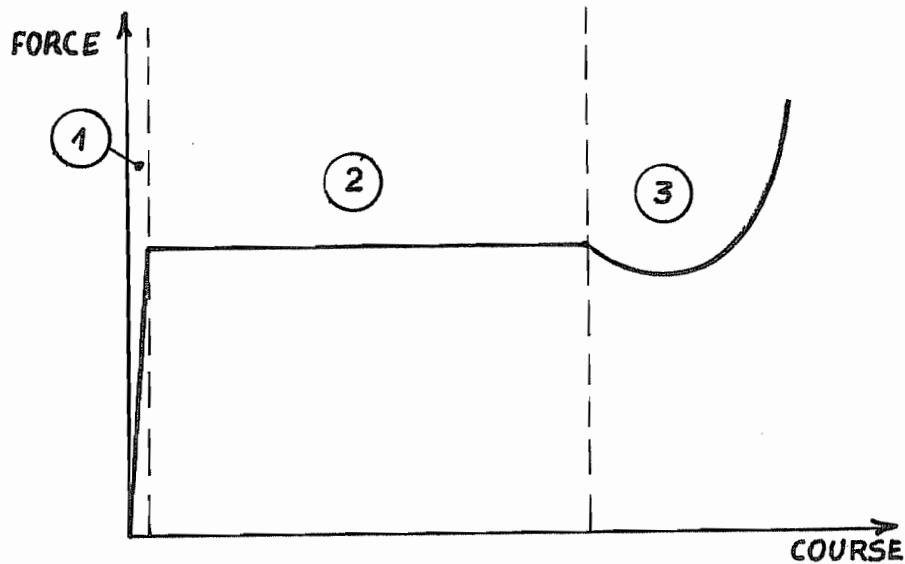


Figure 26 - 1 = Mise en marche élastique
 2 = Phase stationnaire
 3 = Phase instationnaire

Nous trouvons quant à nous 5,014 pour $\lambda = 0$ et 5,215 pour $\lambda = 0,03$. Cet accord est très satisfaisant.

On notera par ailleurs l'importance considérable du frottement dans ce problème. Ainsi que le dit Magnée [5], "la maîtrise du coefficient de friction dans l'opération d'extrusion inverse à chaud constitue la clé permettant de contrôler la cinétique du phénomène d'usure proprement dit". Il faut en effet se rappeler que l'usure du piston dépend essentiellement de la pression qu'il subit. Plutôt que de chercher des matériaux de piston très spéciaux et très coûteux, il convient de développer des procédés de lubrification efficaces.

3.14 - Quelques considérations pratiques [6].

L'extrusion est un procédé relativement récent. Pour les tubes en plomb, cela date du 19^e siècle. mais ce n'est qu'à la fin du 19^e que l'on parvint à pratiquer l'extrusion du laiton. Pour diminuer sa limite élastique, il fallait le chauffer. Mais il en résultait un nouveau problème, car les matrices et les pistons devaient de ce fait supporter à la fois de fortes pressions et des températures élevées.

L'extrusion de l'acier ne fut applicable commercialement que vers 1930, mais elle progressa rapidement, notamment par l'introduction par Séjournet [8] de la lubrification au verre fondu en 1955. Cela constituait un progrès considérable par rapport à la lubrification au graphite : pressions plus faibles, meilleure durée de vie de l'outillage, possibilité d'utiliser des lopins plus longs. L'extrusion de la plupart des aciers se fait aujourd'hui à environ 1200°C, avec le verre comme lubrifiant.

Pour les alliages durs, on parvient à réaliser des coefficients d'étirage $\varepsilon = S_1/S_2$ de l'ordre de 20. Pour des matériaux plus tendres, comme l'aluminium, on arrive à obtenir $E = 60$ à 100 .

4. Bibliographie

- [1] SACHS - "Plasticity problems in metals"
Trans. Faraday Soc. **24**, pp. 84 - 92, 1928
- [2] KOERBER et EICHINGER - "Die Grundlagen der bildsamen Verformung"
Mitt. K.W. Inst. Eisenforschung, **22**, p. 57 sqq, 1940
- [3] E. SIEBEL - "Der derzeitige Stand der Erkenntnisse über die mechanischen Vorgänge beim Drahtziehen"
Stahl und Eisen **66-67** N° 11-22, pp. 171-180, 1987
- [4] W. JOHNSON, P.B. MELLOR - *Plasticity for mechanical engineers*
Van Nostrand, London, 1962
- [5] A. MAGNEE - "Maîtrise de la dégradation d'outils utilisés pour la mise en forme par déformation en extrusion inverse"
European Journal M, vol. 35, n°4, pp. 155-165
- [6] G.W. ROWE, *Principles of industrial metalworking processes*
Edward Arnold, 1977
- [7] C.T. YANG - "On the mechanics of wire drawing"
Trans. A.S.M.E., Series B, J. Eng. Ind., **83**, n°4, pp. 523-530, 1961
- [8] J. SEJOURNET, J. DELCROIX - "Glass lubrication in extrusion of steel"
Lub. Engng, **11**, pp. 389-396, 1955.

CHAPITRE 7 - MÉTHODE CINÉMATIQUE DES GLISSEMENTS CONCENTRÉS

1. Introduction

Il s'agit d'une méthode grapho-numérique applicable aux problèmes plans sans frottement ou avec un frottement à la Tresca. L'idée fondamentale est de diviser le corps en triangles et de supposer que dans chaque triangle, la vitesse est *constante*. On admet qu'à l'interface de deux triangles, il peut se produire un glissement tangentiel. Ceci mène à construire un *hodographe* comme en cinématique classique. La puissance se calcule alors par

$$P' = \tau_0 \sum_{\text{interfaces}} \ell \cdot \Delta u$$

où ℓ est la longueur de l'interface, et Δu , la discontinuité de vitesse tangentielle sur cette interface.

Cette méthode peut être considérée comme une forme très élémentaire de la méthode des éléments finis. Conformément à la philosophie habituelle de cette méthode, les connexions sont choisies de manière à assurer *tout juste* l'existence de la fonctionnelle à calculer. En élasticité, les déformations doivent être de carré intégrable, ce qui signifie que les déplacements doivent avoir des dérivées de carré intégrable (espace de Sobolev H^1 ou $W^{1,2}$), et ceci nécessite la continuité aux interfaces. Dans le cas présent, il suffit que les dérivées des vitesses soient intégrables (espace de Sobolev $W^{1,1}$) et cette continuité n'est pas nécessaire. Comme nous l'avons vu au chapitre 5, les vitesses normales doivent être continues pour assurer l'incompressibilité, mais il n'en est pas de même des vitesses tangentielles. Le fait de permettre une telle discontinuité conduit à des modèles de la plus grande souplesse et, nous le verrons dans ce qui suit, on obtient ainsi une convergence en puissance avec des modèles très simples.

2. Extrusion directe plane

Nous considérerons le cas d'une extrusion directe plane, avec un coefficient d'élongation de 2.

2.1 - Premier modèle

On admet l'existence d'une zone morte à 45°. La figure 1 illustre le découpage et l'hodographe. On obtient

Interface	ℓ/b	$\Delta u/u_1$	produit
1.2	2	1	2
2.4	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
2.3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
	TOTAL		6

Il vient donc

$$P' = 6 \tau_0 b u_1$$

et la pression au piston vaut

$$p_m = \frac{P'}{6 b u_1} = 3 \tau_0$$

soit

$$\frac{p_m}{2\tau_0} = \underline{1,5}$$

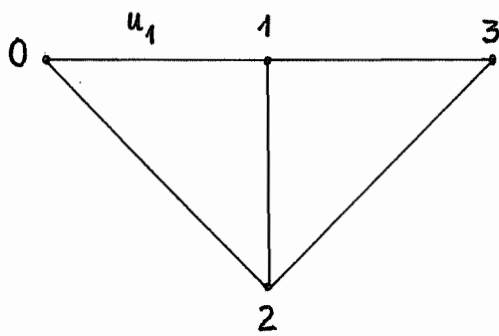
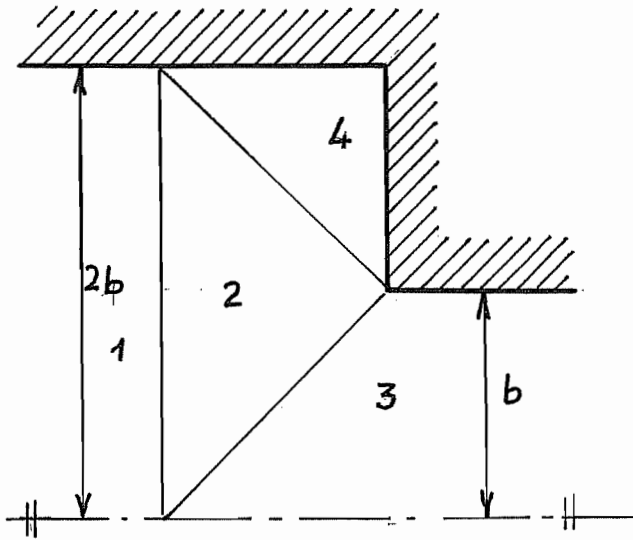


Figure 1 - Extrusion plane - premier modèle

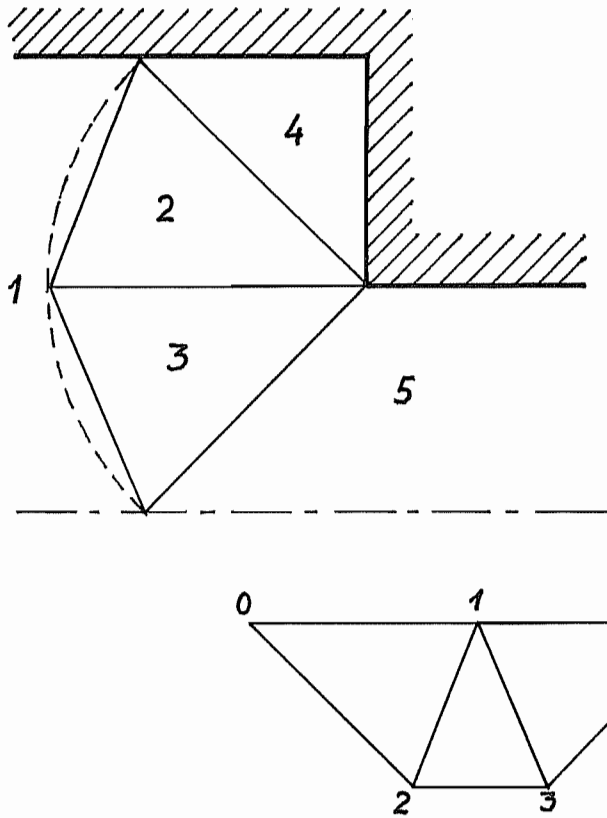


Figure 2 - Extrusion plane - Deuxième modèle

2.2 - Deuxième modèle

Un deuxième modèle est représenté en figure 2. On a ici

Interface	l/b	$\Delta u/u_1$	Produit
1.2	1,080	0,760	0,8208
1.3	1,080	0,760	0,8208
2.3	$\sqrt{2}$	0,580	0,8202
3.5	$\sqrt{2}$	1	1,414
2.4	$\sqrt{2}$	1	1,414
TOTAL			5,290

On obtient donc

$$P = 5,290 \tau_0 b u_1$$

et

$$\frac{p_m}{2\tau_0} = \underline{1,322}$$

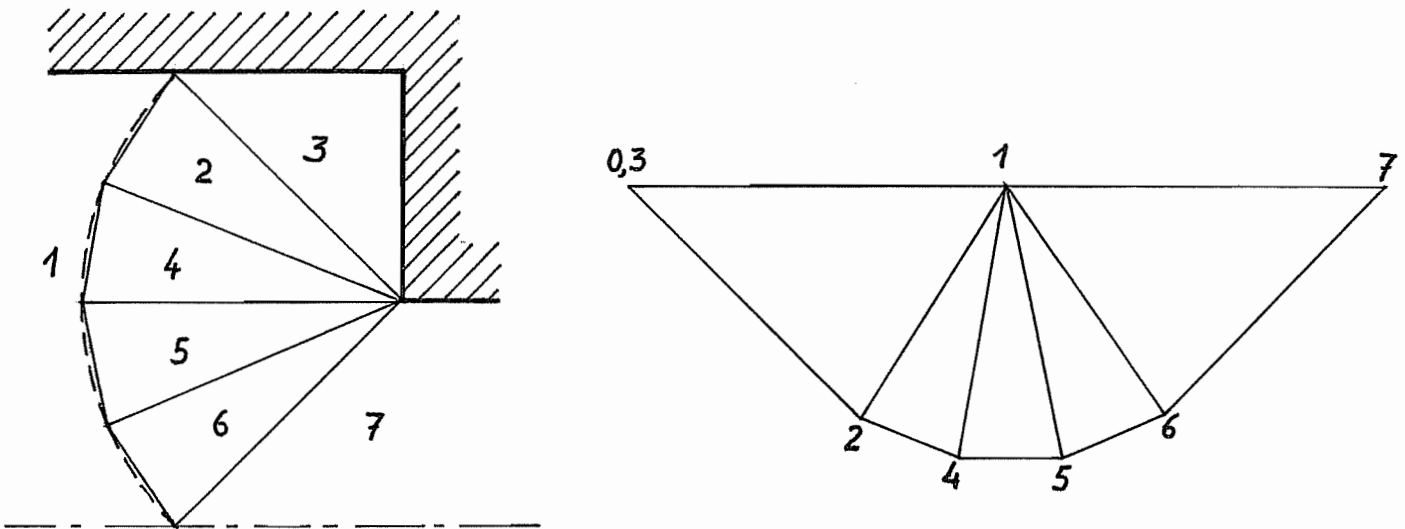


Figure 3 - Extrusion plane - Troisième modèle

2.3 - Troisième modèle

Un troisième modèle est représenté en figure 3. Le tableau s'établit comme suit :

Interface	l/b	$\Delta u/u_1$	Produit
1.2	0,56	0,72	0,403
1.4	0,52	0,72	0,374
1.5	0,52	0,72	0,374
1.6	0,56	0,72	0,403
2.3	$\sqrt{2}$	0,88	1,245
2.4	$\sqrt{2}$	0,26	0,368
4.5	$\sqrt{2}$	0,29	0,410
5.6	$\sqrt{2}$	0,27	0,382
6.7	$\sqrt{2}$	0,86	1,216
		TOTAL	5,175

La puissance vaut donc

$$P' = 5,175 \tau_0 b u_1 ,$$

ce qui correspond à

$$\frac{p_m}{2\tau_0} = \underline{1,294}$$

La solution exacte de ce problème est connue [1]. C'est

$$\frac{p_m}{2\tau_0} = \underline{1,29}$$

La figure 4 illustre la convergence des modèles successifs.

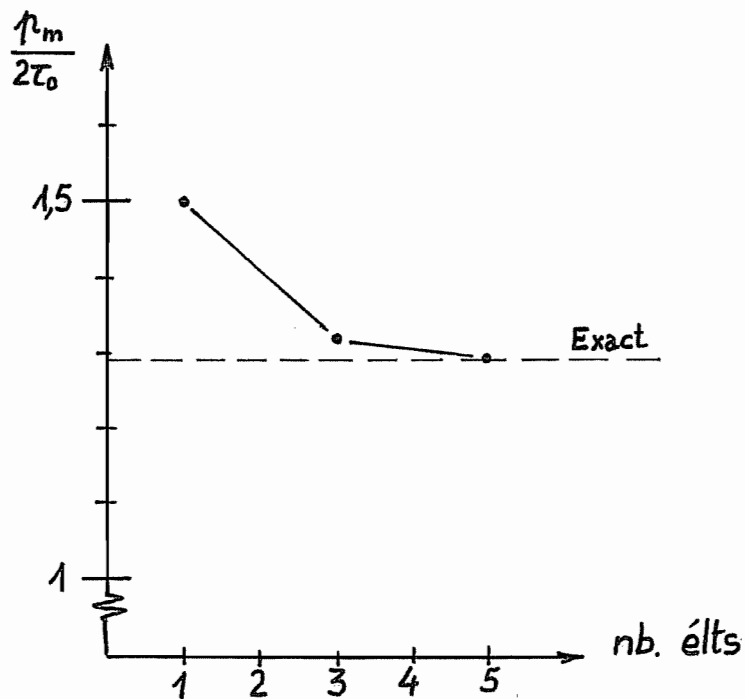


Figure 4 - Extrusion plane : convergence des approches successives

3. Forgeage plan

Nous considérerons le forgeage plan d'une pièce dont la largeur b vaut trois fois sa hauteur. Le modèle et l'hodographe sont représentés en figure 5. En raison de la symétrie, il suffit de considérer la moitié de la pièce.

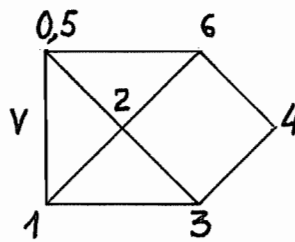
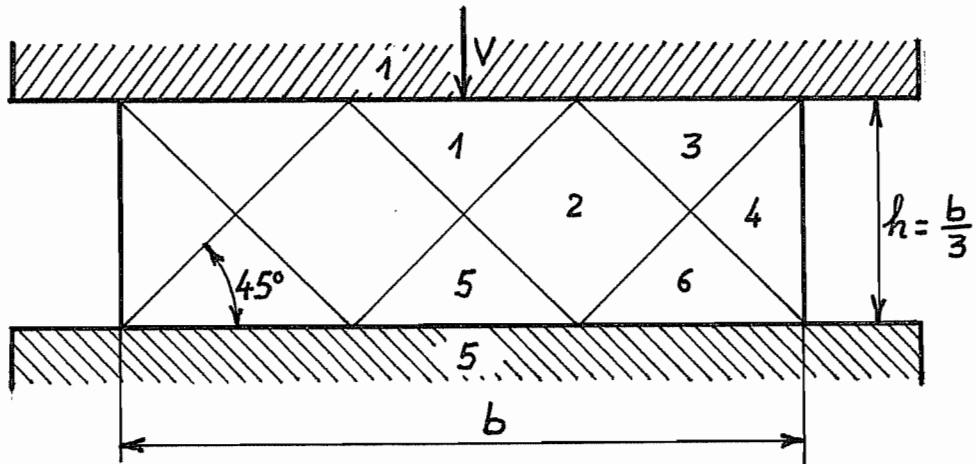


Figure 5 - Forgeage plan

Le tableau s'établit comme suit :

Interface	l/h	$\Delta u/V$	Produit
1.2	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$
5.2	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$
1.3	1	1	1
2.3	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$
2.6	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$
5.6	1	1	1
3.4	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$
4.6	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$
		TOTAL	5

Ainsi,

$$P' = \tau_0 \cdot 2.5hV = 10 \tau_0 h V$$

et

$$\frac{P_m}{2\tau_0} = \frac{P'}{2\tau_0 Vb} = 5 \frac{h}{b} = 5 \cdot \frac{1}{3} = \underline{1,667}$$

Rappelons que l'approximation classique est

$$\frac{p_m}{2\tau_0} = 1 + \frac{b}{4h} = 1,75 .$$

On a donc obtenu un résultat *meilleur*.

4. Rétreint

Voici un modèle très élémentaire de rétreint (fig. 6)

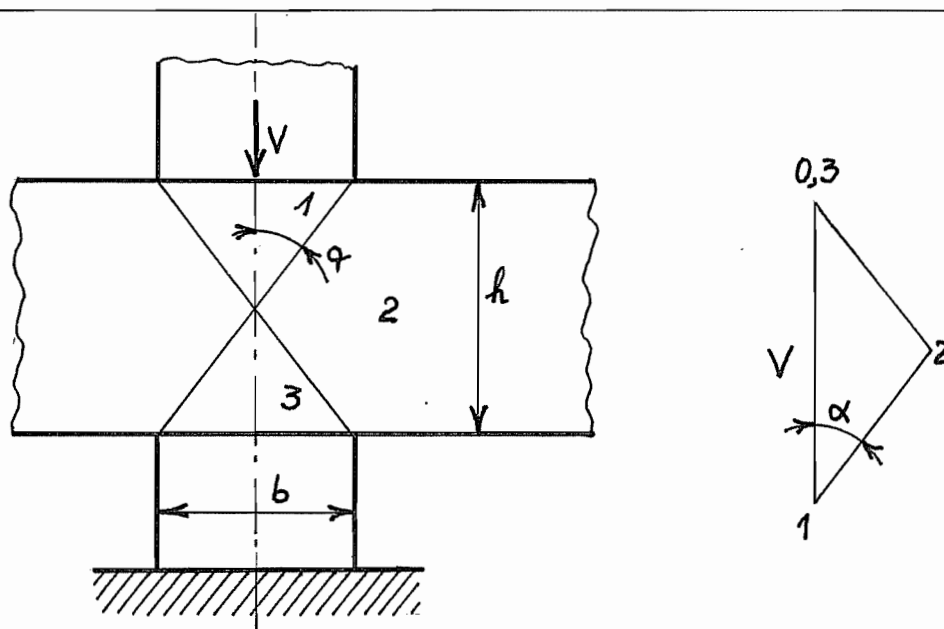


Figure 6 - Un modèle élémentaire du rétreint

Ce modèle conduit au tableau suivant :

Interface	l/h	v/V	Produit
1.2	$\frac{1}{2 \cos \alpha}$	$\frac{1}{2 \cos \alpha}$	$\frac{1}{4 \cos^2 \alpha}$
2.3	$\frac{1}{2 \cos \alpha}$	$\frac{1}{2 \cos \alpha}$	$\frac{1}{4 \cos^2 \alpha}$
		SOMME	$\frac{1}{2 \cos^2 \alpha}$

Le résultat est

$$P' = \tau_0 \cdot 2 \cdot \frac{hV}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\tau_0 h V}{\cos^2 \alpha}$$

Comme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{h} ,$$

on a

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{b^2}{h^2}$$

et

$$P' = \tau_0 V h \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right) = \tau_0 V b \left(\frac{h}{b} + \frac{b}{h}\right) .$$

On a donc

$$\frac{P_m}{2\tau_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{b} + \frac{b}{h}\right) .$$

5. Indentation

L'indentation est l'enfoncement d'un couteau dans une pièce supposée semi-infinie (fig. 7)

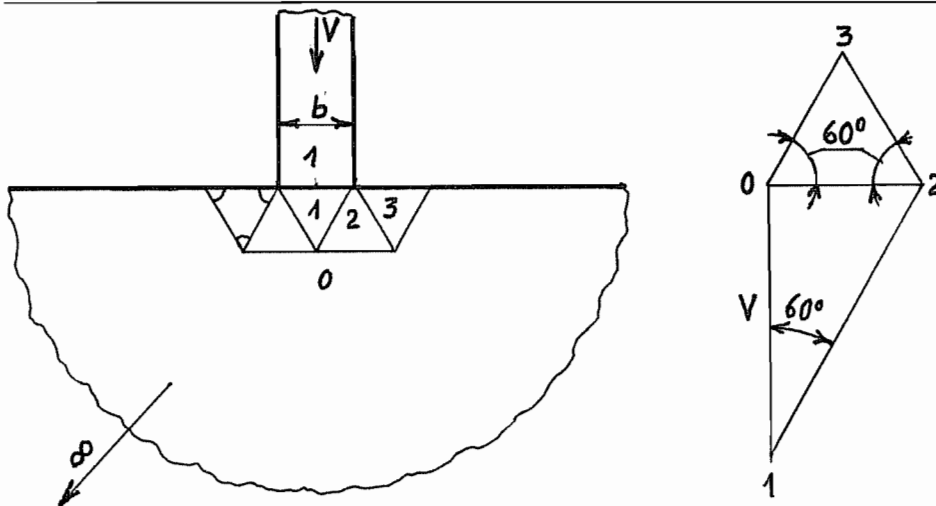


Figure 7 - Indentation

On obtient le tableau suivant :

Interface	v/V	l/b	Produit
1.2	$2/\sqrt{3}$	1	$2/\sqrt{3}$
0.2	$1/\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$
2.3	$1/\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$
0.3	$1/\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$
SOMME			$5/\sqrt{3}$

On en déduit

$$P' = \tau_0 \cdot 2 \cdot \frac{5Vb}{\sqrt{3}} = 2 \tau_0 bV \cdot \frac{5}{\sqrt{3}}$$

soit

$$\frac{p_m}{2\tau_0} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \underline{2,887} .$$

La vraie valeur est [1] 2,57 . Le présent modèle est donc en erreur de 12% .

6. Rétreint ou indentation ?

Il est bien connu qu'il se produira un rétreint ou une indentation selon que la pression est répartie sur une largeur suffisante ou au contraire très petite. En nous fondant sur les deux modèles ci-dessus, nous pouvons affirmer que c'est le mécanisme de plus faible puissance qui prévaudra. Dans le cas du

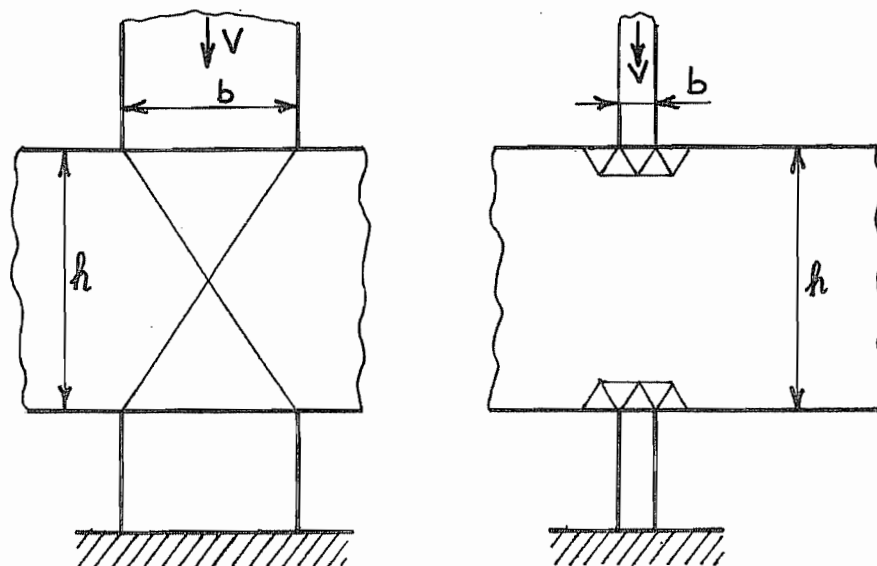


Fig. 8 - Rétreint et indentation

rétreint, nous avons trouvé

$$P'_{\text{rétreint}} = \tau_0 V b \left(\frac{h}{b} + \frac{b}{h} \right) .$$

Dans le cas de l'indentation, il faut prendre garde au fait (fig. 8) que la vitesse relative outil/pièce est répartie symétriquement des deux côtés, c'est-à-dire que dans la configuration de la figure 8,

$$\begin{aligned} P'_{\text{indentation}} &= \frac{10\tau_0 b}{\sqrt{3}} (V - V_{\text{pièce}}) + \frac{10\tau_0 b}{\sqrt{3}} (V_{\text{pièce}} - 0) = \frac{10\tau_0 b}{\sqrt{3}} V \\ &= 5,774 \tau_0 bV. \end{aligned}$$

Le rétreint prévaudra sur l'indentation si

$$\tau_0 bV \left(\frac{h}{b} + \frac{b}{h} \right) < 5,774 \tau_0 bV$$

soit si

$$\frac{h}{b} + \frac{b}{h} < 5,774$$

Cette condition équivaut à

$$\left(\frac{h}{b} \right)^2 - 5,774 \frac{h}{b} + 1 < 0 .$$

Les racines de ce trinôme sont

$$\frac{h}{b} = 2,887 \pm \sqrt{(2,887)^2 - 1} = \begin{cases} 5,595 \\ 0,1790 \end{cases}$$

Partant de $h/b = \infty$, cas où il y a certainement indentation, on se trouve entre les racines dès que

$$\frac{h}{b} < 5,595 .$$

La plus petite racine n'a pas de sens physique, car pour $h/b = 0,1790$, le modèle de rétreint proposé est trop simpliste. En résumé, pour effectuer un rétreint, il faut une largeur b telle que

$$\frac{h}{b} < 5,6 \quad \text{soit} \quad \frac{b}{h} > 0,18 .$$

Cette conclusion cadre assez bien avec les prescriptions technologiques habituelles spécifiant que b doit être suffisant.

7. Bibliographie

- [1] G.W. ROWE - *Elements of metalworking theory*
Edward Arnold, London, 1979

CHAPITRE 8 - PRISE EN COMPTE DE L'ÉCROUISSAGE

1. Introduction

Jusqu'à présent, nous avons toujours supposé que le matériau était parfaitement plastique, c'est-à-dire que la contrainte plastique équivalente ne variait pas au cours de la déformation (fig. 1)

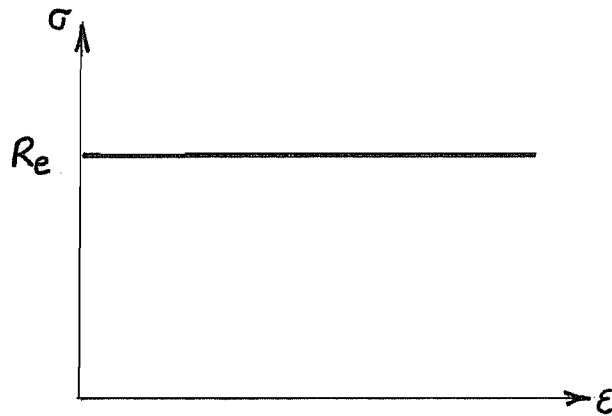


Figure 1 - Matériau rigide-parfaitement plastique

Or, très souvent, on rencontre des courbes de contrainte plastique croissant avec la déformation. On dit qu'il y a écouissage (fig. 2)

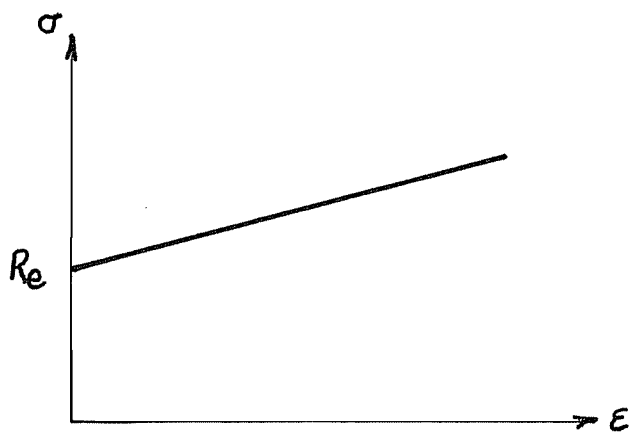


Figure 2 - Matériau rigide-plastique avec écouissage

Dans un matériau écouissable, la limite élastique varie avec la déformation. Supposons que l'on relâche la contrainte en un point B (fig.3). Le matériau effectue un retour élastique suivant une parallèle à la loi de Hooke, jusqu'au point C de contrainte nulle. De ce point, une nouvelle mise en charge sera élastique jusqu'au point B qui constitue la nouvelle limite élastique,

supérieure à Re .

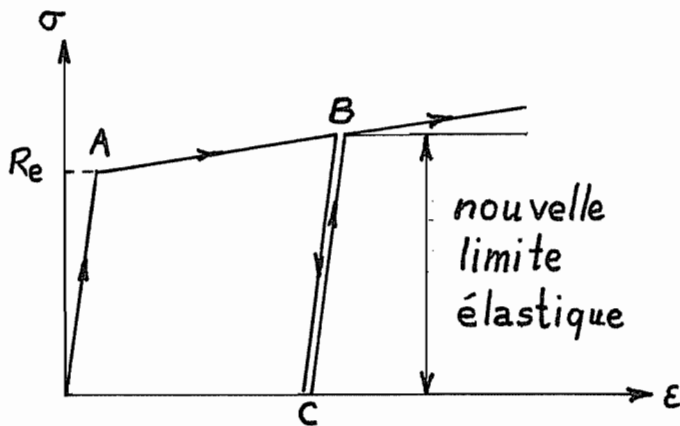


Figure 3 - Décharge et remise en charge subséquente

Cela signifie que le matériau a une certaine *mémoire* de la déformation précédente. Cette mémoire peut être représentée macroscopiquement par la variation d'un certain nombre de *paramètres internes* q_k (non directement mesurables) que nous appellerons en l'occurrence *paramètres d'écroutissage*.

Dans un matériau parfaitement plastique, la puissance de déformation est purement dissipative et

$$d(\vartheta) = \sigma_{ij} \vartheta_{ij} \quad (1)$$

Au contraire, dans un matériau écroutissable, une partie de la puissance de déformation sert à modifier les paramètres internes et on a

$$\sigma_{ij} \vartheta_{ij} = d(\vartheta) + \sum_k X_k \dot{q}_k \quad (2)$$

où \dot{q}_k est le taux de variation du paramètre q_k et X_k , la force généralisée associée.

2. Modèle à écroutissage isotrope [1]

Nous nous limiterons au cas de l'écroutissage dit *isotrope*, caractérisé par un *seul* paramètre interne q . On a donc par (2)

$$d = d(\vartheta, q) = \sigma_{ij} \vartheta_{ij} - X \dot{q} \quad .$$

On admet que cette fonction de dissipation est positive et homogène de degré 1. Dans ces conditions, on peut montrer [2] qu'il existe une fonction de charge $\phi(\sigma, -X)$ telle que

$$\begin{cases} \phi(\sigma, -X) < 0 & \Leftrightarrow \text{rigide} \\ \phi(\sigma, -X) = 0 & \Leftrightarrow \text{plastique} \\ \phi(\sigma, -X) > 0 & \text{impossible} \end{cases} \quad (3)$$

et que la déformation plastique vérifie les lois de normalité

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{ij} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \end{cases} \quad (4)$$

$$\dot{q} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial (-X)} = -\lambda \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad (5)$$

En somme, tout se passe un peu comme s'il existait une composante supplémentaire de vitesse de déformation \dot{q} et une contrainte supplémentaire $(-X)$.

En outre, on *postule* l'existence d'une relation fonctionnelle

$$X = k(q) \quad (6)$$

que l'on peut déduire d'un essai à préciser. Lors d'une déformation plastique, la fonction de charge doit rester constamment égale à zéro, ce qui s'écrit

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \phi}{\partial (-X)} (-\dot{X}) = 0$$

soit, en tenant compte de la relation (6),

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \phi}{\partial X} k' \dot{q} = 0 .$$

Tenant compte de l'expression (5) de \dot{q} , on obtient

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \lambda k' \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 = 0 \quad (7)$$

C'est ce que l'on appelle la *condition de consistance de Prager*. On en déduit

$$\lambda = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{k' \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2} \quad (8)$$

Ainsi, contrairement au cas de la plasticité parfaite, les vitesses de déformation sont univoquement définies par l'accroissement de contrainte et non plus de grandeur arbitraire.

3. Ecrouissage isotrope avec modèle de von Mises

Rappelons que la contrainte équivalente de von Mises s'écrit

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ij} \right) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{mm} \delta_{ij} \right)} \quad (9)$$

Dans le cas de la plasticité parfaite, elle est constamment égale à Re . Pour un matériau écrouissable, nous poserons

$$\phi(\sigma, -X) = \sigma_c - Re - X \quad (10)$$

La variable X s'identifie donc avec la différence entre la limite élastique actuelle et la limite élastique initiale Re . Les équations (4) et (5) s'écrivent alors

$$\vartheta_{ij} = \frac{3}{2} \lambda \frac{\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \delta_{ij}}{\sigma_c} \quad (11)$$

et

$$\dot{q} = \lambda \quad (12)$$

En outre, on déduit de (8)

$$\lambda = \frac{\frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \delta_{ij}}{\sigma_c} \dot{\sigma}_{ij}}{k'} \quad (13)$$

Mais on peut trouver une autre expression de λ en partant de la relation (11) :

$$\vartheta_{ij} \vartheta_{ij} = \frac{9}{4} \lambda^2 \frac{(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \delta_{ij})(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij})}{\sigma_c^2} = \frac{3}{2} \lambda^2 \quad (14)$$

ce qui implique par (12)

$$\dot{q} = \lambda = \sqrt{\frac{2}{3} \vartheta_{ij} \vartheta_{ij}} \quad (15)$$

4. Identification de la relation $X = k(q)$

La relation entre X et q peut être identifiée à l'aide d'un simple essai de traction. Dans ce cas, on a

$$\sigma_1 = \sigma \quad , \quad \sigma_2 = 0 \quad , \quad \sigma_3 = 0$$

et

$$\sigma_{kk}/3 = \sigma/3 \quad ,$$

ce qui entraîne

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{2}{3} \sigma \quad , \quad \sigma_2 - \frac{\sigma_{kk}}{3} = -\frac{\sigma}{3} \quad , \quad \sigma_3 - \frac{\sigma_{kk}}{3} = -\frac{\sigma}{3}$$

et

$$\sigma_c = \sigma \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right)} = \sigma \quad (16)$$

Si la barre a une longueur initiale l_0 et une longueur actuelle $l = l_0(1 + \varepsilon)$ et si elle est fixée en $x = 0$, le déplacement en $x = l$ est donc $l_0 \varepsilon$. En une abscisse initiale x_0 quelconque, le déplacement est $x_0 \varepsilon$ et la vitesse est donc

$$u = x_0 \dot{\varepsilon} .$$

On a donc

$$\vartheta_x = \frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dx_0}}{\frac{dx}{dx_0}} = \frac{\dot{\varepsilon}}{1 + \varepsilon} = \frac{d}{dt} \ln(1 + \varepsilon) \quad (17)$$

L'incompressibilité implique

$$\vartheta_x + \vartheta_y + \vartheta_z = 0$$

et par symétrie, on doit avoir $\vartheta_y = \vartheta_z$. Par conséquent,

$$\vartheta_y = -\vartheta_x/2 \quad , \quad \vartheta_z = -\vartheta_x/2$$

et

$$\dot{q} = |\vartheta_x| \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)} = |\vartheta_x| = \left| \frac{d}{dx} \ln(1 + \varepsilon) \right| .$$

Comme la déformation est *croissante*, on peut faire abstraction des barres de valeur absolue et q n'est autre que la déformation logarithmique :

$$q = \ln(1 + \varepsilon) \quad (18)$$

Insistons sur le fait que la contrainte intervenant dans (16) est la contrainte *vraie*, c'est-à-dire

$$\sigma = \frac{F}{\Omega} \quad (19)$$

où Ω est la section *réelle* et non la contrainte *nominale*

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\Omega_0} \quad (20)$$

où Ω_0 est la section *initiale*. Or, la machine de traction mesure précisément la contrainte *nominale*, ce qui nécessite une correction. L'incompressibilité exige

$$\Omega_0 l_0 = \Omega l = \Omega l_0 (1 + \varepsilon)$$

soit

$$\Omega = \frac{\Omega_0}{1 + \varepsilon} \quad (21)$$

On a donc

$$\sigma = \bar{\sigma} (1 + \varepsilon) = \bar{\sigma} e^q \quad (22)$$

Pour une valeur donnée du paramètre d'érouissage q , X est la différence entre σ et R_e .

5. Relations empiriques [3]

On utilise fréquemment des ajustements de la fonction $X = k(q)$ ou, ce qui revient au même, de la fonction $\sigma_c(q) = R_e + X(q)$.

5.1 - Formule de Ludwik

la formule de Ludwik, proposée en 1909 [4], consiste à poser

$$\sigma_c = R_e + Kq^n \quad (23)$$

avec $0 \leq n \leq 1$. Ecrite sous forme logarithmique,

$$\ln(\sigma_c - R_e) = \ln K + n \ln q \quad (24)$$

elle se prête très bien à un ajustement linéaire (fig. 4)

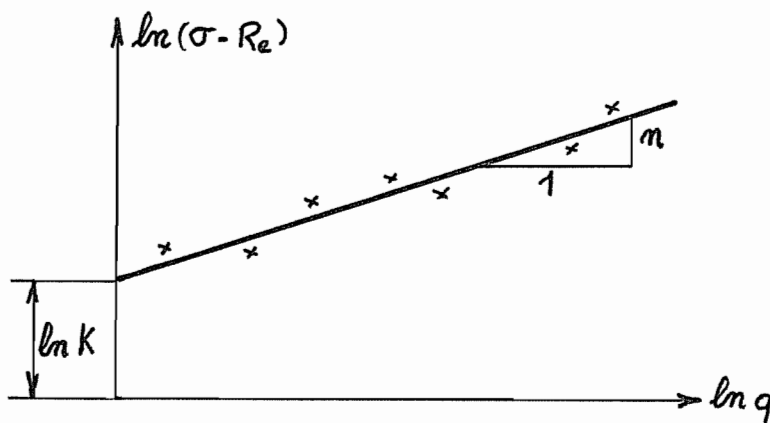


Figure 4 - Ajustement d'une loi de Ludwik

5.2 - Formule de Swift

Cette formule, proposée en 1946 [5], s'écrit

$$\sigma_c = K (B + q)^n \quad (25)$$

avec $0 \leq n \leq 1$. Elle est surtout connue sous sa forme restreinte

$$\sigma_c = K q^n \quad (26)$$

qui ne peut visiblement convenir que pour les grandes déformations, puisqu'en $q = 0$, elle donne $\sigma_c = 0$ au lieu de $\sigma_c = R_e$. la formule restreinte de Swift équivaut à

$$\ln \sigma_c = \ln K + n \ln q \quad (27)$$

et se prête bien à un ajustement par les moindres carrés. Par contre, la formule complète équivaut à

$$\ln \sigma_c = \ln K + n \ln(q + B) \quad (28)$$

et nécessite un ajustement non linéaire.

Selon Johnson et Mellor [3], la formule de Swift restreinte représente convenablement le comportement d'un matériau recuit. Pour le même matériau, à l'état écroui, la constante B exprime l'écrouissage initial et les constantes k et n sont les mêmes qu'à l'état recuit.

6. Instabilité plastique en traction

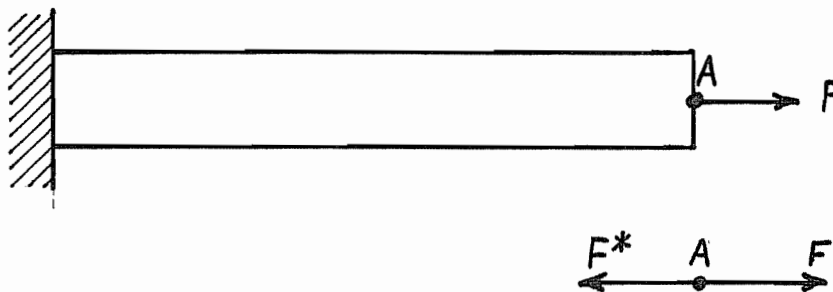


Figure 5 - Action F et réaction F* dans une barre en traction

Soit une barre soumise à une force F (fig. 5). Le point d'application de cette force subit de la part de la barre une réaction F* et l'équilibre est atteint pour $F = F^*$. La *stabilité* de cet équilibre dépend de la loi donnant F* en fonction du déplacement.

Soit d'abord une loi $F^*(u)$ croissante (fig. 6). Alors, si A est le point d'équilibre, considérons une petite perturbation AB du déplacement. La force appliquée n'a pas changé, mais la réaction F* est donnée par le point C situé par la verticale passant par B. On a donc $F^* > F$ et le déplacement tend à

décroître pour revenir en A. Pour une perturbation négative du déplacement, la réaction est figurée par le point E et on a à présent $F^* < F$, si bien que le déplacement tend à croître pour revenir en A. On constate donc que le système tend toujours à reprendre sa position d'équilibre : il est *stable*.

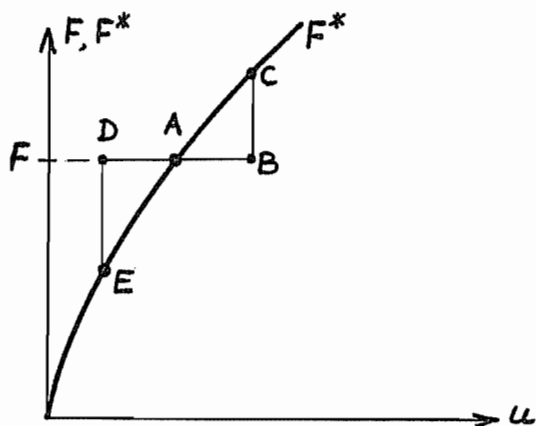


Figure 6 - Stabilité

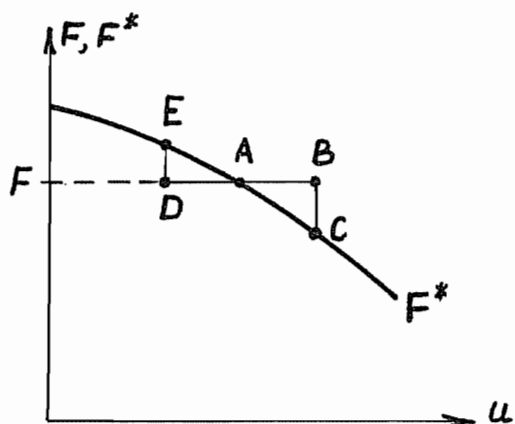


Figure 7 - Instabilité

Soit à présent une loi $F^*(u)$ décroissante (fig. 7). Alors, si A est la position d'équilibre, une perturbation positive AB du déplacement provoque une diminution de la réaction F^* et on a donc $F > F^*$. Le système tend à prendre des déplacements plus grands encore et par conséquent, à s'éloigner de la position d'équilibre. De même, une perturbation négative du déplacement provoque l'augmentation de F^* et comme $F^* > F$, le déplacement tend encore à décroître. on s'éloigne à nouveau de plus en plus de la position d'équilibre. le système est donc *instable*.

De cette analyse, on déduit que l'équilibre est stable si $dF^*/du > 0$ et instable si $dF^*/du < 0$.

Or, la force de rappel de la barre est donnée par

$$F^* = \Omega_0 \bar{\sigma} \quad (29)$$

où $\bar{\sigma}$ est la contrainte *nominale*. Le déplacement est quant à lui lié à la variable q . Il est bien connu que la courbe de la contrainte nominale possède un maximum pour une déformation donnée q_m (fig. 8).

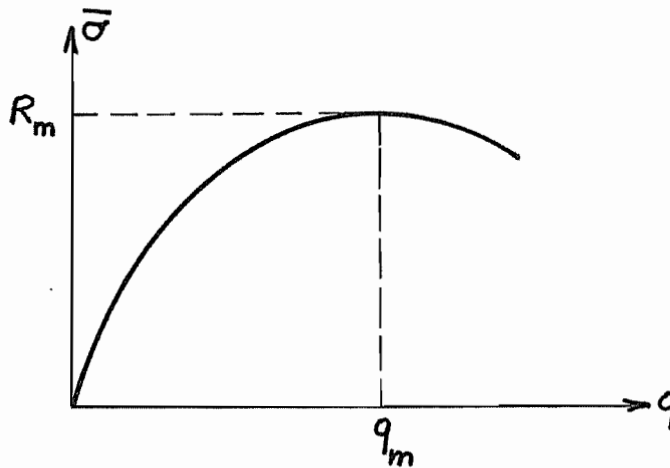


Figure 8 - Courbe de traction

A gauche de ce maximum, l'équilibre est stable, mais à droite, il est instable. La rupture est donc, dans un essai de traction, une instabilité plastique. Une fois que la contrainte maximale R_m est atteinte, il devient impossible, sur une machine de traction à force imposée, d'arrêter l'essai car même si on réduit la force, on se trouve dans la zone d'équilibre instable. On notera que la contrainte vraie ne cesse de croître (du moins dans la zone de striction : dans le reste de la barre, on assiste à un retour élastique). mais comme

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 + \varepsilon} = \sigma e^{-q} \quad , \quad (30)$$

il y a une compétition entre la croissance de la contrainte et la diminution de la section. Au départ, la contrainte vraie croît plus vite que la section ne décroît, et la contrainte nominale croît. Le maximum de la contrainte nominale correspond à la compensation exacte de ces deux tendances. Pour des déformations plus grandes, c'est l'effet de diminution de la section qui prévaut.

Il résulte de tout ceci que si l'on connaît la loi liant la contrainte vraie à la déformation logarithmique q , il est possible de prévoir la contrainte de rupture R_m et la déformation correspondante q_m en cherchant le maximum de $\bar{\sigma}$. La dérivation de la relation (30) par rapport à q donne

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dq} = e^{-q} \frac{d\sigma}{dq} - e^{-q} \sigma \quad .$$

Le maximum de $\bar{\sigma}$ correspond donc à la condition

$$\frac{d\sigma}{dq} = \sigma \quad (31)$$

ce qui signifie géométriquement que la sous-tangente à la courbe $\sigma(q)$ atteint au point critique la valeur 1 (fig. 9).

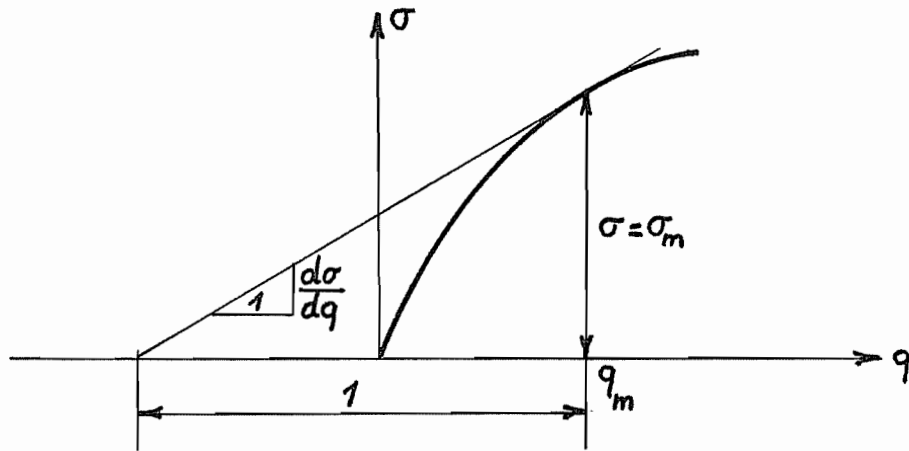


Figure 9 - Détermination graphique de la valeur critique q_m

Pour un matériau suivant la loi de Swift, la condition (31) s'écrit

$$K n (B + q)^{n-1} = K (B + q)^n$$

soit tout simplement

$$B + q_m = n \tag{32}$$

la contrainte de rupture est donc

$$\sigma_m = K n^n \tag{33}$$

et on a

$$R_m = K n^n e^{-n} \tag{34}$$

Un matériau sera donc d'autant plus ductile (grand q_m) que son module d'écroutissage n sera plus grand.

Pour un matériau vérifiant la loi de Ludwik, la condition (31) devient

$$K n q_m^{n-1} = Re + K q_m^n \tag{35}$$

Sous cette forme, elle est peu parlante. Mais si l'on note que

$$\sigma_m = Re + K q_m^n ,$$

on a évidemment

$$K = \frac{\sigma_m - Re}{q_m^n},$$

ce qui permet de transformer (35) en

$$\frac{n}{q_m} (\sigma_m - Re) = \sigma_m,$$

soit

$$q_m = n \left(1 - \frac{Re}{\sigma_m}\right). \quad (36)$$

Cette relation, bien qu'implicite, montre que q_m croît avec n . Elle montre également que

$$q_m < n \leq 1.$$

7. Forme intégrée des équations plastiques

Un certain nombre de problèmes de formage peuvent être considérés comme des écoulements et, à ce titre, traités dans un cadre eulérien comparable à celui de la mécanique des fluides. Nous considérerons donc un volume V possédant une entrée S_1 , une sortie S_2 et des parois S_p (fig. 10). C'est notamment le cas d'une filière.

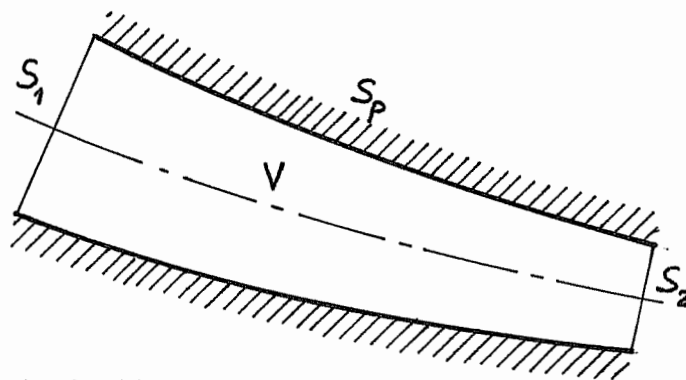


Figure 10 - Ecoulement plastique

Soit a un champ quelconque défini sur V , et soit

$$\dot{a} = \frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + u_j D_j a$$

sa dérivée lagrangienne par rapport au temps. On a

$$\int_V \dot{a} \, dV = \int_V \frac{\partial a}{\partial t} \, dV + \int_V u_j D_j a \, dV .$$

La dernière intégrale peut être transformée comme suit :

$$\int_V u_j D_j a \, dV = \int_S n_j u_j a \, dS - \int_V a D_j u_j \, dV ,$$

et le dernier terme du second membre est nul en vertu de l'incompressibilité. Quant au premier, il se développe en

$$\int_{S_1} n_j u_j a \, dS + \int_{S_2} n_j u_j a \, dS + \int_{S_p} n_j u_j a \, dS .$$

le terme relatif aux parois est nul, car sur celles-ci, la vitesse normale est nulle. Sur S_1 , le débit vaut

$$Q = - \int_{S_1} n_j u_j \, dS .$$

On a donc

$$\int_{S_1} n_j u_j a \, dS = - Q \bar{a}_1 , \quad (37)$$

en définissant la moyenne

$$\bar{a}_1 = - \frac{1}{Q} \int_{S_1} n_j u_j a \, dS . \quad (38)$$

De la même façon, le débit passant par S_2 , égal au précédent, est donné par

$$Q = \int_{S_2} n_j u_j a \, dS .$$

Nous écrirons donc

$$\int_{S_2} n_j u_j a \, dS = Q \bar{a}_2 \quad (39)$$

avec

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{Q} \int_{S_2} n_j u_j a \, dS . \quad (40)$$

Au total, il vient donc

$$\int_V \dot{a} \, dV = \int_V \frac{\partial a}{\partial t} \, dV + Q (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) \quad (41)$$

et, pour un écoulement *stationnaire*, $\frac{\partial a}{\partial t} = 0$, ce qui simplifie encore la question.

Appliquons d'abord l'équation (41) à la variable d'écroutissage q . Comme

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{3} \vartheta_{ij} \vartheta_{ij}} \quad ,$$

on a tout simplement

$$\bar{q}_2 - \bar{q}_1 = \frac{1}{Q} \int_V \sqrt{\frac{2}{3} \vartheta_{ij} \vartheta_{ij}} dV - \frac{1}{Q} \int_V \frac{\partial q}{\partial t} dV \quad . \quad (42)$$

La même méthode permet d'évaluer la puissance de déformation. Les relations (11) et (12) permettent d'écrire

$$\vartheta_{ij} = \frac{3}{2} \dot{q} \frac{\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}}{\sigma_c} \quad ,$$

ce qui entraîne

$$\sigma_{ij} \vartheta_{ij} = \dot{q} \sigma_c \quad .$$

Or, σ_c est une fonction de q . Introduisant la fonction

$$w_p(q) = \int_0^q \sigma_c(q^*) dq^* \quad (43)$$

on a visiblement

$$\sigma_{ij} \vartheta_{ij} = \dot{w}_p \quad . \quad (44)$$

Dès lors, par (41), la puissance de déformation vaut

$$P_d = \int_V \sigma_{ij} \vartheta_{ij} dV = \int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV + Q (\bar{w}_{p_2} - \bar{w}_{p_1}) \quad (45)$$

A ce stade, il faut consentir à l'*approximation* qui consiste à écrire

$$\bar{w}_{p_1} \cong w_p(\bar{q}_1) \quad , \quad \bar{w}_{p_2} \cong w_p(\bar{q}_2) \quad . \quad (46)$$

Il vient alors

$$P_d \cong \int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV + Q [w_p(\bar{q}_2) - w_p(\bar{q}_1)] \quad . \quad (47)$$

Dans le cas simple d'un écoulement permanent et d'un matériau réputé vierge ($\bar{q}_1 = 0$), on a simplement

$$\bar{q}_2 = \frac{1}{Q} \int_V \sqrt{\frac{2}{3} \vartheta_{ij} \vartheta_{ij}} dV \quad (48)$$

et

$$P_d = Q w_p(\bar{q}_2) \quad (49)$$

Si l'on note qu'en l'absence d'érouissage, la puissance de déformation vaut

$$P_{d0} = \text{Re} \int_V \sqrt{\frac{2}{3} \vartheta_{ij} \vartheta_{ij}} dV \quad ,$$

on constate que

$$\bar{q}_2 = \frac{P_{d0}}{\text{Re} Q} \quad (50)$$

et

$$\frac{P_d}{\text{Re} Q} = \frac{1}{\text{Re}} w_p\left(\frac{P_{d0}}{\text{Re} Q}\right) \quad (51)$$

Si l'on adopte la loi de Swift,

$$w_p(q) = \frac{K}{n+1} (B + q)^{n+1}$$

et

$$\frac{P_d}{\text{Re} Q} = \frac{K}{(n+1) \text{Re}} \left(B + \frac{P_{d0}}{\text{Re} Q}\right)^{n+1} \quad (52)$$

Dans le cadre de la loi de Ludwik,

$$w_p(q) = \text{Re} q + K \frac{q^{n+1}}{n+1}$$

et

$$\frac{P_d}{\text{Re} Q} = \frac{P_{d0}}{\text{Re} Q} + \frac{K}{(n+1) \text{Re}} \left(\frac{P_{d0}}{\text{Re} Q}\right)^{n+1} \quad (53)$$

Ces relations permettent une transposition aisée des modèles cinématiquement admissibles vus précédemment au cas d'un matériau érouissable. Les termes de frottement à la Tresca sont à transposer tels quels puisque la cinématique n'a pas changé et

$$P = P_d + P_f$$

8. Contrainte équivalente

On mène souvent les calculs en faisant abstraction de l'érouissage, mais en corrigeant la contrainte Re . La valeur *exacte* Re^* à utiliser est celle qui donne le même travail plastique que le système avec érouissage :

$$Re^* q_2 = w_p(q_2),$$

soit

$$Re^* = \frac{w_p(q_2)}{q_2} \quad (54)$$

Dans le cadre de la loi de Swift, c'est

$$Re^* = \frac{K}{n+1} \frac{(B + q_2)^{n+1}}{q_2} \quad (55)$$

Si l'on utilise la loi de Ludwik, il faut poser

$$Re^* = Re + \frac{K}{n+1} q_2^n \quad (56)$$

9. Bibliographie

- [1] J. LEMAITRE, J.-L. CHABOCHE - *Mécanique des matériaux solides*
Dunod, Paris, 2^e édition, 1988
- [2] L. SEDOV - *Mécanique des milieux continus*
Tome II, Mir, Moscou, 1973
- [3] W. JOHNSON, P.B. MELLOR - *Plasticity for mechanical engineers*
Van Nostrand, London, 1962
- [4] P. LUDWIK - *Elemente der technologischen Mechanik*
Springer, Berlin, 1909
- [5] H.W. SWIFT - "Plastic strain in isotropic strain-hardening material"
Engineering, **162**, p. 381, 1946 .

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

- [1] N. COOK - *Manufacturing analysis*
Addison Wesley, Reading, Massachussets, 1966
- [2] G.W. ROWE - *Elements of metalworking theory*
Edward Arnold, London, 1979
- [3] G.W. ROWE - *Principles of industrial metalworking processes*
Edward Arnold, London, 1977
- [4] B. WASSILIEFF - *Emboutissage*
Dunod, Paris, 1970
- [5] D.F. EARY, E.A. REED - *Techniques of pressworking sheet metal*
Prentice Hall, 2^e ed., 1974
- [6] OEHLER/KAISER - *Schnitt-, Stanz- und Ziehwerkzeuge*
5^e éd., Springer, 1966
- [7] P. POLOUKHINE, V. TIOURINE, P. DAVIDKOV, V. VITANOV - *Traitement des métaux par déformation*
Mir, Moscou, 1987
- [8] L. KATCHANOV - *Eléments de la théorie de la plasticité*
Mir, Moscou, 1975
- [9] R. HILL - *The mathematical theory of plasticity*
Oxford Clarendon Press, 1950
- [10] W. JOHNSON, P.B. MELLOR - *Plasticity for mechanical engineers*
Van Nostrand, London, 1962
- [11] E.G. THOMSEN, C.T. YANG, S. KOBAYASHI - *Plastic deformation in metal pressing*
mac millan, N.Y., 1965
- [12] I. DRAGAN, I. ILCA, S. BADEA, E. CAZIMIROVICI - *Technologia Deformarilor Plastica*
Editura Qidactica Şi Pedagogica, Bucuresti, 1979
- [13] M. MOLDOVAN, A. MANIU - *Utilaje Pentru Deformari Plastica*
Editura Didactica Şi Pedagogica, Bucuresti, 1982.
- [14] E. SIEBEL - *Le façonnage des métaux par déformation plastique.*
Béranger, Paris et Liège, 1936

ISBN 2-9600313-1-8