

UNIVERSITE DE LIEGE  
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES



Analyse de structures soumises au vent  
turbulent :

de l'approche stochastique fréquentielle au dynamique  
transitoire non linéaire

Travail de fin d'études présenté par

VINCENT DENOËL

Année académique 2002 – 2003

En vue de l'obtention du Diplôme d'Etudes  
Approfondies en Sciences Appliquées





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>La théorie des probabilités</b> .....	<b>5</b>
2.1	Caractérisation des variables aléatoires .....	5
2.2	Caractérisation des variables aléatoires conjointes .....	11
<b>3</b>	<b>La théorie des processus aléatoires</b> .....	<b>19</b>
3.1	Caractérisation des processus aléatoires .....	21
3.2	Caractérisation des processus aléatoires conjoints .....	32
3.3	Statistiques des franchissements de seuil .....	37
3.4	Statistiques des maxima .....	41
3.5	Statistiques des valeurs extrêmes.....	46
<b>4</b>	<b>L'analyse dynamique des structures</b> .....	<b>53</b>
4.1	Introduction .....	53
4.2	Méthodes déterministes.....	60
4.3	Méthodes stochastiques.....	70
<b>5</b>	<b>Notions d'aérodynamique - caractérisation du vent turbulent</b> .....	<b>85</b>
5.1	L'écoulement des fluides autour des corps .....	85
5.2	Caractérisation du vent .....	90
5.3	Expression des forces aérodynamiques .....	93
<b>6</b>	<b>Linéarisation des forces aérodynamiques</b> .....	<b>101</b>
6.1	Premier niveau de simplification .....	101
6.2	Simplifications supplémentaires .....	105
<b>7</b>	<b>Etude analytique d'une structure continue</b> .....	<b>109</b>
7.1	Projection en base modale .....	109

7.2	Estimation des déplacements .....	120
7.3	Exemple d'application .....	121
7.4	Résumé .....	125
<b>8</b>	<b>Approche fréquentielle d'une structure discrétisée .....</b>	<b>127</b>
8.1	Présentation des éléments finis .....	127
8.2	Traduction des effets turbulents et instationnaires .....	128
8.3	Projection en base modale .....	132
8.4	Comparaison entre modèles continu et discret .....	133
8.5	Résumé .....	158
<b>9</b>	<b>Génération d'échantillons de processus aléatoires.....</b>	<b>163</b>
9.1	Le calcul numérique des densités spectrales de puissance .....	163
9.2	Génération d'un processus unidimensionnel .....	167
9.3	Génération de processus multidimensionnels .....	172
9.4	Résumé .....	192
<b>10</b>	<b>Analyse stochastique temporelle de l'oscillateur simple .....</b>	<b>193</b>
10.1	Représentation correcte de la fonction de transfert du système .....	195
10.2	Représentation du contenu fréquentiel de la sollicitation .....	199
10.3	Caractéristiques de génération liées à la résolution pas-à-pas .....	202
10.4	Exemple simple d'application .....	206
10.5	Résumé .....	212
<b>11</b>	<b>Approche temporelle d'une structure discrétisée .....</b>	<b>213</b>
11.1	Validation de l'approche temporelle .....	214
11.2	Mise en évidence de l'importance de la cohérence .....	227
11.3	Comparaison des niveaux d'hypothèses $n^{\circ}1$ et $n^{\circ}2$ .....	232
11.4	Analyse stochastique non linéaire .....	234
11.5	Retour à l'oscillateur simple.....	247

11.6 Conclusions .....	273
<b>12 Conclusions.....</b>	<b>275</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>279</b>
<b>A Résultats d'intégrales pour le calcul de l'admittance numérique</b>	<b>284</b>
A.1 Première intégrale .....	284
A.2 Deuxième intégrale .....	286
A.3 Troisième intégrale .....	287
A.4 Quatrième intégrale .....	288
A.5 Cinquième intégrale .....	290
<b>B Intégration numérique de fonctions à forte acuité</b>	<b>292</b>
<b>C Transparents de la présentation</b>	<b>302</b>



# Liste des notations

Chapitre 1: Introduction

Chapitre 2: La théorie des probabilités

$p_x(a)$	:	Densité de probabilité de la variable aléatoire $x$ - Probabilité que $x$ soit compris entre $a$ et $a + da$	(2.2)	$[X^{-1}]$
$F_x(x)$	:	Fonction de répartition de la variable aléatoire $x$ - Probabilité que $x$ soit inférieur à $a$	(2.4)	$[ ]$
$\mu, \mu_x, \mu_y$	:	Moyenne de la variable aléatoire aléatoire ( $x$ ou $y$ si précisé)	(2.8)	$[X]$
$\overline{x^2}, \overline{y^2}$	:	Carré moyen des variables aléatoires $x$ et $y$	(2.8)	$[X^2]$
$\sigma_x^2, \sigma_y^2$	:	Variances des variables aléatoires $x$ et $y$ - Elles correspondent aux carrés moyens des variables aléatoires $x$ et $y$ à condition que leurs moyennes soient nulles	(2.8)	$[X^2]$
$\sigma, \sigma_x, \sigma_y$	:	Ecart-type de la variable aléatoire ( $x$ ou $y$ si précisé) - Caractérisation de la dispersion de la variable aléatoire autour de sa moyenne	(2.8)	$[X]$
$p_{xy}(a, b)$	:	Densité de probabilité conjointe entre les variables aléatoires $x$ et $y$ . Probabilité que $x$ soit compris entre $a$ et $a + da$ ET que $y$ soit compris entre $b$ et $b + db$	(2.12)	$[X^{-1}Y^{-1}]$
$p_{x/y}(a, b)$	:	Densité de probabilité conditionnelle de $x$ si $y$ . Probabilité que $x$ soit compris entre $a$ et $a + da$ lorsque $y$ est égal à $b$	(2.15)	$[X^{-1}]$
$p_{y/x}(a, b)$	:	Densité de probabilité conditionnelle de $y$ si $x$ . Probabilité que $y$ soit compris entre $b$ et $b + db$ lorsque $x$ est égal à $a$	(2.16)	$[Y^{-1}]$
$\sigma_{xy}$	:	Covariance entre les variables aléatoires $x$ et $y$ . Cette grandeur peut être positive ou négative; elle a les dimensions d'une variance et non pas d'un écart-type !	(2.22)	$[XY]$
$\rho_{xy}$	:	Coefficient de corrélation entre les variables aléatoires $x$ et $y$ : $\rho_{xy} = \sigma_{xy} / \sigma_x \sigma_y$ . Ce coefficient est toujours compris entre $-1$ et $+1$ . $\rho_{xy} = 0$ signifie qu'il n'y a pas de corrélation entre les variables $x$ et $y$ . $\rho_{xy} = 1$ signifie que les deux variables sont parfaitement corrélées. $\rho_{xy} = -1$ signifie que les deux variables sont parfaitement corrélées, $y$ étant systématiquement égal à $-x$ .	(2.23)	$[ ]$

$[\sigma]$  : Matrice de covariance de plusieurs variables aléatoires (c'est-à-dire d'un processus aléatoire vectoriel). Les éléments diagonaux représentent les variances de chacune des variables scalaires; les éléments non diagonaux représentent les corrélations entre les variables différentes. (2.23)  $[X^2, XY, Y^2]$

### Chapitre 3: La théorie des processus aléatoires

- $p_x(x_1, t_1)$  : Densité de probabilité de premier ordre du processus aléatoire  $x$ . Probabilité que  $x$  se trouve entre  $x_1$  et  $x_1 + dx_1$  à l'instant  $t_1$  fixé (3.1)  $[X^{-1}]$
- $p_x(x_1, t_1; x_2, t_2)$  : Densité de probabilité de second ordre du processus aléatoire  $x$ . Probabilité que  $x$  se trouve entre  $x_1$  et  $x_1 + dx_1$  en  $t_1$  et que  $x$  se trouve entre  $x_2$  et  $x_2 + dx_2$  en  $t_2$  (3.2)  $[X^{-2}]$
- $p_{xy}(x_1, t_1; y_1, s_1)$  : Densité de probabilité conjointe de premier ordre entre les processus aléatoires  $x$  et  $y$ . Probabilité que  $x$  se trouve entre  $x_1$  et  $x_1 + dx_1$  à l'instant  $t_1$  et que  $y$  se trouve entre  $y_1$  et  $y_1 + dy_1$  à l'instant  $s_1$  (3.2)  $[X^{-1}Y^{-1}]$
- $p_{xy}(x_1, t_1; x_2, t_2; y_1, s_1)$  : Densité de probabilité conjointe de second ordre entre les processus aléatoires  $x$  et  $y$ . Probabilité que  $x$  se trouve entre  $x_1$  et  $x_1 + dx_1$  à l'instant  $t_1$  et que  $x$  se trouve entre  $x_2$  et  $x_2 + dx_2$  à l'instant  $t_2$  lorsque  $y$  se trouve entre  $y_1$  et  $y_1 + dy_1$  à l'instant  $s_1$  (3.2)  $[X^{-2}Y^{-1}]$
- $\mu_x(t)$  : Moyenne du processus aléatoire  $x$ . Invariable au cours du temps lorsque le processus étudié est stationnaire (3.5)  $[X]$
- $R_{xx}(t_1, t_2)$  : Fonction d'autocorrélation du processus aléatoire  $x$ . La valeur de cette fonction pour le couple  $(t_1, t_2)$  est d'autant plus grande que le processus se souvient à l'instant  $t_2$  de la valeur qu'il a prise au temps  $t_1$ . Lorsque le processus est stationnaire, cette fonction ne dépend que du décalage temporel  $t_2 - t_1$  (3.6)  $[X^2]$
- $S_{xx}(\omega)$  : Densité spectrale de puissance du processus aléatoire  $x$ , défini comme étant la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation. Cette grandeur représente le contenu fréquentiel du processus aléatoire. Sa définition n'est rigoureusement valable que pour les processus stationnaires (3.14)  $[X^2/Hz]$
- $m_i$  : Moment spectral d'ordre  $i$ . Grandeurs permettant de représenter la forme d'une densité spectrale de puissance. Le moment d'ordre 0 s'identifie à la variance du processus (déplacement); le moment d'ordre 2 s'identifie à la variance du processus dérivé (vitesse); le moment d'ordre 4 s'identifie à la variance de la dérivée seconde du processus (accélération) (3.21)  $[X^{2+i}]$

$R_{xy}(t_1, t_2)$	:	Fonction de cross-corrélation entre les processus aléatoires $x$ et $y$ . Cette grandeur est une image du degré de certitude que l'on peut avoir sur la connaissance de la valeur prise par le processus $y$ en $t_2$ lorsque l'on connaît la valeur que le processus $x$ a prise en $t_1$	(3.26) [XY]
$S_{xy}(\omega)$	:	Densité spectrale de puissance croisée entre les deux processus aléatoires stationnaires $x$ et $y$ . Cette grandeur est la transformée de Fourier de la fonction de cross-corrélation. Il s'agit donc d'une fonction complexe. On l'appelle également densité de puissance interspectrale, ou aussi plus simplement, cross-DSP	(3.32) [XY/Hz]
$[R(t_1, t_2)]$	:	Matrice de corrélation d'un processus aléatoire vectoriel	(3.41) [ $X^2$ ]
$[S(\omega)]$	:	Matrice de densité spectrale d'un processus aléatoire vectoriel	(3.42) [ $X^2$ /Hz]
$p_\xi^+$	:	Pour le processus aléatoire $x$ , probabilité de passage par le seuil $x = \xi$ avec vitesse positive et entre les instants $t$ et $t + dt$	(3.54) [ ]
$\nu_\xi^+ = p_\xi^+/dt$	:	Fréquence de passage par le seuil $x = \xi$ avec une vitesse positive. Première formule de Rice : $\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}$	(3.56) [Hz]
$p_m$	:	Probabilité d'avoir un maximum relatif entre les instants $t$ et $t + dt$	(3.64) [ ]
$\mu = p_m/dt$	:	Fréquence de passage par un maximum relatif. Seconde formule de Rice : $\mu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}$	(3.66) [Hz]
$p_{\max}$	:	Densité de probabilité des maxima relatifs	(3.65) [ $X^{-1}$ ]
$U^{(n)}$	:	Valeur extrême d'un processus aléatoire : maximum absolu attendu sur l'observation de $n$ maxima relatifs indépendants	(3.79) [X]
$\alpha^{(n)}$	:	Augmentation logarithmique d'une valeur extrême. Représente l'évolution du maximum attendu lorsque le nombre de maxima relatifs observés augmente progressivement	(3.79) [ $X^{-1}$ ]
$g$	:	Facteur de pointe d'un processus aléatoire. Valeur par laquelle il faut multiplier la variance pour obtenir la valeur extrême sur une observation de durée fixée	(3.91) [ ]

#### Chapitre 4: L'analyse dynamique des structures

En règle générale, les grandeurs scalaires symbolisées par des lettres minuscules sont exprimées dans le domaine temporel; les lettres majuscules sont donc, dans la mesure du possible réservées aux grandeurs exprimées dans le domaine fréquentiel. L'exposant \* est utilisé pour représenter des matrices (ou leurs éléments) exprimées dans la base des modes propres.

$t$	:	Paramètre représentant le temps	(4.2) [s]
$n$	:	Paramètre représentant la fréquence	(4.8) [Hz]

$[K], [M], [C]$	: Matrices structurelles (raideur, masse, amortissement)	(4.2)	$[N/m, kg, Ns/m]$
$\{x\}, \{\dot{x}\}, \{\ddot{x}\}$	: Déplacements, vitesses et accélérations des noeuds de la structure	(4.2)	$[m, m/s, m/s^2]$
$\{p(t)\}$	: Vecteur des charges extérieures (évolution au cours du temps)	(4.2)	$[N]$
$[\Phi]$	: Matrice des modes propres de la structure	(4.3)	$[ ]$
$\{q\}, \{\dot{q}\}, \{\ddot{q}\}$	: Amplitudes modales (corrdonnées généralisées) et leur dérivées	(4.4)	$[m, m/s, m/s^2]$
$[K^*], [M^*], [C^*]$	: Matrices structurelles exprimées en base modale (raideur, masse amortissement) : matrices généralisées	(4.6)	$[N/m, kg, Ns/m]$
$\{p^*(t)\}$	: Vecteur des charges généralisées (ou forces modales)	(4.6)	$[N]$
$\{X(n)\}$	: Transformée de Fourier des déplacements des noeuds de la structure (déplacements nodaux)	(4.10)	$[m/Hz]$
$\{P(n)\}$	: Transformée de Fourier des forces nodales	(4.11)	$[N/Hz]$
$\{Q(n)\}$	: Transformée de Fourier des amplitudes modales	(4.29)	$[m/Hz]$
$h(t), [h(t)]$	: Réponse impulsionnelle unitaire, fonction de Green	(4.18)	$[\frac{s}{kg} = \frac{m}{Ns}]$
$[h^*(t)]$	: Matrice modale des réponses impulsionnelles unitaires	(4.21)	$[\frac{s}{kg} = \frac{m}{Ns}]$
$H(n), [H(n)]$	: Fonction de transfert (système 1 DDL ou structure complète)	(4.26), (4.35)	$[\frac{m}{N}]$
$[H^*(n)]$	: Matrice modale des fonctions de transfert	(4.26)	$[\frac{m}{N}]$
$\delta, \alpha$	: Paramètres de Newmark (analyse dynamique pas-à-pas)	(4.37)	$[ ]$

## Chapitre 5: Notions d'aérodynamique - caractérisation du vent turbulent

Re	: Nombre de Reynolds	(5.1)	$[ ]$
$C_p$	: Coefficient de pression	(5.2)	$[ ]$
$C_D, C_L, C_M$	: Coefficients aérodynamiques ( <i>drag, lift, moment</i> )	(5.3)	$[ ]$
	à	(5.5)	
St	: Nombre de Strouhal	(5.6)	$[ ]$
$U(z, t)$	: Profil de vitesse (évolution au cours du temps et en fonction de l'altitude de la vitesse du vent)	(5.7)	$[m/s]$
$I_u, I_v, I_w$	: Intensités de turbulence du vent dans les trois directions principales de turbulence	(5.11)	$[ ]$
$T_u$	: Echelle de temps pour la composante longitudinale de la turbulence	(5.14)	$[s]$
$L_u^R$	: Echelle de turbulence pour la composante longitudinale de la turbulence et dans la direction R	(5.16)	$[m]$
$C_y^{ru}, C_z^{ru}$	: Coefficient de cohérence de la composante longitudinale de la turbulence et dans les directions y et z	(5.18)	$[ ]$
$S_u(n)$	: Densité spectrale (unidimensionnelle) de la composante longitudinale de la turbulence en un point déterminé de l'espace	Tab. 5.1	$[N^2/Hz]$

$S_w(n)$	:	Densité spectrale (unidimensionnelle) de la composante transversale de la turbulence en un point déterminé de l'espace	Tab. 5.1	$[N^2/Hz]$
$\psi^u(r_y, r_z, n)$	:	Fonction de cohérence entre les composantes longitudinales de la turbulence en des points séparés d'une distance $r_y$ selon $y$ et $r_z$ selon $z$	(5.18)	[ ]
$F_D, F_L, F_M$	:	Forces aérodynamiques ( <i>drag, lift, moment</i> )	(5.20)	$[N]$

## Chapitre 6: Linéarisation des forces aérodynamiques

$V_{app}$	:	Vitesse relative entre le fluide et la structure	(6.2)	$[m/s]$
$p(t), h(t), \alpha(t)$	:	Balancement, flexion verticale et torsion du tablier	(5.19), (6.2)	$[m, m, rad]$
$r$	:	Distance entre le centre de torsion et le centre aéroélastique	(6.2)	$[m]$
$B$	:	Largeur du tablier	(6.2)	$[m]$
$i_{vent}$	:	Incidence propre du vent par rapport à sa direction moyenne	(6.4)	$[rad]$
$i_{app}$	:	Incidence apparente du vent par rapport au tablier	(6.5)	$[rad]$
$c_d, c_l, c_m$	:	Valeurs des coefficients aérodynamiques pour une incidence nulle	(6.9)	[ ]
$c'_d, c'_l, c'_m$	:	Dérivées des coefficients aérodynamiques pour une incidence nulle	(6.9)	$[rad^{-1}]$

## Chapitre 7: Etude analytique d'une structure continue

$\{f^{moy}(t)\}$	:	Composante statique des efforts aérodynamiques. Lorsque toutes les hypothèses de linéarisation des efforts aérodynamique sont formulées, ceux-ci peuvent s'exprimer comme la somme de trois effets dont les effets moyens sont représentés par ce terme	(7.4)	$[N]$
$\{f^{tu}(t)\}$	:	Composante turbulente des efforts aérodynamiques. Lorsque toutes les hypothèses de linéarisation des efforts aérodynamique sont formulées, ceux-ci peuvent s'exprimer comme la somme de trois effets dont les effets turbulents sont représentés par ce terme	(7.4)	$[N]$
$\{f^{inst}(t)\}$	:	Composante instationnaire des efforts aérodynamiques. Lorsque toutes les hypothèses de linéarisation des efforts aérodynamique sont formulées, ceux-ci peuvent s'exprimer comme la somme de trois effets dont les effets instationnaires sont représentés par ce terme	(7.4)	$[N]$
$A_k(y), B_k(y)$	:	Projection des coefficients aérodynamiques dans la base des modes propres (pour l'exemple étudié, les coefficients aérodynamiques sont constants sur la longueur de l'ouvrage)	(7.6), (7.7)	[ ]

$\{F^{tu}(n)\}$	:	Transformée de Fourier des effets turbulents ( $\{f^{tu}(t)\}$ ), utilisés comme sollicitations à proprement parler	(7.8)	$[N/Hz]$
$[S_{f^{tu}}(n)]$	:	Matrice de densité spectrale des forces modales provenant de la contribution turbulente des forces aérodynamiques. Dans une approche classique, il s'agit de la sollicitation associée au chargement éolien	(7.9)	$[N^2/Hz]$
$[Y^u], [Y^w]$	:	Matrice de transfert permettant de passer des densités spectrales des vitesses de vent aux densités spectrales des effets turbulents généralisés	(7.13), (7.14)	[ ]
$[C^{aero}]$	:	Matrice d'amortissement aérodynamique	(7.17)	$[Ns/m]$
$[S_q(n)]$	:	Matrice de densité spectrale des amplitudes modales. L'objectif de l'analyse stochastique (en base modale) consiste en la détermination de ces grandeurs	(7.23)	$[m^2/Hz]$
$\{\sigma_q^2\}$	:	Variances des amplitudes modales	(7.26)	$[m^2]$
$\{\sigma_q^{st^2}\}$	:	Contribution quasi-statique (ou permanente) des réponses dans chacun des modes. Cette grandeur intervient lors de l'estimation de l'intégrale numérique de la densité spectrale à l'aide de l'approximation en bruit blanc	(7.27)	$[m^2]$
$\{\sigma_q^{dy^2}\}$	:	Contribution dynamique (ou résonante) des réponses dans chacun des modes. Cette grandeur intervient lors de l'estimation de l'intégrale numérique de la densité spectrale à l'aide de l'approximation en bruit blanc	(7.27)	$[m^2]$
$\{\sigma_h^2\}, \{\sigma_p^2\}, \{\sigma_v^2\}$	:	Variances des déplacements des noeuds de la structure. Celles-ci sont généralement estimées en négligeant les contributions provenant de modes différents	(7.43)	$[m^2]$
$[\Psi(n)]$	:	Fonction de participation modale. Cette fonction est l'équivalent du facteur de participation modale en cas de sollicitation sismique : elle permet de représenter selon le mode étudié et en fonction de la cohérence du champs de pression, l'importance de la projection des ces pressions dans le mode choisi. Cette expression analytique n'est applicable qu'aux poutres isostatiques sur deux appuis simples	(7.50)	[ ]
$\Delta$	:	Distance de corrélation. C'est une grandeur caractéristique qui représente la distance entre deux points à partir de laquelle il n'y a plus guère de cohérence entre les vitesses fluctuantes du vent	(7.50)	$[m]$

## Chapitre 8: Approche fréquentielle d'une structure discrétisée

$\{F_N^{tu}\}$	:	vecteur des pressions aérodynamiques nodales. Ce vecteur est composé de trois sous-vecteurs disposés l'un au-dessus de l'autre; chacun d'eux, de dimension égale au nombre de noeuds dans la structure, contient les pressions aérodynamiques nodales dans une des trois directions (drag, lift, moment)	(8.3)	$[N]$
$[C_P]$	:	Matrice qui permet de passer des vitesses de vent en un noeud de la structure aux pressions aérodynamiques appliquées en ce noeud. Cette matrice contient donc les coefficients intervenant dans l'expression linéarisée des forces aérodynamiques	(8.2)	$[ \ ], [m]$
$[Q_1^{tu}]$	:	Matrice quasi-diagonale dont les éléments diagonaux sont les matrices $[C_P]$ . Il s'agit donc de l'équivalent structurel de la matrice $[C_P]$	(8.3)	$[ \ ], [m]$
$\{\hat{u}\}$	:	Vecteur des vitesses de vent ordonnées noeud par noeud puis composante par composante	(8.3)	$[m/s]$
$T_1, T_2, M_1, M_2$	:	Efforts nodaux énergétiquement équivalents	(8.4)	$[N], [Nm]$ à (8.7)
$\{F_{élék}\}$	:	Vecteur élémentaire (élément $k$ ) des forces nodales énergétiquement équivalentes	(8.8)	$[N/m]$
$[Q_{élék}]$	:	Matrice des coefficients permettant de relier les pressions de vent nodales (supposées constantes par demi-longueur d'élément) aux forces nodales énergétiquement équivalentes	(8.8)	$[m], [m^2]$
$[Q]$	:	Matrice structurelle reliant les vitesses de vent en chacun des noeuds de la structure aux forces nodales énergétiquement équivalentes	(8.11)	$[Ns/m]$
$[S_u]$	:	Matrice de densité spectrale des composantes de la turbulence (longitudinales puis verticales)	(8.12)	$[m^2/s]$
$[S_F]$	:	Matrice de densité spectrale des forces nodales associées aux effets turbulents	(8.12)	$[N^2/Hz]$
$[C_{nod}]$	:	Matrice d'amortissement aérodynamique ponctuelle. Elle comprend les coefficients de l'expression de l'amortissement aérodynamique linéaire (efforts instantanés en fonction des vitesses structurelles)	(8.13)	$[Ns/m^2], [Ns]$
$[Q_1^{inst}]$	:	Matrice quasi-diagonale dont les éléments diagonaux sont les matrices $[C_{nod}]$ . Il s'agit donc de l'équivalent structurel de la matrice $[C_{nod}]$	(8.14)	$[Ns/m^2], [Ns]$
$L_T(x)$	:	Ligne d'influence de la réaction transversale d'une poutre bi-encastée	(8.19)	$[ \ ]$
$S_T(x)$	:	Densité spectrale de la force nodale calculée selon la méthode de base ou selon la méthode rigoureuse	(8.20)	$[N^2/Hz]$

$\kappa_T(n)$	:	Fonction adimensionnelle représentant la réduction de la réaction transversale lorsque les pressions appliquées sont de moins en moins cohérentes : méthode rigoureuse	(8.24) [ ]
$\widehat{\kappa}_T(n)$	:	Fonction adimensionnelle représentant la réduction de la réaction transversale lorsque les pressions appliquées sont de moins en moins cohérentes : méthode de base	(8.26) [ ]
$\chi_T(n)$	:	Premier facteur de correction (admittance numérique). Il permet de mieux rendre compte de la diminution de l'effort tranchant d'extrémité avec la réduction de la cohérence des pressions appliquées	(8.27) [ ]
$\chi_M(n)$	:	Premier facteur de correction des moments d'encastrement	(8.33) [ ]
$\lambda_T^0(n)$	:	Fonction adimensionnelle représentant la réduction de la force nodale entre deux éléments adjacents alignés pour des pressions de moins en moins cohérentes : méthode rigoureuse	(8.36) [ ]
$\widehat{\lambda}_T^0(n)$	:	Fonction adimensionnelle représentant la réduction de la force nodale entre deux éléments adjacents alignés pour des pressions de moins en moins cohérentes : méthode de base	(8.38) [ ]
$\chi_T^0(n)$	:	Second facteur de correction (admittance numérique). Plutôt que de corriger le résultat au niveau de l'élément, ce second facteur permet prendre en compte la diminution de cohérence aux plus hautes fréquences au niveau de l'effort nodal énergétiquement équivalent	(8.39) [ ]
$\lambda_T^1(n)$	:	Fonction adimensionnelle représentant la réduction de la densité spectrale croisée entre deux forces nodales distantes d'un élément pour des pressions de moins en moins cohérentes : méthode rigoureuse	(8.47) [ ]
$\widehat{\lambda}_T^1(n)$	:	Fonction adimensionnelle représentant la réduction de la densité spectrale croisée entre deux forces nodales distantes d'un élément pour des pressions de moins en moins cohérentes : méthode de base	(8.53) [ ]
$\lambda_T^{k>1}(n)$	:	Fonction adimensionnelle représentant la réduction de la densité spectrale croisée entre deux forces nodales distantes de plus d'un élément pour des pressions de moins en moins cohérentes : méthode rigoureuse	(8.45) [ ]
$\widehat{\lambda}_T^{k>1}(n)$	:	Fonction adimensionnelle représentant la réduction de la densité spectrale croisée entre deux forces nodales distantes de plus d'un élément pour des pressions de moins en moins cohérentes : méthode de base	(8.52) [ ]

## Chapitre 9: Génération d'échantillons de processus aléatoires

$\Delta n$	:	Pas de fréquence pour la représentation d'un signal dans le domaine fréquentiel (ou pour la discrétisation d'une densité spectrale cible)	(9.5)	[Hz]
$\Delta t$	:	Pas de temps pour la représentation d'un signal dans le domaine temporel	(9.5)	[s]
$\tilde{T}$	:	Durée des blocs pour le calcul numérique des densités spectrales	(9.6)	[s]
$H_{ARMA}(n)$	:	Fonction de transfert associée à un filtre autorégressif à moyenne mobile (ARMA)	(9.20)	[ ]
$H_{AR}(n)$	:	Fonction de transfert associée à un filtre autorégressif (AR)	(9.23)	[ ]
$[S_N(n)]$	:	Matrice de densité spectrale cible. Les échantillons à générer doivent être tels que les densités spectrales cibles unidimensionnelles cibles et générées (éléments diagonaux) correspondent ainsi que les fonctions de cohérence entre les différents processus	(9.29)	$[X^2/Hz]$
$[Z(n)]$	:	Vecteurs propres de la matrice de densité spectrale cible. Ce sont les coefficients de la recombinaison modal-nodal	(9.30)	[ ]
$[V(n)]$	:	Valeurs propres de la matrice de densité spectrale cible. Ce sont des fonctions de la fréquence $n$ et représentent les densités spectrales modales (indépendantes) cibles	(9.30)	$[X^2/Hz]$
$\varepsilon$	:	Estimateur de la concavité des valeurs propres calculées. Cette grandeur est introduite lors de l'optimisation de l'algorithme de base visant à réduire le nombre de décomposition modales	(9.42)	[ ]

## Chapitre 10: Analyse stochastique temporelle de l'oscillateur simple

$I_H^{(analyt)}$	:	Intégrale analytique de la norme au carré de la fonction de transfert d'un oscillateur simple	(10.2)	$[m^2 Hz/N^2]$
$I_H^{(analyt)}(\Delta n)$	:	Intégrale numérique de la norme au carré de la fonction de transfert d'un oscillateur simple. L'intégration est réalisée à l'aide de la méthode du trapèze avec un pas de fréquence $\Delta n$ et jusqu'une fréquence égale à 10 fois la fréquence propre de l'oscillateur étudié	(10.2)	$[m^2 Hz/N^2]$
$\Delta n$	:	Pas de fréquence à ne pas dépasser pour représenter correctement la structure étudiée ainsi que la sollicitation	(10.4)	[Hz]
$n_{MAX}$	:	Fréquence jusqu'à laquelle il faut au moins intégrer pour représenter correctement la structure étudiée ainsi que la sollicitation	(10.5)	[Hz]
$\hat{n}$	:	Fréquence réduite utilisée pour la représentation de la densité spectrale de la vitesse du vent	(10.7)	[ ]

$T_R$  : Période de mise en régime d'un oscillateur simple (période après laquelle les conditions initiales imposées ne se font plus trop ressentir, grandeur choisie arbitrairement par l'auteur) (10.10) [s]

## Chapitre 11: Approche temporelle d'une structure discrétisée

$N$  : Nombre de pas de temps pour l'analyse dynamique pas-à-pas (11.3) [ ]

$F^{(2)}(t), F^{(3)}(t), F^{(5)}(t), F^{(6)}(t)$  : Force aérodynamique appliqué sur un oscillateur simple pour les niveaux d'hypothèses  $n^\circ 2, 3, 5$  et  $6$  (11.11) [N] à (11.16)

$L^{tu}$  : Facteur d'importance des effets turbulents pour les termes de correction entre les niveaux d'hypothèses  $n^\circ 2$  et  $n^\circ 3$ . Représente l'importance relative des termes de correction (second ordre par rapport aux termes de premier ordre) (11.26) [ ]

$L^{inst}$  : Facteur d'importance des effets instationnaires pour les termes de correction entre les niveaux d'hypothèses  $n^\circ 2$  et  $n^\circ 3$ . Représente l'importance relative des termes de correction (second ordre par rapport aux termes de premier ordre) (11.27) [ ]

$I_c$  : Coefficient de forme associé à un coefficient aérodynamique particulier (*drag, lift, moment*). Rapport entre la pente et la valeur à l'origine du coefficient aérodynamique linéarisé (11.29) [ ]

$I_a$  : Coefficient d'importance de l'amortissement aérodynamique de premier ordre par rapport à l'amortissement aérodynamique total. Cette grandeur est estimée par le rapport entre le coefficient d'amortissement relatif aérodynamique et le coefficient d'amortissement relatif total (structurel + aérodynamique) (11.29) [ ]

$\Delta V(t)$  : Termes de second ordre dans l'expression de la norme au carré de la vitesse apparente du vent. Ces termes sont négligés par l'approche fréquentielle (11.36) [ $m^2/s^2$ ]

$\Delta i(t)$  : Différence entre l'expression complète non linéaire de l'incidence propre du vent et la relation linéaire utilisée pour l'approche fréquentielle (11.37) [ ]

## Chapitre 12: Conclusions

---

# Chapitre 1

---

## Introduction

Les évolutions technologiques tant du point de vue des matériaux mis en oeuvre que des méthodes de calculs développées permettent d'atteindre de nouveaux records dans le domaine du génie civil. Ces évolutions ont permis, outre la recherche accrue d'esthétisme, la réalisation de structures de plus en plus légères et donc également économiques. Cette diminution de la masse propre structurelle a sans aucun doute conduit au dessin de structures plus souples mais également davantage sensibles aux problèmes vibratoires. Les sollicitations dynamiques rencontrées dans le cadre des structures du génie civil peuvent être classées en quelques catégories dont nous ne considérerons ici que le chargement éolien. Alors que la recherche d'une certaine souplesse peut être envisagée par exemple dans le cadre de structures en zone sismique, ce type de caractéristique est tout à fait à proscrire lorsque les effets d'un vent turbulent doivent être contrecarrés.

Les méthodes d'analyse de structures soumises à la turbulence du vent trouvent donc leurs applications majeures dans les structures les plus souples du génie civil, à savoir, les ponts suspendus et haubanés, les hauts buildings, les toitures de stades, les câbles à haute tension, les tours de refroidissement... Les raisonnements développés dans ce document décrivent essentiellement les tabliers de ponts souples mais ils pourraient sans trop de modifications être appliqués aux autres types de structures.

Quel que soit le type de chargement dynamique appliqué à une structure, les équations à résoudre (les équations du mouvement) sont des équations différentielles de second ordre à coefficients constants ou non selon que le problème étudié peut être considéré comme linéaire ou non. A chaque type de sollicitation dynamique est associée une méthode optimale de résolution du problème. Dans le cadre d'un chargement éolien turbulent, la réponse est généralement entreprise dans le domaine fréquentiel. Cette méthode de résolution semble être particulièrement intéressante dans la mesure où le vent peut être classé au rang des phénomènes stationnaires. Une telle méthode d'analyse requiert cependant la linéarité des phénomènes mis en jeu. L'analyse de la structure est donc simplifiée à travers différentes hypothèses destinées uniquement à pouvoir appliquer une résolution dans le domaine fréquentiel : lois de comportement élastiques linéaires, pas de second ordre

pris en compte, utilisation de coefficients aérodynamiques linéaires en l'incidence du vent, hypothèse d'un vent moyen d'un ordre supérieur aux composantes de turbulence et aux vitesses du tablier.

Lorsque l'importance de ces phénomènes doit être jugée, l'approche fréquentielle n'est plus appropriée puisqu'il convient alors de recourir à la linéarisation stochastique. Les hypothèses levées ne sont pas éliminées mais simplement déplacées, ce qui ne fournit pas non plus de résultats rigoureux. Dans ce cas, l'approche temporelle, inévitablement plus lourde à mettre en oeuvre, doit être choisie. Elle consiste en un premier temps à générer des échantillons de la turbulence du vent, et ensuite, à partir de la réponse structurelle obtenue pour chacun d'eux, à établir les quantités statistiques qui seraient fournies par une méthode stochastique dans le domaine fréquentiel.

Afin de juger de l'importance des hypothèses habituellement formulées, ce travail présente les deux approches : temporelle et fréquentielle. Dans un premier temps, nous comparerons l'approche fréquentielle et une approche temporelle se basant sur le même ensemble d'hypothèses. Ceci permettra de valider les développements réalisés. Une seconde étape consistera alors à nous affranchir successivement des hypothèses habituellement formulées pour terminer avec une analyse complètement non linéaire.

Outre cette brève introduction, le travail est divisé en trois parties importantes :

- la première partie est un résumé condensé des théories qu'il est nécessaire de maîtriser correctement pour comprendre la méthode d'analyse;
- la seconde partie concerne les développements entrepris dans le domaine fréquentiel. L'approche simplifiée habituellement recommandée dans les codes est brièvement présentée et les simplifications aménagées sont énumérées et critiquées à partir du formalisme complet de l'analyse stochastique. La comparaison entre solutions analytiques et numériques permet en outre de mettre en évidence quelques points spécifiques au traitement numérique de la cohérence spatiale dans la turbulence du vent;
- une troisième et ultime partie contient les développements dans le domaine temporel. Elle présente l'analyse stochastique au moyen de simulations de Monte Carlo. Deux thèmes de base, la simulation d'échantillons de processus aléatoires et l'analyse de l'oscillateur simple, présentent d'abord les notions nécessaires à l'étude d'une structure plus importante. Ensuite, sont présentés, dans l'esprit de pouvoir en dégager des règles générales de comportement, quelques résultats d'analyses dynamiques non linéaire d'une structure à plusieurs degrés de liberté.

# PARTIE I

## Rappels théoriques

L'analyse au vent turbulent repose sur plusieurs théories tout à fait distinctes qu'il est important de maîtriser correctement afin de pouvoir cerner les limitations de l'analyse.

De par sa nature, le vent est un phénomène qui ne peut pas être considéré indépendamment de ses caractéristiques variables dans l'espace et dans le temps. D'un point de vue mathématique, les théories d'une part des probabilités et d'autre part des processus aléatoires permettent de prendre en compte de tels phénomènes.

La première traite essentiellement de variables aléatoires qui sont des résultats scalaires d'expériences aléatoires telles le jet d'un dé ou le tirage d'une boule de Lotto. Tout en introduisant les notions de moyenne, de variance ou d'écart-type, cette première théorie souvent bien maîtrisée propose de caractériser les variables aléatoires par des densités ou des fonctions de probabilité. Les développements principaux et nécessaires à la compréhension de la suite du travail seront brièvement décrits dans le chapitre 2.

La seconde théorie, quant à elle, traite des processus aléatoires et non plus des variables aléatoires ; dans ce cas, le résultat de l'expérience aléatoire, ce qui sort du chapeau, n'est plus un nombre mais une fonction. On pourrait ainsi parler de la rugosité relevée sur un tronçon de route. Cette théorie des processus aléatoires est évidemment plus complexe puisqu'en plus de devoir utiliser des fonctions de probabilité pour une abscisse particulière de la fonction (« En un point choisi de la route, quelle rugosité peut-on s'attendre à mesurer ? »), elle doit également fournir des informations relatives aux valeurs de la fonction en un point sachant que, juste à côté, elle a pris une certaine valeur (notion de corrélation).

L'exemple choisi reste encore simple puisque le processus aléatoire ne dépend que d'une seule variable : l'abscisse le long de la route. La théorie des processus aléatoires permet également de caractériser des processus qui dépendent de plusieurs variables comme dans le cas du vent dont la vitesse varie d'un endroit à l'autre de l'espace ( 3 variables ) mais aussi au cours du temps. La vitesse du vent est donc un processus aléatoire à quatre variables pour lesquelles il est également nécessaire de définir des corrélations. Le chapitre 3 tentera de donner un sens physique et une justification à ces êtres mathématiques que sont les

processus aléatoires

Une autre théorie qu'il est important de dominer concerne l'analyse dynamique des structures. Etant donné que ce travail est présenté dans une faculté où ce type de théorie est bien connu, le lecteur est supposé être familier aux différentes méthodes de résolution. Néanmoins et ne serait-ce que pour introduire les notations utilisées, quelques brefs rappels de l'analyse dynamique des structures seront présentés dans le chapitre 4.

L'analyse des structures sous les effets du vent turbulent repose également sur deux autres théories assez vastes et complexes : la mécanique des fluides, ou plus particulièrement l'aérodynamique, ainsi que la climatologie. Seuls quelques concepts de chacune de ces deux théories concernent l'ingénieur. Ces quelques notions seront donc regroupées à l'intérieur d'un seul et même chapitre (chapitre 5).

---

# Chapitre 2

---

## La théorie des probabilités

### 2.1 Caractérisation des variables aléatoires

Une variable aléatoire est un nombre, résultat d'une expérience aléatoire telle le jet d'un dé à six faces ou le tirage d'une boule de Lotto. Cette définition peut également être étendue à d'autres variables non numériques (par exemple le résultat du jet d'une pièce de monnaie) mais auxquelles des valeurs conventionnelles peuvent être attribuées (pile : 0 / face : 1).

Le but de la théorie des probabilités est de caractériser statistiquement ces résultats scalaires d'expériences aléatoires. Ceci est généralement réalisé à l'aide de la densité de probabilité. Cette théorie recourt aussi largement aux notions de moyenne, variance ou écart-type introduites à l'occasion de la théorie des statistiques. Bien qu'ayant le même sens physique, ces grandeurs ne se rapportent cependant dans ce cadre ni à une population ni à un échantillon, mais permettent de représenter cette densité de probabilité.

#### 2.1.1 Fonction et densité de probabilité

Afin d'introduire les notions de fonction et de densité de probabilité, considérons les disques de la figure (2.1). Ils sont tous deux munis d'une aiguille tournante fixée en leur centre. L'un est marqué de dix traits séparant des régions identiques numérotées de 1 à 10 (variable discrète) alors que l'autre est gradué en degrés de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  (variable continue).

L'expérience aléatoire consiste à faire tourner l'aiguille et à attribuer une valeur discrète (un nombre entier entre 1 et 10) ou continue (un angle entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$ ) à la variable aléatoire  $x$ .

Pour le premier disque, les dix nombres auront la même probabilité d'occurrence étant donné que les régions délimitées sont identiques. Cette probabilité est estimée par le rapport entre le nombre de résultats favorables et le nombre total de résultats équiprobables possibles. Par exemple, la probabilité que le résultat de cette première expérience soit égal

à 2 s'exprime ainsi :

$$p(x = 2) = \frac{N_{fav}}{N_{tot}} = \frac{1}{10} \quad (2.1)$$

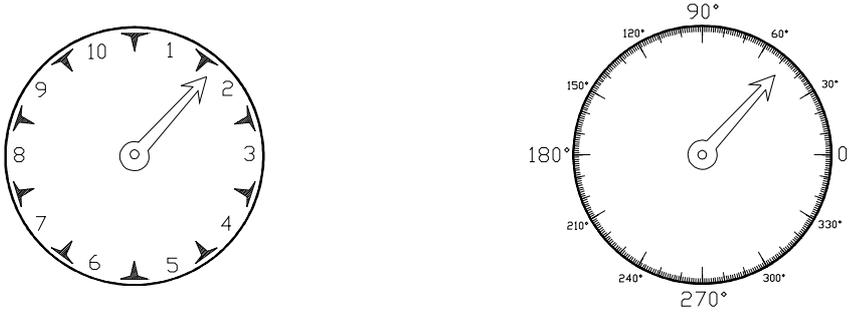


FIGURE 2.1. EXPÉRIENCES ALÉATOIRES (RÉSULTAT DISCRET OU CONTINU)

Cette définition de la probabilité ne fait qu'exprimer autrement la tournure de phrase habituelle : « chaque nombre a une chance sur dix d'être obtenu ». Une première façon de représenter cette variable aléatoire discrète est donc sa fonction de probabilité qui attribue à chaque résultat possible  $x_i$  sa probabilité d'occurrence :

$$p_x(x_i) = p(x = x_i) \quad (2.2)$$

La figure (2.2) représente la fonction de probabilité de la variable aléatoire de la première expérience (variable uniforme). On constate effectivement que chaque nombre (1 à 10) a la même probabilité d'occurrence. Cette figure montre également un exemple plus général de fonction de probabilité. Dans ce cas, les résultats  $-10$ ,  $0$  et  $10$  ont manifestement une plus grande probabilité d'occurrence.

Cette manière de définir les probabilités (2.2) implique que la somme des probabilités associées à chaque résultat possible soit égale à l'unité, ce qui exprime simplement le premier axiome de Kolmogorov :

$$\sum_i p_x(x_i) = 1 \quad (2.3)$$

Une autre manière de caractériser la variable aléatoire est sa fonction de répartition qui attribue à chaque valeur  $a$  la probabilité que la variable aléatoire  $x$  lui soit inférieure :

$$F_x(a) = p(x \leq a) \quad (2.4)$$

Vu sa définition, cette fonction est monotone, prenant les valeurs  $F_x(a) = 0$  en  $a = -\infty$  et  $F_x(a) = 1$  en  $a = +\infty$ . A titre d'illustration, la figure (2.3) représente les fonctions de

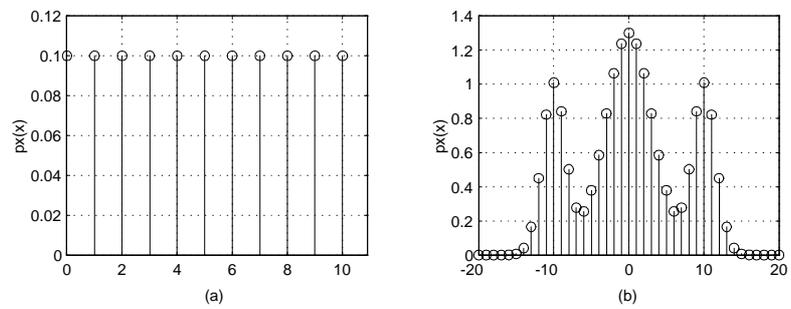


FIGURE 2.2. (A) FONCTION DE PROBABILITÉ DE L'EXPÉRIENCE 1 - (B) FONCTION DE PROBABILITÉ QUELCONQUE

répartition associées aux fonctions de probabilité de la figure (2.2). Puisque les fonctions de probabilité sont définies en des valeurs discrètes, les fonctions de répartition sont des sommes de fonctions-échelons.

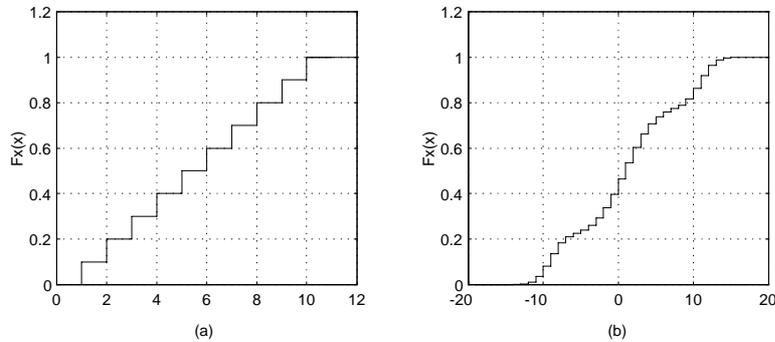


FIGURE 2.3. (A) FONCTION DE RÉPARTITION DE L'EXPÉRIENCE 1 - (B) FONCTION DE RÉPARTITION QUELCONQUE

Concernant la seconde expérience aléatoire, la définition donnée de la fonction de probabilité n'a plus guère d'intérêt dans la mesure où le nombre de résultats équiprobables possibles devient infini. Par contre, la fonction de répartition garde tout son sens :

$$F_x(a) = p(x \leq a) \quad (2.5)$$

La figure (2.4 (b)), homologue continu de la figure (2.3 (a)), indique la fonction de répartition de la seconde expérience aléatoire. Cette fonction vaut 0 pour des valeurs de  $a$  inférieures à  $0^\circ$  et vaut l'unité pour des valeurs de  $a$  supérieures à  $360^\circ$ . En effet, la probabilité d'obtenir un résultat d'une part inférieur à  $0^\circ$  est nulle et d'autre part inférieur ou égal à  $360^\circ$  est unitaire (100%). Entre ces deux limites, la fonction évolue linéairement puisque le disque est gradué uniformément.

Afin de faciliter l'écriture de la définition (2.4), la paramètre  $a$  a été utilisé mais la fonction de répartition est généralement exprimée en fonction de  $x$ . A partir de celle-ci, on définit alors la densité de probabilité qui est l'équivalent continu de la fonction de probabilité :

$$p_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \text{ ou } F_x(a) = \int_{-\infty}^a p_x(x) dx \quad (2.6)$$

Puisque la fonction de répartition est monotone croissante, la densité de probabilité est toujours positive.

L'interprétation physique de cette grandeur est assez simple puisque la densité de probabilité n'est qu'un passage à la limite de la fonction de probabilité. De toute façon, il suffit de considérer que :

$$p_x(a) da = dF_x(a) = F_x(a+da) - F_x(a) = p(x \leq a+da) - p(x \leq a) = p(a \leq x \leq a+da) \quad (2.7)$$

$p_x(a)$  représente donc une probabilité relative que la variable aléatoire  $x$  se trouve entre  $a$  et  $a + da$ .

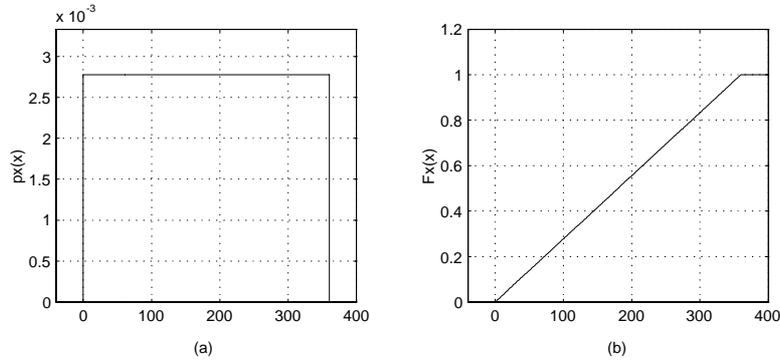


FIGURE 2.4. (A) DENSITÉ DE PROBABILITÉ DE L'EXPÉRIENCE 2 - (B) FONCTION DE RÉPARTITION DE L'EXPÉRIENCE 2

### 2.1.2 Grandeurs scalaires : les moments

Dans le domaine de l'ingénieur, les variables traitées sont habituellement supposées être continues si bien que la fonction la plus souvent utilisée est la densité de probabilité. Cette fonction renferme une quantité d'information généralement trop importante de sorte qu'on lui préfère des grandeurs scalaires qui en sont dérivées. On utilise ainsi les moments :

- d'ordre 1, la moyenne<sup>1</sup>  $\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_x(x) dx$  : qui n'est rien d'autre que le barycentre de la densité de probabilité ;
- d'ordre 2 : le carré moyen  $\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_x(x) dx$ .

On définit également les moments centrés qui ont l'avantage de donner une meilleure représentation physique de la dispersion (ordre 2) et de la symétrie (ordre 3) autour de la moyenne :

- moment centré d'ordre 2 ou variance :  $\sigma^2 = \overline{(x - \mu)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p_x(x) dx = \overline{x^2} - \mu^2$ . Cette grandeur, toujours positive, est un indicateur de la dispersion autour de la moyenne. On utilise aussi souvent l'écart-type  $\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \mu^2}$  qui a l'avantage d'avoir les mêmes unités que la moyenne. L'écart-type rapporté à la moyenne donne une idée de la dispersion :  $d = \frac{\sigma}{\mu}$ ;
- moment centré d'ordre 3 :  $S = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^3 p_x(x) dx$

<sup>1</sup> Il ne faut pas confondre la moyenne avec le mode qui est la valeur la plus probable (maximum de la densité de probabilité ou point d'inflexion de la fonction de probabilité). Il ne faut pas la confondre non plus avec la médiane qui est la valeur telle que les probabilités de se trouver au-dessus ou en-dessous de cette valeur sont identiques (la fonction de répartition est égale à  $\frac{1}{2}$ ). Dans le cas de la variable aléatoire gaussienne fréquemment utilisée, ces trois notions coïncident.

La distinction entre ces deux types de moments est nécessaire car les variables aléatoires traitées dans le cas de l'analyse dynamique d'une structure au vent ne sont pas nécessairement centrées (de moyenne nulle). En effet, les variables importantes dans la suite seront principalement les valeurs extrêmes des déplacements ou efforts dans la structure. Dans ce cas, la moyenne n'est pas nulle et représente une des valeurs que l'analyse stochastique se propose d'estimer.

### 2.1.3 Exemple

A titre d'exemple, voici la densité de probabilité et la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui est fréquemment utilisée. Il s'agit de la variable aléatoire gaussienne :

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad ; \quad F_x(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (2.8)$$

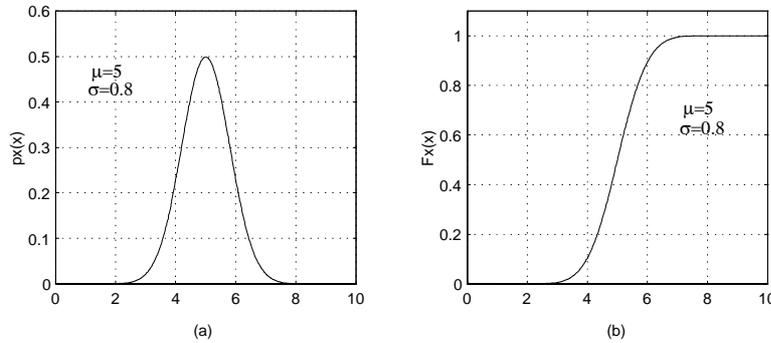


FIGURE 2.5. DENSITÉ DE PROBABILITÉ (A) ET FONCTION DE RÉPARTITION (B) D'UNE DISTRIBUTION GAUSSIENNE

Cette variable est caractérisée par les deux seuls paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  qui s'identifient à la moyenne et à l'écart-type. En effet, on vérifie aisément que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_x(x) dx = 1 \quad (2.9)$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_x(x) dx = \mu \quad (2.10)$$

$$\overline{(x - \mu)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p_x(x) dx = \sigma^2 \quad (2.11)$$

Dans le cas de la variable aléatoire gaussienne, le passage de la densité de probabilité aux moments d'ordre 1 et 2 s'effectue donc sans perte d'information. C'est en partie pour cette raison que la variable aléatoire gaussienne est largement utilisée; cette propriété n'est évidemment pas une règle générale.

On constate également que, pour cette variable aléatoire, le mode, la médiane et la moyenne sont confondus. Le paramètre  $\mu$  est donc également la valeur la plus probable mais aussi celle pour laquelle il y a une chance sur deux d'obtenir une valeur supérieure ou inférieure. La forme mathématique de l'expression indique aussi que  $\sigma$  représente effectivement une dispersion autour de la moyenne puisque si  $\sigma$  tend vers 0, la densité de probabilité  $p_x(x)$  tend vers une fonction de Dirac centrée en  $x = \mu$  alors que si  $\sigma$  tend vers l'infini,  $p_x(x)$  tend vers une fonction constante, et nulle (voir figure (2.6)).

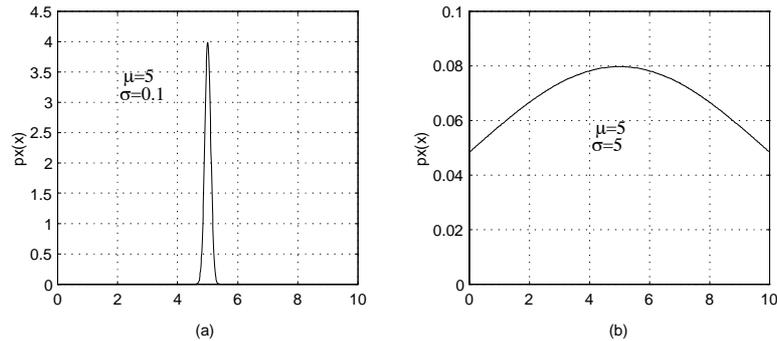


FIGURE 2.6. ILLUSTRATION DE L'ÉCART-TYPE COMME INDICATEUR DE DISPERSION AUTOUR DE LA MOYENNE

Lorsque l'on parle de la variable aléatoire gaussienne, on fait souvent référence aux probabilités que la variable aléatoire se trouve en dehors des intervalles du type  $[\mu - n\sigma; \mu + n\sigma]$  (fractiles). Ces probabilités sont représentées graphiquement par la surface hachurée de la figure (2.7). L'utilité pratique de ceci réside en la constatation que, pour  $n = 3$ , la probabilité d'avoir une valeur en dehors de l'intervalle est très faible (tableau 2.1) si bien que l'on considère en pratique que  $\mu - 3\sigma$  et  $\mu + 3\sigma$  sont les valeurs minimales et maximales que la variable aléatoire puisse raisonnablement prendre.

## 2.2 Caractérisation des variables aléatoires conjointes

Dans les problèmes traités en pratique, il est vraiment rare de pouvoir représenter le phénomène étudié à l'aide d'une seule variable. L'analyse dynamique d'un bâtiment ou d'un tablier de pont nécessite par exemple plusieurs modes de vibration pour une représentation correcte. Il est donc également nécessaire d'introduire les notions de densité de probabilité conjointe entre plusieurs variables aléatoires.

### 2.2.1 Fonction et densité de probabilité conjointe

Imaginons maintenant que le résultat de l'expérience aléatoire ne soit plus un seul nombre  $x$ , comme dans le cas du lancement des disques du paragraphe précédent, mais plutôt deux nombres  $x$  et  $y$ . Ces résultats peuvent à nouveau être discrets ou continus, ce qui mène à la distinction entre fonction de probabilité et densité de probabilité conjointes.

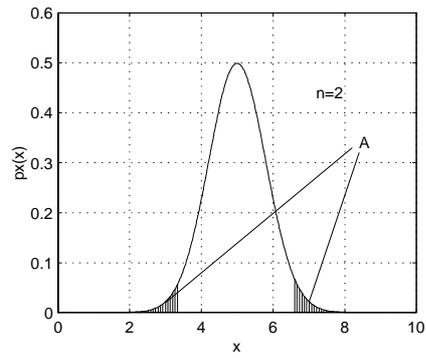


FIGURE 2.7. ILLUSTRATION DES FRACTILES (N=2)

<b>n</b>	$p_x(\mu - n\sigma \leq x \leq \mu + n\sigma)$	$1 - p_x(\mu - n\sigma \leq x \leq \mu + n\sigma)$
1	68,3 %	31,7 %
2	95,4 %	4,55 %
3	99,7 %	0,27 %

Tableau 2.1. : Probabilités associées aux limites de fractiles

Etant donné que les variables traitées en pratique sont supposées continues, les détails ne sont pas donnés en ce qui concerne les variables discrètes ; seul un exemple de fonction de probabilité conjointe est représenté (Fig. (2.8)). A chaque paire  $(x_i, y_i)$  est associé un bâtonnet dont la valeur représente la probabilité que  $x$  soit égal à  $x_i$  et que  $y$  soit égal à  $y_i$ .

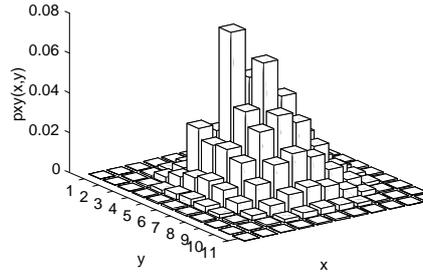


FIGURE 2.8. DENSITÉ DE PROBABILITÉ CONJOINTE DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Lorsque les variables  $x$  et  $y$  sont continues, on parle de densité de probabilité conjointe et on représente cette fonction à l'aide d'une surface dans l'espace à trois dimensions.

Le sens physique de cette fonction peut être simplement transposé du cas à une seule variable aléatoire :

$$p_{xy}(a, b) = p(a \leq x \leq a + da \text{ et } b \leq y \leq b + db) \quad (2.12)$$

La densité de probabilité conjointe contient plus d'information que les densités de probabilité marginales (c'est-à-dire de  $x$  ou  $y$  seuls) dans la mesure où ces dernières fonctions peuvent être obtenues par intégration :

$$p_x(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{xy}(a, b) db \quad (2.13)$$

$$p_y(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{xy}(a, b) da \quad (2.14)$$

La densité de probabilité conjointe permet également d'obtenir de nouvelles grandeurs prenant en compte la corrélation entre les variables  $x$  et  $y$ . Il s'agit des densités de probabilité conditionnelles :

$$p_{x/y}(a, b) = \frac{p_{xy}(a, b)}{p_y(b)} \quad (2.15)$$

$$p_{y/x}(a, b) = \frac{p_{xy}(a, b)}{p_x(a)} \quad (2.16)$$

Elles représentent les densités de probabilité de la variable  $x$  (resp.  $y$ ) lorsque  $y$  (resp.  $x$ ) est fixé à une valeur connue  $b$  (resp.  $a$ ). Si les deux variables aléatoires  $x$  et  $y$  sont

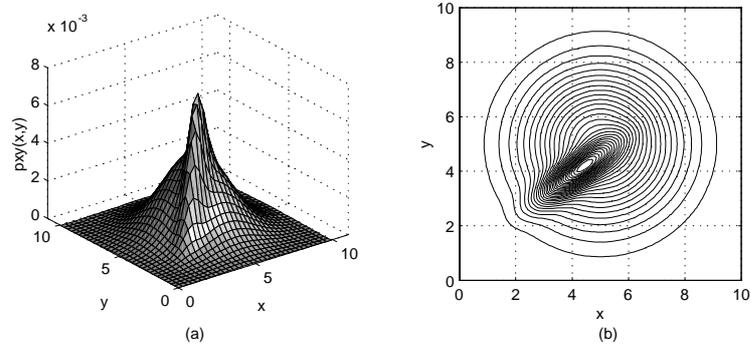


FIGURE 2.9. DENSITÉ DE PROBABILITÉ CONJOINTE ENTRE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

indépendantes, la densité de probabilité de  $x$  lorsque  $y$  est connu,  $p_{x/y}(a, b) = p_{x/y}(a)$ , est indépendante de la valeur  $b$  prise par  $y$ . Elle est donc évidemment confondue avec la densité de probabilité marginale de la variable  $x$  définie par la relation (2.13). Si les variables aléatoires  $x$  et  $y$  sont indépendantes, la densité de probabilité conjointe s'exprime donc par :

$$p_{xy}(a, b) = p_x(a)p_y(b) \quad (2.17)$$

## 2.2.2 Grandeurs scalaires : les moments

Les quelques développements menés ci-dessus montrent que la densité de probabilité conjointe est une fonction qui renferme une quantité d'information assez importante. Tout comme la densité de probabilité d'une seule variable aléatoire, on lui préfère souvent des grandeurs scalaires représentatives des notions que l'on peut estimer. On retrouve ainsi les moments d'ordre 1 et 2 définis à l'occasion des variables aléatoires simples :

- la moyenne selon  $x$  :

$$\mu_x = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xp_{xy}(x, y)dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_x(x)dx \quad (2.18)$$

- la moyenne selon  $y$  :

$$\mu_y = \bar{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yp_{xy}(x, y)dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} yp_y(y)dy \quad (2.19)$$

- la variance selon  $x$  :

$$\sigma_x^2 = \overline{(x - \mu_x)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 p_{xy}(x, y)dx dy \quad (2.20)$$

- la variance selon  $y$  :

$$\sigma_y^2 = \overline{(y - \mu_y)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_y)^2 p_{xy}(x, y)dx dy \quad (2.21)$$

Ces quatre définitions coïncident effectivement avec celles qui ont été données au paragraphe précédent. Ces notions (moyennes et variances) ne permettent que de caractériser une seule variable aléatoire et non la corrélation existant entre plusieurs d'entre elles. Il est donc important de définir le moment central croisé entre les variables  $x$  et  $y$  :

- la covariance :

$$\sigma_{xy} = \overline{(x - \mu_x)(y - \mu_y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) p_{xy}(x, y)dx dy \quad (2.22)$$

Contrairement aux variances de  $x$  et  $y$ , cette grandeur peut être négative. On lui préfère souvent le coefficient de corrélation adimensionnel  $\rho_{xy}$  défini par :  $\sigma_{xy} = \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y$ . On

peut démontrer grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz<sup>2</sup> que ce coefficient est toujours compris entre  $-1$  et  $1$ .

Lorsque plus de deux variables aléatoires sont considérées en même temps, les variances et covariances sont regroupées dans la matrice de covariance  $[\sigma]$  :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Le but de l'analyse stochastique est de définir de telles matrices par exemple, pour les efforts internes dans un élément ou pour les déplacements de ses extrémités. L'estimation de la matrice de covariance entière et non pas de ses éléments diagonaux uniquement permet d'obtenir, en plus d'un effort extrême, une densité de probabilité conjointe entre éléments de réduction différents. Les termes hors diagonale permettent en effet d'apprécier la corrélation entre diverses variables aléatoires, et donc les valeurs concomitantes aux efforts extrêmes par exemple.

Dans certains cas, il peut également s'avérer intéressant de calculer des matrices de covariance entre efforts en différents endroits de la structure (par exemple, pour un portique, les moments maxima en pieds de colonnes se produisent-ils en même temps ?) ou même entre efforts et déplacements (pour une poutre console, quel est la relation entre le déplacement en tête et le moment d'encastrement ?)

### 2.2.3 Exemple

Considérons à titre d'exemple la densité de probabilité conjointe entre deux variables aléatoires gaussiennes centrées  $x$  et  $y$  :

$$p_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{x}{\sigma_x}\frac{y}{\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right]} \quad (2.24)$$

On vérifie aisément que les densités de probabilité marginales de  $x$  et  $y$  s'expriment respectivement par :

$$p_x(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{xy}(a, b) db = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_x^2}} \quad (2.25)$$

$$p_y(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{xy}(a, b) da = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{b^2}{2\sigma_y^2}} \quad (2.26)$$

A partir de celles-ci, il est alors possible de déterminer les densités de probabilité conditionnelles entre les variables  $x$  et  $y$ . Par exemple, la densité de probabilité de  $x$  lorsque  $y$

<sup>2</sup>  $\frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2} = \frac{(\sum_i x_i y_i)^2}{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2} \leq 1$

est fixé :

$$p_{x/y}(x, y) = \frac{p_{xy}(a, b)}{p_y(b)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{x}{\sigma_x} \frac{y}{\sigma_y} + \rho^2 \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right]} \quad (2.27)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{x}{\sigma_x} - \rho \frac{y}{\sigma_y} \right]^2} \quad (2.28)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x} e^{\frac{-1}{2} \left[ \frac{x}{\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x} - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{y}{\sigma_y} \right]^2} \quad (2.29)$$

En comparant le résultat obtenu avec la formulation générale d'une densité de probabilité gaussienne (Equ. (2.8)), on se rend compte qu'il ne s'agit en fait que d'une nouvelle variable aléatoire gaussienne dont la moyenne et l'écart-type sont donnés par :

$$\mu = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{y}{\sigma_y} \quad (2.30)$$

$$\sigma = \sqrt{1-\rho^2}\sigma_x \quad (2.31)$$

En première ligne, la figure 2.10 schématise des densités de probabilités conjointes entre les variables aléatoires  $x$  et  $y$  pour différentes valeurs du coefficient de corrélation. Ensuite, pour chacun des cas de corrélation considérés, elle reprend les densités de probabilités conditionnelles obtenues pour  $x$  lorsque la valeur de  $y$  est fixée à  $0.7\sigma_y$  :

- $\rho = -0.8$  : corrélation négative entre les variables  $x$  et  $y$ . Lorsque  $y$  est plus grand que sa moyenne, il y a plus de chance que  $x$  soit plus petit que sa moyenne ;
- $\rho = 0$  : pas de corrélation. Quelle que soit la valeur prise par la variable aléatoire  $y$ , la densité de probabilité de  $x$  reste inchangée et égale à sa densité de probabilité marginale;
- $\rho = 0.4$  : corrélation positive entre les variables  $x$  et  $y$ . Lorsque  $y$  est plus grand que sa moyenne, il y a plus de chance que  $x$  le soit également.

On constate sur cette figure que plus la corrélation est grande entre les deux variables (en valeur absolue), plus la valeur de  $x$  est restreinte lorsque celle de  $y$  est fixée. Ceci est tout à fait conforme à l'intuition et est confirmé par la relation (2.31) qui fournit une variance d'autant plus faible que le coefficient de corrélation  $\rho$  s'approche de l'unité.

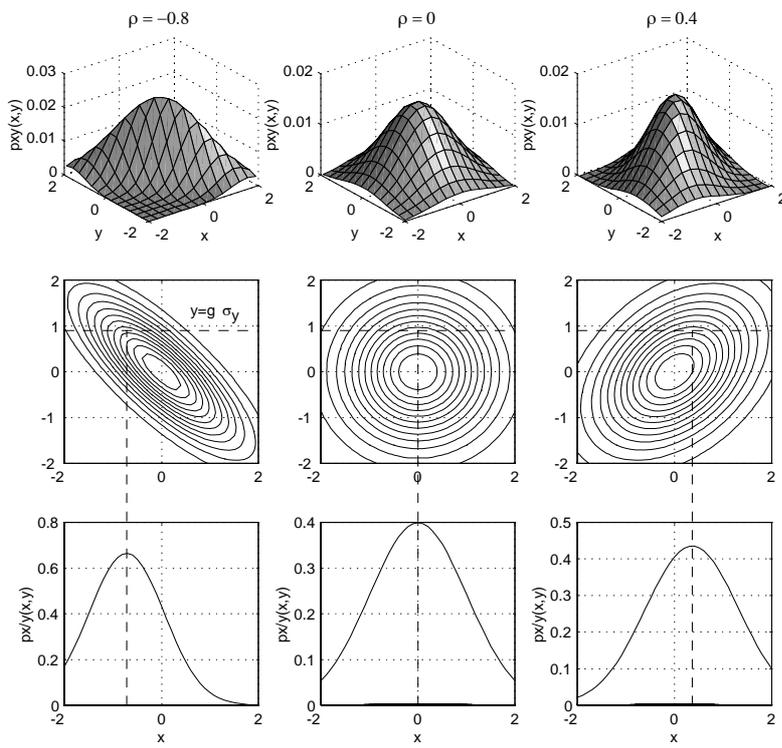


FIGURE 2.10. CORRÉLATION ENTRE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES GAUSSIENNES

---

# Chapitre 3

---

## La théorie des processus aléatoires

Le but de ce chapitre est de fournir les outils mathématiques nécessaires à la caractérisation des grandeurs probabilistes mises en jeu lors de l'analyse stochastique d'une structure. La théorie des probabilité qui vient d'être résumée permet de représenter des variables aléatoires (déplacements, accélérations ou efforts extrêmes en un instant donné). Cependant, les caractéristiques des déplacements et des efforts au cours du temps (c'est-à-dire des fonctions) doivent être également connues afin de déterminer les variances ou covariances de ces variables aléatoires. C'est la théorie des processus aléatoires qui permet de prendre en compte ce type d'être stochastique.

Considérons ainsi que les résultats des expériences aléatoires ne sont plus des scalaires (variables aléatoires) mais plutôt des fonctions d'un ou plusieurs paramètres (processus aléatoires). De tels résultats sont par exemple la réponse dynamique en un point d'une structure, l'évolution de la rugosité le long d'une route, l'ordonnée du profil de la mer, l'accélération du sol lors d'un tremblement de terre, l'évolution au cours du temps de la vitesse du vent en un point, ou encore, le champ de vitesse du vent dans un volume déterminé.

Si chaque échantillon (relevé ou imaginable) d'un processus est unique en son genre, il existe cependant des caractéristiques générales attribuables au processus. Ainsi, sur la figure 3.1, on constate que les échantillons de chaque colonne ont effectivement quelque chose de semblable. Cette figure montre par exemple que l'accélération du sol en un endroit donné est non stationnaire, que son enveloppe ainsi que son contenu fréquentiel sont plus ou moins constants. Par contre, la vitesse du vent peut être admise comme étant stationnaire (sur des durées suffisamment longues) avec un contenu fréquentiel relativement constant.

La théorie des processus aléatoires se propose de fournir une méthode pour caractériser les processus et ainsi les classer dans l'une ou l'autre catégorie. Dans la mesure où la fonction du temps à traiter (la pression du vent sur une paroi) doit être utilisée pour une analyse dynamique, c'est principalement le contenu fréquentiel du signal qui nous intéresse. En commençant par les processus aléatoires d'un seul paramètre (le temps), les chapitres ci-dessous rappellent les notions nécessaires à leur caractérisation.

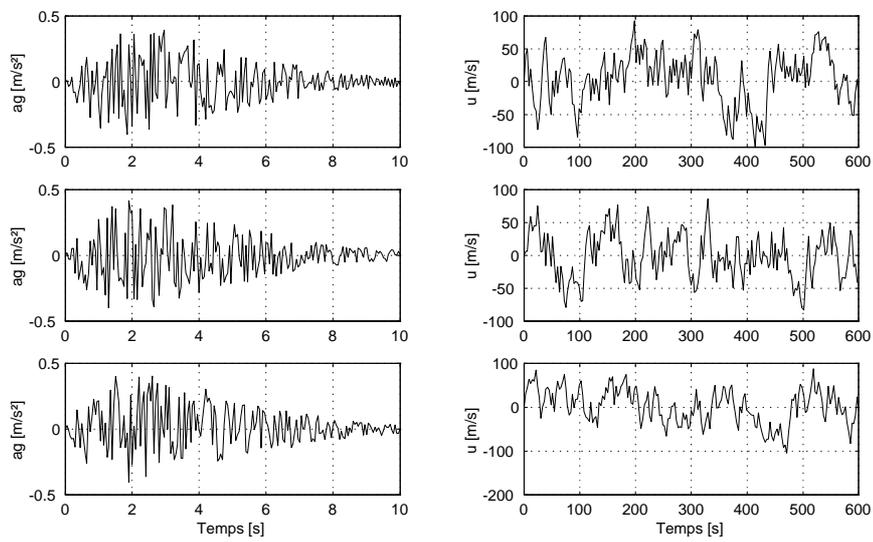


FIGURE 3.1. EXEMPLES D'ÉCHANTILLONS DE PROCESSUS ALÉATOIRES (ACCÉLÉRATION DU SOL, VITESSES DE VENT)

## 3.1 Caractérisation des processus aléatoires

### 3.1.1 Densités de probabilité

Etant donné qu'un processus aléatoire n'est jamais qu'une succession de valeurs infiniment proches les unes des autres, il est tout à fait naturel d'essayer de les caractériser de la même manière que les variables aléatoires. Il paraît donc logique d'utiliser la densité de probabilité de premier ordre  $p_x(x, t)$  qui est maintenant une fonction du temps puisque la densité peut éventuellement évoluer au cours du temps (cas d'un processus instationnaire). Comme dans le cas d'une variable aléatoire,  $p_x(x, t)dx$  représente la probabilité que la fonction prenne une valeur comprise entre  $x$  et  $x + dx$  à l'instant  $t$ .

La figure 3.2 montre par exemple la densité de probabilité de premier ordre d'un processus gaussien instationnaire dont la moyenne augmente et la variance diminue au cours du temps. La connaissance de cette fonction permet de déterminer un fuseau enveloppe en dehors duquel un échantillon du processus a peu de chance de se trouver. Il suffit de constater qu'en chaque instant il y a une probabilité de 0.997 (Tab. 2.1) que l'échantillon se trouve compris entre  $\mu(t) - 3\sigma(t)$  et  $\mu(t) + 3\sigma(t)$ . Ceci permet d'obtenir le fuseau représenté en traits pointillés sur le graphique central<sup>3</sup>.

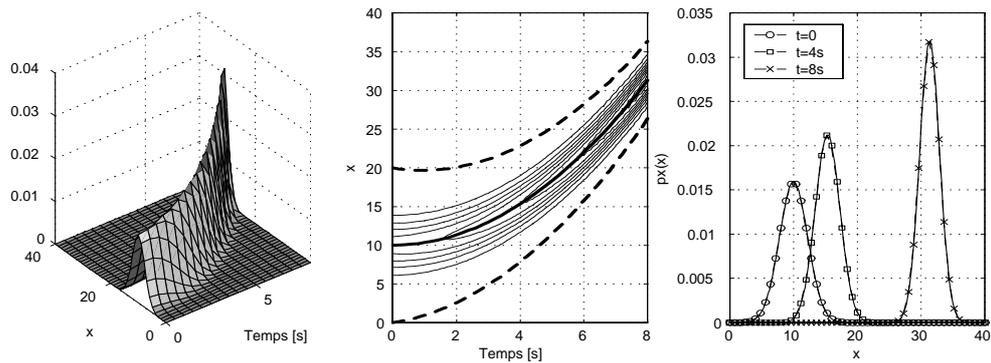


FIGURE 3.2. DENSITÉ DE PROBABILITÉ DE PREMIER ORDRE (PROCESSUS INSTATIONNAIRE)

On comprend aisément que cette première densité de probabilité donne déjà une quantité d'information non négligeable sur le processus mais elle ne le caractérise pas encore suffisamment. C'est pour cette raison que l'on introduit la densité de probabilité d'ordre 2 :

$$p_x(x_1, t_1; x_2, t_2) \quad (3.1)$$

telle que  $p_x(x_1, t_1; x_2, t_2)dx_1dx_2$  représente la probabilité que  $x$  se trouve entre  $x_1$  et  $x_1 + dx_1$  à l'instant  $t_1$  et entre  $x_2$  et  $x_2 + dx_2$  à l'instant  $t_2$  (Fig. 3.3).

<sup>3</sup> Nous verrons dans la suite qu'il existe des méthodes plus précises pour estimer les valeurs extrémales qu'un échantillon de processus aléatoire peuvent prendre

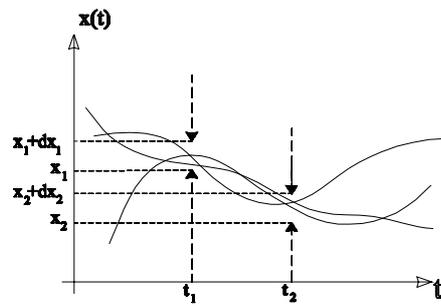


FIGURE 3.3. DENSITÉ DE PROBABILITÉ DE SECOND ORDRE

La caractérisation du processus aléatoire semble désormais se préciser petit à petit mais on imagine facilement qu'une caractérisation complète du processus nécessiterait de définir les densités de probabilité d'ordres de plus en plus élevés (jusqu'à l'infini, en principe).

Connaissant la densité de probabilité d'un certain ordre, il est toujours possible de retrouver les densités de probabilité d'ordre inférieur par intégration. Par exemple, pour obtenir la densité de probabilité d'ordre 1 à partir de la densité de probabilité d'ordre 2, il suffit d'intégrer sur  $x_2$  :

$$p_x(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2 \quad (3.2)$$

Cette définition est à rapprocher de la densité de probabilité conjointe de plusieurs variables aléatoires. En effet, ces deux notions permettent d'une part d'apprécier une éventuelle corrélation entre variables pour l'une ou entre valeurs prises par la fonction en différents instants pour l'autre. D'autre part, ce sont des notions très complètes puisqu'elles permettent par exemple de retrouver des densités de probabilité marginale (d'ordre inférieur).

Dans le cas de plusieurs processus aléatoires, on définit aussi des densités de probabilité conjointes<sup>4</sup> :

- d'ordre 1 :  $p_{xy}(x_1, t_1; y_1, s_1)$

$p_{xy}(x_1, t_1; y_1, s_1) dx_1 dy_1$  représente alors la probabilité que  $x$  se trouve entre  $x_1$  et  $x_1 + dx_1$  en  $t_1$  et que  $y$  se trouve entre  $y_1$  et  $y_1 + dy_1$  en  $s_1$ .

- d'ordre 2 :  $p_{xy}(x_1, t_1; x_2, t_2; y_1, s_1)$

$p_{xy}(x_1, t_1; x_2, t_2; y_1, s_1) dx_1 dx_2 dy_1$  représente la probabilité que  $x$  se trouve entre  $x_1$  et  $x_1 + dx_1$  en  $t_1$  et que  $y$  se trouve entre  $y_1$  et  $y_1 + dy_1$  en  $s_1$  à condition que  $x$  se trouve entre  $x_2$  et  $x_2 + dx_2$  en  $t_2$ .

### 3.1.2 Moyennes d'ensemble – Les fonctions moments

On comprend aisément que cette première manière de caractériser un processus aléatoire est très complète mais peu évidente à mettre en œuvre en pratique. Une méthode tout à fait équivalente consisterait en la représentation des transformées de Fourier (par rapport à la variable et non par rapport au temps) de ces densités de probabilité, ce que l'on appelle les fonctions caractéristiques :

$$M_x(\vartheta_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vartheta_1 x(t)} p_x(x, t) dx \quad (3.3)$$

$$M_x(\vartheta_1, t_1; \vartheta_2, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vartheta_1 x(t_1)} e^{i\vartheta_2 x(t_2)} p_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (3.4)$$

Généralement, à ce type de représentation du processus aléatoire, on préfère plutôt les

<sup>4</sup> Le terme conjoint est cette fois utilisé parce qu'il y a plusieurs fonctions

fonctions moments qui ne sont en réalité que les termes du développement en série (Taylor) de ces fonctions caractéristiques.

Puisque les fonctions caractéristiques représentent le processus aléatoire aussi bien que les densités de probabilité de tous ordres, il en est bien sûr de même pour les fonctions moment. En d'autres termes, la connaissance de toutes les fonctions moments (il y en a un nombre infini) permet de caractériser parfaitement le processus aléatoire.

Les fonctions moments prennent une forme semblable à celle des moments associés aux variables aléatoires. Les deux premiers moments ont une importance telle qu'ils ont reçu des noms particuliers :

- la moyenne

$$\mu_x(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_x(x, t)dx \quad (3.5)$$

- la fonction d'autocorrélation :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1), x(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2p_x(x_1, t_1; x_2, t_2)dx_1dx_2 \quad (3.6)$$

On définit également la fonction d'autocovariance qui est la fonction d'autocorrélation centrée.

La figure 3.4 représente une illustration de ces deux premiers moments. L'évolution de la moyenne est conforme à l'intuition habituelle qu'elle donne. Quant à l'autocovariance, on constate qu'elle est d'autant plus grande que  $t_1$  et  $t_2$  sont faibles. En effet, les échantillons représentés ont une plus forte variabilité aux premiers instants. De plus, on remarque qu'elle prend des valeurs plus importantes dans le plan bissecteur des axes  $t_1$  et  $t_2$ . Cela ne fait que traduire mathématiquement l'inégalité de Cauchy-Schwartz et physiquement le fait que l'on possède, pour une valeur connue de  $x(t_1)$ , davantage de renseignements sur  $x(t_2)$  lorsque  $t_2$  est proche de  $t_1$ .

Les deux premiers moments jouent un rôle particulièrement important dans la mesure où, en cas de processus gaussien, ils suffisent à caractériser entièrement le processus. De plus, les moments d'ordres plus élevés sont bien plus ardues à obtenir lors de l'identification et, lors d'essais, on ne sait généralement pas déterminer les caractéristiques d'ordres supérieurs à trois.

Pour les processus stationnaires, ces deux fonctions sont indépendantes d'un changement de l'origine du temps. Ainsi,  $\mu_x(t) = \mu_x$  est une constante et  $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\Delta t)$  devient une fonction du décalage temporel  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Il est également important de noter que les définitions données de la moyenne et de la fonction d'autocorrélation font intervenir les densités de probabilité inconnues a priori. Bien que ces relations en constituent la définition, les fonctions moment sont généralement utilisées autrement en pratique.

En effet, les relations qui font appel à des moyennes d'ensemble (notée  $E[ ]$ ) sont peu faciles à utiliser. Au lieu de parcourir un ensemble d'échantillons et de relever la valeur de la fonction en un instant choisi, il serait préférable de ne considérer qu'un seul échantillon

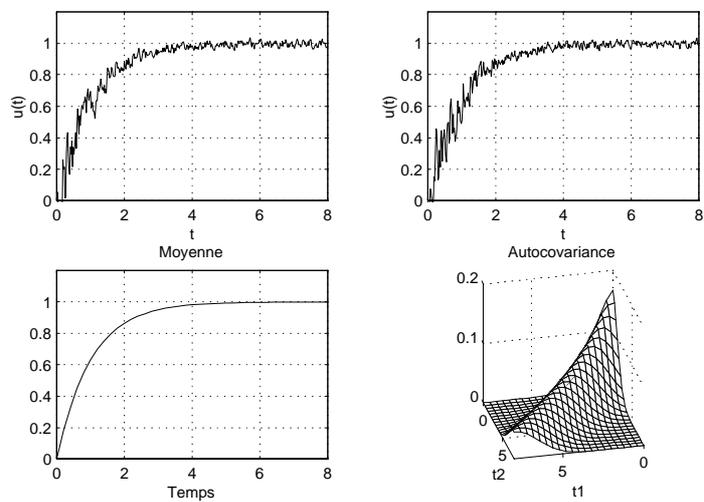


FIGURE 3.4. DENSITÉ DE PROBABILITÉ DE SECOND ORDRE (PROCESSUS INSTATIONNAIRE)

et de réaliser la moyenne en faisant varier cette fois le temps. Le théorème d'ergodicité postule que ces deux moyennes sont égales. Il s'agit là d'une hypothèse simplificatrice très importante mais qui est souvent posée pour les processus stationnaires.

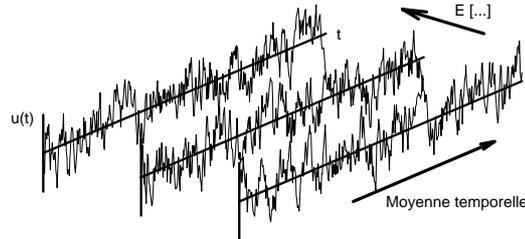


FIGURE 3.5. ILLUSTRATION DE L'ERGODICITÉ

La fonction d'autocorrélation calculée sur un échantillon d'un processus stationnaire:

$$R_{xx}(\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t + \Delta t)dt \quad (3.7)$$

est donc supposée représenter la fonction d'autocorrélation du processus aléatoire.

L'équation (3.7) permet également d'interpréter plus facilement la notion de corrélation:  $R_{xx}(\Delta t)$  prendra en effet des valeurs d'autant plus grandes que  $x(t)$  et  $x(t + \Delta t)$  ont des valeurs proches (conséquence de Cauchy-Schwartz), c'est-à-dire sont corrélées. Par exemple pour un processus aléatoire dont la fonction d'autocorrélation serait représentée par le dessin de la figure 3.6, on peut affirmer que la connaissance de la valeur de la fonction en l'instant  $t$  n'aidera presque en aucune manière à la connaissance de la valeur en  $t + 3$ . Par contre, la valeur prise en l'instant  $t$  influence dans une certaine mesure la valeur prise en  $t + 0.5$ .

### 3.1.3 Propriétés des fonctions moments

L'équation (3.7) est la forme habituelle sous laquelle est représentée la fonction d'autocorrélation. Comme annoncé, elle est bien plus maniable que la définition de base. De cette nouvelle forme, on peut par exemple déduire ces propriétés importantes :

- La valeur de la fonction d'autocorrélation à l'origine est égale à la variance (de l'échantillon)

$$R_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} [x(t)]^2 dt = \sigma_x^2 \quad (3.8)$$

- La fonction d'autocorrélation est une fonction paire

$$R_{xx}(-\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t - \Delta t)dt = R_{xx}(\Delta t) \quad (3.9)$$

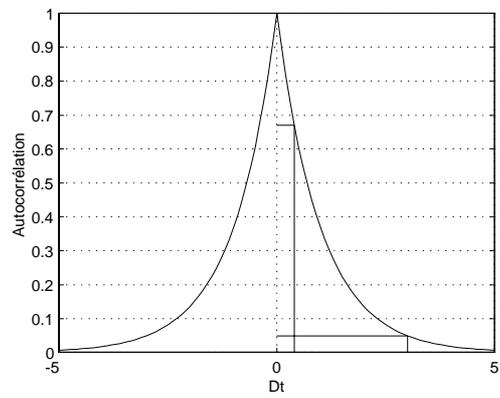


FIGURE 3.6. INTERPRÉTATION DE LA FONCTION D'AUTOCORRÉLATION (PROCESSUS STATIONNAIRE)

- Pour un processus stationnaire, la fonction d'autocorrélation est maximale à l'origine. Cette propriété représente bien le sens physique que la corrélation doit faire passer : la fonction d'autocorrélation représente un certain pourcentage de certitude sur  $x(t + \Delta t)$  lorsque  $x(t)$  est connu.

$$|R_{xx}(\Delta t)| \leq R_{xx}(0) \quad (\text{conséquence de Cauchy-Schwartz}) \quad (3.10)$$

- Une autre propriété intéressante mais dont la démonstration sort du cadre de ce document relie les fonctions d'autocorrélation d'un processus et de ses dérivées successives. Cette propriété s'avère évidemment être intéressante lorsqu'il s'agit par exemple de calculer la fonction d'autocorrélation de la vitesse ou l'accélération en un point lorsque l'on connaît celle de son déplacement.

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\Delta t) = \frac{-d^2 R_{xx}(\Delta t)}{d\Delta t^2} \quad (3.11)$$

$$R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\Delta t) = \frac{d^4 R_{xx}(\Delta t)}{d\Delta t^4} \quad (3.12)$$

### 3.1.4 Les densités spectrales de puissance

La fonction d'autocorrélation est définie non négative : quelle que soit la fonction complexe  $h(t)$  définie sur l'intervalle  $[a, b[$  :

$$\int_a^b \int_a^b R_{xx}(t_1, t_2) \overline{h(t_1)} h(t_2) dt_1 dt_2 \geq 0 \quad (3.13)$$

Ceci implique (théorème de Bochner) que la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation soit toujours positive. Cette fonction occupe un rôle majeur dans l'analyse stochastique des structures. Elle porte le nom de densité de puissance spectrale :

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.14)$$

Il s'agit donc d'une fonction positive et réelle puisque la fonction d'autocorrélation est paire. Elle représente une distribution fréquentielle de l'énergie moyenne contenue dans le processus aléatoire.

Les deux fonctions  $S_{xx}(\omega)$  et  $R_{xx}(\tau)$  forment donc une paire de Fourier. La relation directe (Equ. (3.14)) et la transformée inverse :

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.15)$$

forment les égalités bien connues du Théorème de Wiener-Khintchine.

Pour les processus aléatoires rencontrés en pratique, la densité spectrale de puissance vérifie la relation suivante :

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} E \left[ |X_i(\omega, T)|^2 \right] \quad (3.16)$$

où les  $X_i(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} x_i(t) e^{-j\omega t} dt$  représentent les transformées de Fourier tronquées de chacun des échantillons. Cette relation permet d'interpréter la densité spectrale de puissance comme une répartition fréquentielle de l'énergie contenue dans le processus aléatoire. Il s'agit donc d'un moyen supplémentaire à la traditionnelle transformée de Fourier de la réponse pour caractériser le contenu fréquentiel d'une fonction. Le théorème d'ergodicité suppose à nouveau que la densité spectrale de puissance peut être calculée à l'aide d'un seul échantillon :

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |X_i(\omega, T)|^2 \quad (3.17)$$

Ce théorème d'ergodicité est donc fortement utile car, connaissant un échantillon du processus aléatoire, il est possible d'en calculer la fonction d'autocorrélation (Equ. (3.7)) et la densité spectrale de puissance (Equ. (3.17)).

Lorsque l'on remplace  $\tau$  par 0 dans la seconde relation de Wiener-Khintchine, on obtient la première propriété importante de la densité spectrale de puissance (figure 3.7) :

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = \sigma_x^2 \quad (3.18)$$

L'intégrale de la densité spectrale de puissance est égale à la variance du processus considéré.<sup>5</sup>

Les propriétés développées concernant les fonctions d'autocorrélation peuvent être traduites en termes de densités spectrales de puissance en prenant la transformée de Fourier membre à membre de la relation en question. Ainsi, par exemple, la relation entre le processus et sa dérivée devient :

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\Delta t) = \frac{-d^2 R_{xx}(\Delta t)}{d\Delta t^2} \Rightarrow S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_{xx}(\omega) \quad (3.19)$$

$$R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\Delta t) = \frac{d^4 R_{xx}(\Delta t)}{d\Delta t^4} \Rightarrow S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_{xx}(\omega) \quad (3.20)$$

<sup>5</sup> L'analyse au vent turbulent travaille avec des densités spectrales de puissance légèrement différentes. On peut d'ailleurs souvent constater une certaine confusion dans la littérature. Le plus simple pour introduire la différence consiste à mentionner cette propriété fondamentale; pour les densités spectrales utilisées dans l'analyse au vent turbulent, elle s'exprime par  $\sigma_x^2 = \int_0^{+\infty} S_{xx}(n) dn$ . La variance du processus est donc obtenue en intégrant sur les fréquences et non pas sur les pulsations. De plus, afin de ne travailler qu'avec des fréquences positives (dont on perçoit mieux le sens physique), les bornes d'intégration sont 0 et  $+\infty$ . Jusqu'à la fin de ce chapitre, nous continuerons cependant d'utiliser les notations habituelles à la théorie des processus aléatoires.

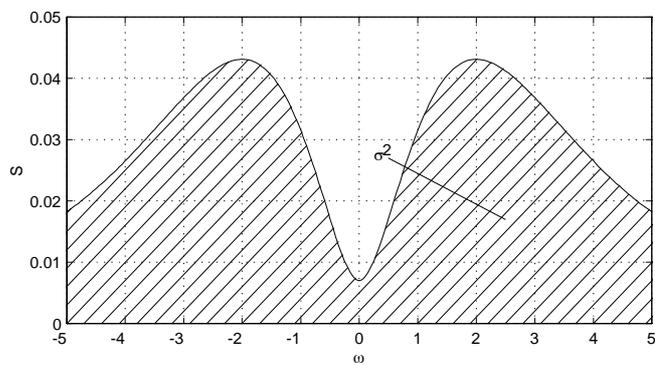


FIGURE 3.7. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DE LA DENSITÉ SPECTRALE DE PUISSANCE

On est généralement amené à définir les moments spectraux par la relation :

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i S_{xx}(\omega) d\omega \quad (3.21)$$

De cette définition, il découle que :

- le moment spectral d'ordre 0 s'identifie à la variance du processus (déplacement)
- le moment spectral d'ordre 2 s'identifie à la variance du processus dérivé (vitesse)
- le moment spectral d'ordre 4 s'identifie à la variance du processus dérivé deux fois (accélération)

Ces notions seront amplement utilisées à l'occasion du calcul des probabilités de franchissement de seuil et des valeurs maximales.

Etant donné que l'on sera dans la suite amené à calculer la réponse d'un système soumis à une excitation extérieure variable dans le temps, c'est-à-dire procéder à une intégration de convolution dans le domaine temporel, on comprend dès à présent tout l'intérêt de la densité de puissance spectrale puisque dans le domaine fréquentiel, la même opération se traduit par une multiplication. D'autres propriétés importantes des densités spectrales de puissance seront développées dans le cadre de processus aléatoires à plusieurs variables.

### 3.1.5 Exemples

Le processus aléatoire le plus simple du point de vue analytique est le bruit blanc. Il est défini par une densité spectrale de puissance constante :

$$S_{xx}(\omega) = S_0 \quad (3.22)$$

Puisqu'elle est sa conjointe dans une paire de Fourier, la fonction d'autocorrélation associée est donc une impulsion de Dirac centrée à l'origine :

$$R_{xx}(\Delta t) = 2\pi S_0 \delta(\Delta t) \quad (3.23)$$

Ce processus n'est pas physique puisqu'il est caractérisé par une variance infinie (intégrale de la densité spectrale de puissance). Cependant, sous certaines conditions, un processus réel peut être approché par un bruit blanc. Cette approximation ne peut être que locale si bien que globalement le processus réel ne sera pas d'énergie infinie. (Toute l'énergie contenue dans le bruit blanc doit être filtrée). Cette méthode connue sous le nom d'approximation en bruit blanc sera développée au chapitre 4.

Le processus à corrélation exponentielle est un autre exemple intéressant qui indique clairement les deux propriétés principales de la fonction d'autocorrélation, à savoir qu'elle est décroissante et que sa valeur en  $\Delta t = 0$  représente la variance du processus :

$$R_{xx}(\Delta t) = \sigma_x^2 e^{-\beta|\Delta t|} \quad (3.24)$$

La densité spectrale de puissance associée à cette autocorrélation peut être obtenue à l'aide de la première relation de Wiener-Khinchine :

$$S_{xx}(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi\beta} \frac{\beta^2}{\beta^2 + \omega^2} \quad (3.25)$$

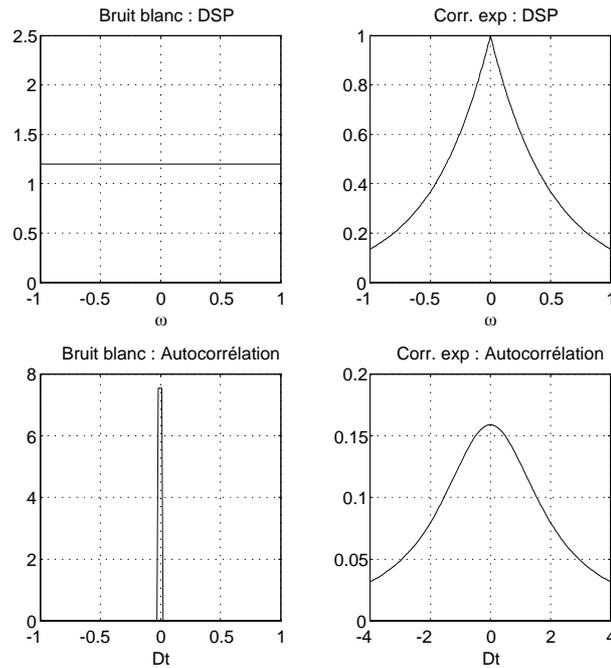


FIGURE 3.8. EXEMPLES DE DENSITÉS SPECTRALES ET FONCTIONS D'AUTOCORRÉLATIONS HABITUELLES

## 3.2 Caractérisation des processus aléatoires conjoints

### 3.2.1 Notions de base : cas de deux processus

Pour deux processus différents, on définit également la fonction de cross-corrélation par:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E [x(t_1), y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 y_1 p_{xy}(x_1, t_1; y_1, t_2) dx_1 dy_1 \quad (3.26)$$

A cette définition, on préfère plutôt l'expression dérivée du théorème d'ergodicité qui permet un calcul simple de cette quantité à partir d'une quelconque réalisation de chacun

des deux processus :

$$R_{xy}(\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y(t + \Delta t)dt \quad (3.27)$$

Cette fonction possède des propriétés semblables à celles de la fonction d'autocorrélation, à savoir :

- la valeur de la fonction de cross-corrélation à l'origine est égale à la covariance (entre échantillons) :

$$R_{xy}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y(t)dt = \sigma_{xy} \quad (3.28)$$

- la fonction de cross-corrélation est une fonction « symétrique » :

$$R_{xy}(-\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y(t - \Delta t)dt = R_{yx}(\Delta t) \quad (3.29)$$

- Au paragraphe précédent, nous avons vu (sans démonstration) la relation existant entre la fonction d'autocorrélation d'un processus et du processus dérivé. Il est également possible de prouver que la fonction de cross-corrélation entre un processus et sa dérivée s'exprime par :

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\Delta t) = \frac{dR_{xx}(\Delta t)}{d\Delta t} = R_{\dot{x}\dot{x}}(-\Delta t) = -R_{\dot{x}\dot{x}}(\Delta t) \quad (3.30)$$

Etant donné que la fonction d'autocorrélation  $R_{xx}(\Delta t)$  est une fonction paire et continûment dérivable, sa pente à l'origine ne peut qu'être nulle si bien que :

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(0) = 0 \quad (3.31)$$

ce qui exprime qu'un processus aléatoire stationnaire et sa dérivée ne sont en moyenne pas corrélés. Cette propriété sera utilisée lors de l'établissement de la théorie de franchissement de seuil.

On définit également la densité de puissance spectrale croisée de deux processus aléatoires qui caractérise la corrélation au même titre que la fonction de cross-corrélation. En effet, elle est définie comme étant sa transformée de Fourier :

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \leftrightarrow R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.32)$$

Elle est généralement complexe et satisfait la relation :

$$S_{xy}(\omega) = \overline{S_{yx}(\omega)} \quad (3.33)$$

puisque

$$R_{xy}(\Delta t) = R_{yx}(-\Delta t) \quad (3.34)$$

Une relation similaire à la relation (3.17) fournit un moyen simple de calculer cette fonction à partir d'un échantillon de chaque processus (théorème d'ergodicité) :

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \left| X_i(\omega, T) \overline{Y_i(\omega, T)} \right| \quad (3.35)$$

où les  $X_i(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(t) e^{-j\omega t} dt$  et les  $Y_i(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y_i(t) e^{-j\omega t} dt$  représentent les transformées de Fourier tronquées de chacun des échantillons des processus aléatoires.

Tout comme le coefficient de corrélation défini pour les variables aléatoires ne peut varier que dans l'intervalle  $[-1; 1]$  (conséquence de Cauchy-Schwartz), on peut démontrer une relation semblable pour la densité spectrale croisée :

$$|S_{xy}(\omega)|^2 \leq S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega) \quad (3.36)$$

On est donc amené à définir une fonction de cohérence entre les processus aléatoires  $x$  et  $y$  :

$$\Psi_{xy}(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega)}} \quad (3.37)$$

Cette fonction complexe donne le sens physique de la cohérence car ses valeurs (en norme) sont comprises entre  $-1$  et  $+1$ .

### 3.2.2 Notion de matrice de densité spectrale de puissance et de matrice de corrélation.

Lorsque l'on traite un grand nombre de processus aléatoires il est souvent plus commode de les regrouper dans un vecteur. On obtient alors un processus aléatoire vectoriel, dont chaque composante est elle-même un processus aléatoire :

$$\{x(t)\} = \left\{ \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{array} \right\} \quad (3.38)$$

On regroupe alors les  $n$  fonctions d'autocorrélation et les  $n(n-1)$  fonctions de cross-corrélation dans ce que l'on appelle la matrice de corrélation  $[R]$ . Tout comme chacun de ses éléments, elle est définie par une relation basée sur les densités de probabilité d'ordres 1 et 2 mais on préfère en général utiliser la propriété découlant du théorème d'ergodicité qui

permet de la calculer à partir de réalisations de chacun des processus :

$$R_{ij} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x_i(t) x_j(t + \Delta t) dt \quad (3.39)$$

ou, sous forme matricielle :

$$[R] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} \{x(t)\} \{x(t + \Delta t)\}^T dt \quad (3.40)$$

Il s'agit donc effectivement d'une matrice dont les éléments diagonaux  $(i, i)$  sont les fonctions d'autocorrélation des *i*<sup>èmes</sup> processus aléatoires (influence de  $x_i(t)$  sur la valeur de  $x_i(t + \Delta t)$ ), tandis que les éléments hors diagonale  $(i, j)$  représentent les fonctions de cross-corrélation entre les processus aléatoires  $i$  et  $j$  (influence de  $x_i(t)$  sur la valeur de  $x_j(t + \Delta t)$ ):

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{x_1 x_1} & R_{x_1 x_2} & \cdots & R_{x_1 x_n} \\ R_{x_2 x_1} & R_{x_2 x_2} & \cdots & R_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{x_n x_1} & R_{x_n x_2} & \cdots & R_{x_n x_n} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

De même, on peut définir, dans le domaine fréquentiel, la matrice de densité spectrale de puissance  $[S]$ . Chacun de ses éléments est la transformée de Fourier de l'élément correspondant de la matrice de corrélation :

$$S_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.42)$$

Les éléments diagonaux sont donc les densités spectrales de puissance de chacune des composantes du processus aléatoire vectoriel alors que les termes hors diagonales représentent les densités croisées, pour rappel, le plus souvent imaginaires.

Sous l'hypothèse d'ergodicité, la matrice de densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire peut également être calculée directement à partir de réalisations de chacun des processus, sans passer par la matrice de covariance. Il suffit pour cela de considérer une relation semblable aux équations (3.17) et (3.35) des paragraphes précédents :

$$S_{ij}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \left| X_i(\omega, T) \overline{X_j(\omega, T)} \right| \quad (3.43)$$

ou, sous forme matricielle :

$$[S(\omega)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \left| \{X(\omega, T)\} \overline{\{X(\omega, T)\}}^T \right| \quad (3.44)$$

où  $\{X(\omega, T)\}$  représente le vecteur des transformées de Fourier tronquées de chacun des processus.

### 3.2.3 Propriétés importantes de la matrice de densité spectrale de puissance

Les développements mathématiques qui ont été menés sont assez généraux et permettent de caractériser les processus aléatoires stationnaires. Les notions introduites vont être utilisées dans le cadre de l'analyse dynamique stochastique des structures. Il convient maintenant d'ajouter quelques propriétés des matrices de densité spectrale de puissance qui seront utiles dans la suite.

**3.2.3.1 Proposition 1** Admettons d'abord que l'on connaisse la matrice de densité spectrale  $[S_x]$  associée à un processus aléatoire vectoriel  $\{x(t)\}$  et que l'on désire obtenir la matrice de densité spectrale  $[S_y]$  associée à un autre processus  $\{y(t)\}$  défini en fonction du premier par le changement de variable affiné suivant :

$$\underbrace{\{y(t)\}}_{m \times 1} = \underbrace{[Z]}_{m \times n} \underbrace{\{x(t)\}}_{n \times 1} \quad (3.45)$$

Cette propriété sera par exemple utilisée lors de la détermination de la matrice de densité spectrale des déplacements nodaux à partir de celle des amplitudes modales ( $\{u(t)\} = [\Phi] \{\eta(t)\}$ ).

Par définition, la matrice de corrélation du processus  $\{y(t)\}$  s'obtient par :

$$[R_y] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} \{y(t)\} \{y(t + \Delta t)\}^T dt \quad (3.46)$$

$$= [Z] \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} \{x(t)\} \{x(t + \Delta t)\}^T dt [Z]^T = [Z] [R_x] [Z]^T \quad (3.47)$$

En prenant les transformées de Fourier membre à membre et élément par élément, on obtient la relation entre les matrices de densité spectrale de puissance :

$$\underbrace{[S_y]}_{m \times m} = \underbrace{[Z]}_{m \times n} \underbrace{[S_x]}_{n \times n} \underbrace{[Z]^T}_{n \times m} \quad (3.48)$$

**3.2.3.2 Proposition 2** Il est également intéressant de pouvoir déterminer la matrice de densité spectrale d'un produit dans le domaine fréquentiel. Admettons ainsi que l'on connaisse la matrice de densité spectrale d'un processus vectoriel  $\{x(t)\}$  ainsi qu'une la matrice de transfert  $[H(\omega)]$  et que l'on veuille déterminer la matrice de densité spectrale du processus défini par :

$$\underbrace{\{Y(\omega)\}}_{m \times 1} = \underbrace{[H(\omega)]}_{m \times n} \underbrace{\{X(\omega)\}}_{n \times 1} \quad (3.49)$$

où  $\{X(\omega)\}$  et  $\{Y(\omega)\}$  représentent les transformées de Fourier des processus aléatoires  $\{x(t)\}$  et  $\{y(t)\}$ . Cette opération sera rencontrée lors du passage de la matrice de densité de puissance des efforts à la matrice de densité de puissance des déplacements. La résolution de l'équation du mouvement nécessite en effet une intégration de convolution dans le domaine temporel ou une multiplication dans le domaine fréquentiel ( $\{U(\omega)\} = [H(\omega)] \{F(\omega)\}$ ).

L'application de la relation (3.44) au processus aléatoire vectoriel  $\{y(t)\}$  s'écrit :

$$[S_y] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \left| \{Y(\omega, T)\} \overline{\{Y(\omega, T)\}}^T \right| \quad (3.50)$$

$$= [H(\omega)] \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \left| \{X(\omega)\} \overline{\{X(\omega, T)\}}^T \right| \overline{[H(\omega)]}^T \quad (3.51)$$

$$= [H(\omega)] [S_x] \overline{[H(\omega)]}^T \quad (3.52)$$

### 3.2.4 Résumé

Les notions qui ont été développées dans ce chapitre sont évidemment primordiales pour la compréhension de la méthode d'analyse dynamique stochastique. Nous avons d'abord défini dans le cas d'un processus simple les notions de fonction d'autocorrélation et de densité spectrale. Il est important de comprendre ce que chacune d'elles représente dans la mesure où elles occupent le centre du calcul : alors que l'une permet de quantifier l'influence relative d'une mesure en un instant donné sur la mesure relevée quelques secondes plus tard, l'autre donne une image de la répartition en fréquence de l'énergie contenue dans le processus.

La notion d'autocorrélation spatiale n'a pas été introduite mais la transposition est simple et rapide : cette fonction permet d'apprécier l'influence de la valeur du processus en un point de l'espace sur celle en un autre point.

Le but du développement de la théorie des processus aléatoires était d'introduire dans un cadre simple les propriétés de ces deux fonctions. En pratique, ce sont plutôt les matrices de densité de puissance et de covariance qui sont employées. Les deux principales propriétés, à savoir l'influence d'un changement de variable et d'une convolution (ou multiplication dans le domaine fréquentiel) constituent également des points importants de la résolution du problème.

## 3.3 Statistiques des franchissements de seuil

### 3.3.1 Introduction

La théorie des processus aléatoires qui vient d'être développée va nous permettre d'appréhender la structure statistique de diverses grandeurs de la réponse de la structure étudiée : déplacements d'un point, efforts dans un élément, . . . Ces grandeurs aléatoires seront représentées par des processus aléatoires et caractérisées par des densités spectrales de puissance ou, de

manière équivalente, par des fonctions d'autocorrélation. Chacune de ces deux grandeurs permet d'obtenir la variance du déplacement (ou de l'effort) soit par intégration, soit en prenant la valeur à l'origine.

Connaissant la variance du déplacement ainsi que sa moyenne, on peut obtenir la densité de probabilité (de premier ordre) de la variable supposée gaussienne. De même, à partir des densités spectrales de puissance croisées, on peut obtenir les covariances des déplacements en différents points, des efforts en différents points ou même des covariances croisées entre le déplacement en un certain point de la structure et l'effort en un autre endroit (par exemple, pour une poutre-console, la relation entre le déplacement à l'extrémité et le moment à l'encastrement). Ceci permet donc, toujours sous l'hypothèse de variables gaussiennes, de reproduire des densités de probabilité conjointes entre différentes variables. Ces densités de probabilité ne suffisent pas car ce sont les valeurs maximales des efforts, déplacements et accélérations qui sont intéressantes pour le dimensionnement de la structure.

Une première manière assez brutale consiste à utiliser la variance  $\sigma^2$  calculée et à dire simplement que la probabilité d'avoir une valeur plus grande que  $\mu + 3\sigma$  ou plus petite que  $\mu - 3\sigma$  est égale à 0,3% (voir tableau 2.1). Cette méthode pourrait a priori donner une bonne idée de la valeur extrême mais reste à discuter dans la mesure où les fonctions étudiées sont continues et donc composées d'une infinité de valeurs, ce qui devrait donc mener à l'obtention d'un maximum infini.

Les statistiques des valeurs extrêmes développent des mathématiques qui permettent une approche plus fine des valeurs extrémales qui peuvent être relevées dans des réalisations de processus aléatoires. Cette théorie repose sur les statistiques de franchissement de seuil d'une part et des valeurs maximales d'autre part.

### 3.3.2 Statistiques des franchissements de seuil

Tâchons dans un premier temps de déterminer la probabilité de franchissement du seuil  $x = \xi$  avec une pente positive entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . Si l'on considère un intervalle de temps  $dt$  suffisamment court, on peut supposer que chaque échantillon varie linéairement entre  $t$  et  $t + dt$ . Ainsi, la condition de franchissement du seuil est :

$$\dot{x}(t) > \frac{\xi - x(t)}{dt} \quad (3.53)$$

Dans le plan  $(x, \dot{x})$ , la condition de franchissement avec pente positive entre  $t$  et  $t + dt$  est donc représentée par la zone hachurée de la figure 3.10.

La probabilité de franchissement du seuil  $x = \xi$  avec pente positive  $p_{\xi}^+$  s'obtient donc en intégrant la densité de probabilité conjointe entre  $x$  et  $\dot{x}$  sur la zone hachurée :

$$p_{\xi}^+ = \iint_{A_{\xi}} p(x, \dot{x}) dx d\dot{x} = \int_0^{\infty} \int_{\xi - \dot{x}dt}^{\xi} p(x, \dot{x}) \underbrace{dx d\dot{x}}_{\dot{x}dt} \quad (3.54)$$

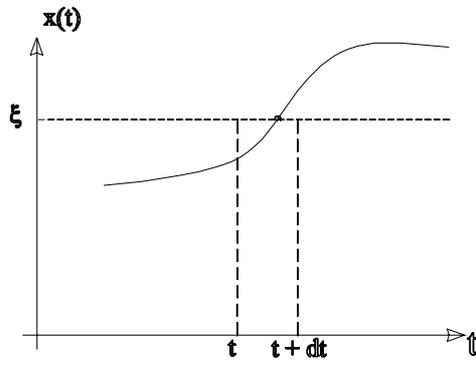


FIGURE 3.9. ILLUSTRATION DU PASSAGE PAR UN SEUIL

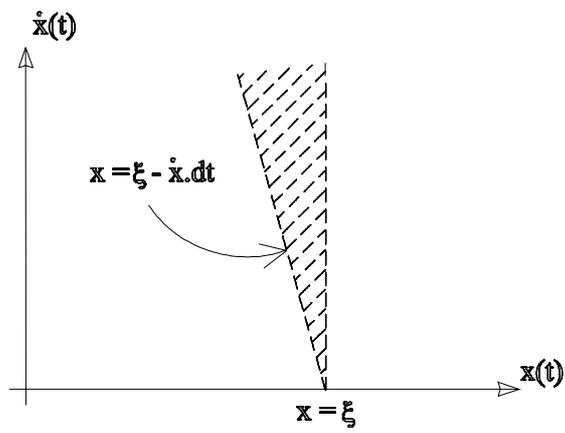


FIGURE 3.10. PARTIE DU PLAN DE PHASE CONCERNÉE PAR LE PASSAGE PAR LE SEUIL  $x = \xi$

Pour un intervalle de temps  $dt$  infiniment petit, on obtient :

$$p_{\xi}^{+} = \int_0^{\infty} \dot{x} dt p(\xi, \dot{x}) d\dot{x} = \nu_{\xi}^{+} dt \quad (3.55)$$

Puisque le processus est supposé stationnaire, il semble en effet assez logique que la probabilité de franchissement du seuil  $x = \xi$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  soit proportionnelle à  $dt$  ; si la durée d'observation est doublée, la probabilité de passage par le seuil choisi est également doublée. Le paramètre  $\nu_{\xi}^{+}$  qui a été introduit a la dimension d'une fréquence ; il représente la fréquence de passage<sup>6</sup> du seuil avec une pente positive. Il s'agit de la formule bien connue de Rice :

$$\nu_{\xi}^{+} = \int_0^{\infty} \dot{x} p(\xi, \dot{x}) d\dot{x} \quad (3.56)$$

Cette formule est tout à fait générale et peut être particularisée dans le cas d'un processus gaussien centré, hypothèse que l'on formule habituellement. Dans ce cas, la densité de probabilité conjointe s'exprime par :

$$p_{x\dot{x}}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{x}{\sigma_x}\frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}}} + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2} \right]} = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{\sigma_{\dot{x}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}} \quad (3.57)$$

ce qui correspond simplement au produit des densités de probabilité marginales puisque les processus ne sont pas corrélés ( $\rho = 0$ )<sup>7</sup>. La fréquence de passage par le seuil  $x = \xi$  s'exprime donc par :

$$\nu_{\xi}^{+} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}} \underbrace{\int_0^{\infty} \dot{x} e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}} d\dot{x}}_{\sigma_{\dot{x}}^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.58)$$

Lorsque  $\xi = 0$ , on obtient la fréquence de passage par zéro avec une vitesse positive :

$$\nu_0^{+} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (3.59)$$

où  $m_2$  et  $m_0$  sont les moments spectraux définis au paragraphe précédent (Equ. (3.21)).

Lorsqu'il s'agit d'un processus en bande étroite<sup>8</sup>, cette fréquence est très proche de la fréquence du pic. Pour s'en convaincre, il suffit en effet de constater la forme d'un échantillon d'un processus en bande étroite (figure 3.11). Etant donné que le contenu est

<sup>6</sup> c'est-à-dire le nombre de passages par unité de temps

<sup>7</sup> Nous voyons ici que les variances des vitesses ont également leur importance dans une analyse stochastique. Elles peuvent être estimées à partir de la formule (3.21)

<sup>8</sup> Processus dont la densité spectrale de puissance possède un pic marqué pour une seule fréquence, contrairement à un processus en bande large pour lequel le contenu fréquentiel est distribué entre plusieurs pics, ou sur une bande de fréquence beaucoup plus étendue

pratiquement unifréquenciel, l'échantillon se rapproche d'une sinusoïde dont l'amplitude varie lentement au cours du temps (ce phénomène de battement provient des contributions des fréquences voisines).

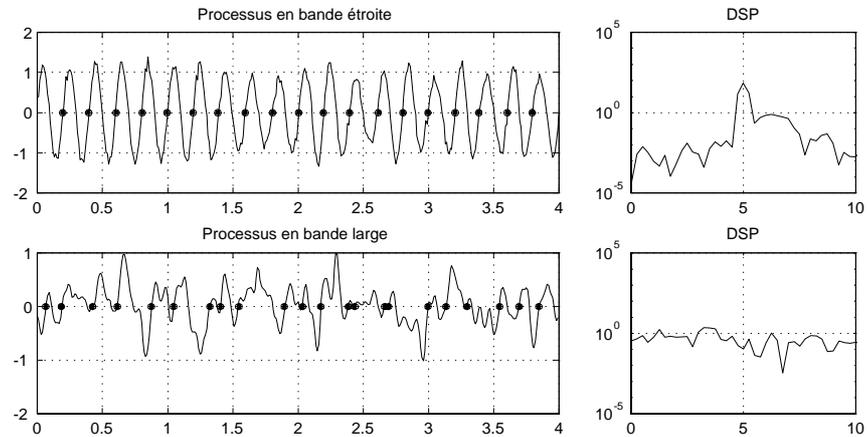


FIGURE 3.11. ILLUSTRATION DE PROCESSUS EN BANDES ÉTROITE ET LARGE : PASSAGES PAR ZÉRO

Pour un processus en bande large, le nombre moyen de passages par zéro doit être calculé sur une durée beaucoup plus longue pour en avoir une bonne estimation. Les passages par zéro sont dispersés moins uniformément et se produisent plutôt par groupes.

### 3.4 Statistiques des maxima

Après avoir estimé la fréquence de passage par un seuil  $x = \xi$ , essayons maintenant d'obtenir la densité de probabilité des maxima relatifs. Par raccourcissement de langage, le terme "maxima" seul sera utilisé pour représenter les maxima relatifs; alors que les maxima absolus seront appelés "extrema". La condition d'occurrence d'un maximum, qu'il soit positif ou négatif, est que la vitesse s'annule et que l'accélération soit négative. Donc, pour qu'un maximum se produise entre  $t$  et  $t + dt$ , il faut que les trois conditions suivantes soient réunies :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) < 0 \\ \dot{x}(t) > 0 \\ \dot{x}(t + dt) < 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

Supposons que l'intervalle de temps  $dt$  soit suffisamment petit que pour pouvoir y supposer une accélération constante. Dans ce cas,  $\forall 0 \leq \tau \leq dt$  :

$$\ddot{x}(t + \tau) = \ddot{x}(t) \quad (3.61)$$

$$\dot{x}(t + \tau) = \dot{x}(t) + \tau \ddot{x}(t) \quad (3.62)$$

Si bien que la troisième condition ci-dessus puisse aussi s'exprimer par :

$$\dot{x}(t + dt) = \dot{x}(t) + dt\ddot{x}(t) < 0 \rightarrow \dot{x}(t) < |\ddot{x}(t)| dt \quad (3.63)$$

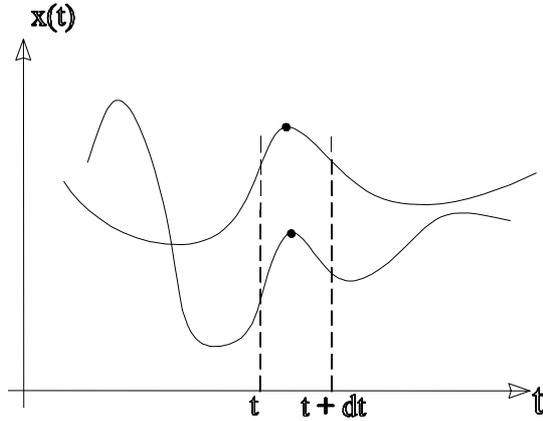


FIGURE 3.12. ILLUSTRATION DU PASSAGE PAR UN MAXIMUM ENTRE  $t$  ET  $t + dt$

De même que la densité de probabilité conjointe entre le déplacement et la vitesse nous a permis de calculer la fréquence de passage d'un seuil, la densité de probabilité conjointe entre le déplacement, la vitesse et l'accélération devrait nous permettre de calculer la probabilité d'occurrence d'un maximum entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$p_m = \iiint_{V_m} p(x, \dot{x}, \ddot{x}) dx d\dot{x} d\ddot{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \int_0^{-\ddot{x}dt} p(x, \dot{x}, \ddot{x}) \underbrace{d\dot{x} d\ddot{x}}_{\ddot{x}dt} dx \quad (3.64)$$

En supposant à nouveau que l'intervalle de temps  $dt$  est infiniment petit :

$$p_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^0 \ddot{x} p(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} dx}_{p_{\max}(x)} dt = \mu dt \quad (3.65)$$

où la fonction  $p_{\max}(x)$  représente la probabilité d'avoir un maximum compris entre  $x$  et  $x + dx$ . En effet, l'intégrale

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\max}(x) dx = \frac{p_m}{dt} \quad (3.66)$$

correspond à la probabilité d'avoir un maximum par unité de temps, c'est-à-dire la fréquence de passage par un maximum. Mis à part l'hypothèse de stationnarité, les relations développées ici sont tout à fait générales et peuvent être particularisées au cas du processus

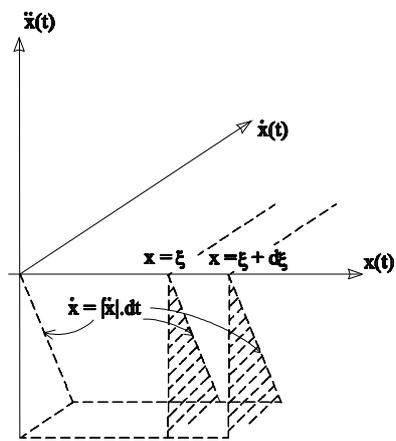


FIGURE 3.13. ZONE DE L'ESPACE DE PHASE CONCERNÉE PAR LE PASSAGE PAR UN MAXIMUM

gaussien centré dont la densité de probabilité conjointe entre trois variables s'exprime par :

$$p(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 |S|}} e^{-\frac{1}{2} \{X\}^T [S]^{-1} \{X\}} \quad (3.67)$$

où  $\{X\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}$  et  $[S] = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & -m_2 \\ 0 & m_2 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$  représente la matrice de covariance

reliant le déplacement, la vitesse et l'accélération. Les quatre éléments en haut et à gauche de cette matrice ont été utilisés pour le calcul de la probabilité de franchissement de seuil (pas de corrélation entre déplacement et vitesse).

La densité de probabilité conjointe entre le déplacement, la vitesse et l'accélération devient donc :

$$p(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 m_2 (m_0 m_4 - m_2^2)}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{x}^2}{m_2} + \frac{m_4 x^2 + 2m_2 x \dot{x} + m_0 \dot{x}^2}{m_0 m_4 - m_2^2} \right) \{X\}^T [S]^{-1} \{X\}} \quad (3.68)$$

Le remplacement de cette relation dans les équations (3.65) et (3.66), mène finalement à et une fréquence de passage par un maximum :

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (3.69)$$

et une densité de probabilité des maxima :

$$p_{\max}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \varepsilon e^{-\frac{\eta^2}{2\varepsilon^2}} + \sqrt{1-\varepsilon^2} \eta e^{-\frac{\eta^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \eta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\} \quad (3.70)$$

où  $\eta = \frac{x}{\sqrt{m_0}}$  et  $\varepsilon^2 = 1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} = 1 - \left( \frac{\nu_0^+}{\mu} \right)^2$  (paramètre spectral)

Le premier cas limite,  $\varepsilon = 0$ , correspond au processus en bande infiniment étroite (chaque échantillon est une sinusoïde) tel que la fréquence de passage par zéro à pente positive soit égal à la fréquence de passage par un maximum et aussi égal à la fréquence dominante  $n_{dom}$  ( $m_2 = n_{dom}^2 m_0$  et  $m_4 = n_{dom}^2 m_2$ ). Dans ce cas, la loi de densité de probabilité des maxima dégénère en une loi de Rayleigh : aucun maximum relatif n'est négatif et le maximum moyen (différent du maximum le plus probable dans ce cas !) est donné par :

$$\overline{MAX} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{m_0} \approx 1.25 \sqrt{m_0} \quad (3.71)$$

L'autre cas limite,  $\varepsilon = 1$ , correspond à un processus en bande large pour lequel la fréquence de passage par un maximum relatif est beaucoup plus grande que la fréquence de passage par zéro. Dans ce cas, les maxima sont nuls en moyenne. Leur distribution tend vers une distribution gaussienne dont l'écart-type correspond à celui du processus lui-même.

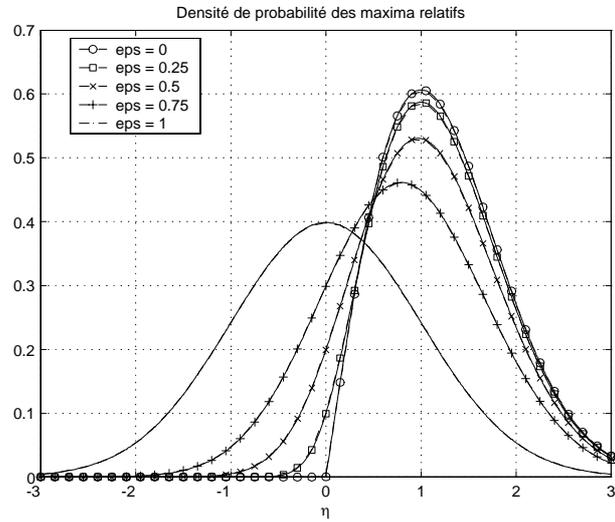


FIGURE 3.14. DENSITÉ DE PROBABILITÉ DES MAXIMA (RELATIFS) EN FONCTION DU PARAMÈTRE SPECTRAL DU PROCESSUS

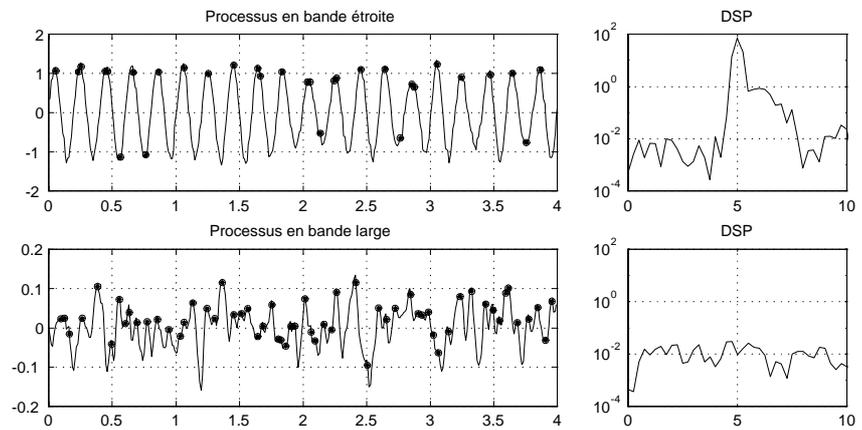


FIGURE 3.15. ILLUSTRATION DE PROCESSUS EN BANDES ÉTROITE ET LARGE : PASSAGES PAR UN MAXIMUM

### 3.5 Statistiques des valeurs extrêmes

Le paragraphe précédent vient d'expliquer comment obtenir la densité de probabilité des maxima relatifs ainsi que leur fréquence d'occurrence. Connaissant la durée du phénomène observé, on peut donc en déduire le nombre de fois que le processus passera par un maximum. Nous nous proposons maintenant de déterminer la densité de probabilité de l'extremum, c'est-à-dire du plus grand de ces maxima relatifs atteints.

Admettons que la densité de probabilité des maxima relatifs soit connue et représentée par la fonction  $p_{\max}(x)$ . Pour rappel, la fonction de répartition qui y est associée s'exprime par :

$$P_{\max}(a) = \int_{-\infty}^a p_{\max}(x) dx = \text{prob}(x \leq a) \quad (3.72)$$

Considérons un ensemble de  $n$  valeurs  $x_i$ , c'est-à-dire de  $n$  maxima relatifs et définissons une nouvelle variable  $y^{(n)}$  comme étant le maximum de ces  $n$  valeurs, c'est-à-dire l'extremum :

$$y^{(n)} = \max_{i=1, \dots, n} x_i \quad (3.73)$$

A condition que les  $n$  maxima étudiés soient choisis indépendamment l'un de l'autre, la fonction de répartition de cette nouvelle variable est donnée par :

$$P_{y^{(n)}}(a) = \text{prob}(y^{(n)} \leq a) = [P_{\max}(a)]^n \quad (3.74)$$

En effet, pour que  $y^{(n)}$  soit inférieur à une valeur fixée  $a$ , il faut que chacune des  $n$  valeurs  $x_i$  le soit aussi. A partir de la fonction de répartition, il est ensuite possible d'obtenir la densité de probabilité de l'extremum :

$$p_{y^{(n)}}(a) = \frac{dP_{y^{(n)}}(a)}{da} = n [P_{\max}(a)]^{n-1} \frac{dP_{\max}(a)}{da} = n [P_{\max}(a)]^{n-1} p_x(x) \quad (3.75)$$

#### Exemple

Imaginons le cas d'un processus gaussien centré et en bande étroite. Dans ce cas, nous avons vu au paragraphe précédent (Equ. (3.70)) que la densité de probabilité des maxima relatifs dégénérerait en une distribution de Rayleigh :

$$p_{\max}(x) = \frac{x}{\sigma_x^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \leftrightarrow P_{\max}(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.76)$$

La fonction de répartition du maximum des  $n$  valeurs et la densité de probabilité qui en est déduite sont données par :

$$P_{y^{(n)}}(a) = [P_x(a)]^n = \left[ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \right]^n \quad (3.77)$$

$$p_y(a) = n \left[ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \right]^{n-1} \frac{x}{\sigma_x^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.78)$$

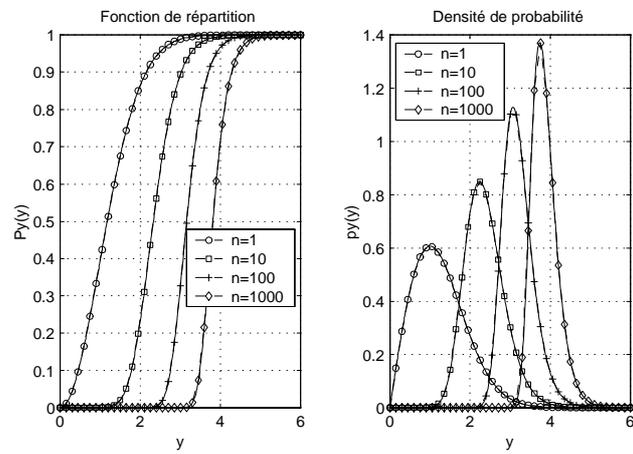


FIGURE 3.16. FONCTION DE RÉPARTITION ET DENSITÉ DE PROBABILITÉ DE LA VARIABLE Y (MAXIMUM DE N VALEURS DISTRIBUÉES SELON UNE LOI DE RAYLEIGH)

On constate sur le graphique de la figure 3.16 que l'on retrouve, pour une valeur de  $n = 1$ , la densité de probabilité des maxima relatifs, ce qui est effectivement conforme à l'intuition. Plus la valeur de ce paramètre  $n$  augmente, plus le nombre de maxima considérés augmente et plus le pic est pointu.

De même que les moyennes et variances sont utilisées en pratique pour caractériser des densités de probabilités, lorsqu'il s'agit de valeurs extrêmes, d'autres grandeurs représentatives sont également utilisées :

- le maximum attendu  $U^{(n)}$  sur une série de  $n$  maxima. Il est tel que :  $P_x(U^{(n)}) = 1 - \frac{1}{n}$  et représente la valeur qui n'est dépassée en moyenne qu'une seule fois sur un ensemble de  $n$  valeurs;
- le maximum le plus probable  $\mu^{(n)}$  qui correspond à la valeur maximale de la densité de probabilité :  $\left. \frac{dp_{y^{(n)}}(a)}{da} \right|_{a=\mu^{(n)}} = 0$  ;
- le maximum moyen sur  $n$  maxima  $\overline{y^{(n)}} = \int_{-\infty}^{+\infty} yp_{y^{(n)}}(a)da$  : il correspond à la valeur moyenne (au sens habituel) des  $n$  maxima relevés, c'est-à-dire au barycentre de la densité de probabilité ;
- la variance du maximum sur  $n$  maxima  $[\sigma^{(n)}]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \overline{y^{(n)}})^2 p_{y^{(n)}}(a)da$  : elle correspond à la variance (au sens habituel) des  $n$  maxima relevés ;
- l'augmentation logarithmique  $\alpha^{(n)}$  qui mesure la vitesse à laquelle augmente la valeur du maximum attendu lorsque la taille de l'échantillon augmente :  $\frac{1}{\alpha^{(n)}} = \frac{dU^{(n)}}{d \ln(n)} = n \frac{dU^{(n)}}{dn}$

### Exemple

Pour l'exemple développé jusqu'ici (distribution de Rayleigh pour les maxima relatifs), on peut déterminer les valeurs prises par les grandeurs qui viennent d'être définies :

- le maximum attendu :  $1 - e^{-\frac{U^{(n)2}}{2\sigma_x^2}} = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow U^{(n)} = \sqrt{2 \ln(n)} \sigma_x$
- les formes analytiques du maximum le plus probable et du maximum moyen sont trop compliquées à obtenir; elles ont cependant été calculées numériquement. Le graphique de la figure 3.17 reprend l'évolution des trois moyennes définies en fonction du nombre de maxima considérés. Il indique que le maximum moyen est toujours légèrement supérieur au maximum le plus probable. Ceci traduit l'asymétrie de la densité de probabilité autour de sa valeur maximale : tout comme la courbe de Rayleigh associée à  $n = 1$ , lorsque le nombre de maxima considérés est plus important, il y a toujours un peu plus "matière" à droite du maximum de la courbe plutôt qu'à gauche ;
- l'augmentation logarithmique :  $\alpha^{(n)} = \frac{1}{n \frac{dU^{(n)}}{dn}} = \frac{\sqrt{2 \ln(n)}}{\sigma_x}$

Ainsi que cela vient d'être mis en évidence dans l'exemple précédent, le calcul analytique des différentes moyennes définies devient rapidement compliqué. C'est pour cette

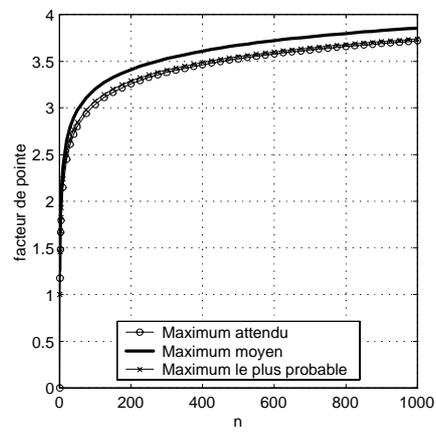


FIGURE 3.17. REPRÉSENTATION DES DIFFÉRENTS TYPES D'EXTREMA POUR UN PROCESSUS EN BANDE ÉTROITE

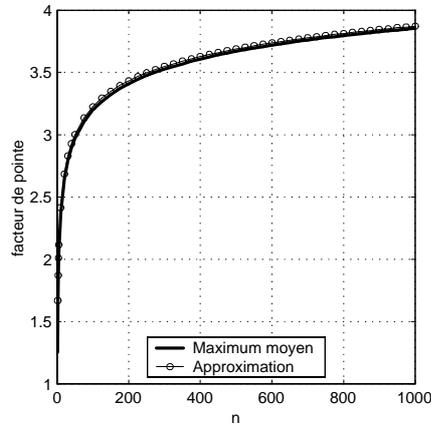


FIGURE 3.18. VALIDITÉ DE L'APPROXIMATION DANS LE CAS D'UN PROCESSUS DE RAYLEIGH

raison que différentes fonctions asymptotes ont été introduites. Ce sont des fonctions simples qui permettent d'approcher le comportement des densités de probabilité réelles dans le voisinage des différentes moyennes. On distingue ainsi les asymptotes de Gumbel, Fréchet, Weibull ou encore Cramer.

Ces nouvelles fonctions introduites restent néanmoins assez compliquées à utiliser mais, pour de grandes valeurs du nombre  $n$  de maxima relatifs, les relations suivantes fournissent des résultats assez précis :

$$\overline{y^{(n)}} = U^{(n)} + \frac{\gamma}{\alpha^{(n)}} \quad (3.79)$$

$$\left[\sigma^{(n)}\right]^2 = \frac{\pi}{6\alpha^{(n)}} \quad (3.80)$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler ( $\gamma = 0.5772$ ).

Ces formules peuvent être appliquées à un processus gaussien centré dont la largeur de bande n'est pas nécessairement étroite ( $\varepsilon \neq 0$ ). Au paragraphe précédent, nous avons déterminé que la densité de probabilité des maxima relatifs variait avec le paramètre spectral  $\varepsilon$  caractérisant le processus aléatoire :

$$p_{\max}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \varepsilon e^{-\frac{\eta^2}{2\varepsilon^2}} + \sqrt{1-\varepsilon^2} \eta e^{-\frac{\eta^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \eta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\} \quad (3.81)$$

La fonction de répartition associée à cette densité de probabilité s'obtient par intégration

:

$$P_{\max}(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} p_{\max}(\eta^*) d\eta^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left\{ -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}\right) + \int_{-\infty}^{\frac{\eta}{\varepsilon}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right. \\ \left. - \sqrt{1 - \varepsilon^2} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \eta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\} \quad (3.82)$$

Il est évident que la fonction  $[P_{\max}(\eta)]^n$  devient encore plus compliquée à traiter analytiquement. C'est pour cette raison que les formules (3.79) et (3.80) sont utilisées dans ce cas. La forme analytique du maximum attendu  $U^{(n)}$  et de l'augmentation logarithmique  $\alpha^{(n)}$  qui interviennent dans ces relations sont déjà difficile à exprimer analytiquement. Ces deux grandeurs peuvent cependant être approchées à l'aide de développements en série (en fonction du paramètre spectral  $\varepsilon$ ) :

$$U^{(n)} = \sqrt{2 \ln(n\sqrt{1 - \varepsilon^2})} \sqrt{m_0} \quad (3.83)$$

$$\alpha^{(n)} = \frac{\sqrt{2 \ln(n\sqrt{1 - \varepsilon^2})}}{\sqrt{m_0}} \quad (3.84)$$

Ces deux formules sont valables pour autant que l'on se trouve dans les limites :

$$\varepsilon < 0.9 \quad (3.85)$$

$$n > 50 \quad (3.86)$$

Lorsque le processus est en bande étroite ( $\varepsilon = 0$ ), ces relations dégèrent en les formes analytiques calculées à l'occasion de l'exemple précédent.

Pour un processus stationnaire dont on examine un intervalle de temps de durée  $T$ , le nombre de maxima relatif vaut :

$$n = \mu T = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (3.87)$$

où  $\mu$  représente la fréquence de passage par un maximum relatif (Equ. (3.69)). On déduit donc successivement que :

$$n\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} = T\nu_0^+ = n_0^+ \quad (3.88)$$

où  $\nu_0^+$  représente la fréquence de passage par zéro et  $n_0^+$  représente le nombre de passages par zéro durant la période d'observation  $T$ .

Le maximum moyen et son écart-type s'écrivent donc finalement sous la forme :

$$\overline{y^{(n)}} = \underbrace{g\sqrt{m_0}}_{\sigma_x} \quad (3.89)$$

$$\left[\sigma^{(n)}\right]^2 = \frac{\pi\sqrt{m_0}}{6\sqrt{2\ln(T\nu_0^+)}} \quad (3.90)$$

où  $g = \left[ \sqrt{2\ln(T\nu_0^+)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2\ln(T\nu_0^+)}} \right]$  est appelé le facteur de pointe du processus aléatoire  $x$ . Ce facteur revêt une importance majeure puisqu'il permet de déterminer l'extremum moyen d'un processus aléatoire gaussien à partir de son écart-type uniquement. Étant donné que pour des valeurs importantes du nombre  $n$  de maxima relatifs observés, la densité de probabilité de l'extremum est une fonction fort pointue, le dimensionnement d'une structure dans les conditions extrêmes recourt généralement à l'utilisation de l'extremum moyen  $\overline{y^{(n)}}$ .

L'expression du facteur de pointe a été obtenue en supposant que :

$$P_{y^{(n)}}(a) = \text{prob}(y^{(n)} \leq a) = [P_x(a)]^n \quad (3.91)$$

Ceci revient à supposer que les maxima se produisent indépendamment l'un de l'autre (modèle de Poisson), ce qui n'est pas tout à fait vrai dans la mesure où les maxima considérés sont successifs. La discussion de cette hypothèse a mené à l'élaboration d'autres modèles de facteurs de pointes plus précis (VanMarcke, par exemple).

---

# Chapitre 4

---

## L'analyse dynamique des structures

### 4.1 Introduction

L'analyse d'une structure consiste en la détermination de sa déformée ainsi que de ses éléments de réduction. Dans le contexte éléments finis, l'analyse statique au premier ordre d'une structure linéaire est entreprise en résolvant le système :

$$[K] \{x\} = \{P\} \quad (4.1)$$

où  $[K]$  est la matrice de raideur de la structure,  $\{x\}$  est le vecteur des déplacements nodaux et  $\{P\}$  est le vecteur des charges extérieures.

Lorsque les efforts appliqués sur une structure la mettent en mouvement de façon telle que les effets liés au mouvement de sa masse ne soient plus négligeables, l'équation (4.1) doit être complétée par les termes d'inertie et d'amortissement. Pour une structure à comportement linéaire, l'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{p(t)\} \quad (4.2)$$

où  $\{x(t)\}$ ,  $\{\dot{x}(t)\}$ ,  $\{\ddot{x}(t)\}$  sont les déplacements, vitesses et accélérations des nœuds de la structure,  $[M]$  est sa matrice de masse,  $[K]$  sa matrice de raideur et  $[C]$  sa matrice d'amortissement.  $\{p(t)\}$  représente toujours le vecteur des charges extérieures ; il traduit l'effet des sollicitations sur la structure : en dynamique, il s'agit donc d'une fonction vectorielle du temps.

Dans un premier temps, ce chapitre expose brièvement, selon le type de problème étudié, les différentes méthodes de résolution de cette équation. Les trois premiers paragraphes traitent donc :

- du caractère déterministe ou stochastique de l'équation ;
- du domaine dans lequel elle peut être résolue (temporel ou fréquentiel) ;

- de la base utilisée pour l'expression des inconnues (modale, nodale ou autre).

Dans un second temps, les formules principales sont développées pour chacun des deux caractères (déterministe ou probabiliste), pour chacun des domaines (temporel puis fréquentiel), et en base modale.

#### 4.1.1 Caractère déterministe ou stochastique de l'équation du mouvement

Dans bon nombre de cas traités en pratique, l'équation (4.2), dans le domaine temporel sous cette forme, est parfaitement déterminée. Cela signifie d'une part que les caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure ( $[M]$ ,  $[K]$  et  $[C]$ ) sont parfaitement connues et d'autre part que les efforts  $\{p(t)\}$  appliqués en chaque point de la structure sont parfaitement déterminés (fonctions du temps connues). On recourt donc dans ce cas à une analyse déterministe. Ce type d'analyse fait partie des notions élémentaires de dynamique et de nombreuses méthodes ont été imaginées afin de résoudre efficacement ce genre de problème.

Dans le domaine du génie civil, un certain caractère aléatoire peut (et dans certains cas doit) être attribué aux grandeurs mises en jeu :

- les caractéristiques du système peuvent ne pas être connues avec certitude. Prenons pour exemple une construction en béton armé dont on sait que les caractéristiques de résistance et de déformabilité ne sont pas connues avec exactitude. Dans ce cas, certaines composantes des matrices structurelles peuvent être caractérisées par des densités de probabilité plutôt qu'être parfaitement déterminées ;
- les sollicitations extérieures peuvent également n'être déterminées qu'en terme de probabilité. C'est généralement le cas lorsque les efforts appliqués proviennent de phénomènes naturels (tremblements de terre, vent, houle).

Il existe des techniques de résolution qui, en partant des caractéristiques probabilistes du problème (type structurelles et/ou sollicitations), permettent de déterminer les structures statistiques des déplacements des nœuds de la structure ou des éléments de réduction : il s'agit d'analyses stochastiques.

Dans le cadre de ce travail, l'aspect probabiliste ne sera attribué qu'aux sollicitations extérieures, en l'occurrence le vent ; nous travaillerons donc sous l'hypothèse de caractéristiques structurelles parfaitement connues.

Afin de comprendre les limitations et hypothèses de l'analyse stochastique traditionnelle, il est intéressant de pouvoir comparer les résultats issus d'une telle analyse avec ceux obtenus à l'aide d'une analyse déterministe habituelle. Le lien entre ces deux types d'analyse se trouve dans la méthode de Monte Carlo. Elle consiste d'abord à générer un ensemble d'histoires de vent conformes à la densité de probabilité voulue. Il suffit alors de résoudre l'équation du mouvement autant de fois que le nombre de seconds membres générés. Cette équation reprend donc son caractère déterministe puisque tous les termes de l'équation sont alors connus avec certitude. Finalement, il reste à calculer les caractéristiques probabilistes des déplacements et efforts de l'ensemble des résultats obtenus. Ceci

ne constitue qu'un exposé de principe de la méthode de Monte Carlo appliquée à l'analyse dynamique. La partie III de ce document la détaille davantage et fournit des renseignements complémentaires quant à sa mise en oeuvre pratique.

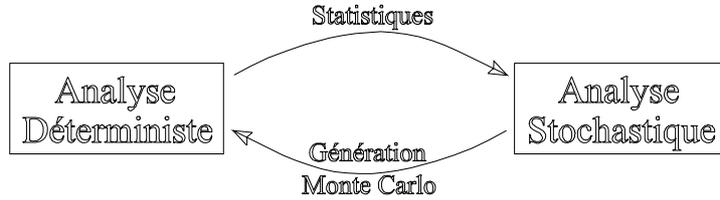


FIGURE 4.1. RELATION ENTRE ANALYSES DÉTERMINISTE ET STOCHASTIQUE

#### 4.1.2 Base nodale, base modale

En plus des distinctions entre analyses déterministe et stochastique, il est également important d'introduire les notions de résolution en base nodale ou en base modale. Que ce soit dans les développements analytiques ou numériques, il s'avère souvent avantageux de ne pas conserver les déplacements des nœuds de la structure comme inconnues, c'est-à-dire de changer de repère dans l'expression de l'équation du mouvement. Sous la forme (4.2), les inconnues du problème sont effectivement les évolutions des déplacements nodaux au cours du temps. On dit que l'équation est exprimée en base nodale et dans le domaine temporel.

Afin de simplifier la résolution, on réalise souvent le changement de variable linéaire suivant :

$$\{x(t)\} = [\Phi] \{q(t)\} \quad (4.3)$$

où le vecteur  $\{q(t)\}$  contient de nouvelles inconnues. L'équation du mouvement s'écrit donc sous la forme :

$$[M] [\Phi] \{\ddot{q}(t)\} + [C] [\Phi] \{\dot{q}(t)\} + [K] [\Phi] \{q(t)\} = \{p(t)\} \quad (4.4)$$

L'expression de l'équation du mouvement dans la base  $q$  s'obtient en prémultipliant les deux membres de cette équation par  $[\Phi]^T$  :

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}(t)\} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \{\dot{q}(t)\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{q(t)\} = [\Phi]^T \{p(t)\} \quad (4.5)$$

c'est-à-dire

$$[M^*] \{\ddot{q}(t)\} + [C^*] \{\dot{q}(t)\} + [K^*] \{q(t)\} = \{p^*(t)\} \quad (4.6)$$

où  $[M^*] = [\Phi]^T [M] [\Phi]$ ,  $[C^*] = [\Phi]^T [C] [\Phi]$ ,  $[K^*] = [\Phi]^T [K] [\Phi]$  et  $\{p^*(t)\} = [\Phi]^T \{p(t)\}$  sont respectivement les matrices des masses, des amortissements et des raideurs généralisés ainsi que le vecteur des charges généralisées.

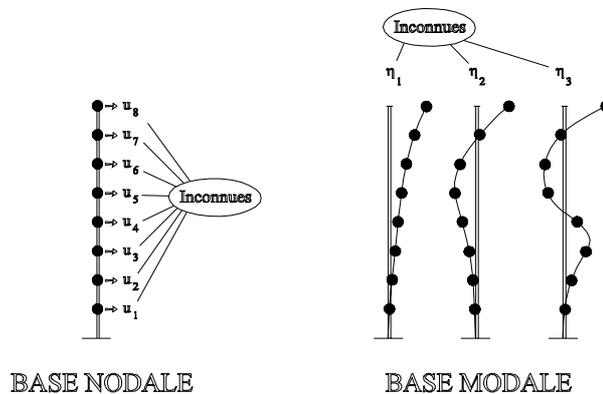


FIGURE 4.2. ILLUSTRATION DU PASSAGE EN BASE MODALE

Généralement, on choisit  $[\Phi]$  comme étant la matrice des modes propres de sorte que  $[M^*]$  et  $[K^*]$  soient diagonales. Cette transformation porte alors le nom de décomposition modale, l'équation du mouvement (4.6) est exprimée dans la base modale.

Le premier avantage de ce choix est de permettre une réduction du nombre d'inconnues. En effet, pour une structure comprenant un grand nombre de degrés de liberté mais dont on peut suspecter que les déplacements vont se produire selon une combinaison de quelques formes simples et prévisibles, la taille du système à résoudre en base modale est réduit au nombre de formes choisies. 4.2

Effectivement, la matrice  $[\Phi]$  peut ne pas être carrée : elle est généralement de taille  $(N \times M)$  et contient les  $M$  ( $\ll N$ ) formes choisies pour représenter les  $N$  déplacements des nœuds de la structure. En cas de décomposition modale, ces formes de base sont les modes propres de basses fréquences ainsi que les modes propres les plus excités. Le système de  $N$  équations en base nodale est donc remplacé par un système de  $M$  ( $\ll N$ ) équations en base modale.

Le second avantage de ce choix est de transformer le premier système d'équations en une nouveau système qui est découplé, à condition que la matrice d'amortissement  $[C]$  soit diagonalisable au même titre que les matrices de masse et de raideur.

En ce qui concerne l'amortissement structurel, cette hypothèse est formulée en supposant que l'amortissement est proportionnel ("de Rayleigh"). La seule vraie raison de cette hypothèse est une simplification de la résolution. Elle ne représente pas réellement la réalité car on sait en effet que l'amortissement prenant place dans une structure n'est pas toujours de type visqueux ; il devrait également dépendre de caractéristiques de frottement qui sont assez compliquées à mettre en œuvre. Quoi qu'il en soit, lors d'une analyse dynamique, l'amortissement est une grandeur qui n'est certainement pas bien maîtrisée, alors, tant qu'à formuler des hypothèses sur sa forme, pourquoi ne pas supposer qu'elle est diagonalisable par les modes propres ?

Cette hypothèse de diagonalisation est généralement acceptée (et pratiquée) en ce qui

concerne l'amortissement structurel. Elle doit cependant être remise en cause pour des structures comprenant des amortisseurs concentrés ou soumises à l'effet du vent et donc amorties aérodynamiquement. Dans chacun de ces deux contextes, une matrice d'amortissement supplémentaire doit être calculée sur base d'un modèle choisi représentant correctement le type d'amortissement. Ce nouvel amortissement doit être ajouté à l'amortissement structurel afin d'obtenir une matrice d'amortissement totale.

Contrairement à l'amortissement structurel qui, en définitive, est assez complexe à quantifier, l'expression de la matrice supplémentaire peut être obtenue sur base du modèle choisi. Il en va de même de son expression en base modale ( $[C^{a*}] = [\Phi]^T [C^a] [\Phi]$ ). Le calcul de cette matrice d'amortissement généralisé supplémentaire mène généralement à des termes hors diagonale non nuls. Ceci est assez gênant dans la mesure où le passage en base modale visait en partie au découplage du système. Nous supposons dans ce document que les termes non diagonaux sont nuls et que le passage en base modale conserve donc tout son intérêt.

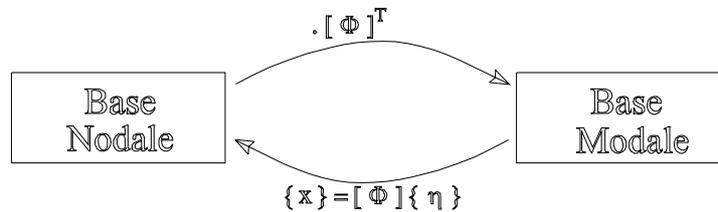


FIGURE 4.3. RELATION ENTRE ANALYSES EN BASES NODALE ET MODALE

Il faut également noter que la décomposition modale, bien qu'ayant recours aux modes propres de vibration (associés à des fréquences propres de vibration) ne doit pas être confondue avec une résolution dans le domaine fréquentiel puisqu'il s'agit uniquement d'un changement de variables, un outil simplifiant la résolution du problème ! Le domaine fréquentiel ou temporel sera ensuite attribué selon que les inconnues (les amplitudes modales  $\{q(t)\}$ ) sont exprimées en fonction du temps ou des fréquences (voir paragraphe 4.1.3).

#### 4.1.3 Domaine temporel, domaine fréquentiel

L'utilité des modes propres résulte donc du fait que le changement de variable (4.3) facilite la résolution du système puisqu'il devient découplé et de taille réduite. En partant de cette idée que les déplacements nodaux ne doivent pas être conservés comme inconnues pour la résolution de l'équation du mouvement, un autre changement de variables classique vient naturellement à l'esprit : il s'agit d'une décomposition en série de Fourier. Dans ce cas, les nouvelles inconnues deviennent les amplitudes des harmoniques (à ne pas confondre avec les amplitudes modales ! ) :

$$\{x(t)\} = \sum_{i=0}^{\infty} \{A_i\} \cos(2i\pi\Delta nt) + \sum_{i=1}^{\infty} \{B_i\} \sin(2i\pi\Delta nt) \quad (4.7)$$

A cette représentation (qui suppose que les déplacements sont périodiques), on préfère généralement sa limite lorsque la période de la fonction étudiée tend vers l'infini. Il s'agit de la transformée de Fourier inverse qui permet la représentation des fonctions non périodiques rencontrées en pratique :

$$\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{X(n)\} e^{2j\pi nt} dn \quad (4.8)$$

La fonction  $\{X(n)\}$  est la transformée de Fourier de la fonction  $\{x(t)\}$ . Elle représente la nouvelle inconnue résultant du changement de variables. De même, le vecteur des forces extérieures peut être associé à sa transformée de Fourier inverse :

$$\{p(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{P(n)\} e^{2j\pi nt} dn \quad (4.9)$$

Les couples  $(\{x(t)\}, \{X(n)\})$  et  $(\{p(t)\}, \{P(n)\})$  sont des paires de Fourier. Dans chaque paire, les deux fonctions sont reliées d'une part par les relations (4.8) et (4.9) (transformée directe) et d'autre part par la transformée directe :

$$\{X(n)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{x(t)\} e^{-2j\pi nt} dt \quad (4.10)$$

$$\{P(n)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{p(t)\} e^{-2j\pi nt} dt \quad (4.11)$$

En appliquant cette transformée de Fourier inverse aux deux membres de l'équation du mouvement, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ([M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\}) e^{-2j\pi nt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \{p(t)\} e^{-2j\pi nt} dt \quad (4.12)$$

$$(-4\pi^2 n^2 [M] + 2j\pi n [C] + [K]) \{X(n)\} = \{P(n)\} \quad (4.13)$$

où la nouvelle inconnue est la fonction  $\{X(n)\}$ . Il s'agit de la forme de l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel : le paramètre principal n'est plus le temps mais bien une fréquence.

#### 4.1.4 Les diverses possibilités d'analyse

Le changement de variables (4.3) permet la transcription de l'équation du mouvement dans la base modale. Il permet également de revenir dans la base nodale dans laquelle les inconnues sont les déplacements des nœuds.

Le changement de variable (4.7) qui dégénère en une transformée de Fourier permet la transcription de l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel alors que la relation inverse (ou transformée inverse de Fourier) permet de revenir dans le domaine temporel.

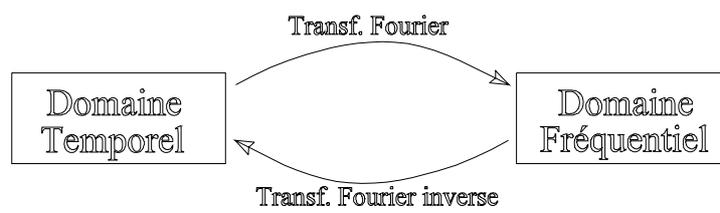


FIGURE 4.4. RELATION ENTRE ANALYSES EN DOMAINES TEMPOREL ET FRÉQUENTIEL

Analyse déterministe				Analyse stochastique			
En base modale		En base nodale		En base modale		En base nodale	
Temporel	Fréquentiel	Temporel	Fréquentiel	Temporel	Fréquentiel	Temporel	Fréquentiel
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(1) : Superposition modale avec résolution des équations découplées par Newmark, Duhamel,...							
(2) : Superposition modale avec résolution des équations découplées par transformée de Fourier							
(3) : Newmark, Wilson, ... : pas à pas sur le système $N$ DDL							
(4) : Transformée de Fourier du système $N$ DDL							

Tableau 4.1. : Différentes possibilités en dynamique linéaire

Base modale et domaine fréquentiel, bien que laissant tous deux sous-entendre l'importance des modes et fréquences propres, sont deux choses tout à fait distinctes. Il est toujours possible d'entreprendre la résolution de l'équation du mouvement dans l'un ou l'autre domaine et dans l'une ou l'autre base. Toutes les combinaisons sont imaginables. En raison des trois critères qui viennent d'être fournis, ces combinaisons sont donc au nombre de huit<sup>9</sup> (cf Tab. 4.1).

Les paragraphes suivants reprennent les développements importants des analyses déterministes puis stochastiques tout en mettant l'accent sur le domaine de résolution choisi (domaine temporel ou fréquentiel) et les relations entre ces deux domaines. Afin d'alléger l'exposé, la résolution ne sera présentée qu'en base modale pour chacun des cas.

## 4.2 Méthodes déterministes

Connaissant exactement les caractéristiques de la structure et les sollicitations auxquelles elle est soumise, les matrices structurelles et le vecteur des charges extérieures peuvent être établis. Il existe de nombreuses méthodes de résolution de l'équation du mouvement. Elles sont traditionnellement classées d'après le domaine dans lequel elles opèrent : résolution dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Les techniques de résolution dans l'un ou l'autre domaine sont, du point de vue théorique, tout à fait équivalentes ; la transformée de Fourier permet de faire le lien entre ces deux domaines. L'expression claire et nette de ce lien ne peut être établie qu'en développant les solutions analytiques<sup>10</sup>. Les paragraphes suivants commencent donc par développer les solutions analytiques dans les domaines temporel puis fréquentiel.

Dans le cas de sollicitations non périodiques, la résolution de l'équation du mouvement devient assez ardue analytiquement (que ce soit dans l'un ou l'autre domaine). C'est pour cette raison que de nombreuses méthodes numériques ont été développées. Dans le domaine temporel, elles permettent de résoudre l'équation du mouvement en discrétisant la durée du calcul en intervalles de temps limités. Dans le domaine fréquentiel, elles sont

<sup>9</sup> on peut également différencier les résolutions de type analytique ou numérique, ce qui sera réalisé dans la suite. En pratique, on ne recourt généralement qu'à l'approche numérique

<sup>10</sup> La structure a été discrétisée; on parle alors de résolution partiellement analytique dans la mesure où seule la variable temps (et non pas les abscisses curvilignes) est traitée de façon continue.

essentiellement basées sur l'algorithme de la transformée rapide de Fourier.

## 4.2.1 Résolution analytique

**4.2.1.1 Dans le domaine temporel** Bien qu'un exposé complet et pédagogique requière d'abord les développements relatifs aux vibrations libres non amorties puis amorties, ensuite relatifs aux mouvements forcés périodiques (amortis ou non), nous supposons que le lecteur est familier à ces notions de base et que les formules correspondantes sont bien connues.

La démarche analytique développée ci-dessous tire parti de la décomposition modale. La résolution a donc lieu en base modale et consiste à résoudre d'abord les équations du mouvement découplées pour chacun des modes. La résolution est simple puisqu'elle se ramène à l'étude de plusieurs oscillateurs simples du type :

$$M_m^* \ddot{q}_m(t) + C_m^* \dot{q}_m(t) + K_m^* q_m(t) = p_m^*(t) \quad (4.14)$$

Le changement de variable (4.3) est ensuite utilisé pour revenir aux déplacements des degrés de liberté.

La détermination des amplitudes modales nécessite donc le passage par le calcul de la réponse d'un oscillateur à un degré de liberté et soumis à une charge quelconque. Analytiquement, ce calcul est réalisé à l'aide de l'intégrale de Duhamel. Elle est justifiée en raisonnant à partir de la réponse impulsionnelle unitaire qui occupe une place importante dans la comparaison des domaines temporel et fréquentiel.

### *Réponse de l'oscillateur 1 DDL à une impulsion*

Admettons qu'en l'instant  $t = 0$ , l'oscillateur à un degré de liberté, partant du repos, soit sollicité par une impulsion<sup>11</sup> d'intensité  $I$ . L'intégration sur un intervalle de temps infiniment court de l'équation du mouvement découplée :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} (M_m^* \ddot{q}_m(t) + C_m^* \dot{q}_m(t) + K_m^* q_m(t)) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} I \delta(t) dt \quad (4.15)$$

donne

$$M_m^* \dot{q}_m(0^+) = I \quad (4.16)$$

La réponse de l'oscillateur sous charge impulsionnelle correspond donc à un mouvement libre dont les conditions initiales sont :

$$q_m(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{q}_m(0) = \frac{I}{M_m^*} \quad (4.17)$$

L'étude des vibrations libres amorties nous apprend donc que :

$$q_m(t) = I h_m^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{I}{M_m^* \omega_{d_m}} e^{-\xi_m \omega_m t} \sin(\omega_{d_m} t) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

<sup>11</sup> c'est-à-dire une force appliquée pendant un intervalle de temps très court. ses unités sont les mêmes que celles d'une quantité de mouvement, soit le  $Ns$  ou le  $\frac{kg \cdot m}{s}$

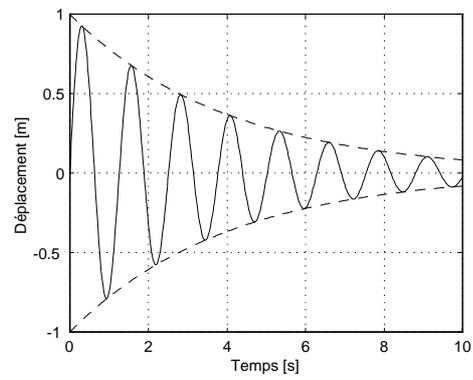


FIGURE 4.5. RÉPONSE IMPULSIONNELLE UNITAIRE( $\xi = 0.05$  ;  $\omega = 5rad/s$ )

où  $M_m^*$ ,  $\omega_m$ ,  $\xi_m$  et  $\omega_{d_m} = \omega_m \sqrt{1 - \xi_m^2}$  représentent respectivement la masse de l'oscillateur étudié, sa pulsation propre, son pourcentage d'amortissement critique et sa pulsation amortie.

Cette étape intermédiaire dans le calcul de la réponse d'un oscillateur à un degré de liberté permet d'introduire la réponse impulsionnelle unitaire  $h_m^*(t)$  (Fig. 4.5). Cette fonction occupe une place importante dans l'établissement de la correspondance entre les domaines fréquentiel et temporel.

#### *Réponse sous force quelconque*

Connaissant maintenant la réponse de l'oscillateur soumis à une charge impulsionnelle, il suffit de considérer que l'effort appliqué  $p_m^*(t)$  n'est jamais qu'une suite d'impulsions  $p_m^*(\tau) d\tau$  appliquées successivement et donc que la réponse sous cette charge quelconque s'obtient par superposition des réponses impulsionnelles mises à l'échelle et décalées.

La contribution à la réponse de l'oscillateur à l'instant  $t$  provenant de l'impulsion élémentaire appliquée à l'instant  $\tau$  est :

$$dq_m(t) = p_m^*(\tau) h_m^*(t - \tau) d\tau \quad (4.19)$$

si bien que la réponse calculée comme une somme de ces contributions élémentaires s'exprime sous la forme de cette intégrale de convolution :

$$q_m(t) = \int_0^t p_m^*(\tau) h_m^*(t - \tau) d\tau \quad (4.20)$$

Il s'agit de l'intégrale de Duhamel. Elle exprime analytiquement la solution de l'équation du mouvement. Les limites de validité de cette méthode sont le domaine élastique linéaire puisqu'elle est basée sur le principe de superposition. Les réponses modales s'obtiennent en utilisant la relation (4.20) pour chacun des modes conservés lors du passage en base modale. Il est souvent plus commode de noter cette succession d'opérations sous forme matricielle :

$$\{q(t)\} = \int_0^t [h^*(t - \tau)] \{p^*(\tau)\} d\tau \quad (4.21)$$

où  $[h^*(t)]$  est une matrice diagonale<sup>12</sup>, chacun de ses éléments représentant les réponses impulsionnelles dans chacun des modes (Equ. (4.18)) ; il s'agit de la matrice impulsionnelle modale.

L'expression des déplacements des nœuds de la structure s'obtient par combinaison linéaire des réponses dans chacun des modes propres :

$$\{x(t)\} = [\Phi] \{q(t)\} = \int_0^t [\Phi] [h^*(t - \tau)] [\Phi]^T \{p(\tau)\} d\tau \quad (4.22)$$

$$\{x(t)\} = [\Phi] \{q(t)\} = \int_0^t [h(t - \tau)] \{p(\tau)\} d\tau \quad (4.23)$$

<sup>12</sup> A condition que la matrice d'amortissement complète soit diagonale en base modale, ce que nous avons préalablement admis comme hypothèse.

où  $[h(t - \tau)] = [\Phi] [h^*(t - \tau)] [\Phi]^T$  représente la matrice impulsionnelle (nodale) de la structure. L'élément  $(i, j)$  de cette matrice exprime la réponse obtenue au degré de liberté  $i$  lorsque le degré de liberté  $j$  subit une impulsion unitaire. Contrairement à la matrice impulsionnelle modale, elle n'est généralement pas diagonale et c'est pour cette raison principalement que le calcul est mené dans la base modale.

**4.2.1.2 Dans le domaine fréquentiel** Tout comme cela a été fait pour la résolution dans le domaine temporel, seule une méthode de résolution en base modale sera présentée. Le raisonnement est donc à nouveau entrepris au niveau d'un oscillateur à un degré de liberté pour commencer ; ensuite, le changement de variable (4.3) est réutilisé pour obtenir la réponses des déplacements des nœuds de la structure.

*Réponse sous force harmonique*

De même qu'il était intéressant de développer d'abord la réponse sous charge impulsionnelle unitaire dans le cas d'une résolution dans le domaine temporel, il est préférable dans ce cas d'introduire la réponse d'un oscillateur soumis à une charge harmonique. Par exemple, pour le mode  $m$ :

$$M_m^* \ddot{q}_m(t) + C_m^* \dot{q}_m(t) + K_m^* q_m(t) = A_m^* \cos(2\pi n t) \quad (4.24)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre et non homogène. La solution se compose donc d'un terme correspondant à la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière. Dans le cas d'un système amorti, on peut démontrer que le premier de ces termes s'annule après un certain temps. Nous ne nous intéressons donc ici qu'au second terme. La solution suivante convient comme solution particulière :

$$q_m(t) = A_m^* H_m^*(n) \cos(2\pi n t - \phi_m) \quad (4.25)$$

$$\text{où } H_m^*(n) = \frac{1}{K_m^*} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{n}{n_m}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_m \frac{n}{n_m}\right)^2}} \quad (4.26)$$

$$\text{et } \tan(\phi_m) = \frac{2\xi_m \frac{n}{n_m}}{1 - \left(\frac{n}{n_m}\right)^2} \text{ et } n_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_m^*}{M_m^*}} \quad (4.27)$$

Ce premier développement permet d'introduire la fonction de transfert d'un système à un degré de liberté  $H_m^*(n)$  qui représente la réponse (comprendre l'amplitude du mouvement sinusoïdal stabilisé) d'un oscillateur soumis à une force harmonique d'intensité unitaire et de fréquence fixée (Fig. 4.6).

*Réponse sous force quelconque*

Tout comme dans la méthode temporelle où l'effort appliqué a été décomposé en contributions successives (des impulsions), dans ce cas, il est à nouveau possible de décomposer

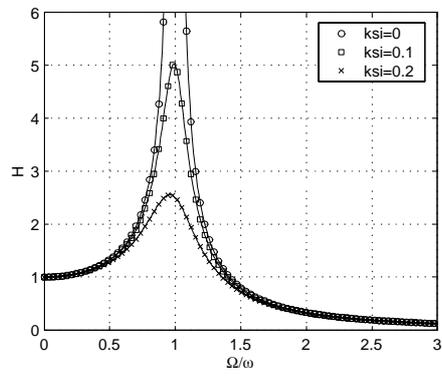


FIGURE 4.6. FONCTION DE TRANSFERT  $D'$  UN OSCILLATEUR À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

un effort extérieur appliqué en une succession de contributions caractérisées chacune par une fréquence.

Pour ce faire, il faut faire appel aux transformées de Fourier qui ne sont jamais qu'une version intégrale (c'est-à-dire la limite d'une sommation) des séries de Fourier. La différence importante entre l'une et l'autre de ces représentations est que la série ne peut représenter que des fonctions périodiques alors que sa limite, l'intégrale, peut représenter des fonctions non périodiques.

Pour une résolution dans le domaine fréquentiel, la décomposition de l'effort appliqué consiste à considérer l'effort  $p_m^*(t)$  comme une somme de sollicitations harmoniques de fréquences  $n$  et d'amplitudes :

$$P_m^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_m^*(t) e^{-2i\pi nt} dn \quad (4.28)$$

Nous venons de voir que la réponse d'un oscillateur à un degré de liberté soumis à une charge harmonique s'obtient à l'aide de la fonction de transfert. Donc, la réponse de l'oscillateur à un degré de liberté se compose également d'une infinité de contributions, chacune étant associée à une certaine fréquence  $n$  et dont l'amplitude est donnée par :

$$Q_m(n) = H_m^*(n) P_m^*(n) \quad (4.29)$$

Finalement, il est possible de retrouver la réponse dans le domaine temporel en recombinant toutes ces harmoniques, c'est-à-dire en utilisant la transformée de Fourier inverse :

$$q_m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_m(n) e^{2i\pi nt} dn = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^*(n) P_m^*(n) e^{2i\pi nt} dn \quad (4.30)$$

Les réponses des autres modes peuvent également être calculées de la même manière. Habituellement, on regroupe dans un vecteur les amplitudes modales calculées pour chacun des modes :

$$\{q(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{Q(n)\} e^{2i\pi nt} dn = \int_{-\infty}^{+\infty} [H^*(n)] \{P^*(n)\} e^{2i\pi nt} dn \quad (4.31)$$

où la matrice  $[H^*(n)]$  représente la matrice de transfert en base modale de la structure étudiée. Il s'agit d'une matrice diagonale dont les éléments correspondent aux fonctions de transfert de chacun des modes.

Connaissant les réponses modales, il est possible de calculer l'évolution au cours du temps des déplacements des nœuds de la structure en repassant en base nodale :

$$\{x(t)\} = [\Phi] \{q(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi] [H^*(n)] [\Phi]^T \{P(n)\} e^{2i\pi nt} dn \quad (4.32)$$

$$\Rightarrow \{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [H(n)] \{P(n)\} e^{2i\pi nt} dn \quad (4.33)$$

$$\Rightarrow \{X(n)\} = [H(n)] \{P(n)\} \quad (4.34)$$

où la matrice  $[H(n)] = [\Phi][H^*(n)][\Phi]^T$  représente maintenant la matrice de transfert (en base nodale) de la structure étudiée. Chaque élément  $(i, j)$  de cette matrice donne l'amplitude du mouvement harmonique observé au degré de liberté  $i$  de la structure lorsqu'elle est sollicitée par une force harmonique de fréquence  $n$  en son degré de liberté  $j$ . Contrairement à la matrice de transfert en base nodale, cette matrice n'est généralement pas diagonale. La comparaison des équations (4.13) et (4.34) montre que l'expression de cette matrice de transfert pouvait être obtenue très simplement, sans passer par la base modale :

$$[H(n)] = (-4\pi^2 n^2 [M] + 2i\pi n [C] + [K])^{-1} \quad (4.35)$$

Cette relation a le mérite de montrer que le calcul de la matrice de transfert nodale n'est pas immédiat puisqu'il relève de l'inversion d'une matrice complète (bien que généralement bande), et ce, pour chacune des fréquences désirées. Le passage en base modale se justifie alors à nouveau, car dans cette base, la matrice de transfert est diagonale (sous les hypothèses formulées). Son inversion est donc immédiate; l'expression de chacun des éléments diagonaux a été introduite dans la relation (4.26). Nous verrons dans la suite que celle-ci occupe une place importante lors d'une analyse stochastique (ou non) dans le domaine fréquentiel.

**4.2.1.3 Comparaison des méthodes temporelle – fréquentielle** Deux méthodes viennent d'être développées pour obtenir la réponse d'un système à plusieurs degrés de liberté. En un certain sens, le lien entre les deux méthodes vient d'être introduit lors des développements relatifs à cette deuxième méthode. Les équations (4.28) et (4.30) indiquent en effet que les fonctions  $Q_m(n)$  et  $q_m(t)$  et les fonctions  $P_m^*(n)$  et  $p_m^*(t)$  constituent des paires de Fourier.

Le théorème de dualité selon lequel une convolution dans un domaine correspond à un produit dans l'autre domaine et vice versa montre donc que les fonctions  $[h(t)]$  et  $[H(n)]$  forment également une paire de Fourier, ce que l'on peut de toute façon vérifier :

$$[H(n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [h(t)] e^{-2i\pi nt} dt \leftrightarrow [h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [H(n)] e^{2i\pi nt} dn \quad (4.36)$$

Le passage d'un domaine à l'autre se cache donc derrière le fait que la réponse impulsionnelle unitaire est la transformée inverse de la fonction de transfert et vice versa.

**4.2.1.4 Le cas particulier des tremblements de terres** Parmi les sollicitations dynamiques des structures du génie civil, une place assez importante est occupée par les sollicitations sismiques. Dans ce cas, la méthode de résolution est tout à fait particulière et ne doit pas être interprétée comme une application directe des méthodes de résolution exposées ci-avant.

On imagine aisément que le séisme représente, avec le vent et la houle, la sollicitation typiquement aléatoire dans le domaine du génie civil. Deux possibilités se présentent :

- soit le calcul est mené sur base d'accélérogrammes générés ou enregistrés. Plusieurs accélérogrammes doivent alors être utilisés pour rendre compte du caractère aléatoire (Monte Carlo) ;
- soit le calcul est traité d'un point de vue statistique globalement (comme dans la méthode d'analyse qui vient d'être présentée)

Cette seconde méthode d'analyse sismique fait usage de la décomposition modale. Une fois les modes découplés, un spectre de réponse est utilisé. Il indique directement l'amplitude modale maximale sans passer par une résolution dans le domaine temporel ou fréquentiel. Etant donné que ce spectre est fourni dans les codes de calcul, la méthode de résolution n'est ni dans le domaine fréquentiel, ni temporel. En réalité, l'équation du mouvement n'est pas résolue !

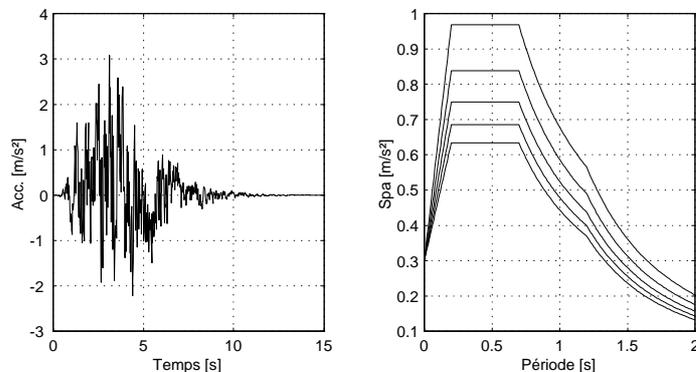


FIGURE 4.7. ILLUSTRATION DE L'ANALYSE SISMIQUE (GAUCHE : DÉTERMINISTE / DROITE : « PROBABILISTE »)

De plus, le caractère aléatoire de la sollicitation n'est généralement pas pris en compte à l'aide d'une densité spectrale<sup>13</sup> mais plutôt sur la forme du spectre de calcul utilisé (le niveau du palier quantifie l'accélération maximale du sol et sa longueur représente les caractéristiques du sol).

L'analyse est donc une analyse en base modale sans recours à la résolution de l'équation du mouvement et dont les caractéristiques probabilistes sont prises en compte globalement. Il s'agit d'une analyse spectrale.

<sup>13</sup> Il est également possible de réaliser une analyse stochastique comme celle présentée au paragraphe précédent. Cette analyse se base sur une densité spectrale de l'accélération du sol comme celle introduite par Kanai-Tajimi ou Clough-Penzien. Une fonction de modulation d'amplitude permet de représenter le caractère instationnaire du tremblement de terre et une autre fonction de modulation permet d'introduire un contenu fréquentiel variable au cours du tremblement de terre. Le caractère instationnaire de la réponse peut alors être appréhendé (densité spectrale évoluant au cours du temps, ou spectre évolutif).

## 4.2.2 Résolution numérique

Lorsque les sollicitations, bien que connues exactement, sortent des fonctions simples, la résolution analytique devient assez ardue. On passe donc généralement dans ce cas à des méthodes numériques pour la résolution. Il est à nouveau possible d'opérer dans le domaine temporel ou fréquentiel.

La plus souvent, la résolution se passe dans le domaine temporel puisque pour un calcul déterministe, la sollicitation est habituellement connue en fonction du temps (par exemple : le passage d'un piéton sur une passerelle, d'un véhicule sur un pont ou une histoire de vent générée). Néanmoins, même au départ d'une sollicitation temporelle, il n'est pas exclu de résoudre l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel. On recourt alors à la transformée de Fourier discrète (version numérique de la transformée de Fourier).

**4.2.2.1 Dans le domaine temporel** En raison de leur adaptation aisée aux structures non linéaires, les techniques retenues classiquement pour résoudre l'équation du mouvement dans le domaine temporel sont les « méthodes pas-à-pas ». Elles consistent à découper le temps en intervalles pour lesquels sont supposées des relations entre les déplacements, vitesses et accélérations à la fin et au début. Les déplacements ne sont donc plus calculés qu'en un nombre limité d'instant. Selon les hypothèses formulées, on distingue ainsi les méthodes de Newmark, de Houbolt, de la différence centrale, de Wilson,...

Parmi toutes les méthodes pas à pas, celle de Newmark est souvent employée car un choix approprié des coefficients intervenant dans la méthode permet d'obtenir un processus stable et assez précis. Pour un système à  $N$  degrés de liberté, les hypothèses relatives à cette méthode forment un ensemble de  $2N$  relations :

$$\{\dot{x}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{x}\}_t + \left[ (1 - \delta) \{\ddot{x}\}_t + \delta \{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (4.37)$$

$$\{x\}_{t+\Delta t} = \{x\}_t + \{\dot{x}\}_t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{x}\}_t + \alpha \{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (4.38)$$

Les  $N$  relations supplémentaires provenant de l'équation du mouvement discrétisée :

$$[M] \{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} + [C] \{\dot{x}\}_{t+\Delta t} + [K] \{x\}_{t+\Delta t} = \{p\}_{t+\Delta t} \quad (4.39)$$

permettent de former un système de  $3N$  équations dont les  $3N$  inconnues sont les déplacements, vitesses et accélérations à la fin du pas de temps. Ce système peut a priori être résolu d'une quelconque manière mais l'ingénieur, familiarisé au calcul des déplacements avant tout, réorganise les équations (4.37) et (4.38) sous la forme suivante :

$$\{\dot{x}\}_{t+\Delta t} = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} [\{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_t] + \left( 1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \{\dot{x}\}_t + \Delta t \left( 1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \{\ddot{x}\}_t \quad (4.40)$$

$$\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} [\{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_t] - \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{x}\}_t - \Delta t \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{x}\}_t \quad (4.41)$$

Ainsi, l'injection des équations (4.40) et (4.41) dans l'équation du mouvement discrétisée (4.39) fournit un système dont les  $N$  inconnues sont les déplacements  $\{x\}_{t+\Delta t}$

à la fin du pas de temps :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} [M] + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} [C] + [K] \right) \{x\}_{t+\Delta t} &= \{p\}_{t+\Delta t} + \\ [M] \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \{x\}_t + \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{x}\}_t + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{x}\}_t \right) &+ \\ [C] \left( \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \{x\}_t + \left( \frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \{\dot{x}\}_t + \Delta t \left( \frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{x}\}_t \right) & \quad (4.42) \end{aligned}$$

Lorsque les déplacements sont déterminés, les équations (4.40) et (4.39) sont alors réutilisées pour obtenir les vitesses et accélérations à la fin du pas de temps.

Le choix des paramètres  $\alpha$  et  $\delta$  ne doit pas être quelconque ; en effet, le processus obtenu n'est inconditionnellement stable que si les relations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \delta \geq 0.5 \\ \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2 \end{cases} \quad (4.43)$$

Dans le cas contraire, le pas de temps de calcul doit être inférieur à une limite de stabilité imposée par l'algorithme.

L'équation (4.42) est l'équivalent numérique de la solution analytique de l'équation du mouvement exprimée par l'intégrale de Duhamel (4.23).

**4.2.2.2 Dans le domaine fréquentiel** Dans le cas d'une analyse dans le domaine temporel, le lien entre les méthodes analytique (Duhamel) et numérique (Newmark) n'est guère évident. Ceci provient de la difficulté de transcrire l'intégrale de convolution d'un point de vue numérique.

Dans le domaine fréquentiel, ce problème disparaît puisqu'à cette convolution correspond une simple multiplication (4.29). Lors d'analyse déterministes, il est assez rare que les efforts appliqués à la structure soient donnés dans le domaine fréquentiel. Il convient donc d'abord d'en prendre la transformée de Fourier et ensuite de l'exprimer en base modale. On obtient ainsi le second facteur du membre de droite dans l'équation (4.29).

L'avantage du domaine fréquentiel se manifeste à ce stade et réside dans le fait qu'une simple multiplication permet d'obtenir la réponse fréquentielle de la structure. Si la réponse est requise dans le domaine temporel, il suffit alors de prendre la transformée de Fourier inverse de cette réponse fréquentielle.

L'analyse numérique dans le domaine fréquentiel est donc une analyse qui ressemble exactement à ce qui est fait de manière analytique. C'est pour cette raison que les développements ne seront pas menés plus en détail.

### 4.3 Méthodes stochastiques

Dans ce paragraphe, nous allons développer les notions relatives à la résolution de l'équation du mouvement pour laquelle le membre de droite est un processus aléatoire. De même que

pour les méthodes déterministes développées ci-dessus, la résolution peut s'effectuer dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel, le passage de l'un à l'autre s'effectuant à l'aide de la transformation de Fourier.

Les développements sont d'abord entrepris dans le domaine temporel car, pour une personne non familière avec ce type de problème, cela permet de le traiter de la même manière que pour l'analyse déterministe. D'autre part, cette manière de présenter les choses montre que la résolution déterministe habituelle peut être considérée comme un cas particulier de la méthode probabiliste<sup>14</sup>.

### 4.3.1 Dans le domaine temporel

Etant donné que les efforts appliqués à la structure sont maintenant supposés être caractérisés par une densité spectrale de puissance, l'équation du mouvement prend la forme suivante :

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{p(t)\} \quad (4.44)$$

où cette fois, les variables  $\{\ddot{x}\}$ ,  $\{\dot{x}\}$ ,  $\{x\}$  et  $\{p\}$  sont des processus aléatoires. Ils sont caractérisés par leur matrice de covariance et leur matrice de densité spectrale (de puissance).

Afin de faire le lien avec l'équation déterministe des paragraphes précédents, il est assez commode de se représenter le vecteur  $\{p(t)\}$  comme un ensemble de réalisations<sup>15</sup> satisfaisant les caractéristiques probabilistes du processus considéré.

A chacune de ces réalisations, c'est-à-dire un vecteur  $\{p_r(t)\}$  dont les composantes sont des fonctions connues du temps, on peut associer une équation du mouvement qui est maintenant déterministe puisque le second membre est parfaitement connu. En résolvant toutes les équations ainsi obtenues, on obtient un ensemble de fonctions  $\{x_r(t)\}$  dont les caractéristiques sont celles du processus aléatoire  $\{x(t)\}$  recherché.

Analytiquement, chacune des réponses s'obtient à l'aide de l'intégrale de Duhamel :

$$\{x_r(t)\} = [\Phi] \{q_r(t)\} = \int_0^t [\Phi] [h^*(t-\tau)] [\Phi]^T \{p_r(\tau)\} d\tau \quad (4.45)$$

La moyenne et la matrice de covariance du processus de sortie (les déplacements) sont

<sup>14</sup> En réalité, l'analyse stochastique repose sur la théorie des signaux et des systèmes. Elle considère les sollicitations aléatoires comme des signaux qui sont transmis au système qu'est la structure étudiée. La théorie consiste à étudier comment ces signaux sont modifiés lorsqu'ils traversent le filtre caractéristique du système. Les signaux en entrée sont les sollicitations appliquées à la structure et les signaux en sortie représentent les réponses, c'est-à-dire les déplacements, vitesses et accélérations des noeuds de la structure ainsi que les éléments de réduction ou contraintes en certaines sections. Bien qu'elle soit omniprésente, nous nous efforcerons de ne pas faire référence à cette théorie souvent employée par les électriciens et les mécaniciens.

<sup>15</sup>  $\{p(t)\}$  représente donc plusieurs seconds membres disposés côte à côte

donc données par<sup>16</sup> :

$$E[\{x(t)\}] = \{m_x(t)\} = \int_0^t [\Phi][h^*(t-\tau)][\Phi]^T E[\{p(\tau)\}] d\tau \quad (4.46)$$

$$E[\{x(t_1)\}\{x(t_2)\}^T] = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} [\Phi][h^*(t_1-\tau_1)][\Phi]^T E[\{p(\tau_1)\}\{p(\tau_2)\}^T] [\Phi][h^*(t_2-\tau_2)]^T [\Phi]^T d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.47)$$

Dans cette expression, le facteur central s'identifie à la matrice de covariance du processus d'entrée  $\{p(t)\}$ , et à condition qu'il soit stationnaire, elle peut s'écrire en fonction de  $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$  :

$$[R_x(t_1, t_2)] = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \underbrace{[\Phi][h^*(t_1-\tau_1)][\Phi]^T}_{[h(t_1-\tau_1)]} [R_p(\Delta\tau)] \underbrace{[\Phi][h^*(t_2-\tau_2)]^T}_{[h(t_2-\tau_2)]} d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.48)$$

Cette formule établit donc la relation entre les matrices de covariance de la sollicitation extérieure et des déplacements des nœuds de la structure. Il est important de remarquer que, même si les sollicitations sont stationnaires, la matrice de covariance des déplacements nodaux variera dans le temps (les arguments de  $[R_x]$  sont  $t_1$  et  $t_2$  alors que l'argument de  $[R_p]$  est  $\Delta\tau$ ).

Ceci se comprend aisément en considérant le cas d'une structure au repos à l'instant initial. Après un instant très court (vis-à-vis de la constante de temps du système), les déplacements seront très probablement plus faibles qu'après un laps de temps beaucoup plus long. Cela se traduit en terme de probabilités par une variance plus faible aux premiers instants qu'après un temps assez long. La matrice de covariance du système n'est donc pas constante au cours du temps.

#### Exemple

Prenons l'exemple d'un oscillateur à un degré de liberté ( $[\Phi] = [I]$ ) et sollicité par un bruit blanc d'intensité  $S_0$ . Nous avons vu au chapitre 3 (Equ. (3.23)) que la fonction d'autocorrélation associée à un bruit blanc est une fonction de Dirac centrée en  $\Delta t = 0$  et d'intensité  $R_p = 2\pi S_0$ . La covariance du déplacement s'exprime donc par :

$$R_x(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1) R_p \delta(\tau_1-\tau_2) h(t_2-\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \quad (4.49)$$

Cette fonction est symétrique en ses argument  $t_1$  et  $t_2$ . Admettons donc que  $t_1$  soit plus petit ou égal à  $t_2$ . En raison de la fonction de Dirac, le domaine d'intégration de  $\tau_2$  passe donc de  $[0; t_2]$  à  $\tau_1$  (puisque  $\tau_1$  se trouve assurément entre 0 et  $t_2$ ) :

$$R_x(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} h(t_1-\tau_1) R_p h(t_2-\tau_1) d\tau_1 \quad (4.50)$$

<sup>16</sup>  $E[\ ]$  représente une moyenne sur les échantillons

La variance associée au processus de sortie (la réponse du système à un degré de liberté) peut donc être calculée aisément :

$$R_x(t, t) = \sigma_x^2(t) = R_p \int_0^t [h(t - \tau)]^2 d\tau \quad (4.51)$$

En remplaçant  $[h(t)]$  par son expression pour l'oscillateur simple (Equ. (4.18)), on obtient après quelques développements l'expression de la variance de la réponse :

$$\sigma_x^2(t) = \frac{R_p}{4\xi\omega^3 m^2} \left[ 1 - e^{-2\xi\omega t} \left( \frac{1}{1 - \xi^2} - \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} \cos(2\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(2\omega_d t) \right) \right] \quad (4.52)$$

où  $m$  représente la masse généralisée de l'oscillateur simple,  $\omega$  sa pulsation propre,  $\omega_d$  sa pulsation propre amortie et  $\xi$  son coefficient d'amortissement relatif.

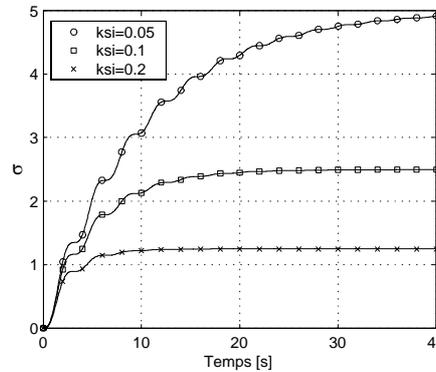


FIGURE 4.8. RÉPONSE TRANSITOIRE D'UN OSCILLATEUR SOUMIS À UN BRUIT BLANC ET PARTANT DU REPOS (REPRÉSENTATION TEMPORELLE)

Cette formule permet d'introduire une constante de temps caractéristique du système  $\frac{1}{2\xi\omega}$  (coefficients de l'argument de l'exponentielle). Elle donne une idée du temps nécessaire avant d'obtenir la stabilisation du système. Ceci est conforté par les courbes de la figure 4.8 qui indiquent une période de mise en régime d'autant plus importante que le coefficient d'amortissement relatif est faible. Au chapitre 10, nous reviendrons largement sur cette notion de mise en régime.

La variance est exprimée par une exponentielle modulée par des sinus et cosinus. C'est de ces dernières fonctions que proviennent les oscillations autour de l'exponentielle. Leur période est égale à la moitié de la période propre du système, ce qui est logique puisque la variance est une grandeur qui "gomme" les signes : dans le cas d'une oscillation harmonique, ce qu'il se passe entre 0 et  $T/2$  est identique en valeur absolue à ce qu'il se passe entre  $T/2$  et  $T$ . On remarque également que l'amplitude des oscillations autour de l'exponentielle est d'autant plus faible que l'amortissement  $\xi$  est grand ; il en est de même de l'écart-type maximum, ce qui semble être conforté par un avis intuitif.

La figure 4.8 représente clairement la non stationnarité de la réponse, bien que la sollicitation soit stationnaire. Il s'agit de l'équivalent probabiliste de la réponse d'une structure à une sollicitation harmonique pour laquelle il existe également un terme transitoire s'atténuant au cours du temps. En déterministe comme en stochastique, c'est généralement la partie stationnaire (stabilisée) de la réponse qui est intéressante. L'analyse probabiliste dans le domaine temporel est donc un outil puissant, mais qui fournit une quantité d'information parfois trop importante : à moins de vouloir calculer effectivement une réponse transitoire, cette méthode temporelle n'est guère commode car l'état stationnaire ne peut pas être estimé directement. Ceci constitue une première justification de l'utilisation de méthodes fréquentielles dans le domaine de l'analyse au vent turbulent des structures du génie civil.

### 4.3.2 Dans le domaine fréquentiel

La représentation fréquentielle des processus instationnaires est bien plus compliquée que dans le domaine temporel. Quelques théories assez complexes ont été mises au point pour les représenter au mieux mais aucune ne semble donner entière satisfaction. Nous nous contenterons donc uniquement de calculer les caractéristiques probabilistes de processus stationnaires. Pour faire le lien avec l'exemple qui vient d'être développé, ceci revient à se placer immédiatement aux grandes valeurs de  $\xi\omega t$  et calculer ainsi les caractéristiques statistiques de l'état "stabilisé" de la structure.

Nous avons vu au paragraphe précédent que les résolutions de problèmes déterministes dans les domaines temporel et fréquentiel sont tout à fait équivalentes. Le lien entre les deux méthodes réside dans la transformée de Fourier. Les analyses probabilistes dans chacun des deux domaines sont également reliées de la même manière. Donc, connaissant la forme de la réponse dans le domaine temporel (Equ. (4.48))<sup>17</sup> :

$$[R_x(t_1, t_2)] = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} [h(t_1 - \tau_1)] [R_p(\Delta\tau)] [h(t_2 - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.53)$$

il suffit d'en prendre la transformée de Fourier membre à membre pour obtenir la forme fréquentielle :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [R_x(\Delta t)] e^{-j\omega\Delta t} d\Delta t \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^{t_1} \int_0^{t_1+\Delta t} [h(t_1 - \tau_1)] [R_p(\Delta\tau)] [h(t_1 + \Delta t - \tau_2)]^T d\tau_1 d\tau_2 \right) e^{-j\omega\Delta t} d\Delta t \end{aligned} \quad (4.54)$$

Il reste ensuite à utiliser la relation de Wiener-Khintchine selon laquelle fonction d'autocorrélation et densité de puissance spectrale forment une paire de Fourier : le membre de gauche représente donc la matrice de densité spectrale de puissance. A cela, il faut également

<sup>17</sup> Le résultat de la double intégration ne doit plus être dépendant que de  $t_1 - t_2$  puisque l'on considère maintenant que la durée de mise en régime est écoulée

ajouter le principe de dualité (une convolution dans un domaine correspond à une multiplication dans l'autre) pour finalement obtenir :

$$[S_x(n)] = [H(n)] [S_p(n)] \overline{[H(n)]}^T \quad (4.55)$$

Voici donc établie la relation permettant d'obtenir la matrice de densité spectrale des déplacements nodaux à partir de la matrice de densité spectrale des efforts appliqués. La méthode développée pour élaborer cette formule est en définitive assez simple lorsque l'on dispose de la formulation dans le domaine temporel (4.48). En procédant de la sorte, la démarche logique qui se trouve derrière la formule (4.55) n'a cependant pas pu être mise en évidence. C'est pour cette raison que nous allons reprendre les développements en repartant de l'équation du mouvement stochastique (4.44). Les calculs sont généralement entrepris dans la base modale, c'est à dire que l'on réalise le changement de variables (4.3) et que l'on multiplie l'équation (4.44) par  $[\Phi]^T$  :

$$[M^*] \{\ddot{q}(t)\} + [C^*] \{\dot{q}(t)\} + [K^*] \{q(t)\} = \{p^*(t)\} \quad (4.56)$$

$\{\ddot{q}(t)\}$ ,  $\{\dot{q}(t)\}$ ,  $\{q(t)\}$  et  $\{p^*(t)\}$  représentent les processus aléatoires qu'il convient de caractériser. La matrice de densité spectrale des forces généralisées  $[S_{p^*}(n)]$  est calculée à partir de celle des forces nodales  $[S_p(n)]$  qui constituent la donnée du problème<sup>18</sup> :

$$\{p^*\} = [\Phi]^T \{p\} \rightarrow [S_{p^*}(n)] = [\Phi]^T [S_p(n)] [\Phi] \quad (4.57)$$

Etant donné que le calcul est réalisé dans le domaine fréquentiel, on n'utilise pas la forme (4.56) de l'équation du mouvement mais plutôt sa transformée de Fourier :

$$(-4\pi^2 n^2 [M^*] + 2i\pi n [C^*] + [K^*]) \{Q(n)\} = \{P^*(n)\} \quad (4.58)$$

où  $\{Q(n)\}$  et  $\{P^*(n)\}$  sont les transformées de Fourier des processus aléatoires  $\{q(t)\}$  et  $\{p^*(t)\}$  respectivement. La réponse fréquentielle en base modale s'exprime par :

$$\{Q(n)\} = \underbrace{(-4\pi^2 n^2 [M^*] + 2i\pi n [C^*] + [K^*])^{-1}}_{[H^*(n)]} \{P^*(n)\} \quad (4.59)$$

où apparaît à nouveau  $[H^*(n)]$ , la matrice de transfert du système en base modale. Cette définition de la matrice de transfert est strictement identique à celle qui a été introduite à la relation (4.26). Elle permet néanmoins de s'affranchir de l'hypothèse d'amortissement modal diagonal. Que la matrice de transfert soit diagonale ou non, la relation (4.59) exprime que le processus  $\{Q(n)\}$  est l'image du processus  $\{P^*(n)\}$  au travers du filtre  $[H^*(n)]$ . Il existe donc une relation entre les densités spectrales des processus d'entrée et de sortie<sup>19</sup> :

$$\{Q(n)\} = [H^*(n)] \{P^*(n)\} \rightarrow [S_q(n)] = [H^*(n)] [S_{p^*}(n)] \overline{[H^*(n)]}^T \quad (4.60)$$

<sup>18</sup> cf Chapitre 3 - Propriété 1 de la matrice de densité spectrale : modification de la matrice de densité spectrale lors d'un changement de variables affins dans le domaine temporel

<sup>19</sup> cf Chapitre 3 - Propriété 2 de la matrice de densité spectrale : modification de la matrice de densité spectrale lors d'une multiplication dans le domaine fréquentiel

Revenant finalement aux déplacements initiaux, le changement de variable (linéaire dans le domaine temporel) associé à la décomposition modale permet d'écrire <sup>20</sup> :

$$\{x(t)\} = [\Phi] \{q(t)\} \rightarrow [S_x(n)] = [\Phi] [S_q(n)] [\Phi]^T \quad (4.61)$$

En regroupant les relations (4.57), (4.60) et (4.61), on obtient finalement :

$$[S_x(n)] = [\Phi] [H^*(n)] [\Phi]^T [S_p(n)] [\Phi] \overline{[H^*(n)]}^T [\Phi]^T \quad (4.62)$$

Ce résultat est identique à celui présenté ci-avant (Equ. (4.55)); la démarche pour y arriver permet cependant de mieux comprendre la physique de l'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel. Connaissant maintenant la densité spectrale de puissance des déplacements de la structure, il est facile d'obtenir les variances ou autres moments spectraux (par intégration)

#### Exemple

Revenons à l'exemple de l'oscillateur simple sollicité par un bruit blanc d'intensité  $S_0$ . La formule donnant la densité spectrale de la réponse s'écrit maintenant :

$$S_x(\omega) = H(\omega) S_p(\omega) \overline{H(\omega)} = S_0 |H(\omega)|^2 \quad (4.63)$$

$$= \frac{S_0}{k^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right)^2 + \left(2\xi_m \frac{\omega}{\omega_m}\right)^2} \quad (4.64)$$

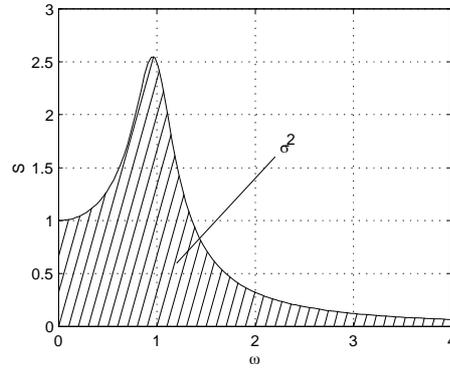


FIGURE 4.9. RÉPONSE D'UN OSCILLATEUR SOUMIS À UN BRUIT BLANC (REPRÉSENTATION FRÉQUENTIELLE)

La variance du déplacement de l'oscillateur s'obtient par intégration de la densité spectrale :

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{S_0}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right)^2 + \left(2\xi_m \frac{\omega}{\omega_m}\right)^2} d\omega = \frac{S_0}{k^2} \frac{\pi \omega_m}{2\xi} \quad (4.65)$$

<sup>20</sup> cf Chapitre 3 - Propriété 1 de la matrice de densité spectrale : modification de la matrice de densité spectrale lors d'un changement de variables affines dans le domaine temporel

Cette relation est identique à celle obtenue lors de la résolution dans le domaine temporel. Le chemin utilisé pour y arriver est cependant différent dans la mesure où cette fois, l'état stabilisé du système a pu être directement calculé.

Telle qu'exposée jusqu'ici, la méthode d'analyse permet de calculer les densités spectrales des déplacements des nœuds de la structure. Cependant, l'ingénieur est généralement intéressé par les efforts internes. Il est donc important de pouvoir également les caractériser. Dans le contexte des éléments finis, ces efforts s'expriment par :

$$\{F_{int}\} = [K_{élé}] \{x_{élé}\} \quad (4.66)$$

Il suffit donc d'extraire de la matrice de densité spectrale des déplacements les termes relatifs aux déplacements des nœuds de l'élément dans lequel on désire calculer les éléments de réduction. Appelons cette sous-matrice  $[S_{x_{élé}}]$ . En raison de la relation (4.66), la matrice de densité spectrale des éléments de réduction s'exprime par <sup>21</sup> :

$$[S_{F_{int}}] = [K_{élé}] [S_{x_{élé}}] \overline{[K_{élé}]^T} \quad (4.67)$$

Toute autre combinaison linéaire des déplacements nodaux de la structure (contrainte normale, contrainte tangentielle ou même une combinaison linéaire de celles-ci) est également caractérisée par une matrice de densité spectrale obtenue de la même manière que pour les éléments de réduction.

Lorsque les densités spectrales des grandeurs de dimensionnement sont établies, la démarche consiste généralement à en calculer les moments spectraux (Equ. (3.21)) qui ont l'avantage d'être plus simples à interpréter. Ces moments permettent alors d'obtenir, pour chacune des grandeurs de dimensionnement (un déplacement, un effort, une contrainte,...) :

- la largeur de bande du processus aléatoire étudié (Equ. (3.70));
- la fréquence de passage par des seuils choisis (Equ. (3.58));
- la fréquence d'occurrence des maxima (Equ. (3.69));
- la densité de probabilité des extrema (Equ. (3.75)).

Le tableau 4.2 résume les étapes successives de l'analyse dynamique stochastique dans le domaine fréquentiel et en base modale. Son importance est capitale dans la mesure où ce type de résolution est utilisé dans la suite, dans une version légèrement aménagée, pour le calcul des structures soumises au vent turbulent.

### 4.3.3 Implémentation numérique de l'analyse stochastique

Les principales informations à retirer de l'analyse stochastique sont les divers moments spectraux des réponses des nœuds de la structure (déplacements, vitesses, accélérations)

<sup>21</sup> cf Chapitre 3 - Propriété 1 de la matrice de densité spectrale : modification de la matrice de densité spectrale lors d'une multiplication dans le domaine fréquentiel

Calcul de la densité spectrale des :	Formule
Forces modales	$[S_{p^*}(\omega)] = [\Phi]^T [S_p(\omega)] [\Phi]$
Amplitudes modales	$[S_q(\omega)] = [H^*(\omega)] [S_{p^*}(\omega)] [\overline{H^*(\omega)}]^T$
Déplacements nodaux	$[S_x(\omega)] = [\Phi] [S_q(\omega)] [\Phi]^T$
Efforts internes	$[S_{F_{int}}] = [K_{\epsilon l \epsilon}] [S_{x_{\epsilon l \epsilon}}] [K_{\epsilon l \epsilon}]^T$

Tableau 4.2. : Résumé de l'analyse dynamique stochastique en base modale et dans le domaine fréquentiel

ainsi que des efforts internes. En effet, la connaissance de ces moments (dont celui d'ordre 0 est la variance) permet de calculer les facteurs de pointe et les valeurs extrêmes des grandeurs choisies.

Les moments spectraux sont obtenus par intégration des densités spectrales (Equ. (3.21)). De manière tout à fait générale, la matrice de covariance d'ordre  $i$  est obtenue par intégration de la matrice de densité spectrale :

$$\left[ m^{(i)} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i [S(\omega)] d\omega \quad (4.68)$$

Sur base de cette formule et du tableau 4.2 reprenant la liste des opérations à réaliser lors d'une analyse dynamique stochastique, on comprend aisément que les moments spectraux des déplacements nodaux et des efforts internes peuvent être obtenus à l'aide des moments spectraux des amplitudes modales et non pas par intégration (numérique) de la densité spectrale, ce qui serait beaucoup trop coûteux en temps de calcul. On constate en effet dans le tableau que, dès que la matrice de densité spectrale des amplitudes modales est établie, il n'y a plus de multiplication à gauche ou droite par une matrice dépendant de la fréquence. Ainsi par exemple pour les moments spectraux des déplacements nodaux :

$$\left[ m_x^{(i)} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i [S_x(\omega)] d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i [\Phi] [S_q(\omega)] [\Phi]^T d\omega \quad (4.69)$$

$$= [\Phi] \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i [S_q(\omega)] d\omega [\Phi]^T = [\Phi] \left[ m_q^{(i)} \right] [\Phi]^T \quad (4.70)$$

Afin d'éviter le stockage en mémoire des densités spectrales de puissance qui renferment de toute façon trop d'information, la stratégie la plus économique consiste donc à se débarrasser des densités spectrales dès que possible, c'est-à-dire après le calcul des moments spectraux des amplitudes modales.

#### 4.3.4 L'approximation en bruit blanc

Nous venons de montrer que les grandeurs des deux dernières lignes du tableau 4.2 pouvaient être représentées par leurs moments de différents ordres plutôt que par leurs densités spectrales. Il serait intéressant de pouvoir également obtenir les moments des amplitudes modales autrement que par intégration numérique des densités spectrales associées :

$$\left[ m_q^{(i)} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i [S_q(\omega)] d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i [H^*(\omega)] [S_{p^*}(\omega)] [\overline{H^*(\omega)}]^T d\omega \quad (4.71)$$

Ceci permettrait d'éviter également le calcul ainsi que le stockage des densités spectrales des amplitudes modales. Dans ce cas, les développements ne peuvent plus être rigoureux ; la méthode porte le nom d'approximation en bruit blanc. Nous allons l'exposer dans le cas du calcul du moment d'ordre 0, c'est-à-dire la variance.

Admettons que les réponses modales soient découplées dans la base des modes propres. Dans ce cas, la matrice de transfert du système est diagonale; ses éléments diagonaux

s'écrivent sous la forme :

$$S_{q_{m,m}}(\omega) = \left( [H^*(\omega)] [S_{p^*}(\omega)] [H^*(\omega)]^T \right)_{m,m} = |H_{m,m}^*(\omega)|^2 S_{p_{m,m}^*}(\omega) \quad (4.72)$$

Les variances des amplitudes modales se calculent donc par:

$$\sigma_{q_{m,m}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{q_{m,m}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{m,m}^*(\omega)|^2 S_{p_{m,m}^*}(\omega) d\omega \quad (4.73)$$

Si la sollicitation généralisée correspondant à ce mode  $m$  était un bruit blanc ( $S_{p_{m,m}^*}(\omega) = cst$ ), le calcul de la variance serait immédiat puisqu'il ne nécessiterait aucune intégration numérique :

$$\sigma_{q_{m,m}}^2 = S_{p_{m,m}^*} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{m,m}^*(\omega)|^2 d\omega = \frac{S_{p_{m,m}^*} \pi \omega_m}{K_{m,m}^* 2\xi} \quad (4.74)$$

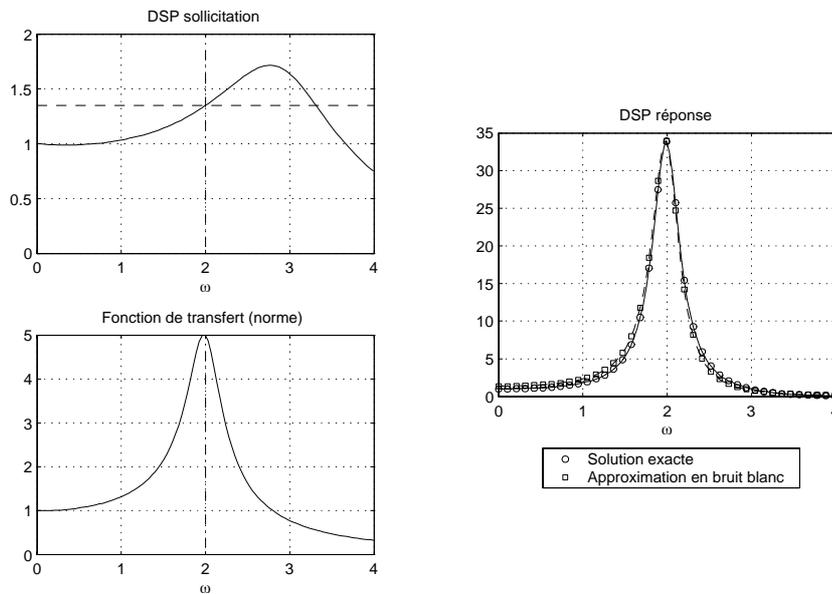


FIGURE 4.10. ILLUSTRATION DE L'APPROXIMATION EN BRUIT BLANC

Cette relation peut être appliquée au cas de forces généralisées différentes de bruits blancs. Dans ce cas, si l'amortissement du mode étudié n'est pas trop important, la fonction de transfert associée est une fonction très pointue dans le voisinage de la fréquence propre; dans ce cas, le contenu énergétique de la réponse est essentiellement conditionné par ce qu'il se passe dans le voisinage du pic de résonance. L'approximation en bruit blanc consiste donc à remplacer la densité spectrale de l'effort modal  $S_{p_{m,m}^*}(\omega)$  par un bruit blanc dont l'intensité est celle au niveau de la fréquence de résonance (Fig. 4.10).

La variance des amplitudes modales peut donc à nouveau être calculée sans avoir recours à une intégration numérique :

$$\sigma_{q_{m,m}}^2 \simeq S_{p_{m,m}^*}(\omega_m) \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{m,m}^*(\omega)| d\omega = \frac{S_{p_{m,m}^*}}{K_{m,m}^{*2}} \frac{\pi\omega_m}{2\xi} \quad (4.75)$$

Lorsque cette approximation est licite, elle est évidemment bien plus efficace qu'une intégration numérique qui nécessite souvent un grand nombre de points d'intégration<sup>22</sup> puisqu'en cas de faible amortissement l'acuité est très importante dans le voisinage des fréquences propres. Une intégration numérique précise nécessite donc une haute densité de points d'intégration dans ces zones.

Les graphiques de la figure 4.11 mettent en évidence deux conditions nécessaires à l'application judicieuse de l'approximation en bruit blanc :

- d'une part, il faut que la densité spectrale de l'effort généralisé ne soit pas trop faible dans le voisinage de la fréquence propre du mode considéré (première ligne);
- d'autre part, il faut que le système ne soit pas trop amorti de sorte que le pic soit suffisamment marqué (seconde ligne).

Il convient également de noter que l'approximation en bruit blanc présentée ici n'est valable que sous l'hypothèse de découplage modal. Lorsque la matrice de transfert n'est pas diagonale (à cause d'un couplage dans l'amortissement), les densités spectrales des amplitudes modales doivent être complétées par des contributions provenant d'efforts modaux d'autres modes. Une version aménagée de l'approximation en bruit blanc peut alors également être utilisée.

### 4.3.5 Résumé

Une bonne maîtrise de ce chapitre est nécessaire à la compréhension de l'analyse d'une structure soumise au vent turbulent. Il a exposé les méthodes d'analyse dans les domaines temporel puis fréquentiel en mettant en évidence l'avantage du second lors d'études phénomènes stationnaires (et linéaires). Il permet en effet de calculer directement l'état stabilisé de la structure et ce, à l'aide d'une résolution simplissime puisque résultant, dans ce domaine, d'une simple multiplication, alors que dans le domaine temporel, la résolution requiert le calcul d'une intégrale de convolution.

Le domaine fréquentiel est d'autant plus préféré que les sollicitations en cas d'analyse stochastique (le plus souvent des densités spectrales de puissance) sont déjà exprimées dans ce domaine.

Ce chapitre a également détaillé la façon d'obtenir les densités spectrales de puissance des déplacements, des vitesses, des accélérations, des efforts internes, des contraintes, ou d'autres grandeurs exprimables par des combinaisons linéaires des amplitudes modales. La théorie des processus aléatoire exposée au chapitre 3 indique alors la marche à suivre pour

<sup>22</sup> ou une intégration numérique à pas variable (qui est aussi moins évidente à mettre en oeuvre, cf annexe B)

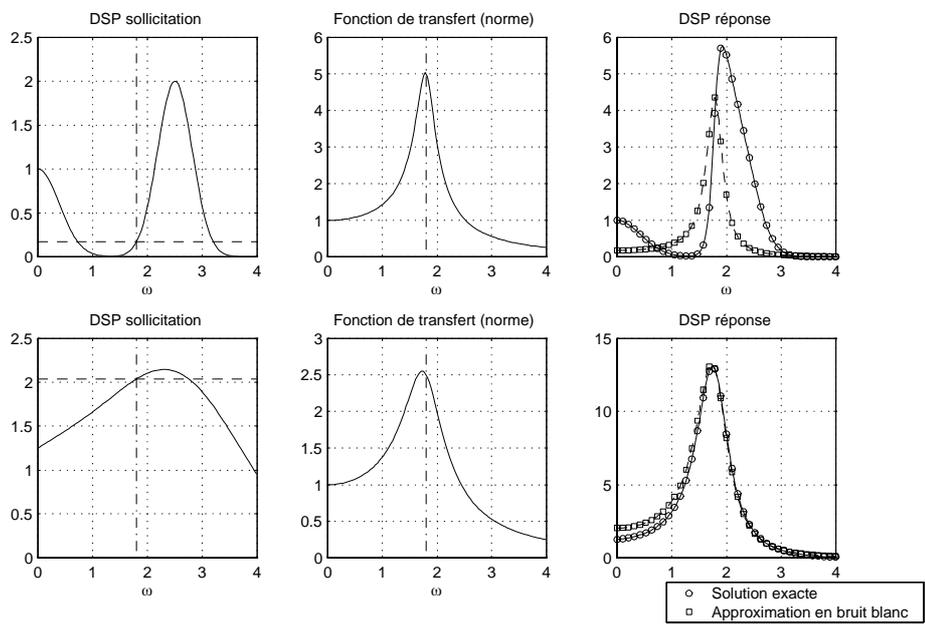


FIGURE 4.11. LIMITES D'APPLICATION DE L'APPROXIMATION EN BRUIT BLANC : DENSITÉ SPECTRALE DE PUISSANCE TROP FAIBLE AU NIVEAU DE LA FRÉQUENCE PROPRE OU AMORTISSEMENT TROP IMPORTANT ( $\xi = 20\%$ )

la détermination des moments spectraux pour chacune des grandeurs requises. Un ultime paragraphe vient de présenter une stratégie de calcul permettant d'estimer plus simplement ces moments. Les théories des valeurs maximales (§ 3.4) et des valeurs extrêmes (§ 3.5) permettent alors de déterminer des grandeurs plus utiles au dimensionnement : les valeurs extrêmes qui peuvent être attendues sur une période d'observation fixée.



---

# Chapitre 5

---

## Notions d'aérodynamique - caractérisation du vent turbulent

L'analyse des structures soumises au vent turbulent est un domaine qui se trouve au confluent de plusieurs théories tout à fait distinctes telles les théories des probabilités, l'analyse des structures et la mécanique des fluides.

L'aérodynamique et l'aéroélasticité sont deux théories assez vastes et complexes qui ne peuvent être évitées lorsque le dimensionnement d'un ouvrage d'art doit être entrepris. Une bonne compréhension du dimensionnement au vent d'un pont doit nécessairement passer par une bonne maîtrise de ces deux théories. Originellement établies dans le contexte de l'étude des ailes d'avions, elles permettent par exemple d'optimiser les sections de tablier des ponts souples à grandes portées, de déterminer pour une section choisie les zones de décollement, les fréquences des détachements tourbillonnaires, etc.

Dans le cadre de ce travail, l'utilisation que nous ferons de ces deux théories sera assez limitée. Nous nous contenterons de présenter les relations principales qui seront utilisées aux chapitres suivants (efforts appliqués sur un obstacle situé dans un écoulement uniforme)

Afin de pouvoir appliquer ces relations à l'étude d'une structure, il est également nécessaire d'avoir les notions de climatologie relatives à l'estimation des caractéristiques du vent. Il s'agit à nouveau d'une théorie assez vaste et complexe dont quelques fondements seulement nous intéressent. D'ailleurs, du point de vue pratique de l'ingénieur, cette théorie se trouve cachée derrière des formules très simples reprises dans bon nombre de codes nationaux et internationaux. Nous ne commenterons brièvement que les grandeurs nécessaires à la caractérisation d'un vent.

### 5.1 L'écoulement des fluides autour des corps

La présence d'un corps dans un écoulement laminaire à vitesse uniforme modifie locale-

ment le comportement du fluide. Il en résulte des modifications locales de pressions dont les résultantes intéressent l'ingénieur. Ces efforts dépendent essentiellement de la forme de l'obstacle ainsi que d'un nombre adimensionnel, le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{UB}{\nu} \quad (5.1)$$

où  $U$ ,  $B$  et  $\nu$  représentent respectivement la vitesse amont du fluide, une dimension caractéristique de l'objet étudié (dans le sens de l'écoulement) et la viscosité cinématique du fluide.

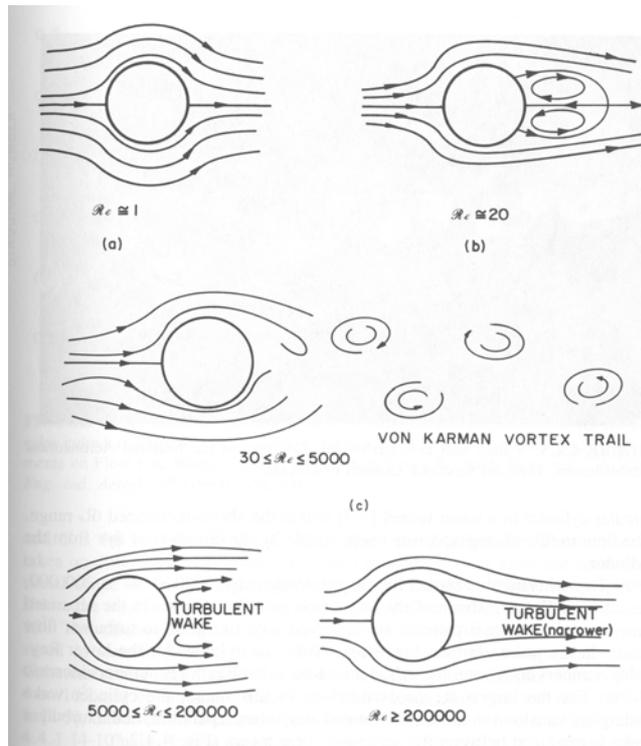


FIGURE 5.1. ECOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE POUR DIFFÉRENTS NOMBRES DE REYNOLDS (WIND EFFECTS ON STRUCTURES, SIMIU, SCANLAN)

Par exemple, lorsque l'obstacle étudié est un cylindre dont l'axe est perpendiculaire à la direction de l'écoulement, la figure 5.1 montre l'évolution des schémas d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds. A chacun de ces écoulements correspondent des répartitions de pressions différentes sur la paroi du cylindre. Ces pressions sont généralement exprimées à l'aide de coefficients de pression adimensionnels :

$$C_p = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (5.2)$$

Pour quelques nombres de Reynolds, la figure 5.2 indique l'évolution de ce coefficient de pression en fonction de l'écart angulaire par rapport au point de stagnation. Cette dépendance des pressions par rapport au nombre de Reynolds se traduit également en terme de résultantes. Pour un écoulement plan, trois efforts sont généralement définis :

- l'effort de traînée  $F_D$  qui est la projection de la résultante des pressions dans le sens de l'écoulement du fluide non perturbé;
- l'effort de portance  $F_L$  qui est la projection de résultante dans le sens transversal à l'écoulement non perturbé;
- le moment  $M$  qui est la résultante des couples élémentaires engendrés par les pressions sur le tablier.

Ces efforts sont également représentés à l'aide de coefficients adimensionnels, le coefficient de traînée  $C_D$ , le coefficient de portance  $C_L$  et le coefficient de moment  $C_M$  :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} \quad (5.3)$$

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} \quad (5.4)$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho U^2 B^2} \quad (5.5)$$

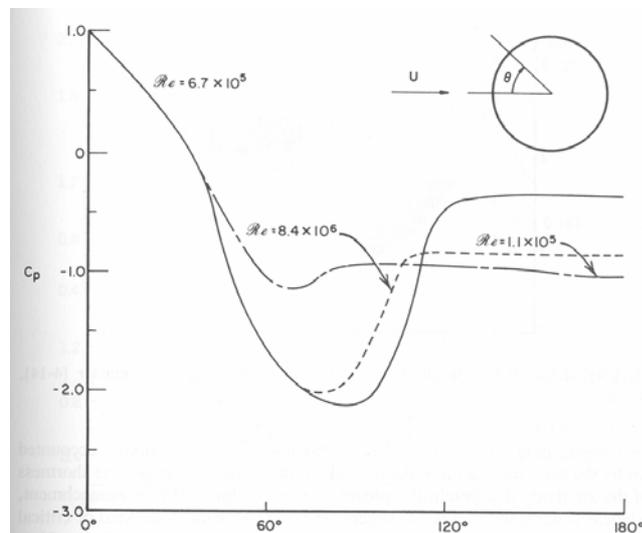


FIGURE 5.2. EVOLUTION DES PRESSIONS LE LONG DE LA PAROI DU CYLINDRE (WIND EFFECTS ON STRUCTURES, SIMIU, SCANLAN)

La figure 5.3 indique, en fonction du nombre de Reynolds, l'évolution du coefficient de

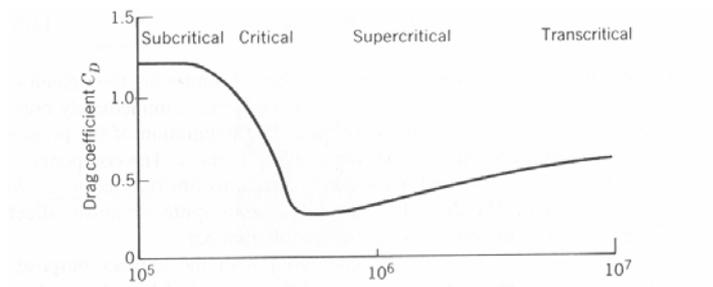


FIGURE 5.3. COEFFICIENT DE TRAÎNÉE D'UNE SECTION CIRCULAIRE EN FONCTION DU NOMBRE DE REYNOLDS (WIND EFFECTS ON STRUCTURES, SIMIU, SCANLAN)

traînée pour une section circulaire.

Les nombres de Reynolds qui caractérisent les écoulements lors d'études de structures souples sont assez élevés ( $Re \sim 10^7$ ). Lorsque le nombre de Reynolds est si important, l'écoulement du fluide autour du corps est caractérisé par des effets non linéaires importants, favorisant l'apparition de la turbulence. Selon les conditions d'écoulement, on peut alors assister, dans des zones où la géométrie de l'obstacle est variable, à des décollements de couche limite. Lorsque l'obstacle étudié présente des arêtes vives, ces décollements se produisent préférentiellement en ces discontinuités. L'instabilité des nappes décollées peut mener, sous l'effet de petites perturbations dans l'écoulement, à des détachements de tourbillons. Par exemple, pour une section cylindrique, ces détachements tourbillonnaires se produisent de manière alternée, ce qui conduit à la formation d'une allée tourbillonnaire dans le sillage de l'obstacle.

Ces détachements de tourbillons affectent donc un caractère oscillatoire aux coefficients aérodynamiques  $C_D$ ,  $C_L$  et  $C_M$ , bien que l'écoulement du fluide en amont soit stationnaire. Les caractéristiques fréquentielles de ces détachements tourbillonnaires sont quantifiées à l'aide du nombre de Strouhal :

$$St = \frac{nD}{U} \quad (5.6)$$

où  $D$  représente une longueur caractéristique de l'obstacle dans le sens perpendiculaire à l'écoulement (épaisseur) et  $n$  représente la fréquence du mouvement étudié.

Les coefficients aérodynamiques, tels qu'ils viennent d'être commentés, sont déterminés à l'aide d'essais en soufflerie sur les obstacles fixes.

Lorsque les obstacles étudiés sont susceptibles de se déplacer sous l'effet de l'écoulement du fluide, leurs mouvements perturbent l'écoulement du fluide. Les caractéristiques de signature (que l'on obtiendrait si la structure était immobile) sont alors modifiées par des effets instationnaires; il y a une réelle interaction entre le fluide et la structure étudiée.

Pour des fréquences étudiées suffisamment faibles, l'hypothèse d'écoulement quasi-permanent est souvent formulée. Elle suppose que le temps de passage d'une particule du fluide le long de l'obstacle (c'est-à-dire, la largeur du tablier) est suffisamment court par rapport aux périodes de vibration de la structure pour que l'écoulement s'adapte instantanément à chaque nouvelle position de l'obstacle. Cette hypothèse justifie donc l'utilisation des relations (5.3) à (5.5) pour estimer les efforts appliqués à la structure : ce sont les forces aérodynamiques<sup>23</sup>.

Les grandeurs utilisées lors du dimensionnement de l'ouvrage d'art sont les coefficients aérodynamiques moyens. Il en résulte donc que le coefficient de portance utile est alors nul pour un corps symétrique placé symétriquement dans l'écoulement. On peut trouver dans la littérature des valeurs de coefficients aérodynamiques pour de nombreuses sections

---

<sup>23</sup> Lorsque l'hypothèse d'écoulement quasi-permanent n'est pas formulée, les forces résultant de l'écoulement du fluide sont définies à l'aide des coefficients de Scanlan (qui dépendent de la fréquence étudiée). Ces coefficients permettent de rendre compte du contenu fréquentiel de l'interaction entre le fluide et la structure. L'utilisation de ces coefficients mène aux expressions des efforts *aéroélastiques*.

habituellement utilisées en génie civil : le tube rond, le tube carré, les poutres en  $I$ , les cornières, ... Lorsque la section étudiée est une nouvelle section de tablier, des essais en soufflerie sont généralement réalisés afin de déterminer ces coefficients aérodynamiques moyens. Dans le domaine des nombres de Reynolds rencontrés en pratique, on considère généralement que ces coefficients ne dépendent pas de la vitesse du fluide : si la vitesse du fluide est doublée, les efforts aérodynamiques sont donc multipliés par 4 de manière à conserver les mêmes coefficients aérodynamiques.

## 5.2 Caractérisation du vent

Les concepts généraux de dynamique des fluides qui viennent d'être rappelés s'avèrent être utiles pour l'analyse dynamique des structures soumises au vent turbulent. En effet, le vent est un phénomène naturel qui consiste en l'écoulement d'un fluide, l'air ( $\nu = 0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$ ), à une certaine vitesse, appelée par raccourci de langage, la vitesse du vent.

Etant donné que les structures étudiées se trouvent dans la couche limite terrestre, l'écoulement de l'air est essentiellement turbulent. La vitesse du vent est donc variable au cours du temps; il est assez commode de l'exprimer dans un repère lié à la direction moyenne du vent, par la somme d'une composante moyenne et de fluctuations dans les directions longitudinale, transversale et verticale :

$$U(t) = \begin{pmatrix} \bar{U} + u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

### 5.2.1 Composante moyenne

Le contenu fréquentiel du vent est constitué de deux bandes de fréquences  $[10^{-7}; 10^{-4}] \text{ Hz}$  et  $[10^{-3}; 10^{-1}] \text{ Hz}$ . Vu son niveau de fréquences assez bas, le premier intervalle présente peu d'intérêt dans l'analyse dynamique des structures; il représente les variations du vent à l'échelle macroscopique. La coupure entre ces deux bandes de fréquences est assez intéressante car elle permet de justifier l'utilisation d'une période de 10 minutes pour estimer ses caractéristiques moyennes.

Notre expérience intuitive du vent laisse supposer que la vitesse moyenne du vent  $\bar{U}$  dépend principalement de la cause qui lui a donné naissance : les conditions climatologiques. Dans le cadre du dimensionnement d'un ouvrage d'art, il importe de pouvoir estimer des valeurs extrémales (au sens des valeurs extrêmes du chapitre 3) de la vitesse moyenne du vent. Ces grandeurs résultent de mesures de vitesses en plusieurs sites. Les grandeurs utiles au dimensionnement sont résumées dans des codes spécifiques à chaque région. Ces codes fournissent généralement la vitesse du vent moyen (sur une période de 10 minutes) qui correspond à une probabilité de dépassement de 0.02 sur une période d'observation d'un an.

Dans la couche limite terrestre, la profil de la vitesse moyenne du vent<sup>24</sup> n'est pas constant. Les vitesses de référence données dans les codes correspondent généralement à une altitude de 10 mètres au-dessus du niveau du sol.

Plusieurs loi permettent de prendre en compte la variation de la vitesse moyenne en fonction de l'altitude. Les plus courantes sont le profil logarithmique :

$$\bar{U}(z) = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{z}{z_0} \quad (5.8)$$

et le profil en puissance :

$$\bar{U}(z) = \left( \frac{z}{z_{ref}} \right)^\alpha \quad (5.9)$$

Les paramètres intervenant dans ce relations sont particuliers à chaque norme; ce sont eux qui permettent de rendre compte des caractéristiques de la topographie locale (rugosité de terrain, inclinaison du terrain, présence de collines, influence de hauts bâtiments, ...)

## 5.2.2 Caractérisation de la turbulence

Les contributions fluctuantes à la vitesse du vent ( $u(t)$ ,  $v(t)$  et  $w(t)$ ) peuvent être représentées à l'aide de processus aléatoires à moyenne nulle. Sur des périodes de l'ordre de 10 minutes comme celles étudiées en pratique, ces contributions à la turbulence peuvent être considérées comme stationnaires. Leur caractérisation complète est donc réalisée à l'aide des notions introduites au chapitre 3.

**5.2.2.1 Caractérisation de premier ordre** La caractéristique principale d'un processus aléatoire à moyenne nulle est sa variance. Les trois composantes de la turbulence sont donc d'abord caractérisées par leur écart-type :

$$\sigma_u \quad \sigma_v \simeq 0.75\sigma_u \quad \sigma_w \simeq 0.5\sigma_u \quad (5.10)$$

Contrairement à la vitesse moyenne du vent, on peut généralement supposer qu'elles sont indépendantes de l'altitude. Le rapport entre ces grandeurs et la vitesse moyenne définit des intensités de turbulence pour chacune des directions :

$$I_u = \frac{\sigma_u}{\bar{U}} \quad I_v = \frac{\sigma_v}{\bar{U}} \quad I_w = \frac{\sigma_w}{\bar{U}} \quad (5.11)$$

Bien que variables avec l'altitude, ces grandeurs adimensionnelles permettent de mieux représenter l'importance de la turbulence. Nous verrons dans la suite, mais cela semble dès à présent assez logique, que les non linéarités du chargement éolien sont d'autant plus importantes que les intensités de turbulence sont grandes. Ce paramètre sera donc un des paramètres primordiaux pour l'analyse dynamique non linéaire dans le domaine temporel.

<sup>24</sup> Evolution de la vitesse moyenne du vent avec l'altitude

**5.2.2.2 Caractérisation de second ordre** Pour une des trois composantes de la turbulence, la fonction d'intercorrélation permet de quantifier les relations entre les vitesses du vent en deux points différents ( $P_1$  et  $P_2$ ) et en des instants différents :

$$R_u(P_1, P_2, \Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(P_1, t)u(P_2, t + \Delta t)dt \quad (5.12)$$

Lorsque les points  $P_1$  et  $P_2$  sont confondus, cette fonction dégénère en la fonction d'autocorrélation habituelle présentée au chapitre 3 :

$$R_u(P, \Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(P, t)u(P, t + \Delta t)dt \quad (5.13)$$

La fonction d'autocorrélation permet de définir une échelle de temps :

$$T_u = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_0^\infty R_u(P, \Delta t)d\Delta t \quad (5.14)$$

qui représente un ordre de grandeur du temps de mémoire des vitesses de vent pour une direction de turbulence donnée. On suppose généralement qu'elle est indépendante du point de l'espace  $P$  choisi. Une forme habituelle adoptée pour les fonctions d'autocorrélation est donnée par des exponentielles décroissantes :

$$R_u(\Delta t) = \sigma_u^2 e^{-\frac{\Delta t}{T_u}} \quad (5.15)$$

La fonction d'intercorrélation pour un déphasage nul représente la cohérence du vent entre deux points distincts de l'espace. Elle permet de définir des échelles de turbulence :

$$L_u^R = \frac{1}{\sigma_u(P_1)\sigma_u(P_2)} \int_0^\infty R_u(P_1, P_2, 0)dr \quad (5.16)$$

où  $r$  représenter la distance entre les points  $P_1$  et  $P_2$  choisis sur un axe  $R$  fixé. En se limitant aux trois axes principaux et aux trois directions de turbulence, neuf échelles de turbulence peuvent donc être définies. Elles représentent un ordre de grandeur des tailles des tourbillons moyens dans les trois directions choisies et pour chacune des composantes de turbulence. De même, on suppose généralement qu'elle est indépendante des points  $P_1$  et  $P_2$  choisis et que la fonction d'intercorrélation peut s'exprimer sous une forme exponentielle :

$$R_u(P_1, P_2, 0) = \sigma_u(P_1)\sigma_u(P_2)e^{-\frac{|P_1-P_2|}{L_u^R}} \quad (5.17)$$

Nous avons vu au chapitre 3 que la fonction d'autocorrélation suffisait à caractériser parfaitement le processus aléatoire au second ordre. Etant donné que l'analyse au vent turbulent se pratique habituellement dans le domaine fréquentiel, il est habituel de quantifier également les turbulences du vent à l'aide de densités spectrales. En toute rigueur, celles-ci devraient être obtenues à partir de la fonction d'autocorrélation (Wiener-Khinchine)

mais d'autres formes de densités spectrales sont en général utilisées. Il y a donc là une incohérence sur laquelle nous reviendrons également plus tard.

Quelques formes habituelles de densités spectrales de puissances sont données au tableau 5.1<sup>25</sup>.

von Karman :	$S_u(z, n) = \frac{4 \frac{L_x^x}{U^2} \sigma_u^2}{\left(1 + 70.7 \left(\frac{n L_x^x}{U}\right)^2\right)^{5/6}}$
Harris :	$S_u(z, n) = \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{1200}{U}\right)^2 n \sigma_u^2}{\left(1 + \left(\frac{1200n}{U}\right)^2\right)^{4/3}}$
Davenport :	$S_u(z, n) = \frac{\frac{2}{3} \frac{1200}{U} n \sigma_u^2}{\left(2 + \left(\frac{1200n}{U}\right)^2\right)^{5/6}}$
Simiu / Scanlan :	$S_v(z, n) = \frac{15 \frac{L_x^x}{U} u_*^2}{\left(1 + 9.5 \left(\frac{n L_x^x}{U}\right)\right)^{5/3}}$
	$S_w(z, n) = \frac{3.36 \frac{L_x^x}{U} u_*^2}{\left(1 + 10 \left(\frac{n L_x^x}{U}\right)\right)^{5/3}}$

Tableau 5.1. : Exemples de densités spectrales de vent

Dans le domaine fréquentiel, la densité spectrale de puissance ne suffit pas à caractériser complètement le processus aléatoire. Il faut également ajouter la notion de cohérence entre les turbulences en des points distincts de l'espace. Rigoureusement, cette cohérence peut être obtenue à partir de la fonction d'intercorrélation définie ci-avant (par transformée de Fourier), mais d'autres relations sont généralement utilisées. La plus courante consiste à choisir une fonction de cohérence à décroissance exponentielle :

$$\psi^u(r_y, r_z, n) = e^{-\frac{n}{U} \sqrt{(C_y^u r_y)^2 + (C_z^u r_z)^2}} \quad (5.18)$$

où apparaissent les coefficients de cohérence<sup>26</sup>  $C_y^u$  et  $C_z^u$ .

Afin de donner un ordre de grandeur de chacun de ces paramètres, le tableau 5.2 présente les valeurs utilisées lors d'une étude pratique (viaduc de Millau).

### 5.3 Expression des forces aérodynamiques

Les deux paragraphes qui viennent d'être développés ont présenté la manière de calculer les efforts aérodynamiques sur le tablier (dans un écoulement uniforme) ainsi que les caractéristiques

<sup>25</sup> Les densités spectrales utilisées en pratique pour l'analyse au vent turbulent diffèrent par un facteur multiplicateur de celles définies au chapitre 3. Le lien entre ces deux grandeurs peut être établi en exprimant que la caractéristique principale des "nouvelles" densités spectrales est que leur intégrale sur les fréquences (et non plus les pulsations) depuis 0 jusque  $+\infty$  (et non plus de  $-\infty$  à  $+\infty$ ) est égale à la variance du processus.

<sup>26</sup> La dénomination est un peu malheureuse car ces coefficients sont d'autant plus petits que la cohérence est importante...

Vitesse moyenne :	32.4m/s (au niveau du tablier)		
Ecart-types :	$\sigma_u = 5.85m/s$	$\Rightarrow I_u = 18\%$	
	$\sigma_v = 5.85m/s$	$\Rightarrow I_v = 18\%$	
	$\sigma_w = 4.5m/s$	$\Rightarrow I_w = 14\%$	
Echelles de turbulence :	$L_u^x = 250m$	$L_u^y = 130m$	$L_u^z = 90m$
	$L_v^x = 70m$	$L_v^y = 100m$	$L_v^z = 100m$
	$L_w^x = 30m$	$L_w^y = 80m$	$L_w^z = 40m$
Coefficients de cohérence :	$C_y^u = 9$	$C_z^u = 12$	
	$C_y^v = 9$	$C_z^v = 12$	
	$C_y^w = 7$	$C_z^w = 9$	
Spectre :	propre au site		

Tableau 5.2. : Exemples de paramètres de caractérisation d'un vent turbulent (Millau)

téristiques de la turbulence du vent. Ces deux parties peuvent alors être remises ensemble de façon à exprimer les forces appliquées sur le tablier du pont lorsque l'écoulement est un écoulement turbulent dont les caractéristiques sont celles du vent.

Dans ce document, nous supposons que la direction moyenne du vent est horizontale. La vitesse du vent en un point de l'espace s'exprime donc par :

$$\{V(y, t)\} = \left\{ \begin{array}{c} U + u(y, t) \\ w(y, t) \end{array} \right\} \quad (5.19)$$

où  $y$  représente une abscisse le long du tablier et  $t$  représente le temps. Pour faciliter ensuite l'implémentation numérique, la vitesse moyenne du vent  $U$  est supposée être constante le long du pont. Les conventions de signes sont celles de la figure 5.4.

Le mouvement du tablier peut être décrit par ses mouvements de flexion  $[h(y, t)]$ , de tangage  $[\alpha(y, t)]$  et de balancement  $[p(y, t)]$ .

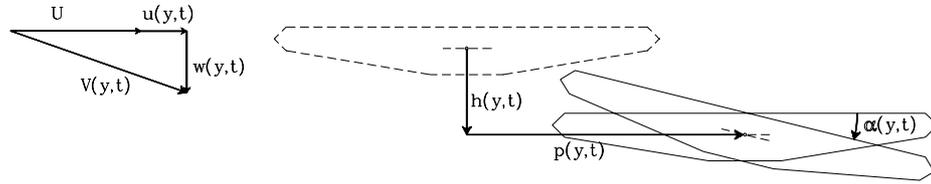


FIGURE 5.4. DÉPLACEMENTS STRUCTURELS : CONVENTIONS DE SIGNES

Les calculs seront réalisés sous l'hypothèse de quasi-stationnarité supposant qu'en chaque instant l'écoulement du fluide autour du tablier est permanent. Les efforts permanents sont estimés à l'aide des coefficients aérodynamiques déterminés en soufflerie :

$$\begin{aligned} F_L(U, i) &= \frac{1}{2} \rho C_L(i) B U^2 \\ F_D(U, i) &= \frac{1}{2} \rho C_D(i) B U^2 \\ F_M(U, i) &= \frac{1}{2} \rho C_M(i) B^2 U^2 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ces relations permettent donc d'estimer l'évolution au cours du temps des efforts induits par le vent sur le pont. Il suffit en effet d'exprimer avec les notations du problème, la norme de la vitesse du vent ainsi que son incidence :

$$\begin{aligned} F_L(y, t) &= \frac{1}{2} \rho C_L(i_{app}(y, t)) B |V_{app}(y, t)|^2 \\ F_D(y, t) &= \frac{1}{2} \rho C_D(i_{app}(y, t)) B |V_{app}(y, t)|^2 \\ F_M(y, t) &= \frac{1}{2} \rho C_M(i_{app}(y, t)) B^2 |V_{app}(y, t)|^2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

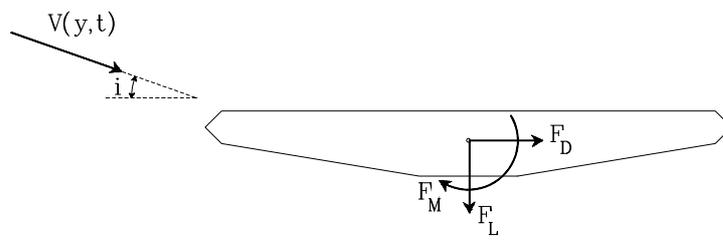


FIGURE 5.5. EFFORTS AÉRODYNAMIQUES : CONVENTIONS DE SIGNES

où  $i_{app}$  et  $V_{app}$  représentent respectivement les évolutions au cours du temps, au point d'abscisse  $y$ , de l'angle d'incidence apparent et de la vitesse apparente du vent. Voici donc établies les relations principales qui permettent d'exprimer en terme des pressions les effets du fluide sur la structure.



# **PARTIE II**

## **Analyse dans le domaine fréquentiel**

Le vent est un phénomène aléatoire qui peut être considéré comme stationnaire sur des périodes de l'ordre de 10 minutes. Il paraît alors naturel de le caractériser à l'aide de densités spectrales de puissance. Les premiers analystes qui se sont intéressés à ce problème l'avaient d'ailleurs compris. Ils ont mis en oeuvre les moyens nécessaires afin de réaliser l'analyse des structures dans le domaine fréquentiel.

Dans ce domaine, il est absolument nécessaire que les équations gouvernant le phénomène soient linéaires. Pour la structure, ceci ne pose en règle générale pas trop de problèmes dans la mesure où elle est étudiée aux états de service. La théorie de l'aérodynamique vient par contre de mettre en évidence des relations non linéaires pour l'estimation des efforts aérodynamiques. Afin de pouvoir résoudre le problème dans le domaine fréquentiel, il convient donc de rendre linéaires les expressions de ces efforts appliqués à la structure. Ceci sera présenté dans un premier chapitre (6)

Une fois que les efforts appliqués à la structure sont déterminés, l'analyse habituelle peut alors prendre place. Il peut s'avérer intéressant de développer analytiquement les formules principales. Ceci permet une meilleure compréhension de l'importance de chacun des paramètres caractéristiques du chargement fluide ainsi que de la structure étudiée. Bien sûr, l'inconvénient majeur de ce type de solution est qu'il est rapidement limité par la complexité du problème traité. Le chapitre 7 présente la méthode d'analyse générale ainsi que quelques simplifications habituellement formulées, puis les applique au cas d'une structure très simple.

Lorsque les structures à étudier deviennent trop importantes, de par leur taille ou leur géométrie, l'ingénieur recourt à une méthode numérique telle la méthode des éléments finis. Le passage d'une formulation analytique à cette formulation numérique n'est pas si évidente lorsque le chargement est défini à l'aide d'un processus aléatoire défini par une cohérence spatiale à décroissance exponentielle. Le chapitre 8 présente en effet un

problème lié à la discrétisation de la structure ainsi que sa solution.

---

# Chapitre 6

---

## Linéarisation des forces aérodynamiques

Nous venons de voir que sous l'hypothèse d'un régime quasi-permanent, les forces aérodynamiques (*lift, drag, moment*) s'exerçant sur la structure peuvent s'exprimer par :

$$\begin{aligned} F_L(y, t) &= \frac{1}{2} \rho C_L (i(y, t)) B |V_{app}(y, t)|^2 \\ F_D(y, t) &= \frac{1}{2} \rho C_D (i(y, t)) B |V_{app}(y, t)|^2 \\ F_M(y, t) &= \frac{1}{2} \rho C_M (i(y, t)) B^2 |V_{app}(y, t)|^2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

La démarche habituellement choisie pour linéariser ces expressions commence par la linéarisation de chacun des facteurs du produit.

### 6.1 Premier niveau de simplification

#### 6.1.1 Norme de la vitesse

La vitesse qui doit être prise en compte est la vitesse relative du vent incident par rapport à la structure :

$$\{V_{app}(y, t)\} = \left\{ \begin{array}{c} U + u(y, t) \\ w(y, t) \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \dot{p}(y, t) \\ h(y, t) + rB\dot{\alpha}(y, t) \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

où  $r$  est un coefficient dépendant de la forme de la section.

La norme au carré de la vitesse apparente s'exprime donc par :

$$|V_{app}(y, t)|^2 = U^2 + 2Uu - 2U\dot{p} + u^2 + \dot{p}^2 - 2u\dot{p} + w^2 + \dot{h}^2 + (rB\dot{\alpha})^2 - 2w\dot{h} - 2wrB\dot{\alpha} + 2\dot{h}rB\dot{\alpha} \quad (6.3)$$

L'équation (6.3) peut être rendue linéaire en négligeant les termes de la seconde ligne, ce qui pourrait être licite, à condition que les composantes de la turbulence du vent ainsi que les vitesses structurales soient faibles devant la vitesse moyenne du vent. Ceci constitue une première hypothèse communément admise puisqu'essentielle pour une approche fréquentielle qui ne permet pas de prendre en compte des termes quadratiques de processus aléatoires (tous ceux de la seconde ligne).

L'importance de cette hypothèse concerne principalement les zones à forte turbulence comme les zones urbaines ou les zones latérales des vallées pour lesquelles des intensités de turbulence de 10 à 20% peuvent être atteintes. En considérant un facteur de pointe de 3 pour la turbulence du vent, il n'est donc pas impossible d'obtenir des vitesses fluctuantes de l'ordre de la moitié de la vitesse moyenne du vent.

### 6.1.2 Incidence du vent

Selon les notations de la figure 5.4, l'inclinaison de la vitesse du vent résultante par rapport à l'horizontale s'exprime par :

$$\tan(i_{vent}(y, t)) = \frac{w(y, t) - \dot{h}(y, t) - rB\dot{\alpha}(y, t)}{U + u(y, t) - \dot{p}(y, t)} \quad (6.4)$$

L'incidence du vent par rapport au tablier dans sa position déformée est donc donnée par :

$$i_{app}(y, t) = \arctan \left[ \frac{w(y, t) - \dot{h}(y, t) - rB\dot{\alpha}(y, t)}{U + u(y, t) - \dot{p}(y, t)} \right] - \alpha(y, t) \quad (6.5)$$

Il s'agit à nouveau d'une relation non linéaire qu'il convient d'adapter quelque peu pour la résolution dans le domaine fréquentiel :

$$i_{app}(y, t) \simeq \frac{w(y, t) - \dot{h}(y, t) - rB\dot{\alpha}(y, t)}{U} - \alpha(y, t) \quad (6.6)$$

Ceci permet à nouveau d'introduire un processus aléatoire (l'incidence apparente du vent) qui s'exprime à l'aide d'une combinaison linéaire d'autres processus aléatoires.

Cette approximation est nécessaire à l'utilisation d'une méthode fréquentielle; elle trouve à nouveau sa justification dans l'importance mineure de la turbulence et des vitesses structurales vis-à-vis de la vitesse moyenne du vent : remplacer la tangente par son argument donne une erreur relative inférieure à 5% pour des angles de moins de 20°. Il faut donc trouver la majeure partie de l'approximation dans la modification du dénominateur.

Avec une intensité de turbulence de 15% et un facteur de pointe de 3 pour les composantes de la turbulence, l'angle d'incidence peut atteindre des valeurs extrêmes de l'ordre de :

$$i_{\max} = \arctan \left[ \frac{3.0, 15.\bar{U}}{\bar{U}} \right] \simeq 24^\circ \quad (6.7)$$

Dans le domaine temporel, les non linéarités peuvent être prises en compte sans trop de difficulté si bien que la relation non approchée peut être utilisée.

### 6.1.3 Coefficients aérodynamiques

Connaissant l'expression de la norme de la vitesse apparente du vent ainsi que de son incidence apparente, il ne reste donc plus qu'à les introduire dans les relations donnant les forces aérodynamiques :

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{2}\rho C_L \left( \frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{U} - \alpha \right) B [U^2 + 2Uu - 2U\dot{p}] \\ F_D &= \frac{1}{2}\rho C_D \left( \frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{U} - \alpha \right) B [U^2 + 2Uu - 2U\dot{p}] \\ F_M &= \frac{1}{2}\rho C_M \left( \frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{U} - \alpha \right) B^2 [U^2 + 2Uu - 2U\dot{p}] \end{aligned} \quad (6.8)$$

La figure 6.1 montre quelques exemples de coefficients aérodynamiques ( $C_D$ ,  $C_L$  et  $C_M$ ). Bien que leur allure générale soit non linéaire, il est à nouveau nécessaire, pour l'approche fréquentielle, de linéariser ces coefficients. De manière assez logique, ceci est réalisé autour de l'angle d'incidence du vent moyen qui est supposé nul dans ces calculs.

Les coefficients aérodynamiques linéarisés sont représentés par les lignes en traits discontinus. Nous venons de voir qu'il n'est pas rare que l'angle d'incidence du vent atteigne les  $10^\circ$  à  $15^\circ$ . On peut constater par exemple pour le pont Vasco de Gama que la loi exacte, résultant d'essais en soufflerie, s'éloigne alors assez bien de la loi linéaire approchée. L'approche dynamique non linéaire devrait donc dans ce cas mettre en évidence des différences assez importantes.

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{2}\rho \left[ c_l + c'_l \left( \frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{U} - \alpha \right) \right] B [U^2 + 2Uu - 2U\dot{p}] \\ F_D &= \frac{1}{2}\rho \left[ c_d + c'_d \left( \frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{U} - \alpha \right) \right] B [U^2 + 2Uu - 2U\dot{p}] \\ F_M &= \frac{1}{2}\rho \left[ c_m + c'_m \left( \frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{U} - \alpha \right) \right] B^2 [U^2 + 2Uu - 2U\dot{p}] \end{aligned} \quad (6.9)$$

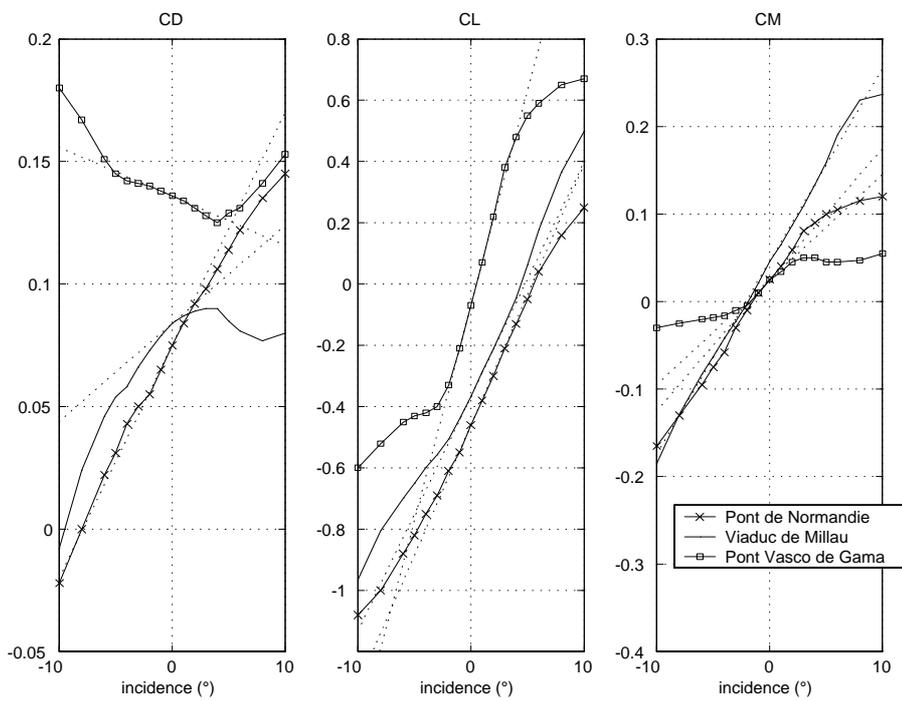


FIGURE 6.1. EXEMPLES DE COEFFICIENTS AÉRODYNAMIQUES DE TABLIERS DE PONTS CÉLÈBRES

où  $c_l = C_L(0)$ ,  $c_d = C_D(0)$ ,  $c_m = C_M(0)$ ,  $c'_l = \left. \frac{dC_L}{di} \right]_{i=0}$ ,  $c'_d = \left. \frac{dC_D}{di} \right]_{i=0}$  et  $c'_m = \left. \frac{dC_M}{di} \right]_{i=0}$ .

## 6.2 Simplifications supplémentaires

Dans l'expression des forces aérodynamiques, bien que chacun des facteurs soit linéaire en les processus aléatoires, il reste néanmoins des termes quadratiques croisés entre les différents facteurs. Des simplifications supplémentaires sont donc nécessaires afin d'obtenir une expression linéaire de ces forces. Elles permettent également une simplification des équations obtenues, ce qui ne peut qu'aller de paire avec une meilleure compréhension du phénomène.

### 6.2.1 Hypothèse de petites rotations

L'incidence apparente du vent moyen ne provient presque exclusivement que de la turbulence du vent et non pas de l'angle de torsion du tablier. Il paraît donc licite de supprimer le terme en  $\alpha$  apparaissant dans l'expression des efforts :

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{2}\rho BU^2 \left[ c_l + c'_l \frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{U} \right] \left[ 1 + 2\frac{u}{U} - 2\frac{\dot{p}}{U} \right] \\ F_D &= \frac{1}{2}\rho BU^2 \left[ c_d + c'_d \frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{U} \right] \left[ 1 + 2\frac{u}{U} - 2\frac{\dot{p}}{U} \right] \\ F_M &= \frac{1}{2}\rho B^2 U^2 \left[ c_m + c'_m \frac{w - \dot{h} - rB\dot{\alpha}}{U} \right] \left[ 1 + 2\frac{u}{U} - 2\frac{\dot{p}}{U} \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

### 6.2.2 Découplage selon le type de mouvement

Afin d'éviter des termes croisés entre mouvements de flexion, de tangage et de balancement, certains termes sont encore éliminés des expressions. Ainsi, pour les efforts de portance n'interviennent plus que les déplacements verticaux, pour les efforts de traînée, que les déplacements horizontaux et pour les moments de torsion, que les angles de torsion du tablier :

$$F_L = \frac{1}{2}\rho BU^2 \left[ c_l + c'_l \frac{w - \dot{h}}{U} \right] \left[ 1 + 2\frac{u}{U} \right] \quad (6.11)$$

$$F_D = \frac{1}{2}\rho BU^2 \left[ c_d + c'_d \frac{w}{U} \right] \left[ 1 + 2\frac{u}{U} - 2\frac{\dot{p}}{U} \right] \quad (6.12)$$

$$F_M = \frac{1}{2}\rho B^2 U^2 \left[ c_m + c'_m \frac{w - rB\dot{\alpha}}{U} \right] \left[ 1 + 2\frac{u}{U} \right] \quad (6.13)$$

Cette simplification peut trouver sa justification dans le fait que par exemple les mouvements de flexion et de tangage vont en principe se produire indépendamment l'un de l'autre, à des fréquences différentes, qui sont les fréquences de flexion dans les plans verticaux et horizontaux. Ceci n'est plus vrai lorsque ces fréquences propres sont justement proches l'une de l'autre, ou lorsque la structure étudiée présente des modes de vibration hybrides mêlant flexion dans les deux plans simultanément. Dans ces cas, cette hypothèse peut être remise en question.

### 6.2.3 Turbulence et vitesse structurelle d'ordre 2

Finalement, la dernière hypothèse à formuler, afin de découpler complètement les termes de turbulence entre eux mais aussi avec les vitesses structurelles, consiste à considérer à nouveau que la vitesse moyenne du vent est d'un ordre supérieur à la turbulence et aux vitesses structurelles. On obtient ainsi la formulation la plus simple pour exprimer les efforts aérodynamiques sur la structure :

$$\begin{aligned}
 F_L &= \frac{1}{2}\rho BU^2 c_l + \frac{1}{2}\rho BU^2 \left[ 2c_l \frac{u}{U} + c_l' \frac{w}{U} \right] - \frac{1}{2}\rho BU^2 c_l' \frac{\dot{h}}{U} \\
 F_D &= \frac{1}{2}\rho BU^2 c_d + \frac{1}{2}\rho BU^2 \left[ 2c_d \frac{u}{U} + c_d' \frac{w}{U} \right] - \frac{1}{2}\rho BU^2 c_d' 2\frac{\dot{p}}{U} \\
 F_M &= \frac{1}{2}\rho B^2 U^2 c_m + \frac{1}{2}\rho B^2 U^2 \left[ 2c_m \frac{u}{U} + c_m' \frac{w}{U} \right] - \frac{1}{2}\rho B^2 U^2 c_m' \frac{rB\dot{\alpha}}{U}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Toutes les hypothèses formulées permettent d'arriver à ces expressions les plus simples des forces aérodynamiques : elles sont linéaires en les processus aléatoires représentant le phénomène, à savoir les turbulences du vent ( $u$  et  $w$ ) et les vitesses structurelles ( $\dot{h}$ ,  $\dot{p}$  et  $\dot{\alpha}$ ). Chacune des trois expressions ci-dessus comporte trois termes :

- un terme constant : il s'agit de l'effet moyen du vent, la partie statique de la réponse;
- un terme proportionnel à la turbulence : il s'agit des effets turbulents introduits par les fluctuations de vitesse autour leur moyenne;
- un terme proportionnel à une vitesse structurelle : ce sont les effets instationnaires caractérisant l'interaction entre le vent et la structure. Ils proviennent du fait que les efforts induits par le vent sur la structure dépendent de la vitesse et de l'incidence apparents. Les sollicitations de vent ajoutent donc une contribution à l'amortissement structurel existant. On peut également noter que, grâce à l'hypothèse des petites rotations, le chargement aérodynamique n'engendre aucune modification de raideur (termes en  $\alpha$ ).

Les relations (6.14) constituent les expressions les plus simples qu'il soit pour exprimer l'effet du fluide sur la structure. En aboutissant sur cette somme de trois effets, la série d'hypothèses formulées permet une meilleure compréhension du phénomène de chargement aérodynamique. Malgré le nombre d'hypothèses formulées, ces relations ont l'avantage de mettre en jeu ces trois effets qui intuitivement aussi semblent devoir être pris

en compte (un effet moyen du vent, un terme de chargement ne dépendant que de la turbulence et un terme d'interaction entre le fluide et la structure).

Mis à part la mise en évidence des caractéristiques principales d'un chargement fluide, les relations (6.14) ont également l'avantage d'être linéaires en les processus aléatoires. Cette formulation sera donc utilisée pour l'analyse des structures dans le domaine fréquentiel. Dans le domaine temporel par contre, aussi bien la formulation générale non linéaire (6.1) que ces relations abouties peuvent être utilisées. La partie III de ce document exposera, à l'aide d'analyses dynamiques transitoires, les conséquences liées à la succession d'hypothèses qui viennent d'être formulées.



---

# Chapitre 7

---

## Etude analytique d'une structure continue

Le chapitre 6 vient d'introduire la formulation analytique linéaire habituellement utilisée pour l'estimation des forces aérodynamiques sur un tablier de pont. Les expressions de ces efforts interviennent au membre de droite de l'équation du mouvement (Equ. (4.2)) introduite au chapitre 4. La démarche générale de l'analyse stochastique qui y a été présentée peut alors être appliquée au cas particulier d'une sollicitation provenant du vent turbulent. Plutôt que d'appliquer les formules qui y ont été développées, le raisonnement sera repris depuis le début avec les notations propres au problème traité. Etant donné que les structures étudiées dans le domaine du génie civil sont assez importantes, la résolution du problème aura lieu dans la base des modes propres. Après avoir appliqué la méthodologie générale au cas du vent, et présenté les hypothèses simplificatrices supplémentaires, ce chapitre présente un exemple simple d'application. Il sera utilisé comme référence dans le reste du document.

### 7.1 Projection en base modale

Sous la forme (4.2), les équations du mouvement sont écrites dans la base structurelle (ou base nodale) : les inconnues sont les déplacements en chacun des points de la structure. Ces équations sont généralement projetées dans la base des modes propres. D'une part, ceci permet de réduire le nombre d'inconnues au nombre de modes choisis et d'autre part, et ce pour autant que l'amortissement soit proportionnel, les équations à résoudre sont alors découplées.

Pour simplifier l'écriture, nous décomposerons chaque mode propre ( $k$ ) en ses déplacements de balancement, de flexion et de tangage :  $p_k(y)$ ,  $h_k(y)$  et  $\alpha_k(y)$ . Dans la formulation analytique, ces grandeurs sont des fonctions de  $y$ , l'abscisse le long du tablier. Pour les structures simples, chaque mode propre ne se compose que d'un seul type de déformation

(pour un  $k$  fixé, seul  $p_k$ ,  $h_k$  ou  $\alpha_k$  est non nul). Les modes propres sont alors généralement caractérisés par le nombre de demi-ondes ainsi que le type de mouvement (flexion, tangage ou balancement). Les structures plus complexes telles les ponts suspendus ou haubanés à plusieurs nappes peuvent cependant avoir des modes propres combinant plusieurs de ces types de déformation.

La projection en base modale revient à supposer que les déplacements de chacun des points de la structure ( $h(y, t)$ ,  $p(y, t)$  et  $\alpha(y, t)$ ) peuvent s'exprimer par combinaisons linéaires de formes prédéfinies fixées (les modes propres) :

$$\begin{aligned} h(y, t) &= \sum h_k(y)q_k(t) \\ p(y, t) &= \sum p_k(y)q_k(t) \\ \alpha(y, t) &= \sum \alpha_k(y)q_k(t) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Les équations en base modale s'expriment sous la forme :

$$[M^*] \{\ddot{q}(t)\} + [C^*] \{\dot{q}(t)\} + [K^*] \{q(t)\} = \{p^*(t)\} \quad (7.2)$$

Les matrices intervenant dans cette relation sont les matrices structurelles généralisées et sont censées être toutes diagonales.  $\{q(t)\}$ ,  $\{\dot{q}(t)\}$  et  $\{\ddot{q}(t)\}$  sont les amplitudes, vitesses et accélérations modales. Quant au processus aléatoire vectoriel  $\{p^*(t)\}$ , il représente la projection en base modale des forces appliquées sur la structure, en l'occurrence ici, les forces aérodynamiques  $F_L(y, t)$ ,  $F_D(y, t)$  et  $F_M(y, t)$  induites par le vent. Pour le  $k^{ième}$  mode :

$$p_k^*(t) = \frac{1}{2}\rho BU^2 \int_0^L F_L(y, t)h_k(y) + F_D(y, t)p_k(y) + F_M(y, t)\alpha_k(y)dy \quad (7.3)$$

Le remplacement dans l'équation (7.3) des relations développées au paragraphe 6.2 pour les forces aérodynamiques, permet à nouveau d'identifier trois termes importants au sein des expressions des forces généralisées :

$$\begin{aligned} p_k^*(t) &= \frac{1}{2}\rho BU^2 \int_0^L c_l h_k(y) + c_d p_k(y) + Bc_m \alpha_k(y) dy \\ &+ \frac{1}{2}\rho BU^2 \int_0^L (c_l h_k(y) + c_d p_k(y) + Bc_m \alpha_k(y)) \frac{2u(t)}{U} dy \\ &+ \frac{1}{2}\rho BU^2 \int_0^L (c_l' h_k(y) + c_d' p_k(y) + Bc_m' \alpha_k(y)) \frac{w(t)}{U} dy \\ &- \frac{1}{2}\rho BU^2 \int_0^L \left( c_l' \frac{\dot{h}(t)}{U} h_k(y) + 2c_d' \frac{\dot{p}(t)}{U} p_k(y) + c_m' \frac{rB^2 \dot{\alpha}(t)}{U} \alpha_k(y) \right) dy \\ &= \{f^{moy}(t)\} + \{f^{tu}(t)\} + \{f^{inst}(t)\} \end{aligned} \quad (7.4)$$

- la première ligne concerne les effets moyens ( $\{f^{moy}(t)\}$ ). Ils ne dépendent pas explicitement du temps. Cette contribution à la force généralisée peut donc être analysée statiquement. Les déplacements et efforts statiques qui en résultent ( $\{q^{moy}(t)\} = [K^*]^{-1} \{f^{moy}(t)\}$ ) sont donc simplement ajoutés à la réponse dynamique de la structure sous les deux autres effets ;
- les deuxième et troisième lignes concernent les effets turbulents ( $\{f^{tu}(t)\}$ ). Ils représentent les efforts résultant des pressions aérodynamiques appliquées sur l'ouvrage, sous l'hypothèse d'un écoulement quasi-permanent ;
- le terme de la quatrième ligne concerne les effets instationnaires ( $\{f^{inst}(t)\}$ ). Ce sont les termes proportionnels aux vitesses structurelles et proviennent du fait que les pressions aérodynamiques dépendent de la vitesse relative entre le fluide et la structure.

Reprenons maintenant séparément les termes des effets turbulents et instationnaires afin de les développer sous une forme plus utile.

Ces deux derniers effets sont de type dynamique et devront donc être traités simultanément. Il est important de remarquer dès à présent que la dissociation entre les réponses moyenne (statique) et dynamique est subordonnée aux hypothèses précédemment formulées. Lorsque le caractère non linéaire du chargement est pris en compte, il est instinctivement prévisible de ne plus pouvoir appliquer le principe de superposition. Le chapitre 11 présentant la méthode d'analyse non linéaire dans le domaine temporel en présentera effectivement les justifications.

### 7.1.1 Effets turbulents

Les effets turbulents intègrent les fluctuations longitudinale et verticale de la vitesse du vent. Dans le domaine temporel et en base modale, ils peuvent être écrits sous la forme compacte :

$$f_k^{tu}(t) = \frac{1}{2}\rho BU \int_0^L A_k(y)u(y,t)dy + \frac{1}{2}\rho BU \int_0^L B_k(y)w(y,t)dy \quad (7.5)$$

$$\text{où} \quad A_k(y) = 2c_l h_k(y) + 2c_d p_k(y) + 2Bc_m \alpha_k(y) \quad (7.6)$$

$$\text{et} \quad B_k(y) = c_l' h_k(y) + c_d' p_k(y) + Bc_m' \alpha_k(y) \quad (7.7)$$

Toutes les hypothèses de linéarisation formulées au chapitre 6 visent à permettre une résolution du problème dans le domaine fréquentiel. La première étape consiste donc à estimer les transformées de Fourier des efforts modaux. La linéarité de l'opérateur de Laplace permet d'écrire :

$$F_k^{tu}(n) = \frac{1}{2}\rho BU \int_0^L A_k(y)U(y,n)dy + \frac{1}{2}\rho BU \int_0^L B_k(y)W(y,n)dy \quad (7.8)$$

Cette relation se traduit aisément en terme de densités spectrales de puissance :

$$\begin{aligned}
S_{f_{kl}^{tu}}(n) &= \left(\frac{1}{2}\rho BU\right)^2 \int_0^L \int_0^L A_k(y_1)A_l(y_2)S_u(y_1, y_2, n)dy_1dy_2 \\
&+ \left(\frac{1}{2}\rho BU\right)^2 \int_0^L \int_0^L B_k(y_1)B_l(y_2)S_w(y_1, y_2, n)dy_1dy_2 \\
&+ \left(\frac{1}{2}\rho BU\right)^2 \int_0^L \int_0^L A_k(y_1)B_l(y_2)S_{uw}(y_1, y_2, n)dy_1dy_2 \\
&+ \left(\frac{1}{2}\rho BU\right)^2 \int_0^L \int_0^L B_k(y_1)A_l(y_2)S_{wu}(y_1, y_2, n)dy_1dy_2 \quad (7.9)
\end{aligned}$$

Il est généralement assez difficile d'identifier, lors de mesures sur site, la densité spectrale de puissance croisée entre les composantes longitudinale et verticale de la turbulence. De plus, cette fonction est en toute généralité complexe ce qui ne motive évidemment pas à y recourir. Sous couvert de cette difficulté d'identification, cette fonction est généralement négligée ; de l'équation (7.9), il ne reste donc plus que les deux premières lignes.

Nous avons préalablement supposé que les vitesses moyennes du vent étaient identiques en tout point de la structure. Cette hypothèse de travail est maintenant complétée en ajoutant que les densités spectrales de puissance le sont également. Cette hypothèse n'est absolument pas réductrice mais plutôt simplificatrice au niveau des notations. Les densités de puissance interspectrales des turbulences du vent s'expriment donc par (Equ. (3.37) et (5.18)) :

$$S_u(y_1, y_2, n) = S_u(n)e^{-\frac{C_w^y n |y_1 - y_2|}{2U}} \quad (7.10)$$

$$S_w(y_1, y_2, n) = S_w(n)e^{-\frac{C_w^y n |y_1 - y_2|}{2U}} \quad (7.11)$$

La densité spectrale croisée entre les forces modales dans les modes  $k$  et  $l$  s'exprime donc par :

$$S_{f_{kl}^{tu}}(n) = \left(\frac{1}{2}\rho BU\right)^2 [Y_{kl}^u(n)S_u(n) + Y_{kl}^w(n)S_w(n)] \quad (7.12)$$

$$\text{où } Y_{kl}^u(n) = \int_0^L \int_0^L A_k(y_1)A_l(y_2)e^{-\frac{C_w^y n |y_1 - y_2|}{2U}} dy_1 dy_2 \quad (7.13)$$

$$\text{et } Y_{kl}^w(n) = \int_0^L \int_0^L B_k(y_1)B_l(y_2)e^{-\frac{C_w^y n |y_1 - y_2|}{2U}} dy_1 dy_2 \quad (7.14)$$

Les fonctions  $Y_{kl}^u(n)$  et  $Y_{kl}^w(n)$  représentent des matrices de transfert permettant de passer des densités spectrales de turbulence aux densités spectrales des forces modales. Ces fonctions renferment également la réduction d'effort provenant de la non cohérence parfaite du vent sur la longueur de l'ouvrage.

### 7.1.2 Effets instationnaires

Les effets instationnaires se manifestent par des termes proportionnels aux vitesses en chacun des points de la structure. Il serait intéressant de pouvoir les transformer en fonction des coordonnées modales :

$$f_k^{inst}(t) = -\frac{1}{2}\rho BU^2 \int_0^L \left[ c'_l \frac{\sum_l h_l(y)\dot{q}_l(t)}{U} h_k(y) + c_d \frac{2 \sum_l p_l(y)\dot{q}_l(t)}{U} p_k(y) + c'_m \frac{rB^2 \sum_l \alpha_l(y)\dot{q}_l(t)}{U} \alpha_k(y) \right] dy \quad (7.15)$$

ou, en permutant les signes d'intégration et de sommation :

$$f_k^{inst}(t) = -\frac{1}{2}\rho BU \sum_l \left[ \dot{q}_l(t) \int_0^L [c'_l h_l(y)h_k(y) + 2c_d p_l(y)p_k(y) + c'_m rB^2 \alpha_l(y)\alpha_k(y)] dy \right] \quad (7.16)$$

Sous forme matricielle, on peut encore écrire :

$$\{f^{inst}(t)\} = -[C^{aero}] \{\dot{q}(t)\} \quad (7.17)$$

où  $C_{kl}^{aero} = \frac{1}{2}\rho BU \int_0^L [c'_l h_l(y)h_k(y) + 2c_d p_l(y)p_k(y) + c'_m rB^2 \alpha_l(y)\alpha_k(y)] dy$

Cette matrice est la matrice d'amortissement aérodynamique généralisé. Il s'agit d'une matrice symétrique mais non diagonale bien qu'exprimée dans la base modale. Conformément à ce qui a été réalisé jusqu'ici, nous supposons que les termes hors diagonale sont nuls, ce qui permet de conserver un système d'équations découplé en base modale. Cette hypothèse est de pratique courante. Il existe des méthodes permettant de prendre en compte ces termes de couplage mais elles sont généralement assez coûteuses en temps de calcul par rapport au bénéfice retiré. Ce type de problème ne sera pas abordé dans ce document.

Etant donné que cette matrice d'amortissement est destinée à être ajoutée à la matrice d'amortissement structural, il paraît assez naturel de définir également des coefficients d'amortissement relatif modaux, à partir des termes diagonaux de la matrice d'amortissement aérodynamique généralisé :

$$[C^{aero*}] = [\Phi]^T [C^{aero}] [\Phi] \quad (7.18)$$

$$\xi_{a_m} = \frac{C_{m,m}^{aero^*}}{2\sqrt{K_{m,m}^* M_{m,m}^*}} \quad (7.19)$$

### 7.1.3 Equations en base modale

En laissant de côté les effets moyens du vent, le système d'équation à résoudre s'exprime finalement sous la forme :

$$[M^*] \{\ddot{q}(t)\} + [C^*] \{\dot{q}(t)\} + [K^*] \{q(t)\} = \{f^{tu}(t)\} - [C^{aero}] \{\dot{q}(t)\} \quad (7.20)$$

Les amortissements aérodynamique et structurel s'ajoutent pour former une matrice d'amortissement total :

$$[M^*] \{\ddot{q}(t)\} + ([C^*] + [C^{aero}]) \{\dot{q}(t)\} + [K^*] \{q(t)\} = \{f_k^{tu}(t)\} \quad (7.21)$$

Dans le domaine fréquentiel, cette relation devient :

$$\{Q(n)\} = \underbrace{(-4\pi^2 n^2 [M^*] + 2i\pi n ([C^*] + [C^{aero}]) + [K^*])^{-1}}_{[H^*(n)]} \{F^{tu}(n)\} \quad (7.22)$$

Puisque les termes hors diagonale dans la matrice d'amortissement aérodynamique sont négligés, la matrice de transfert (mécanique)  $[H^*(n)]$  est également diagonale. Chacun de ses termes représente la fonction de transfert d'un oscillateur à un degré de liberté dont la fréquence est une fréquence propre de la structure (Equ. (4.26)).

La densité spectrale des coordonnées généralisées s'exprime donc par :

$$[S_q(n)] = [H^*(n)] [S_{f^{tu}}(n)] \overline{[H^*(n)]}^T \quad (7.23)$$

c'est-à-dire

$$S_{q_{kl}}(n) = H_k^*(n) \overline{H_l^*(n)} S_{f_{kl}^{tu}}(n) \quad (7.24)$$

La relation (7.24) montre que, sous l'hypothèse d'un amortissement aérodynamique généralisé diagonal, les variances des amplitudes modales sont indépendantes des termes de cohérence entre les forces généralisées. L'amplitude dans un mode est donc entièrement déterminée à partir des forces généralisées associées à ce mode. Il n'en serait évidemment pas ainsi si l'hypothèse simplificatrice n'avait pas été posée.

De plus, il est important de remarquer que, bien que la matrice de transfert soit diagonale, les réponses dans les différents modes propres ne sont pas indépendantes. Ceci provient du fait que les forces généralisées elles-mêmes ne sont pas indépendantes :

$$S_{q_{kl}}(n)|_{k \neq l} = H_k^*(n) \overline{H_l^*(n)} S_{f_{kl}^{tu}}(n)|_{k \neq l} \neq 0 \quad (7.25)$$

#### 7.1.4 Simplifications habituellement formulées lors d'analyses au vent turbulent

L'analyse stochastique continue généralement avec le calcul des variances des amplitudes modales. La théorie des processus aléatoires nous a appris qu'elles pouvaient être estimées par intégration des densités spectrales :

$$\begin{aligned}\sigma_{q_i}^2 &= \int_0^\infty S_{q_i}(n)dn = \int_0^\infty |H_i^*(n)|^2 S_{f_{ii}^{tu}}(n)dn \\ &= \left(\frac{1}{2}\rho BU\right)^2 \int_0^\infty |H_i^*(n)|^2 [Y_{ii}^u(n)S_u(n) + Y_{ii}^w(n)S_w(n)] dn \quad (7.26)\end{aligned}$$

Les formes analytiques des densités spectrales de vitesses de vent sont généralement assez compliquées si bien que l'intégration analytique de la relation (7.26) est souvent supplée par une intégration numérique. Il existe cependant une méthode (basée sur l'approximation en bruit blanc présentée au chapitre 4) qui permet de calculer cette intégrale aux moindres frais, et même mieux car elle ne nécessite pas le calcul des densités spectrales des amplitudes modales. Elle repose sur une décomposition des contributions énergétiques de la réponse (quasi-statique et dynamique). Cette décomposition résulte de la décomposition de la fonction de transfert elle-même :

$$\sigma_{q_i}^2 = \underbrace{|H_i^*(0)|^2 \int_0^\infty S_{f_{ii}^{tu}}(n)dn}_{\sigma_{q_i}^{st^2}} + \underbrace{\int_0^\infty (|H_i^*(n)|^2 - |H_i^*(0)|^2) S_{f_{ii}^{tu}}(n)dn}_{\sigma_{q_i}^{dy^2}} \quad (7.27)$$

A ce stade, aucune hypothèse n'est encore formulée. Les deux courbes de la figure 7.1 s'additionnent pour obtenir exactement la densité spectrale de l'amplitude modale.

La contribution quasi-statique est appelée ainsi car elle est obtenue en divisant la variance de la force modale par le carré de la raideur généralisée ( $|H_i^{*2}(0)| = \frac{1}{K_i^{*2}}$ ). Contrairement à ce que son nom pourrait indiquer, cette fonction ne concerne pas uniquement la valeur à l'origine. On constate en effet sur la figure 7.1 que l'énergie contenue dans cette partie quasi-statique ( $\sigma_{q_i}^{st^2}$ ) intéresse également des fréquences plus importantes. Le contenu fréquentiel du vent est cependant tel que l'intervalle de fréquences considéré soit localisé près de l'origine. Cette première contribution peut être évaluée de deux manières différentes. La première consiste à exprimer la densité spectrale de la force modale en fonction des densités spectrales des composantes de la turbulence :

$$\begin{aligned}\sigma_{q_i}^{st^2} &= |H_i^*(0)|^2 \int_0^\infty S_{f_{ii}^{tu}}(n)dn = |H_i^*(0)|^2 \sigma_{f_{ii}^{tu}}^2 \\ &= |H_i^*(0)|^2 \left(\frac{1}{2}\rho BU\right)^2 \int_0^\infty [Y_{ki}^u(n)S_u(n) + Y_{kl}^w(n)S_w(n)] dn \quad (7.28)\end{aligned}$$

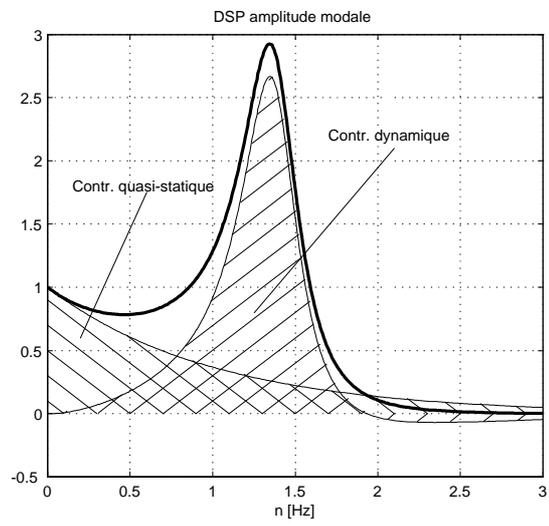


FIGURE 7.1. ILLUSTRATION DES CONTRIBUTIONS QUASI-STATIQUE ET DYNAMIQUE

Cette relation est assez complexe car elle fait intervenir les fonctions  $Y_{ii}^u(n)$  et  $Y_{ii}^w$  qui dépendent non seulement des modes propres de la structure mais aussi des cohérences spatiales pour chaque composante de la turbulence. En outre, utiliser cette relation pourrait sembler paradoxal dans la mesure où la méthode proposée consiste à éviter l'intégration sur le domaine des fréquences. La seconde méthode consiste donc à revenir à la fonction d'autocorrélation des forces généralisées :

$$\sigma_{q_i}^{st^2} = |H_i^*(0)|^2 \int_0^\infty S_{f_{ii}^{tu}}(n) dn = |H_i^*(0)|^2 R_{f_{ii}^{tu}}(0) \quad (7.29)$$

En repartant de la relation (3.7), on trouve, en permutant l'ordre des intégrations :

$$\begin{aligned} R_{f_{ii}^{tu}}(\Delta t) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_i^{tu}(t) f_i^{tu}(t + \Delta t) dt = \\ &\left(\frac{1}{2}\rho BU\right)^2 \int_0^L \int_0^L A_i(y_1) A_i(y_2) R_u(y_1, y_2, \Delta t) dy_1 dy_2 \\ &+ \left(\frac{1}{2}\rho BU\right)^2 \int_0^L \int_0^L B_i(y_1) B_i(y_2) R_w(y_1, y_2, \Delta t) dy_1 dy_2 \quad (7.30) \end{aligned}$$

où interviennent les fonctions d'autocorrélation des vitesses de vent. Ces fonctions d'autocorrélation sont évaluées à l'origine (pas de décalage temporel), pour des points distincts de l'espace. On fait souvent l'hypothèse de corrélation à décroissance exponentielle paramétrée par les échelles de turbulence. En effet, la fonction d'autocorrélation de la vitesse du vent en un point de l'espace peut s'exprimer par :

$$R_u(\Delta t) = \sigma_u^2 e^{-\frac{\Delta t}{T_u}} \quad (7.31)$$

où  $T_u$  représente une échelle de temps, un ordre de grandeur du laps de temps à partir duquel la connaissance de la vitesse à l'instant  $t$  ne permet pas d'aider à la connaissance de la vitesse à l'instant  $t + T_u$ . Sous l'hypothèse de Taylor ( $L_y^u = \bar{U}T_u$ ), on peut écrire la fonction de cross-corrélation pour deux points distincts de l'espace :

$$R_u(y_1, y_2, \Delta t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(y_1, t) u(y_2, t + \Delta t) dt \quad (7.32)$$

$$R_u(y_1, y_2, 0) = \sigma_{u_1} \sigma_{u_2} e^{-\frac{|y_1 - y_2|}{L_y^u}} = \sigma_{u_1} \sigma_{u_2} e^{-\frac{|y_1 - y_2|}{L_y^u}} \quad (7.33)$$

La fonction d'autocorrélation des forces généralisées pour un décalage temporel nul (soit, la variance), s'exprime donc par :

$$\begin{aligned} R_{f_{ii}^{tu}}(0) &= \left(\frac{1}{2}\rho BU\right)^2 \int_0^L \int_0^L A_i(y_1) A_i(y_2) \sigma_u^2 e^{-\frac{|y_1 - y_2|}{L_y^u}} dy_1 dy_2 \\ &+ \left(\frac{1}{2}\rho BU\right)^2 \int_0^L \int_0^L B_i(y_1) B_i(y_2) \sigma_w^2 e^{-\frac{|y_1 - y_2|}{L_y^w}} dy_1 dy_2 \quad (7.34) \end{aligned}$$

Il est important de remarquer que cette hypothèse n'est pas consistante avec l'hypothèse d'une cohérence spatiale exponentielle (exprimée à partir des densités spectrales). Fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance sont en effet liées par la relation de Wiener-Khintchine. Nous avons vu au chapitre 3 que pour un processus à corrélation exponentielle, la densité spectrale était une hyperbole de second ordre :

$$R_{xx}(\Delta t) = \sigma_x^2 e^{-\beta|\Delta t|} \leftrightarrow S_{xx}(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi\beta} \frac{\beta^2}{\beta^2 + \omega^2} \quad (7.35)$$

Pour rester cohérent, un modèle de vent ne peut donc pas être caractérisé par des coefficients de cohérence et des échelles de turbulence à la fois. Une co-existence de ces deux groupes de paramètres pourrait à la limite être accepté à condition de vérifier que la densité spectrale à cohérence exponentielle ne s'éloigne pas trop de l'hyperbole de second ordre caractérisée par les échelles de turbulence.

L'évaluation de la contribution quasi-statique repose donc sur le calcul de l'intégrale double (7.34). Mis à part le fait que cohérence spatiale et échelle de turbulence soient généralement présentées indépendamment l'une de l'autre, aucune hypothèse n'est formulée jusqu'à ce stade.

La contribution dynamique, quant à elle, sera estimée à l'aide de l'approximation en bruit blanc. Une application de cette approximation telle qu'elle a été présentée précédemment mènerait à un résultat tout à fait erroné :

$$\sigma_{q_i}^{dy^2} \simeq S_{f_{ii}^{tu}}(n_{nat}) \int_0^\infty \left( |H_i^*(n)|^2 - |H_i^*(0)|^2 \right) dn \rightarrow -\infty \quad (7.36)$$

Ceci provient de l'asymptote horizontale non nulle dans la fonction  $\left( |H_i^*(n)|^2 - |H_i^*(0)|^2 \right)$ . La méthode est donc quelque peu aménagée; pour autant que le coefficient d'amortissement relatif ne soit pas trop important ( $\xi < 0.1$ ), la contribution dynamique peut être bien approchée par :

$$\sigma_{q_i}^{dy^2} \simeq S_{f_{ii}^{tu}}(n_{nat}) \int_0^\infty |H_i^*(n)|^2 dn = \frac{S_{f_{ii}^{tu}}(n_{nat})}{K_i^{*2}} \frac{\pi n_{nat}}{4\xi_i} \quad (7.37)$$

La figure 7.2 montre en effet que l'utilisation de cette méthode modifiée permet de retrouver une asymptote horizontale nulle pour les hautes fréquences. Cette manière de procéder pourrait à première vue sembler sécuritaire puisque la courbe obtenue (marquée de ronds) est située au-dessus de la courbe exacte (trait gras). Il ne faut cependant pas oublier les deux conditions mentionnées pour pouvoir appliquer cette approximation en bruit blanc : un taux d'amortissement assez faible et une densité spectrale au niveau de la fréquence propre pas trop petite. Dans le cas d'analyse de structure soumises au vent turbulent, cette seconde condition permet de justifier la moins bonne intégration des plus hautes fréquences. A la figure 4.11, les graphiques de la première ligne montrent que le résultat de l'approximation en bruit blanc peut être insécuritaire lorsque la densité spectrale de l'effort est relativement faible dans le voisinage de la fréquence propre du mode étudié.

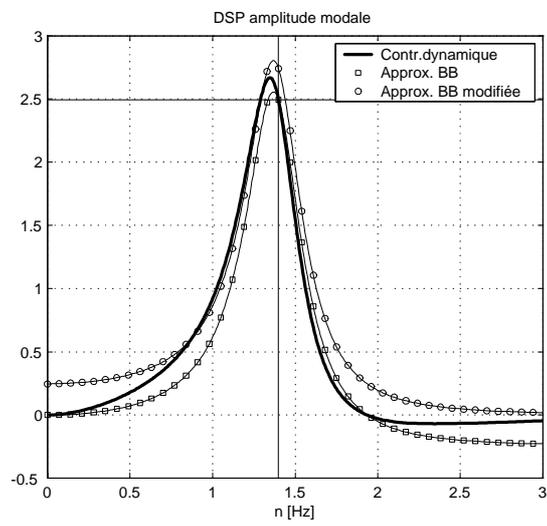


FIGURE 7.2. MODIFICATION APPORTÉE À LA MÉTHODE D'APPROXIMATION EN BRUIT BLANC

Nous pouvons donc conclure, et cela sera illustré à l'aide d'un exemple, que, dans le cas de l'analyse au vent turbulent, l'approximation en bruit blanc est sécuritaire pour les basses fréquences et de moins en moins au fur et à mesure que l'on considère des modes de plus hautes fréquences.

En regroupant les expressions développées pour chacune des deux contributions, les variances des amplitudes modales s'expriment par :

$$\sigma_{q_i}^2 = \frac{1}{k_i^2} \left( \frac{1}{2} \rho B U \right)^2 \left[ \int_0^L \int_0^L A_i(y_1) A_i(y_2) \sigma_u^2 e^{-\frac{|y_1-y_2|}{L} \frac{y_1 y_2}{y}} dy_1 dy_2 + \int_0^L \int_0^L B_i(y_1) B_i(y_2) \sigma_w^2 e^{-\frac{|y_1-y_2|}{L} \frac{y_1 y_2}{y}} dy_1 dy_2 + [Y_{ii}^u(n_i) S_u(n_i) + Y_{ii}^w(n_i) S_w(n_i)] \frac{\pi n_i}{4 \xi_i} \right] \quad (7.38)$$

La caractérisation complète de la structure statistique des amplitudes modale ne doit pas se suffire de la détermination des variances. Une caractérisation complète requiert également l'estimation des moments spectraux d'ordre supérieur. Ceux-ci sont nécessaires au calcul des largeurs de bande et facteurs de pointes des amplitudes modales. Dans la plupart des codes de calcul au vent turbulent, ces moments ne sont calculés ni par intégration numérique des densités spectrales, ni par une approche en bruit blanc mais plutôt en supposant que les processus modaux sont des processus en bande étroite :

$$\sigma_{q_i}^2 = \omega_i^2 \sigma_{q_i}^2 \quad (7.39)$$

$$\sigma_{\ddot{q}_i}^2 = \omega_i^4 \sigma_{q_i}^2 \quad (7.40)$$

Bien sûr, toutes ces simplifications ne sont pas obligatoires; l'ingénieur de projet a toujours l'opportunité de caractériser les processus à l'aide de densité spectrale et puis d'intégrer numériquement.

## 7.2 Estimation des déplacements

Lorsque les variances des coordonnées généralisées (ainsi que leurs corrélations et, en principe, les moments d'ordre supérieur) sont déterminées, tous les résultats subséquents nécessaires peuvent être estimés. Nous nous limiterons ici à l'estimation des variances des déplacements en chacun des points du tablier.

Les déplacements des noeuds de la structure sont reliés aux coordonnées généralisées par des relations affines (Equ. (7.1)); leurs densités spectrales sont donc reliées entre elles via une formule identique à celle présentée au paragraphe 3.2.3. Par exemple, pour les déplacements verticaux :

$$h(y, t) = \langle h_1(y), h_2(y), \dots, h_M(y) \rangle \{q(t)\} \rightarrow S_h(y_1, y_2, n) = \langle h_m(y_1) \rangle [S_q(n)] \langle h_m(y_2) \rangle^T \quad (7.41)$$

Les variances et covariances des déplacements s'obtiennent par intégration de cette relation :

$$\sigma_h^2(y_1, y_2) = \int_0^\infty S_h(y_1, y_2, n) dn = \sum_{m_1} \sum_{m_2} h_{m_1}(y_1) h_{m_2}(y_2) \sigma_{q_{m_1 m_2}}^2 \quad (7.42)$$

Tout d'abord, cette relation confirme que l'estimation des densités spectrales des déplacements n'est pas nécessaire au calcul des variances (des déplacements) puisqu'elles peuvent s'obtenir à partir des variances et covariances des amplitudes modales.

De plus, elle montre également qu'une approche rigoureuse nécessite l'estimation des covariances entre amplitudes modales pour l'estimation correcte des variances (et covariances) des déplacements. Ces termes croisés entre différents modes sont souvent négligés mais ne sont nuls que très rarement. Pour rappel, les covariances non nulles entre amplitudes modales ne proviennent pas d'un amortissement non proportionnel et sont présentes même lorsque la matrice de transfert en base modale est diagonale (Equ. (7.25)).

L'approximation en bruit blanc présentée ci-avant a permis de développer une relation simple pour l'expression des variances des amplitudes modales. Une démarche semblable permet d'obtenir également une relation simple pour l'expression des covariances. Elle n'est cependant pas présentée dans ce document; les covariances des amplitudes modales sont simplement négligées, ce que signifie en d'autres termes que les réponses dans chacun des modes sont supposées indépendantes les unes des autres. Cette hypothèse de travail est acceptable pour l'étude de la structure simple choisie dont les formes modales sont suffisamment distinctes et les fréquences propres suffisamment espacées<sup>27</sup>. Un exemple sera néanmoins fourni pour montrer la nécessité de tenir compte de ces covariances entre amplitudes modales.

Bien que la formule permette également de calculer les covariances entre déplacements en différents points de la structure, nous ne calculerons que les variances des déplacements en une seule section, et ce donc, en omettant les cohérences entre réponses modales :

$$\begin{aligned} \sigma_h^2(y) &= \sum_m \sigma_{q_m}^2 h_m^2(y) \\ \sigma_p^2(y) &= \sum_m \sigma_{q_m}^2 p_m^2(y) \\ \sigma_\alpha^2(y) &= \sum_m \sigma_{q_m}^2 \alpha_m^2(y) \end{aligned} \quad (7.43)$$

### 7.3 Exemple d'application

La structure la plus simple qui puisse être étudiée est une poutre isostatique sur deux appuis à fourches. C'est cette structure qui sera principalement utilisée pour comparer les résultats

<sup>27</sup> Un espacement suffisant entre deux modes propres ou deux formes modales suffisamment distinctes suffit à pouvoir négliger les termes de cohérence entre ces modes

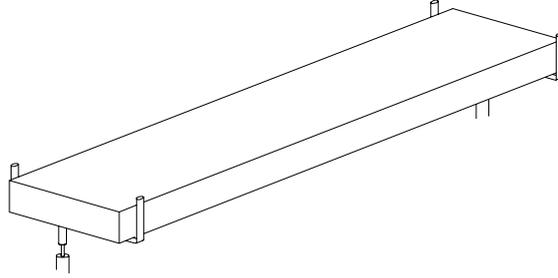


FIGURE 7.3. POUTRE ISOSTATIQUE SUR APPUIS À FOURCHE

de différentes analyses. Pour cette structure simple, les modes propres de vibrations selon les trois directions envisagées sont parfaitement découplés et les conditions d'appui sont telles que les modes propres soient sinusoïdaux aussi bien pour les modes de flexion que de torsion :

Les fonctions modales incluant les prises au vent s'écrivent :

$$A_m(y) = \begin{cases} 2c_l \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) & \text{si le mode } m \text{ est à une flexion verticale} \\ 2c_d \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) & \text{si le mode } m \text{ est à un balancement} \\ 2Bc_m \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) & \text{si le mode } m \text{ est à une torsion} \end{cases} \quad (7.44)$$

$$B_m(y) = \begin{cases} c_l' \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) & \text{si le mode } m \text{ est à une flexion verticale} \\ c_d' \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) & \text{si le mode } m \text{ est à un balancement} \\ Bc_m' \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) & \text{si le mode } m \text{ est à une torsion} \end{cases} \quad (7.45)$$

Sous une forme plus générique, notons :

$$A_m(y) = a_m \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \quad (7.46)$$

$$B_m(y) = b_m \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \quad (7.47)$$

Selon le type de vibration, les coefficients  $a_m$  et  $b_m$  s'expriment en fonction des coefficients de traînée, de portance, de couple, ou de leurs dérivées. Les fonctions de transfert entre les forces généralisées et les vitesses de vent (Equ. (7.13) et Equ. (7.14)) s'expriment par :

$$Y_{m_1 m_2}^u(n) = a_{m_1} a_{m_2} L^2 \Psi_{m_1 m_2} \left( \frac{2U}{nLC_u^y} \right) \quad (7.48)$$

$$Y_{m_1 m_2}^w(n) = b_{m_1} b_{m_2} L^2 \Psi_{m_1 m_2} \left( \frac{2U}{nLC_w^y} \right) \quad (7.49)$$

où

$$\begin{aligned}
\Psi_{m_1 m_2} \left( \frac{\Delta}{L} \right) &= \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \sin \left( \frac{m_1 \pi x_1}{L} \right) \sin \left( \frac{m_2 \pi x_2}{L} \right) e^{-\frac{|x_1 - x_2|}{\Delta}} dx_1 dx_2 \quad (7.50) \\
&= \frac{\Delta^2}{L^2} \frac{1}{1 + \left( \frac{m_1 \pi \Delta}{L} \right)^2} \frac{1}{1 + \left( \frac{m_2 \pi \Delta}{L} \right)^2} \left\{ \frac{L}{\Delta} \left( 1 + \left( \frac{m_1 \pi \Delta}{L} \right)^2 \right) \delta_{m_1 m_2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{m_1 \pi \Delta}{L} \frac{m_2 \pi \Delta}{L} \left[ 1 + (-1)^{m_1 + m_2} - e^{-\frac{L}{\Delta}} \left( (-1)^{m_1} + (-1)^{m_2} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

et  $\Delta = \frac{2U}{nC_u^2}$  représente, dans l'étude de la turbulence du vent, une grandeur dont la signification physique se rapproche des échelles de turbulence.

Etant donné que nous ne nous intéressons pas aux covariances entre amplitudes modales, nous n'évaluons que les termes diagonaux de ces matrices :

$$\Psi_{mm} \left( \frac{\Delta}{L} \right) = \frac{\Delta^2}{L^2} \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{m \pi \Delta}{L} \right)^2 \right]^2} \left\{ \frac{L}{\Delta} \left[ 1 + \left( \frac{m \pi \Delta}{L} \right)^2 \right] + 2 \left( \frac{m \pi \Delta}{L} \right)^2 \left[ 1 - e^{-\frac{L}{\Delta}} (-1)^m \right] \right\} \quad (7.51)$$

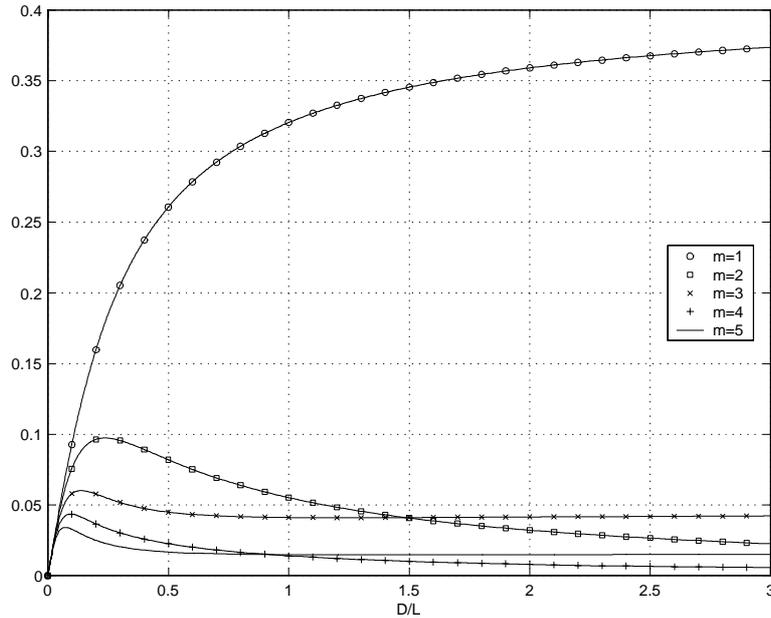


FIGURE 7.4. FONCTIONS DE PARTICIPATION MODALE

Ces fonctions sont à rapprocher des facteurs de participation modale utilisés lors d'analyses sismiques. Ces facteurs représentent la susceptibilité d'excitation d'un mode par un trem-

blement de terre de direction fixée. De même, les fonctions  $\Psi_{mm}$  représentent pour chaque mode propre sa susceptibilité d'excitation par une sollicitation dont la cohérence spatiale est à décroissance exponentielle. Cette fonction est différente pour chaque fréquence considérée, si bien qu'il faudrait plutôt parler de fonction (plutôt que de facteur) de participation modale. Pour les cinq premiers modes propres, la figure 7.4 reprend, en fonction de la distance de corrélation  $\Delta$ , l'évolution de ces fonctions.

Pour une distance de corrélation  $\Delta$  nulle, c'est-à-dire pour des fréquences de tourbillons  $n$  très élevées, les pressions de vent sur la longueur de la poutre sont parfaitement décorrélées; leur projection dans la base de modes propres est nulle pour chacun des modes.

Pour des distances de corrélation  $\Delta$  très grandes, c'est-à-dire pour des fréquences de tourbillons  $n$  très faibles, les tourbillons considérés sont de grande taille et les pressions sur l'ouvrage sont presque identiques en chaque point. La projection de ces efforts dans les modes pairs est nulle puisqu'ils sont composés de nombres de lobes positifs et négatifs égaux. Par contre, pour les modes impairs, il y a toujours un lobe de plus dans l'un ou l'autre sens; la projection de pressions parfaitement cohérentes ne peut donc pas être nulle. Aussi, elle sera d'autant plus grande que le mode considéré est bas. Ceci justifie les différentes asymptotes horizontales de la figure 7.4.

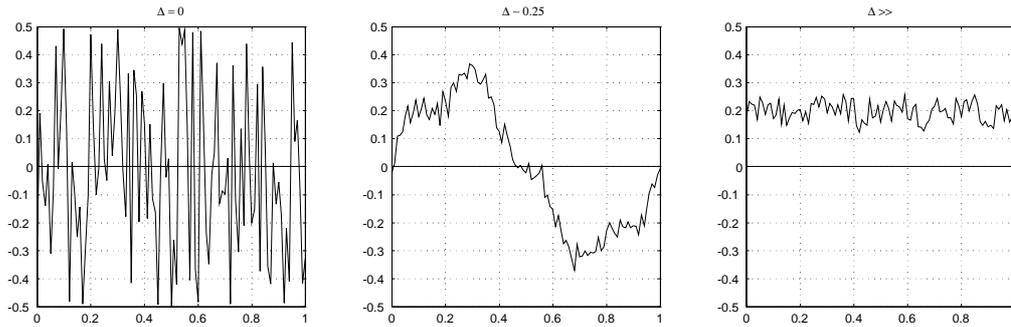


FIGURE 7.5. EXEMPLES DE PRESSIONS DE VENT POUR DIFFÉRENTES DISTANCES DE CORRÉLATION

Aussi, la figure 7.5 indique clairement qu'il existe une distance de corrélation  $\Delta$  qui permet de maximiser la participation dans chacun des modes à partir du second. Cette distance optimale est évidemment d'autant plus faible que le mode considéré est haut. Ceci justifie l'existence et la position des maxima de la figure 7.4.

Les densités spectrales unidimensionnelles des forces généralisées s'expriment par :

$$S_{f_m f_m}(n) = \left( \frac{1}{2} \rho B U \right)^2 [Y_{mm}^u(n) S_u(n) + Y_{mm}^w(n) S_w(n)] \quad (7.52)$$

Nous avons déjà vu à deux reprises que les densités spectrales ne sont en général pas calculées car les variances des amplitudes modales sont obtenues à l'aide de l'approximation en bruit blanc. L'utilisation de cette approximation se justifie déjà sur cet exemple simple car, même si les fonctions  $Y_{kk}^u(n)$  ont pu être déterminées assez facilement, il n'est

guère aussi immédiat d'intégrer analytiquement le produit de ces fonctions par la densité spectrale de la turbulence (von Karman, par exemple).

Les résultats de deux approches seront donc présentés :

- la première recourt à l'approximation en bruit blanc. La première méthode résulte donc de l'application de la formule (7.38) :

$$\sigma_{q_m}^2 = \frac{L^2}{k_m^2} \left( \frac{1}{2} \rho B U \right)^2 \left[ a_m^2 \sigma_u^2 \Psi_{mm} \left( \frac{L_y^u}{L} \right) + b_m^2 \sigma_w^2 \Psi_{mm} \left( \frac{L_y^w}{L} \right) + \left( a_m^2 \Psi_{mm} \left( \frac{2U}{nLC_u^y} \right) S_u(n_m) + b_m^2 L^2 \Psi_{mm} \left( \frac{2U}{nLC_w^y} \right) S_w(n_m) \right) \frac{\pi n_m}{4\xi_m} \right] \quad (7.53)$$

- la seconde approche intègre numériquement les densités spectrales des amplitudes modales; ceci nécessite alors le calcul des fonctions de transfert et des densités spectrales des forces généralisées (Equ. (7.52)).

Lorsque les variances des amplitudes modales sont déterminées, il ne reste alors plus qu'à obtenir les variances des déplacements à l'aide des formules (7.43). Pour rappel, celles-ci supposent que les vibrations dans chacun des modes propres sont indépendantes.

## 7.4 Résumé

Ce chapitre vient d'introduire, sous une présentation originale, une hypothèse fondamentale habituellement formulée lors d'une analyse au vent turbulent, à savoir la décomposition des réponses modales en leurs contributions "quasi-statique" et "dynamique". La présentation est assez succincte dans la mesure où elle se limite à l'estimation des variances des amplitudes modales. L'appréhension de la structure statistique complète des réponses requiert en effet la détermination des covariances entre coordonnées généralisées ainsi que des moments spectraux d'ordres supérieurs. L'un et l'autre peuvent être estimés à l'aide de formules simplifiées comme celle qui a été présentée ici. Etant donné que la finalité de cet ouvrage concerne davantage les comparaisons entre résolutions numériques dans les domaines temporel et fréquentiel, nous ne sommes donc pas rentrés dans ces détails.

Les formules principales introduites ont alors été appliquées à une structure très simple. Les expressions analytiques obtenues pour les variances des amplitudes modales et des déplacements seront appliquées dans le chapitre suivant afin de valider le modèle numérique développé.



---

# Chapitre 8

---

## Approche fréquentielle d'une structure discrétisée

La formulation analytique qui vient d'être développée dans le cadre d'une structure continue va être adaptée à la méthode des éléments finis. Pour ce faire, un code aux éléments finis très simple a été développé. La simplicité s'explique par le fait que la structure étudiée ne peut être que de type filaire. La position des noeuds, le nombre de travées et la position des appuis sont cependant des données paramétrables. La simplicité du code développé s'explique par le fait que nous disposons déjà d'un code performant permettant l'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel (mais pas temporel). Un premier objectif du code développé vise à la compréhension des conséquences liées à la discrétisation de la structure. Il est donc important de traiter des structures simples pour lesquelles une solution analytique existe. Un second objectif tend à mettre en évidence les effets des hypothèses de linéarisation dans le chargement éolien turbulent. Nous nous contenterons dans ce document d'étudier les mécanismes de base se développant sur des structures simples. Ceci constitue déjà une base assez complexe et il conviendrait idéalement d'intégrer la méthode présentée ici au code de calcul complet qu'est FINELG.

Après une brève présentation des éléments utilisés, ce chapitre indique comment les théories présentées aux chapitres précédents peuvent être appliquées dans un contexte éléments finis.

### 8.1 Présentation des éléments finis

Bien que cela puisse sembler assez basique en soi, il est important de présenter les caractéristiques principales des éléments finis utilisés. En effet, nous verrons dans la suite que la discrétisation de la structure n'est pas sans conséquences lorsque la cohérence des pressions qui lui sont appliquées est monotonément décroissante.

Les éléments finis choisis pour la résolution du problème sont des éléments finis de type

déplacement. Ce sont des éléments à deux nœuds et à cinq degrés de liberté par nœud : deux translations (verticale et horizontale), deux rotations (autour des axes vertical et horizontal), un degré de liberté en torsion. Les champs de déplacement sont cubiques pour les déplacements transversaux et linéaire pour l'angle de torsion.



FIGURE 8.1. NUMÉROTATION DES DEGRÉS DE LIBERTÉ DE L'ÉLÉMENT FINI

Cette formulation mène aux matrices de rigidité utilisées en pratique. Les matrices de masse élémentaires sont consistantes, c'est-à-dire obtenues avec les mêmes fonctions d'interpolation et une masse uniformément répartie le long de l'élément.

La structure est composée de  $N_{el}$  éléments et donc de  $N_{el} + 1$  nœuds, soit  $5(N_{el} + 1)$  degrés de liberté. Afin de simuler différentes conditions d'appuis (ou un nombre différent de travées), chacun des degrés de liberté peut être fixé. Néanmoins, dans les exemples qui suivent, la structure ne comporte qu'une seule travée et est représentée par sept éléments. Les appuis d'extrémité sont des appuis à fourches.

Lorsque les matrices de masse et de raideur globales sont établies (par assemblage), les modes propres de vibration de la structure peuvent être calculés. Les masses et raideurs généralisées peuvent ensuite être estimées. L'amortissement structural est de type Rayleigh. La suite logique de l'analyse stochastique a été présentée précédemment. Elle se résume en l'estimation des densités spectrales des amplitudes modales (desquelles les moments spectraux sont généralement calculés) puis des densités spectrales des déplacements nodaux ainsi que des efforts internes. Finalement, les variances et facteurs de pointe relatifs à chacune de ces grandeurs sont estimés pour permettre la clôture de l'analyse.

## 8.2 Traduction des effets turbulents et instationnaires

C'est ici que l'on applique à la formulation éléments finis, la théorie développée pour les structures continues au chapitre précédent. Pour rappel, lorsque les efforts aérodynamiques sont linéarisés, trois types d'effets peuvent être mis en évidence : les effets moyens, turbulents et instationnaires. Dans un contexte éléments finis, les premiers s'expriment facilement à l'aide de charges nodales énergétiquement équivalentes et donne ainsi lieu à une analyse statique de premier ordre. Nous ne nous intéresserons donc ici qu'aux deux derniers types d'effets.

### 8.2.1 Effets turbulents

Dans le formalisme habituel de l'équation du mouvement, les effets turbulents sont responsables des charges appliquées sur la structure (membre de droite). Ils se traduisent en définitive par les densités spectrales croisées des forces modales (Equ. (7.12)). Plutôt que de passer par les fonctions  $A(y)$ ,  $B(y)$ ,  $Y_{kl}(n)$  présentées ci-avant, la démarche sera systématiquement reprise depuis le début. Cela permet notamment d'étendre sans trop d'efforts la méthode à des structures non filaires.

En un point de l'espace, la contribution turbulente des forces induites par le vent s'exprime par :

$$\begin{Bmatrix} F_L^{tu}(y, t) \\ F_D^{tu}(y, t) \\ F_M^{tu}(y, t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \rho B U \begin{bmatrix} 2c_l & c_l' \\ 2c_d & c_d' \\ 2Bc_m & Bc_m' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(y, t) \\ w(y, t) \end{Bmatrix} \quad (8.1)$$

La logique éléments finis veut que l'état de déformation de la structure puisse être représenté à l'aide d'un nombre fini de connecteurs, généralement choisis comme étant les déplacements nodaux. Nous allons donc travailler dans la suite avec l'expression des pressions et des vitesses de vent en chaque noeud de la structure discrétisée :

$$\begin{Bmatrix} F_{L_j}^{tu}(t) \\ F_{D_j}^{tu}(t) \\ F_{M_j}^{tu}(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \rho B U [C_P] \begin{Bmatrix} u_j(t) \\ w_j(t) \end{Bmatrix} \quad (8.2)$$

Ces pressions en chaque noeud de la structure peuvent être regroupées de sorte à introduire un vecteur des pressions nodales  $\{F_N\}$  ainsi qu'un vecteur des vitesses de vent aux noeuds de la structure  $\{\hat{u}\}$  :

$$\underbrace{\{F_N^{tu}\}}_{3Nnod \times 1} = \underbrace{[Q_1^{tu}]}_{3Nnod \times 2Nnod} \{\hat{u}\} \quad (8.3)$$

Ces vecteurs sont simplement obtenus en plaçant l'une en dessous de l'autre, les  $Nnod$  relations (8.2) pour chacun des noeuds de la structure. La matrice  $[Q_1^{tu}]$  est donc quasi-diagonale, chacun de ses éléments étant donné par  $\frac{1}{2} \rho B U [C_P]$ .

La relation (8.3) introduit des pressions de vent (des forces par unité de longueur de tablier) en chacun des noeuds de la structure. Elles doivent être traduites, conformément à la formulation éléments finis, en forces nodales (instantanées) énergétiquement équivalentes. Pour un élément, on peut s'inspirer de la figure 8.2 pour obtenir une expression de ces forces nodales. Nous allons supposer que les pressions de vent sont uniformes (et égales à la valeur nodale) sur une demi-longueur d'élément.

Pour la traînée par exemple, les forces nodales énergétiquement équivalentes s'expriment

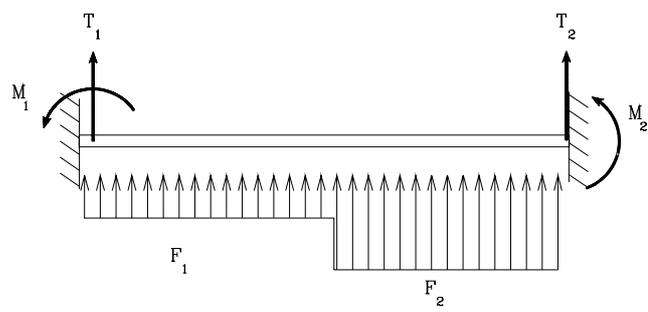


FIGURE 8.2. HYPOTHÈSE SUR LA DISTRIBUTION DES PRESSIONS DE VENT SUR UN ÉLÉMENT

alors par :

$$T_1 = -\frac{L}{32} (13F_{D_1}^{tu} + 3F_{D_2}^{tu}) \quad (8.4)$$

$$T_2 = -\frac{L}{32} (3F_{D_1}^{tu} + 13F_{D_2}^{tu}) \quad (8.5)$$

$$M_1 = -\frac{L^2}{192} (11F_{D_1}^{tu} + 5F_{D_2}^{tu}) \quad (8.6)$$

$$M_2 = \frac{L^2}{192} (5F_{D_1}^{tu} + 11F_{D_2}^{tu}) \quad (8.7)$$

De telles expressions sont également valables pour les forces de portance et de torsion. Pour chaque élément fini, un vecteur à dix composantes peut donc être établi :

$$\underbrace{\{F_{\text{élément}_k}\}}_{10 \times 1} = \underbrace{[Q_{\text{élément}}]}_{10 \times 6} \underbrace{[L_k]}_{6 \times 3N_{\text{nod}}} \underbrace{\{F_N^{tu}\}}_{3N_{\text{nod}} \times 1} \quad (8.8)$$

$[L_k]$  est une matrice de localisation qui permet d'aller rechercher dans la liste des pressions nodales  $\{F_N\}$ , les pressions aux extrémités de l'élément considéré.  $[Q_{\text{élément}}]$  est une matrice comprenant les coefficients permettant de passer des pressions nodales aux efforts énergétiques (comme dans les relations (8.4) à (8.7)). Une boucle sur tous les éléments chargés permet, après rotation (inutile ici car la structure est filaire) et localisation, d'obtenir l'expression du vecteur des charges nodales en fonction des vitesses de vent nodales :

$$\underbrace{\{F\}}_{NDOF \times 1} = \sum_k \underbrace{[L_{2k}]}_{NDOF \times 10} \underbrace{\{F_{\text{élément}_k}\}}_{10 \times 1} = \sum_k [L_{2k}] [Q_{\text{élément}}] [L_k] \{F_N\} = [Q_2] \{F_N\} \quad (8.9)$$

D'un point de vue numérique, il est préférable, dans le vecteur des composantes de vent, de regrouper ensemble les composantes longitudinales et verticales. On note alors :

$$\{\hat{u}\} = [P] \{u\} \quad (8.10)$$

où  $[P]$  est la matrice de permutation adéquate.

Finalement, on obtient la relation entre les forces nodales et les composantes de la turbulence :

$$\{F\} = [Q_2] \underbrace{[Q_1^{tu}] [P]}_{[Q]} \{u\} = [Q] \{u\} \quad (8.11)$$

Cette matrice  $[Q]$  est l'équivalent, en base nodale et pour une structure discrétisée, des fonctions  $Y_{kl}$  introduites pour les structures continues. Puisqu'il existe une relation linéaire entre les forces nodales et les vitesses de vent aux noeuds de la structure, leur matrice de densité spectrale respectives sont reliées :

$$[S_F] = [Q] [S_u] [Q]^T \quad (8.12)$$

## 8.2.2 Effets instationnaires

Les effets instationnaires se traduisent par une contribution supplémentaire à l'amortissement. Sous les hypothèses des petites rotations et d'un vent moyen d'un ordre supérieur aux turbulences et aux vitesses structurelles, nous avons vu que les effets instationnaires se manifestent par des efforts proportionnels aux vitesses structurelles. En chaque noeud de la structure discrétisée, ils s'expriment par :

$$\begin{Bmatrix} F_L^{inst} \\ F_D^{inst} \\ F_M^{inst} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\rho BU \begin{bmatrix} c_l' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rB^2 c_m' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{Bmatrix} = [C_{nod}] \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{Bmatrix} \quad (8.13)$$

En regroupant dans un même vecteur les effets instationnaires en chacun des noeuds de la structure, on obtient une forme plus compacte :

$$\{F_N^{inst}\} = [Q_1^{inst}] \{\dot{x}\} \quad (8.14)$$

Au même titre que la matrice  $[Q_1^{tu}]$  introduite pour les effets turbulents, la matrice  $[Q_1^{inst}]$  est quasi-diagonale. De même, le vecteur  $\{F_N^{inst}\}$  représente des efforts par unité de longueur et il convient à nouveau d'utiliser la matrice  $[Q_2]$  pour les convertir en efforts nodaux :

$$\{F_N^{inst}\} = [Q_2] [Q_1^{inst}] \{\dot{x}\} = [C^{aero}] \{\dot{x}\} \quad (8.15)$$

La matrice  $[C^{aero}]$  est une matrice carrée qui n'est en principe pas symétrique. Cette dissymétrie provient des termes relatifs aux moments dans la matrice  $[Q_2]$ . En effet, si ces termes sont négligés devant les termes relatifs aux efforts tranchants, la matrice d'amortissement aérodynamique redevient alors symétrique. Si l'on discrétise la structure avec des éléments de plus en plus petits, la longueur des éléments tend vers 0, et il devient alors licite de négliger les termes en  $L^2$  (c'est-à-dire relatifs aux moments) vis-à-vis des termes de  $L$  (c'est-à-dire relatifs à l'effort tranchant). Ceci explique pourquoi, dans la formulation continue du chapitre précédent, la matrice d'amortissement était symétrique alors que cette propriété n'est plus observée dès lors que la structure est discrétisée. Puisque la matrice d'amortissement aérodynamique n'est pas symétrique, il va de soi que sa projection en base modale ne le soit pas non plus. Ceci n'affectera cependant pas notre démarche puisque nous avons décidé, dans le cadre de ce document, de négliger les termes de couplage dans l'amortissement modal.

## 8.3 Projection en base modale

Lorsque les densités spectrales de forces nodales sont déterminées (effets turbulents - Equ. (8.12)) et que les caractéristiques d'amortissement aérodynamique le sont également (ef-

fets instationnaires - Equ. (8.15)), il est alors possible de déterminer successivement : les densités spectrales des forces généralisées :

$$[S_f] = [\Phi]^T [S_F] [\Phi] \quad (8.16)$$

et les densités spectrales des amplitudes modales :

$$[S_q] = [H] [S_f] [\overline{H}]^T \quad (8.17)$$

Lorsque ces grandeurs sont établies, les caractéristiques statistiques des coordonnées structurelles (déplacements nodaux, éléments de réduction, ...) peuvent être déterminées. Ceci fera l'objet d'un paragraphe ultérieur car nous allons d'abord discuter les résultats obtenus dans la base des modes propres.

## 8.4 Comparaison entre modèles continu et discret

Afin de valider le modèle numérique développé, nous allons comparer, sur un exemple simple, les résultats obtenus à l'aide des formules (simplifiées ou non) du chapitre précédent avec ceux fournis par une approche numérique.

### 8.4.1 Caractéristiques de la structure étudiée

La comparaison entre les deux méthodes présentées jusqu'ici sera réalisée à partir de l'exemple simple de la poutre sur deux appuis à fourche. Les caractéristiques géométriques, statiques et de masse sont données au tableau 8.1.

Longueur de la poutre ( $L$ ) :	350m
Nombre d'éléments ( $N_{él}$ ) :	7 éléments de 50m
Nombre de nœuds :	8 nœuds
Nombre de DDL ( $NDOF$ ):	40DDL dont 6 bloqués
Module de Young ( $E$ ) :	210000MPa
Inertie en flexion verticale ( $I_V$ ) :	3m <sup>4</sup>
Inertie en flexion horizontale ( $I_H$ ) :	80m <sup>4</sup>
Inertie torsionnelle ( $I_T$ ) :	6m <sup>4</sup>
Section ( $A$ ) :	1,35m <sup>2</sup>
Masse Volumique ( $\rho$ ) :	7850kg/m <sup>3</sup>
Masse linéique ( $m$ ) :	10,6to/m
Coefficients aérodynamiques	Millau
Largeur du tablier ( $B$ ) :	30m

Tableau 8.1. : Caractéristiques de la structure étudiée

Conformément aux développements préalables, le calcul sera réalisé dans la base modale. Seuls les neuf premiers modes propres sont conservés. L'amortissement structurel est de type Rayleigh avec  $\alpha = 0.024$  et  $\beta = 0.00335$ . Ce choix des paramètres de Rayleigh mène aux coefficients d'amortissement de la figure (Fig. 8.3)

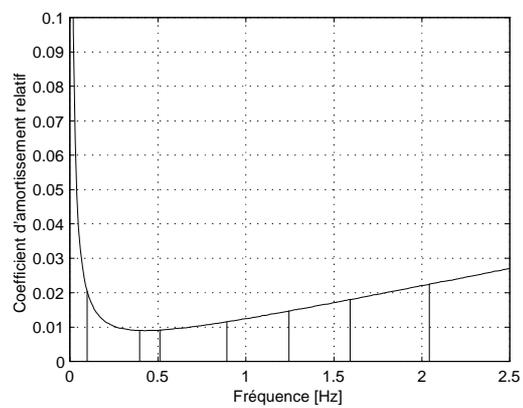


FIGURE 8.3. COEFFICIENTS D'AMORTISSEMENT RELATIF MODAUX

	Analytique	Numérique	Type de mode	$\xi$
1	0.0989 Hz	0.0989 Hz	Flexion verticale ( $\frac{1}{2}$ onde)	0.0204
2	0.3955 Hz	0.3956 Hz	Flexion verticale (deux $\frac{1}{2}$ onde)	0.0090
3	0.5105 Hz	0.5106 Hz	Flexion horizontale ( $\frac{1}{2}$ onde)	0.0091
4	0.8898 Hz	0.8917 Hz	Flexion verticale (trois $\frac{1}{2}$ onde)	0.0115
5	1.2356 Hz	1.2457 Hz	Torsion ( $\frac{1}{2}$ onde)	0.0146
6	1.5819 Hz	1.5923 Hz	Flexion verticale (quatre $\frac{1}{2}$ onde)	0.0180
7	2.0422 Hz	2.0431 Hz	Flexion horizontale (deux $\frac{1}{2}$ onde)	0.0224
8	2.4717 Hz	2.5094 Hz	Flexion verticale (cinq $\frac{1}{2}$ onde)	0.0272
9	2.4731 Hz	2.5541 Hz	Torsion (deux $\frac{1}{2}$ onde)	0.0276

Tableau 8.2. : Résultats de l'analyse modale

Le tableau 8.2 reprend les résultats de l'analyse modale.

Cette structure est sollicitée par un vent turbulent dont les caractéristiques sont données au tableau 8.3.

#### 8.4.2 Exemple de discordance entre les deux méthodes

La figure 8.4 compare les densités spectrales des amplitudes modales calculées de façon numérique et celles obtenues à l'aide des développements analytiques du chapitre précédent. Les trois courbes analytiques sont simplement une application numérique des formules (7.24) et (7.52) développées ci-avant. Que ce soit pour le résultat analytique ou numérique, l'hypothèse de découplage modal est formulée. Le désaccord entre les deux groupes de courbes ne peut donc pas provenir de cet aspect.

On peut vérifier que les deux calculs utilisent les mêmes fonctions de transfert. L'écart entre les densités spectrales des amplitudes modales provient donc d'une estimation différente des forces généralisées. Effectivement, le graphique 8.5 trace, pour le premier mode de flexion verticale, la force généralisée estimée de manière analytique et celle calculée à l'aide du modèle à 7 éléments. Un modèle plus raffiné de la même structure (40 éléments) a également été réalisé. On constate que la densité spectrale calculée à l'aide de ce modèle s'approche bien plus de la densité spectrale de puissance analytique.

L'écart détecté entre les densités spectrales d'amplitudes modales provient donc de la discrétisation de la structure. Cette constatation est confortée par le fait que les rapports entre les trois paires de courbes de la figure 8.4 sont presque superposés (Fig. 8.6), ce qui laisse supposer une indépendance du phénomène vis-à-vis des caractéristiques modales. La légère discordance dans le voisinage des pics de résonance provient du fait que les fréquences propres analytiques et numériques ne concordent pas exactement.

L'erreur commise provient de l'hypothèse que les forces nodales peuvent être évaluées à partir des vitesses nodales uniquement (Fig. 8.2) : le fait de supposer les vitesses de vent constantes sur une demi longueur d'élément contribue à l'augmentation de la cohérence des pressions. Pour les basses fréquences, les tourbillons sont de grande taille, la pression est plus ou moins uniforme sur la longueur de l'élément et l'on constate effectivement que

Vitesse moyenne :	$20m/s$
Ecart-types :	$\sigma_u = 5m/s \Rightarrow I_u = 25\%$ $\sigma_w = 5m/s \Rightarrow I_w = 25\%$
Echelles de turbulence :	$L_u^y = 200m$ $L_w^y = 200m$
Coefficients de cohérence :	$C_u^y = 8$ $C_w^y = 8$
Densité spectrale :	Davenport

Tableau 8.3. : Modèle de vent choisi pour les applications numériques

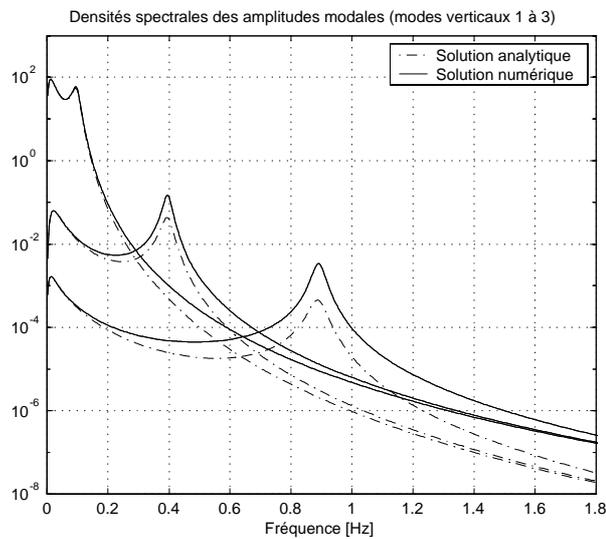


FIGURE 8.4. EXEMPLE DE DÉSACCORD ENTRE RÉSULTATS ANALYTIQUES ET NUMÉRIQUES

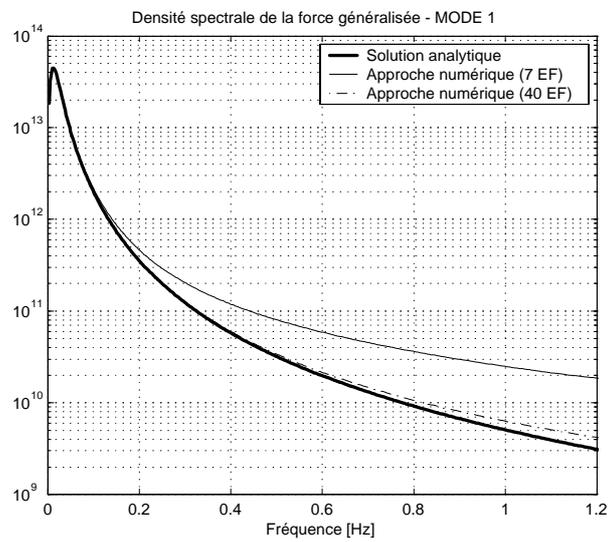


FIGURE 8.5. INFLUENCE DE LA FINESSE DU MAILLAGE

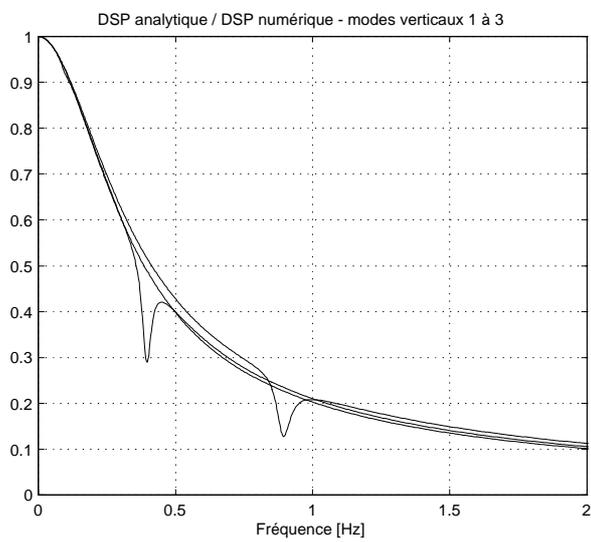


FIGURE 8.6. RAPPORTS ENTRE LES DENSITÉS SPECTRALES ANALYTIQUE ET NUMÉRIQUES DES AMPLITUDES MODALES

cette approche semble valable. Cependant, pour les plus hautes fréquences (tourbillons de plus petite taille), les pressions ne sont plus cohérentes sur la demi longueur d'élément et la méthode employée est à remettre en cause.

Un modèle un peu plus complet doit alors être mis en œuvre si l'on ne désire pas augmenter inutilement le nombre d'éléments. Les paragraphes qui suivent présentent plusieurs solutions à ce problème.

### 8.4.3 Correction adéquate des forces nodales calculées

#### *Première approche : cohérence sur l'élément*

Cette première approche consiste à adopter, au niveau de l'élément, une méthode un peu plus élaborée que l'hypothèse d'une répartition de pression bi-rectangulaire. (Fig. 8.2). La méthode présentée au paragraphe 8.2 se base uniquement sur les vitesses de vent (et donc les pressions aérodynamiques) aux nœuds de la structure et émet l'hypothèse qu'elles sont constantes sur une demi-longueur d'élément. Ceci est assez réducteur mais surtout peut être évité car, en réalité, les pressions de vent entre les nœuds sont également connues; à travers des lois, probabilistes certes, mais connues tout de même. Ces lois peuvent être utilisées pour estimer plus précisément les forces nodales.

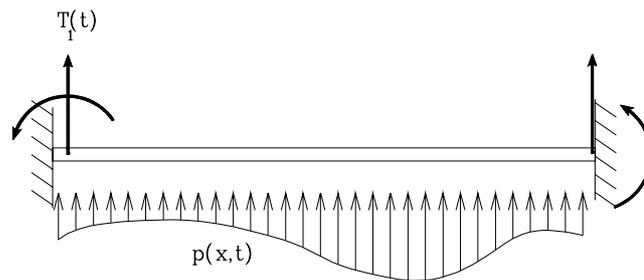


FIGURE 8.7. DISTRIBUTION PLUS RÉALISTE DES PRESSIONS DE VENT APPLIQUÉES SUR L'ÉLÉMENT

Par exemple, pour l'effort tranchant à gauche, nous avons supposé :

$$T_1(t) = -\frac{13L}{32}p(0,t) - \frac{3L}{32}p(L,t) \quad (8.18)$$

Alors qu'il devrait en toute rigueur s'exprimer par :

$$T_1(t) = \int_0^L L_T(x)p(x,t)dx \quad (8.19)$$

où  $L_T(x) = 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1$  représente la ligne d'influence de la réaction d'appui à gauche d'une poutre biencastée et  $p(x,t)$  représente les pressions de vent (trainée, portance, moment) distribuées sur la longueur de l'élément.

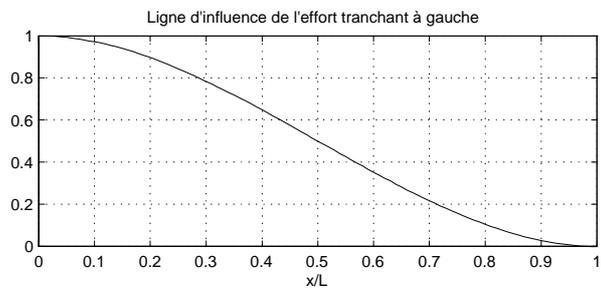


FIGURE 8.8. LIGNE D'INFLUENCE DE L'EFFORT TRANCHANT À GAUCHE (SOUS L'EFFET D'UNE CHARGE TRANSVERSALE UNITAIRE)

La densité spectrale de cet effort est donc donnée par :

$$S_T(n) = \int_0^L \int_0^L L_T(x_1)L_T(x_2)S_P(x_1, x_2, n)dx_1dx_2 \quad (8.20)$$

où  $S_P(x_1, x_2, n)$  est la densité interspectrale de puissance de la pression de vent sur l'élément. L'effort correspond indifféremment aux forces de traînée ou de portance. Etant donné que celles-ci peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires des vitesses de vent (Equ. (8.2)), il s'en suit que :

$$S_P(x_1, x_2, n) = A_u^2 S_u(x_1, x_2, n) + A_w^2 S_w(x_1, x_2, n) \quad (8.21)$$

Ainsi, sous l'hypothèse d'une turbulence à cohérence spatiale exponentielle :

$$\begin{aligned} S_T(n) = & A_u^2 S_u(n) \int_0^L \int_0^L L_T(x_1)L_T(x_2)e^{-\frac{C_u^y n|x_1-x_2|}{2U}} dx_1dx_2 \\ & + A_w^2 S_w(n) \int_0^L \int_0^L L_T(x_1)L_T(x_2)e^{-\frac{C_w^y n|x_1-x_2|}{2U}} dx_1dx_2 \end{aligned} \quad (8.22)$$

Pour simplifier les notations, nous supposons dans la suite que les turbulences dans les directions longitudinale et verticale sont caractérisées par les mêmes coefficients de cohérence ( $C_u^y = C_w^y = C$ ). La densité spectrale de l'effort tranchant à gauche s'exprime donc finalement par :

$$S_T(n) = S_P(n) \int_0^L \int_0^L L_T(x_1)L_T(x_2)e^{-\frac{Cn|x_1-x_2|}{2U}} dx_1dx_2 \quad (8.23)$$

où  $S_P(n) = A_u^2 S_u(n) + A_w^2 S_w(n)$  représente la densité spectrale ponctuelle de pression.

Le résultat de la double intégrale peut se mettre sous la forme d'une somme d'un polynôme de degré 8 et du produit d'un autre polynôme de degré 8 par une exponentielle décroissante :

$$S_T(n) = S_P(n)l^2 \left[ \sum_{i=1}^8 F_{T_i} \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} + e^{-\frac{Cnl}{2U}} \sum_{i=1}^8 G_{T_i} \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} \right] = S_P(n)l^2 \kappa_T \left( \frac{Cnl}{2U} \right) \quad (8.24)$$

Les coefficients intervenant dans cette expression sont donnés à l'annexe A. La fonction  $\kappa_T \left( \frac{Cnl}{2U} \right)$  est la fonction permettant de tenir compte de la réduction de l'effort tranchant nodal lorsque la fréquence des tourbillons considérés augmente.

Voici maintenant la façon dont la densité spectrale de l'effort tranchant est évaluée dans la méthode de base (§ 8.2). Celle-ci suppose que l'effort tranchant s'exprime uniquement en fonction des forces aérodynamiques aux extrémités de l'élément ( Equ. (8.4)) :

$$T = \frac{-l}{32} (13F_{L_1} + 3F_{L_2}) \quad (8.25)$$

Sur base de cette hypothèse, la densité spectrale de l'effort s'obtient par :

$$\begin{aligned} S_T(n) &= \left( \frac{l}{32} \right)^2 (169S_{P_1}(n) + 9S_{P_2}(n) + 39S_{P_1P_2}(n) + 39S_{P_2P_1}(n)) \\ &= \left( \frac{l}{32} \right)^2 \left( 178A_u^2 S_u(n) + 178A_w^2 S_w(n) + 78A_u^2 S_u(n) e^{-\frac{Cnl}{2U}} + 78A_w^2 S_w(n) e^{-\frac{Cnl}{2U}} \right) \\ &= S_P(n) l^2 \left( \frac{178 + 78e^{-\frac{Cnl}{2U}}}{1024} \right) = S_P(n) l^2 \hat{\kappa}_T \left( \frac{Cnl}{2U} \right) \end{aligned} \quad (8.26)$$

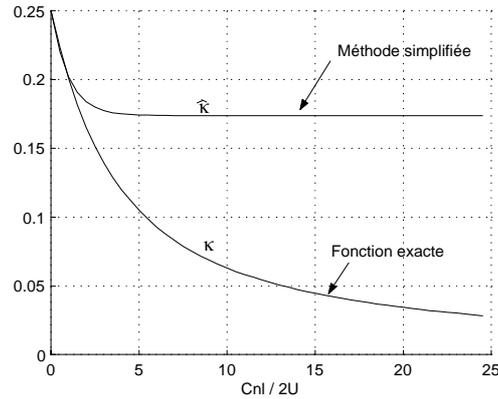


FIGURE 8.9. REPRÉSENTATION DE LA FONCTION ADIMENSIONNELLE PERMETTANT DE PRENDRE EN COMPTE LA COHÉRENCE SUR L'ÉLÉMENT

Le graphique 8.9 reprend l'évolution des deux nouvelles fonctions adimensionnelles introduites ( $\kappa_T$  et  $\hat{\kappa}_T$ ) qui prennent en compte l'effet de la cohérence sur l'effort tranchant. Il montre clairement que la méthode simplifiée fonctionne effectivement bien pour les basses fréquences, mais surestime grossièrement la cohérence pour les hautes fréquences.

De la comparaison des relations (8.24) et (8.26), il apparaît que les effets de la cohérence entre les pressions de vent sur l'élément peuvent être pris en compte en utilisant la méthode de base mais pour laquelle les densités spectrales des pressions de vent seraient corrigées par le facteur :

$$\chi_T(n) = \frac{\kappa_T \left( \frac{Cnl}{2U} \right)}{\widehat{\kappa}_T \left( \frac{Cnl}{2U} \right)} = \frac{\sum_{i=1}^8 F_{T_i} \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} + e^{-\frac{Cnl}{2U}} \sum_{i=1}^8 G_{T_i} \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i}}{\frac{178+78e^{-\frac{Cnl}{2U}}}{1024}} \quad (8.27)$$

Pour la poutre biencastée considérée, le moment d'encastrement est caractérisé par une autre ligne d'influence et donc également par d'autres coefficients dans les polynômes de degré 8 :

$$S_T(n) = S_P(n)l^2 \left[ \sum_{i=1}^8 F_{M_i} \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} + e^{-\frac{Cnl}{2U}} \sum_{i=1}^8 G_{M_i} \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} \right] \quad (8.28)$$

$$= S_P(n)l^2 \kappa_M \left( \frac{Cnl}{2U} \right) \quad (8.29)$$

où la fonction  $\kappa_M \left( \frac{2U}{Cnl} \right)$  représente la réduction du moment nodal sous l'effet de la diminution de cohérence entre les pressions de vent.

Quant à la méthode simplifiée du paragraphe 8.2, elle revient à calculer la densité spectrale de la sorte :

$$M = \frac{-l^2}{192} (11F_{L_1} + 5F_{L_2}) \quad (8.30)$$

$$S_M(n) = \left( \frac{l^2}{192} \right)^2 (121S_{P_1}(n) + 25S_{P_2}(n) + 55S_{P_1P_2}(n) + 55S_{P_2P_1}(n)) \quad (8.31)$$

$$\begin{aligned} S_M(n) &= \left( \frac{l^2}{192} \right)^2 (146A_u^2 S_u(n) + 146A_w^2 S_w(n) \\ &\quad + 110A_u^2 S_u(n) e^{-\frac{Cnl}{2U}} + 110A_w^2 S_w(n) e^{-\frac{Cnl}{2U}}) \\ &= S_P(n)l^4 \frac{146 + 110e^{-\frac{Cnl}{2U}}}{36864} = S_P(n)l^2 \widehat{\kappa}_M \left( \frac{Cnl}{2U} \right) \end{aligned} \quad (8.32)$$

Dans ce cas, le facteur de correction est donné par :

$$\chi_M(n) = \frac{\kappa_M \left( \frac{Cnl}{2U} \right)}{\widehat{\kappa}_M \left( \frac{Cnl}{2U} \right)} = \frac{\sum_{i=1}^8 F_{M_i} \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} + e^{-\frac{Cnl}{2U}} \sum_{i=1}^8 G_{M_i} \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i}}{\frac{146+110e^{-\frac{Cnl}{2U}}}{36864}} \quad (8.33)$$

La figure 8.10 montre les facteurs de correction définis pour les densités spectrales des efforts tranchants et des moments de flexion. Ils ont une allure proche des trois courbes de la

figure 8.6, ce qui semble indiquer que l'origine de la discordance a bien été identifiée. Ces facteurs de correction sont en réalité des fonctions de correction, qui varient en fonction de la fréquence  $n$ . De plus, ces corrections permettent de prendre en compte la cohérence des pressions de vent sur l'ouvrage. De telles corrections portent souvent le nom d'admittance. Afin de les distinguer des autres types d'admittance, les fonctions de correction introduites ici pourraient par exemple être appelées des *admittances numériques*, dans la mesure où elles n'ont de sens que dans un modèle éléments finis.

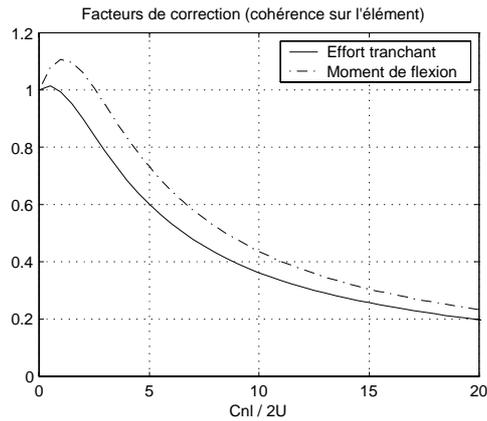


FIGURE 8.10. FACTEUR DE CORRECTION DES EFFORTS TRANCHANTS ET MOMENTS DE FLEXION

L'existence d'un maximum plus grand que l'unité pour les très basses fréquences s'explique par le dessin de la figure 8.11. Pour les basses fréquences, l'évolution des pressions le long de l'élément est quasi-linéaire mais peut être telle que la différence entre la vraie distribution et la distribution bi-rectangulaire soit positive. Dans ce cas, la résultante des pressions sur l'élément est plus grande que la résultante de la distribution bi-rectangulaire. La méthode de base n'est donc pas toujours sécuritaire<sup>28</sup>.

La figure 8.12 montre que l'utilisation du facteur de correction permet d'améliorer l'estimation des forces généralisées. La procédure de correction utilisée pour atteindre ce résultat est assez lourde à mettre en œuvre étant donné que :

- des coefficients différents doivent en principe être utilisés pour les composantes de vent différentes (si les coefficients de cohérence sont différents, ce qui n'est pas le cas dans notre exemple d'application) ;
- des coefficients différents doivent être utilisés pour différents types d'efforts nodaux (efforts tranchants, moment de flexion, moments de torsion).

Pratiquement, les éléments diagonaux de la matrice de densité spectrale des forces

<sup>28</sup> Seul le facteur de correction des moments est supérieur à l'unité; il faut savoir que les problèmes traités en général sont plutôt conditionnés par les efforts tranchants nodaux plutôt que les moments nodaux. Ceci plaide donc en faveur d'un excès de sécurité de la méthode de base.

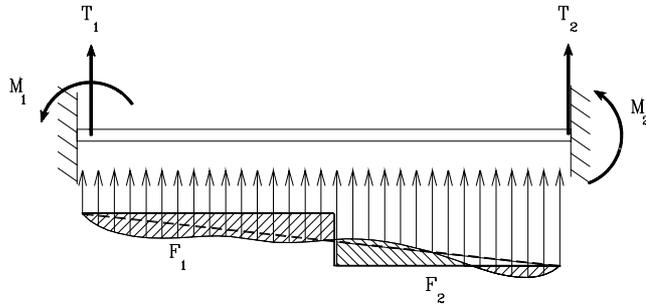


FIGURE 8.11. EXEMPLE DE DISTRIBUTION DE PRESSIONS À TRÈS BASSES FRÉQUENCES

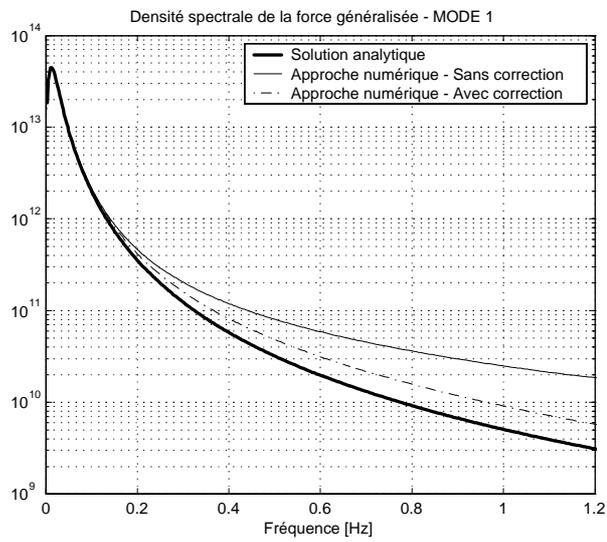


FIGURE 8.12. AMÉLIORATIONS LIÉS À L'UTILISATION DU FACTEUR DE CORRECTION

nodales ont été modifiés par les coefficients adéquats (selon le type d'effort). Quant aux éléments hors diagonale, ils ont été obtenus en conservant la même matrice de cohérence<sup>29</sup>. La figure 8.13 représente, pour la force généralisée dans le premier mode de flexion, le rapport entre la densité spectrale analytique et les densités spectrales calculées par la méthode éléments finis. Cette représentation est plus intéressante car elle permet de s'affranchir de la forme du spectre de vitesse de vent choisi.

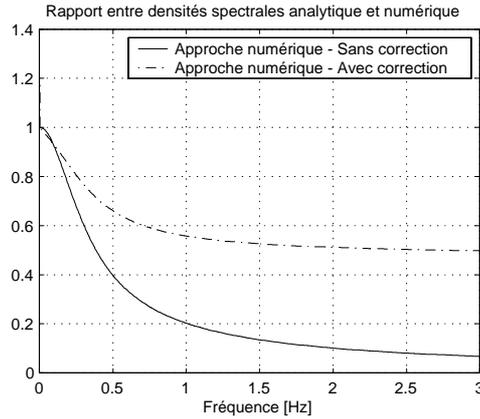


FIGURE 8.13. AMÉLIORATIONS LIÉS À L'UTILISATION DU FACTEUR DE CORRECTION

Vu le nombre d'éléments utilisés pour représenter la poutre sur deux appuis, on imagine aisément que les forces modales sont principalement conditionnées par les efforts tranchants. Ceci peut être mis en évidence en n'appliquant qu'un seul et même coefficient de correction (celui relatif à l'effort tranchant) à l'entièreté de la matrice de densité spectrale. On obtient alors une courbe superposée à la courbe en traits discontinus du graphique 8.13. Dans la suite, nous ne présenterons donc plus que les facteurs de correction des efforts tranchants et non plus des moments.

*Seconde approche : cohérence au niveau des forces nodales*

La première approche permet de prendre en compte la cohérence des pressions de vent sur un même élément mais pas sur des éléments voisins. Or, la force nodale résulte des efforts tranchants dans deux éléments adjacents. Pour obtenir de meilleurs résultats, il convient donc de prendre en compte plus précisément cet autre manifestation de la cohérence.

La force nodale est la somme des contributions des efforts provenant de chacun des éléments adjacents :

$$F(t) = T_1(t) + T_2(t) = \int_0^L L_T(x)p(x,t)dx + \int_0^L L_T(y)p(y,t)dy \quad (8.34)$$

<sup>29</sup> Matrice des fonctions de cohérences pour un processus aléatoire vectoriel

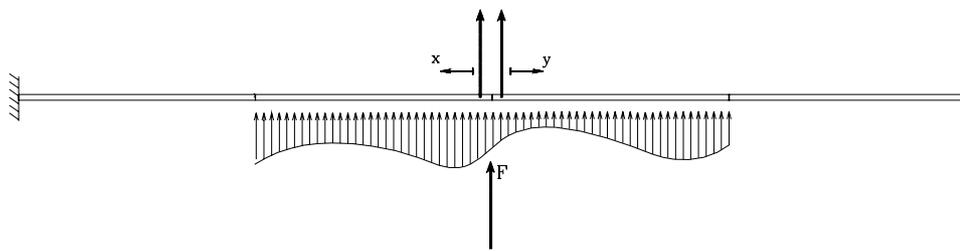


FIGURE 8.14. ILLUSTRATION DU SECOND NIVEAU DE CORRECTION

La densité spectrale de la force nodale est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
S_F(n) &= \int_0^L \int_0^L L_T(x_1)L_T(x_2)S_P(x_1, x_2, n)dx_1dx_2 \\
&+ \int_0^L \int_0^L L_T(y_1)L_T(y_2)S_P(y_1, y_2, n)dy_1dy_2 \\
&+ \int_0^L \int_0^L L_T(x)L_T(y)S_P(x, y, n)dxdy \\
&+ \int_0^L \int_0^L L_T(y)L_T(x)S_P(y, x, n)dxdy
\end{aligned} \tag{8.35}$$

En supposant, pour simplifier la formulation, que les deux éléments adjacents aient la même longueur,

$$\begin{aligned}
S_F(n) &= 2S_P(n)l^2\kappa_T \left( \frac{Cnl}{2U} \right) + 2S_P(n)l^2 \int_0^L \int_0^L L_T(x)L_T(y)e^{-\frac{Cn(x+y)}{2U}} dxdy \\
&= S_P(n)l^2 \left[ 2\kappa_T \left( \frac{Cnl}{2U} \right) + 2 \int_0^L \int_0^L L_T(x)L_T(y)e^{-\frac{Cn(x+y)}{2U}} dxdy \right] \\
&= S_P(n)l^2\lambda_T^0 \left( \frac{Cnl}{2U} \right)
\end{aligned} \tag{8.36}$$

Le résultat analytique de la double intégration est également assez lourd. Il est présenté à l'annexe A.

D'autre part, voici la façon dont la densité spectrale des forces nodales est évaluée dans la méthode originelle. Lorsque les forces nodales sont estimées sous l'hypothèse d'une répartition bi-rectangulaire des pressions, elles s'expriment par :

$$F = -\frac{l}{32} (3F_{L_1} + 26F_{L_2} + 3F_{L_3}) \tag{8.37}$$

Sous cette hypothèse, la densité spectrale de l'effort s'obtient donc par :

$$\begin{aligned}
S_F(n) &= \left(\frac{l}{32}\right)^2 [9S_{P_1}(n) + 676S_{P_2}(n) + 9S_{P_3}(n) + \\
&\quad 156 \operatorname{Re}(S_{P_1P_2}(n)) + 156 \operatorname{Re}(S_{P_2P_3}(n)) + 18 \operatorname{Re}(S_{P_1P_3}(n))] \\
&= S_P(n)l^2 \left(\frac{694 + 312e^{-\frac{Cnl}{2U}} + 18e^{-\frac{Cn(2l)}{2U}}}{1024}\right) = S_P(n)l^2 \hat{\lambda}_T^0 \left(\frac{Cnl}{2U}\right) \quad (8.38)
\end{aligned}$$

Les deux nouvelles fonctions adimensionnelles  $\lambda_T^0$  et  $\hat{\lambda}_T^0$  sont représentées à la figure 8.15. Puisqu'elles assurent une meilleure correction de la cohérence des pressions de vent, ces fonctions devraient donner une admittance numérique meilleure que celle obtenue à l'aide de fonctions  $\kappa_M$  et  $\hat{\kappa}_M$  introduites ci-avant.

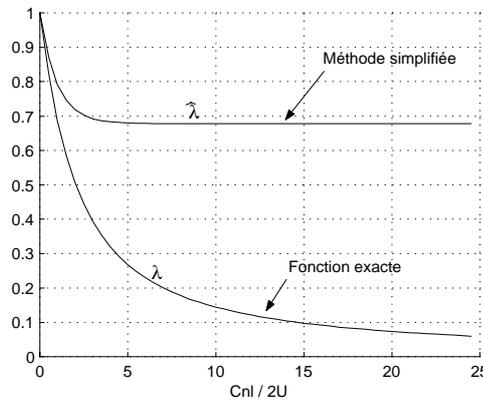


FIGURE 8.15. FACTEUR DE CORRECTION DES EFFORTS TRANCHANTS : CORRECTION DE EFFORTS NODAUX

Nous sommes donc amenés à définir un nouveau facteur de correction :

$$\chi_T^0(n) = \frac{\lambda_T^0 \left(\frac{Cnl}{2U}\right)}{\hat{\lambda}_T^0 \left(\frac{Cnl}{2U}\right)} \quad (8.39)$$

Un tel facteur existe également pour les moments mais, conformément aux conclusions du paragraphe précédent concernant leur contribution aux forces modales, ces facteurs peuvent ne pas être estimés, ou plus simplement pris égaux au nouveau facteur de correction sur les forces nodales. Ainsi, tous les éléments diagonaux de la matrice de densité spectrale peuvent être modifiés par le même coefficient. Quant aux éléments hors diagonale, afin que la cohérence reste inaltérée, il convient de les multiplier également par ce même facteur de correction. En définitive, cette constatation permet de simplifier énormément le problème puisque qu'il suffit de multiplier l'entière de la matrice de densité spectrale par un seul et même coefficient.

La figure 8.12 peut donc être complétée en ajoutant une nouvelle courbe obtenue avec

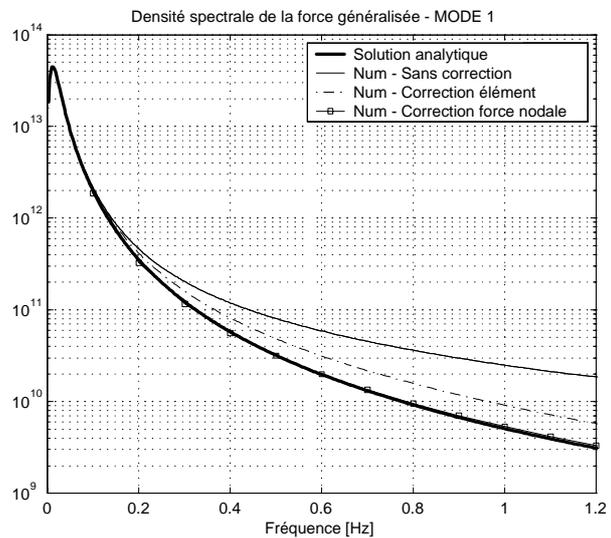


FIGURE 8.16. AMÉLIORATION LIÉE À L'UTILISATION DE LA SECONDE CORRECTION

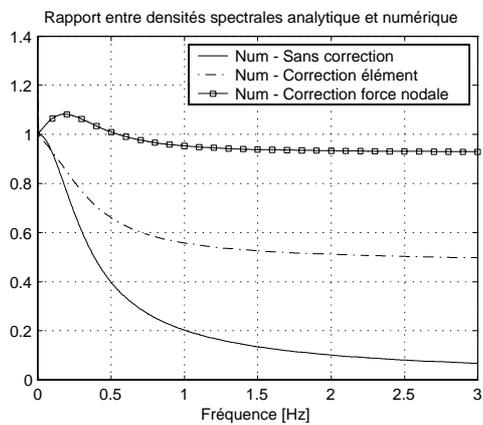


FIGURE 8.17. AMÉLIORATION LIÉE À L'UTILISATION DE LA SECONDE CORRECTION : REPRÉSENTATION ADIMENSIONNELLE

ce nouveau facteur de correction. Cette autre modification permet de corriger encore mieux le contenu aux hautes fréquences. En effet, cela se confirme à la figure 8.16 où l'on constate que la correction sur la force nodale (seconde approche), plutôt que sur la résultante sur l'élément (première approche), permet de s'approcher davantage de la solution analytique.

Une représentation plus intéressante des résultats obtenus à l'aide de cette nouvelle forme de l'admittance numérique consiste à tracer le rapport entre la force généralisée calculée numériquement (avec la correction) et la force généralisée analytique. La figure 8.17 confirme les conclusions qui viennent d'être tirées quant aux meilleures performances de ce nouveau facteur de correction.

*Troisième approche : cohérence entre forces nodales*

L'examen de cette figure montre que la solution analytique n'est cependant pas encore atteinte car la matrice de densité spectrale des forces nodales est corrigée de façon uniforme alors qu'en réalité les éléments non diagonaux devraient être corrigés par des coefficients différents. En effet, la cohérence estimée par la méthode du paragraphe précédent n'est pas tout à fait correcte non plus. Une ultime modification nécessite donc l'estimation des forces nodales en des points différents de la structure :

$$F_1(t) = T_1(t) + T_2(t) = \int_0^L L_T(x_1)p(x_1, t)dx_1 + \int_0^L L_T(y_1)p(y_1, t)dy_1 \quad (8.40)$$

$$F_2(t) = T_3(t) + T_4(t) = \int_0^L L_T(x_2)p(x_2, t)dx_2 + \int_0^L L_T(y_2)p(y_2, t)dy_2 \quad (8.41)$$

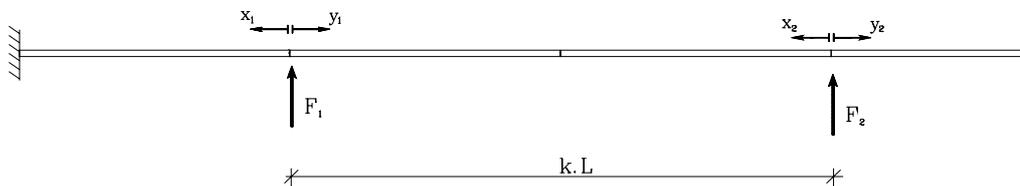


FIGURE 8.18. ILLUSTRATION DU TROISIÈME NIVEAU DE CORRECTION

Admettons que ces forces soient distantes d'un nombre  $k$  d'éléments. La densité spectrale croisée entre ces forces nodales s'obtient à l'aide de la relation :

$$\begin{aligned}
S_{F_1 F_2}(n) &= \int_0^L \int_0^L L_T(x_1) L_T(x_2) S_P(x_1, x_2, n) dx_1 dx_2 \\
&+ \int_0^L \int_0^L L_T(x_1) L_T(y_2) S_P(x_1, y_2, n) dx_1 dy_2 \\
&+ \int_0^L \int_0^L L_T(x_2) L_T(y_1) S_P(x_2, y_1, n) dy_1 dx_2 \\
&+ \int_0^L \int_0^L L_T(y_1) L_T(y_2) S_P(x_2, y_1, n) dy_1 dy_2 \quad (8.42)
\end{aligned}$$

Soit,

$$\begin{aligned}
S_{F_1 F_2}(n) &= S_P(n) \int_0^L \int_0^L L_T(x_1) L_T(x_2) e^{-\frac{Cn(kl+x_1-x_2)}{2U}} dx_1 dx_2 \\
&+ S_P(n) \int_0^L \int_0^L L_T(x_1) L_T(y_2) e^{-\frac{Cn(kl+x_1+y_2)}{2U}} dx_1 dy_2 \\
&+ S_P(n) \int_0^L \int_0^L L_T(x_2) L_T(y_1) e^{-\frac{Cn(kl-x_2-y_1)}{2U}} dy_1 dx_2 \\
&+ S_P(n) \int_0^L \int_0^L L_T(y_1) L_T(y_2) e^{-\frac{Cn(kl-y_1+y_2)}{2U}} dy_1 dy_2 \quad (8.43)
\end{aligned}$$

Les résultats de chaque intégrale peuvent à nouveau se mettre sous la forme d'une somme de polynômes de degré 8 multipliés par des exponentielles décroissantes. En sommant les résultats de ces quatre intégrales, on obtient :

$$\begin{aligned}
S_{F_1 F_2}(n) = & S_P(n) l^2 e^{-(k-2) \frac{Cnl}{2U}} \left[ \sum_{i=1}^8 M_{0_i}^{k>1} \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} + e^{-\frac{Cnl}{2U}} \sum_{i=1}^8 M_{1_i}^{k>1} \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} \right. \\
& + e^{-\frac{Cn(2l)}{2U}} \sum_{i=1}^8 M_{2_i}^{k>1} \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} + e^{-\frac{Cn(3l)}{2U}} \sum_{i=1}^8 M_{3_i}^{k>1} \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} \\
& \left. + e^{-\frac{Cn(4l)}{2U}} \sum_{i=1}^8 M_{4_i}^{k>1} \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} \right] \quad (8.44)
\end{aligned}$$

Les coefficients intervenant dans ces expressions sont à nouveaux donnés à l'annexe A. Sous un forme plus sympathique, nous pouvons simplement noter :

$$S_{F_1 F_2}(n) = S_P(n) l^2 \lambda_T^{k>1} \left( \frac{Cnl}{2U} \right) \quad (8.45)$$

Si  $k = 1$ , le terme relatif à l'intégration entre les deux forces prend une forme légèrement différente :

$$\begin{aligned}
S_{F_1 F_2}(n) = & S_P(n) \int_0^L \int_0^L L_T(x_1) L_T(x_2) e^{-\frac{Cn(kl+x_1-x_2)}{2U}} dx_1 dx_2 \\
& + S_P(n) \int_0^L \int_0^L L_T(x_1) L_T(y_2) e^{-\frac{Cn(kl+x_1+y_2)}{2U}} dx_1 dy_2 \\
& + S_P(n) \int_0^L \int_0^L L_T(x_2) L_T(y_1) e^{-\frac{Cn(kl-x_2-y_1)}{2U}} dy_1 dx_2 \\
& + S_P(n) \int_0^L \int_0^L L_T(y_1) L_T(y_2) e^{-\frac{Cn(kl-y_1+y_2)}{2U}} dy_1 dy_2 \quad (8.46)
\end{aligned}$$

qui se traduit également au niveau des développements subséquents :

$$\begin{aligned}
S_{F_1 F_2}(n) = & S_P(n) l^2 e^{-(k-2) \frac{Cnl}{2U}} \left[ \sum M_{0_i}^1 \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} + e^{-\frac{Cnl}{2U}} \sum M_{1_i}^1 \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} \right. \\
& \left. + e^{-\frac{Cn(2l)}{2U}} \sum M_{2_i}^1 \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} + e^{-\frac{Cn(3l)}{2U}} \sum M_{3_i}^1 \left( \frac{Cnl}{2U} \right)^{-i} \right] \\
= & S_P(n) l^2 \lambda_T^1 \left( \frac{Cnl}{2U} \right) \quad (8.47)
\end{aligned}$$

Pour la compacité des notations, il est plus intéressant de regrouper sous une seule notation ces deux cas ( $k > 1$  et  $k = 1$ ) ainsi que celui du paragraphe précédent ( $k = 0$ ) :

$$S_{F_1 F_2}(n) = S_P(n) l^2 \lambda^k \left( \frac{Cnl}{2U} \right) \quad (8.48)$$

$$\text{où } \lambda^k \left( \frac{Cnl}{2U} \right) = \begin{cases} \lambda_T^0 \left( \frac{Cnl}{2U} \right) & \text{si } k = 0 \\ \lambda_T^1 \left( \frac{Cnl}{2U} \right) & \text{si } k = 1 \\ \lambda_T^{k>1} \left( \frac{Cnl}{2U} \right) & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

Dans la méthode simplifiée, les forces nodales intérieures sont estimées par :

$$F_1 = -\frac{l}{32} (3F_{L_1} + 26F_{L_2} + 3F_{L_3}) \quad (8.49)$$

$$F_2 = -\frac{l}{32} (3F_{L_4} + 26F_{L_5} + 3F_{L_6}) \quad (8.50)$$

La densité spectrale croisée entre ces efforts s'obtient donc par :

$$S_F(n) = \left( \frac{l}{32} \right)^2 (9S_{P_1 P_4}(n) + 78S_{P_1 P_5}(n) + 9S_{P_1 P_6}(n) + 78S_{P_2 P_4}(n) + 676S_{P_2 P_5}(n) + 78S_{P_2 P_6}(n) + 9S_{P_3 P_4}(n) + 78S_{P_3 P_5}(n) + 9S_{P_3 P_6}(n)) \quad (8.51)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{S_P(n) l^2}{1024} \left( 694 + 156 \left( e^{-(k-1)\frac{Cnl}{2U}} + e^{-(k+1)\frac{Cnl}{2U}} \right) \right. \\ &\quad \left. 9 \left( e^{-(k-2)\frac{Cnl}{2U}} + e^{-(k+2)\frac{Cnl}{2U}} \right) \right) \\ &= S_P(n) l^2 \widehat{\lambda}^{k>1} \left( \frac{Cnl}{2U} \right) \end{aligned} \quad (8.52)$$

Cette relation nécessite à nouveau une petite retouche si les forces concernées sont les extrémités d'un même élément ( $k = 1$ ). Dans ce cas,

$$S_F(n) = S_P(n) l^2 \left( \frac{703e^{-\frac{Cnl}{2U}} + 156 \left( 1 + e^{-\frac{Cn(2l)}{2U}} \right) + 9e^{-\frac{Cn(3l)}{2U}}}{1024} \right) = S_P(n) l^2 \widehat{\lambda}^1 \left( \frac{Cnl}{2U} \right) \quad (8.53)$$

Pour ces fonctions approchées, on peut également regrouper les différents cas sous une seule notation :

$$S_{F_1 F_2}(n) = S_P(n) l^2 \hat{\lambda}^k \left( \frac{Cnl}{2U} \right) \quad (8.54)$$

$$\text{où } \hat{\lambda}^k \left( \frac{Cnl}{2U} \right) = \begin{cases} \hat{\lambda}^0 \left( \frac{Cnl}{2U} \right) & \text{si } k = 0 \\ \hat{\lambda}^1 \left( \frac{Cnl}{2U} \right) & \text{si } k = 1 \\ \hat{\lambda}^{k>1} \left( \frac{Cnl}{2U} \right) & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

La figure 8.19 représente les fonctions adimensionnelles ( $\lambda^k$  et  $\hat{\lambda}^k$ ) qui permettent d'estimer les cohérences entre forces nodales, aussi bien pour la méthode simplifiée que pour la nouvelle méthode présentée. Les rapports entre ces paires de courbes sont les admittances numériques qu'il convient d'utiliser pour une correction optimale des termes d'effort tranchant. Les admittances d'ordre 0 doivent être utilisées pour les termes diagonaux de la matrice de densité spectrale; les termes d'ordre 1 ( $k = 1$ ) doivent être utilisés pour les éléments correspondant à une distance d'un élément entre les degrés de liberté concernés; les termes d'ordre 2 ( $k = 2$ ) doivent être utilisés pour les éléments correspondant à une distance deux éléments entre les degrés de liberté concernés, etc. On peut démontrer que les formes des fonctions adimensionnelles  $\lambda^{k>1}$  et  $\hat{\lambda}^{k>1}$  sont telles que les admittances calculées pour  $k \geq 2$  sont toutes identiques. La correction des termes diagonaux correspondant à une distance d'au moins deux éléments sera donc effectuée à l'aide d'un seul et même facteur.

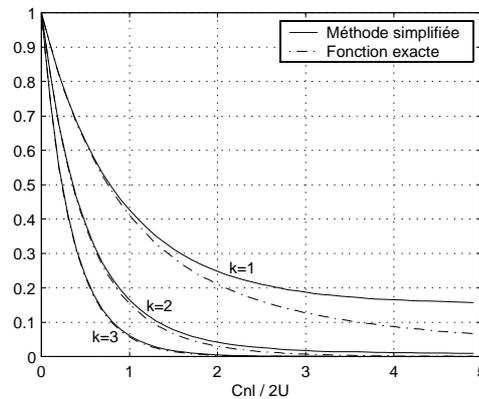


FIGURE 8.19. FACTEUR DE CORRECTION DES EFFORTS TRANCHANTS : CORRECTION DU CHAMP DE FORCES NODALES

Maintenant que les coefficients correcteurs sont calculés, il ne reste plus qu'à les appliquer à la matrice de densité spectrale de force plutôt que de la multiplier purement et simplement par un seul coefficient.

La figure 8.20 représente, pour les différents niveaux de correction présentés, les rapports entre les densités spectrales numérique et analytique (force dans le premier mode de flexion verticale). On peut y constater que le résultat numérique ainsi obtenu con-

corde presque avec le résultat analytique. La petite différence résiduelle provient d'une part des contributions des moments et des termes croisés entre moments et forces aux nœuds. D'autre part, l'écart peut également être attribué au passage en base modale et donc à la représentation de fonctions sinusoïdales par une cubique par morceaux.

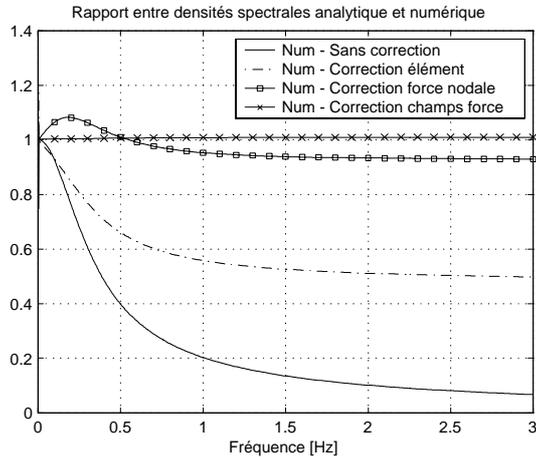


FIGURE 8.20. AMÉLIORATIONS LIÉES À L'UTILISATION DU FACTEUR DE CORRECTION

#### 8.4.4 Résultats de l'application numérique

Ce paragraphe présente quelques résultats numériques de l'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel. La structure étudiée est la même que précédemment; il ne reste plus qu'à préciser que les caractéristiques de l'intégration numérique des densités spectrales. Elles consistent en une intégration par la méthode des trapèzes à l'aide de 1200 pas de fréquence de  $0.0025 Hz$ <sup>30</sup>.

Le tableau 8.4 présente les variances des neuf premiers modes calculées par différentes méthodes. Le premier résultat (*Int. Num.*) est obtenu par intégration numérique de la densité spectrale analytique développée au paragraphe 7.3. Les trois colonnes suivantes se rapportent aux résultats de l'approximation en bruit blanc. Elles indiquent, conformément à ce qui a été présenté au chapitre précédent, que cette méthode fournit des résultats sécuritaires pour les premiers modes propres mais que cette sécurité disparaît au fur et à mesure que l'on passe aux modes suivants. Par exemple, pour les cinq premiers modes propres de vibration dans le plan vertical, on peut relever des écarts de 5.9%, 3.9%, -0.8%, -6.6%, -9.1%.

<sup>30</sup> Nous ne disposons jusqu'à présent d'aucun moyen pour estimer le plus petit nombre de pas de fréquence ni le plus grand pas de fréquence qui pourraient donner des résultats satisfaisants pour les résultats des intégrations. Nous avons donc décidé de valider les paramètres choisis en comparant les résultats qu'ils donnent avec ceux d'une intégration numérique à l'aide de 6000 pas de  $0.001 Hz$  (jusqu'au nombre de chiffres significatifs choisis, pas de modification des résultats)

Approche analytique					Approche numérique				
Int. Num.	Avec App. en B.B.				Sans correction		Avec correction		
	$\sigma_{q_i}$	$\sigma_{q_i}^{qs}$	$\sigma_{q_i}^{dy}$	$\sigma_{q_i}$	Ecart	$\sigma_{q_i}$	Ecart	$\sigma_{q_i}$	Ecart
1	2.29	2.09	1.47	2.56	5.9%	2.33	1.7%	2.30	0.4%
2	$8.74 \cdot 10^{-2}$	$6.94 \cdot 10^{-2}$	$5.86 \cdot 10^{-2}$	$9.08 \cdot 10^{-2}$	3.9%	$1.07 \cdot 10^{-1}$	22.4%	$8.70 \cdot 10^{-2}$	-0.4%
3	$5.67 \cdot 10^{-3}$	$5.01 \cdot 10^{-3}$	$3.69 \cdot 10^{-3}$	$6.22 \cdot 10^{-3}$	9.7%	$7.34 \cdot 10^{-3}$	29.4%	$5.68 \cdot 10^{-3}$	0.2%
4	$1.29 \cdot 10^{-2}$	$1.03 \cdot 10^{-2}$	$7.50 \cdot 10^{-3}$	$1.28 \cdot 10^{-2}$	-0.8%	$1.87 \cdot 10^{-2}$	45.0%	$1.26 \cdot 10^{-2}$	-2.3%
5	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$1.86 \cdot 10^{-3}$	$4.36 \cdot 10^{-4}$	$1.91 \cdot 10^{-3}$	16.5%	$3.59 \cdot 10^{-3}$	119%	$1.63 \cdot 10^{-3}$	-0.6%
6	$2.88 \cdot 10^{-3}$	$2.26 \cdot 10^{-3}$	$1.46 \cdot 10^{-3}$	$2.69 \cdot 10^{-3}$	-6.6%	$4.60 \cdot 10^{-3}$	59.7%	$2.72 \cdot 10^{-3}$	-5.5%
7	$1.60 \cdot 10^{-4}$	$1.66 \cdot 10^{-4}$	$4.84 \cdot 10^{-5}$	$1.73 \cdot 10^{-4}$	8.1%	$2.20 \cdot 10^{-4}$	37.5%	$1.58 \cdot 10^{-4}$	-1.25%
8	$9.87 \cdot 10^{-3}$	$8.16 \cdot 10^{-4}$	$3.72 \cdot 10^{-4}$	$8.97 \cdot 10^{-4}$	-9.1%	$1.49 \cdot 10^{-3}$	51.0%	$9.06 \cdot 10^{-4}$	-8.2%
9	$2.32 \cdot 10^{-4}$	$2.47 \cdot 10^{-4}$	$5.26 \cdot 10^{-5}$	$2.52 \cdot 10^{-4}$	8.6%	$5.15 \cdot 10^{-4}$	122%	$2.15 \cdot 10^{-4}$	-7.3%

Tableau 8.4. : Ecart-types modaux évalués selon différentes méthodes

La partie droite du tableau indique les résultats obtenus sur la structure discrétisée (à l'aide de 7 éléments finis de 50m). Le premier résultat présenté est celui de l'analyse numérique sans aucune correction, c'est-à-dire telle qu'elle a été présentée au paragraphe 8.2. Nous venons de discuter longuement le surcroît de cohérence que cette méthode engendrait. On peut effectivement constater que les modes aux hautes fréquences ne sont pas très bien estimés (jusqu'à plus de 100% d'écart !).

D'un point de vue théorique, les coefficients correcteurs imaginés (admittances numériques) permettent d'améliorer la prise en compte de la cohérence des pressions de vent sur l'ouvrage. Nous n'avons repris ici que les résultats obtenus à l'aide du troisième niveau de correction, celui qui donne les meilleurs résultats. A titre d'illustration, la figure 8.21 représente les densités spectrales des amplitudes modales obtenues avec ou sans cette correction. Le résultat analytique apparaît également et est superposé aux courbes en trait plein.

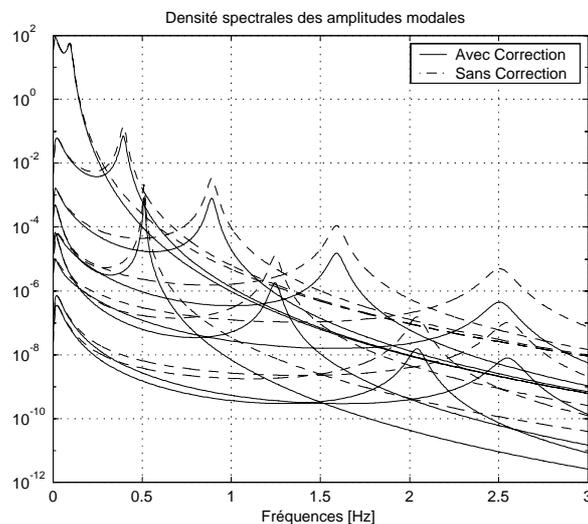


FIGURE 8.21. APPLICATION NUMÉRIQUE : DENSITÉS SPECTRALES DES AMPLITUDES MODALES

Cet exemple montre clairement que l'utilisation des admittances numériques permet d'améliorer considérablement la représentation du phénomène. Il est assez étonnant de constater que ces corrections permettent également d'améliorer la représentation des deux modes de torsion (5 et 9). En effet, les efforts nodaux qui y correspondent sont obtenus à l'aide de lignes d'influence linéaires et non pas cubiques. D'autres facteurs de correction devraient donc en principe être utilisés. L'exemple montre cependant que les admittances numériques obtenues pour les efforts tranchants semblent être assez bien adaptées. Ceci semble être de bon augure pour une implémentation simple et rapide de ce coefficient. Il suffirait en effet de se contenter de corriger les densités spectrales de forces modales indépendamment du type de force. La correction complète de la matrice de densité spectrale se ferait donc à l'aide de trois coefficients uniquement : un pour la diagonale, un pour les termes correspondants à une distance d'un élément entre les noeuds considérés et finale-

ment un troisième coefficient pour le reste de la matrice.

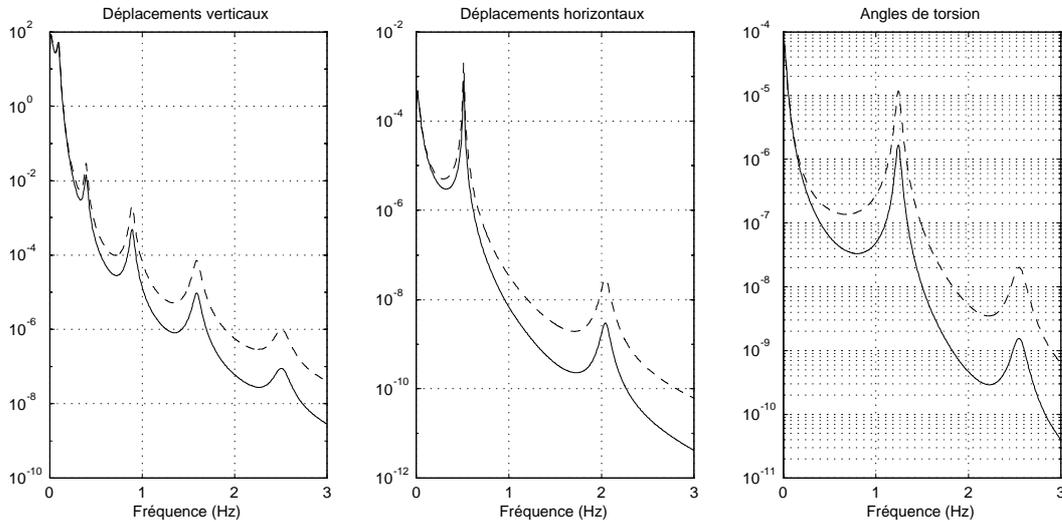


FIGURE 8.22. DENSITÉS SPECTRALES DES DÉPLACEMENTS DU NOEUD  $n^{\circ}4$

Les densités spectrales du déplacement au noeud  $n^{\circ}4$  sont tracées à la figure 8.22. Les traits continus et discontinus représentent respectivement les résultats d'analyses numériques (de la structure discrétisée) avec ou sans l'application des admittances numériques. Ces courbes indiquent que la structure étudiée (du moins le déplacement à mi-travée, car il n'en serait pas ainsi d'un point plus proche d'une extrémité) répond essentiellement dans un seul mode par type de vibration. Les résultats en termes d'écart-type sont repris au tableau 8.5. Pour chaque direction de vibration, les écarts que l'on peut y relever sont donc proches de ceux que l'on obtient pour le premier mode.

## 8.5 Résumé

Les paragraphes précédents viennent de montrer l'importance de la discrétisation de la structure. Deux possibilités s'offrent à l'ingénieur : soit discrétiser sa structure assez finement afin de ne pas devoir se poser de questions sur la bonne représentation des phénomènes aux "hautes" fréquences; soit travailler avec un modèle plus lâche, mais corriger les résultats qu'il obtient de manière à s'affranchir de la qualité moindre du maillage. Les paragraphes précédents permettent de répondre à ces deux questions dans la mesure où le graphique 8.19 permet non seulement d'estimer un  $\frac{C_{nl}}{2U}$  limite (à partir duquel l'approche de base ne donne plus de bons résultats), mais aussi d'exprimer les coefficients correcteurs à utiliser en cas de maillage trop lâche.

Les coefficients de correction ont été établis en supposant que les coefficients de cohérence dans chacune des deux directions principales étaient identiques. Une formula-

	Approche analytique			Approche numérique			
	Intégration numérique	Avec App. en B.B		Sans correction		Avec correction	
	$\sigma$	$\sigma$	Ecart	$\sigma$	Ecart	$\sigma$	Ecart
V	2.23	2.49	11.7%	2.27	1.8%	2.24	0.4%
H	$5.53 \cdot 10^{-3}$	$6.06 \cdot 10^{-3}$	9.6%	$7.15 \cdot 10^{-3}$	29.3%	$5.54 \cdot 10^{-3}$	0.2%
T	$1.61 \cdot 10^{-3}$	$1.87 \cdot 10^{-3}$	16.1%	$1.88 \cdot 10^{-3}$	16.8%	$1.59 \cdot 10^{-3}$	-1.2%

Tableau 8.5. : Ecart-types nodaux évalués selon différentes méthodes

tion plus complète et inévitablement plus lourde devrait être entreprise afin de permettre l'utilisation de coefficients différents. De plus, les formules établies ne s'appliquent qu'aux structures filaires; des développements similaires (mais également plus ardu) permettraient d'analyser une structure où les noeuds ne seraient éventuellement pas tous alignés.



# PARTIE III

## Analyse dans le domaine temporel

L'équation du mouvement déterministe n'est en réalité qu'un cas particulier d'étude stochastique pour laquelle les variances sont nulles. La relation inverse entre ces deux théories, celle permettant de passer du déterministe au probabiliste, est la méthode de Monte Carlo. Dans le cas de l'analyse d'une structure au vent turbulent, il convient tout d'abord de générer un ensemble d'histoires de vent (vitesse du vent en différents points de l'espace) conformes à la densité spectrale de puissance utilisée pour le calcul stochastique. Cette opération de génération permet de déterminer une vitesse du vent en chaque point de l'espace et à chaque instant. L'équation du mouvement retrouve donc son caractère déterministe. Il suffit alors de résoudre l'équation du mouvement déterministe autant de fois que d'histoires générées et ensuite, à partir de chacune des réponses obtenues, de calculer les grandeurs statistiques qui seraient fournies par une analyse stochastique. La méthode de Monte Carlo est une méthode en définitive assez peu élégante, probablement parce qu'elle est basée sur la génération d'échantillons. Elle permet cependant de traiter tous les types de non linéarités qui pourraient se présenter.

L'analyse stochastique qui a été mise en oeuvre au chapitre 8 est limitée par l'hypothèse de superposition (et donc de linéarité). Dès que l'une ou l'autre non linéarité apparaît dans le comportement de la structure, la méthode d'analyse doit être modifiée de manière assez importante. Trois méthodes sont alors généralement proposées :

- méthode de Fokker-Planck basée sur la résolution d'une équation de diffusion;
- la méthode de perturbation;
- la linéarisation stochastique;

Tout comme l'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel, ces méthodes permettent de déterminer la structure statistique de la réponse sans avoir recours à une génération. Ces trois méthodes donnent des résultats assez précis lorsque les développements sont réalisés analytiquement mais elles semblent assez ardues à mettre en oeuvre numériquement pour des systèmes à plus d'un degré de liberté (pour les deux premières méthodes) ou

toucher un domaine d'application fort réduit (pour la troisième).

La méthode retenue pour l'analyse dynamique non linéaire des structures soumises au chargement éolien est donc basée sur une méthode de Monte Carlo, couplée avec des analyses dynamiques pas-à-pas. Un premier chapitre (9) présente différentes méthodes de génération d'échantillons de processus aléatoires. Lorsque ces efforts sont déterminés, l'analyse dynamique non linéaire peut alors prendre place. Afin de commencer avec un problème plus simple, le chapitre 10 présente l'analyse stochastique d'un oscillateur à un degré de liberté. Les concepts de base retirés de cette étude vont ensuite permettre d'analyser une structure plus importante (chapitre 11).

---

# Chapitre 9

---

## Génération d'échantillons de processus aléatoires

La simulation d'histoires à partir de densités spectrales de puissance trouve donc son intérêt dans les problèmes linéaires (vérification) comme non linéaires (seule méthode apparemment efficace, méthode de Monte Carlo).

Après un bref rappel sur le calcul numérique des densités spectrales, ce chapitre développe deux méthodes de simulations d'histoires à partir de densités spectrales de puissance : les séries de Fourier et les filtres autorégressifs. Il présente également quelques particularités du programme Gwind permettant la simulation d'une histoire de vent en un point de l'espace (processus unidimensionnel). Dans un second temps, une méthode de génération multidimensionnelle sera présentée ; elle explique la procédure à suivre (ainsi que son application dans le programme Gwind3D) pour générer un champ de vitesse dans l'espace ; ce champ doit satisfaire des densités spectrales de puissance unidimensionnelles spécifiées en chacun des points ainsi que des fonctions de cohérence entre ces points.

### 9.1 Le calcul numérique des densités spectrales de puissance

#### 9.1.1 Nécessité de la décomposition de l'échantillon en blocs

Nous avons vu que dans le cas d'un processus stationnaire et sous l'hypothèse d'ergodicité, la densité spectrale de puissance du processus pouvait se calculer à partir d'une de ses réalisations (Equ. (9.1)) :

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |X(\omega, T)|^2 \quad (9.1)$$

où  $X(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt$  représente la transformée de Fourier tronquée de

l'échantillon  $x(t)$ .

Les densités spectrales croisées entre deux processus peuvent, sous les mêmes hypothèses se calculer à partir d'un échantillon de chaque processus :

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \left| X(\omega, T) \overline{Y(\omega, T)} \right| \quad (9.2)$$

où  $Y(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} y(t) e^{-j\omega t} dt$  représente la transformée de Fourier tronquée de l'échantillon  $y(t)$ .

D'un point de vue numérique, les densités de puissance ne sont néanmoins pas tout à fait calculées de la sorte. Afin de limiter l'importance des deux hypothèses formulées (stationnarité et ergodicité), on recourt habituellement à la méthode du spectrogramme moyen (méthode de Welch).

Cette méthode consiste à subdiviser en plusieurs blocs l'échantillon du processus dont on désire obtenir la densité spectrale. Pour chacun de ces blocs, une formule du type (9.1) est utilisée afin d'obtenir un spectrogramme, c'est-à-dire la densité spectrale d'un bloc. La moyenne de ces spectrogrammes donne la densité spectrale de puissance du processus. Pour les densités spectrales croisées, la méthode est identique mais la relation (9.2) est utilisée plutôt que la relation (9.1).

Trois remarques importantes sont à formuler concernant cette méthode :

- même si la norme au carré de la transformée de Fourier de l'échantillon complet correspond exactement à la densité spectrale cible (voir ci-après, méthode des série de Fourier), la densité spectrale calculée à l'aide de cette méthode ne correspondra pas exactement à la densité spectrale cible désirée. Ceci provient de la décomposition du signal en blocs pour le calcul de sa densité spectrale ;
- si la méthode du spectrogramme moyen n'était pas utilisée, on n'obtiendrait que des signaux parfaitement cohérents. En effet,

$$\begin{aligned} \gamma(\omega) &= \frac{S_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}} \simeq \frac{|X(\omega, T) \overline{Y(\omega, T)}|}{\sqrt{|X(\omega, T)|^2 |Y(\omega, T)|^2}} \\ &= \frac{|X(\omega, T)| |Y(\omega, T)|}{\sqrt{|X(\omega, T)|^2 |Y(\omega, T)|^2}} = 1 \end{aligned} \quad (9.3)$$

alors que si la méthode de Welch est utilisée, on obtient :

$$\gamma(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}} \simeq \frac{\sum |X_i(\omega, \tilde{T}) \overline{Y_i(\omega, \tilde{T})}|}{\sqrt{\sum |X_i(\omega, \tilde{T})|^2 \sum |Y_i(\omega, \tilde{T})|^2}} \neq 1 \quad (9.4)$$

où  $\tilde{T}$  représente la durée des chacun des morceaux d'échantillons et où la sommation porte sur le nombre de blocs.

- Une autre conséquence importante de l'utilisation de cette méthode consiste à calculer la densité spectrale avec un pas de fréquence moins fin que celui de la transformée de Fourier de l'échantillon non subdivisé mais tout en conservant la même fréquence de Nyquist (plus grande fréquence représentée). En effet, admettons que l'on désire calculer la densité spectrale d'un échantillon comprenant  $N$  valeurs espacées avec un intervalle de temps  $\Delta t$ . La transformée de Fourier du signal complet est caractérisée par un intervalle de fréquence  $\Delta n$  et une fréquence de Nyquist donnés par :

$$\Delta n = \frac{1}{N\Delta t} \quad n_{Ny} = \frac{N\Delta n}{2} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (9.5)$$

Supposons maintenant que le calcul soit réalisé sur  $M$  blocs. La durée de chacun d'eux est donc donnée par :

$$\tilde{T} = \frac{T}{M} = \frac{N\Delta t}{M} \quad (9.6)$$

Etant donné que chaque échantillon est représenté par  $N/M$  valeurs, l'intervalle de fréquence et la fréquence de Nyquist seront respectivement :

$$\widetilde{\Delta n} = \frac{1}{\tilde{T}} = \frac{M}{N\Delta t} = M\Delta n \quad \widetilde{n}_{Ny} = \frac{\frac{N}{M}\widetilde{\Delta n}}{2} = \frac{1}{2\Delta t} = n_{Ny} \quad (9.7)$$

### 9.1.2 Mise à l'échelle physique des densités spectrales numériques

La propriété fondamentale de la densité spectrale d'un processus aléatoire est que son intégration sur les fréquences correspond à la variance du processus (Equ. (3.18)) :

$$\int_0^{+\infty} S_x(n)dn = \sigma_x^2 \quad (9.8)$$

Elle permet de relier les domaines fréquentiel et temporel par le biais d'une conservation d'énergie. L'équivalent numérique de cette relation analytique peut être obtenu en recourant par exemple à l'intégration par la méthode des trapèzes :

$$\underbrace{\left[ \frac{1}{2}S_x(0) + \sum_{i=1}^{N/2} S_x(i\Delta n) + \frac{1}{2}S_x\left(\left(\frac{N}{2} + 1\right)\Delta n\right) \right]}_{\text{domaine fréquentiel}} \Delta n = \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}_{\text{domaine temporel}} \quad (9.9)$$

L'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel repose sur la multiplication de la densité spectrale de l'effort par la matrice de transfert de l'oscillateur. Lorsque cette étude est menée numériquement, cette multiplication ne peut avoir lieu que pour un nombre discret de fréquence choisies ( $n_i = i\Delta n$ ). Le membre de gauche de la relation (9.9) peut donc ensuite être utilisé pour déterminer la variance de la réponse.

Plaçons-nous maintenant dans le contexte de la transformée de Fourier discrète; la conservation d'énergie d'un domaine à l'autre s'exprime sous le théorème de Parseval :

$$\sum_{i=0}^{N-1} |X_i|^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (9.10)$$

où  $X_i$  représente, pour la fréquence  $n_i$ , la transformée de Fourier du signal discret  $x_i$ . Lorsque le signal est réel dans le domaine temporel, cette relation se simplifie en :

$$X_0^2 + 2 \sum_{i=1}^{N/2-1} |X_i|^2 + X_{N-1}^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (9.11)$$

Pour faciliter la comparaison avec l'équation (9.9), on peut également écrire :

$$\frac{2}{N\Delta n} \left[ \frac{1}{2} X_0^2 + \sum_{i=1}^{N/2-1} |X_i|^2 + \frac{1}{2} X_{N-1}^2 \right] \Delta f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (9.12)$$

La propriété fondamentale de la densité spectrale est donc vérifiée à condition de la définir, d'un point de vue numérique par :

$$S_i = \frac{2}{N\Delta n} |X_i|^2 \quad (9.13)$$

Dans le contexte d'un logiciel de calcul comme MatLab, par exemple, le signal discrétisé  $x$  dont on veut obtenir la densité spectrale est stocké sous la forme d'un vecteur. La fonction *psd* renvoie un vecteur comprenant la densité spectrale du puissance (éventuellement calculée par blocs) de ce signal. Ce calcul numérique de la densité spectrale ne nécessite pas la connaissance du pas de temps de définition du signal, ni du pas de fréquence pour la sortie de la densité spectrale numérique.

L'équation (9.9) montre que l'énergie dans le domaine temporel ne dépend pas du pas de temps choisi. Par contre, l'énergie dans le domaine fréquentiel dépend de la résolution fréquentielle choisie. Il est donc impossible que la densité spectrale calculée par le logiciel soit telle que la conservation d'énergie soit vérifiée. En réalité, le programme se contente simplement de moyenner des spectrogrammes qui ne sont que les normes au carré des transformées de Fourier.

Ceci peut être assez gênant à partir du moment où des résultats d'analyses dans les domaines temporel et fréquentiel doivent être comparées. Admettons par exemple que l'on désire superposer sur un même graphique une densité spectrale (numérique, dans le sens, calculée point par point) obtenue par une analyse stochastique dans le domaine fréquentiel et la densité spectrale (numérique, obtenue par exemple par application de la fonction *psd*) d'un signal discrétisé. Les deux courbes ne seront comparables qu'à condition de multiplier la seconde par le facteur  $\frac{2}{N\Delta n}$  dépendant de l'analyse en cours.

Afin de pallier cet inconvénient, nous avons décidé de multiplier par  $\frac{N\Delta n}{2}$  toute densité spectrale analytique qui devait être stockée numériquement. Ainsi, dès la génération des échantillons, les signaux obtenus ont des dimensions comparables à leurs expressions analytiques. Il s'agit donc d'une mise à l'échelle physique des densités spectrales.

## 9.2 Génération d'un processus unidimensionnel

### 9.2.1 Séries de Fourier

Admettons que l'on connaisse la densité spectrale de puissance du processus à générer. Dans le cas d'une histoire de vent, cette fonction peut être exprimée par exemple sous la formulation de von Karman :

$$S_u(n) = \frac{4L_u^x \sigma_u^2}{\left[1 + 70.8 \left(\frac{nL_u^x}{U}\right)^2\right]^{5/6}} \quad (9.14)$$

Nous avons vu que, sous l'hypothèse d'ergodicité, la densité spectrale de puissance d'un processus stationnaire pouvait être calculée sur base d'un seul échantillon :

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |X(\omega, T)|^2 \quad (9.15)$$

Pour un signal réel discrétisé à l'aide de  $N$  points dans le domaine temporel, c'est-à-dire à l'aide de  $\frac{N}{2} + 1$  fréquences espacées entre 0 et  $n_{Ny}$  dans le domaine fréquentiel :

$$S(\omega_i) = \frac{2\pi}{T} |X(\omega_i, T)|^2 \quad (9.16)$$

La densité spectrale de puissance représente donc le contenu fréquentiel du processus. Il semble alors logique que la génération soit entreprise dans le domaine fréquentiel. Il suffit en effet de choisir :

$$X(\omega_i, T) = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \sqrt{S_u(\omega_i)} e^{j\varphi_i} \quad (9.17)$$

où les  $\varphi_i$  représentent des déphasages choisis de manière aléatoire entre 0 et  $2\pi$  avec une densité de probabilité uniforme.

En procédant de la sorte, on trouve immédiatement que :

$$S(\omega_i) = \frac{2\pi}{T} |X(\omega, T)|^2 = S_u(\omega_i) \quad (9.18)$$

ce qui exprime simplement que les densités spectrales cible et calculée (sur un seul bloc) coïncident parfaitement pour les fréquences de discrétisation choisies. La densité spectrale

de puissance calculée selon la méthode de Welch ne correspond cependant pas exactement à celle du processus cible (cf remarque de la page 164).

L'échantillon dans le domaine temporel s'obtient simplement en prenant la transformée de Fourier inverse de l'échantillon généré.

Cette première méthode est donc assez précise mais nécessite évidemment un temps de calcul assez important si, comme dans la plupart des cas, l'échantillon requis l'est dans le domaine temporel (passage d'un domaine à l'autre).

### 9.2.2 Processus markoviens

La génération à l'aide de processus de Markov constitue une autre méthode de génération assez intéressante qui, contrairement à la méthode présentée, a l'avantage de travailler directement dans le domaine temporel. De tels processus sont définis de manière générale par la relation de récurrence suivante :

$$y(t) + a_1y(t - \Delta t) + \dots + a_py(t - p\Delta t) = b_0w(t) + b_1w(t - \Delta t) + \dots + b_qw(t - q\Delta t) \quad (9.19)$$

En partant de certaines conditions initiales pour le processus aléatoire  $y$ , cette formule permet de créer un échantillon de ce processus  $y$  à partir d'un échantillon d'un bruit blanc  $w$  d'intensité unitaire (ou, moins souvent, d'un autre processus aléatoire).

Au chapitre 4, nous avons établi la fonction de transfert associée à un oscillateur à un degré de liberté (transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle). Plus exactement, cette fonction de transfert est associée à l'équation différentielle du mouvement. De manière plus générale, une fonction de transfert peut être associée à n'importe quelle équation différentielle représentant un phénomène ; le rôle de cette fonction est de relier, dans le domaine fréquentiel, l'entrée et la sortie du système.

Dans la même idée, une fonction de transfert peut être associée à la forme discrétisée de l'équation du mouvement (par exemple, Newmark, Wilson, différence centrale, ...) ou même, à la forme discrétisée (et donc récursive) d'une quelconque relation différentielle. La fonction de transfert associée à la formule (9.19) s'exprime par :

$$H_{ARMA}(\omega) = \frac{b_0 + b_1e^{-j\omega\Delta t} + \dots + b_qe^{-jq\omega\Delta t}}{1 + a_1e^{-j\omega\Delta t} + \dots + a_pe^{-jp\omega\Delta t}} \quad (9.20)$$

Le processus  $y$  est alors considéré comme l'image du processus  $w$  à travers le filtre caractérisé par la fonction de transfert  $H(\omega)$ . Leurs densités spectrales de puissance sont donc reliées par :

$$S_y(\omega) = H(\omega)S_w(\omega)\overline{H(\omega)}^T = |H(\omega)|^2 \quad (9.21)$$

Dans le contexte de la génération, l'idée consiste donc à trouver les coefficients  $a_1, \dots, a_p$  et  $b_0, \dots, b_q$  tels que  $|H(\omega)|^2$  s'approche le plus possible de la densité spectrale de puissance à représenter. Ensuite, à partir d'un échantillon d'un bruit blanc unitaire, il suffit d'utiliser la relation (9.19) pour obtenir un échantillon du processus aléatoire désiré.

Cette méthode est évidemment beaucoup plus rapide que la méthode de Fourier; elle est d'autant plus efficace que l'ordre de la régression à choisir pour représenter correctement la densité spectrale cible est faible. Dans cette méthode, la consommation de temps se trouve essentiellement au niveau de la détermination de l'ordre du filtre et de ses coefficients représentatifs. Il en résulte donc que la génération d'un échantillon supplémentaire ne demande pas un surcroît de temps énorme. Cette méthode est donc préférentiellement utilisée lorsque beaucoup d'échantillons doivent être générés.

**9.2.2.1 Filtres autorégressifs (AR)** La détermination des coefficients  $a_1, \dots, a_p$  et  $b_0, \dots, b_q$  à choisir ne se présente guère comme une tâche aisée. C'est pour cette raison qu'une simplification est généralement formulée : elle consiste à supposer que  $q = 0$  ; le processus est alors appelé processus autorégressif et est caractérisé par les relations suivantes :

$$y(t) = b_0 w(t) - \sum_{i=1}^p a_i y(t - i\Delta t) \quad (9.22)$$

$$H_{AR}(\omega) = \frac{b_0}{1 + a_1 e^{-j\omega\Delta t} + \dots + a_p e^{-jp\omega\Delta t}} \quad (9.23)$$

Généralement, l'ordre  $p$  du filtre autorégressif est choisi à l'avance si bien qu'il ne reste donc plus que les paramètres  $a_1, \dots, a_p$  et  $b_0$  à déterminer.

Il ne s'agit donc en réalité que d'un problème de minimisation d'un estimateur d'écart entre la densité spectrale désirée et la densité spectrale cible obtenue à l'aide de la fonction de transfert (9.23).

Buchholdt<sup>31</sup> présente une méthode un peu plus élégante que la traditionnelle approche par les moindres carrés. L'élégance manifeste provient de la particularisation de la méthode au problème traité. Il convient cependant de noter que sous les démarches présentées dans son document se cachent des hypothèses non mentionnées. Cette méthode consiste à multiplier la relation (9.22) par  $y(t - k\Delta t)$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ) et à moyenner sur l'intervalle  $[0, T]$ , pour ainsi obtenir l'expression de la fonction d'autocovariance en  $k\Delta t$  :

$$\begin{aligned} R(k\Delta t) &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t)y(t - k\Delta t)dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ b_0 w(t) - \sum_{i=1}^p a_i y(t - i\Delta t) \right] y(t - k\Delta t)dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T b_0 w(t)y(t - k\Delta t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^p a_i y(t - i\Delta t)y(t - k\Delta t)dt \end{aligned} \quad (9.24)$$

Selon Buchholdt, en vertu de l'hypothèse de stationnarité, le premier de ces deux derniers

<sup>31</sup> Dynamics of the structures, pp.292-305

termes s'annule, alors que le second donne :

$$R(k\Delta t) = - \sum_{i=1}^p a_i \frac{1}{T} \int_0^T y(t - i\Delta t)y(t - k\Delta t)dt = - \sum_{i=1}^p a_i R(|k - i| \Delta t) \quad (9.25)$$

Lorsque  $k = 0$ , la relation (9.24) donne :

$$\begin{aligned} R(0) &= \sigma_y^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [y(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T b_0 w(t)y(t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^p a_i y(t - i\Delta t)y(t)dt \end{aligned} \quad (9.26)$$

$$\sigma_y^2 = b_0 \sigma_w^2 - \sum_{i=1}^p a_i R(i\Delta t) \quad (9.27)$$

A partir de la densité spectrale du processus à générer, les relations de Wiener-Khintchine permettent d'obtenir également sa fonction d'autocorrélation . Les  $p$  relations (9.25) et la relation (9.27) sont donc  $p + 1$  équations dont les inconnues sont les  $p + 1$  paramètres à déterminer ( $a_1, \dots, a_p$  et  $b_0$ ).

Cette méthode fonctionne assez bien mais, telle que présentée par Buchholdt, les paramètres obtenus ne résultent pas d'une optimisation et apparaissent comme « les coefficients à choisir » pour avoir une bonne génération. Puisqu'il s'agit d'une minimisation, la méthode qui vient d'être présentée ne devrait arriver à des paramètres optima qu'à condition de formuler un critère d'optimisation. Ce critère n'intervient pas car, sous l'hypothèse de stationnarité, Buchholdt suppose en réalité que les cross-corrélations entre le bruit blanc d'entrée et le processus à générer ne sont non négligeables qu'au premier ordre ( $k = 0$ ).

Tout en étant conscient de ceci, il convient cependant de préciser que cette méthode n'est probablement pas aussi efficace qu'une approche par les moindres carré mais donne tout de même de bons résultats. Il est également important de noter qu'une approche par les moindres carrés ne sera efficace que si l'on attribue des poids de pondération d'autant plus importants que les ordonnées des points choisis sur le spectre cible sont importantes. Le filtre AR utilisé pour la génération représentera ainsi correctement la densité spectrale cible dans les zones où le contenu fréquentiel est le plus important.

**9.2.2.2 Filtres autorégressifs à moyenne mobile (ARMA)** Lorsque la forme de la densité spectrale cible devient assez compliquée, il est parfois nécessaire de recourir à des filtres autorégressifs d'ordre élevé. Dans ce cas, il s'avère souvent plus intéressant de passer aux filtres autorégressifs à moyenne mobile dont la formulation a été présentée ci-dessus :

$$y(t) + a_1 y(t - \Delta t) + \dots + a_p y(t - p\Delta t) = b_0 w(t) + b_1 w(t - \Delta t) + \dots + b_q w(t - q\Delta t) \quad (9.28)$$

Il est maintenant impératif d'utiliser une méthode de minimisation classique comme la méthode des moindres carrés. Cette méthode ne sera pas appliquée dans la suite.

### 9.2.3 L'adaptation fréquentielle

Que l'on ait eu recours à une génération par séries de Fourier ou par filtrage d'un bruit blanc au travers d'un filtre AR(MA), nous venons de voir que la densité spectrale cible et celle calculée numériquement à partir de l'échantillon généré ne coïncident pas exactement.

Une méthode a été imaginée afin de rendre à l'échantillon généré une densité spectrale encore plus proche de la cible recherchée. Elle consiste tout simplement à calculer le rapport entre ces deux densités spectrales, puis à interpoler ce facteur de correction pour les fréquences de définition de la transformée de Fourier de l'échantillon complet et enfin à appliquer ce facteur de correction à cette dernière transformée de Fourier. En revenant alors dans le domaine temporel, on obtient un processus dont la densité spectrale de puissance calculée par la méthode du spectrogramme moyen sera plus proche de la densité spectrale cible.

Il est important de noter que cette opération est consommatrice de temps. Elle est à rapprocher de la méthode des séries de Fourier pour lesquelles la densité spectrale du processus généré serait calculée sur un seul bloc.

### 9.2.4 Le programme *GWind*

Les notions qui viennent d'être développées ont été appliquées à la génération d'échantillons de vitesse de vent. Le programme *GWind* consiste en la génération d'un bruit blanc gaussien (succession de valeurs tirées au hasard et ayant une distribution de probabilité gaussienne normale) qui est filtré par un filtre autorégressif (AR) dont les paramètres optima sont calculés par la méthode présentée par Buchholdt.

Ce programme permet de générer des vitesses de vent dans une région de l'espace dont le profil moyen de vitesse est donné par une loi logarithmique, de puissance ou de l'Eurocode. L'utilisateur a le choix entre les densités spectrales de puissance de von Karman, Harris ou de l'Eurocode 1. Dans le cas de la génération d'un processus unidimensionnel, les données topographiques se limitent à l'altitude de la station considérée (afin d'obtenir la vitesse du vent au point choisi).

Les données relatives à la génération se résument au nombre de points de l'échantillon à générer et à l'intervalle de fréquence utilisé. Étant donné qu'il n'y a pas de densité spectrale croisée à calculer les densités spectrales de puissance sont systématiquement calculées sur un seul bloc. La génération est réalisée à l'aide d'un filtre AR dont l'ordre de régression est fixé par l'utilisateur. Le bruit blanc qui est utilisé pour rentrer dans ce filtre peut être ou non corrigé par une correction fréquentielle (présentée ci-avant). Une fois filtré, ce bruit prend donc le contenu filtré dont les paramètres ont été optimisés afin de correspondre au mieux à la densité spectrale cible. Le processus filtré peut à nouveau être corrigé afin d'en améliorer le contenu. Dans ce cas, et puisque la densité spectrale numérique est évaluée sur base d'un seul bloc, les densités spectrales cible et recalculée coïncideront parfaitement.

Quelques exemples de résultats obtenus à l'aide de ce logiciel sont disponibles dans d'autres documents. Les conclusions à tirer de la comparaison de ces exemples sont une meilleure précision pour la méthode de Fourier (c'est-à-dire, avec la correction fréquen-

tielle) puisque la génération à l'aide de filtres AR ne permet pas de représenter exactement la densité spectrale cible. D'autre part, cette méthode de génération à l'aide de filtres AR est indubitablement plus rapide, dès lors que les coefficients d'autorégression sont déterminés.

### 9.3 Génération de processus multidimensionnels

Admettons maintenant que l'on veuille générer non plus la vitesse en un seul point de l'espace mais plutôt un champ de vitesse complet incluant les corrélations entre différents points de l'espace.

Les utilités de la génération de processus aléatoires ont été exposées dans l'introduction de ce chapitre et se résument essentiellement à la possibilité d'appliquer des méthodes déterministes. En plus des cohérences temporelles traitées par la fonction d'autocorrélation, il est important, en cas de prise au vent distribuée sur la structure, de prendre également en compte les cohérences spatiales, c'est-à-dire les corrélations entre les vitesses du vent en différents points de l'espace.

Dès que l'on désire générer des histoires de vent en des points différents assez proches les uns des autres, il faut inévitablement recourir à une méthode de génération de processus multidimensionnels comme celle explicitée ci-dessous.

#### 9.3.1 Méthodologie

Grâce aux méthodes de génération unidimensionnelles présentées au paragraphe précédent, nous sommes maintenant en mesure de générer  $N$  histoires en  $N$  points différents de sorte que les densités spectrales de puissance des échantillons ainsi générés correspondent au mieux avec des densités spectrales imposées en chacun des points. La méthode de génération utilisée dans la suite sera celle des séries de Fourier qui fournissent des résultats plus précis.

Il reste donc à analyser maintenant la démarche à suivre pour donner à ces échantillons la cohérence voulue.

Etant donné que ces  $N$  premiers échantillons ont été générés indépendamment les uns des autres, et pour autant que le générateur aléatoire utilisé soit à période suffisamment grande, il ne devrait en principe pas y avoir de cohérence entre eux. C'est une chose que l'on peut d'ailleurs constater en augmentant le nombre de blocs pour le calcul de la densité spectrale de puissance croisée. Admettons-donc, pour simplifier les choses, que cette cohérence soit nulle. En référence avec la base modale dans laquelle les équations du mouvement sont généralement découplées, ces  $N$  premiers échantillons seront appelés « histoires modales » et leur matrice de densité spectrale est donc diagonale. Elle est notée  $[S_M(\omega)]$ .

Imaginons un système à  $N$  degrés de liberté dont les sollicitations sont les  $N$  histoires modales. En toute généralité, les déplacements que l'on calculerait ne sont pas indépendants; ils sont caractérisés par une certaine cohérence. En choisissant ce système de façon

adéquate, il est possible de donner aux déplacements des nœuds de la structure (« histoires nodales ») la cohérence voulue. En effet, nous avons vu au chapitre 4 que les densités spectrales des signaux d'entrée (efforts) et de sortie (déplacements) sont reliés par :

$$[S_N(\omega)] = [H(\omega)] [S_M(\omega)] \overline{[H(\omega)]}^T \quad (9.29)$$

où  $[H(\omega)]$  désigne la matrice de transfert du système à déterminer,  $[S_M(\omega)]$  et  $[S_N(\omega)]$  désignent respectivement les densités spectrales de puissance des histoires modales (générées, sans cohérence) et nodales (à générer, avec la cohérence voulue).

La pierre d'angle de la génération de processus multidimensionnels consiste donc en la détermination de la structure, ou plutôt de la fonction de transfert telle que la matrice de densité spectrale cible  $[S_N(\omega)]$  (des histoires corrélées à générer) puisse s'exprimer par la relation (9.29).

Considérons maintenant la décomposition modale de la matrice de densité spectrale cible :

$$[S_N(\omega)] = [Z(\omega)] [V(\omega)] [Z(\omega)]^T \quad (9.30)$$

où  $[Z(\omega)]$  représente la matrice des vecteurs propres et  $[V(\omega)]$  est une matrice diagonale comprenant les valeurs propres associées aux vecteurs propres de  $[Z(\omega)]$  et ordonnées de la même manière.

La matrice de densité spectrale cible  $[S_N(\omega)]$  est différente pour chaque fréquence. Il en résulte donc que les matrices des modes propres et des valeurs propres sont également des fonctions de la pulsation.

La clé de la méthode réside finalement dans la comparaison des relations (9.29) et (9.30). Elle indique en effet que, dès que la décomposition modale ( $[Z(\omega)]$ ,  $[V(\omega)]$ ) de la matrice de densité spectrale cible est connue, les  $N$  histoires modales indépendantes à générer doivent satisfaire les densités spectrales données par les valeurs propres  $[V(\omega)]$  et ensuite être filtrées par le système non physique dont la matrice de transfert est donnée par les modes propres  $[Z(\omega)]$ . A ceci peut encore venir s'adjoindre l'une ou l'autre correction fréquentielle, des processus modaux et/ou nodaux.

### 9.3.2 Réduction de la taille de l'espace modal utilisé

La méthode ainsi présentée est assez consommatrice de temps dans la mesure où elle nécessite la décomposition en valeurs et modes propres de la matrice de densité spectrale cible et ce, pour un nombre important de fréquences. Afin d'accélérer la génération, il vient naturellement à l'esprit d'utiliser un nombre de modes réduit. Les conséquences liées à la réduction de l'espace modal seront commentées à l'aide de quelques exemples.

### 9.3.3 Exemples

#### 9.3.3.1 Exemple 1 Le premier exemple consiste en la génération de deux échantillons de

processus dont les densités spectrales unidimensionnelles (Fig. 9.1) sont données par :

$$S_1(n) = ne^{-2n} \quad (9.31)$$

$$S_2(n) = ne^{-3n} \quad (9.32)$$

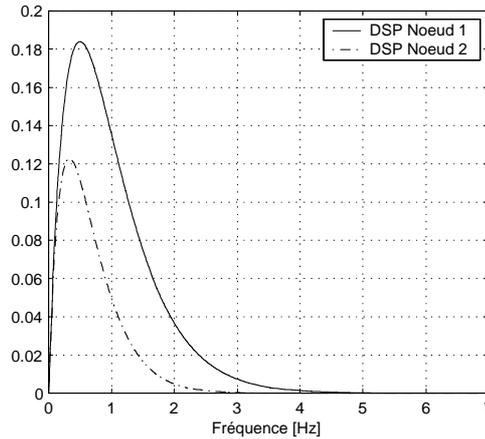


FIGURE 9.1. DENSITÉS SPECTRALES CIBLES DES VITESSES DE VENT À GÉNÉRER

La forme analytique de ces densités spectrales cibles ne correspond pas à une densité spectrale de vent mais leurs formes sont cependant semblables à celle de Davenport. Cet exemple ne se veut de toute façon qu'académique. La fonction de cohérence entre ces deux processus est à décroissance exponentielle comme dans le cas du vent turbulent :

$$\gamma(n) = e^{-\frac{n}{2}} \quad (9.33)$$

Les caractéristiques des histoires à générer sont données au tableau 9.1.

Les figures 9.2 et 9.3 représentent respectivement les évolutions des valeurs propres et des modes propres de la matrice de densité spectrale cible en fonction de la fréquence traitée. Pour des fréquences très petites, la matrice de densité spectrale est singulière :

$$[S_N(\omega \ll)] = \begin{bmatrix} S_1 & \sqrt{S_1 S_2} \\ \sqrt{S_1 S_2} & S_2 \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [V(\omega \ll)] = \begin{bmatrix} S_1 + S_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [Z(\omega \ll)] = \frac{1}{\sqrt{S_1 + S_2}} \begin{bmatrix} \sqrt{S_1} & -\sqrt{S_2} \\ \sqrt{S_2} & \sqrt{S_1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (9.35)$$

Dans le cas plus général d'une génération d'un plus grand nombre d'échantillons, on peut démontrer qu'aux basses fréquences, une seule valeur propre est non nulle et est égale

Nombre d'histoires à générer :	2
Nombre de modes utilisés :	2
Durée des processus à générer :	600s
Nombre de valeurs :	$2^{13} = 8192$
Pas de temps :	0.0732s
Pas de fréquence :	$\frac{1}{600} = 0.00167Hz$
Fréquence de Nyquist :	6.8267Hz
Taille des blocs :	$2^8 = 256$
Nombre de blocs :	32
Pas de fréquence DSP :	$\frac{32}{600} = 0.0533Hz$

Tableau 9.1. : Exemple 1 - Caractéristiques de la génération

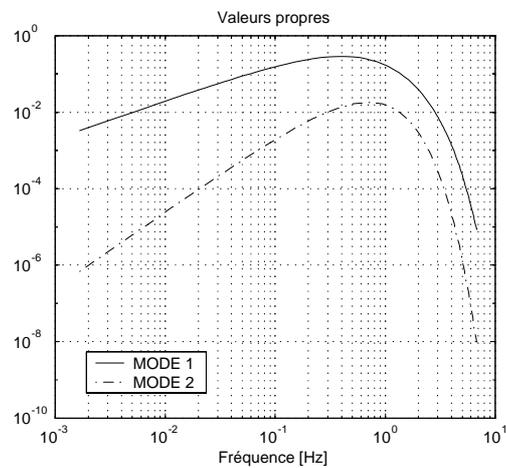


FIGURE 9.2. DENSITÉS SPECTRALES CIBLES

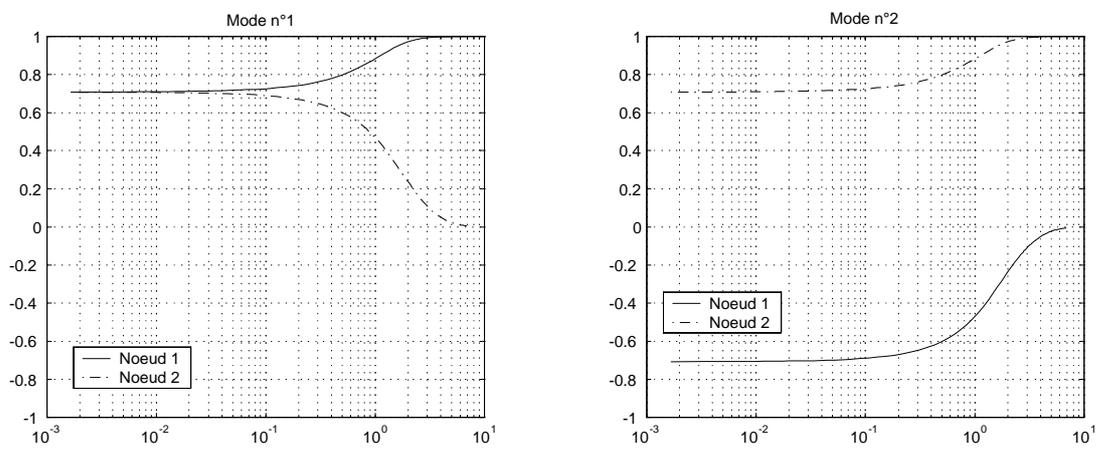


FIGURE 9.3. COEFFICIENTS DE LA COMBINAISON LINÉAIRE (MODAL - NODAL)

à la somme des éléments diagonaux de la matrice de densité spectrale. Toutes les autres valeurs propres sont multiples et nulles. Ceci n'est valable que si les processus sont parfaitement cohérents aux basses fréquences, comme par exemple lorsque la cohérence est à décroissance exponentielle.

Pour les plus hautes fréquences, la matrice de densité spectrale cible devient diagonale:

$$[S_N(\omega \gg)] = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \quad (9.36)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [V(\omega \gg)] = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \\ [Z(\omega \gg)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (9.37)$$

La matrice de densité spectrale des histoires modales coïncide donc, pour ces hautes fréquences avec la matrice de densité spectrale cible. Les modes propres correspondent alors à deux excitations dans chacun des modes séparément. Ces constatations sont également valables lors de génération d'un nombre plus important d'échantillons. Ceci n'est évidemment valable que lorsque la cohérence tend vers zéro aux plus hautes fréquences, ce que la physique des phénomènes étudiés en pratique permet de justifier.

Les valeurs propres représentées à la figure 9.2 sont également les densités spectrales modales cibles. L'observation de ce graphique montre que le premier mode est largement prépondérant, du moins pour les basses fréquences. Ceci justifie la tentation de n'utiliser qu'un nombre réduit de modes pour la génération d'échantillons de processus aléatoires cohérents.

Les graphiques de la figure 9.4 représentent les densités spectrales modales cibles et calculées, ainsi que la fonction de cohérence entre les deux échantillons modaux générés. Les deux échantillons modaux sont générés indépendamment l'un de l'autre à l'aide d'une génération en séries de Fourier. Dans la littérature, les résultats de générations sont souvent présentés dans des axes bi-logarithmiques de façon à camoufler l'écart entre les densités spectrales cible et calculée. Ici, nous avons choisi une représentation en axes cartésien qui, certes, met évidence une certaine discordance entre les deux courbes mais indique tout de même un comportement global acceptable.

Etant donné que les échantillons sont générés indépendamment l'un de l'autre, il ne devrait y avoir aucune cohérence entre eux. On peut effectivement constater qu'ils ne sont que très peu corrélés (moins de 10%, à l'exception de l'un ou l'autre pic). Mis à part la génération d'échantillons plus longs, il semble difficile de générer des échantillons moins cohérents qu'en les générant indépendamment l'un de l'autre.

La figure 9.5 représente les vingt premières seconde de chacun des échantillons générés. Conformément aux caractéristiques requises, on y constate effectivement que l'échantillon associé au noeud  $n^{\circ}1$  a une variance plus importante que l'échantillon associé au noeud

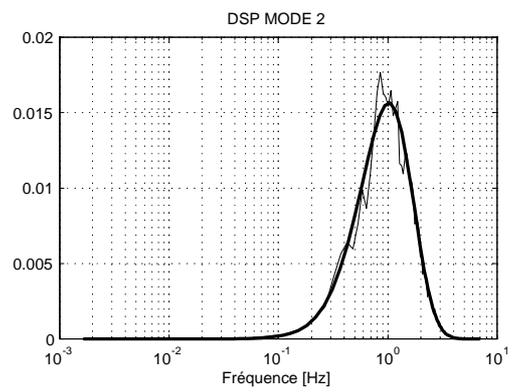
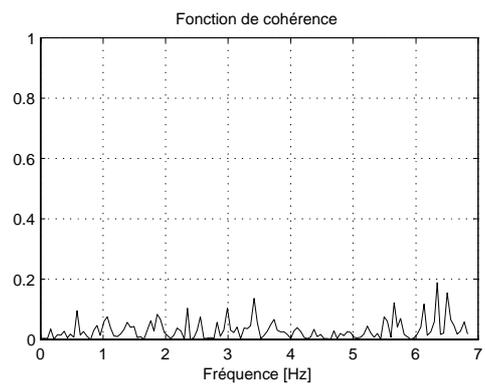
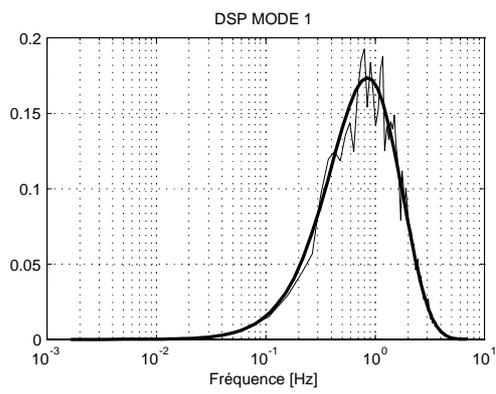


FIGURE 9.4. DENSITÉS SPECTRALES MODALES DES ÉCHANTILLONS MODAUX GÉNÉRÉS, FONCTION DE COHÉRENCE MODALE

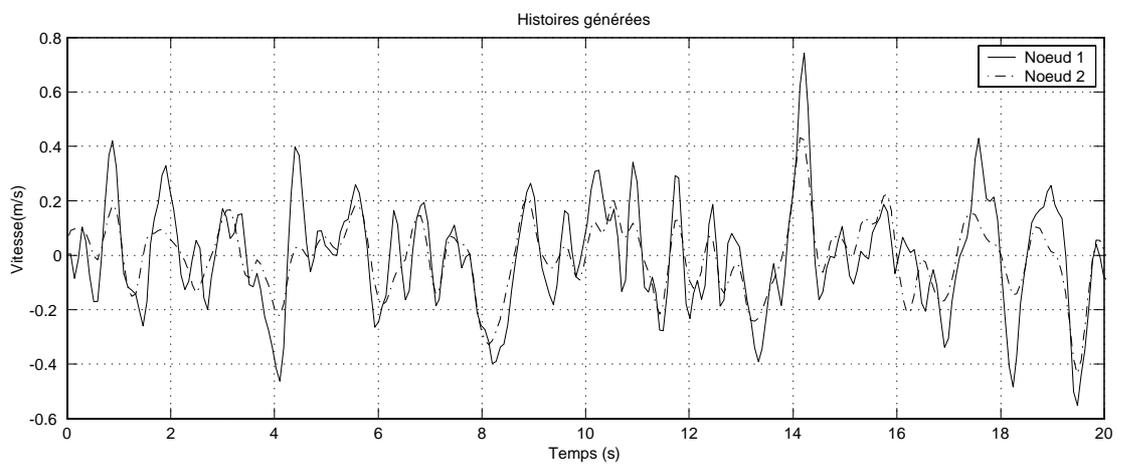


FIGURE 9.5. ECHANTILLONS GÉNÉRÉS (20 PREMIÈRES SECONDES)

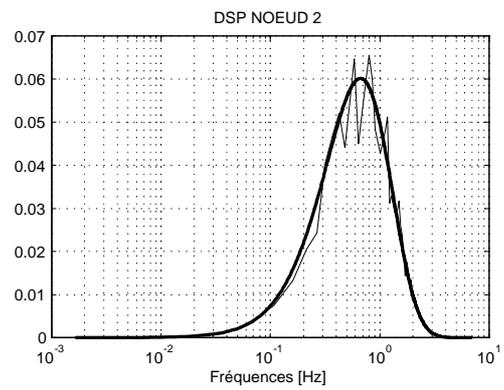
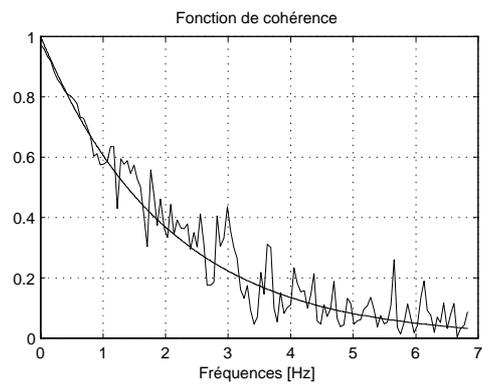
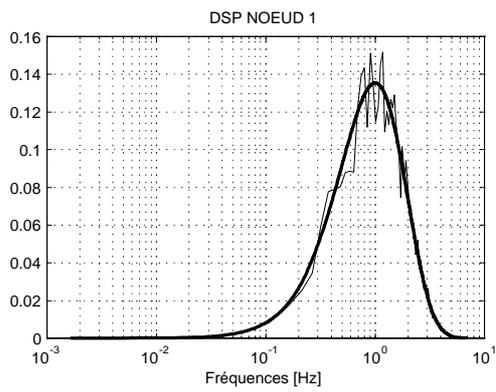


FIGURE 9.6. DENSITÉS SPECTRALES NODALES DES ÉCHANTILLONS GÉNÉRÉS, FONCTION DE COHÉRENCE NODALE

$n^{\circ}2$ . De plus, les deux échantillons semblent être assez cohérents dans les basses fréquences, et beaucoup moins pour les fréquences plus importantes.

Les graphiques de la figure 9.6 confirment les impressions tirées de l'observation des signaux générés. La figure est composée de trois graphiques qui sont les équivalents nodaux des graphiques de la figure 9.4. Le résultat de la formation des processus nodaux (sur base des échantillons modaux générés) est déjà très bonne; les corrections fréquentielles modale et nodale semblent donc être superflues, ou plutôt à considérer comme un must. Grâce à cette recombinaison d'échantillons modaux à l'aide de coefficients variables en fonction de la fréquence (les modes propres calculés), la cohérence obtenue entre les deux échantillons nodaux est très proche de la cohérence demandée.

**9.3.3.2 Exemple 2** Cet exemple a pour but de mettre en évidence l'importance de la réduction de la taille de la base modale. Les données sont identiques à celle de l'exemple 1, exception faite que, cette fois, un seul mode sera utilisé. La décomposition modale présentée au graphique 9.3 montre en effet que, vu l'importance prépondérante du premier mode, l'utilisation d'un seul mode laisse déjà supposer de bons résultats.

La décomposition modale est donc identique à celle de l'exemple 1, mais bien plus rapide puisqu'un seul mode est maintenant calculé. La figure 9.7 compare la seule et unique densité spectrale cible conservée avec la densité spectrale de l'échantillon modal généré. Mis à part l'un ou l'autre petit pic, l'échantillon généré semble être de bonne qualité.

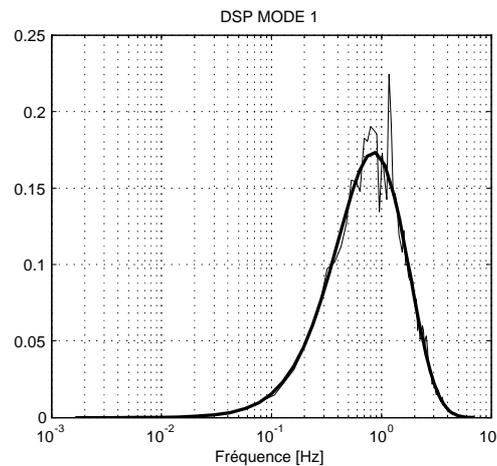


FIGURE 9.7. DENSITÉ SPECTRALE DE PUISSANCE DU MODE CONSERVÉ

La figure 9.8 présente les résultats de la génération. L'utilisation d'un seul mode plutôt que deux fournit un résultat valable au niveau des densités spectrales. La densité spectrale au niveau du second noeud est un peu moins bien évaluée (courbe discontinue) mais une correction fréquentielle permet d'améliorer considérablement sa qualité. Quant au premier noeud, la génération brute donne déjà un très bon résultat si bien que la correction fréquentielle est pratiquement superflue. Par contre, la cohérence entre les deux échantillons ne

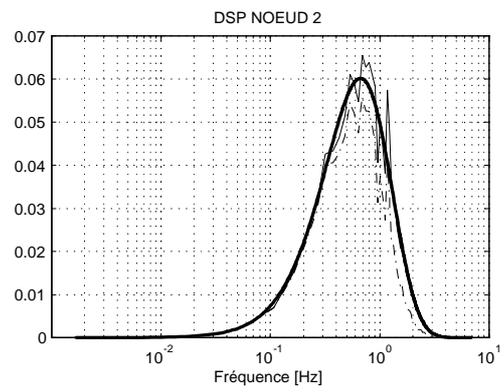
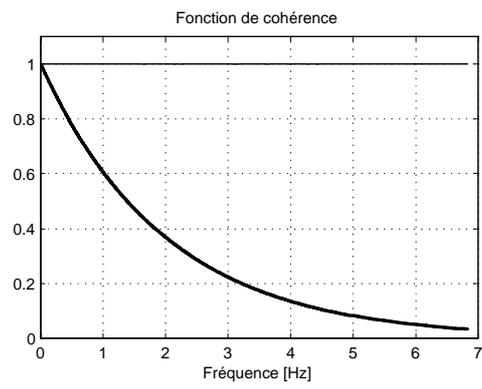
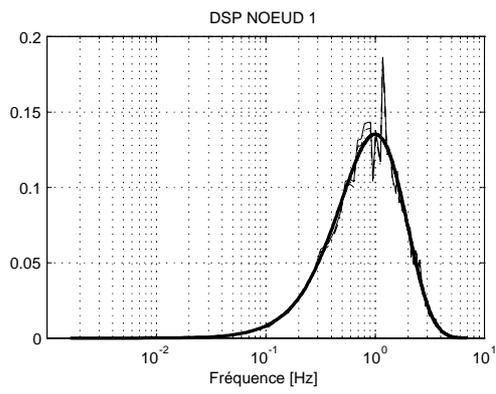


FIGURE 9.8. DENSITÉS SPECTRALES NODALES DES ÉCHANTILLONS GÉNÉRÉS, FONCTION DE COHÉRENCE NODALE

correspond pas du tout à ce qui était désiré : on retrouve évidemment une cohérence unitaire puisque les deux signaux sont proportionnels à un même troisième. La correction fréquentielle des premiers échantillons obtenus permet d'améliorer leur densité spectrale mais ne corrige évidemment pas le contenu de la fonction de cohérence.

Cet exemple démontre clairement les rôles des modes conservés :

- Les modes à hautes valeurs propres permettent de donner aux processus nodaux leur bon contenu fréquentiel ;
- Les modes à basses valeurs propres viennent ajouter de petites modifications autour des échantillons résultant des premiers modes, afin de fournir entre les nœuds, les cohérence désirées.

**9.3.3.3 Exemple 3** Afin de montrer que les conclusions tirées de l'exemple 2, peut-être un peu simpliste, peuvent être appliquées à d'autres cas, voici un autre exemple dans lequel 4 échantillons vont être générés au moyen de 3 modes. On ne laisse donc plus tomber que 25% des modes (1 sur 4) au lieu de 50% (1 sur 2).

Les densités spectrales cibles unidimensionnelles sont identiques à celles de l'exemple 1 :

$$S_3(n) = S_1(n) \quad \text{et} \quad S_4(n) = S_2(n) \quad (9.38)$$

Les fonctions de cohérence entre points sont toujours à décroissance exponentielle :

$$\gamma_{ij}(n) = e^{-C_{ij}n} \quad (9.39)$$

$$\text{où } C = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.5 & 1 \\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0 & 0.25 \\ 1 & 0.5 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.40)$$

Le tableau 9.2 résume les caractéristiques principales de la génération.

Nombre d'histoires à générer :	4
Nombre de modes utilisés :	3
Durée des processus à générer :	600s
Nombre de valeurs :	$2^{13} = 8192$
Pas de temps :	0.0732s
Pas de fréquence :	$\frac{1}{600} = 0.00167Hz$
Fréquence de Nyquist :	6.8267Hz
Taille des blocs :	$2^8 = 256$
Nombre de blocs :	32
Pas de fréquence DSP :	$\frac{32}{600} = 0.0533Hz$

Tableau 9.2. : Exemple 3 - Caractéristiques de la génération

La figure 9.9 représente les trois premières<sup>32</sup> valeurs propres de la matrice de densité spectrale cible. On peut y constater les propriétés énoncées ci-avant, à savoir une matrice de rang unitaire (une seule valeur propre non nulle) pour les basses fréquences et une matrice quasi-diagonale pour les plus hautes fréquences.

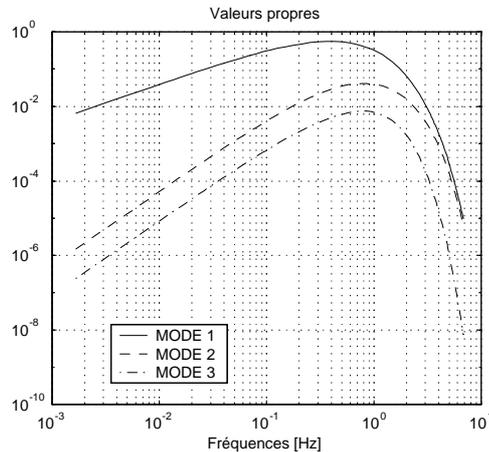


FIGURE 9.9. DENSITÉS SPECTRALES CIBLES DES PROCESSUS MODAUX (INDÉPENDANTS)

La figure 9.10 représente les évolutions, en fonction des fréquences, des trois premiers modes propres. Rien qu'en observant les graphiques des figures 9.9 et 9.10, la tentation est grande de ne pas calculer cette décomposition modale pour les 8192 fréquences de représentation du processus à générer. Nous verrons plus loin quelles solutions peuvent être apportées à ce problème.

Les graphiques de la figure 9.11 reprennent l'évolution des trois plus grandes valeurs propres de la matrice de densité spectrale cible (qui représente également les densités spectrales modales cibles). Ils indiquent également les densités spectrales des échantillons modaux générés. La concordance entre les valeurs cibles et calculées est à nouveau très bonne. On peut également noter que l'ordre de grandeur des cohérences introduites entre ces échantillons modaux reste toujours assez faible.

De retour dans la base nodale, les graphiques de la figure 9.12 permettent de représenter la qualité de la génération. Les conclusions tirées à l'exemple 2 restent toujours valables : les densités spectrales unidimensionnelles sont très bien représentées mais les cohérences entre échantillons ne correspondent pas tout à fait aux cohérences exigées. La discordance est cependant moins importante que pour l'exemple précédent puisque le pourcentage de modes propres laissés de côté est cette fois moins important. Ceci laisse présager des possibilités d'utilisation pour la génération de champs de vitesses plus importants.

<sup>32</sup> Contrairement à l'habitude dans les problèmes de vibrations de structures, les modes propres les plus importants dans ce cas sont les modes associés aux plus hautes valeurs propres.

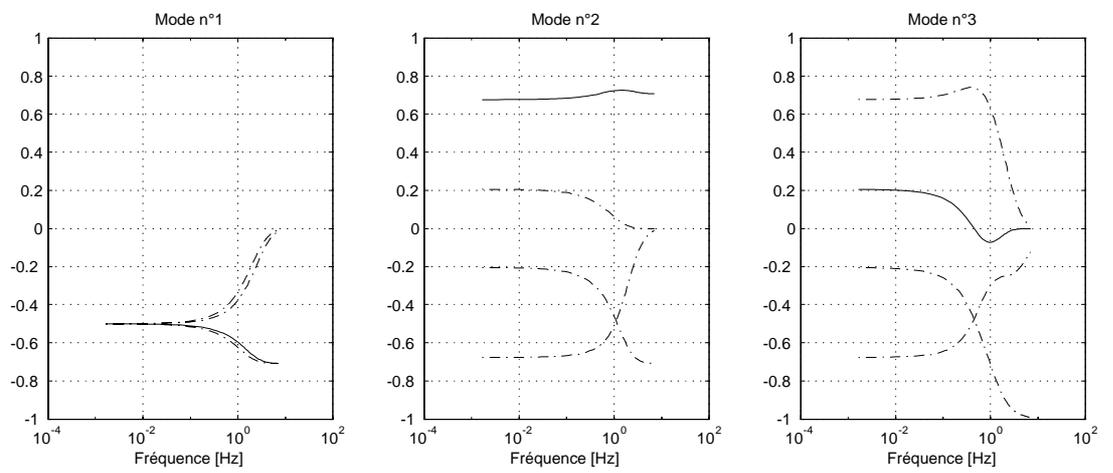


FIGURE 9.10. COEFFICIENTS DE LA COMBINAISON LINÉAIRE (MODAL - NODAL)

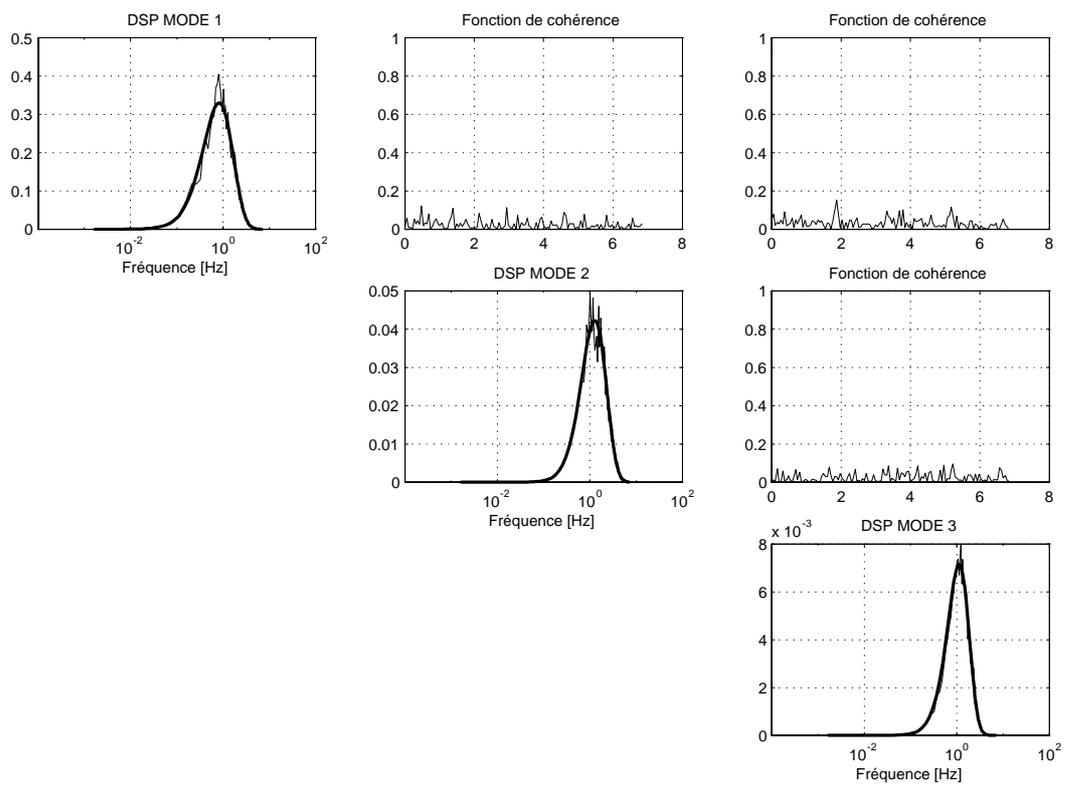


FIGURE 9.11. DENSITÉS SPECTRALES MODALES DES ÉCHANTILLONS MODAUX GÉNÉRÉS, FONCTION DE COHÉRENCE MODALE

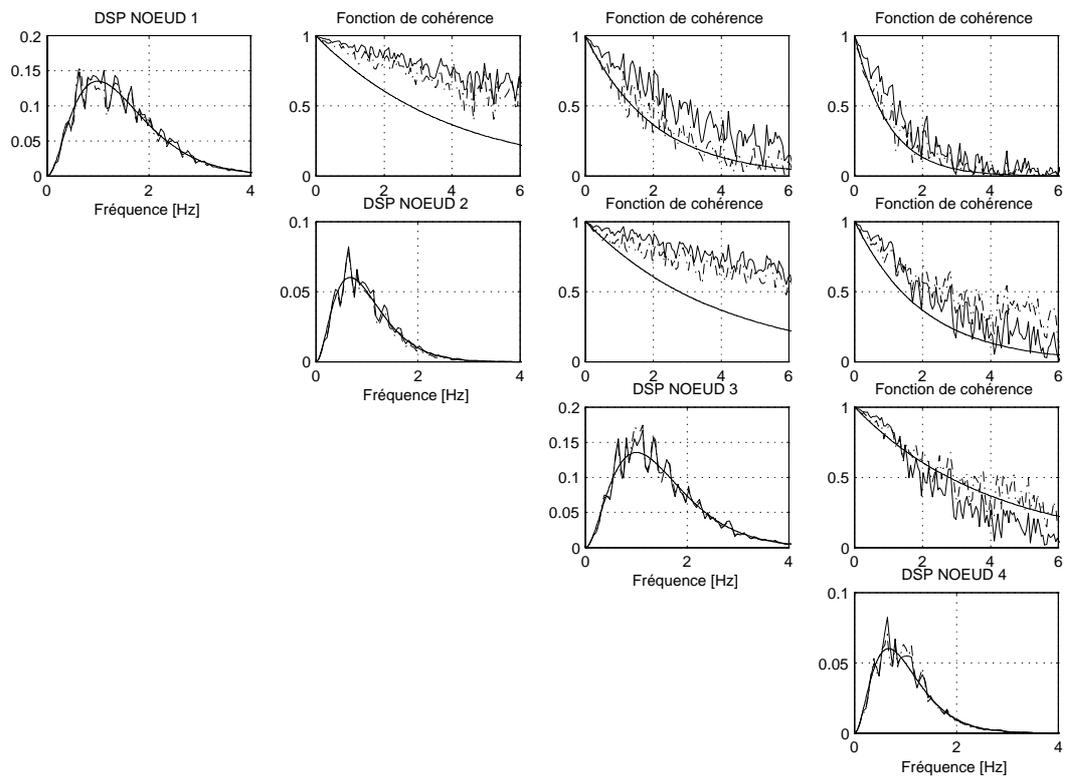


FIGURE 9.12. DENSITÉS SPECTRALES NODALES DES ÉCHANTILLONS GÉNÉRÉS, FONCTION DE COHÉRENCE NODALE

### 9.3.4 Optimisation de l'algorithme développé

La génération d'échantillons corrélés dans le temps et cohérents dans l'espace est une opération qui requiert un nombre important d'opérations. Dans le cadre de petits exemples comme ceux qui viennent d'être présentés, la génération est presque instantanée. Il serait cependant intéressant de modifier légèrement l'algorithme utilisé afin de pouvoir également générer en un laps de temps minimum des champs de vitesses beaucoup plus grands.

Il va de soi que la majorité du temps nécessaire à la génération est consommée par le calcul des modes propres et valeurs propres. En effet, dans sa version originelle, la décomposition modale de la matrice de densité spectrale cible  $[S_N(\omega)]$  a lieu pour toutes les fréquences de définition des échantillons générés. Dans les exemples présentés précédemment, la décomposition modale a donc été effectuée 8192 fois ! On ne peut évidemment pas se permettre ceci lorsque la matrice à étudier est de dimension  $[1000 \times 1000]$  par exemple.

Comme cela a été suggéré ci-avant, une première amélioration de l'algorithme consiste à ne calculer la décomposition modale que pour un nombre limité de fréquences (par exemple une sur dix) et à calculer par interpolation les valeurs et modes propres associés aux valeurs intermédiaires. Ceci permet déjà de réduire fortement le nombre de décompositions modales à réaliser.

Cette modification n'est pas encore suffisante car elle ne tient pas compte de la forme de la matrice de densité spectrale à décomposer. En effet, il serait intéressant de mettre au point un algorithme qui évalue les positions des fréquences de décomposition optimales en fonction du problème étudié. C'est ce qui a été réalisé.

Etant donné que les valeurs et modes propres correspondant aux fréquences non calculées sont obtenus par interpolation linéaire entre des valeurs connues, le nombre de fréquences de calcul doit être minimal lorsque ces grandeurs évoluent linéairement. La solution retenue travaille uniquement sur les évolutions des valeurs propres en fonction des fréquences. Lorsque la décomposition modale est terminée pour la fréquence  $f_3$ , on estime, pour chaque valeur propre, l'erreur que l'on aurait commise si l'on avait estimé cette valeur par extrapolation à partir des deux valeurs précédemment obtenues  $(f_1; V_1)$  et  $(f_2; V_2)$ .

Pour chacun des modes, l'erreur s'exprime par (Fig. 9.13) :

$$\varepsilon_m = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{V_1 + \frac{V_2 - V_1}{f_2 - f_1} (f_3 - f_1) - V_3}{V_3} \quad (9.41)$$

Cette définition est telle que l'erreur obtenue soit d'autant plus petite que la valeur propre est linéaire. A la fin de chaque décomposition modale, un estimateur de linéarité des valeurs propres peut donc être calculé :

$$\varepsilon = \max_m |\varepsilon_m| \quad (9.42)$$

Cette grandeur est alors utilisée pour estimer la fréquence de décomposition suivante. Si l'erreur est petite, le pas de fréquence peut être agrandi; par contre, si cette erreur est faible, cela signifie que l'on se trouve dans une zone où la dérivée seconde d'au moins une

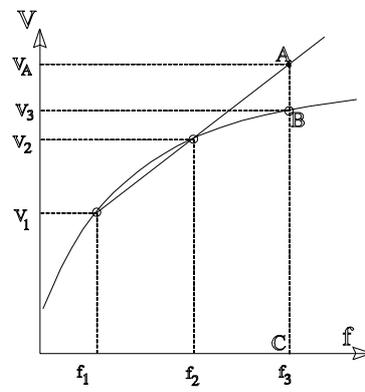


FIGURE 9.13. ILLUSTRATION DE L'ERREUR D'EXTRAPOLATION INTRODUITE POUR RÉGULER LA TAILLE DU PAS DE FRÉQUENCE

valeur propre est importante, et donc que le pas de fréquence devrait idéalement être réduit. Le rapport entre le nouveau pas de fréquence ( $f_4 - f_3$ ) et le pas de fréquence en cours ( $f_3 - f_2$ ) est calculé par :

$$\frac{f_4 - f_3}{f_3 - f_2} = 1.5e^{-10\varepsilon} \quad (9.43)$$

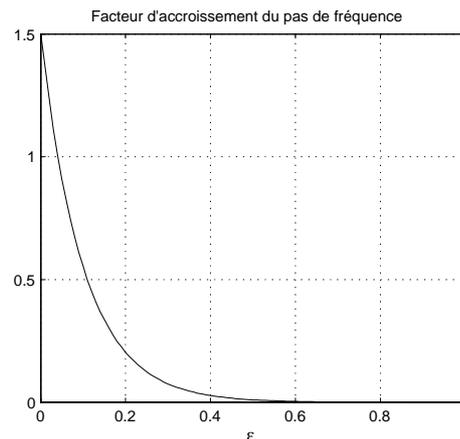


FIGURE 9.14. FACTEUR D'ACCROISSEMENT DU PAS DE FRÉQUENCE

Plusieurs raisons justifient le choix de cette relation :

- il est important que la taille du pas de fréquence diminue rapidement lorsque l'erreur augmente; il nous semble qu'une décroissance exponentielle devrait suffire;
- il est également important que la valeur à l'origine soit bornée, et pas trop importante de sorte que le pas de fréquence n'augmente pas de manière démesurée lorsque les valeurs propres deviennent linéaires;
- pour ne pas que l'algorithme s'emballe trop rapidement, la relation a été imaginée afin que le pas de fréquence n'augmente que si l'erreur est inférieure à 4%

Toutes les générations réalisées jusqu'à ce jour ont montré que l'utilisation de cette relation mène à une excellente représentation de la décomposition modale. La figure 9.15 représente les trois premières valeurs propres de l'exemple 3. Chacune des croix représente une fréquence de calcul de la décomposition modale. Avec l'algorithme qui vient d'être présenté, ces courbes sont représentées par 110 fréquences, ce qui est substantiellement réduit par rapport aux 8192 décompositions modales de la méthode de base, ou même au 820 valeurs qui seraient nécessaires si la décomposition modale était effectuée pour un fréquence sur dix.

La figure 9.16 représente la taille des pas de fréquence pour la décomposition modale de la matrice de densité spectrale cible de l'exemple 3. Le minimum des rapports entre

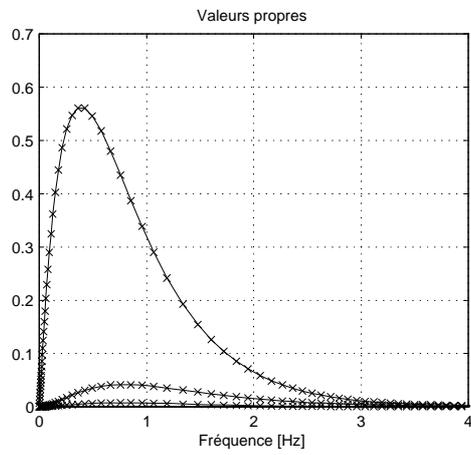


FIGURE 9.15. REPRÉSENTATION DES VALEURS PROPRES OBTENUES À L'AIDE DE L'ALGORITHME AMÉLIORÉ

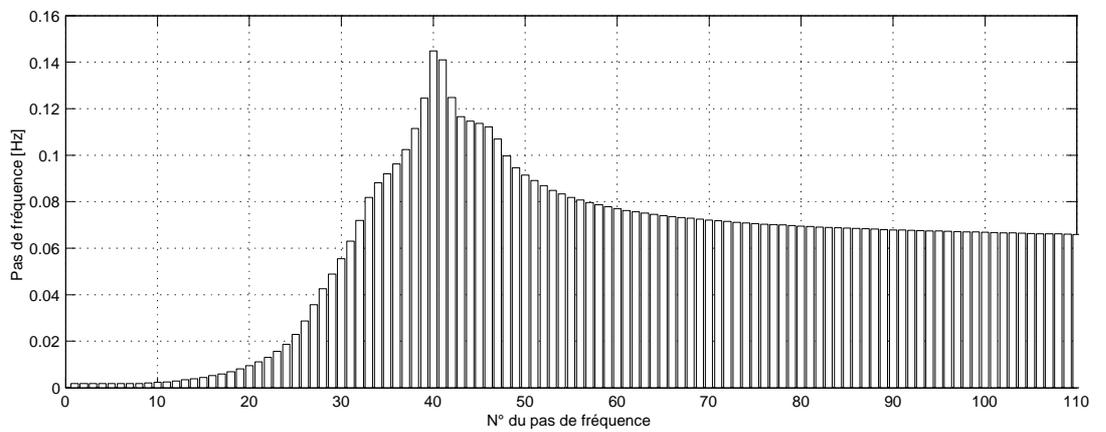


FIGURE 9.16. TAILLE DES PAS DE FRÉQUENCE POUR LA DÉCOMPOSITION MODALE (EXEMPLE 3)

deux valeurs successives vaut 0.87; il apparaît entre les pas de fréquences 41 et 42, c'est-à-dire dans la zone où la concavité (vers le haut) de la première valeur propre est la plus importante, aux environs de  $1.5Hz$ . L'erreur  $\varepsilon$  associée à ce rapport est de 5,5% ce qui peut a priori sembler beaucoup mais il faut garder à l'esprit que ceci n'est pas une erreur commise réellement mais plutôt une erreur qui serait commise si la valeur propre du 42<sup>ième</sup> pas de fréquence était obtenue par extrapolation (et même pas interpolation !) à partir des résultats des deux pas précédents.

## 9.4 Résumé

Ce chapitre a présenté différentes possibilités qui s'offrent à l'ingénieur confronté au problème de la génération d'échantillons sur base de densités spectrales. En commençant par la génération de processus unidimensionnels, nous avons introduit les méthodes de décomposition en séries de Fourier ou de filtrage de bruits blancs par des processus autorégressifs (à moyenne mobile). A celles-ci viennent s'adjoindre la correction fréquentielle qui permet de raffiner le résultat d'une première génération.

Ensuite, nous avons présenté une méthode complète et précise pour la génération de processus multidimensionnels. Cette méthode repose essentiellement sur le passage dans une base modale dans laquelle il est facile de générer des échantillons non corrélés (grâce aux méthodes de génération unidimensionnelle présentées au préalable). Ensuite, une recombinaison adéquate de ces échantillons permet de retrouver la cohérence désirée.

La possibilité de travailler dans une base modale réduite a été étudiée. Pour les petits champs de vitesses, travailler sur un tel sous-espace n'est guère à recommander dans la mesure où les corrélations attendues ne pourront pas être données aux échantillons générés. Une autre méthode d'optimisation a également été présentée : cette méthode conseille de ne calculer la décomposition modale que pour un nombre limité de fréquence de calcul. La détermination de ces fréquences de calcul est itérative et très efficace dans la mesure où elle prend également en compte les caractéristiques propres du problème traité.

---

## Chapitre 10

---

# Analyse stochastique temporelle de l'oscillateur simple

L'analyse stochastique des structures dans le domaine fréquentiel est en somme assez systématique dans la mesure où les deux seuls paramètres à choisir pour l'analyse sont le nombre et la taille des pas de fréquence. Ceci concerne l'analyse stochastique dans sa forme la plus élémentaire. En effet, les fréquences de calcul peuvent ne pas être espacées uniformément : on pourrait par exemple rechercher la disposition optimale des fréquences de calcul qui donne une estimation la plus correcte possible des moments statistiques, et ce, pour un nombre restreint de fréquences de calcul.

Par contre, l'analyse dans le domaine temporel basée sur les simulations de Monte Carlo dépend d'un nombre assez important de paramètres, même dans sa version la plus rudimentaire. Au niveau de la génération, il s'agit par exemple de la fréquence de discrétisation de la densité spectrale cible, de la durée des échantillons à générer ou encore de leur résolution temporelle. L'analyse dynamique pas-à-pas nécessite également de choisir un pas de temps pour la résolution ainsi que le nombre de pas étudiés (qui a priori pourrait être différents de ceux issus de la génération).

Il est important de bien cerner les limitations résultant du choix de ces paramètres. Une démarche trop peu réfléchie pourrait en effet déboucher sur une réponse de qualité médiocre dans l'un des domaines, temporel ou fréquentiel. Par contre, un choix judicieux de chacun des paramètres de la génération et de la résolution permettra d'obtenir les précisions requises, celles que l'analyste exige et se fixe avant la résolution. Il s'agit d'un point extrêmement important sur lequel on ne saurait trop insister.

L'importance d'un choix réfléchi de tous ces paramètres peut être illustrée par le principe d'incertitude : une précision plus importante dans l'un des domaines ne peut être obtenue qu'au prix d'une résolution moindre dans le domaine dual (à condition de conserver une

taille d'échantillon semblable) :

$$\Delta n \cdot \Delta t \leq \frac{1}{N} \quad (10.1)$$

Comme corollaire, cette relation montre que s'imposer une précision trop importante dans les deux domaines simultanément n'est réalisable qu'au moyen d'échantillons de grande taille ( $N \gg$ ), ce qui est peu économique. Il est donc important de pouvoir s'imposer des limites les plus strictes possibles en fonction du problème traité.

Sur base de raisonnements simples menés sur l'oscillateur à un degré de liberté, ce chapitre indique la manière de choisir les paramètres de génération. Des critères seront établis en fonction de la résolution fréquentielle ainsi que de la fréquence maximale à représenter. Ils seront formulés de sorte à représenter correctement les caractéristiques structurelles d'une part et celles de la sollicitation d'autre part. Après avoir analysé ces deux points, ces premiers critères élaborés seront complétés de manière à prendre également en compte les caractéristiques de stabilité et de précision de l'algorithme utilisé pour la résolution pas-à-pas.

Avant de rentrer dans ces détails, deux remarques importantes doivent être formulées. Tout d'abord, étant donné que la méthode de génération est basée sur l'algorithme numérique de la transformée de Fourier, les fréquences utilisées pour la représentation des densités spectrales doivent obligatoirement être espacées uniformément; ceci est assez limitatif en soi car il est généralement plus économique d'augmenter la résolution dans le voisinage des pics de résonance ou dans les zones de basses fréquences dans lesquelles la sollicitation a un contenu plus important (pour le vent turbulent).

D'autre part, il convient également de remarquer dès à présent que les caractéristiques (par exemple, le pas de temps  $\Delta t$  et la durée  $T$ ) associées à la génération ainsi qu'à la résolution doivent être identiques. Ce n'est pas parce que ces deux étapes arrivent successivement dans le raisonnement qu'elles doivent être traitées séparément. En effet, admettons dans un premier temps que les paramètres de génération et de résolution soient choisis indépendamment l'un de l'autre. La répartition fréquentielle de l'énergie du vent est telle que les échantillons les plus intéressants sont de l'ordre de  $T = 500s$  à  $T = 1000s$  avec un pas de temps  $\Delta t = 0.1s$ . Le contenu aux hautes fréquences est moins important si bien qu'une résolution temporelle plus fine ne permette pas de mieux représenter le phénomène. On préfère donc générer des échantillons plus longs, avec un pas de temps plus grand. Par contre, en ce qui concerne l'analyse pas-à-pas, pour les structures étudiées dans le domaine du génie civil, les ordres de grandeur des paramètres choisis sont de l'ordre de  $\Delta t \simeq 0.02s$  et  $T = 20s$ .

On pourrait donc imaginer de ne travailler que sur les 20 premières secondes de l'échantillon de vitesse de vent et ensuite d'interpoler entre les valeurs générées afin d'obtenir une vitesse de vent toutes les  $0.02s$ . Cette façon de procéder revient à augmenter le contenu en hautes fréquences de l'échantillon<sup>33</sup>. La figure 10.1 donne un exemple d'échantillon généré (sur la droite, représenté par les carrés) et d'échantillon enrichi (représenté par les petits ronds).

<sup>33</sup> En vertu du principe d'incertitude, si le pas de temps  $\Delta t$  diminue, la fréquence maximale représentée  $\frac{N\Delta f}{2}$  (d'après de le théorème de Shannon) devient plus importante.

Cette représentation indique déjà clairement que le contenu en hautes fréquences que l'on essaie d'ajouter n'est pas correct puisque l'on affine la représentation du phénomène à l'aide de points alignés : le contenu en hautes fréquences est donc nul ! La figure inférieure trace la densité spectrale de l'échantillon généré ainsi que celle de l'échantillon enrichi; on constate effectivement que le contenu ajouté aux hautes fréquences est à peu près nul, et de toute évidence pas le contenu que cet échantillon devrait avoir dans cet intervalle de fréquences.

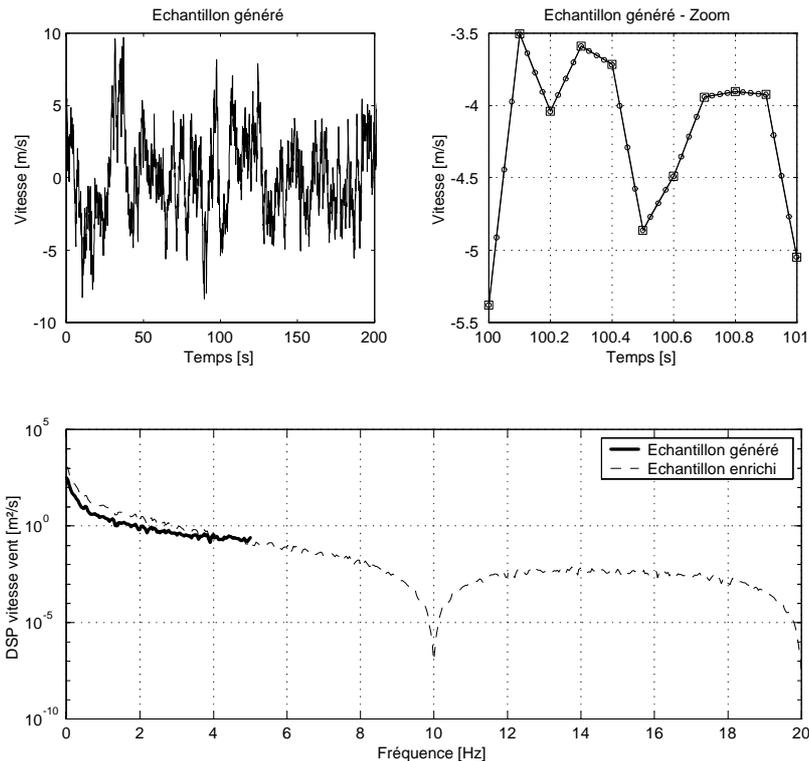


FIGURE 10.1. ENRICHISSEMENT D'UN ÉCHANTILLON PAR INTERPOLATION

C'est pour cette raison que nous recommandons d'utiliser les mêmes paramètres pour la génération et l'analyse; nous ne parlerons donc plus que des paramètres de génération. Dans la suite, nous ne travaillerons qu'avec ce choix personnel qui dans certains cas pourrait être limitatif dans le sens où il impose une taille plus importante pour les échantillons.

## 10.1 Représentation correcte de la fonction de transfert du système

Le choix de paramètres de génération doit permettre la représentation correcte de la structure à étudier. Le raisonnement sera mené sur un oscillateur à un degré de liberté et par

représentation correcte de la structure, nous entendons celle de sa fonction de transfert. Il convient de choisir :

- un pas de fréquence suffisamment petit afin de représenter assez finement le pic de résonance. Ce pas sera d'autant plus petit que le pic est aigu, c'est-à-dire que la structure est peu amortie;
- une fréquence maximale au delà de laquelle le système ne répond plus guère.

### 10.1.1 Résolution fréquentielle optimale

Le plus grand pas de fréquence qui permette de représenter correctement la structure sera évalué en calculant l'erreur commise lors de l'intégration numérique (méthode du trapèze) de la norme au carré de la fonction de transfert d'un système à un degré de liberté :

$$|H(n)|^2 = \frac{1}{k^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{n}{f_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{n}{f_n}\right]^2}$$

où  $k$ ,  $f_n$  et  $\xi$  représentent respectivement la raideur de l'oscillateur, sa fréquence propre et son coefficient d'amortissement relatif. Le résultat analytique peut être obtenu par une méthode des résidus (intégration d'une fonction complexe) :

$$I_H^{(analyt)} = \int_0^\infty |H(n)|^2 dn = \frac{1}{k^2} \frac{\pi f_n}{4\xi}$$

Etant donné que nous n'avons encore aucune idée de la borne d'intégration supérieure à choisir, l'intégration numérique sera limitée à  $10f_n$  :

$$I_H^{(num)}(\Delta n) = \frac{1}{2} |H(0)|^2 \Delta n + \sum_{i=1}^{N_h} |H(i\Delta n)|^2 \Delta n \quad \text{où } \Delta n = \frac{10f_n}{N_h} \quad (10.2)$$

La figure 10.2 indique, pour différents coefficients d'amortissement, l'erreur relative commise sur l'estimation de l'intégrale :

$$erreur = \frac{I_H^{(num)}(\Delta n) - I_H^{(analyt)}}{I_H^{(analyt)}} \quad (10.3)$$

La forme saccadée des courbes pour les grands pas de fréquence provient du fait que la décomposition en intervalles pour le calcul numérique de l'intégrale n'est pas "progressive". On identifie clairement sur ce graphique une résolution fréquentielle à partir de laquelle la courbe devient horizontale, ce qui signifie simplement que la fonction de transfert est alors correctement représentée. L'existence d'une erreur résiduelle aux très petites résolutions fréquentielles provient de la troncature de l'intégrale.

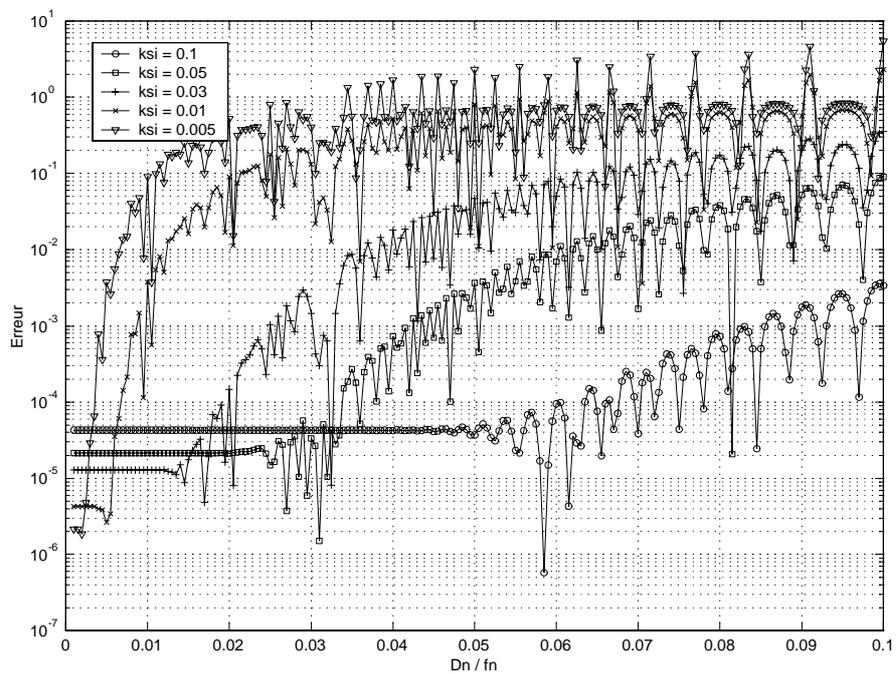


FIGURE 10.2. ESTIMATION D'UNE RÉOLUTION FRÉQUENTIELLE OPTIMALE POUR LA REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION DE TRANSFERT

La figure 10.2 permet de justifier la limite :

$$\frac{\Delta n}{f_n} = \frac{\xi}{2} \quad (10.4)$$

comme une limite acceptable permettant de représenter correctement ce pic de résonance. On constate par exemple que la valeur  $\frac{\Delta n}{f_n} = 0.05$  identifie correctement la fin du plateau pour  $\xi = 0.1$  ou encore que  $\frac{\Delta n}{f_n} = 0.015$  semble bien adapté à la courbe  $\xi = 0.03$ .

### 10.1.2 Fréquence maximale à représenter

Le second paramètre important qu'il convient d'optimiser concerne bien sûr la fréquence maximale à partir de laquelle l'intégration peut être tronquée. Au paragraphe précédent, cette valeur était limitée à  $10f_n$ ; ceci a permis de limiter l'erreur relative de troncature à moins de  $10^{-4}$ , voire  $10^{-5}$  pour les structures les moins amorties. Ceci semble bien sûr un peu trop excessif comme imposition.

Nous allons étudier la limite de troncature de l'intégrale en choisissant la résolution fréquentielle conseillée par la relation (10.4). La figure 10.3 représente, pour différents taux d'amortissement, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale.

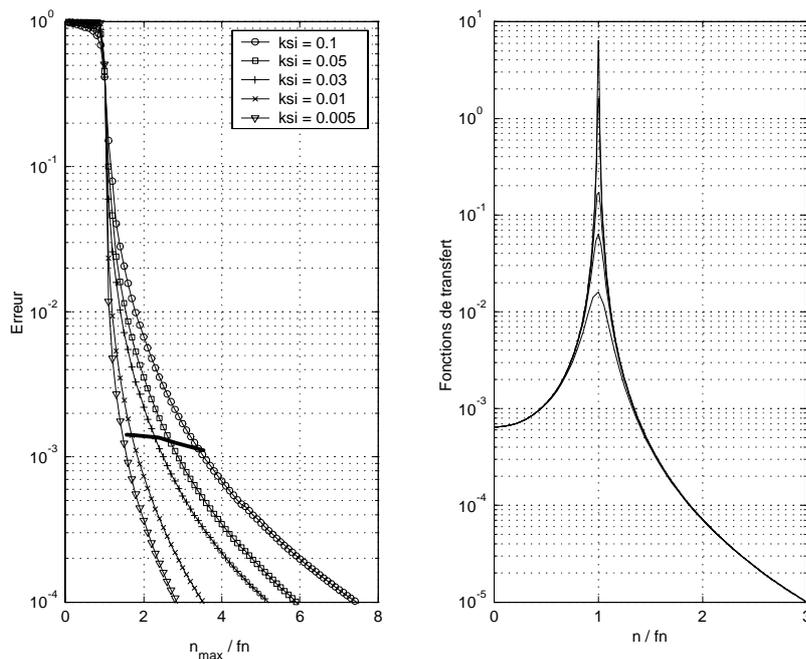


FIGURE 10.3. ESTIMATION D'UNE FRÉQUENCE MAXIMALE À REPRÉSENTER

L'examen de cette figure indique que la borne supérieure de l'intégrale doit être d'autant plus grande que le système est amorti, ce qui est logique puisque dans ce cas l'énergie est

répartie sur une bande de fréquences plus large. Cette limite maximale peut être approchée par la relation :

$$\frac{n_{MAX}}{f_n} = 1 + 8\sqrt{\xi} \quad (10.5)$$

Ce choix permet d'obtenir le niveau de précision proche de  $10^{-3}$  et est indiqué par un trait en gras sur la figure 10.3.

## 10.2 Représentation du contenu fréquentiel de la sollicitation

Le contenu fréquentiel de la sollicitation doit également être pris en compte pour la détermination des paramètres liés à la génération. Dans la suite, nous travaillerons principalement avec le spectre de Davenport :

$$S(n) = \frac{\frac{2}{3}n \left(\frac{L_u^x}{U}\right)^2 \sigma_u^2}{\left[1 + \left(\frac{nL_u^x}{U}\right)^2\right]^{4/3}} \quad (10.6)$$

Tâchons donc de déterminer d'une part le plus grand pas de fréquence qui permette de représenter correctement la dispersion fréquentielle du contenu énergétique, et d'autre part la fréquence maximale au delà de laquelle il ne reste plus que très peu d'énergie dans le processus.

### 10.2.1 Résolution fréquentielle optimale

Afin de conserver le plus de généralité possible, les raisonnements seront menés sur une fréquence adimensionnelle :

$$\hat{n} = \frac{nL_u^x}{U} \quad (10.7)$$

La figure 10.4 indique la fonction à représenter numériquement (à droite) ainsi que l'erreur commise sur l'intégrale lorsque le pas de fréquence devient de plus en plus petit. L'erreur est calculée en comparant la réponse analytique ( $\sigma_u^2$ ) avec le résultat de l'intégration numérique depuis  $\hat{n} = 0$  jusque  $\hat{n} = 200$ . Une limite acceptable pour la résolution fréquentielle adimensionnelle semble être

$$\frac{\Delta n L_u^x}{U} = 0.1$$

En effet, en dessous de cette valeur, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale semble ne plus varier et est donc dans ce cas exclusivement associée à une erreur de troncature.

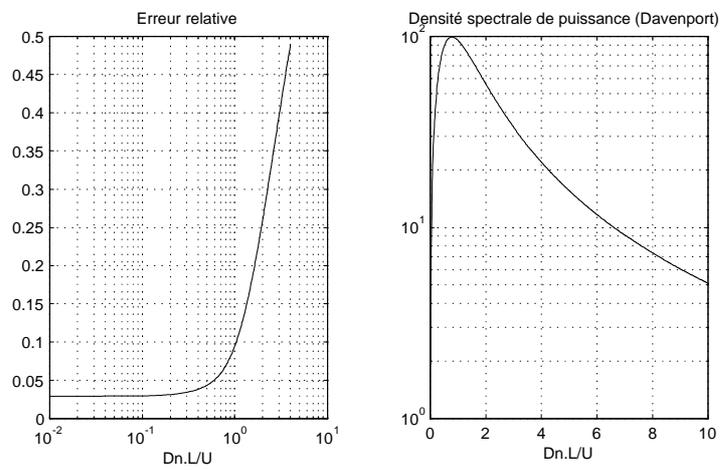


FIGURE 10.4. ESTIMATION D'UNE RÉOLUTION FRÉQUENTIELLE OPTIMALE POUR LA REPRÉSENTATION DE LA SOL-LICITATION

## 10.2.2 Fréquence maximale à représenter

Lorsque la fréquence de troncature est trop faible, une partie de l'énergie associée aux hautes fréquences du processus n'est pas représentée. Par exemple, Le graphique de la figure 10.4 vient de montrer qu'une fréquence de troncature  $\hat{n} = 200$  engendrait une erreur de l'ordre de 3%, ce qui est déjà assez important.

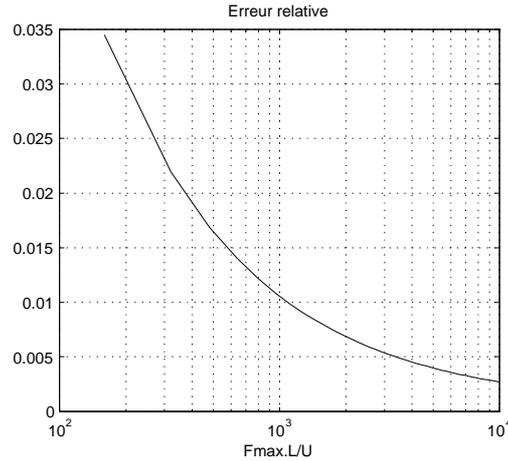


FIGURE 10.5. ESTIMATION D'UNE FRÉQUENCE MAXIMALE À REPRÉSENTER

Le graphique 10.5 indique que le choix :

$$\frac{n_{\max} L_u^x}{\bar{U}} = 10^3 \quad (10.8)$$

permet de représenter correctement 99% de l'énergie contenue dans le processus à représenter numériquement. Pratiquement, cette fréquence maximale peut dans certains cas être assez haute. Ceci provient de la décroissance assez lente ( $\sim n^{-5/3}$ ) de la densité spectrale de la vitesse de vent. Ceci justifie également la possibilité d'excitation d'une structure dont les fréquences propres sont supérieures au Hertz.

A titre d'exemple, supposons que l'échelle de turbulence et la vitesse moyenne du vent soient respectivement  $L_u^x = 1200m$  et  $U = 30m/s$ . Dans ce cas, il conviendrait de prendre en compte le contenu fréquentiel du vent jusqu'à  $25Hz$ , ce qui est bien sûr impossible en pratique. Cette difficulté peut être contournée assez facilement; la solution tombe sous le sens en se posant cette question : pourquoi introduire dans les échantillons générés un contenu fréquentiel jusqu'à des fréquences qui seront de toute façon filtrées par la structure étudiée ? La méthodologie prescrite consiste donc à estimer la fréquence maximale sur base du minimum des relations (10.5) et (10.8). Le critère le plus restrictif sera généralement celui lié à la bonne représentation de la structure. Il en découle donc que chaque génération sera adaptée à la structure à étudier, mais aussi que des structures semblables d'un point de vue géométrique et aérodynamique mais différentes d'un point de vue mé-

canique nécessiteront des échantillons générés différents. Ceci provient du choix personnel d'utiliser les mêmes paramètres pour la génération et la résolution.

### 10.3 Caractéristiques de génération liées à la résolution pas-à-pas

#### 10.3.1 Fréquence maximale à représenter

Lorsque les échantillons d'efforts sollicitant sont générés, la démarche à suivre consiste à analyser dans le domaine temporel la réponse de la structure sous chacune de ces sollicitations. Les méthodes les plus efficaces (et surtout les seules d'application lorsque le problème traité est non linéaire) sont les méthodes pas-à-pas. Quelques rappels théoriques concernant ces méthodes ont été donnés au paragraphe 4.2.2.1.

L'algorithme qui sera utilisé dans la suite est celui de Newmark ( $\alpha = 0.25$ ;  $\delta = 0.5$ ) qui a la particularité, pour ce choix de paramètres, d'être inconditionnellement stable. Comme pour tous les algorithmes pas-à-pas, il existe un pas de temps minimal en dessous duquel certaines harmoniques ne peuvent plus être représentées correctement. Ceci est lié à la discrétisation d'un signal temporel et peut s'expliquer graphiquement par la nécessité d'avoir un certain nombre de points pour représenter correctement un signal harmonique.<sup>34</sup>

La figure 10.6 montre que la valeur  $\frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{8}$  semble être une limite raisonnable, ce qui signifie que 8 points devraient suffire pour la représentation correcte d'une sinusoïdale. La suite des développements sera basée sur cette valeur et nous pourrons effectivement constater dans un exemple que cette relation semble assez bien adaptée.

L'existence d'une résolution temporelle limitée peut se traduire en termes de fréquences : pour un pas de temps de résolution choisi, il est impossible de représenter les fréquences supérieures à la limite :

$$n_{\max} = \frac{1}{T_{\min}} \simeq \frac{1}{8\Delta t} \quad (10.9)$$

#### 10.3.2 Résolution fréquentielle maximale

Il existe une différence fondamentale entre les analyses dans le domaine fréquentiel et pas-à-pas dans le domaine temporel. En effet, le premier type d'analyse est conditionné par la notion de stationnarité : on ne calcule jamais les transformées de Fourier (discrètes) que de processus stationnaires; tandis que le second type d'analyse est transitoire par nature, la meilleure preuve en étant l'existence de conditions aux limites.

Il est bien connu que, dans une structure amortie, les effets d'une perturbation affligée en un instant s'amenuisent au cours du temps. Il existe donc un laps de temps  $T_R$  après lequel

<sup>34</sup> Le théorème de Shannon affirme que  $f = \frac{1}{2\Delta t}$  est la fréquence maximale qui puisse être retirée d'un signal discrétisé avec un pas de temps  $\Delta t$ . Il faut donc au moins deux points pour pouvoir distinguer l'existence d'une composante harmonique dans un signal. Il est cependant évident que deux points ne suffisent pas pour représenter la composante harmonique avec une précision suffisante.

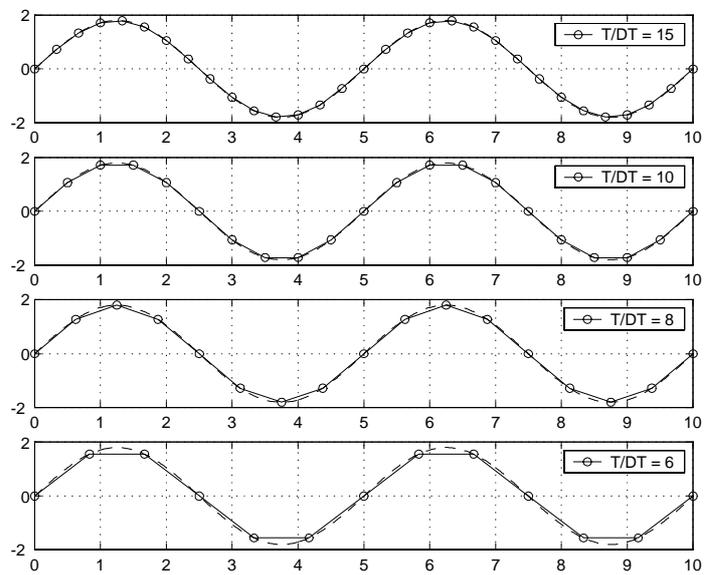


FIGURE 10.6. REPRÉSENTATION DISCRÈTE DE SIGNAUX HARMONIQUES DE PÉRIODE  $T$ .

la perturbation infligée ne se fait plus ressentir, en l'occurrence ici, une période dite de mise en régime, après laquelle les conditions initiales imposées sont oubliées. Cette période peut être estimée sur base de la réponse libre d'un système amorti dont la forme analytique s'exprime par une exponentielle décroissante modulant une combinaison d'harmoniques (Equ. (4.52)). Exprimer que l'exponentielle devient faible (par exemple en perdant un pourcentage  $\chi$  de son amplitude initiale) permet d'évaluer une période de mise en régime ( $T_R$ ) :

$$\frac{T_R}{T_{nat}} = \frac{0.5 \ln \frac{1}{1-\chi}}{2\pi\xi} \quad (10.10)$$

En effet, le remplacement de la relation (10.10) dans l'expression de la réponse libre amortie permet d'obtenir :

$$e^{-2\omega_{nat}\xi T_R} = e^{-\ln \frac{1}{1-\chi}} = 1 - \chi \quad (10.11)$$

La figure 10.7 donne une idée schématique de la relation (10.10). La figure 10.8 représente la réponse d'un oscillateur à un degré de liberté ( $\omega_{nat} = 5rad/s$ ) soumis à une charge sinusoïdale. On y retrouve la notion de période de mise en régime; le trait gras vertical représente la période  $T_R$  calculée à l'aide de la formule (10.10) pour laquelle  $\chi = 0.99$ . Cette valeur choisie permet effectivement d'obtenir une période de mise en régime proche de celle qui serait choisie "à l'oeil".

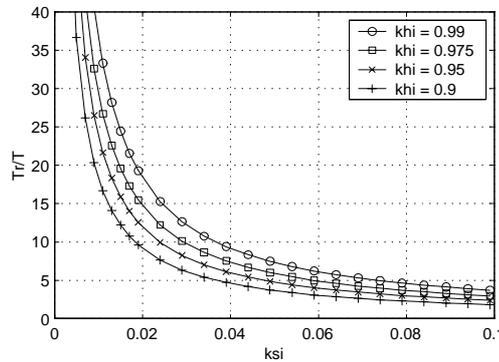


FIGURE 10.7. ESTIMATION DE LA PÉRIODE DE MISE EN RÉGIME

Dans la suite, nous ne travaillerons plus qu'avec  $\chi = 0.99$ , ce qui permet d'écrire

$$\frac{T_R}{T_{nat}} \simeq \frac{0.15}{\xi} \quad (10.12)$$

Au niveau d'une simulation de Monte Carlo, ce phénomène doit également être pris en compte dans la mesure où, puisque l'on est censé étudier un phénomène stationnaire (l'effet du vent), il est important que la phase transitoire soit suffisamment courte devant la partie

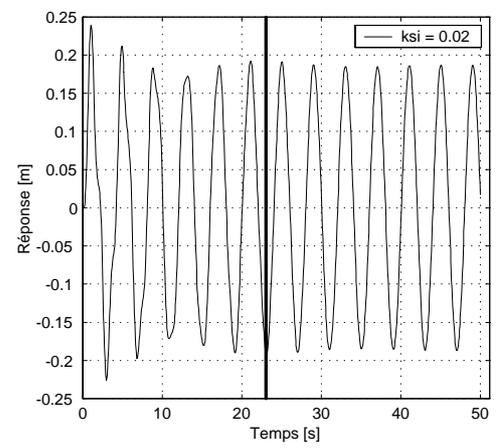
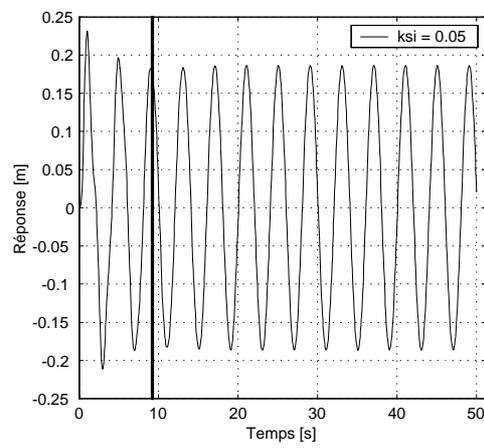


FIGURE 10.8. EXEMPLE DE PÉRIODES DE MISE EN RÉGIME - RÉPONSES D'UN OSCILLATEUR SIMPLE

stationnaire dont on essaye de calculer les caractéristiques statistiques. Deux procédures pourraient être envisagées :

- Méthode 1 : les caractéristiques statistiques de la réponse ne sont calculées que sur la partie stationnaire; l'équation (10.12) est alors utilisée pour estimer la période de mise en régime. Les caractéristiques statistiques sont calculées sur la fin de la réponse, à partir de l'entrée dans la phase stationnaire;
- Méthode 2 : les caractéristiques statistiques sont évaluées sur l'entièreté de la réponse, phase transitoire y comprise. Cette méthode semble plus simple à mettre en oeuvre. Elle n'est cependant valable que lorsque la partie transitoire est courte.

## 10.4 Exemple simple d'application

La structure à étudier est un oscillateur à un degré de liberté dont les caractéristiques sont :

$$m = 1kg \quad k = 25N/m \quad \xi = 0.01 \quad (10.13)$$

$$\omega = 5rad/s \quad T = 1.26s \quad f = 0.796Hz \quad (10.14)$$

Cet oscillateur est sollicité par une sollicitation aléatoire dont la densité spectrale de puissance a la forme de celle de Davenport. Par souci de cohérence au niveau des dimensions utilisées, la variance de la vitesse du vent  $\sigma_u^2$  dans l'équation (10.6) devrait être remplacée par une variance d'effort  $\sigma_p^2$ . Les paramètres caractérisant la loi sont :

$$\frac{L_u^x}{\bar{U}} = 40 \quad \sigma_p^2 = 9 \quad (10.15)$$

Pour la structure à étudier et le type de sollicitation choisie, le tableau 10.2 résume la démarche à suivre pour un choix optimal des paramètres de génération. Les deux premières lignes appliquent les critères développés précédemment pour la bonne représentation de la structure ainsi que de la sollicitation. Assez logiquement, la résolution fréquentielle à choisir est la plus petite des deux valeurs obtenues. En vertu de la remarque formulée au paragraphe 10.2.2, la fréquence maximale à retenir pour la génération est également la plus petite des deux valeurs données par les deux critères.

Du pas de fréquence  $\Delta n$  choisi, on peut déterminer une durée minimale  $T$  de l'échantillon à générer; de la fréquence maximale  $n_{MAX}$  à représenter, le critère de représentation discrète d'harmoniques permet d'obtenir une idée de la taille du pas de temps  $\Delta t$  à ne pas dépasser. Finalement, le rapport entre ces deux nouvelles valeurs permet d'obtenir un ordre de grandeur du nombre  $N$  de pas de temps.

L'équation (10.12) permet d'estimer la durée de la mise en régime. Dans notre cas, elle vaut environ 19s, ce qui semble assez court vis-à-vis de la durée totale étudiée. Nous essayerons cependant d'étudier plus finement dans la suite cette importance de la phase transitoire, et d'en déduire une proportion maximale qu'elle peut occuper sans pour autant trop affecter les caractéristiques du phénomène stationnaire modélisé.

$\frac{\Delta n}{f} = \frac{\xi}{2} \rightarrow \Delta n \leq 4.10^{-3}$	$\frac{n_{MAX}}{f_n} = 1 + 8\sqrt{\xi} \rightarrow n_{MAX} \geq 1.4328$
$\frac{\Delta n L_u^x}{T} = 0.1 \rightarrow \Delta n \leq 2,5.10^{-3}$	$\frac{n_{MAX} L_u^x}{T} = 10^3 \rightarrow n_{MAX} \geq 25$
$\downarrow$ $\Delta n = 2,5.10^{-3}$ $\downarrow$ $T = \frac{1}{\Delta n} = 400s$ $\swarrow$	$\downarrow$ $n_{MAX} = 1.5$ $\downarrow$ $\Delta t \leq \frac{1}{8n_{MAX}} = 0.0833$ $\swarrow$
$N \sim \frac{400}{0.0833} = 4800$	

Tableau 10.1. : Caractéristiques de l'échantillon généré

Afin de faciliter le calcul des transformées de Fourier, il est préférable d'utiliser une puissance entière d'un petit nombre premier pour le nombre de pas de temps. Les caractéristiques choisies pour la génération seront donc :

$$\begin{aligned} N &= 2^{13} = 8192 \\ T &= 400s \rightarrow \Delta t = 0.0488s \\ \Delta n &= 0.0025Hz \quad n_{\max} = 10.25Hz \end{aligned} \quad (10.16)$$

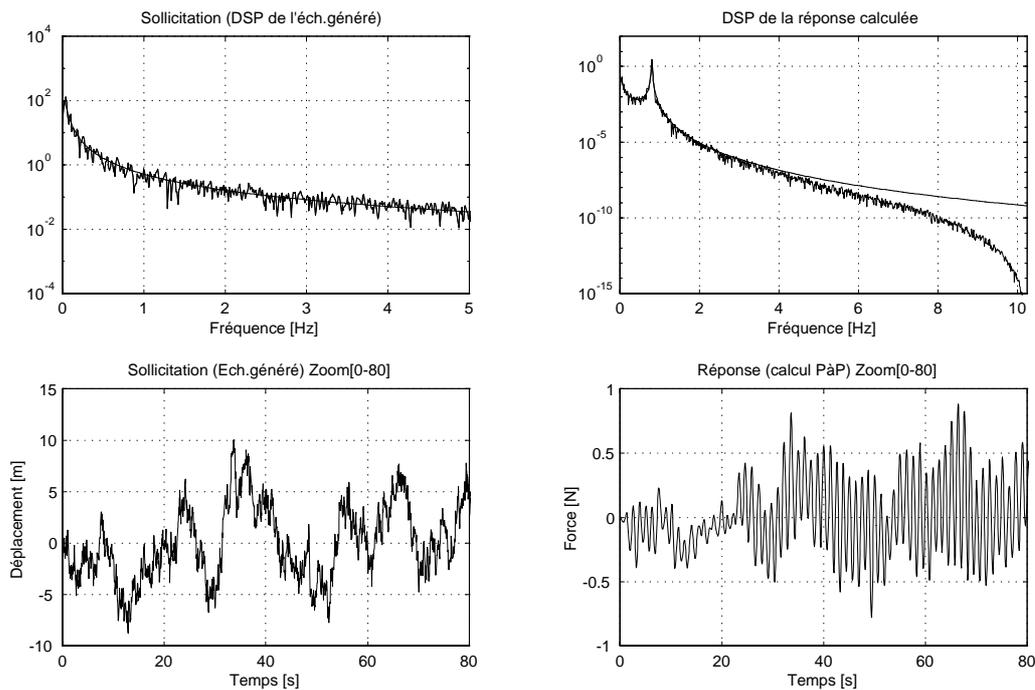


FIGURE 10.9. EXEMPLE D'ANALYSE STOCHASTIQUE DANS LE DOMAINE TEMPOREL (MONTE CARLO)

La figure 10.9 résume le fonctionnement d'une analyse stochastique. Le premier graphique indique la densité spectrale de la force que l'on s'est imposée. La méthode de génération présentée au chapitre 9 a permis de générer un échantillon dont les 80 premières secondes sont dessinées sur la figure (en bas et à gauche). La densité spectrale de cet échantillon généré a été tracée sur le graphique précédent afin de vérifier sa concordance avec la densité spectrale cible. L'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel consiste simplement à multiplier la densité spectrale de la force appliquée par la norme au carré de la fonction de transfert de l'oscillateur. Le résultat est la densité spectrale du déplacement de l'oscillateur, représentée en trait plein, en haut et à droite. D'autre part, l'analyse stochastique dans le domaine temporel utilise l'échantillon généré comme sollicitation déterministe pour une analyse pas-à-pas. Les 80 premières secondes de la réponse sont également reprises sur la figure. Les caractéristiques statistiques de la réponse peuvent être déduites directement

du signal temporel. Il n'est cependant pas superflu d'en calculer la densité spectrale et de vérifier qu'elle correspond effectivement à celle que l'analyse stochastique a fourni.

Sur cette figure, on devine également la présence de cette période de transition d'environ 19s. Le calcul de la densité spectrale de la réponse obtenue pas-à-pas permet de justifier le choix du facteur "8" de l'équation (10.9); en effet, on constate que la fréquence  $f = \frac{1}{8\Delta t} \simeq 2.6Hz$  semble être une limite acceptable à partir de laquelle le contenu fréquentiel commence à être amorti par la résolution numérique.

	DSP cible	Partie utile	Echantillon complet
$\overline{x^2}$	8.808	8.425	8.807
$\bar{x}$	0	0.049	$2.10^{-6}$
$\sigma$	2.968	2.902	2.968

Tableau 10.2. : Caractéristiques de l'échantillon généré

Le tableau 10.2 indique les caractéristiques principales de l'échantillon généré qui permettent d'apprécier sa qualité. Le carré moyen ( $\overline{x^2}$ ) associé à la partie utilisée de la densité spectrale cible est de 8.808 alors que le carré moyen cible analytique était  $\sigma_p^2 = 9$ . Ceci provient du fait que la densité spectrale de la force n'a été représentée que jusqu'une fréquence inférieure à celle conseillée par la formule (10.8) (10.25 Hz au lieu de 25 Hz). Nous avons procédé de la sorte car cette énergie contenue dans les hautes fréquences aurait de toute façon été filtrée par l'oscillateur.

La dernière colonne du tableau 10.2 reprend les mêmes grandeurs statistiques mais estimées directement à partir du signal généré. Elles montrent que la génération est de très bonne qualité. L'échantillon qui a été généré est stationnaire puisque fondamentalement obtenu par transformée de Fourier inverse. Néanmoins, la notion de stationnarité est fort théorique et l'on imagine aisément que les caractéristiques statistiques de l'échantillon sur deux tronçons courts différents ne seront guère identiques. Ceci peut être mis en évidence en comparant des spectrogrammes calculés sur différents blocs. En bref, un processus qui serait stationnaire d'un point de vue analytique ne peut en aucune manière être tel, une fois échantillonné.

Cette constatation revêt une importance capitale vis-à-vis des choix à prendre dans la suite. Pour la mettre davantage en évidence, la colonne centrale du tableau 10.2 indique à nouveau les mêmes grandeurs statistiques mais estimées à partir de l'échantillon dont on a supprimé les 19 premières secondes qui correspondront à la phase transitoire de la réponse. Sur cette partie utile, le carré moyen est un peu plus faible ( $\sim 5\%$ ), ce qui indique que le carré moyen sur les 19 premières secondes est plus important de sorte que le carré moyen sur l'échantillon complet soit effectivement celui escompté. On constate également que la moyenne de la partie utile de la sollicitation n'est plus aussi petite; cela provient du contenu en basses fréquences de l'échantillon généré.

Le tableau 10.3 résume les grandeurs statistiques associées à la réponse. La première colonne reprend les grandeurs qu'une analyse stochastique dans le domaine fréquentiel donnerait. Le carré moyen et la moyenne indiqués dans la colonne centrale ont été calculés

	Analyse stochastique	Méthode 1	Méthode 2
$x^2$	$8,81.10^{-2}$	$7,94.10^{-2}$	$8,13.10^{-2}$
$\bar{x}$	0	$-2,87.10^{-4}$	$1,55.10^{-3}$
$\sigma$	0.297	0.282	0.285

Tableau 10.3. : Caractéristiques de la réponse

sur la partie "stabilisée" de la réponse (méthode 1 présentée au paragraphe 10.3.2). Etant donné que la sollicitation était caractérisée par un carré moyen plus faible pendant cette durée, il n'est pas étonnant de constater que le carré moyen de la réponse soit également réduit :  $7,94.10^{-2}$  au lieu de  $8,81.10^{-2}$ , soit environ 10%. Cette différence n'est donc attribuable qu'à environ pour moitié au manque d'énergie injectée dans la structure.

La seconde méthode imaginée préconise quant à elle de calculer les grandeurs statistiques à partir de la réponse complète, c'est-à-dire phase transitoire incluse. Il semble assez logique également de trouver un carré moyen plus faible puisque, étant donné que la structure part du repos, le carré moyen aux premiers instants est inévitablement plus faible. Ceci permet cependant difficilement de justifier une différence d'environ 7%.

Les deux méthodes présentées expliquent en partie les raisons pour lesquelles les résultats des analyses dans les domaines temporel et fréquentiel diffèrent. Il va de soi que la génération de nouveaux échantillons de force donnerait des résultats encore différents. Ceci remet simplement en question la notion d'ergodicité. Si d'un point de vue analytique, il est encore imaginable de travailler avec des processus stationnaires et ergodiques, ceux-ci ne peuvent être traités numériquement qu'à l'aide de moyennes d'échantillons.

Afin de s'affranchir du caractère de non-ergodicité, les grandeurs statistiques caractéristiques seront estimées à partir des réponses calculées pour dix échantillons générés. Les grandeurs représentatives seront bien sûr les moyennes de ces dix valeurs, c'est-à-dire, essentiellement la moyenne du carré moyen et la moyenne de la moyenne. D'autre part, afin de conclure quant à la suffisance de dix échantillons, il serait également important de relever les écart-types du carré moyen et de la moyenne; en effet, des dispersions trop importantes témoigneraient d'un nombre insuffisant d'échantillons.

La figure 10.10 répond au dernier critère laissé en suspens, c'est-à-dire, celui de l'importance de la phase transitoire par rapport à la phase stationnaire. Elle permet également de conclure à une meilleure adaptation de la seconde méthode pour l'estimation des grandeurs statistiques.

L'oscillateur étudié reste le même que précédemment, avec le même chargement, mais, afin d'étudier l'importance de la phase transitoire, le coefficient d'amortissement relatif change d'une étude à l'autre. Pour un coefficient d'amortissement donné, la relation (10.12) permet de calculer la durée de la mise en régime. Celle-ci sera utilisée comme abscisse pour le graphique. En allant de la droite vers la gauche, on passe donc d'une réponse complètement transitoire à une réponse complètement stationnaire. Ce graphique représente, pour chacune des durées de mise en régime, la moyenne des carrés moyens obtenus sur les dix réponses, et ce, pour les deux méthodes présentées. Pour la simplicité de lecture du graphique, cette grandeur est rapportée au carré moyen obtenu par une analyse stochas-

tique dans le domaine fréquentiel. Etant donné qu'une moyenne sur plusieurs échantillons est réalisée, on peut attribuer les écarts relevés aux raisons mentionnées ci-avant, à savoir :

- pour la méthode 1, l'écart provient du fait que le carré moyen de la partie utile de la sollicitation ne correspond pas avec le carré moyen cible. Il peut a priori être plus grand ou plus petit, ce qui explique les oscillations de la courbe en trait plein autour du palier unitaire;
- pour la seconde méthode, l'écart provient du fait que le carré moyen de la réponse est estimé sur une partie englobant la période de mise en régime, ce qui conduit plus que probablement à une valeur plus faible. La courbe en trait plein correspondant à la seconde méthode se trouve effectivement sous l'axe.

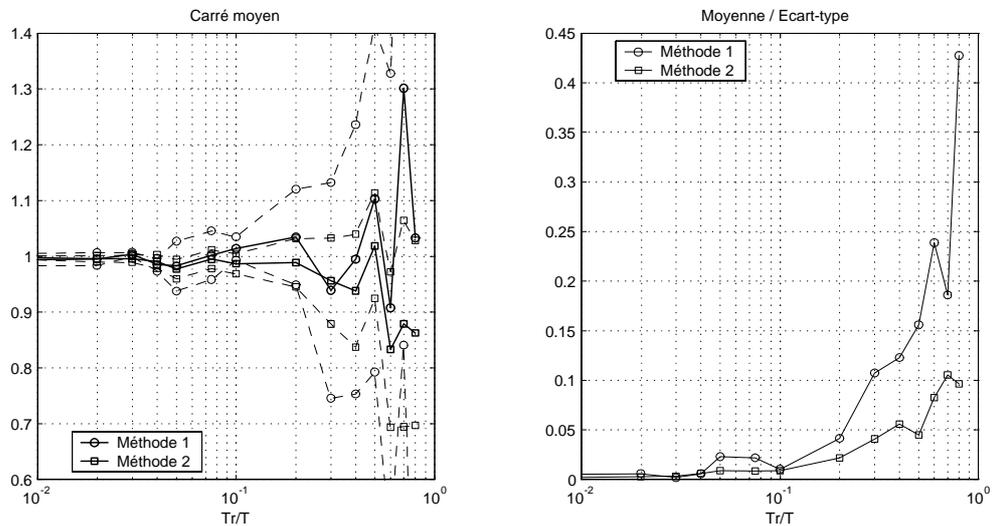


FIGURE 10.10. COMPARAISON DES EFFICACITÉS DES MÉTHODES 1 ET 2

Lorsque la durée de mise en régime devient petite, les résultats fournis par les deux méthodes deviennent semblables étant donné qu'à la limite ces deux méthodes sont elles-mêmes confondues. Pour les périodes de mise en régime inférieures au dixième de la durée totale de l'échantillon ( $T_r/T < 0.1$ ), la première méthode semble cependant donner un résultat légèrement plus précis.

Toujours sur le graphique de gauche, les courbes en traits pointillés permettent de se figurer les écarts-types des carrés moyens calculés<sup>35</sup>. Puisqu'elle ne travaille en définitive que sur un morceau d'échantillon, la première méthode donne évidemment des résultats plus dispersés que la seconde. Ceci signifie qu'un nombre plus important d'échantillons

<sup>35</sup> Les courbes représentent la moyenne plus (ou moins) un écart-type du carré moyen, rapportée au carré moyen obtenu par une analyse stochastique dans le domaine fréquentiel

devra être utilisé pour obtenir la même dispersion que celle qu'offrirait la seconde méthode. Bien qu'offrant de moins bons résultats au niveau de la moyenne, cette seconde méthode semble pourtant être plus efficace que la première.

Le graphique de droite représente, pour chacune des deux méthodes, le rapport entre la moyenne et l'écart-type de la réponse. Il s'agit d'une grandeur qui devrait idéalement être nulle puisque la sollicitation moyenne est nulle. Il s'agit d'un rapport adimensionnel qui peut également servir de critère pour l'adoption de l'une ou l'autre méthode. La manière même dont les moyennes et écart-types sont calculés permettent d'expliquer la forme des courbes. La première méthode, bien qu'offrant une estimation de l'écart-type légèrement plus précise, semble être moins favorisée par ce nouveau critère. Ceci montre donc que calculer la moyenne sur la partie stationnaire de la réponse mène à une erreur beaucoup plus importante que son estimation sur l'entièreté du signal, phase transitoire incluse.

Les observations tirées des graphiques de la figure 10.10 nous ont permis de retenir la seconde méthode pour l'estimation des grandeurs statiques de la réponse. Pour la moyenne, ce choix découle directement de l'observation du graphique de droite. Concernant l'écart-type, nous avons également retenu la seconde méthode car, bien que légèrement moins précise en moyenne, elle offre non seulement une convergence "monotone" lorsque la période de mise en régime devient de plus en plus petite, mais surtout une dispersion moindre du carré moyen. Ces graphiques permettent également de conclure qu'une période de mise en régime plus courte que 4% de la durée étudiée constitue un excellent choix. Afin de ne pas imposer de critère trop restrictif, une période de mise en régime inférieure à 10% de la durée totale sera conseillée.

## 10.5 Résumé

Après avoir justifié la nécessité de concordance entre paramètres de génération et d'analyse, ce chapitre a présenté les critères qui permettent d'en donner un choix judicieux. Ces critères ont été élaborés sur base de raisonnements simples menés sur l'oscillateur à un degré de liberté. Puisqu'ils frôlent les limites de l'acceptable, ces critères présentent les avantages d'être économiques et sécuritaires à la fois. Une bonne compréhension de ces limites est nécessaire à l'approche de structures plus complexes auxquelles ces relations simples vont être également appliquées.

---

# Chapitre 11

---

## Approche temporelle d'une structure discrétisée

Le chapitre 6 qui a présenté les hypothèses liées à la linéarisation a finalement débouché sur une expression linéaire des forces aérodynamiques (Equ. (6.14)). A l'autre extrême se trouve la formulation complètement non linéaire prenant en compte la non linéarité des coefficients aérodynamiques et les termes quadratiques de la turbulence, aussi bien pour la vitesse apparente du vent que pour son incidence. Plusieurs niveaux d'hypothèses de calcul sont envisagés; afin de pouvoir cerner au mieux les conséquences attribuables à chaque hypothèse, chaque niveau est obtenu à partir du précédent en lui supprimant une hypothèse :

1. toutes les hypothèses de linéarisation sont formulées; les efforts statiques et dynamiques sont évalués séparément et leurs contributions sont ajoutées à la fin de l'analyse. Le déplacement en  $t = 0$  n'est donc pas nul, en dépit de conditions initiales choisies telles pour la partie dynamique de l'analyse;
2. toutes les hypothèses de linéarisation sont toujours formulées mais cette fois, les efforts dynamiques utilisés pour l'analyse pas-à-pas incluent également les efforts statiques (moyens);
3. ce niveau d'hypothèses est semblable au niveau 2, la différence concerne la dernière simplification introduite au chapitre 6. L'hypothèse supplémentaire de turbulence et de vitesse verticale d'ordre 2 n'est plus formulée. L'analyse devient alors non linéaire;
4. une hypothèse supplémentaire est à nouveau levée : il s'agit de l'hypothèse des petites rotations;
5. à ce niveau, la vitesse apparente du vent est estimée en incluant les termes quadratiques de la turbulence. Il en va de même de l'incidence du vent;
6. la dernière hypothèse de linéarisation des coefficients aérodynamiques est également levée. Les efforts aérodynamiques sont donc pris en compte dans leur forme non linéaire telle que résultant de la théorie de l'aérodynamique.

Une première étape de validation de la formulation consiste à comparer les résultats d'une approche fréquentielle avec ceux d'une analyse temporelle sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}1$ . La démarche logique du raisonnement consiste alors à progresser dans ces niveaux d'hypothèses tout en tâchant d'expliquer les conséquences des hypothèses successivement formulées.

## 11.1 Validation de l'approche temporelle

Afin de valider l'approche temporelle, la structure étudiée au chapitre 8 est maintenant analysée dans le domaine temporel. La démarche à suivre est semblable à celle menée sur l'oscillateur simple, à savoir : génération de champs de vitesses dans l'espace (mais ici, avec la corrélation adéquate), expression des forces nodales à appliquer, analyse dynamique pas-à-pas et finalement, estimation des caractéristiques statistiques de la réponse. Les notions théoriques relatives à la génération et l'analyse dynamique ont déjà été rappelées. Il ne reste donc qu'à présenter l'application à une structure à plusieurs degrés de liberté des critères de choix des paramètres de génération ainsi que les résultats obtenus.

Nous venons de voir que la période de mise en régime d'un oscillateur est d'autant plus importante que cet oscillateur est peu amorti. Afin de limiter la durée des échantillons à générer, nous allons augmenter légèrement l'amortissement structurel. Il s'agit toujours d'un amortissement de Rayleigh mais caractérisé cette fois par  $\alpha = 0.067$  et  $\beta = 0.0053$ . Les coefficients d'amortissement relatifs modaux sont représentés à la figure 11.1

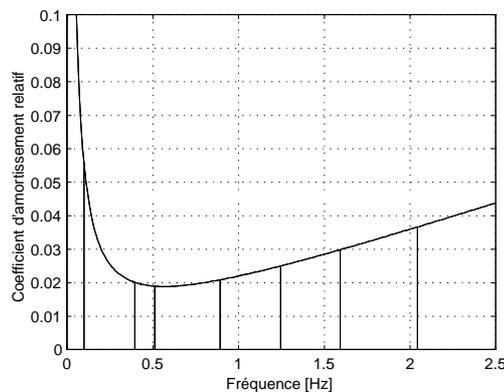


FIGURE 11.1. NOUVEAUX COEFFICIENTS D'AMORTISSEMENT RELATIF

### 11.1.1 Choix des paramètres de génération

Les critères établis au paragraphe précédent pour un oscillateur simple peuvent être utilisés pour une structure à plusieurs degrés de liberté. Le tableau 11.1 reprend la liste des grandeurs structurelles permettant le choix des paramètres de génération.

$f_{nat}$	$\xi_S$	$\xi_A$	$\frac{f_{nat}(\xi_S + \xi_A)}{2}$ [Hz]	$(1 + 8\sqrt{\xi_S + \xi_A}) f_{nat}$ [Hz]	Mise en régime [s]
0.0989	0.0556	0.1214	0.0087	0.43	20.9
0.3956	0.0201	0.0296	0.0098	1.10	18.6
0.5106	0.0189	0.0009	<b>0.0051</b>	1.09	<b>36.2</b>
0.8917	0.0208	0.0126	0.0149	<b>2.20</b>	12.3
1.2457	0.0250	0.0081	0.0206	3.06	8.89
1.5923	0.0299	0.0067	0.0291	4.03	6.29
2.0431	0.0366	0.0002	0.0376	5.18	4.87
2.5094	0.0439	0.0040	0.0602	6.91	3.04
2.5541	0.0446	0.0037	0.0617	<b>7.05</b>	2.97

Tableau 11.1. : Grandeurs structurelles affectant le choix des paramètres de génération

Le chapitre précédent a montré que la résolution fréquentielle maximale à utiliser s'exprime par le minimum de deux valeurs, ce qui assure une représentation correcte de la sollicitation d'une part, et de la structure d'autre part :

$$\Delta n = \min \left( \underbrace{\frac{0.1\bar{U}}{L_u^y}}_{0.01Hz}; \frac{\mathbf{f}_{nat}(\boldsymbol{\xi}_S + \boldsymbol{\xi}_A)}{2} \right) \quad (11.1)$$

Etant donné que la structure n'est plus un oscillateur simple mais une combinaison de plusieurs degrés de liberté, le second argument apparaît lui-même comme le minimum de plusieurs termes correspondant chacun à un mode propre structural. Ces valeurs sont reprises au tableau 11.1 et permettent de déduire un pas de fréquence d'au plus  $0.0051Hz$ , c'est-à-dire une durée de calcul d'au moins  $196.8s$ .

La fréquence maximale à représenter s'exprime également par le minimum de deux valeurs :

$$n_{\max} = \min \left( \underbrace{\frac{10^3\bar{U}}{L_u^y}}_{100Hz}; \left(1 + 8\sqrt{\boldsymbol{\xi}_S + \boldsymbol{\xi}_A}\right) \mathbf{f}_{nat} \right) \quad (11.2)$$

Le second argument est le critère permettant de représenter correctement la structure étudiée et doit donc être évalué pour chacun des modes propres à introduire dans la réponse. La valeur à retenir dans ce cas doit être le maximum de chacune des fréquences maximales calculées pour chaque mode. Afin de rester cohérent avec les analyses menées jusqu'ici, il conviendrait de s'imposer une représentation correcte des 9 premiers modes, c'est-à-dire une fréquence maximale  $n_{\max} = 7.05Hz$ . Cette valeur est assez importante mais peut être réduite au vu des résultats obtenus lors de l'analyse dans le domaine fréquentiel. Celle-ci a en effet permis de constater que la structure répond essentiellement dans les quatre premiers modes. La plus haute fréquence représentée sera donc limitée à  $n_{\max} = 2.2Hz$ . On pourrait voir une certaine relâche dans le choix des paramètres de génération. Cette démarche est justifiée à deux points de vue :

- l'exemple traité doit rester simple. Tout en fournissant des résultats assez précis, ce choix permet de limiter le nombre de pas à une valeur acceptable, ce qui limite le temps de calcul;
- pour les structures souples étudiées en pratique dans le domaine du vent turbulent, les modes dont les fréquences sont supérieures à 3 ou  $4Hz$  ne sont plus guère excités. De plus, à ce niveau de fréquence, l'hypothèse d'écoulement quasi-permanent devient difficile à justifier et une approche aéroélastique serait alors préférable.

Le pas de temps de calcul nécessaire pour une représentation correcte de cette fréquence maximale est obtenu par le critère de représentation des harmoniques :  $\Delta t \leq \frac{1}{8n_{\max}} =$

0.057s. Le nombre de pas de temps de calcul à utiliser est donc approché par :

$$N \simeq \frac{196.8}{0.057} = 3450 \text{ pas} \quad (11.3)$$

Les paramètres de génération définitifs sont obtenus en arrondissant ce nombre à la puissance de 2 supérieure. Finalement, les paramètres retenus sont :

$$\Delta t = 0.05s \quad \text{et} \quad N = 4096 \quad \rightarrow T = 204.6s \quad (11.4)$$

$$\rightarrow \Delta n = 0.0049Hz \quad \text{et} \quad n_{\max} = 2.5Hz \quad (11.5)$$

La relâche dans les critères choisis revient à représenter un peu moins bien les plus hautes fréquences. Dans le cadre d'une autre application, si les critères doivent également être relâchés, il est très important de ne pas modifier la résolution fréquentielle. Des essais à cet égard ont été entrepris et ont mis en évidence l'importance de ne pas augmenter cette fréquence minimale à représenter. Si tel était le cas, le nombre d'échantillons à utiliser pour une bonne représentation statistique de la réponse serait beaucoup plus important.

Avant d'adopter définitivement ces paramètres de génération, il reste à vérifier le critère de mise en régime. Pour rappel, nous avons décidé d'utiliser l'entièreté de la réponse (c'est-à-dire, phase transitoire incluse) pour le calcul des caractéristiques statistiques de la réponse. Le chapitre précédent vient de montrer qu'il importait que la période de mise en régime ne dépasse pas le dixième de la durée totale étudiée. Le tableau 11.1 reprend également, en dernière colonne, les périodes de mise en régime pour chacun des modes propres. On peut vérifier que le critère est respecté pour les déplacements verticaux ainsi que pour la torsion. Par contre, les formules que nous avons développées au paragraphe précédent montrent que, pour les vibrations horizontales, la période de mise en régime représente environ 18% de la durée totale étudiée. L'exemple que nous allons développer se veut simple; nous n'allons donc pas augmenter le nombre de pas de temps. Selon nos prévisions, la réponse dans le plan horizontal devrait donc être moins bien représentée que les deux autres. L'adoption de ce choix permettra de montrer que ce critère de mise en régime, qui pourrait a priori sembler insignifiant, occupe également un rôle important dans la qualité des résultats obtenus. L'objectif de cet exemple est donc double : d'une part montrer que le respect des critères élaborés permet d'obtenir une bonne concordance entre les domaines fréquentiel et temporel (déplacements verticaux et torsion) et d'autre part montrer que même le plus insignifiant des critères a également son importance (déplacements horizontaux).

Le nombre d'échantillons générés est de 8, c'est-à-dire 8 ensembles de 8 échantillons de vitesses cohérents entre eux. Ce nombre est choisi a priori et devrait permettre de s'affranchir du caractère non ergodique des histoires générées.

La figure 11.2 représente un exemple de champ de turbulence généré. Afin de revenir dans des intensités de turbulence plus habituelles, les écart-type des deux composantes turbulentes sont maintenant choisies égales à  $2m/s$ , de sorte que l'intensité de ces turbulences ne soit plus que de 10%. Etant donné que les points de l'espace concernés sont assez éloignés (50 m), les échantillons ne sont cohérents que pour les très basses fréquences. L'agrandissement sur les cinq premières secondes montre en effet que les échantillons ne

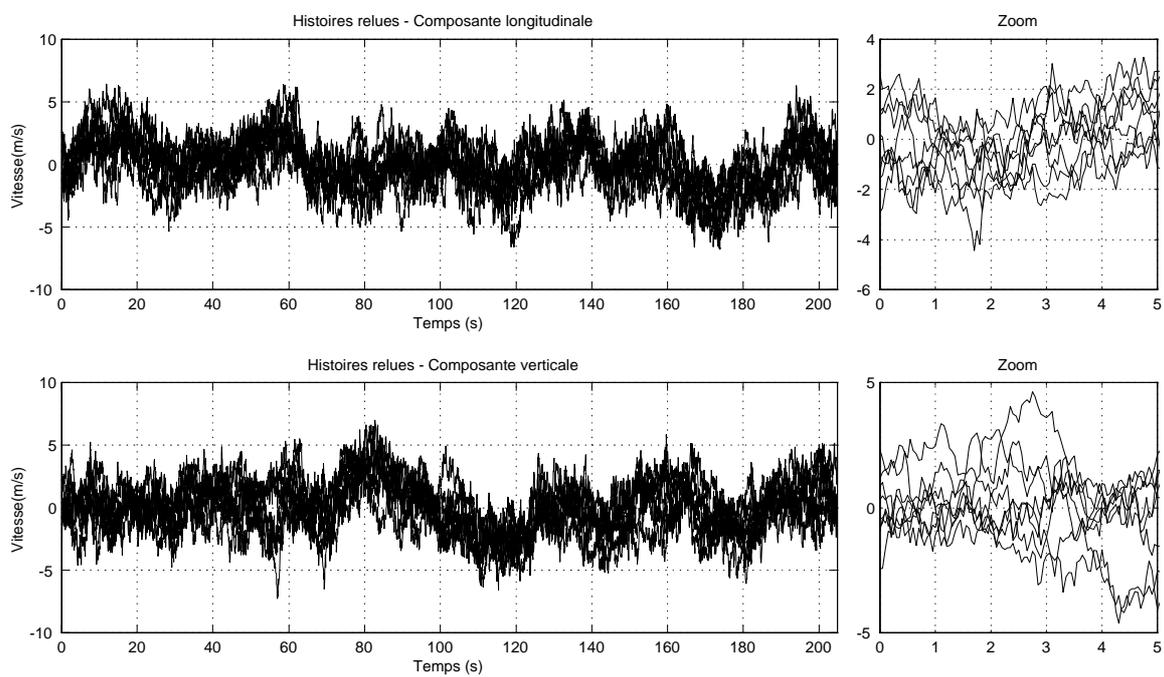


FIGURE 11.2. ECHANTILLONS DE VITESSE GÉNÉRÉS

sont presque pas corrélés aux plus hautes fréquences. Cette figure montre également que les vitesses longitudinales et verticales ne sont pas cohérentes; il s'agit d'une hypothèse de travail déjà adoptée à l'occasion de la formulation analytique.

### 11.1.2 Comparaison entre approches temporelle et fréquentielle

Afin de pouvoir comparer ces résultats avec ceux obtenus dans le domaine fréquentiel, les forces aérodynamiques appliquées à la structure seront évaluées sur base du niveau d'hypothèse maximal ( $n^{\circ}1$ ) (Equ. (6.14)). Les expressions utilisées pour estimer l'angle d'incidence apparent ou la vitesse apparente du vent par rapport au tablier sont donc linéaires. La figure 11.3 montre en effet que, sous ce niveau d'hypothèses, l'angle d'incidence est proportionnel à la composante turbulente de la vitesse. Cette figure confirme également qu'un angle d'incidence extrémal de l'ordre de  $20^{\circ}$  peut être atteint lorsque la turbulence du vent est de l'ordre de 10%.

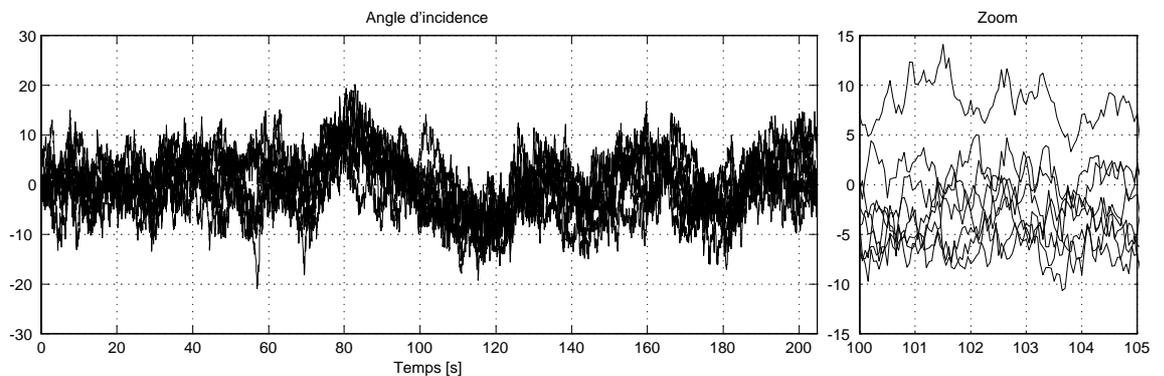


FIGURE 11.3. INCIDENCE APPARENTE DU VENT PAR RAPPORT AU TABLIER : APPROCHE LINÉAIRE

Pour chaque ensemble d'échantillons générés, une analyse pas-à-pas dans le domaine temporel et en base modale (limitée aux 9 premiers modes) permet de déterminer l'évolution des déplacements verticaux et horizontaux, et des angles de torsion, en chacun des noeuds de la structure (figure 11.4). Les évolutions des déplacements verticaux des 8 noeuds de la poutre semblent se ramener à deux fois 4 courbes, ce qui indique sans aucun doute une participation majeure dans le premier mode de vibration<sup>36</sup>. Il en est de même pour les déplacements horizontaux ainsi que pour la torsion. De plus, la forme des réponses calculées laisse également supposer une importante contribution quasi-statique (ceci semble évident sur les parties de réponse comprises entre 80s et 120s).

Pour le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}1$ , les réponses statiques et dynamiques sont évaluées séparément puis additionnées en fin de calcul pour obtenir les graphiques de la figure 11.4. Cette manière de procéder peut s'avérer trompeuse dans la mesure où cette représentation semble représenter un signal stationnaire, c'est-à-dire à contenu fréquentiel invariable au

<sup>36</sup> Ceci semble également logique puisque les modes à plus haute fréquence ont été artificiellement amortis

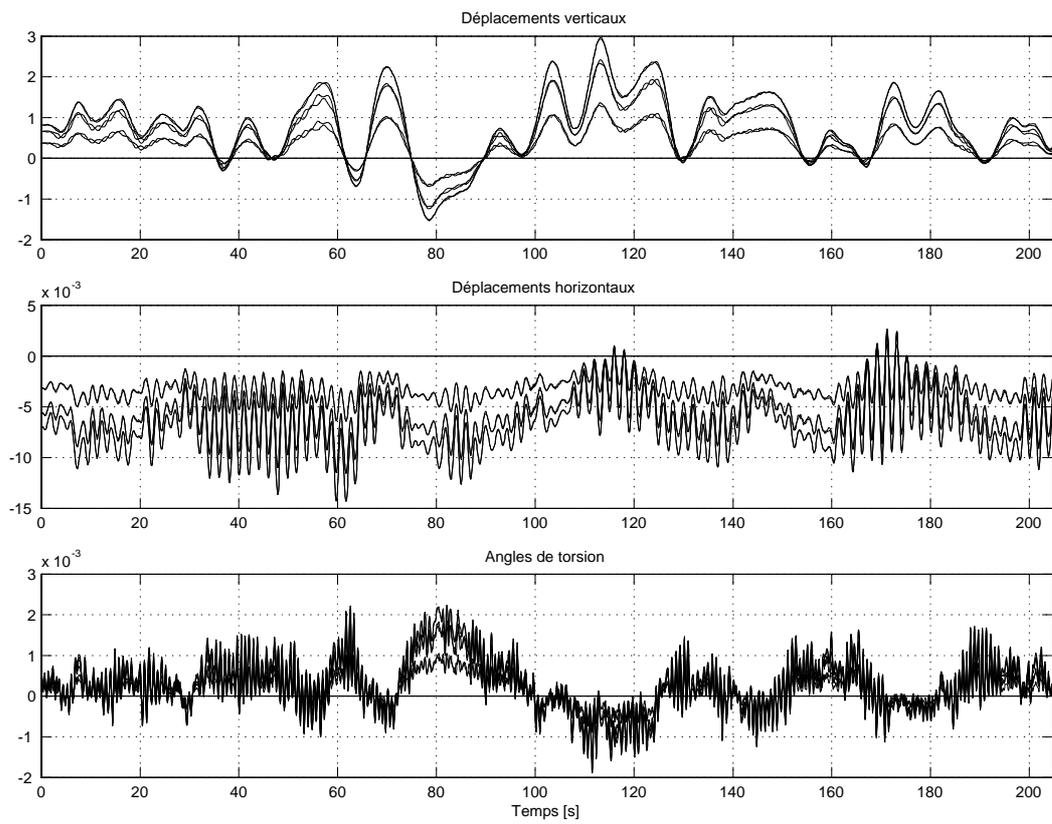


FIGURE 11.4. RÉPONSE EN DÉPLACEMENTS DE LA STRUCTURE SOUS LE PREMIER CHAMP DE TURBULENCE GÉNÉRÉ

cours du temps. Il n'en est cependant pas ainsi; le tableau 11.1 indique une période de mise en régime d'environ 36.2 secondes pour le premier mode de flexion horizontale et cet ordre de grandeur peut en effet être constaté sur la figure 11.4. Le lecteur peut également vérifier ceci pour les vibrations verticales et de torsion.

Les réponses qui viennent d'être commentées sont les déplacements des noeuds de la structure; lors d'une analyse en base modale, ceux-ci sont déduits des évolutions des amplitudes modales. Par brièveté, celles-ci ne sont pas données mais il pourrait cependant être intéressant d'en calculer le contenu fréquentiel (figure 11.5). Pour chacun des huit champs de turbulence générés, les densités spectrales des neuf premiers modes propres sont représentées sur la partie droite de la figure. Un zoom dans le voisinage de l'origine permet de mieux distinguer les différentes courbes. Avoir des courbes semblables mais différentes ne fait à nouveau que mettre en évidence le caractère non ergodique lié à la génération. Une bonne idée de la densité spectrale des amplitudes modales peut être obtenue en prenant une moyenne des courbes calculées pour chacun des champs générés : ces densités spectrales moyennes sont représentées sur le graphique de gauche pour chacun des modes propres conservés. Ces courbes sont à comparer avec les résultats de l'approche stochastique, également représentés sur la gauche, et dont l'allure est évidemment beaucoup plus lisse.

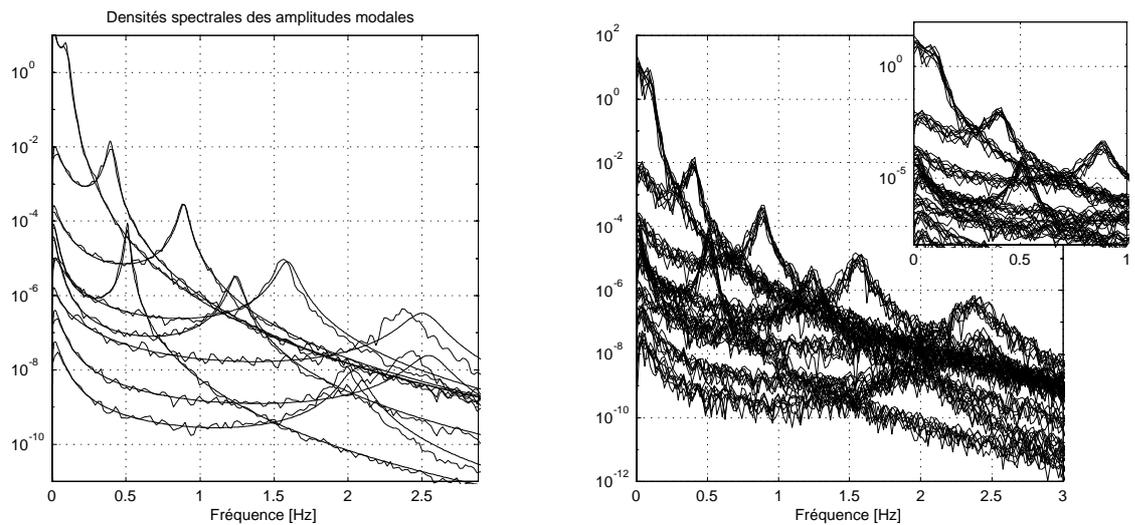


FIGURE 11.5. DENSITÉS SPECTRALES DES AMPLITUDES MODALES - COMPARAISON ENTRE APPROCHES TEMPORELLE ET FRÉQUENTIELLE

La bonne correspondance entre ces deux ensembles de courbes est assez remarquable dans la mesure où ils ont été obtenus à l'aide de deux méthodes complètement différentes :

- dans le domaine fréquentiel, la courbe est obtenue fréquence par fréquence. De la densité spectrale de la vitesse du vent sont successivement calculées les densités spectrales

des pressions sur le tablier, des forces nodales (associées à la discrétisation choisie) et enfin des forces modales. La multiplication de ces dernières par la matrice de transfert en base modale permet alors d'obtenir les densités spectrales représentées à la figure 11.5;

- dans le domaine temporel, un champ de vitesses de vent conforme à la densité spectrale utilisée dans l'approche spectrale est généré. En sont ensuite successivement déduites les évolutions au cours du temps des pressions sur le tablier, des forces nodales et des forces généralisées. Ces forces sont utilisées comme sollicitations d'oscillateurs simples<sup>37</sup>. Les densités spectrales des réponses de chacun de ces oscillateurs peuvent alors être calculées pour pouvoir les comparer aux résultats de l'approche fréquentielle.

La légère discordance qui se manifeste à partir d'environ  $2$  à  $2.5Hz$  était attendue et provient de la précision liée à la discrétisation temporelle. Ce choix a été réalisé afin de pouvoir entreprendre l'analyse avec un pas de temps plus important; cela n'affecte guère les résultats dans la mesure où seuls les modes les plus bas répondent.

Dans une approche fréquentielle, l'étape suivant le calcul des densités spectrales des amplitudes modales consiste à déterminer les densités spectrales des déplacements des noeuds de la structure. Elles sont représentées à la figure 11.6 pour le noeud  $n^{\circ}4$  (le plus proche de la mi-travée). Vu la façon dont elles sont déterminées, il s'agit bien sûr de courbes lisses<sup>38</sup>. D'un autre côté, l'approche temporelle a permis de calculer l'évolution des déplacements en chacun des points de la structure. Les densités spectrales peuvent donc en être déduites; elles sont représentées sur la partie inférieure de la figure 11.6 pour chacun des huit champs de turbulence générés. Tout comme pour les amplitudes modales, il importe d'en prendre la moyenne et de la comparer avec le résultat de l'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel.

La comparaison des deux ensembles de courbes montre que les résultats des analyses dans chacun des domaines coïncident très bien jusqu'à la fréquence maximale choisie.

Pour les applications pratiques, les densités spectrales de puissance sont des grandeurs qui renferment généralement beaucoup trop d'information. On préfère plutôt utiliser des grandeurs statistiques telles la moyenne, l'écart-type ou le carré moyen. Il est important de garder en mémoire que ces grandeurs ne suffisent pas à caractériser complètement la réponse; ainsi, par exemple, si les analyses dans les domaines temporel et fréquentiel fournissent des carrés moyens identiques, l'énergie totale contenue dans le processus est alors bien approchée mais on ne peut cependant conclure à la bonne répartition de cette énergie en fréquence qu'en comparant les densités spectrales.

L'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel est entreprise en séparant les contributions statique (effet du vent moyen) et dynamique<sup>39</sup>. Etant donné que la turbulence du vent est caractérisée par le spectre de Davenport ( $S_u(0) = 0$ ), le carré moyen d'un

<sup>37</sup> Les équations en base modale sont en effet découplées puisque l'amortissement aérodynamique est supposé y être diagonal.

<sup>38</sup> Elles sont calculées sans les contributions intermodales dont on peut vérifier de toute façon qu'elles sont négligeables.

<sup>39</sup> Il ne faut pas confondre avec l'approximation en bruit blanc qui sépare l'intégrale de la densité spectrale

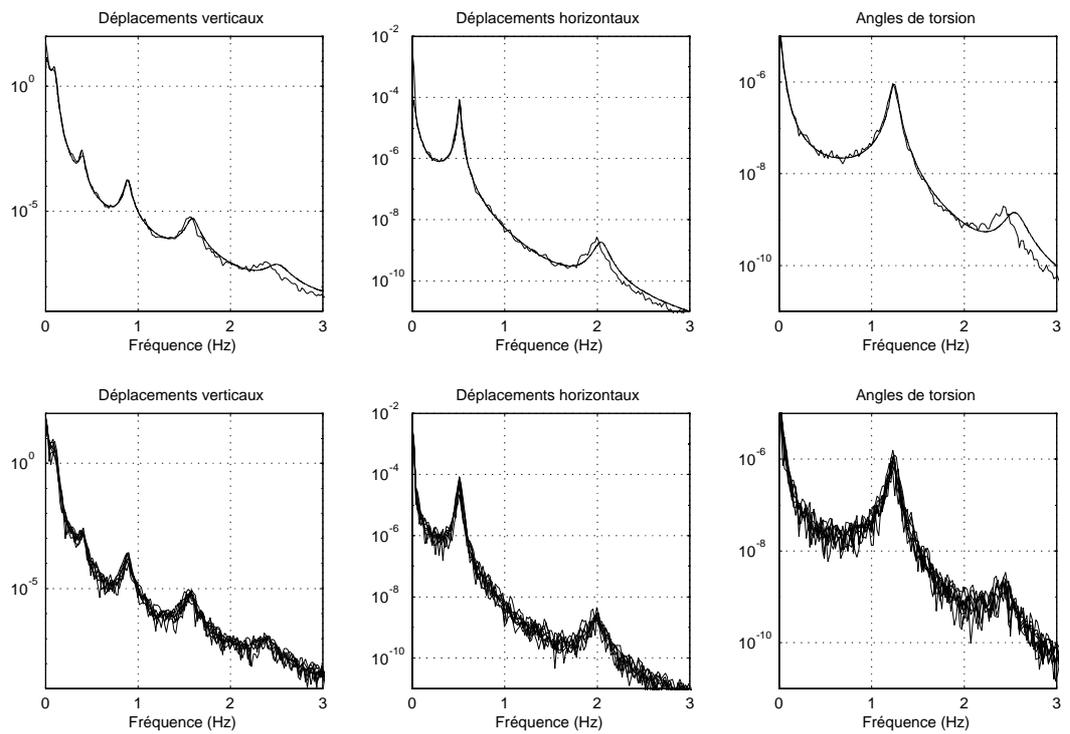


FIGURE 11.6. DENSITÉS SPECTRALES DES DÉPLACEMENTS DU NOEUD  $n^{\circ}4$  - COMPARAISON ENTRE APPROCHES TEMPORELLE ET FRÉQUENTIELLE

processus aléatoire, calculé en intégrant numériquement la densité spectrale, correspond également à la variance, c'est-à-dire au carré de l'écart-type. A condition de considérer un pas de fréquence suffisamment petit et une fréquence de coupure supérieure suffisamment grande, l'écart-type peut être estimé assez précisément (par exemple par la méthode du trapèze).

Dans le domaine temporel, il est préférable, pour une meilleure précision, de ne pas calculer la moyenne et la variance à partir de la densité spectrale mais plutôt à partir du signal lui-même :

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (11.6)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2 \quad (11.7)$$

La démarche retenue et justifiée au chapitre précédent consiste à recourir à une sommation sur l'entièreté du signal, c'est-à-dire phase transitoire incluse.

Puisque les densités spectrales des déplacements obtenues à l'aide d'analyses dans les deux domaines semblent fournir des résultats cohérents (figure 11.6), il devrait en principe en être également ainsi pour les grandeurs statistiques qui en sont dérivées. La figure 11.7 présente ces grandeurs pour chacun des noeuds de la structure.

La première ligne de graphiques concerne les déplacements moyens. Deux courbes sont superposées :

- la première correspond à une analyse statique sous les effets moyens;
- la seconde représente les valeurs moyennes des déplacements, estimées à l'aide d'une formule semblable à (11.6) pour chacun des noeuds.

Ces deux courbes correspondent bien sûr car sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ} 1$ , les effets statiques et dynamiques sont évalués séparément et puis seulement alors ajoutés.

La seconde ligne présente les écarts-types des déplacements. Chaque graphique comporte également deux courbes :

- une courbe sans marque représente le résultat de l'analyse dans le domaine fréquentiel, c'est-à-dire, l'écart-type obtenu par intégration numérique de la densité spectrale;
- une courbe marquée de ronds représente le résultat de l'analyse dans le domaine temporel obtenu à l'aide d'une relation semblable à (11.7). Cette courbe est en réalité obtenue en moyennant sur les huit champs de turbulence générés. En chaque noeud, cette courbe passe par le barycentre des petites croix représentées qui, quant à elles, schématisent les écart-types calculés pour chacun des champs de turbulence. La représentation de ces croix est également importante car elle permet de rendre compte de la dispersion de l'écart-type calculé autour de sa valeur moyenne.

---

en ses contributions quasi-statique et dynamique (résonance)

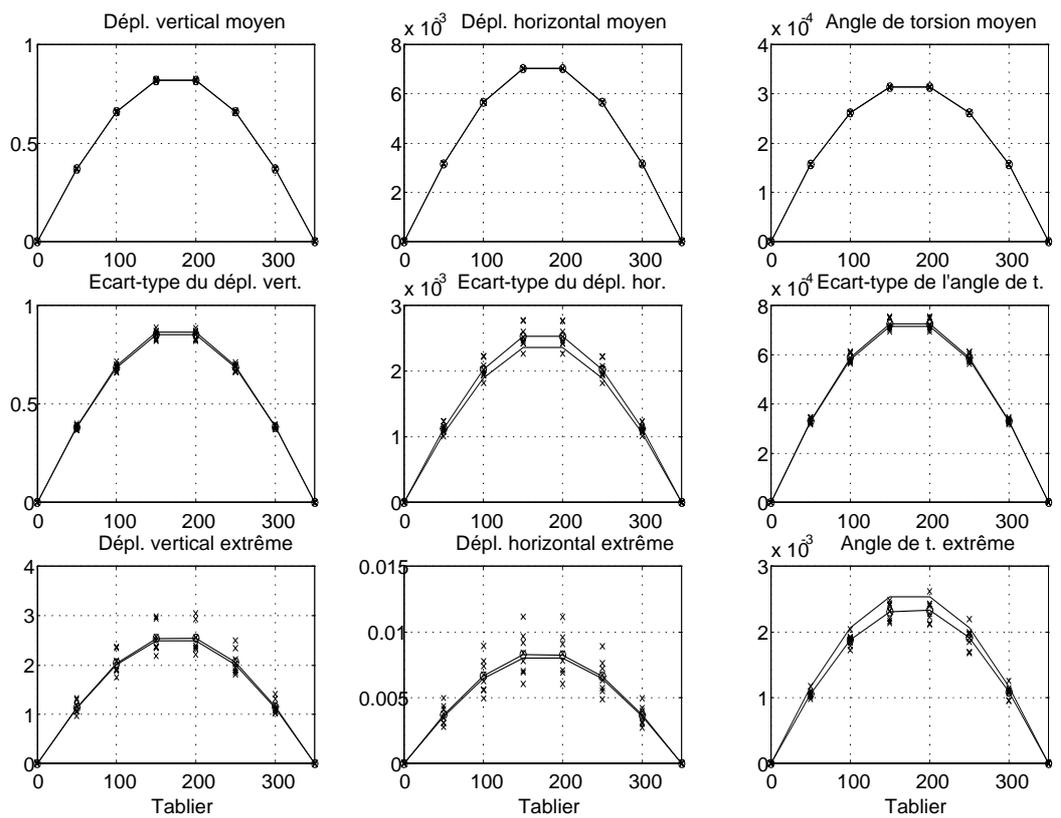


FIGURE 11.7. GRANDEURS STATISTIQUES DES DÉPLACEMENTS VERTICAUX ET HORIZONTAUX ET DE L'ANGLE DE TORSION

Pour le déplacement vertical et l'angle de torsion, il est difficile de faire la distinction entre les deux courbes; les croix témoignent cependant d'une certaine dispersion dans les résultats de l'analyse dans le domaine temporel. Cette dispersion provient du caractère non ergodique ainsi que de la difficulté de donner exactement au champ généré la cohérence voulue. Puisque les deux courbes coïncident tout de même, malgré cette dispersion, ceci prouve que moyenniser sur plusieurs champs de vitesses permet effectivement de s'affranchir de ces deux phénomènes. L'écart-type de la réponse horizontale semble quant à lui moins bien estimé; ceci peut s'expliquer par une plus grande importance, pour ce type de mouvement, de la période de mise en régime (cf tableau 11.1).

La dernière ligne de graphiques représente quant à elle les valeurs extrêmes des déplacements. Ils peuvent à nouveau être déduits d'analyses dans le domaine temporel ou fréquentiel :

- la courbe sans marque représente le déplacement extrême résultant d'une analyse stochastique dans le domaine fréquentiel, et donc de la théorie des valeurs extrêmes présentées au chapitre 3. Le facteur de pointe utilisé est celui du modèle de Poisson avec une période d'observation correspondant à la partie stationnaire de la réponse, c'est-à-dire à la durée de l'analyse pas-à-pas moins la période de mise en régime;
- la courbe marquée de cercles correspond à l'analyse dans le domaine temporel; pour chaque noeud de la structure elle représente le maximum, sur le régime établi, de l'écart entre la réponse complète et la moyenne.

Les comparaisons entre ces deux courbes montrent sur chacun des graphiques que les écarts extrêmes par rapport à la moyenne sont assez bien estimés. Les croix qui repèrent les valeurs extrêmes obtenues pour chacun des champs de vitesses mettent en évidence une importante dispersion autour de la moyenne. Ceci est un phénomène bien connu et témoigne des difficultés rencontrées en pratique pour l'établissement de lois de facteur de pointe (comme la formule de Vanmarcke par exemple, Equ.??)<sup>40</sup>.

Afin de préciser quelque peu les résultats mais surtout les écarts obtenus, les tableaux 11.2 et 11.3 indiquent, pour le noeud n°4, les grandeurs statistiques étudiées. Les valeurs des moyennes, écart-types et extrema peuvent être lues et interprétées plus aisément sur le graphique. Par contre, les grandeurs adimensionnelles suivantes permettent une meilleure compréhension des résultats :

- la dispersion des grandeurs statistiques est importante dans la mesure où il nous semble qu'elle devrait idéalement intervenir comme critère de choix du nombre d'échantillons à utiliser. L'analyse stochastique dans le domaine temporel devrait commencer par se fixer une dispersion acceptable (de l'ordre de 5%) pour les grandeurs représentatives du phénomène étudié : un déplacement et/ou un effort par exemple. L'analyse pas-à-pas débute alors avec un premier ensemble d'échantillons générés, puis un second, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la dispersion (qui ne diminue malheureusement pas monotônement) associée aux écart-types de chaque grandeur représentative choisie descende en-

<sup>40</sup> la dispersion plus importante est également attribuable au fait que les valeurs extrêmes sont estimées sur la partie stabilisée de la réponse uniquement. Ceci est à rapprocher des constatations tirées du chapitre 10.

dessous de la dispersion acceptée. Si une dispersion de l'ordre de 5% est choisie, nous voyons que les huit champs de turbulence choisis suffisent à représenter correctement la flexion verticale (2.8%) et la torsion (3.3%) mais par contre ne sont guère suffisants pour le balancement (7.0%). En ce qui concerne les dispersions des valeurs extrêmes, elles sont assez importantes (de 5.5% à 20%), ce qui rejoint les remarques qui viennent d'être formulées;

- les écarts permettent de quantifier les différences entre les résultats obtenus dans chacun des deux domaines d'analyse. Les valeurs reprises dans le tableau justifient la très bonne représentation des déplacements verticaux (-1.7%) et de la torsion (1.5%). Il ne faut pas perdre de vue que les écarts sont calculés entre la courbe résultant de l'approche fréquentielle et la courbe moyenne résultant de l'approche temporelle. Un écart faible (3.1%) associé à une dispersion élevée (20.2%) comme dans le cas des valeurs extrêmes ne doit donc être interprété qu'avec beaucoup de précaution. On pourrait attribuer cette bonne concordance à "un coup de chance".

	Dépl.vertical	Dépl.horizontal	Angle torsion
Moyenne	0.817	$7.01.10^{-3}$	$3.13.10^{-4}$
Ecart-type	0.864	$2.36.10^{-3}$	$7.14.10^{-4}$
Extremum	2.49	$8.03.10^{-3}$	$2.53.10^{-3}$

Tableau 11.2. : Grandeurs statistiques pour le noeud 4 - Approche fréquentielle

### 11.1.3 Conclusions

L'exemple précédent vient de montrer que les analyses stochastiques dans les domaines fréquentiel et temporel peuvent donner des résultats tout à fait cohérents, tant du point de vue des écart-types calculés que de la répartition fréquentielle des énergies moyennes ou encore des valeurs extrêmes calculées. Les quelques différences existant entre les divers résultats ont pu être expliquées et justifiées à partir des choix préalablement pris.

Une bonne concordance entre les résultats dans les deux domaines ne peut être obtenue qu'au prix d'une moyenne sur plusieurs analyses. Le choix des paramètres utilisés pour la génération ainsi que pour l'analyse requiert une importance capitale. L'exemple présenté ci-dessus vient également de montrer que les critères établis au chapitre précédent permettent de maîtriser correctement les limites, ce qui est très important afin de ne pas augmenter inutilement la taille du problème à résoudre. Nous avons également vu, avec les déplacements horizontaux, qu'une bonne représentativité des résultats ne peut être obtenue qu'en vérifiant chacun des critères établis au chapitre précédent.

## 11.2 Mise en évidence de l'importance de la cohérence

Les dispersions sur les écart-types des déplacements obtenues au paragraphe 11.1 ont essentiellement deux origines : le caractère non ergodique des échantillons générés, ce qui a

	Dépl.vertical			Dépl.horizontal			Angle torsion		
	Moy	Disp	Ecart	Moy	Disp	Ecart	Moy	Disp	Ecart
Moyenne	0.817	0.5%	0.0%	$7.01.10^{-3}$	0%	0%	$3.13.10^{-4}$	0.1%	0%
Ecart-type	0.850	2.8%	-1.7%	$2.53.10^{-3}$	7.0%	7.2%	$7.25.10^{-4}$	3.3%	1.5%
Extremum	2.53	11.3%	1.8%	$8.27.10^{-3}$	20.2%	3.1%	$2.31.10^{-3}$	5.5%	-8.9%

Tableau 11.3. : Grandeurs statistiques pour le noeud 4 - Approche temporelle

déjà été rencontré à l'occasion de l'analyse de l'oscillateur simple (chapitre 10) ainsi que la variabilité dans la cohérence entre les échantillons générés. Cette seconde raison intervient dès que la structure étudiée est chargée en différents points. Elle pourrait jouer un rôle important dans la mesure où donner aux échantillons générés la cohérence voulue n'est guère évident<sup>41</sup>. Le but de ce paragraphe est de montrer que les dispersions obtenues précédemment proviennent principalement de la non ergodicité, ou en d'autres termes, tendent à mettre en évidence la qualité de la cohérence des échantillons générés. Pour ce faire, nous allons étudier, pour différents paramètres de cohérence, les déplacements verticaux au noeud  $n^{\circ}4$  de la structure :

- Cas  $n^{\circ}1$  :  $C_w^y = C_u^y = 8$ . Il s'agit du coefficient de cohérence utilisé jusqu'ici. Les courbes obtenues dans ce cas correspondent donc à celles de la figure 11.6;
- Cas  $n^{\circ}2$  :  $C_w^y = C_u^y = \infty$ . Les vitesses de vent en chacun des noeuds de la structure sont parfaitement indépendantes;
- Cas  $n^{\circ}3$  :  $C_w^y = C_u^y = 0$ . Les pressions de vent sont parfaitement cohérentes en tous les points de la poutre.

La figure 11.8 représente les fonctions de cohérence spatiale associées aux trois cas proposés. Pour tracer ce graphique, la longueur caractéristique  $L/2 = 175m$  a été choisie. L'examen de la figure laisse déjà supposer que les paramètres de cohérence initialement choisis rapprochent davantage la situation d'une incohérence parfaite. Ceci semble logique dans la mesure où la longueur du pont étudié ( $L = 350m$ ) est substantiellement plus grande que la taille d'un tourbillon moyen.

Dans le domaine fréquentiel, l'étude de la structure sous les deux conditions supplémentaires de cohérence est assez simple. Lorsque le coefficient de cohérence est très élevé ( $C_w^y = C_u^y = \infty$ ), il suffit d'imposer que les termes non diagonaux de la matrice de densité spectrale des vitesses de vent soient nuls. Par contre, lorsque l'on désire représenter une cohérence parfaite ( $C_w^y = C_u^y = 0$ ), il suffit d'imposer que ces termes soient égaux à la moyenne géométrique des éléments diagonaux correspondant :

$$S_{u_{i_1 i_2}} = \sqrt{S_{u_{i_1 i_1}} S_{u_{i_2 i_2}}} \quad (11.8)$$

Dans le domaine temporel, lorsque l'on étudie une cohérence parfaite entre les vitesses

<sup>41</sup> Ceci est à rapprocher de la discussion sur la réduction de l'espace modal lors de la génération d'échantillons (Par. 9.3.2).

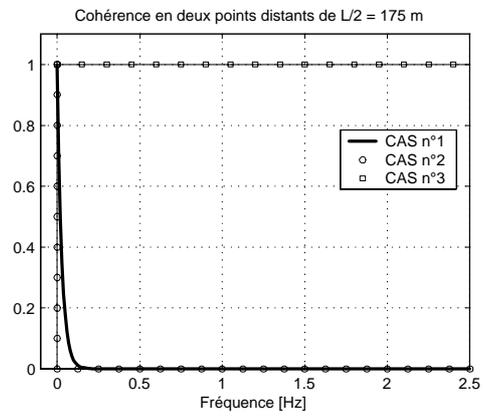


FIGURE 11.8. REPRÉSENTATION DES FONCTIONS DE COHÉRENCES CHOISIES

de vent, il suffit alors de ne plus générer qu'un seul échantillon et de le reporter aux autres noeuds de la structure. Pratiquement, ceci a été réalisé en récupérant les histoires générées à l'occasion de l'exemple précédent puis en remplaçant les vitesses en chacun des noeuds par les vitesses générées pour le noeud  $n^{\circ}1$ . Ce raisonnement est entrepris pour les vitesses de vent longitudinales et verticales séparément de sorte à ne pas ajouter de cohérence entre ces deux directions de turbulence.

Pour l'étude de la structure soumise à un vent parfaitement incohérent, de nouveaux échantillons de vitesses doivent être générés. Comme un coefficient de cohérence infini ne peut pas être traité numériquement par le générateur développé, huit nouveaux champs de vitesses ont été générés avec  $C_w^y = C_u^y = 100$ .

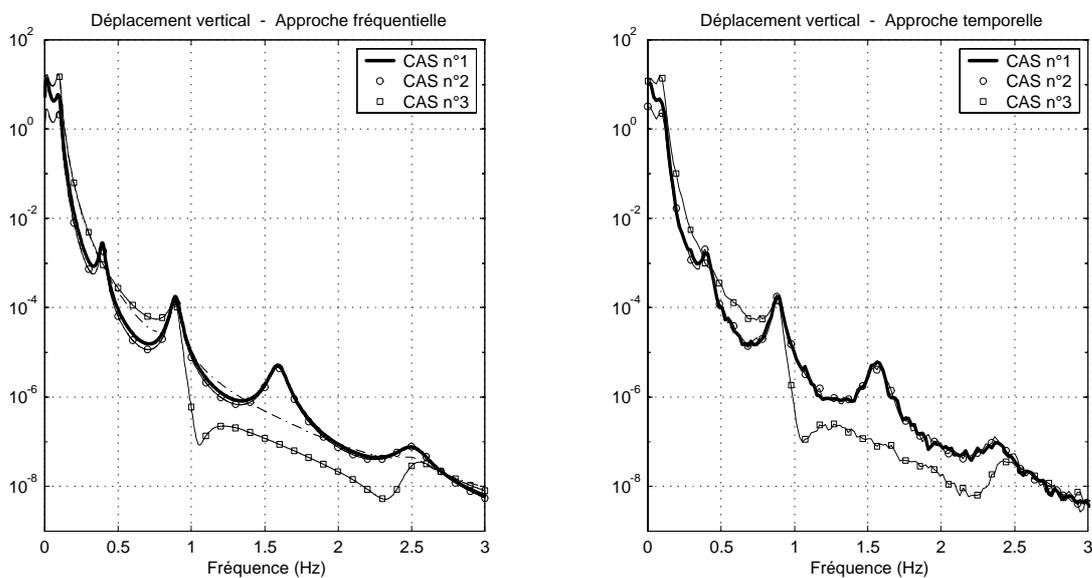


FIGURE 11.9. INFLUENCE DE LA COHÉRENCE DU VENT SUR LE DÉPLACEMENT VERTICAL (NOEUD 4)

La figure 11.9 présente côte-à-côte les résultats des analyses dans chacun des deux domaines. Le graphique de gauche (domaine fréquentiel) permet à nouveau de constater que le niveau de cohérence choisi n'est guère élevé dans la mesure où la courbe en gras ( $C_w^y = C_u^y = 8$ ) est très proche de la courbe marquée de ronds ( $C_w^y = C_u^y = \infty$ ). Conformément à la figure 11.8, ces deux courbes ne diffèrent vraiment que dans le voisinage de l'origine. Cette distinction à première vue ridicule semble pourtant indiquer une différence non négligeable au niveau de l'énergie injectée dans la structure<sup>42</sup>. Ceci est effectivement confirmé sur la figure 11.10 qui indique<sup>43</sup> pour chacune des cohérences étudiées les

<sup>42</sup> La courbe est représentée dans des axes logarithmiques; il y a au moins un facteur 3 entre les niveaux de ces deux courbes au voisinage de l'origine.

<sup>43</sup> Deux ensembles de trois courbes sont représentés sur cette figure. Les résultats de l'analyse temporelle sont donnés en traits pleins; ceux de l'analyse dans le domaine fréquentiel en traits pointillés. On ne peut

écart-types du déplacement vertical au noeud  $n^{\circ}4$ .

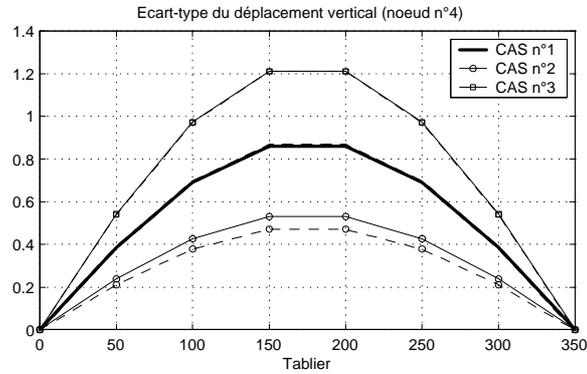


FIGURE 11.10. INFLUENCE DE LA COHÉRENCE DU VENT SUR L'ÉCART-TYPE DU DÉPLACEMENT VERTICAL (NOEUD 4)

A la figure 11.9, la réponse obtenue sous une cohérence parfaite (courbes marquées de carrés) est sensiblement différente des deux autres. On constate tout d'abord que les pics de résonance des modes pairs ont disparu, ce qui est logique puisque ces modes ne peuvent pas être excités par une sollicitation parfaitement cohérente. Ce phénomène a déjà été commenté sur les courbes de la figure 7.4 De plus, le niveau de la réponse est plus important que pour une corrélation moindre puisque le premier mode propre est alors plus excité.

La figure 11.9 présente également une courbe en traits pointillés. Il s'agit de la réponse obtenue à l'aide d'une analyse stochastique en base modale, pour une corrélation parfaite (cas  $n^{\circ}3$ ), et en ne prenant pas en compte les contributions intermodales lors de la recombinaison des réponses modales. C'est donc à ces contributions croisées qu'est attribuable l'écart entre la courbe pointillée et la courbe *cas n°3*. L'importance de ces termes croisés s'explique par le fait qu'à une sollicitation nodale fortement corrélée sont associées des forces modales également corrélées. Les réponses dans chacun des modes propres ne sont plus indépendantes l'une de l'autre et il convient de considérer leurs interactions pour obtenir de meilleurs résultats. Ce phénomène n'est pas une conséquence du couplage dans l'amortissement aérodynamique; l'exemple montre en effet qu'il se produit également lorsque la matrice de transfert modale est diagonale. Cette distinction n'apparaît pas pour les autres niveaux de corrélation car, dans ces cas, les forces modales ne sont pas suffisamment corrélées pour que le phénomène puisse apparaître.

Les résultats de l'analyse dans le domaine temporel sont toujours un peu plus saccadés ; les courbes présentées ont cependant une allure assez lisse puisqu'elles représentent des moyennes de densités spectrales calculées sur huit ensembles d'échantillons de vitesses. Les courbes obtenues coïncident assez remarquablement avec celles de la partie gauche, obtenues dans le domaine fréquentiel. La courbe correspondant au cas  $n^{\circ}3$  représente cor-

vraiment observer de différence entre ces deux domaines que pour le cas  $n^{\circ}2$ . Les courbes en trait gras (presque superposées) sont identiques à celles de la figure 11.7.

rectement le décrochage entre  $1Hz$  et  $2.5Hz$  associé aux contributions intermodales. La prise en compte de ces termes ne se pose pas pour une superposition modale puisqu'ils sont automatiquement inclus lors de l'utilisation de la relation (4.3).

La comparaison des différentes courbes obtenues et la bonne coïncidence des réponses venant des domaines d'aux sont intéressantes mais d'une moindre utilité dans le cas d'une structure si simple que la réponse ne concerne essentiellement qu'un seul mode propre par direction de vibration. La figure 11.10 peut néanmoins conclure favorablement quant à la qualité de la cohérence générée; une faible variation de la cohérence spatiale modifie assez bien la forme de la densité spectrale dans le voisinage de l'origine et donc également l'écart-type du déplacement étudié. Les faibles écarts et dispersions sur les écart-types obtenus au paragraphe précédent indiquent donc que les cohérences entre échantillons générés semblent être assez bien représentées.

### 11.3 Comparaison des niveaux d'hypothèses $n^{\circ}1$ et $n^{\circ}2$

Lorsque le comportement non linéaire du chargement éolien doit être pris en considération, il n'est plus possible de séparer les effets du vent en les trois contributions mentionnées ci-avant, à savoir : les effets moyens, instationnaires et turbulents. Nous allons alors regrouper dès à présent ces trois effets dans les charges dynamiques appliquées à la structure. Toutes les hypothèses formulées pour l'analyse dans le domaine fréquentiel restent toujours d'application et seront seulement levées petit à petit dans les paragraphes suivants. L'analyse réalisée est donc toujours une analyse dynamique linéaire. Ceci constitue le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}2$ .

Les courbes de la figure 11.11 représentent les soixante premières secondes des déplacements en chacun des noeuds de la poutre. Le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}1$  est indiqué par les traits continus : nous avons déjà pu constater que la valeur à l'origine constitue la moyenne du déplacement pour chaque noeud puisque la réponse statique moyenne a été ajoutée à la fin de l'analyse dynamique. Les courbes en traits discontinus correspondent au niveau d'hypothèses  $n^{\circ}2$  : il est alors logique d'y retrouver des déplacements et vitesses nuls à l'instant initial. Cette figure permet à nouveau de donner une idée de la période de mise en régime puisque l'on peut constater qu'après un certain temps, les déplacements calculés à l'aide des deux méthodes deviennent confondus.

Les caractéristiques statistiques de la réponse sont estimées sur l'entièreté de la réponse. Il faut donc s'attendre à une légère modification des moyennes et écart-types calculés. Cette différence ne peut cependant être que mineure dans la mesure où la durée des échantillons générés et calculés a été réglée de sorte que la phase transitoire soit suffisamment courte. Les graphiques de la figure 11.12 vont en ce sens : il est en effet difficile de les différencier de ceux de la figure 11.7 obtenus sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}1$ . Le tableau 11.4 complète, en terme d'écart-types, les résultats de l'analyse sous ce niveau d'hypothèses  $n^{\circ}2$ . On y constate effectivement que, pour les déplacements verticaux ainsi que pour l'angle de torsion, les résultats sont presque identiques à ceux obtenus sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}1$  (tableau 11.3). En ce qui concerne les vibrations horizontales du tablier, les résultats sont

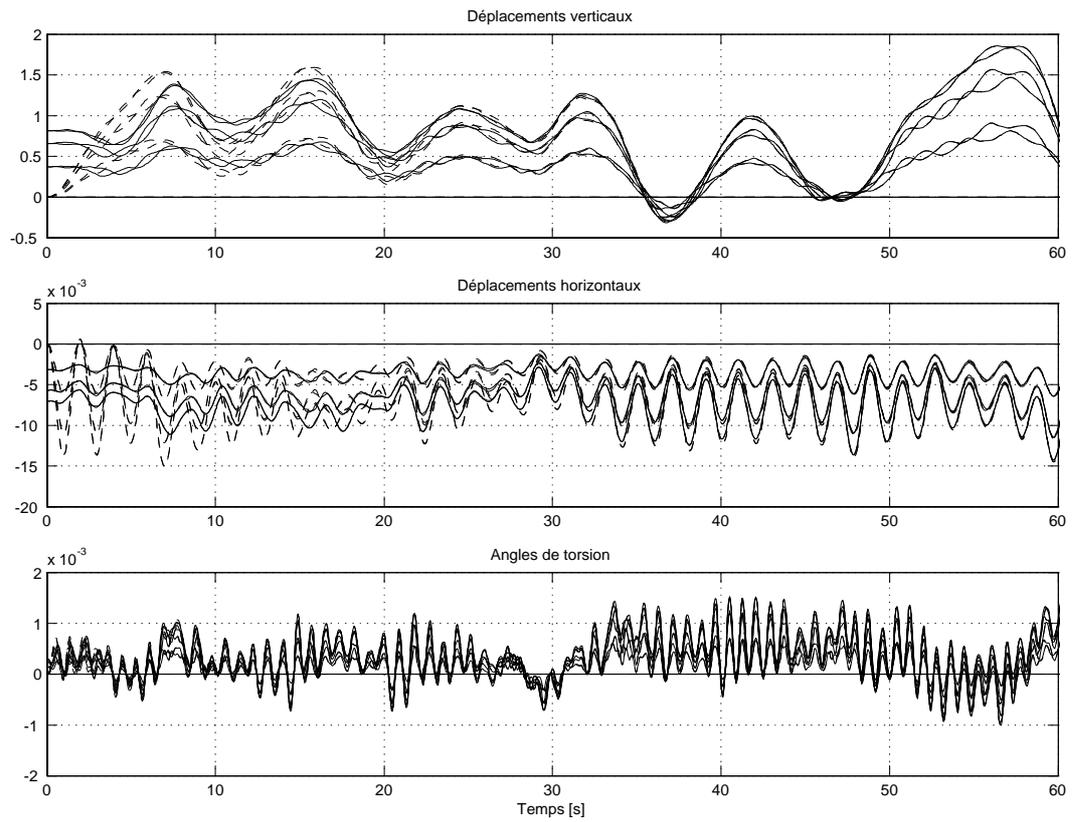


FIGURE 11.11. COMPARAISON DES DÉPLACEMENTS CALCULÉS SOUS LES NIVEAUX D'HYPOTHÈSES  $n^{\circ}1$  (TRAITS CONTINUS) ET  $n^{\circ}2$  (TRAITS DISCONTINUS)

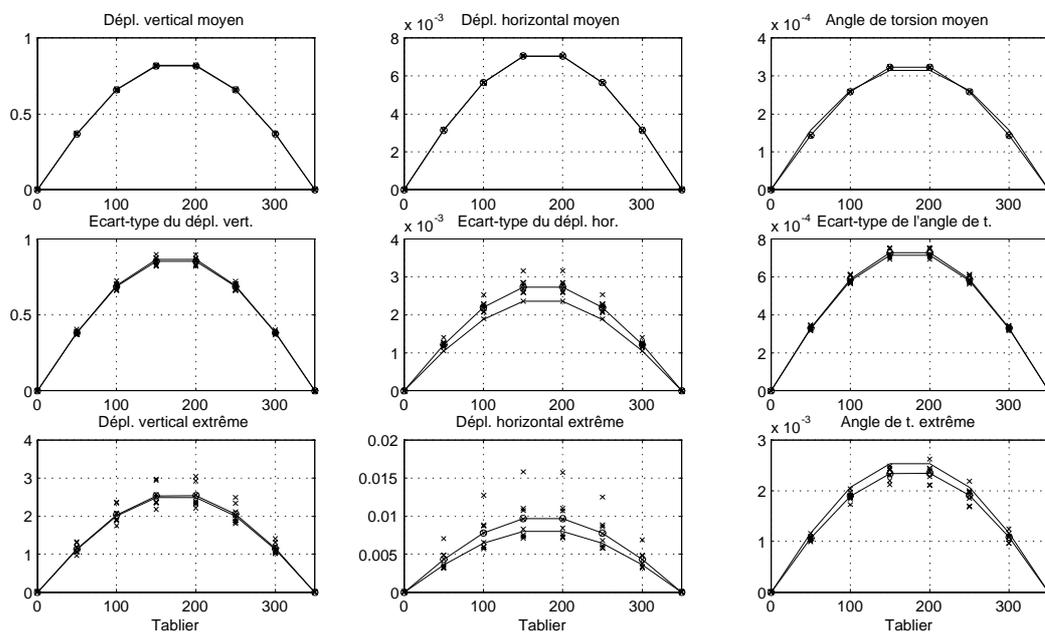


FIGURE 11.12. GRANDEURS STATISTIQUES DES DÉPLACEMENTS VERTICAUX ET HORIZONTAUX ET DE L'ANGLE DE TORSION - NIVEAU D'HYPOTHÈSES  $n^{\circ}2$

sensiblement différents. Ceci montre à nouveau que la période de mise en régime pour ce mode de vibration peu amorti est trop importante par rapport à la durée étudiée.

## 11.4 Analyse stochastique non linéaire

### 11.4.1 Schéma de résolution non linéaire

Maintenant que nous nous sommes replacés vis-à-vis de l'analyse dans le domaine fréquentiel, les quelques hypothèses concernant la linéarisation des forces aérodynamiques vont pouvoir être successivement levées. Les analyses dynamiques entreprises à partir de maintenant sont donc non linéaires. Bien que ce type d'analyse ne soit généralement pas compatible avec une superposition modale, l'analyse sera néanmoins menée en base modale<sup>44</sup>. Dans le cadre du problème étudié, les non-linéarités ne concernent que le chargement extérieur et non pas la structure. Il est donc important de remarquer que, bien que le problème soit non linéaire, les pics de résonance se produiront toujours pour les mêmes fréquences<sup>45</sup>.

<sup>44</sup> Superposition modale et résolution en base modale sont deux choses tout à fait distinctes. La première est une méthode de résolution complète, basée sur le principe de superposition et donc limitée aux problèmes non linéaires. Quant à la seconde, il ne s'agit que d'un changement de variables et rien n'empêche d'y recourir, même pour une analyse statique, ou dynamique non linéaire.

<sup>45</sup> Lorsque l'hypothèse des petites rotations n'est pas formulée, le chargement fluide peut modifier les

	Dépl.vertical			Dépl.horizontal			Angle torsion		
	Moy	Disp	Ecart	Moy	Disp	Ecart	Moy	Disp	Ecart
Moyenne	0.815	0.5%	-0.3%	$7.03 \cdot 10^{-3}$	0.0%	0.3%	$3.22 \cdot 10^{-4}$	0.1%	2.6%
Ecart-type	0.853	3.2%	-1.3%	$2.74 \cdot 10^{-3}$	8.5%	16.1%	$7.25 \cdot 10^{-4}$	3.3%	1.6%
Extremum	2.53	11.3%	1.8%	$9.69 \cdot 10^{-3}$	30.1%	20.7%	$2.34 \cdot 10^{-3}$	5.3%	-7.6%

Tableau 11.4. : Grandeurs statistiques pour le noeud 4 - Approche temporelle

L'avantage du passage en base modale repose sur la réduction de la taille du système à résoudre. Son utilisation permet ainsi d'appliquer la méthode développée au cas de structures très importantes.

La figure 11.13 présente schématiquement la méthode de résolution programmée. L'origine des itérations à l'intérieur du pas de temps provient du fait que l'algorithme de résolution choisi (Newmark) discrétise l'équation du mouvement à la fin du pas de temps (en  $t + \Delta t$ ). L'algorithme nécessite la connaissance des efforts à la fin du pas de temps. Or, ils sont inconnus a priori puisqu'ils dépendent des vitesses à la fin du pas de temps. Même dans la version linéaire, une démarche rigoureuse nécessite donc des itérations à l'intérieur des pas de temps. Afin de retrouver cette rigueur laissée de côté lors des études dynamiques linéaires, nous travaillerons dorénavant avec des itérés : les déplacements  $y(t + \Delta t)$ , vitesses  $\dot{y}(t + \Delta t)$  et accélérations  $\ddot{y}(t + \Delta t)$  des noeuds de la structure à la fin du pas de temps.

Pour commencer, nous supposons qu'ils sont égaux aux déplacements, vitesses et accélérations au début du pas de temps ( $y(t + \Delta t) = x(t), \dots$ ). Ceci permet d'obtenir une première estimation des forces nodales à la fin du pas de temps ( $F(t + \Delta t)$ ). Selon le niveau d'hypothèses choisi, ces forces nodales seront estimées à l'aide de l'une ou l'autre des formules présentées au chapitre 6 concernant la linéarisation des efforts aérodynamiques. Pour simplifier l'analyse de la structure, il convient alors de projeter cette équation dans la base des modes propres ( $f_k(t + \Delta t)$ ) et de résoudre ensuite chacune des équations découplées afin d'obtenir les amplitudes modales à la fin du pas de temps. Celles-ci permettent alors de calculer les déplacements  $x(t + \Delta t)$ , vitesses  $\dot{x}(t + \Delta t)$  et accélérations  $\ddot{x}(t + \Delta t)$  à la fin du pas de temps. Une comparaison de ces valeurs avec les itérés permet de juger quant à la convergence de l'algorithme. Si la convergence n'est pas atteinte, les itérés prennent pour valeurs les déplacements, vitesses et accélérations qui viennent d'être obtenus et la boucle recommence. Lorsque la convergence est atteinte, le calcul peut continuer avec le pas de temps suivant et poursuivre ainsi son cours jusqu'à avoir épuisé tous les pas de temps demandés.

Dans cette section, nous travaillerons sans itérations à l'intérieur du pas de temps. Ce choix est justifié d'une part par la simplicité qu'il convient de conférer au problème traité et d'autre part par le fait que ces itérations ne tendent qu'à reproduire correctement l'influence des vitesses structurelles sur le chargement; celles-ci n'occupent cependant qu'un place

---

raideurs (et donc fréquences propres) structurelles tout comme il modifie, mais ce dans tous les cas, l'amortissement structurel. L'ordre de grandeur des angles de torsion du tablier est tel que ces modifications sont ici insignifiantes. Lors d'une approche aéroélastique (non présentée dans ce document), les modifications de raideur et d'amortissement sont toutes les deux prises en compte.

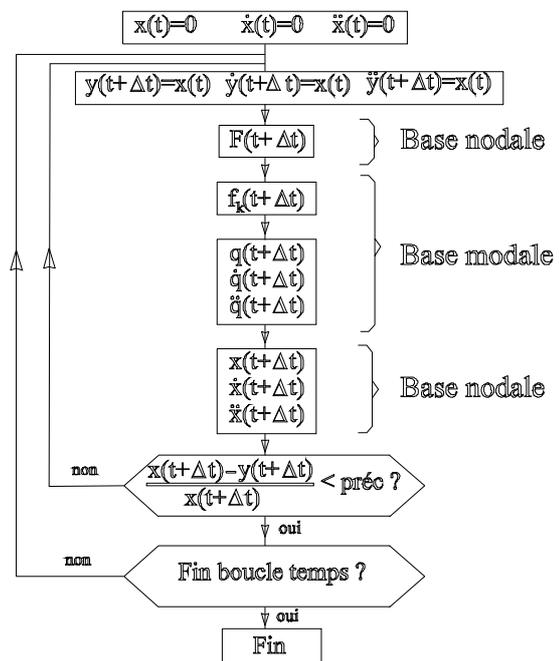


FIGURE 11.13. ORGANIGRAMME DE LA MÉTHODE D'ANALYSE

souvent minimale, vis-à-vis des termes liés à la turbulence. En outre, le pas de temps utilisé pour la résolution est tellement petit vis-à-vis des périodes propres de vibration que l'on devine que l'utilisation d'une méthode à pas simple ne permette pas une dérive trop importante de la réponse. Ceci sera de tout façon investigué plus précisément dans la suite à l'occasion de l'étude non linéaire d'un oscillateur simple. Il convient d'ailleurs de mentionner dès à présent que, malgré les apparences, la structure étudiée est assez complexe, du moins pour mettre en évidence des principes de bases et des caractéristiques du chargement non linéaire. Après avoir présenté quelques résultats obtenus pour la poutre sur deux appuis, nous reviendrons donc au problème plus simple de l'oscillateur à un degré de liberté.

#### 11.4.2 Niveau d'hypothèses $n^{\circ}3$ et $n^{\circ}4$

Les niveaux d'hypothèses  $n^{\circ}3$  et  $n^{\circ}4$  consistent à soulever les deux dernières hypothèses formulées au chapitre 6 :

- l'hypothèse supplémentaire de turbulence et de vitesse verticale d'ordre 2 permettant d'éliminer les derniers termes quadratiques n'est cette fois plus formulée : les termes de couplage entre les mouvements dans les différents plans sont conservés;
- l'hypothèse des petites rotations est également levée. La forme des équations (6.9) montre que ceci revient à ajouter une raideur aérodynamique (négative)<sup>46</sup> liée à la torsion du tablier non seulement pour les modes de torsion mais également pour les modes de flexion et de balancement.

L'ordre de grandeur des rotations du tablier est tellement petit que les niveaux d'hypothèses  $n^{\circ}3$  et  $n^{\circ}4$  fournissent les mêmes résultats. En effet, on imagine aisément que les quelques milliradians de torsion du tablier sont négligeables vis-à-vis de l'angle d'incidence propre à la turbulence du vent. Cette constatation est valable pour l'exemple simple traité mais aussi pour les tabliers de ponts réels qui doivent tout de même assurer des états limites de service.

La seule différence que nous allons constater est donc attribuable aux termes quadratiques. Ces termes correspondent aux produits croisés entre les turbulences dans les deux directions principales ainsi qu'entre la turbulence longitudinale et les vitesses structurelles. Ils occupent bien sûr une place d'autant plus importante que la turbulence considérée est intense, c'est-à-dire que l'écart-type de la turbulence est grand vis-à-vis de la vitesse moyenne du vent. Afin de mettre en évidence des différences plus importantes entre les résultats d'analyses basées sur les différents niveaux d'hypothèses, nous allons volontairement travailler avec une intensité de turbulence plus importante<sup>47</sup> :

$$\bar{U} = 20m/s \quad \sigma_u = \sigma_w = 5m/s \quad (11.9)$$

$$\rightarrow I_u = I_w = 25\% \quad (11.10)$$

<sup>46</sup> Ce terme peut être responsable d'une instabilité aérodynamique : la divergence en torsion

<sup>47</sup> Pratiquement, les mêmes échantillons de vitesses que ceux générés précédemment sont utilisés. Ils sont simplement mis à l'échelle de manière à leur conférer la bonne énergie.

L'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel fournit, par intégration numérique des densités spectrales, des résultats de référence auxquels seront comparés les écart-types obtenus par les analyses dans le domaine temporel sous les différents niveaux d'hypothèses. Ces résultats sont résumés pour les déplacements du noeud  $n^{\circ}4$  dans le tableau 11.5. Ils sont également représentés par des courbes en trait plein sur les figures 11.14, 11.16 et 11.18.

	Dépl.vertical	Dépl.horizontal	Angle torsion
Moyenne	0.817	$7.01.10^{-3}$	$3.13.10^{-4}$
Ecart-type	2.27	$7.15.10^{-3}$	$1.88.10^{-3}$
Extremum	6.42	$2.42.10^{-2}$	$6.61.10^{-3}$

Tableau 11.5. : Grandeurs statistiques pour le noeud 4 - Valeurs de références pour comparaison avec les différents niveaux d'hypothèses

Conformément à ce qui a été constaté au paragraphe précédent, on remarque également que, sous ce niveau de sollicitations, les résultats fournis par une analyse pas-à-pas sous le niveau d'hypothèse  $n^{\circ}2$  sont très proches de ceux fournis par une analyse stochastique dans le domaine fréquentiel (Tab. 11.6, page 246) : pour le déplacement vertical et l'angle de torsion, la correspondance est très bonne; quant à l'écart constaté pour le déplacement horizontal, son origine a été expliquée précédemment. Les écart-types des déplacements sous ce niveau d'hypothèses sont également repris pour référence sur les figures 11.14, 11.16 et 11.18 (courbes marquées par les carrés). Pour le premier ensemble d'échantillons de vitesses générés, les évolutions des déplacements au cours du temps sont également tracés pour référence sur les figures 11.15, 11.17 et 11.19.

Revenons maintenant aux résultats qui nous intéressent : ceux de l'analyse sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}3$ . La figure 11.15 représente en trait continu les déplacements du noeud  $n^{\circ}4$  sous ce niveau d'hypothèses. Ce graphique représente seulement cinquante secondes de la réponse calculée pour le premier ensemble d'échantillons, c'est-à-dire environ un quart de la réponse calculée pour cet ensemble d'échantillons, soit encore un trente-deuxième du signal utilisé pour l'estimation des grandeurs statistiques. Ce graphique permet de donner un bonne idée générale du comportement obtenu pour chacun des déplacements mais il serait délicat d'en interpréter par exemple les grandeurs extrêmes.

L'examen de ce graphique montre immédiatement la correspondance d'occurrence des maxima et minima entre les deux niveaux d'hypothèses. Ceci ne fait que traduire l'invariance des fréquences propres d'un cas à l'autre. Manifestement, les amplitudes des variations semblent plus importantes sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}3$ . D'un côté, ceci semble assez logique car des termes d'excitation supplémentaires ont été ajoutés. Ils correspondent aux termes croisés entre les deux directions principales de turbulence<sup>48</sup>. Bien que ces termes soient non corrélés, il semble néanmoins que cela puisse tout de même donner une légère différence.

La figure 11.14 représente les moyennes, écart-types et valeurs extrêmes des déplace-

<sup>48</sup> Nous verrons dans la suite que ces termes ne sont pas les seuls responsables d'une variance accrue.

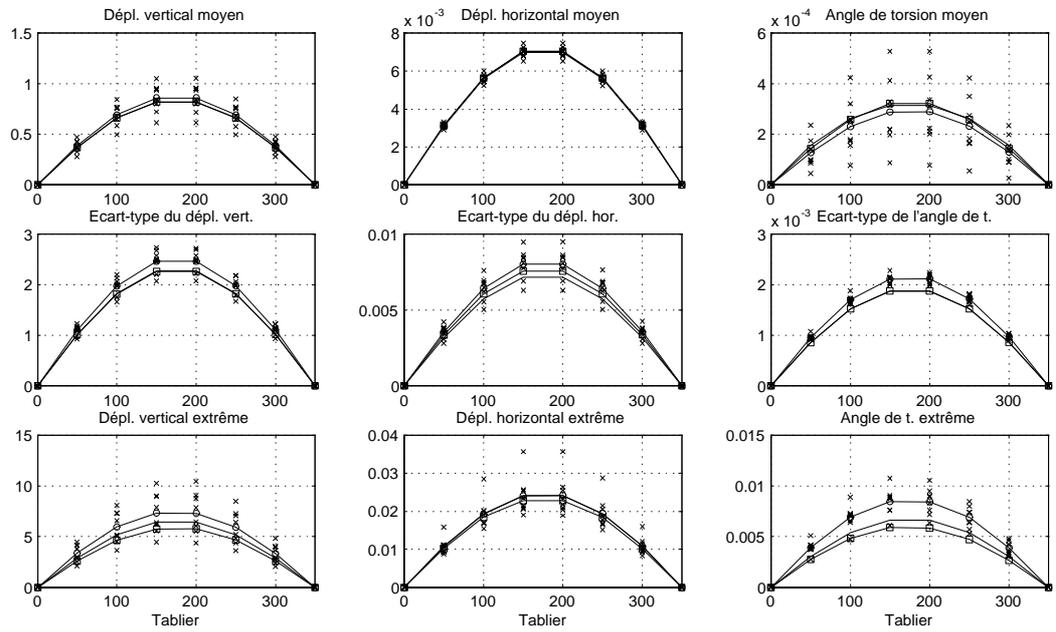


FIGURE 11.14. GRANDEURS STATISTIQUES DES DÉPLACEMENTS VERTICAUX ET HORIZONTAUX ET DE L'ANGLES DE TORSION - NIVEAU D'HYPOTHÈSES  $n^{\circ}3$  [RONDS : Niv. $n^{\circ}3$  / CARRÉS : Niv. $n^{\circ}2$ ]

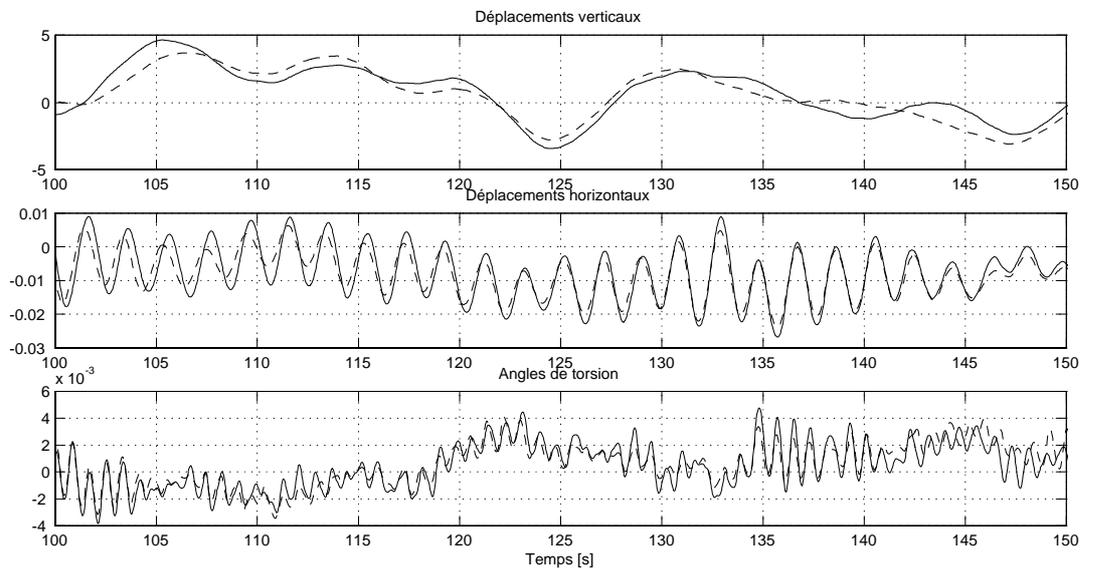


FIGURE 11.15. DÉPLACEMENTS DU NOEUD  $n^{\circ}4$  - COMPARAISON DES NIVEAUX D'HYPOTHÈSES  $n^{\circ}2$  ET  $n^{\circ}3$

ments dans chacune des directions de vibration. Les grandeurs obtenues par l'approche temporelle sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}3$  sont marquées à l'aide de ronds. A nouveau, chaque courbe passe en chaque noeud par le barycentre des petites croix qui représentent les résultats pour chacun des ensembles d'échantillons. Les grandeurs numériques caractéristiques de ces courbes sont également reprises au tableau 11.6 (p. 246). Pour faciliter la comparaison avec le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}2$ , les résultats obtenus sous ce niveau sont également représentés (courbes marquées de carrés).

La première ligne de la figure 11.14 concerne les moyennes des déplacements verticaux et horizontaux, ainsi que de l'angle de torsion. Rien qu'à l'examen des dispersions de ces valeurs moyennes, on devine immédiatement que le problème étudié n'est plus aussi simple que précédemment : on passe d'une dispersion de 2.4% à 16.5% pour le déplacement vertical et de 0.1% à 47.8% pour l'angle de torsion ! Il semblerait alors que huit ensembles d'échantillons ne suffisent pas à représenter correctement la moyenne des déplacements, c'est-à-dire à s'affranchir, pour ces grandeurs, de la non-ergodicité. Malgré cette grande dispersion dans les valeurs obtenues, moyenner sur les huit ensembles permet d'obtenir une moyenne statistique assez proche de celle donnée par le niveau d'hypothèse  $n^{\circ}2$ , mais est-il bien judicieux de vouloir tenter de déduire quelque correspondance lorsque le taux de dispersion est si haut ?

La seconde ligne de la figure 11.14 donne l'évolution le long du tablier des écart-types des déplacements. Conformément à ce qui a été constaté sur la figure 11.15, la prise en compte des termes quadratiques augmente manifestement les écart-types des déplacements. Cette constatation est valable pour les trois déplacements. Par rapport au niveau d'hypothèses  $n^{\circ}2$  (courbes marquées de carrés), l'augmentation est comprise entre 5.9% et 12.2%. Pour les écart-types, les dispersions ont un ordre de grandeur tout à fait acceptable et l'on peut alors conclure à la représentativité des écarts obtenus.

En passant du niveau d'hypothèses  $n^{\circ}2$  au niveau  $n^{\circ}3$ , les dispersions des valeurs extrémales ont augmenté : dans le premier cas, elles étaient comprises entre 10.5% et 16.1%, contre 16.2% à 27.3% dans le second. Nous avons déjà exprimé l'habituelle importance de ces paramètres de dispersion, même dans les cas les plus simples. Malgré ces dispersions manifestement plus importantes, on peut cependant constater une certaine augmentation des valeurs extrémales, ce que l'on avait également pu deviner le la figure 11.15. Le tableau 11.6 suggère un augmentation de 27.4% pour le déplacement vertical et de 43.6% pour l'angle de torsion !

De l'analyse que vient d'être présentée, on peut retenir que les termes quadratiques sont responsables d'une augmentation de l'écart-type (et donc aussi des valeurs extrêmes<sup>49</sup>) ainsi que de la dispersion des grandeurs statistiques autour de leur moyenne. Il semble donc que plus d'échantillons soient nécessaires pour s'affranchir de la non-ergodicité. Les conclusions qui viennent d'être tirées concernent un niveau de turbulence assez important ( $I_u = I_w = 25\%$ ) et il est évident, comme cela a été introduit, que l'écart sera d'autant plus marqué que l'écoulement du fluide est turbulent. Dans le cas étudié, la différence est

<sup>49</sup> à prendre avec précaution car en non linéaire, écart-types et valeurs extrêmes ne sont plus reliés par un facteur de pointe facilement estimable. Il n'est pas rare d'obtenir pour des processus non gaussiens des facteurs de pointe plus grands que 20.

pourtant assez importante et ne devrait pas être négligée.

### 11.4.3 Niveau d'hypothèses $n^{\circ}5$

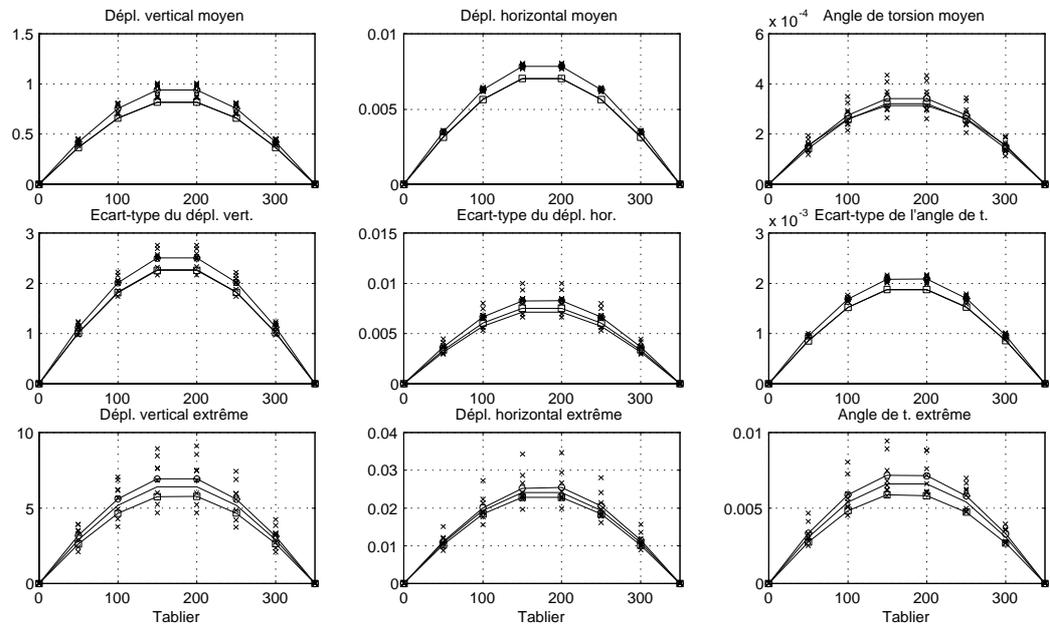


FIGURE 11.16. GRANDEURS STATISTIQUES DES DÉPLACEMENTS VERTICAUX ET HORIZONTAUX ET DE L'ANGLES DE TORSION - NIVEAU D'HYPOTHÈSES  $n^{\circ}5$  [RONDS : NIV.  $n^{\circ}5$  / CARRÉS : NIV.  $n^{\circ}2$ ]

A ce niveau d'hypothèses, la norme au carré de la vitesse du vent conserve l'entièreté de ses termes. Conformément à l'équation (6.3), toute une série de termes sont donc maintenant ajoutés. De plus, l'angle d'incidence de vent prend maintenant une expression non linéaire. La figure 11.17 indique les déplacements du noeud  $n^{\circ}4$  sous ce niveau d'hypothèses. Les courbes en traits discontinus représentent toujours les résultats sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}2$ . La comparaison de ces deux groupes de courbes permet de relativiser largement les conclusions tirées au paragraphe précédent. On peut en effet constater sur ce graphique que les apports de la nouvelle approche tendent à contrecarrer les excès mis en évidence au niveau d'hypothèses  $n^{\circ}3$ .

La figure 11.16 présente les principales caractéristiques statistiques dont les valeurs importantes sont reprises au tableau 11.6. Il apparaît immédiatement que la dispersion de ces grandeurs a diminué de manière générale par rapport au cas précédent. Cet indicateur de fiabilité semble donc montrer que huit échantillons redeviennent à nouveau suffisant pour caractériser les grandeurs statistiques mises en jeu. Cette fois, les résultats concernant la moyenne peuvent être interprétés : on peut inévitablement conclure à son augmentation, et ce, pour chacun des trois types de mouvement. Ceci s'explique par le fait qu'aux trois ter-

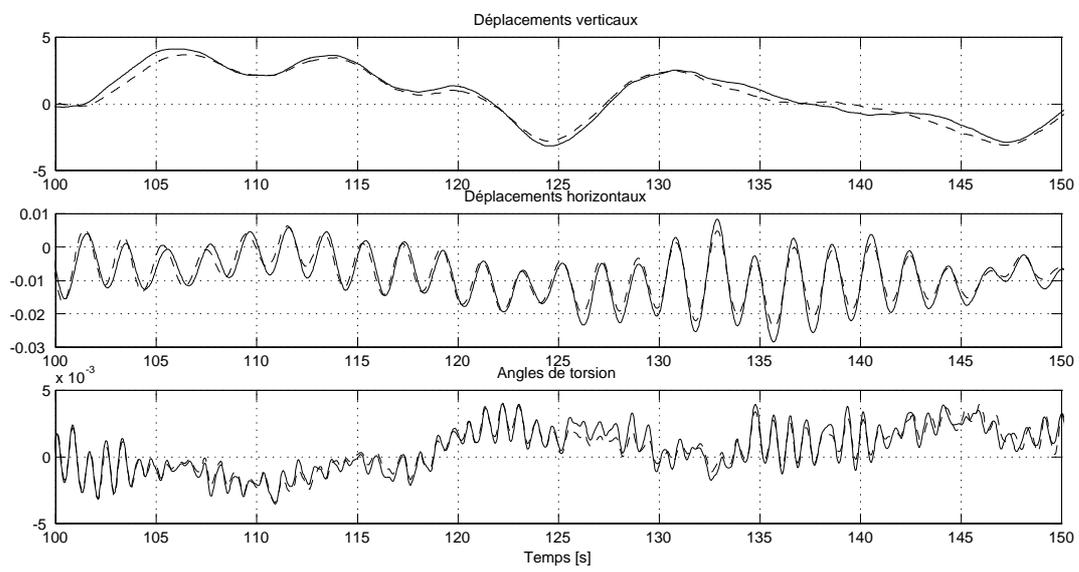


FIGURE 11.17. DÉPLACEMENTS DU NOEUD  $n^{\circ}4$  - COMPARAISON DES NIVEAUX D'HYPOTHÈSES  $n^{\circ}2$  ET  $n^{\circ}5$

mes de vitesse conservés sont venus s'adjoindre des termes en  $u^2$ ,  $w^2$ ,  $\dot{p}^2$ ,  $\dot{h}^2$  et  $\dot{\alpha}^2$ . Ces termes sont toujours positifs et tendent à ajouter aux efforts appliqués une contribution qui certes peut s'annuler par moment mais qui, quoi qu'il en soit, agira toujours dans le même sens. Il est donc logique de s'attendre à une moyenne plus grande que celle calculée à l'aide des efforts statiques moyens. Cette constatation ne ressort pas de manière évidente de la figure 11.17; il faudrait une représentation complète de la réponse pour mieux s'en rendre compte. Les extrema que l'on peut calculer avec la nouvelle méthode sont compris entre ceux fournis par les deux précédentes car d'une part les termes quadratiques croisés viennent augmenter les valeurs extrêmes (comme ci-avant) mais d'autre part, la multitude de termes ajoutés dans l'expression des efforts semble de modérer cet effet.

Nous n'allons pas nous étendre davantage sur l'interprétation de résultats qui sont trop particuliers à l'exemple traité; nous allons bientôt revenir à un cas de figure plus simple afin de pouvoir mieux interpréter les phénomènes mis en jeu. De ce niveau d'hypothèses, nous pouvons cependant dégager, par rapport au niveau d'hypothèse  $n^{\circ}2$ , une augmentation du niveau moyen et des extrema (entre 10% et 20%).

#### 11.4.4 Niveau d'hypothèses $n^{\circ}6$

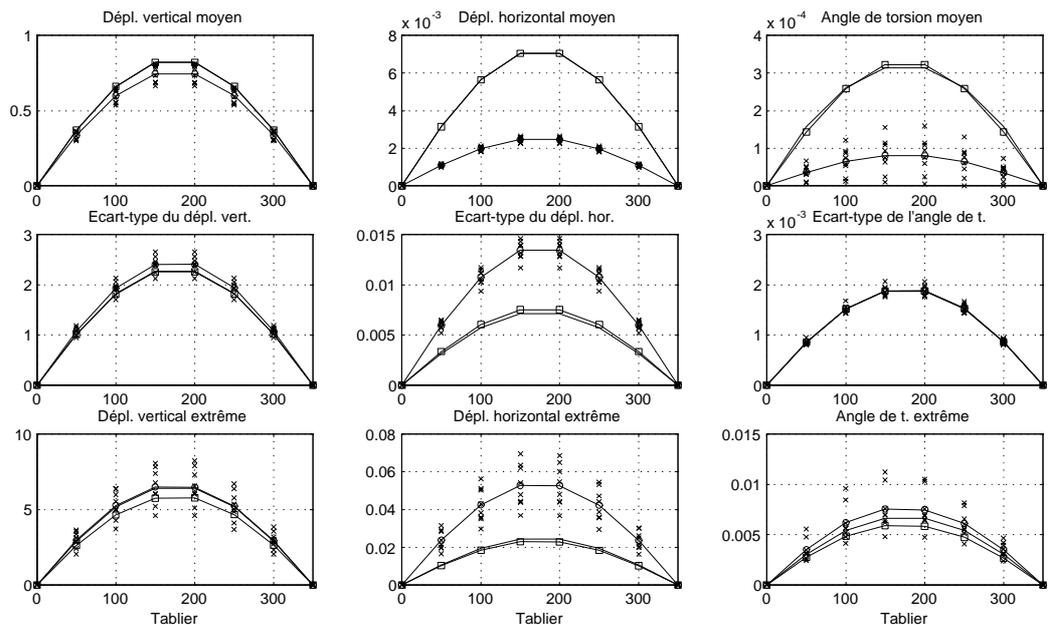


FIGURE 11.18. GRANDEURS STATISTIQUES DES DÉPLACEMENTS VERTICAUX ET HORIZONTAUX ET DE L'ANGLES DE TORSION - NIVEAU D'HYPOTHÈSES  $n^{\circ}6$  [RONDS : NIV. $n^{\circ}6$  / CARRÉS : NIV. $n^{\circ}2$ ]

Avant de revenir à l'oscillateur simple, poussons tout de même le raisonnement jusqu'au bout, en analysant la structure sous le niveau d'hypothèse  $n^{\circ}6$ . Toujours pour les mêmes

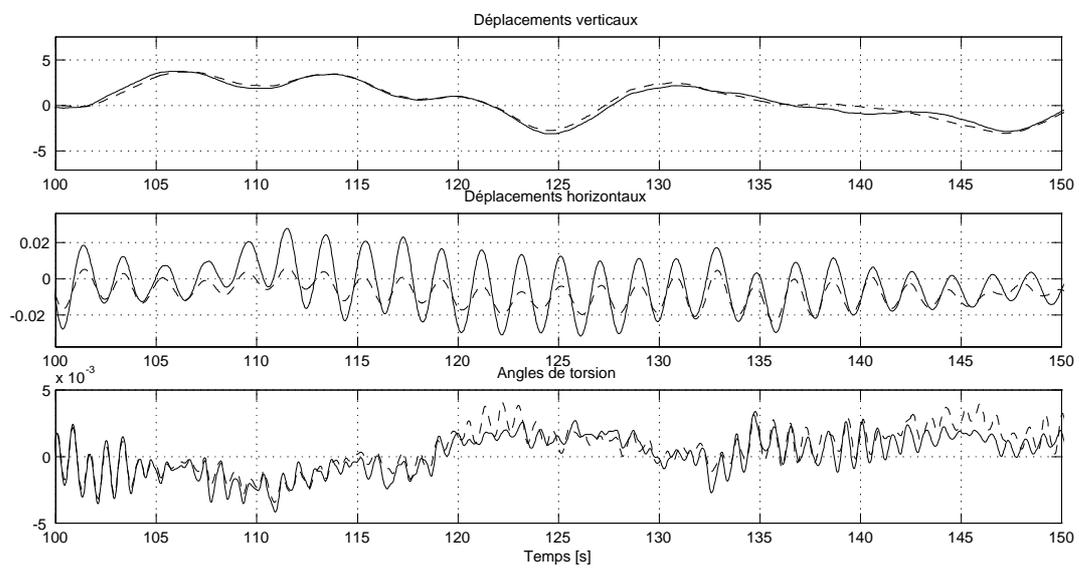


FIGURE 11.19. DÉPLACEMENTS DU NOEUD  $n^{\circ}4$  - COMPARAISON DES NIVEAUX D'HYPOTHÈSES  $n^{\circ}2$  ET  $n^{\circ}6$

ensembles d'échantillon que ceux utilisés précédemment, les figures 11.18 et 11.19 présentent les résultats de l'analyse. La seule modification qui a été ajoutée par rapport au niveau précédent concerne la prise en compte de la loi de comportement non linéaire pour les coefficients aérodynamiques. A ce stade, les constatations deviennent assez difficiles à mettre en évidence et à expliquer. L'ordre de grandeur des dispersions semble pourtant montrer que les résultats obtenus semblent fiables. Les coefficients aérodynamiques choisis pour l'analyse sont ceux de la section du viaduc de Millau. La forme profilée de cet ouvrage d'art est telle que les expressions des coefficients aérodynamiques sont presque linéaires. Il n'est pas ainsi d'un pont de type bi-poutre tel le pont Vasco de Gama (Fig. 6.1). Pour celui-ci, l'utilisation de cet ultime niveau d'hypothèses permettrait de mettre en évidence des différences plus importantes. Pour le viaduc de Millau, seul le coefficient de traînée est vraiment non linéaire. Il n'est donc pas étonnant de constater des écarts plus importants pour le balancement du tablier. Les déplacements horizontaux sont amplifiés à ce point que l'échelle de la figure 11.19 a été modifiée. Jusqu'à présent, nous avons pris avec précaution les résultats concernant les déplacements horizontaux du tablier. Dans ce cas, la figure 11.18 montre cependant clairement que malgré le niveau de dispersion qui existe, l'écart-type ainsi que le déplacement extrême sont bien plus importants que ceux que le niveau d'hypothèse  $n^{\circ}2$  pourrait fournir (écarts de 43.6% et 130.1%). L'évolution au cours du temps des déplacements montre que les déplacements verticaux semblent peu influencés par la prise en compte de cette nouvelle particularité. Par contre, les angles de torsion présentent maintenant une évolution quelque peu différente, probablement en conséquence de leur couplage plus intime avec les déplacements horizontaux.

A nouveau, il convient de remarquer que cet écart important est étroitement lié au niveau de turbulence du vent. Pour ces calculs nous avons considéré une intensité de turbulence de 25%, ce qui ne se rencontre que dans les zones à très forte turbulence comme les zones urbaines. Plus l'intensité du vent est importante et plus l'incidence instantanée du vent peut être importante; il sera donc également d'autant plus nécessaire de prendre en compte la forme non linéaire des coefficients aérodynamiques.

#### 11.4.5 Conclusions

Les conclusions à tirer de cet exemple semblent être propres au problème présenté et surtout difficilement généralisables. Des phénomènes tels augmentation d'écart-type, de la moyenne, ou de la dispersion ont pu être expliqués dans chacun des contextes. Les commentaires qui ont été formulés seraient probablement aussi d'application pour d'autres structures. Les conclusions tirées ne permettent cependant pas de quantifier les différences qu'une approche non linéaire pourrait alors mettre en oeuvre.

Aussi, il nous semble que le problème étudié est assez complexe dans la mesure où de nombreux paramètres entrent en jeu. Nous avons pu constater que le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}5$  venait contrecarrer les écarts obtenus sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}3$ ; rien n'indique jusqu'ici que sous une autre combinaison de ces paramètres, les corrections amenées par le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}5$  ne puisse également être insécuritaires.

C'est pour ces raisons que nous avons décidé de revenir à l'étude de l'oscillateur à un

	Dépl.vertical			Dépl.horizontal			Angle torsion		
	Moy	Disp	Ecart(*)	Moy	Disp	Ecart(*)	Moy	Disp	Ecart(*)
Niveau d'hypothèses n°2									
$\mu$	0.819	2.4%	-0.2%	$7.03.10^{-3}$	0.2%	0.3%	$3.22.10^{-4}$	0.1%	2.9%
$\sigma$	2.26	6.5%	-0.4%	$7.56.10^{-3}$	7.6%	5.73%	$1.88.10^{-3}$	2.0%	1.6%
$M$	5.76	16.1%	-10.3%	$2.29.10^{-2}$	12.5%	-5.37%	$5.89.10^{-3}$	10.5%	10.9%
Niveau d'hypothèses n°3									
$\mu$	0.858	16.5%	4.8%	$6.96.10^{-3}$	4.3%	-1.0%	$2.88.10^{-4}$	47.8%	-10.6%
$\sigma$	2.46	9%	8.8%	$8.01.10^{-3}$	12.6%	5.9%	$2.11.10^{-3}$	4.4%	12.2%
$M$	7.34	27.3%	27.4%	$2.40.10^{-2}$	21.8%	4.8%	$8.46.10^{-3}$	16.2%	43.6%
Niveau d'hypothèses n°5									
$\mu$	0.940	6.3%	14.8%	$7.84.10^{-3}$	1.6%	11.5%	$3.43.10^{-4}$	17.3%	6.5%
$\sigma$	2.50	7.6%	10.6%	$8.27.10^{-3}$	13.5%	9.4%	$2.11.10^{-3}$	2.6%	12.2%
$M$	6.93	21.9%	20.3%	$2.52.10^{-3}$	18.0%	10.0%	$7.17.10^{-3}$	18.8%	21.7%
Niveau d'hypothèses n°6									
$\mu$	0.743	7.8%	-9.3%	$2.46.10^{-3}$	5.6%	-65.0%	$8.07.10^{-5}$	59.3%	-74.9%
$\sigma$	2.41	6.9%	6.6%	$1.34.10^{-2}$	7.2%	43.6%	$1.88.10^{-3}$	5.4%	0.1%
$M$	6.49	19%	12.7%	$5.27.10^{-2}$	21.5%	130.1%	$7.56.10^{-3}$	28.9%	28.3%
(*) pour le niveau d'hypothèses n°2, l'écart indiqué est l'écart par rapport au résultat de l'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel. Pour les autres niveaux d'hypothèses (n°3, n°5 et n°6), l'écart correspond à l'écart par rapport aux résultats sous le niveau d'hypothèses n°2.									

Tableau 11.6. : Grandeurs statistiques pour le noeud 4 -Comparatif des différents niveaux d'hypothèses

degré de liberté sous un chargement non linéaire.

## 11.5 Retour à l'oscillateur simple

Les panneaux d'indication routière sont des exemples de structures qui peuvent être modélisées à l'aide d'oscillateurs simples (Fig. 11.20). Pour les structures plus complexes dont la réponse se compose de la contribution de plusieurs modes, les principes que nous allons mettre en évidence devront être adaptés pour les réponses dans chacun des modes.

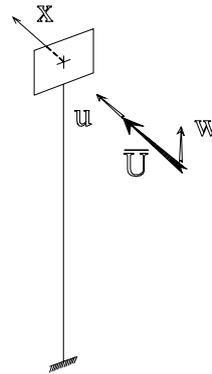


FIGURE 11.20. ILLUSTRATION DE L'OSCILLATEUR SIMPLE SOUMIS AU VENT TURBULENT

La prise au vent sur la structure étudiée s'effectue au moyen d'une plaque disposée perpendiculairement à l'écoulement. Le coefficient de traînée suffit pour exprimer les efforts appliqués à la structure. Bien qu'elle ne soit plus caractérisée que par un seul degré de liberté, les deux directions de turbulence sont nécessaires pour l'expression des efforts de traînée. L'hypothèse d'écoulement quasi-permanent est toujours formulée. Les forces aérodynamiques s'appliquant sur la paroi peuvent donc être obtenues en particulierisant les relations du chapitre 6 :

$$F^{(6)}(t) = \frac{1}{2} \rho C_D (i(t)) B |V_{app}(t)|^2 \quad (11.11)$$

$$\text{où } |V_{app}(t)|^2 = U^2 + 2Uu(t) - 2U\dot{x}(t) + u(t)^2 + \dot{x}(t)^2 - 2u(t)\dot{x}(t) \quad (11.12)$$

$$\text{et } i(t) = \arctan \left[ \frac{w(t)}{U + u(t) - \dot{x}(t)} \right] \quad (11.13)$$

Malgré un nombre de niveaux d'hypothèses maintenant réduit, nous conserverons néanmoins les mêmes dénominations que pour l'étude d'une structure à plusieurs degrés de liberté. Les relations (11.11) à (11.13) permettent donc d'estimer les efforts aérodynamiques sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ} 6$ , c'est-à-dire, sans formuler aucune hypothèse.

En reprenant en ordre décroissant les niveaux d'hypothèses établis, les forces aérodynamiques s'expriment, pour le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}5$ , par :

$$F^{(5)}(t) = \frac{1}{2}\rho [c_d + c'_d i(t)] B |V_{app}(t)|^2 \quad (11.14)$$

Ce niveau est obtenu en linéarisant l'expression du coefficient aérodynamique. Les niveaux d'hypothèses  $n^{\circ}3$  et  $n^{\circ}4$  sont identiques car l'hypothèse des petites rotations qui les différenciait n'a plus aucun sens pour une structure à un seul degré de liberté. Le niveau  $n^{\circ}3$  est obtenu à partir du cinquième en supprimant les termes quadratiques intervenant dans les expressions de la vitesse apparente et de l'angle d'incidence :

$$F^{(3)}(t) = \frac{1}{2}\rho \left[ c_d + c'_d \frac{w(t)}{U} \right] B [U^2 + 2Uu(t) - 2U\dot{x}(t)] \quad (11.15)$$

Finalement, le niveau d'hypothèses le plus simple ( $n^{\circ}2$ ) est obtenu en éliminant encore de cette relation les ultimes termes quadratiques en les processus aléatoires :

$$F^{(2)}(t) = \frac{1}{2}\rho B c_d U^2 + \frac{1}{2}\rho B U^2 \frac{2c_d u(t) + c'_d w(t)}{U} - \frac{1}{2}\rho B U^2 \frac{2c_d \dot{x}(t)}{U} \quad (11.16)$$

Assez logiquement, on retrouve sous cette forme les trois effets (moyen, turbulent et instationnaire) introduits au chapitre 6.

Nous ne reviendrons plus sur le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}1$  qui consiste à séparer l'effet moyen (utilisé pour une analyse statique) des deux autres (utilisés pour l'analyse dynamique). Nous avons en effet déjà pu constater au cours des exemples précédents qu'il fournit des résultats très proches de ceux du niveau  $n^{\circ}2$ . De même, nous sommes maintenant convaincus que les analyses dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel sous ce niveau d'hypothèses  $n^{\circ}2$  fournissent des résultats très proches. Nous avons déjà suffisamment débattu de la comparaison de ce genre de résultat; nous ne nous préoccuperons donc plus que des modifications apportées par les approches non linéaires.

### 11.5.1 Présentation de l'exemple traité

En partant du niveau d'hypothèses le plus bas, nous allons étudier la réponse au vent turbulent d'une structure à un seul degré de liberté. Les paramètres qui caractérisent la structure étudiée sont :

$$M = 10kg \quad ; \quad K = 50N/m \quad ; \quad \xi = 0.02 \quad (11.17)$$

Les valeurs propres associées à cet oscillateur sont donc une fréquence  $f = 0.356Hz$  et une période  $T = 2.81s$ . Les caractéristiques aérodynamiques de la structure se résument à :

$$B = 0.1m^2 \quad (11.18)$$

$$C_D(i) = 0.1 + i^{(rad)} \quad (11.19)$$

Cette fois, les dimensions du paramètre  $B$  sont celles d'une surface et correspondent au maître couple du panneau fixé en tête de poteau.

Les critères présentés au chapitre 10 permettent de déterminer les paramètres de génération. Puisque nous n'étudions plus maintenant qu'un seul degré de liberté, aucune souplesse ne sera autorisée quant à l'application de ces critères. Le lecteur pourra vérifier que les pas de fréquence à ne pas dépasser sont  $\Delta n = 3.56.10^{-3}Hz$  pour une bonne représentation de la structure et  $\Delta n = 2.5.10^{-3}Hz$  pour une bonne représentation de la sollicitation. La pas de fréquence choisi sera donc  $\Delta n = 2.5.10^{-3}Hz$ .

D'un autre côté, on peut également vérifier que la fréquence maximale à représenter doit être au moins de  $n_{\max} = 0.758Hz$  pour une bonne représentation de la structure et  $n_{\max} = 25Hz$  pour l'effort. Conformément aux remarques déjà formulées, la valeur retenue sera  $n_{\max} = 0.758Hz$ .

Ces deux valeurs retenues permettent de conclure à la nécessité de générer des échantillons de  $400s$  au moins avec un pas de temps inférieur à  $0.1648s$  (critère de représentation des harmoniques). Il reste finalement à vérifier que la période de mise en régime de l'oscillateur est petite vis-à-vis de la durée totale étudiée. La formule (10.12) permet d'estimer une période de mise en régime d'environ  $51s$ , ce qui nécessite, pour être à l'aise, une durée d'observation d'au moins  $600s$ . Sur base de toutes ces limitations, voici les paramètres de génération qui ont été retenus :

$$N = 8192 \quad ; \quad \Delta t = 0.1s \quad ; \quad \Delta f = 1.22.10^{-3} \quad ; \quad T = 819.2s \quad (11.20)$$

Tout comme dans les exemples précédents, huit échantillons de vitesses de vent seront utilisés pour déterminer les grandeurs statistiques moyennes.

### 11.5.2 Importance des itérations à l'intérieur du pas de temps

Avant de revenir à nos niveaux d'hypothèses, il serait intéressant de se préoccuper d'un point que nous avons laissé de côté : la nécessité des itérations à l'intérieur des pas de temps. On comprend évidemment qu'il est assez difficile de donner une justification analytique à la nécessité d'itérer à l'intérieur du pas de temps. Bien sûr, on imagine aisément que les itérations à l'intérieur de chaque pas sont d'autant plus superflues que le pas de temps est petit vis-à-vis de la période propre étudiée. Cette démarche logique ne permet cependant pas de quantifier la limite à partir de laquelle les itérations sont nécessaires, et encore moins d'argumenter sur la nécessité d'itérer lorsque le problème est résolu en prenant en compte les non linéarités. Nous avons donc décidé d'illustrer le problème à l'aide de deux exemples.

**11.5.2.1 Exemple 1** La structure à un degré de liberté présentée ci-dessus est analysée sous l'effet d'une turbulence dont la densité spectrale de puissance est donnée par la loi de Davenport avec :

$$\bar{U} = 20m/s \quad ; \quad \sigma_u = \sigma_w = 3m/s \quad ; \quad L_u = L_w = 200m \quad (11.21)$$

Ces paramètres sont des ordres de grandeurs fréquemment rencontrés en pratique. Le

critère de convergence des itérations à l'intérieur de chaque pas de temps est un écart relatif entre itérés successifs<sup>50</sup> inférieur à  $10^{-6}$ .

La structure n'est analysée que pour un seul échantillon de vitesse. Les conclusions quant à la nécessité d'itérer à l'intérieur des pas de temps seraient identiques pour d'autres échantillons de vitesses. Les analyses sont menées avec ou sans itérations à l'intérieur du pas de temps et ce, pour chacun des niveaux d'hypothèses  $n^{\circ}2$ ,  $n^{\circ}3$  et  $n^{\circ}5$ . L'analyse sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}6$  fournit les mêmes résultats que sous le niveau  $n^{\circ}5$  étant donné que le coefficient de traînée est linéaire.

Le tableau 11.7 résume pour les différents cas étudiés les grandeurs statistiques caractéristiques du déplacement de l'oscillateur.

	Hyp $n^{\circ}2$		Hyp $n^{\circ}3$		Hyp $n^{\circ}5$	
	Sans	Avec	Sans	Avec	Sans	Avec
$\mu$	0.049	0.049	0.0503	0.0503	0.0514	0.0514
$\sigma$	0.1442	0.1439	0.1441	0.1436	0.1478	0.1474
$M$	0.5682	0.5698	0.6776	0.6766	0.6862	0.6861

Tableau 11.7. : Comparaison des grandeurs statistiques calculées avec ou sans itérations à l'intérieur du pas de temps

Les résultats présentés<sup>51</sup> montrent donc que, dans cet exemple, imposer des itérations à l'intérieur du pas de temps relèvent encore plus du tétracapilocoupage que du purisme : l'écart entre deux résultats (avec ou sans itérations) ne s'élève pas à plus d'un quart de pourcent. Il s'agit d'une précision qu'il est impensable d'atteindre en comparant des résultats issus d'analyses dans les domaines duaux.

Pour chacun des niveaux d'hypothèses, le nombre moyen d'itérations par pas de temps est environ de 2. Ceci montre effectivement que la convergence est très vite atteinte. Si nous avons choisi comme critère de convergence un écart relatif de moins de  $10^{-4}$  entre itérés successifs, une seule itération (c'est-à-dire le minimum) aurait suffi pour atteindre la convergence.

**11.5.2.2 Exemple 2** Avant de conclure prématurément quant à l'inutilité des itérations à l'intérieur des pas de temps, nous allons traiter un exemple légèrement différent; deux modifications sont entreprises par rapport à l'exemple précédent :

- l'écart-type de la turbulence du vent passe de  $\sigma_u = \sigma_w = 3m/s$  à  $\sigma_u = \sigma_w = 4m/s$ ;
- l'expression du coefficient de traînée de la paroi passe de  $C_D(i) = 0.1 + i$  à  $C_D(i) =$

<sup>50</sup> les estimations successives des déplacements à la fin du pas de temps.

<sup>51</sup> Bien que les analyses dynamiques entreprises sous les niveaux d'hypothèses  $n^{\circ}1$  et  $n^{\circ}2$  soient de type linéaire, il serait également nécessaire, en toute rigueur, d'itérer à l'intérieur du pas de temps pour ces analyses. La nécessité de ces itérations a déjà été discutée. Une autre manière de voir les choses consiste à dire que cette nécessité d'itérer provient du fait que, dans le domaine temporel, l'amortissement aérodynamique n'est pas traité à l'aide d'un coefficient d'amortissement venant s'ajouter à celui de l'amortissement structurel; nous avons choisi de l'inclure directement dans l'estimation des efforts aérodynamiques. Les résultats présentés dans ce paragraphe résultent tous d'analyses avec itérations.

$$0.1 + 4i.$$

Le critère de convergence est toujours un écart relatif entre itérés successifs inférieur à  $10^{-6}$ . La figure 11.21 représente, sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}3$ , les évolutions des déplacements calculés avec ou sans itérations à l'intérieur des pas de temps. On peut cette fois constater une différence appréciable entre les deux réponses. Ce graphique montre également que ne pas recourir aux itérations à l'intérieur du pas de temps fournit des déplacements plus petits, c'est-à-dire insécuritaires.

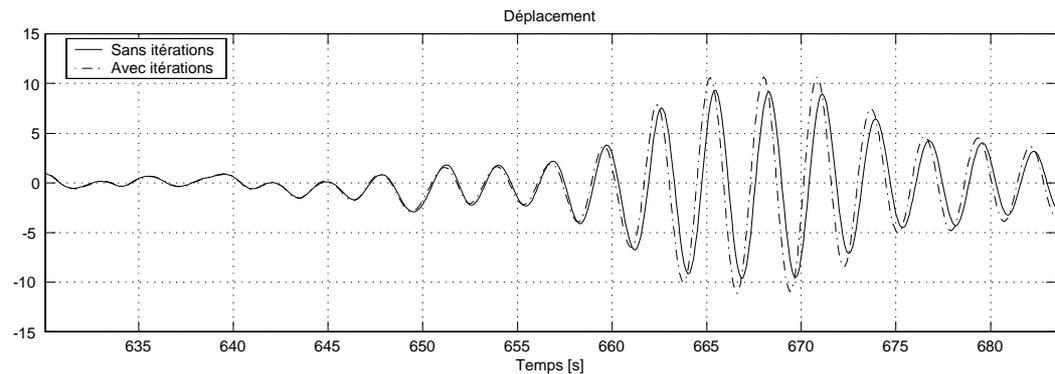


FIGURE 11.21. DÉPLACEMENTS DE L'OSCILLATEUR SIMPLE : AVEC OU SANS ITÉRATIONS À L'INTÉRIEUR DU PAS DE TEMPS (NIVEAU D'HYPOTHÈSES  $n^{\circ}3$ )

Pour cet exemple, le nombre d'itérations à l'intérieur de chaque pas de temps n'est guère plus élevé (environ 2.5, Fig. 11.22) mais dans ce cas, un critère de convergence de plus de  $10^{-4}$  fournit toujours le même nombre d'itérations à l'intérieur de chaque pas de temps. Ceci manifeste donc cette fois la nécessité de devoir itérer à l'intérieur des pas de temps.

Le tableau 11.8 indique les grandeurs statistiques obtenues avec ou sans itérations à l'intérieur des pas de temps. On constate que ces itérations peuvent influencer l'écart-type calculé de plus de 10% et les valeurs extrêmes de plus de 15%.

Nous venons donc de voir qu'en modifiant légèrement les caractéristiques de l'oscillateur étudié, il était possible de passer d'une zone où les itérations sont superflues à une autre où elles sont nécessaires. L'existence d'une limite n'est pas mystérieuse; elle sera clairement mise en évidence dans le paragraphe suivant. Puisqu'elle n'est pas encore maîtrisée correctement jusqu'à ce point, il nous semble plus judicieux de recourir systématiquement aux itérations à l'intérieur des pas de temps. Ce choix sera appliqué pour tous les exemples présentés jusqu'à la fin du document et le critère de convergence sera un écart relatif inférieur à  $10^{-6}$  pour les itérés successifs.

### 11.5.3 Niveau d'hypothèses $n^{\circ}3$

L'analyse de l'oscillateur simple sous le niveau d'hypothèse  $n^{\circ}2$  repose sur l'estimation

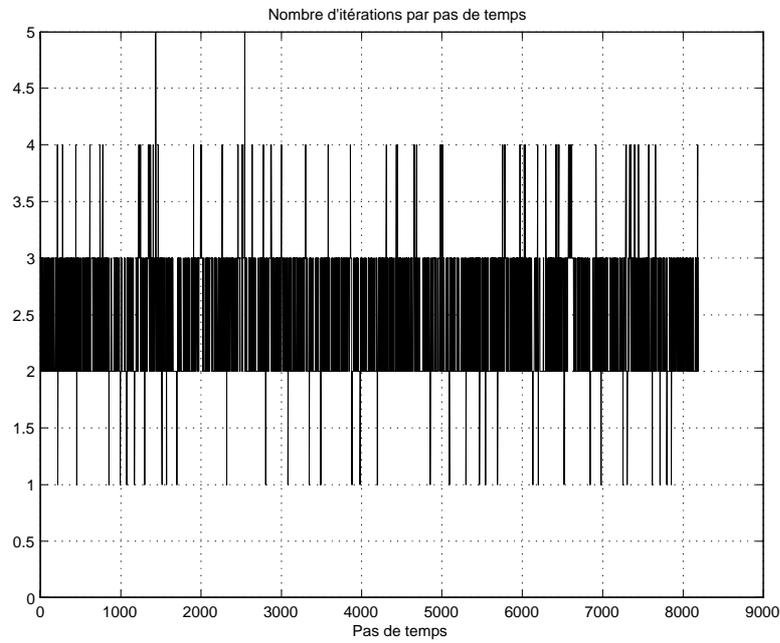


FIGURE 11.22. NOMBRE D'ITÉRATIONS RÉALISÉES À L'INTÉRIEUR DE CHAQUE PAS DE TEMPS.

cas $n^{\circ}3$		
	Sans	Avec
$\mu$	0.0558	0.0558
$\sigma$	1.555	1.713
$M$	9.63	11.15

Tableau 11.8. : Grandeurs statistiques - Exemple 2

des efforts aérodynamiques à l'aide de la formule (11.16) :

$$F^{(2)}(t) = \frac{1}{2}\rho BU^2 c_d + \frac{1}{2}\rho BU^2 \left[ 2c_d \frac{u(t)}{U} + c'_d \frac{w(t)}{U} \right] - \frac{1}{2}\rho BU^2 c_d 2 \frac{\dot{x}(t)}{U} \quad (11.22)$$

L'expression des efforts sous le niveau d'hypothèse  $n^\circ 3$  peut s'écrire en ajoutant à la formulation (11.22) les termes quadratiques croisés :

$$F^{(3)}(t) = \frac{1}{2}\rho BU^2 \left[ c_d + c'_d \frac{w(t)}{U} \right] \left[ 1 + 2 \frac{u(t)}{U} - 2 \frac{\dot{x}(t)}{U} \right] \quad (11.23)$$

$$F^{(3)}(t) = F^{(2)}(t) + \frac{1}{2}\rho BU^2 \left[ 2c'_d \frac{u(t)w(t)}{U^2} - 2c'_d \frac{w(t)\dot{x}(t)}{U^2} \right] \quad (11.24)$$

Ces deux termes ajoutés peuvent être à l'origine d'importantes modifications dans la réponse de l'oscillateur. La première des deux corrections est un terme croisé entre les turbulences dans les directions longitudinale et verticale. A choisir parmi les trois effets regroupés dans la relation (11.22), il s'apparente donc plutôt à un effet turbulent. La seconde correction est un terme croisé entre la turbulence du vent et la vitesse structurelle. Il peut donc être interprété comme un effet instationnaire dont la caractéristique principale (la viscosité) serait variable au cours du temps puisqu'implicitement dépendante de la fluctuation de vitesse transversale ( $w$ ).

Avant de commenter plus formellement les influences de ces deux termes ajoutés à l'expression des efforts aérodynamiques, nous allons comparer à l'aide d'un exemple, les déplacements d'un oscillateur simple sous les deux niveaux d'hypothèses.

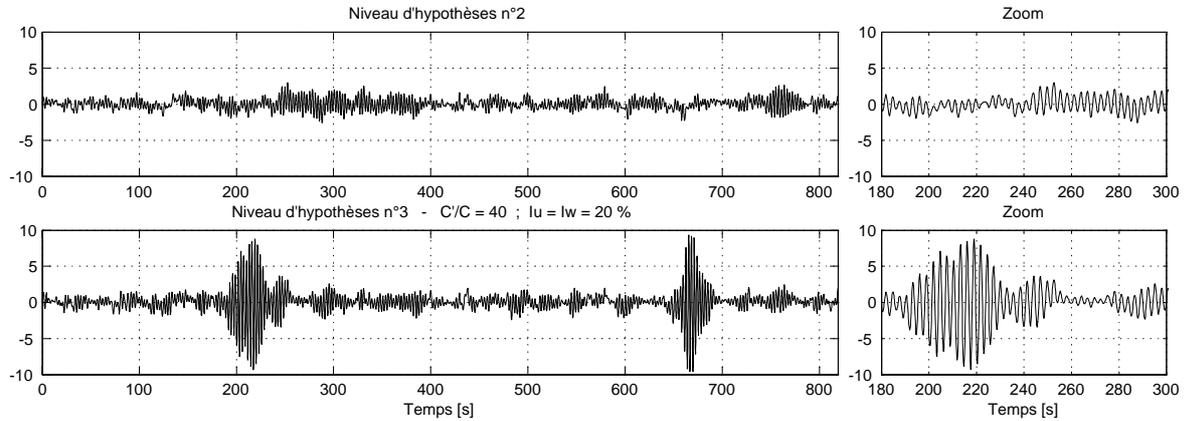


FIGURE 11.23. EVOLUTION DES DÉPLACEMENTS SOUS LES NIVEAUX D'HYPOTHÈSES 2 ET 3.

L'oscillateur étudié est celui de l'exemple 2 présenté au paragraphe 11.5.2 ( $C_D(i) = 0.1 + 4i$  et  $\sigma_u = \sigma_w = 4m/s$ , soit des intensités de turbulence  $I_u = I_w = 20\%$ ). La figure 11.23 compare les déplacements calculés pour les niveaux d'hypothèses  $n^\circ 2$  et  $n^\circ 3$ . On y

constate effectivement que la prise en compte des termes quadratiques croisés permet de modéliser un phénomène tout à fait différent.

Nous avons classé le premier terme ajouté à l'expression des forces aérodynamiques au rang des effets turbulents. Puisqu'un terme supplémentaire est ajouté à la turbulence, il pourrait sembler logique d'obtenir des déplacements plus importants; cette conclusion est néanmoins à prendre avec beaucoup de précautions car le terme ajouté est nul en moyenne<sup>52</sup>. De toute façon, il ne peut en aucun cas être responsable d'une augmentation du déplacement sur un intervalle de temps limité; il semblerait logique, si ce terme devait être responsable de l'augmentation des déplacements, d'observer une telle amplification sur l'entièreté de la durée étudiée.

Le second terme ajouté (que nous avons classé comme une contribution à l'effet instationnaire) peut être interprété par un amortissement aérodynamique supplémentaire. Le coefficient d'amortissement qui le caractérise est variable au cours du temps (puisque fonction de  $w(t)$ ). Par moments, il arrive donc que ce coefficient soit négatif. S'il est plus grand en valeur absolue que la somme des coefficients d'amortissement structurel et aérodynamique classique, la structure est momentanément caractérisée par un amortissement négatif, ce qui mène à une divergence de la réponse. Lorsque la turbulence transversale redevient assez faible, la structure retrouve son amortissement et continue à osciller à un niveau semblable à celui auquel elle oscillerait en linéaire. Un peu tard encore, lorsque l'amortissement aérodynamique supplémentaire est positif, les déplacements obtenus sous le niveau d'hypothèse  $n^{\circ}3$  sont plus faibles (entre 300s et 400s) : l'amortissement non linéaire ajouté est alors positif.

La figure 11.24 représente la densité spectrale des déplacements de l'oscillateur calculés selon trois méthodes. Les résultats de l'analyse stochastique dans le domaine fréquentiel (courbe lisse) et de l'approche pas-à-pas sous le niveau d'hypothèse  $n^{\circ}2$  correspondent très bien. Le résultat sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}3$  se trouve par contre bien au-dessus : on pourrait imaginer qu'il a été obtenu en multipliant la densité spectrale de l'effort par une fonction de transfert caractérisée par un coefficient d'amortissement plus petit, permettant de rendre compte de l'instabilité identifiée. En plus de valeurs extrémales plus importantes, l'analyse sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}3$  fournit également un écart-type plus important pour les déplacements de l'oscillateur. Celui-ci augmente cependant dans une moindre mesure, ce qui exprime très clairement que la réponse de l'oscillateur n'est plus un processus gaussien.

Revenons maintenant à la formulation analytique. En insérant ces termes quadratiques croisés à leur emplacement logique, les forces aérodynamiques peuvent donc s'écrire :

$$F^{(3)}(t) = \frac{1}{2}\rho BU^2 c_d + \frac{1}{2}\rho BU^2 \left[ 2c_d \frac{u}{U} + c'_d \frac{w}{U} + 2c'_d \frac{uw}{U^2} \right] - \frac{1}{2}\rho BU^2 \left[ c_d \frac{\dot{x}}{U} + c'_d \frac{w\dot{x}}{U^2} \right] \quad (11.25)$$

Les deux termes ajoutés auront d'autant plus d'impact qu'ils sont grands vis-à-vis des termes existants déjà dans chacun des effets intéressés : la correction de l'effet turbulent

<sup>52</sup> ce qui ne serait pas vrai s'il existait une cohérence entre les turbulences dans les deux directions principales différentes.

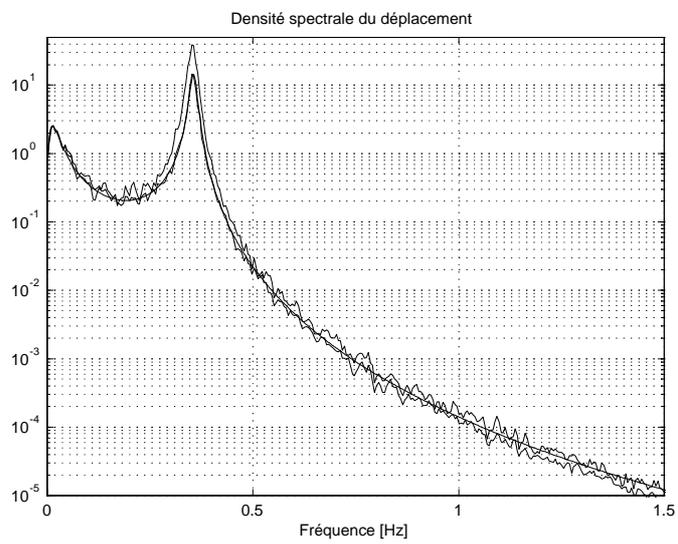


FIGURE 11.24. COMPARAISON DU CONTENU FRÉQUENTIEL SOUS LES NIVEAUX D'HYPOTHÈSES 2 ET 3.

sera d'autant plus importante que le terme  $2c'_d \frac{uw}{U^2}$  est grand vis-à-vis de  $2c_d \frac{u}{U} + c'_d \frac{w}{U}$ ; de même, la correction de l'effet instationnaire sera d'autant plus importante que le terme  $c'_d \frac{w\dot{x}}{U^2}$  est grand par rapport au terme  $c_d \frac{\dot{x}}{U}$ .

Afin de représenter les importances relatives des nouveaux termes, nous avons décidé d'introduire deux coefficients d'importance qui sont des grandeurs adimensionnelles permettant de représenter l'importance jouée par les termes ajoutés :

$$L^{tu} = \frac{2c'_d \frac{\sigma_u \sigma_w}{U^2}}{2c_d \frac{\sigma_u}{U} + c'_d \frac{\sigma_w}{U}} = \frac{2c'_d I_u I_w}{2c_d I_u + c'_d I_w} \quad (11.26)$$

$$L^{inst} = \frac{c'_d \frac{\sigma_w}{U^2}}{c_d \frac{1}{U}} = \frac{c'_d}{c_d} I_w \quad (11.27)$$

L'estimation de ces deux coefficients permet de rendre compte de la nécessité d'introduire dans le calcul les termes quadratiques croisés.

La relation (11.27) représente l'importance de la correction d'effet instationnaire. Il s'agit d'une importance relative entre les termes de chargement. Or, ce sont généralement les déplacements et efforts internes qui intéressent l'ingénieur. Puisque nous savons que ces effets instationnaires sont destinés à rejoindre l'amortissement structurel du membre de gauche dans l'équation du mouvement, il serait préférable de définir le coefficient d'importance par :

$$L^{inst} = \frac{\frac{1}{2} \rho B U^2 2c'_d \frac{\sigma_w}{U^2}}{\underbrace{\frac{1}{2} \rho B U^2 2c_d \frac{1}{U} + 2M\omega\xi_s}_{2M\omega\xi_a}} = \frac{\xi_a \frac{c'_d \frac{\sigma_w}{U}}{c_d}}{\xi_a + \xi_s} = \frac{\xi_a}{\xi_a + \xi_s} \frac{c'_d I_w}{c_d} \quad (11.28)$$

Cette nouvelle définition ne fait donc qu'ajouter un facteur représentant l'importance relative de l'amortissement aérodynamique classique (issu de la formulation linéaire), par rapport à l'amortissement total (formulation linéaire également). Du point de vue des déplacements structurels, cette nouvelle définition semble mieux adaptée : on imagine aisément que la correction de l'effet instationnaire n'aura guère d'impact si l'amortissement structurel est beaucoup plus important que l'amortissement aérodynamique ( $\xi_s \gg \xi_a$ ).

Les deux coefficients d'importance définis peuvent s'exprimer en fonction de quatre grandeurs adimensionnelles : les intensités de turbulence dans les deux directions principales  $I_u$  et  $I_w$ , l'importance de l'amortissement aérodynamique dans l'amortissement total  $I_a = \frac{\xi_a}{\xi_a + \xi_s}$  et un coefficient caractérisant la forme du coefficient aérodynamique  $I_c = \frac{c'_d}{c_d}$ .

$$L^{tu} = \frac{2I_c I_u I_w}{2I_u + I_c I_w} \quad (11.29)$$

$$L^{inst} = I_a I_c I_w \quad (11.30)$$

A ce stade, nous sommes arrivés à exprimer l'importance des deux corrections ajoutées à l'aide de deux facteurs extrêmement simples. Ceci provient des choix réalisés :

- tout d'abord, nous avons supposé que, des deux termes de chargement ajoutés, l'un pouvait s'ajouter aux effets turbulents et l'autre aux effets instationnaires. Ceci est un choix personnel qui pourrait être discuté dans la mesure où le terme en  $w\dot{x}$  aurait également pu être ajouté aux effets turbulents. Ceci aurait donc mené à la définition d'autres coefficients d'importance;
- une fois les coefficients identifiés, nous avons également supposé que l'on pouvait associer leurs écart-types ( $\sigma_u, \sigma_w$ ) aux fluctuations de vitesses longitudinale et transversale ( $u(t), w(t)$ ). Cette hypothèse aurait également pu être remise en cause car mathématiquement, c'est l'évolution au cours du temps de ces fluctuations qui importe et non pas leur variance. Il nous semble cependant que ce choix est un des plus judicieux à formuler. En effet, lorsque l'échantillon étudié est suffisamment long et que de surcroît une moyenne sur plusieurs échantillons est entreprise, l'influence des fluctuations de vitesses peut être assez bien caractérisée par son écart-type.

La formulation de ces hypothèses de travail a pour seul objectif la mise au point de relations simples permettant d'estimer rapidement l'influence des termes quadratiques croisés. Une approche plus rigoureuse aurait probablement débouché sur un nombre de paramètres plus important; par exemple, les quatre rapports adimensionnels  $I_a, I_c, I_u$  et  $I_w$ . En poussant encore plus loin, on pourrait imaginer que ces quatre rapports ne suffisent pas à représenter correctement les contributions des termes quadratiques croisés. Conceptuellement, il en faudrait en effet bien davantage puisque l'importance de ces termes ne peut être jugée qu'à l'aide d'une analyse dynamique non linéaire. L'utilisation d'un plus grand nombre de paramètres indépendants devrait fournir des résultats plus précis.

Nous avons décidé de ne travailler qu'avec deux grandeurs indépendantes ( $L^{tu}$  et  $L^{inst}$ ), d'un part par souci de simplicité dans la formulation finale et d'autre part afin de pouvoir garder un sens physique aux grandeurs adimensionnelles choisies.

D'un point de vue pratique, l'étude de l'oscillateur simple est entreprise en faisant varier d'une part les intensités de turbulence, mais tout en les maintenant égales ( $I_u = I_w$ ) et d'autre part le facteur de forme du coefficient de traînée  $I_c$ . Les caractéristiques d'amortissement restent constantes et identiques à celles utilisées jusqu'ici :

$$\left. \begin{aligned} \xi_a &= \frac{\rho B \bar{U}}{2} \frac{c_d}{M \omega} = 5.48 \cdot 10^{-3} \\ \xi &= 0.02 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_a = 21.5\% \quad (11.31)$$

L'oscillateur simple est analysé pour les niveaux d'hypothèses  $n^\circ 2$  et  $n^\circ 3$  et, pour limiter le phénomène de non-ergodicité, chacune des analyses est réalisée avec huit échantillons. Les intensités de turbulence et le facteur de forme prennent les valeurs indiquées au tableau 11.9<sup>53</sup>. Pour chaque combinaison, les coefficients d'importance peuvent être déterminés à l'aide de la relation (11.29) et (11.30).

<sup>53</sup> Lorsque  $I_c$  varie,  $c_d$  est conservé constant de sorte que le paramètre d'amortissement ne varie pas. C'est donc la pente  $c'_d$  qui, dans la loi de comportement des coefficients aérodynamiques, varie d'un cas à l'autre.

$I_u = I_w =$	0.05	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2	0.225	0.25		
$I_c =$	0.1	1	5	10	15	20	25	30	40	50

Tableau 11.9. : Valeurs prises par les grandeurs adimensionnelles variables

Les figures 11.25 à 11.29 résument les résultats qui ressortent de ce nombre important de calculs<sup>54</sup>. Etant donné que le nombre de résultats à présenter est assez important, nous ne mentionnons que les moyennes sur les huit échantillons des grandeurs statistiques (écart-type, extremum, moyenne). Aucun commentaire concernant les dispersions ne sera donc plus formulé.

Les deux premiers graphiques de la figure 11.25 représentent les écart-types du déplacement (en  $m$ ), pour les différents facteurs de forme et intensités de turbulence. A gauche, le résultat sous le niveau d'hypothèse  $n^\circ 2$  est représenté par une surface à génératrices rectilignes, ce qui traduit le caractère linéaire de l'analyse. Il est assez logique de retrouver un écart-type d'autant plus important que l'intensité de turbulence est importante, mais aussi que le facteur de forme est important, puisque le coefficient de traînée est alors caractérisé par une pente plus importante. La surface représentée sur la droite correspond au niveau d'hypothèses  $n^\circ 3$ . On peut dès à présent constater l'importance des termes quadratiques croisés lorsque le coefficient de forme ou les intensités de turbulence sont importants.

Afin de permettre une comparaison plus aisée de ces deux surfaces, les coupes dans les plans  $I_u = I_w = cst$  sont représentées en bas et à gauche. Elles correspondent au maillage des surfaces, c'est-à-dire, en partant du bas vers le haut, aux valeurs de  $I_u = I_w$  reprises au tableau 11.9. L'allure régulière des courbes obtenues indique que le nombre d'échantillons utilisés et le critère de convergence à l'intérieur des pas de temps suffisent pour pouvoir s'affranchir de la non-ergodicité ainsi que des pas de temps non convergés. Le graphique en bas et à droite est probablement plus pratique d'utilisation, ou tout ou moins plus facilement transposable à un autre problème puisqu'il représente des grandeurs adimensionnelles. Elles sont obtenues en divisant entre eux les ensembles de courbes de la figure voisine (traits continus et discontinus). La grandeur représentée est donc un facteur d'amplification par lequel il convient de multiplier le résultat d'une analyse sous le niveau d'hypothèses  $n^\circ 2$  pour obtenir l'écart-type sous le niveau d'hypothèses  $n^\circ 3$ .

Ce facteur d'amplification peut également être représenté par des courbes de niveaux (Fig. 11.26). Afin de revenir maintenant aux notions de coefficients d'importance introduits préalablement, le facteur d'amplification est représenté dans l'espace des coefficients  $L^{tu}$  et  $L^{inst}$ . Seule une partie de l'espace est représentée; elle correspond à la zone du plan  $(L^{tu}, L^{inst})$  qui est balayée lorsque l'ensemble des combinaisons de valeurs imposées pour  $I_u$  et  $I_c$  est envisagé.

Pour des coefficients d'importance de la correction instationnaire  $L^{inst}$  assez impor-

<sup>54</sup> Le nombre d'analyse menées s'élève à : 2 (niveaux d'hypothèses)  $\times$  8 (échantillons)  $\times$  8 (valeurs de turbulence)  $\times$  10 (facteurs de forme) = 1280 analyses. Chacune d'entre elles est une analyse dynamique non linéaire, sur 8192 pas de temps, ce qui fait environ 10, 5.10<sup>6</sup> pas de temps étudiés ! Et à cela, il faut encore ajouter les itérations à l'intérieur des pas de temps.

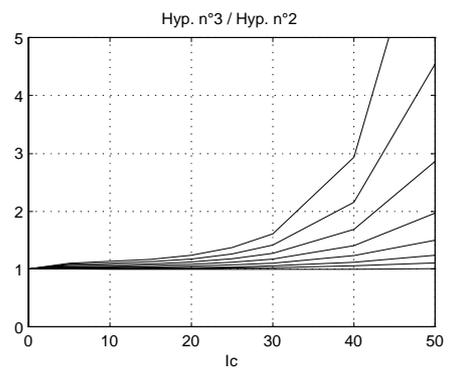
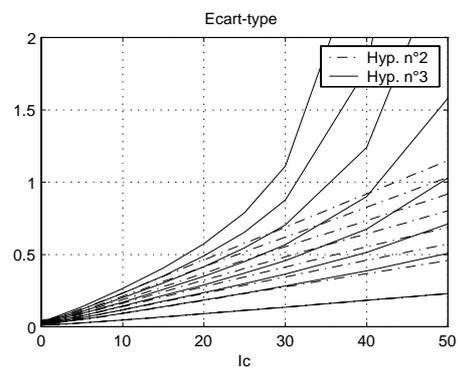
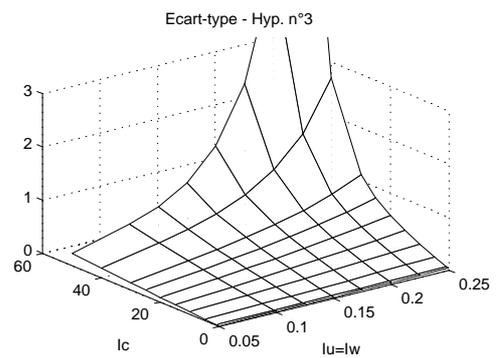
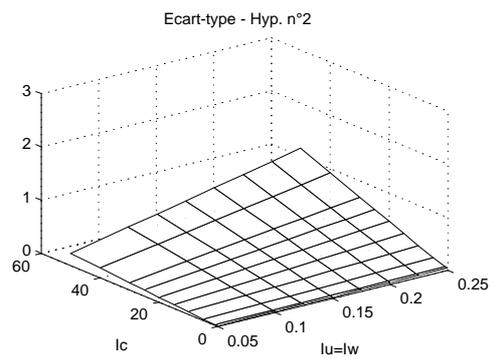


FIGURE 11.25. ECART-TYPES CALCULÉS SOUS LES NIVEAUX D'HYPOTHÈSES 2 ET 3

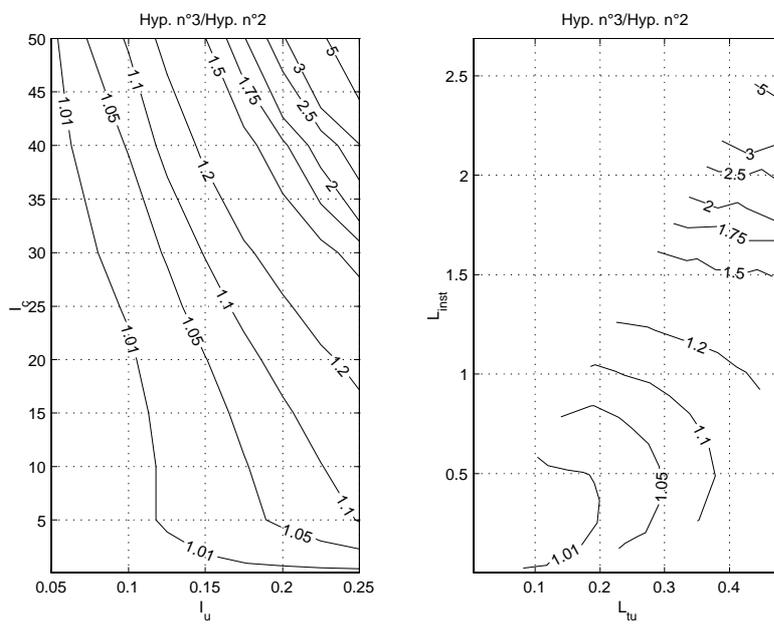


FIGURE 11.26. FACTEUR D'AMPLIFICATION DES ÉCART-TYPES

tants, les courbes de niveaux s'orientent selon l'axe  $L^{tu}$ . Cela signifie donc que le terme quadratique turbulent n'a plus beaucoup d'influence lorsque le terme quadratique instationnaire vaut environ 1,5 fois l'effet instationnaire utilisé pour l'analyse linéaire. Dans cette zone, les courbes de niveaux se rapprochent de plus en plus, ce qui indique manifestement l'apparition d'une instabilité. L'orientation des courbes montre que cette instabilité est principalement liée à la correction instationnaire, ce que nous avons pu mettre en évidence intuitivement.

Ainsi que présenté ci-avant, nous recommandons, pour un application ultérieure, l'utilisation du graphique de droite plutôt que celui de gauche. La démarche retenue et la volonté de ne conserver que deux grandeurs pour exprimer le facteur d'amplification, indique effectivement que le graphique de gauche est tributaire des autres caractéristiques du problème (telles  $I_a$  par exemple).

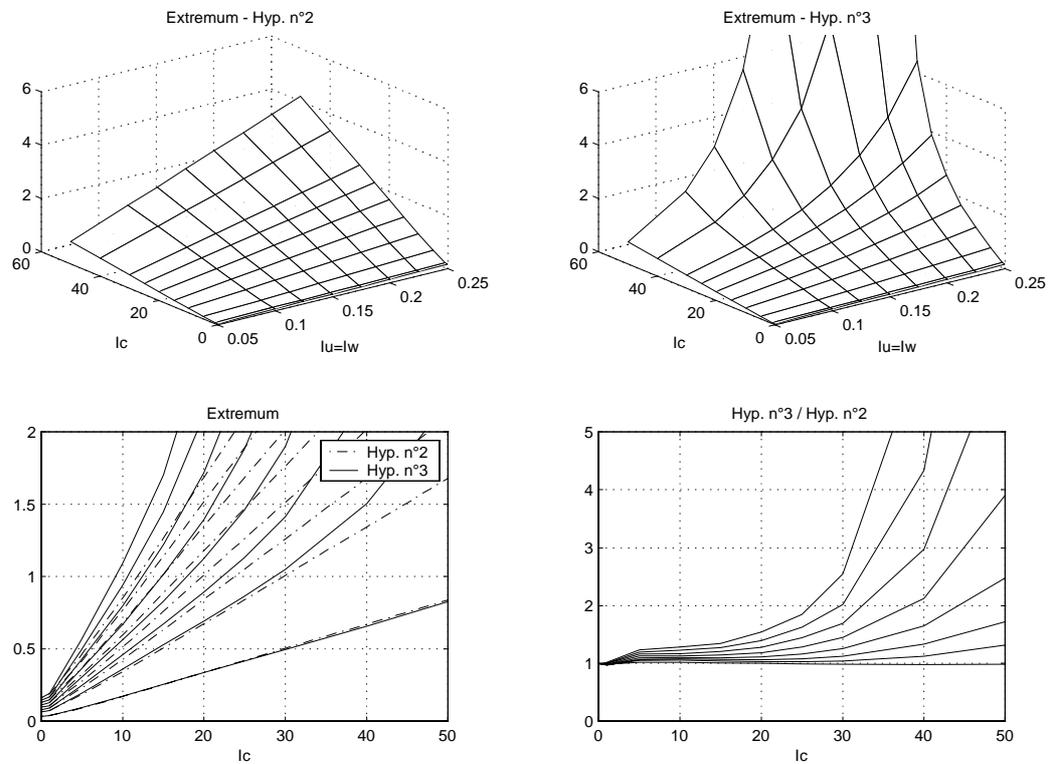


FIGURE 11.27. DÉPLACEMENTS EXTRÊMES CALCULÉS SOUS LES NIVEAUX D'HYPOTHÈSES 2 ET 3

La figure 11.27 est l'équivalent de la figure 11.25 pour les déplacements extrêmes : les deux premiers graphiques représentent les déplacements extrêmes (en  $m$ ); pour faciliter la comparaison, le graphique suivant représente une superposition de ces deux premières surfaces; quant au dernier graphique, il représente le rapport entre les valeurs extrêmes calculées sous les deux niveaux d'hypothèses différents, soit un facteur d'amplification à

utiliser avec une analyse sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}2$ .

Dans un analyse stochastique, les valeurs extrêmes s'expriment généralement par le produit du facteur de pointe par l'écart-type concerné. Cette relation est justifié mathématiquement dans le cadre de l'étude d'un processus gaussien en bande étroite mais aussi, de manière un peu moins rigoureuse, aux processus en bande large. Si le facteur de pointe restait inchangé lors de la prise en compte des termes quadratiques croisés, les facteurs d'amplification des écart-types et des extrema auraient la même forme. Or il n'en est pas ainsi; ce qui signifie que le facteur de pointe ne s'exprime plus de la même façon, ou encore que le processus de sortie (le déplacement de l'oscillateur simple) n'est plus gaussien.

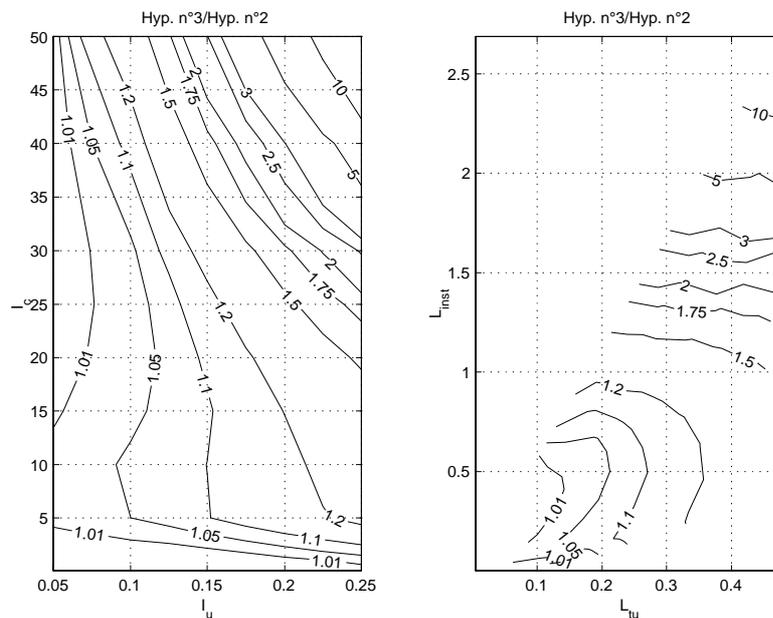


FIGURE 11.28. FACTEUR D'AMPLIFICATION DES EXTREMA

La figure 11.28 représente en courbes de niveaux le facteur d'amplification des extrema. A nouveau, le graphique de gauche n'est d'application que pour l'exemple traité ( $I_a = 21.5\%$  et  $I_u = I_w$ ). Il indique que pour une turbulence de 20%, l'erreur commise sur le déplacement extrême est d'environ 10% lorsque le facteur de forme  $I_c = 4$ , de 20% lorsque  $I_c = 15$  et de 50% lorsque  $I_c = 25$ .

Pour être complets, il reste à présenter également les facteurs d'amplification des moyennes. Lors de l'étude de la structure à plusieurs degrés de liberté, nous n'avons pas vraiment constaté de modification de la moyenne entre les niveaux d'hypothèses  $n^{\circ}2$  et  $n^{\circ}3$ . Les courbes de niveaux de la figure 11.29 confortent ces observations.

Ce graphique présente très peu d'importance si ce n'est le fait que les coefficients de correction définis semblent moins bien s'adapter à l'augmentation de moyenne : les courbes de niveaux obtenues ne permettent plus par exemple de mettre en évidence une indépendance

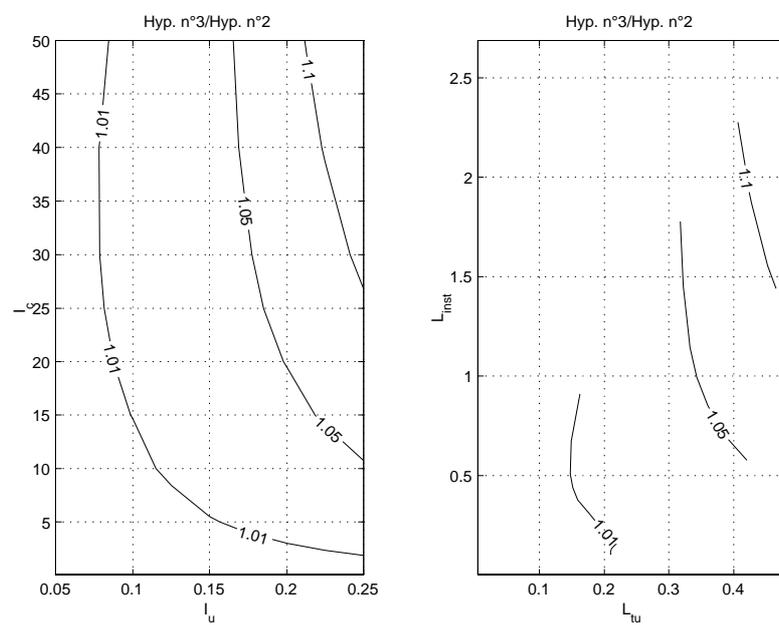


FIGURE 11.29. FACTEUR D'AMPLIFICATION DES MOYENNES

des deux coefficients l'un par rapport à l'autre.

**11.5.3.1 Conclusions** Nous venons de présenter quelques résultats d'analyse dynamique intégrant les termes quadratiques croisés. Le phénomène d'instabilité qui se produit a été cerné et expliqué assez précisément. Grâce aux grandeurs adimensionnelles choisies, les graphiques obtenus dans le cadre de cet exemple devraient également être d'application pour d'autres structures.

Dans l'espace des coefficients d'importance introduits, nous avons clairement délimité les conditions dans lesquelles ces termes quadratiques occupent une importance non négligeable.

Les graphiques de la figure 11.30 représentent, en fonction de l'incidence du vent; les facteurs de forme de quelques sections de ponts célèbres. Les courbes de la figure 11.30 peuvent être utilisées dans différentes circonstances :

- lorsque l'analyse stochastique d'une structure doit être entreprise, un graphique du facteur de forme permet d'estimer la nécessité de prendre en compte ou non les termes quadratiques croisés. Il suffit pour cela de relever, pour chacun des coefficients aérodynamiques, son facteur de forme, à l'abscisse de l'angle d'incidence considéré pour l'étude. Les valeurs relevées permettent alors de justifier la prise en compte ou non des termes quadratiques croisés;
- le graphique du facteur de forme permet également de repérer une zone d'incidence critique dans laquelle les termes quadratiques croisés ne peuvent plus être négligés. Le terme critique est employé car des problèmes d'instabilité dynamique peuvent alors se présenter. Par exemple, dans le cas du viaduc de Millau et en optant pour un facteur de forme limite de 25, on peut constater qu'un approche linéaire permettra de représenter correctement les déplacements horizontaux si l'angle d'incidence moyen est supérieur à  $-7^\circ$ , les déplacements verticaux si l'angle l'incidence moyen n'est pas compris entre  $2^\circ$  et  $8^\circ$  et les angles de torsion à condition que l'angle d'incidence moyen ne soit pas compris entre  $-4^\circ$  et  $0^\circ$ .
- dans un contexte plus général, le facteur de forme peut également être utilisé pour estimer la susceptibilité d'une section à l'instabilité dynamique présentée. Il suffit pour cela de repérer, pour chaque coefficient aérodynamique, la taille de l'intervalle d'angles d'incidence qui mène à l'instabilité. Une pondération de ces intervalles par les densités de probabilité des angles d'incidence permet alors de donner une idée de l'importance des termes quadratiques croisés.

#### 11.5.4 Niveau d'hypothèses $n^{\circ}5$

Sous le niveau d'hypothèses  $n^{\circ}5$ , les expressions de la vitesse apparente et de l'angle d'incidence intervenant dans les forces aérodynamiques sont non linéaires :

$$F^{(5)}(t) = \frac{1}{2}\rho [c_d + c'_d i(t)] B |V_{app}(t)|^2 \quad (11.32)$$

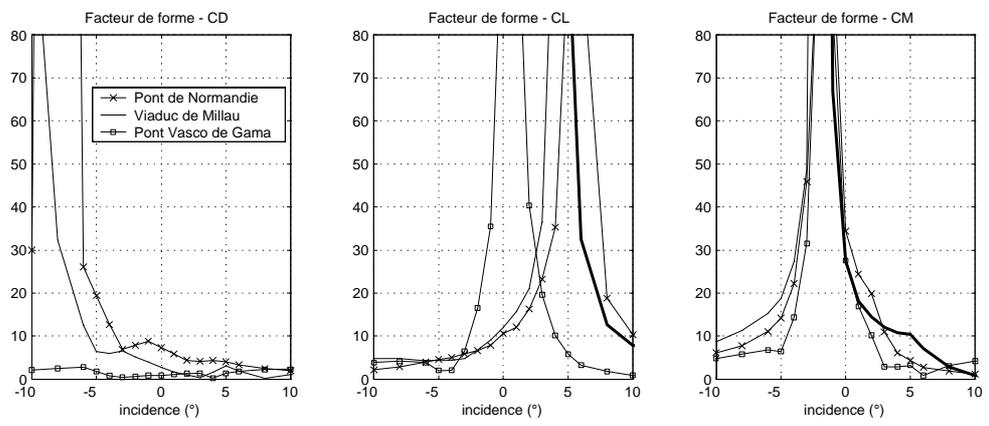


FIGURE 11.30. FACTEURS DE FORME DE COEFFICIENTS AÉRODYNAMIQUES

$$\text{où } |V_{app}(t)|^2 = U^2 + 2Uu(t) - 2U\dot{x}(t) + u(t)^2 + \dot{x}(t)^2 - 2u(t)\dot{x}(t) \quad (11.33)$$

$$\text{et } i(t) = \arctan \left[ \frac{w(t)}{U + u(t) - \dot{x}(t)} \right] \quad (11.34)$$

Afin de continuer dans le même raisonnement que précédemment, nous allons les exprimer en fonction des efforts sous le niveau d'hypothèses précédent. Pour ce faire, il est commode d'introduire une correction de l'angle d'incidence  $\Delta i(t)$  ainsi qu'une correction de la vitesse apparente  $\Delta V(t)$  :

$$F^{(5)}(t) = \frac{1}{2}\rho \left[ c_d + c'_d \frac{w(t)}{U} + c'_d \Delta i(t) \right] B [U^2 + 2Uu(t) - 2U\dot{x}(t) + \Delta V(t)] \quad (11.35)$$

$$\text{où } \Delta V(t) = u(t)^2 + \dot{x}(t)^2 - 2u(t)\dot{x}(t) = [u(t) - \dot{x}(t)]^2 \quad (11.36)$$

$$\text{et } \Delta i(t) = \arctan \left[ \frac{w(t)}{U + u(t) - \dot{x}(t)} \right] - \frac{w(t)}{U} \quad (11.37)$$

L'introduction de ces nouvelles corrections permet de relier sous une forme assez compacte les expressions des efforts sous les deux niveaux d'hypothèses :

$$\begin{aligned} \frac{F^{(5)}(t)}{\frac{1}{2}\rho BU^2} &= \frac{F^{(3)}(t)}{\frac{1}{2}\rho BU^2} + \left( c_d + c'_d \frac{w(t)}{U} \right) \frac{\Delta V(t)}{U^2} + c'_d \Delta i(t) \left( 1 + 2\frac{u(t)}{U} - 2\frac{\dot{x}(t)}{U} \right) \\ &\quad + c'_d \Delta i(t) \frac{\Delta V(t)}{U^2} \end{aligned} \quad (11.38)$$

L'expression de la correction de l'angle d'incidence est assez compliquée à utiliser. Afin de mettre en évidence les conséquences liées à la prise en compte des termes non linéaires dans les expressions de la vitesse et de l'angle d'incidence, nous allons approcher cette fonction par une surface polynômiale d'ordre 3. La décomposition en séries de Taylor d'une fonction de deux variables peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f|_{(0,0)} + x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} + y \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,0)} \\ &\quad + \frac{x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(0,0)} + \frac{2xy}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)} + \frac{y^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{(0,0)} \\ &\quad + \frac{x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{(0,0)} + \frac{3x^2y}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right|_{(0,0)} + \frac{3xy^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right|_{(0,0)} + \frac{y^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right|_{(0,0)} \end{aligned} \quad (11.39)$$

Bien que les dérivées successives soient assez difficiles à calculer, le développement polynômial de la fonction intéressante est assez simple :

$$\arctan \left[ \frac{x}{1+y} \right] \simeq x - xy - \frac{x^3}{3} + xy^2 \quad (11.40)$$

Pour la correction de l'angle d'incidence, nous pouvons donc écrire :

$$\Delta i(t) \simeq -\frac{w(t) [u(t) - \dot{x}(t)]}{U^2} - \frac{w^3(t)}{3U^3} + \frac{w(t) [u(t) - \dot{x}(t)]^2}{U^3} = -\frac{w(t) [u(t) - \dot{x}(t)]}{U^2} + \frac{\Delta^{(3)}}{U^3} \quad (11.41)$$

Cette expression est nulle au premier ordre, ce qui justifie la formulation de l'hypothèse simplificatrice. Les termes de second ordre dans la relation (11.41) sont de la même forme que ceux introduits lors du passage du niveau d'hypothèses  $n^\circ 2$  au niveau  $n^\circ 3$ . Au lieu de nous repérer par rapport au niveau précédent (comme dans la relation (11.38)), nous allons donc de nouveau exprimer les corrections par rapport au niveau d'hypothèses  $n^\circ 2$  :

$$\begin{aligned} \frac{F^{(5)}(t)}{\frac{1}{2}\rho BU^2} &= \frac{F^{(2)}(t)}{\frac{1}{2}\rho BU^2} + 2c'_d \frac{u(t)w(t)}{U^2} - 2c'_d \frac{w(t)\dot{x}(t)}{U^2} \\ &+ \left( c_d + c'_d \frac{w(t)}{U} \right) \frac{\Delta V(t)}{U^2} + c'_d \Delta i(t) \left( 1 + 2\frac{u(t)}{U} - 2\frac{\dot{x}(t)}{U} \right) \\ &+ c'_d \Delta i(t) \frac{\Delta V(t)}{U^2} \end{aligned} \quad (11.42)$$

En remplaçant dans cette relation  $\Delta i(t)$  et  $\Delta V(t)$  par leur expressions et en ne conservant que les termes d'ordre 4 au plus, on obtient finalement l'expression des corrections de différents ordres à ajouter :

$$\begin{aligned} \frac{F^{(5)}}{\frac{1}{2}\rho BU^2} &= \frac{F^{(2)}}{\frac{1}{2}\rho BU^2} + \underbrace{c'_d \frac{uw}{U^2} - c'_d \frac{w\dot{x}}{U^2}}_{\text{cf corr. Niv 3}} + c_d \frac{(u - \dot{x})^2}{U^2} \\ &- c'_d \frac{w^3}{3U^3} + c'_d \frac{(u - \dot{x}) w [(u - \dot{x})^2 - 2w^2]}{U^4} \end{aligned} \quad (11.43)$$

Les deux premiers termes de correction de second ordre  $\left( c'_d \frac{uw}{U^2} - c'_d \frac{w\dot{x}}{U^2} \right)$  valent la moitié des termes de correction qui ont été ajoutés lors du passage au niveau d'hypothèses  $n^\circ 3$  (Equ. (11.24)). Nous avons vu que l'interprétation de ces termes comme des contributions supplémentaires aux effets turbulents et instationnaires s'harmonisait assez bien avec les conséquences qu'ils engendrent sur les déplacements de l'oscillateur. Les conclusions qui ont été tirées au paragraphe précédent sont donc toujours d'application mais à utiliser dorénavant avec une mise à l'échelle adéquate. La réduction par moitié des termes quadratiques croisés discutés au paragraphe précédent permettent de justifier les résultats obtenus lors de l'analyse de la structure à plusieurs degrés de liberté. En effet, lors de l'étude de la poutre isostatique, nous avons constaté que la prise en compte des termes relatifs au niveau d'hypothèses  $n^\circ 5$  venait contrecarrer les accroissements de déplacements relevés sous le niveau d'hypothèses  $n^\circ 3$ .

Le troisième terme de correction de second ordre  $\left( c_d \frac{(u - \dot{x})^2}{U^2} \right)$  est toujours positif. Cette

contribution aux forces aérodynamiques agit donc toujours dans le même sens. La moyenne de cette contribution n'est pas nulle; on peut donc lui associer une contribution non nulle au déplacement moyen de l'oscillateur. Cette nouvelle correction ajoutée à l'expression de l'effort aérodynamique semble donc trouver sa place au rang des effets moyens. Il ne faut cependant pas perdre de vue que ce terme ajoute également des contributions qui varient au cours du temps.

Sans aucun doute, le terme de correction de troisième ordre  $\left(-c'_d \frac{w^3}{3U^3}\right)$  doit être considéré comme un effet turbulent. Il a d'autant plus d'importance que l'intensité de la turbulence verticale est grande. Bien que ce terme puisse être positif ou négatif, il ne peut de toute façon qu'engendrer une réduction de l'effet turbulent global appliqué sur la structure. En effet, il vient s'adjoindre à l'effet turbulent de base associée à la composante verticale de la turbulence pour donner :

$$c'_d \frac{w}{U} - c'_d \frac{w^3}{3U^3} = c'_d \frac{w}{U} \left(1 - \frac{w^2}{3U^2}\right) \quad (11.44)$$

Puisque les niveaux de turbulence traités en pratique sont toujours de loin inférieurs à l'unité, le facteur multiplicateur dont ce nouveau terme est responsable, est inévitablement réducteur.

Afin d'illustrer les quelques commentaires qui viennent d'être formulés, une nouvelle série d'analyses a été entreprise dans les mêmes conditions qu'au paragraphe précédent mais sous le niveau d'hypothèses  $n^\circ 5$  cette fois. Six cents quarante analyses supplémentaires sont donc entreprises en faisant varier le niveau de turbulence (8 valeurs différentes) ainsi que le facteur de forme du coefficient aérodynamique (10 valeurs différentes). Pour chaque combinaison de ces deux paramètres, huit analyses sont entreprises avec des échantillons de vitesses de vent différents.

La figure 11.31 résume les écart-types moyens obtenus sur l'ensemble des réponses calculées. Les résultats sous le niveau d'hypothèses  $n^\circ 2$  sont également présentés afin de faciliter la comparaison. Cette fois, l'écart entre les niveaux d'hypothèses  $n^\circ 5$  et  $n^\circ 2$  ne dépasse que difficilement les 20%. Ceci rejoint effectivement les observations réalisées jusqu'ici. Etant donné que la réduction du facteur d'amplification provient en partie d'une diminution de moitié du terme quadratique instationnaire, il n'est pas étonnant que le dernier graphique de la figure 11.31 ressemble à celui qui serait obtenu en doublant l'échelle des abscisses du graphique correspondant de la figure 11.25.

A la figure 11.32, les courbes de niveaux du graphique de gauche sont plus verticales que leurs correspondantes de la figure 11.26. Ceci indique que les termes quadratiques instationnaires ne sont pas les seuls responsables. En effet, la correction de seconde ordre qui est toujours positive  $\left(c_d \frac{(u-\dot{x})^2}{U^2}\right)$ , apporte, en plus d'un accroissement de moyenne, une variabilité plus importante de l'effort, et donc également du déplacement. La tendance de ces courbes de niveaux à être parallèles à l'axe  $I_c$  semble montrer que ce dernier terme de correction soit prépondérant (puisque'il n'est lui-même influencé que par le paramètre  $I_w$ ).

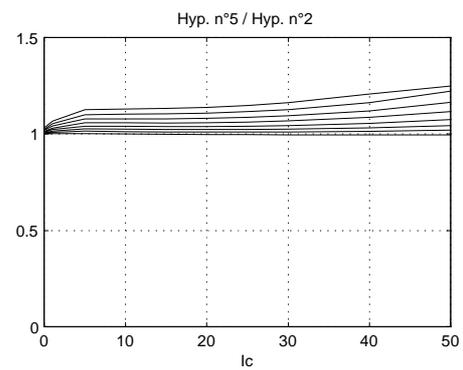
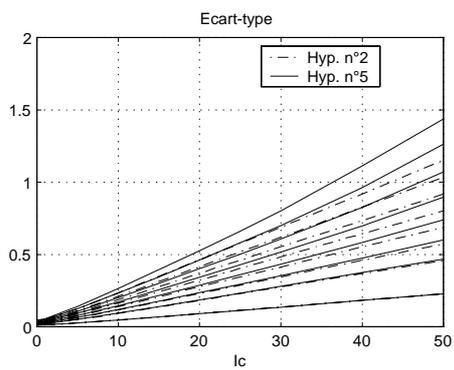
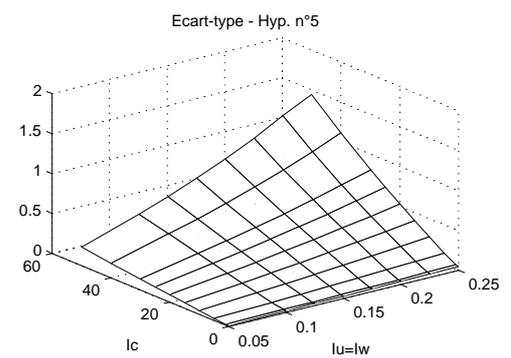
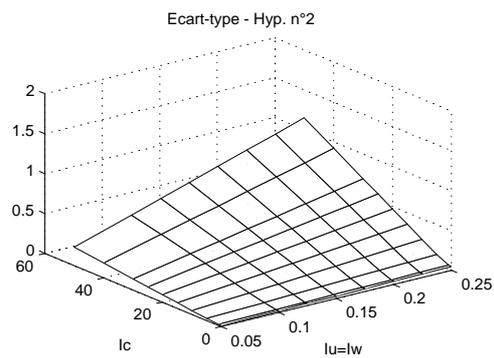


FIGURE 11.31. ECART-TYPES CALCULÉS SOUS LES NIVEAUX D'HYPOTHÈSES 2 ET 5

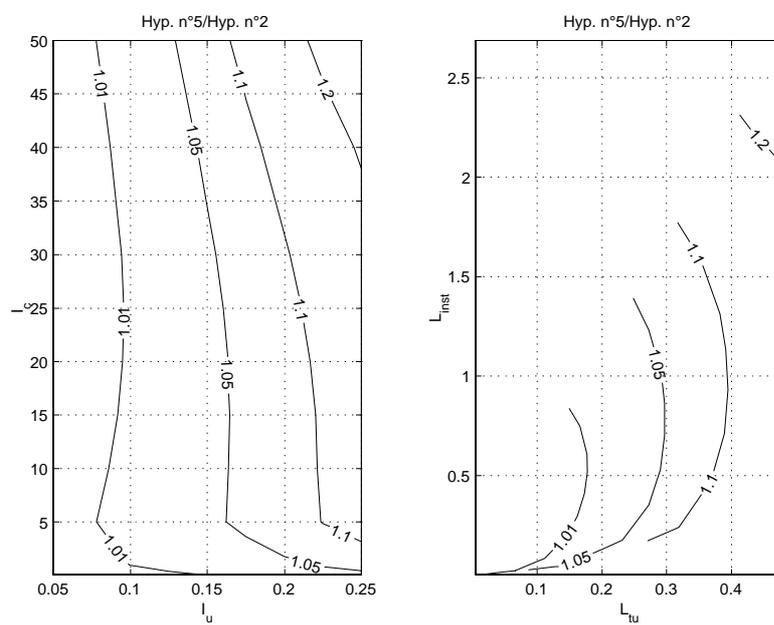


FIGURE 11.32. FACTEUR D'AMPLIFICATION DES ÉCART-TYPES

La représentation dans le plan  $L^{tu}$ ,  $L^{inst}$  n'a plus guère d'intérêt dans la mesure où ces paramètres avaient été introduits pour rendre uniquement compte des influences des deux termes quadratiques croisés du paragraphe précédent.

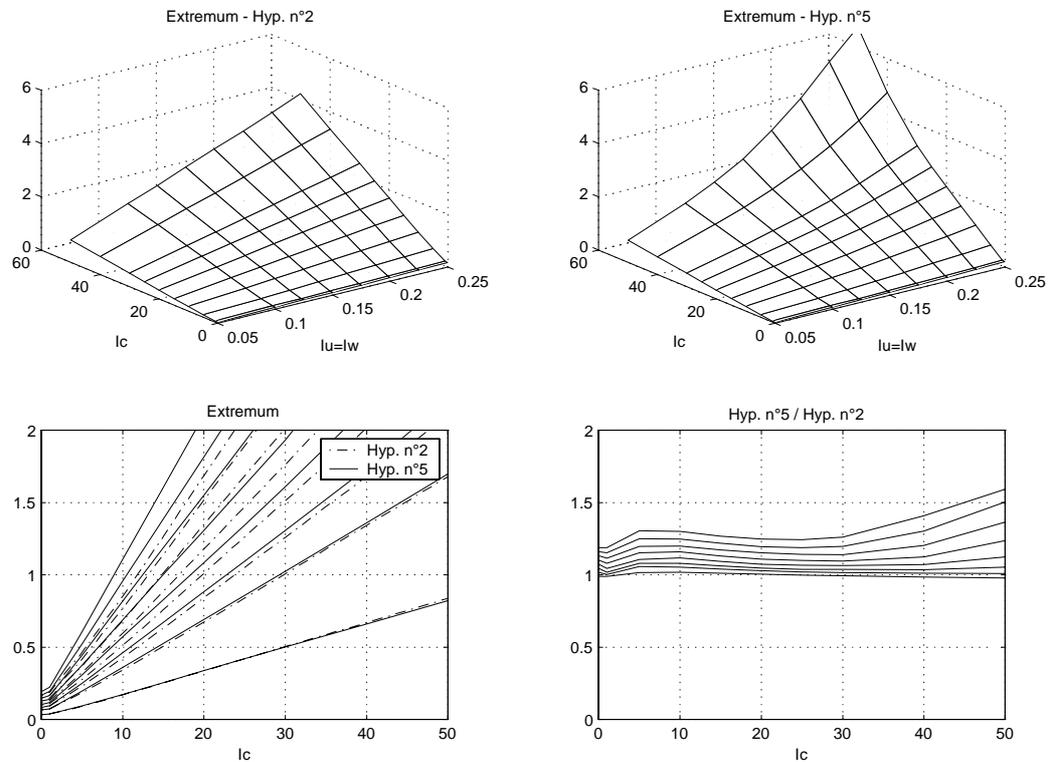


FIGURE 11.33. EXTREMA CALCULÉS SOUS LES NIVEAUX D'HYPOTHÈSES 2 ET 5

Les figures 11.33 et 11.34 concernent les déplacements extrêmes. Le facteur d'amplification associé à ces valeurs augmente plus rapidement que celui associé aux écart-types. Ceci témoigne à nouveau du caractère non gaussien de la réponse de l'oscillateur. La forme des courbes de niveaux représentant le facteur d'amplification montrent que la correction positive responsable de l'augmentation de l'écart-type est également prépondérante dans ce cas. L'espacement entre courbes de niveaux de moins en moins grand et la concavité tournée vers le haut de la surface représentant l'extremum sous le niveau n°5 témoignent d'une possibilité d'instabilité dynamique. Dans le cas pratique étudié, cette instabilité n'est en principe pas à craindre dans la mesure où une turbulence de 25% et un coefficient de forme de 25 ne mènent à une erreur que de 20% sur l'estimation du déplacement extrême. La forme du facteur d'amplification est en effet tributaire du choix de l'indice d'amortissement  $I_a$  ou des intensités de turbulence  $I_u$  et  $I_w$ . Un autre choix de ces paramètres pourrait mener à une situation où l'instabilité dynamique apparaît beaucoup plus tôt.

La figure 11.35 représente le facteur d'amplification des moyennes. Les courbes de

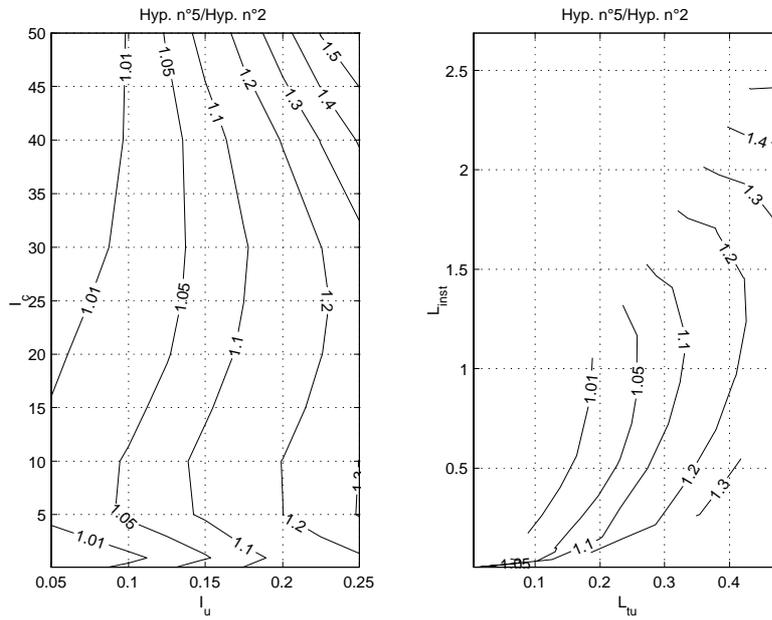


FIGURE 11.34. FACTEUR D'AMPLIFICATION DES EXTREMA

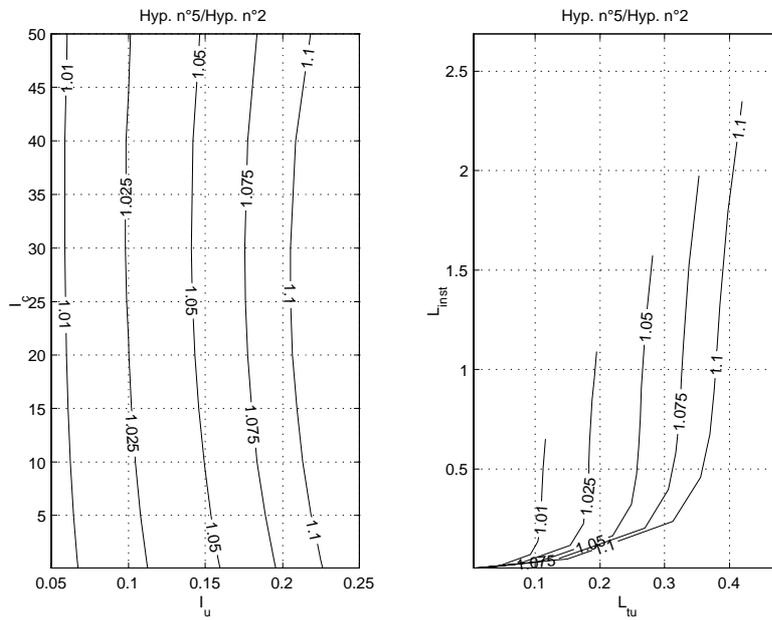


FIGURE 11.35. FACTEUR D'AMPLIFICATION DES MOYENNES

niveaux obtenues dans le plan  $(I_u, I_c)$  sont presque verticales. L'augmentation de la moyenne est donc indépendante du facteur de forme  $I_c$ , c'est-à-dire de la dérivée  $c'_d$  du coefficient aérodynamique. Parmi toutes les corrections qui ont été introduites (Equ. (11.43)), seul le terme  $c_d \frac{(u-\bar{x})^2}{U^2}$  influence donc la moyenne. Ceci correspond effectivement aux déductions tirées ci-avant, lors de la discussion sur les influences de chacune de ces corrections.

## 11.6 Conclusions

L'objectif principal de ce chapitre était de présenter l'analyse stochastique dans le domaine temporel pour une structure à plusieurs degrés de liberté. La démarche suivie a commencé de manière assez logique par une validation du modèle par comparaison avec des résultats d'analyses dans le domaine fréquentiel. Dès le début, nous avons pu constater que les critères de choix des paramètres de génération établis au préalable devaient être strictement respectés afin d'obtenir de bonnes concordances entre les résultats émanant des deux domaines.

A l'occasion d'une étude sur l'influence du coefficient de cohérence du vent, nous avons mis en évidence la bonne correspondance entre les domaines temporel et fréquentiel d'une part ainsi que la qualité des champs de vitesses générés en termes de cohérence d'autre part.

L'approche stochastique temporelle de la structure à plusieurs degrés de liberté s'est avérée être assez complexe à commenter. Tout au moins, les conclusions qui ont été déduites de cette étude auraient difficilement pu être interprétées, voir extrapolées, dans le cadre d'une autre structure. C'est pour cette raison que nous sommes revenus à l'étude de l'oscillateur simple, soumis cette fois, au chargement non linéaire turbulent. Le retour à cette structure simple a effectivement permis de modéliser et mettre en évidence des phénomènes tout à fait généraux tels l'instabilité par amortissement négatif. La progression au travers des différents niveaux d'hypothèses que nous nous étions fixés a permis de mettre en évidence des relations analytiques pour les termes de chargement qui ne sont pas pris en compte lors d'études linéaires. Ces termes ont ainsi pu être interprétés et les applications numériques présentées ont permis de justifier les commentaires formulés à leur propos.



---

# Chapitre 12

---

## Conclusions

L'objectif principal de ce travail consiste à mettre en évidence les effets des caractéristiques non linéaires du chargement aérodynamique. Les développements intermédiaires et préliminaires présentés au cours du document, ont démontré que l'atteinte de cet objectif n'est pas aussi simple.

Quelques chapitres de rappels théoriques, auxquels notre participation ne concerne que la présentation peut-être originale de la méthode, ont permis de fixer le contexte de travail. Les rappels présentés touchent des domaines fort différents, pour certains très vastes et complexes, ce qui fait de l'analyse au vent turbulent un domaine d'application difficile à maîtriser parfaitement.

De manière générale, avant de se préoccuper de l'analyse non linéaire d'une structure, il convient de pouvoir cerner correctement les limitations de l'analyse linéaire. La seconde partie du document a présenté la méthode d'analyse classique (ainsi que ses simplifications) dans le domaine fréquentiel. A ce niveau, des comparaisons entre les résultats analytiques d'un calcul d'une structure continue ont été confrontés avec les résultats numériques obtenus sur une structure discrétisée. Ceci a permis de mettre en évidence un certain désaccord entre les deux méthodes. Cette discordance peut être attribuée à une mauvaise représentation de la cohérence des pressions de vent sur l'ouvrage lorsque celui-ci est discrétisé.

Nous avons alors proposé une méthode, basée sur une correction fréquentielle de la matrice de densité spectrale des forces nodales, permettant d'approcher plus finement cette cohérence. L'efficacité de cette méthode a été démontrée sur base d'un exemple. La principale limitation actuelle des coefficients établis est la nécessité d'étudier une structure filaire. Une formulation analytique semblable à celle qui a été développée permettrait cependant d'étudier une structure tridimensionnelle. D'autres limitations pourraient également être levées. En effet, seuls les termes correcteurs relatifs aux efforts tranchants ont été développés; il faudrait idéalement établir aussi les facteurs associés aux termes de torsion. Une autre hypothèse de travail qui a été formulée consiste en l'équivalence des coefficient de cohérence pour chacune des deux directions principales de turbulence. Un travail plus ap-

profondi devrait permettre l'utilisation de deux coefficients différents (voire trois pour les problèmes tridimensionnels).

Dans le cadre de la structure simple étudiée, ces facteurs de correction devraient alors suffire. Pour une structure plus complexe, il serait vraisemblablement nécessaire que des termes de correction croisés entre torsion et effort tranchant soient également évalués.

La comparaison des résultats issus d'une analyse numérique avec des résultats analytiques consiste déjà en le franchissement d'une étape importante de la comparaison analytique - approche temporelle. Il faut cependant mentionner que les facteurs de correction établis dans la seconde partie du document n'ont pas été utilisés à l'occasion de l'approche temporelle. Ces coefficients auraient effectivement pu être utilisés pour corriger les densités spectrales cibles des échantillons à générer. La solution de référence consiste donc en celle obtenue par une analyse numérique dans le domaine fréquentiel.

Afin d'entamer les explications relatives à l'analyse dans le domaine temporel, nous avons présenté les différentes techniques de génération d'échantillons de processus aléatoires. Si ce thème n'était pas aussi pratique, la génération de processus unidimensionnels aurait très bien pu trouver sa place dans les rappels théoriques. Par contre, les développements relatifs à la génération d'histoires cohérentes sont plutôt personnels. D'autres auteurs ont également développé, pour des champs de vitesse cibles assez simples, des formulations analytiques pour les valeurs propres et les modes propres que nous avons introduits. Il convient également de remarquer que la démarche que nous avons présentée se rapproche de la génération de variables aléatoires corrélées à l'aide de décompositions de Karhunen-Loeve.

Le générateur développé et implémenté permet la génération d'échantillons de processus aléatoires quels qu'ils soient. Sa robustesse a été testée sur des densités spectrales cibles assez diverses mais toujours sous l'hypothèse d'un champ de cohérence spatial monotonément décroissant, ce que la physique semble difficilement exclure. Pour la génération de champs de vitesse plus importants, une optimisation de l'algorithme a été présentée, mais cependant pas encore mise en oeuvre à ce jour pour d'aussi grosses structures..

Un autre chapitre a exprimé, sur base de raisonnements simples, des critères de choix pour les paramètres de génération ainsi que pour les paramètres de l'analyse dynamique. Les critères retenus devraient permettre de représenter correctement la structure étudiée ainsi que sa sollicitation. Nous avons cependant choisi de ne pas représenter, dans la sollicitation, le contenu fréquentiel aux hautes fréquences qui serait de toute façon filtré par la structure. Un critère supplémentaire concernant l'importance relative de la période de mise en régime par rapport à la durée de l'analyse a été étudié. Il a permis de mettre en évidence que la structure statistique de la réponse étudiée devrait de préférence être calculée sur base de l'entière du signal, phase transitoire incluse.

La structure qui a été analysée dans le domaine fréquentiel a ensuite été reprise dans le domaine temporel. Le premier cycle de vérification veut que les résultats de l'analyse dans le domaine fréquentiel concordent avec ceux de l'analyse temporelle pour laquelle toutes les hypothèses de linéarisation seraient formulées. Cette comparaison a permis de montrer qu'une bonne coïncidence peut effectivement être atteinte, à condition de respecter scrupuleusement les critères de choix des paramètres de génération.

Ensuite, une petite bifurcation a permis de juger de l'importance de la cohérence des pressions de vent sur la réponse de l'ouvrage. A nouveau, une comparaison entre les domaines fréquentiel et temporel ont démontré une excellente concordance.

L'objectif du travail commence donc à se rapprocher puisque, dès que le modèle temporel a pu être validé, les hypothèses de linéarisation ont alors pu être levées successivement. Une première série d'analyses sur la structure à plusieurs degrés de liberté a permis de dégager quelques commentaires et remarques sur les effets de termes non linéaires ajoutés au chargement. Vu la difficulté de généraliser ces constatations à d'autres structures, nous avons décidé de revenir à l'étude d'un oscillateur simple.

La suppression d'une première série d'hypothèses a permis de mettre en évidence deux termes quadratiques croisés entre processus aléatoires. Ces termes sont responsables d'une instabilité dynamique par amortissement négatif. Ce phénomène a pu être modélisé et représenté sur quelques exemples. Nous avons décidé de représenter les effets de ces deux termes quadratiques à l'aide de deux coefficients représentatifs. L'utilisation de ces deux coefficients permet une interprétation aisée du phénomène mais il semblerait néanmoins que ces deux coefficients ne suffisent pas à représenter correctement le phénomène. Leur application à la structure à plusieurs degrés de liberté n'est en effet pas si évidente.

La suppression d'une autre série d'hypothèses a permis d'introduire davantage de termes de correction des efforts. Les premiers termes quadratiques croisés responsables de l'instabilité se trouvent maintenant diminués de moitié. Dans les exemples étudiés, leur effet ne se fait plus trop ressentir. Un autre terme, également de second ordre, est apparu avec ce niveau d'hypothèses. Il a aussi pu être identifié clairement comme responsable d'une instabilité aérodynamique. Ces effets semblent pourtant moins importants que ceux des premiers termes quadratiques. Ces conclusions ne concernent que les exemples étudiés.

Quatre grandeurs adimensionnelles principales semblent représenter le phénomène. Parmi ces quatre grandeurs, nous n'avons étudié que les effets de deux d'entre elles; des résultats obtenus, l'influence des deux autres paramètres n'est pas immédiate. D'autres séries de simulations devraient permettre de mieux cerner les phénomènes mis en jeu.

Dans la démarche retenue, la dernière hypothèse qui doit être levée concerne le comportement linéaire des coefficients aérodynamiques. Bien que la méthode d'analyse dynamique de la structure soumise au chargement complètement non linéaire soit déjà programmée, aucune expression ni développement analytique n'ont été entrepris dans ce cas. Il conviendrait idéalement de quantifier, au même titre que pour les autres niveaux d'hypothèses, l'erreur commise lors de l'approche de coefficients aérodynamiques par les relations linéaires. A ce stade, il nous a semblé que cet ultime niveau d'hypothèse pouvait en effet être traité "au cas par cas", pour des coefficients aérodynamiques réalistes imposés.



---

## Bibliographie

---

1. AMBROSINI R. D., RIERA J. D., DANESI R. F., *Analysis of structures subjected to random wind loading by simulation in the frequency domain*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 233-239, Vol. 17 (2002).
2. ARMAND J.-L., BELLIZZI S., BOUC R., GUENARD Y., ORSERO P., *Méthodes probabilistes appliquées à la dynamique des structures*, Institut pour la promotion des sciences de l'ingénieur, Notes de cours, Marseille, (20-22 mars 1990).
3. BARTOLI G., BORRI C., FACCHINI L., *Simulation of non-Gaussian wind pressures on a 3-D bluff body and estimation of design loads*, Computers and Structures, pp. 1061-1070, Vol. 80 (2002).
4. BELLIZZI S., BOUC R., *Analysis of multi-degree of freedom strongly non-linear mechanical systems with random input - Part I : Non-linear modes and stochastic averaging*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 229-244, Vol. 14 (1999).
5. BELLIZZI S., BOUC R., *Analysis of multi-degree of freedom strongly non-linear mechanical systems with random input - Part II : Equivalent linear system with random matrices and power spectral density matrix*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 245-256, Vol. 14 (1999).
6. BRUNEAUX J., *Etude du comportement des ouvrages d'art soumis au vent aléatoire*, CUST Département de Génie Civil, Travail de fin d'études, (Juin 2001).
7. CARASSALE L., SOLARI G., *Wind modes for structural dynamics : a continuous approach*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 157-166, Vol. 17 (2002).
8. CHEN X., KAREEM A., *Advanced analysis of coupled buffeting response of bridges : a complex modal decomposition approach.*, Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 201-213, Vol. 17 (2002).
9. CIGADA A., DIANA G., ZAPPA E., *On the response of a bridge deck to turbulent wind : a new approach*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 1173-1182, Vol. 90 (2002).
10. CLOUGH R. W., PENZIEN J., *Dynamics of structures*, Mc Graw-Hill : Civi Engineering series (second edition), (1993).
11. CREMONA C., *Dynamique aléatoire des structure*, Calcul au vent des ponts, Collège de Polytechnique, Palaiseau. Notes de cours, (15 mai 2002).

12. DAVENPORT A. G., *Past, present and future of wind engineering*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 1371-1380, Vol. 90 (2002).
13. DIANA G., BRUNI S., CIAGADA A., ZAPPA E., *Complex aerodynamic admittance function role in buffeting response of a bridge deck*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 2057-2072, Vol. 90 (2002).
14. DYRBYE C., HANSEN S. O., *Wind loads on structures*, John Wiley & Sons, (1997).
15. FONDER G., *Calcul des structures soumises aux effets dynamiques et sismiques*, Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège, Notes de cours.
16. GERADIN M., RIXEN D., *Théorie des vibrations*, Ed. Masson, Paris (1996).
17. GU M., CHEN S. R., CHANG C. C., *Background component of buffeting response of cable-stayed bridges*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 2045-2055, Vol. 90 (2002).
18. GUO-KANG ER, *Exponential closure method for some randomly excited non-linear systems*, International Journal of Non-Linear Mechanics, pp. 69-78, Vol. 35 (2000).
19. HE Y.-I, MA X., WANG Z.-m, *Nonlinear discrete analysis method for random vibration of guyed masts under wind load*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 512-525, Vol. 91 (2003).
20. KAPPOS A. J., *Dynamic loading and design of structures*, Spon Press (2002).
21. KAREEM A., KIJEWski T., *Time-frequency analysis of wind effects on structures*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 1435-1452, Vol. 90 (2002).
22. KHO S., BAKER C., HOXEY R., *POD/ARMA reconstruction of the surface pressure field around a low rise structure*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 1831-1842, Vol. 90 (2002).
23. LARSEN A., *Aerodynamics of Large Bridges*, Balkema, Amsterdam, (1992).
24. MESTAT P., PRAT M., *Ouvrages en interaction*, AFPC, Emploi des éléments finis en génie civil, Hermes Science Publications, Paris (1999).
25. MINH N. N., MIYATA T., YAMADA H., SANADA Y., *Numerical simulation of wind turbulence and buffeting analysis of long span-bridges*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 301-315, Vol. 83 (1999).
26. PAGNINI L.C., SOLARI G., *Serviceability criteria for wind-induced acceleration and damping uncertainties*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 1067-1078, Vol. 74-76 (1998).
27. PHOON K.K., HUANG S.P., QUEK S.T., *Simulation of second-order processes using Karhunen-Loeve expansion*, Computers and Structures, pp. 1049-1060, Vol. 80 (2002).
28. PRADLWARTER H. J., *Non-linear stochastic response distributions by local statistical linearization*, International Journal of Non-Linear Mechanics, pp. 1135-1151, Vol. 36 (2001).
29. PRADLWARTER H. J., *Deterministic integration algorithms for stochastic response computations of FE-systems*, Computers and structures, pp. 1489-1502, Vol. 80 (2002).

30. PREUMONT A., *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*, Presses polytechniques et universitaires romandes (1990).
31. SIMIU E., SCANLAN R. H., *Wind effects on structures*, John Wiley & Sons (1996).
32. SOLARI G., *The role of analytical methods for evaluating the wind-induced response of structures*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 1453-1477, Vol. 90 (2002).
33. SOLARI G., TUBINO F., *A turbulence model based on principal components*, Probabilistic Engineering Mechanics pp. 327-335, Vol. 17 (2002).
34. SORENSEN P., HANSEN A. D., ANDRE P., ROSAS C., *Wind models for simulation of power fluctuations from wind farms*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics pp. 1381-1402, Vol. 90 (2002).
35. TO C. W. S., *On computational stochastic structural dynamics applying finite elements*, Computational methods in engineering, pp. 3-40, Vol. 8 (2001).



# **PARTIE IV**

## **Annexes**

# Annexe A

## Résultats d'intégrales pour le calcul de l'admittance numérique

Au chapitre 8, nous avons vu que la cohérence des pressions de vent sur un élément fini pouvait être estimée à l'aide de coefficients réducteurs que nous avons appelés *admittances numériques*. Selon que les efforts considérés sont des efforts tranchants, des moments de flexion ou même encore des moments de torsion, et selon que le niveau de correction désiré soit celui de la cohérence sur l'élément, au niveau des forces nodales énergétiquement équivalentes ou au niveau du champ de forces nodales, ces admittances numériques résultent de l'une ou l'autre intégration.

Quelques résultats d'intégrales utiles à l'estimation de ces coefficients sont donnés ci-dessous.

### A.1 Première intégrale

$$I = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L P(x_1)P(x_2)e^{-\frac{|x_1-x_2|}{\Delta}} dx_1 dx_2 \quad (\text{A.1})$$

$$P(x) = A \left(\frac{x}{L}\right)^3 + B \left(\frac{x}{L}\right)^2 + C \left(\frac{x}{L}\right) + D \quad (\text{A.2})$$

$$I = \sum_{i=1}^8 F_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i + e^{-\frac{L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 G_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i \quad (\text{A.3})$$

$$F = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2A^2}{7} + \frac{2B^2}{5} + \frac{2C^2}{3} + 2D^2 + \frac{2AB}{3} + \frac{4AC}{5} + AD + BC + \frac{4BD}{3} + 2CD \\ -A^2 - B^2 - C^2 - D^2 - 2AB - 2AC - 2AD - 2BC - 2BD - 2CD \\ \frac{12A^2}{5} + \frac{4B^2}{3} + 4AB + 4AC + 6AD + 2BC + 4BD \\ -3A^2 + 2C^2 - 4AB - 6AC - 12AD + 2BC - 8BD \\ 0 \\ -8B^2 + 24AC \\ 0 \\ 72A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{A.4})$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ 2AD + 2BD + 2CD + 2D^2 \\ -2C^2 - 2AC + 6AD - 2BC + 4BD \\ 4B^2 - 2C^2 + 4AB - 6AC + 12AD + 8BD \\ -12A^2 + 8B^2 - 24AC \\ -36A^2 + 8B^2 - 24AC \\ -72A^2 \\ -72A^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Lorsque  $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , le polynôme  $P(x)$  représente la ligne d'influences des efforts tranchants (à gauche ou à droite) :

$$F = \begin{pmatrix} 26/35 \\ -1 \\ -12/5 \\ 12 \\ 0 \\ -72 \\ 0 \\ 288 \end{pmatrix} ; G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 24 \\ -72 \\ -288 \\ -288 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Lorsque  $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , le polynôme  $P(x)$  représente la ligne d'influences des moments (à gauche ou à droite) :

$$F = \begin{pmatrix} 2/105 \\ 4 \\ -4/15 \\ 1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 72 \end{pmatrix} ; G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ -28 \\ -72 \\ -72 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Deuxième intégrale

$$I = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L P(x_1)P(x_2)e^{-\frac{kL+x_1+x_2}{\Delta}} dx_1 dx_2 \quad (\text{A.8})$$

$$P(x) = A \left(\frac{x}{L}\right)^3 + B \left(\frac{x}{L}\right)^2 + C \left(\frac{x}{L}\right) + D \quad (\text{A.9})$$

$$I = e^{-\frac{kL}{\Delta}} \left( \sum_{i=1}^8 E_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i + e^{-\frac{L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 F_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i + e^{-\frac{2L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 G_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i \right) \quad (\text{A.10})$$

$$E = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ D^2 \\ 2CD \\ C^2 + 4BD \\ 12AD + 4BC \\ 4B^2 + 12AC \\ 24AB \\ 36A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{A.11})$$

$$F = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -2AD - 2BD - 2CD - 2D^2 \\ -2C^2 - 2AC - 6AD - 2BC - 4BD - 4CD \\ -4B^2 - 2C^2 - 4AB - 6AC - 12AD - 8BC - 8BD \\ -12A^2 - 8B^2 - 24AB - 24AC - 24AD - 8BC \\ -36A^2 - 8B^2 - 48AB - 24AC \\ -72A^2 - 48AB \\ -72A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{A.12})$$

$$G = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB + 2AC + 2AD + 2BC + 2BD + 2CD \\ 6A^2 + 4B^2 + 2C^2 + 10AB + 8AC + 6AD + 6BC + 4BD + 2CD \\ 21A^2 + 8B^2 + C^2 + 28AB + 18AC + 12AD + 8BC + 4BD \\ 48A^2 + 8B^2 + 48AB + 24AC + 12AD + 4BC \\ 72A^2 + 4B^2 + 48AB + 12AC \\ 72A^2 + 24AB \\ 36A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{A.13})$$

Lorsque  $\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$  ou  $\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ , le polynôme  $P(x)$  représente la ligne d'influences des efforts tranchants (à gauche ou à droite) :

$$E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -12 \\ 24 \\ 36 \\ -144 \\ 144 \end{Bmatrix} ; F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -12 \\ -24 \\ 72 \\ 0 \\ -288 \end{Bmatrix} ; G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 36 \\ 144 \\ 144 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

### A.3 Troisième intégrale

$$I = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L P(x_1)P(x_2)e^{-\frac{kL+x_1-x_2}{\Delta}} dx_1 dx_2 \quad (\text{A.15})$$

$$P(x) = A \left(\frac{x}{L}\right)^3 + B \left(\frac{x}{L}\right)^2 + C \left(\frac{x}{L}\right) + D \quad (\text{A.16})$$

$$I = e^{-\frac{(k-1)L}{\Delta}} \left( \sum_{i=1}^8 E_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i + e^{-\frac{L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 F_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i + e^{-\frac{2L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 G_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i \right) \quad (\text{A.17})$$

$$E = \begin{Bmatrix} 0 \\ AD + BD + CD + D^2 \\ C^2 + AC - 3AD + BC - 2BD \\ 2B^2 - C^2 + 2AB - 3AC + 6AD + 4BC \\ 6A^2 + 12AC - 4B^2 \\ -18A^2 + 4B^2 - 12AC \\ 36A^2 \\ -36A^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$F = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -A^2 - B^2 - C^2 - D^2 - 2AB - 2AC - 2AD - 2BC - 2BD - 2CD \\ 0 \\ -3A^2 + 2C^2 - 4AB - 6AC - 12AD - 8BD \\ 0 \\ -8B^2 + 24AC \\ 0 \\ 72A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{A.19})$$

$$G = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ AD + BD + CD + D^2 \\ -C^2 - AC + 3AD - BC + 2BD \\ 2B^2 - C^2 + 2AB - 3AC + 6AD + 4BD \\ -6A^2 + 4B^2 - 12AC \\ -18A^2 + 4B^2 - 12AC \\ -36A^2 \\ -36A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{A.20})$$

Lorsque  $\left\{ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}$  ou  $\left\{ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$ , le polynôme  $P(x)$  représente la ligne d'influences des efforts tranchants (à gauche ou à droite) :

$$E = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -12 \\ -36 \\ 144 \\ -144 \end{array} \right\} ; F = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ -72 \\ 0 \\ 288 \end{array} \right\} ; G = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 12 \\ -36 \\ -144 \\ -144 \end{array} \right\} \quad (\text{A.21})$$

#### A.4 Quatrième intégrale

$$I = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L P(x_1)P(x_2)e^{-\frac{kL-x_1-x_2}{\Delta}} dx_1 dx_2 \quad (\text{A.22})$$

$$P(x) = A \left(\frac{x}{L}\right)^3 + B \left(\frac{x}{L}\right)^2 + C \left(\frac{x}{L}\right) + D \quad (\text{A.23})$$

$$I = e^{-\frac{(k-2)L}{\Delta}} \left( \sum_{i=1}^8 E_i \left( \frac{\Delta}{L} \right)^i + e^{-\frac{L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 F_i \left( \frac{\Delta}{L} \right)^i + e^{-\frac{2L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 G_i \left( \frac{\Delta}{L} \right)^i \right) \quad (\text{A.24})$$

$$E = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB + 2AC + 2AD + 2BC + 2BD + 2CD \\ -6A^2 - 4B^2 - 2C^2 - 10AB - 8AC - 6AD - 6BC - 4BD - 2CD \\ 21A^2 + 8B^2 + C^2 + 28AB + 18AC + 12AD + 8BC + 4BD \\ 48A^2 - 8B^2 - 48AB - 24AC - 12AD - 4BC \\ 72A^2 + 4B^2 + 48AB + 12AC \\ -72A^2 - 24AB \\ 36A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{A.25})$$

$$F = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -2AD - 2BD - 2CD - 2D^2 \\ 2C^2 + 2AC + 6AD + 2BC + 4BD + 4CD \\ -4B^2 - 2C^2 - 4AB - 6AC - 12AD - 8BC - 8BD \\ 12A^2 + 8B^2 + 24AB + 24AC + 24AD + 8BC \\ -36A^2 - 8B^2 - 48AB - 24AC \\ 72A^2 + 48AB \\ -72A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{A.26})$$

$$G = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ D^2 \\ -2CD \\ C^2 + 4BD \\ -12AD - 4BC \\ 4B^2 + 12AC \\ -24AB \\ 36A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{A.27})$$

Lorsque  $\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$  ou  $\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ , on obtient les résultats de l'intégrale pour les lignes d'influences des efforts tranchants (à gauche ou à droite) :

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 36 \\ -144 \\ 144 \end{pmatrix} ; F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -12 \\ 24 \\ 72 \\ 0 \\ -288 \end{pmatrix} ; G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -12 \\ -24 \\ 36 \\ 144 \\ 144 \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

### A.5 Cinquième intégrale

$$I = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L P(x_1)P(x_2)e^{-\frac{|L-x_1-x_2|}{\Delta}} dx_1 dx_2 \quad (\text{A.29})$$

$$P(x) = A \left(\frac{x}{L}\right)^3 + B \left(\frac{x}{L}\right)^2 + C \left(\frac{x}{L}\right) + D \quad (\text{A.30})$$

$$I = \sum_{i=1}^8 F_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i + e^{-\frac{L}{\Delta}} \sum_{i=1}^8 G_i \left(\frac{\Delta}{L}\right)^i \quad (\text{A.31})$$

$$F = \left\{ \begin{array}{l} \frac{A^2}{70} + \frac{B^2}{15} + \frac{C^2}{3} + 2D^2 + \frac{AB}{15} + \frac{AC}{5} + AD + \frac{BC}{3} + \frac{4BD}{3} + 2CD \\ -2AD - 2BD - 2CD - 2D^2 \\ \frac{3A^2}{5} + \frac{4B^2}{3} + 2AB + 2AC + 6AD + 2BC + 4BD \\ -4B^2 - 2C^2 - 4AB - 6AC - 12AD - 8BC - 8BD \\ 0 \\ -36A^2 - 8B^2 - 48AB - 24AC \\ 0 \\ -72A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{A.32})$$

$$G = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 + 2D^2 + 2AB + 2AC + 2AD + 2BC + 2BD + 2CD \\ 6A^2 + 4B^2 + 2C^2 + 10AB + 8AC + 6AD + 6BC + 4BD \\ 21A^2 + 8B^2 + 2C^2 + 28AB + 18AC + 12AD + 8BC + 8BD \\ 48A^2 + 8B^2 + 48AB + 24AC \\ 72A^2 + 8B^2 + 48AB + 24AC \\ 72A^2 \\ 72A^2 \end{array} \right\} \quad (\text{A.33})$$

Lorsque  $\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$  ou  $\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ , on obtient les résultats de l'intégrale pour les lignes d'influences des efforts tranchants (à gauche ou à droite) :

$$E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -12 \\ -36 \\ 144 \\ -144 \end{Bmatrix} ; F = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ -72 \\ 0 \\ 288 \end{Bmatrix} ; G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 12 \\ -36 \\ -144 \\ -144 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

## Annexe B

# Intégration numérique de fonctions à forte acuité

Cette annexe présente une méthode d'intégration de fonctions à forte acuité dont les positions des pics sont connues a priori. La démarche est expliquée sur base de deux exemples. Ils consistent à calculer les intégrales numériques des carrés de deux fonctions de transfert d'oscillateurs simples :

$$H(n) = \frac{1}{K^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{n}{f_{nat}}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{n}{f_{nat}}\right]^2} \quad (\text{B.1})$$

dont les caractéristiques sont :

$$K = 1N/m \ ; \ f_{nat} = 1Hz \ ; \ \xi = 0.01 \text{ ou } \xi = 0.05 \quad (\text{B.2})$$

Les intégrales analytiques depuis 0 jusque l'infini de ces fonctions peuvent être obtenues à l'aide d'une intégration par la méthode des résidus :

$$I = \frac{1}{K^2} \frac{\pi f_{nat}}{4\xi} \quad (\text{B.3})$$

soit, pour les exemples qui nous concernent :  $I = 78.5398$  pour  $\xi = 0.01$  et  $I = 15.7080$  pour  $\xi = 0.05$ .

Le pic est d'autant plus pointu que le coefficient d'amortissement relatif est faible. Pour les faibles amortissements considérés en pratique, on peut supposer que le maximum de la fonction est  $H_{\max} = \frac{1}{K^2} \frac{1}{4\xi^2}$ . La largeur du pic à sa mi-hauteur est donc obtenue en résolvant :

$$H(n) = \frac{1}{K^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{n}{f_{nat}}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{n}{f_{nat}}\right]^2} = \frac{H_{\max}}{2} = \frac{1}{K^2} \frac{1}{8\xi^2} \quad (\text{B.4})$$

On peut vérifier que les deux racines  $n_1$  et  $n_2$  de cette équation sont telles que :

$$\frac{\Delta n}{f_{nat}} = \frac{n_2 - n_1}{f_{nat}} = \sqrt{2} \sqrt{1 - 2\xi^2} - \sqrt{1 - 8\xi^2} \simeq 2\xi \quad (\text{B.5})$$

Ceci montre donc que le maximum de la fonction de la transfert est d'autant plus grand et le pic d'autant plus pointu ( $\Delta n$  petit) que la structure est peu amortie.

La figure 12.1 représente, en fonction du nombre d'intervalles choisis, les résultats que fournit l'intégration classique par la méthode des trapèzes. Les points d'intégration sont choisis de manière uniforme entre 0 et  $4Hz$ .

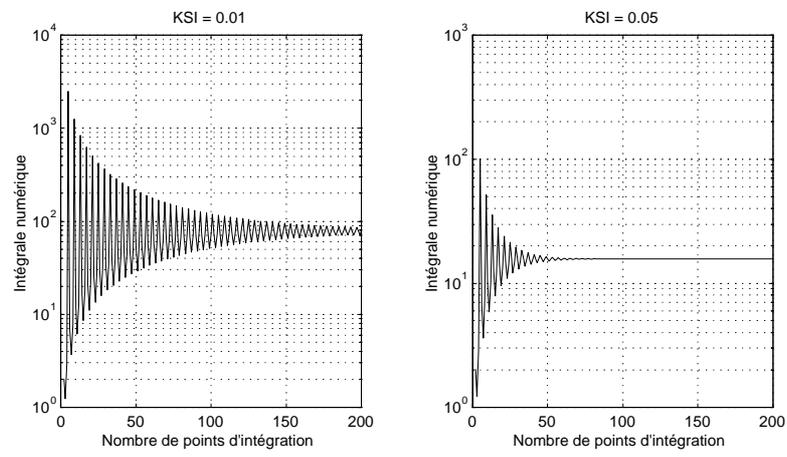


FIGURE 12.1. ESTIMATION DE L'INTÉGRALE NUMÉRIQUE PAR LA MÉTHODE DU TRAPÈZE - POINTS D'INTÉGRATION ESPACÉS UNIFORMÉMENT

Pour les deux fonctions à intégrer, on constate l'existence d'un nombre d'intervalles limite, en-dessous duquel le pic n'est plus représenté correctement. Ce nombre est à rapprocher du rapport entre la fréquence maximale ( $4Hz$ ) et la largeur du pic à sa mi-hauteur  $\Delta n$ .

Dans les fonctions à intégrer numériquement (des densités spectrales), les positions des maxima correspondent à des fréquences proches des fréquences naturelles dont les valeurs sont en général connues. Admettons donc que l'on connaisse une bonne estimation des positions des maxima de la fonction à intégrer. Dans le cas pratique traité, il n'y en a qu'un seul.

Une première approximation de l'intégrale peut être obtenue à partir de ces points :

- le point correspondant à une fréquence nulle (ou à la borne d'intégration inférieure)
- les maxima (ici, il n'y en a qu'un seul)
- la borne d'intégration supérieure

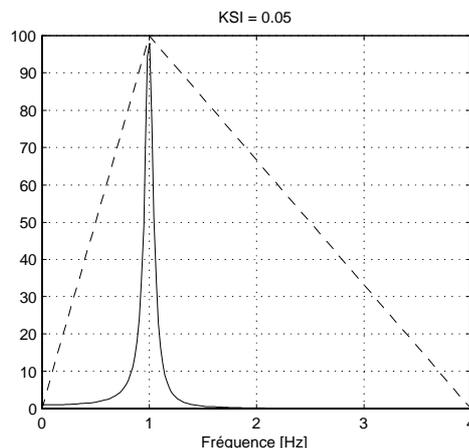


FIGURE 12.2. PREMIÈRE ESTIMATION DE L'INTÉGRALE

Ce premier résultat revient à supposer que la fonction à intégrer est linéaire sur les deux intervalles  $[0; 1]$  et  $[1; 4]$ . L'intégration numérique peut alors avoir lieu selon la méthode du trapèze pour laquelle les points d'intégration ne sont pas espacés uniformément (0, 1 et 4). La procédure itérative consiste à diviser chacun de ces deux intervalles en deux et à appliquer une intégration numérique avec les nouveaux intervalles. Après cette première itération (Fig. 12.3), la fonction est donc approchée par quatre segments définis sur les intervalles  $[0; 0.5]$ ,  $[0.5; 1]$ ,  $[1; 2.5]$  et  $[2.5; 4]$ .

La bisection de chaque intervalle continue ainsi et les points d'intégration supplémentaires permettent de mieux représenter la fonction à intégrer.

Il ne faut évidemment pas continuer ainsi jusqu'à obtenir une intégrale « suffisamment convergée » sinon la méthode n'aurait pas d'intérêt. A partir de la seconde itération, il

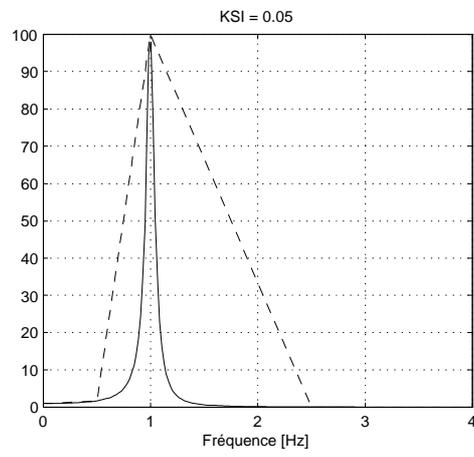


FIGURE 12.3. ESTIMATION DE L'INTÉGRALE APRÈS UNE ITÉRATION

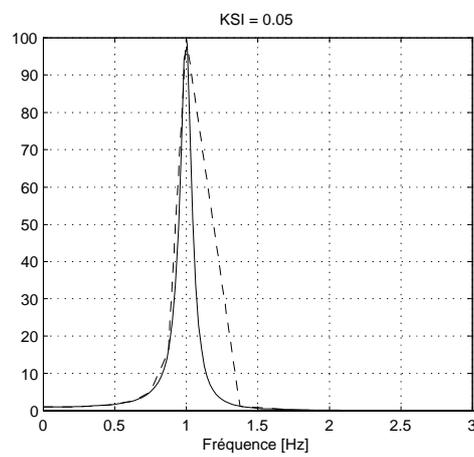


FIGURE 12.4. ESTIMATION DE L'INTÉGRALE APRÈS TROIS ITÉRATIONS

convient de regarder l'intérêt que l'on retire de la division d'un intervalle en deux :

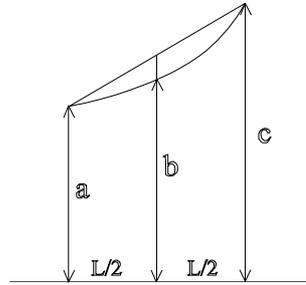


FIGURE 12.5. ESTIMATEUR DE LA NÉCESSITÉ DE BISSECTION

$$S_2 = \frac{a+b}{4}L + \frac{b+c}{4}L = \frac{S_1}{2} + \frac{bL}{2} \left. \vphantom{S_2} \right\} \Rightarrow \frac{S_2 - S_1}{S_{TOT}/N_{interv}} = \frac{bL - S_1}{2S_{TOT}/N_{interv}} \quad (\text{B.6})$$

La différence de surface est comparée à l'intégrale totale divisée par le nombre courant d'intervalles. Si cette différence est plus petite qu'un  $\varepsilon$  à fixer par l'utilisateur, ces deux nouveaux intervalles ne seront plus divisés. Ce raisonnement est motivé par le fait que cette erreur relative ne peut évoluer que monotonément pour autant que les maxima et points d'inflexion aient été fournis comme points de départ. La méthode fonctionne également très bien lorsque les points d'inflexion ne sont pas fournis.

La figure 12.6 représente les positions des points d'intégration obtenus avec une précision  $\varepsilon = 0.001$  et après dix itérations :

La fonction à intégrer est très bien représentée et même trop bien représentée car 282 points d'intégration sont utilisés. La méthode ne présente dans ce cas pas beaucoup d'intérêt par rapport à une intégration avec points d'intégration uniformément répartis.

Le résultat de l'intégrale est cependant très bien approché : 15.709 numériquement contre 15.708 analytiquement.

Les évolutions, au cours des itérations, du nombre de points utilisés ainsi que de l'intégrale calculée sont données à la figure 12.7.

Conformément à l'intuition, la valeur de l'intégrale décroît effectivement monotonément. Quant au nombre de points, il augmente plus que proportionnellement au début (exponentiellement) car chaque intervalle doit être divisé en deux ; la convergence s'installe alors petit à petit et le nombre de points à ajouter à chaque itération diminue (concavité vers le bas).

Ce premier calcul a été réalisé avec une précision  $\varepsilon = 0.001$ , ce qui est un peu trop excessif comme imposition ; cela se traduit effectivement par un nombre de points d'intégration assez élevé. Or, la méthode doit justement trouver son efficacité dans l'utilisation d'un nombre réduit de points !

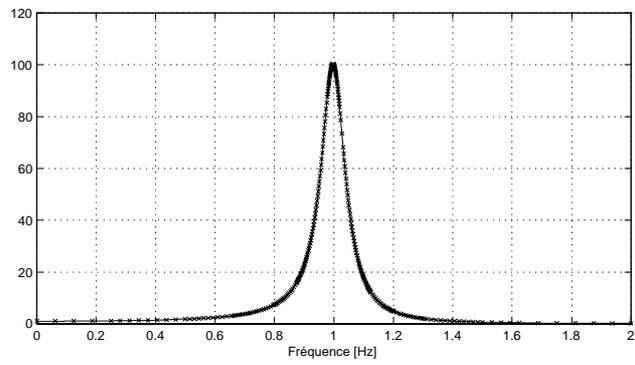


FIGURE 12.6. REPRÉSENTATION DE LA FONCTION À INTÉGRER ET DES POINTS D'INTÉGRATION TROUVÉS ( $\epsilon = 0.001$ )

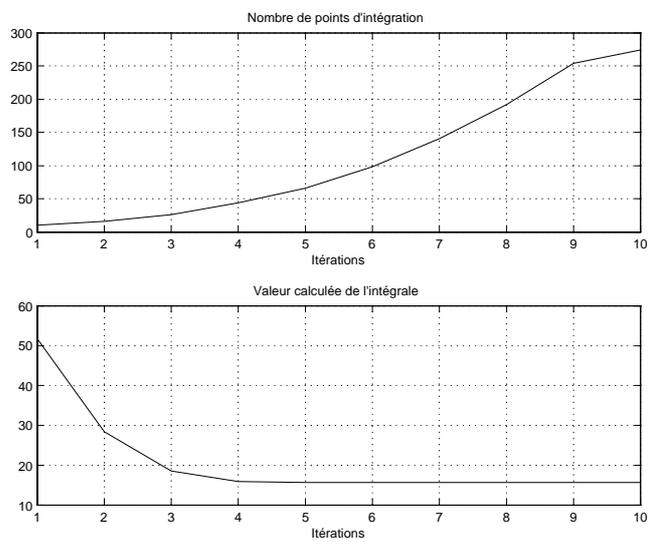


FIGURE 12.7. EVOLUTION AU COURS DES ITÉRATIONS DES CARACTÉRISTIQUES LIÉES À LA MÉTHODE D'INTÉGRATION

En passant à  $\varepsilon = 0.03$ , on n'utilise plus que 66 points, ce qui est déjà mieux. La précision obtenue sur l'intégrale est évidemment moindre : l'intégrale numérique s'élève maintenant à 15.812, ce qui surestime le résultat de 0.7%. La fonction semble donc assez bien approchée (Fig. 12.8) mais un zoom dans le voisinage du pic montre qu'il pourrait être mieux représenté (Fig. 12.9).

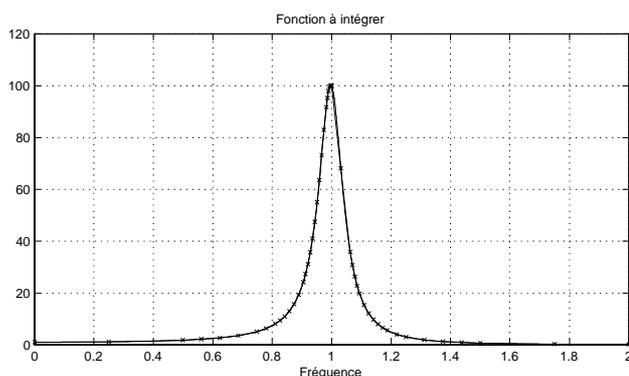


FIGURE 12.8. REPRÉSENTATION DE LA FONCTION À INTÉGRER ET DES POINTS D'INTÉGRATION TROUVÉS ( $\varepsilon = 0.03$ )

Nous savons que ceci est extrêmement important pour le type de fonctions que nous nous proposons d'intégrer. Cela provient du fait que le maximum supposé se trouve en 1 Hz alors qu'en réalité, il est légèrement décalé (effet d'amortissement).

La modification apportée à la méthode consiste alors à essayer de positionner un peu mieux ce maximum avant de commencer les itérations. L'utilisateur doit alors fournir une précision *prec* sur la position du maximum qu'il donne.

On dispose alors de trois points  $[M(1 - prec); M; M(1 + prec)]$  par lesquels il est possible de faire passer une parabole (traits pointillés sur la figure 12.10). Il reste à en calculer le maximum (maximum amélioré) qui sera en principe plus proche du pic.

Si l'on ne connaît pas de précision pour la position du maximum, il est préférable de choisir trop que trop peu de façon à éviter d'avoir les trois points du même côté du maximum réel. Ceci ne poserait de toute façon aucun problème mais réduit simplement l'intérêt de la méthode.

Les histogrammes de la répartition des points d'intégration déterminés selon cette nouvelle méthode montrent l'intérêt de la démarche :

Le tableau 12.1 résume les résultats d'intégrations numériques entreprises à l'aide de la nouvelle méthode. Pour les fonctions très pointues rencontrées en pratique, le couple ( $\varepsilon = 0.03, prec = 0.01$ ) semble être un bon compromis entre une bonne précision et un nombre de points réduit.

L'algorithme développé est un peu plus complexe qu'une intégration numérique à pas constant. Le temps nécessaire à l'organisation propre de l'algorithme est donc logiquement plus important. Pour les structures importantes, l'estimation de la fonction à intégrer, né-

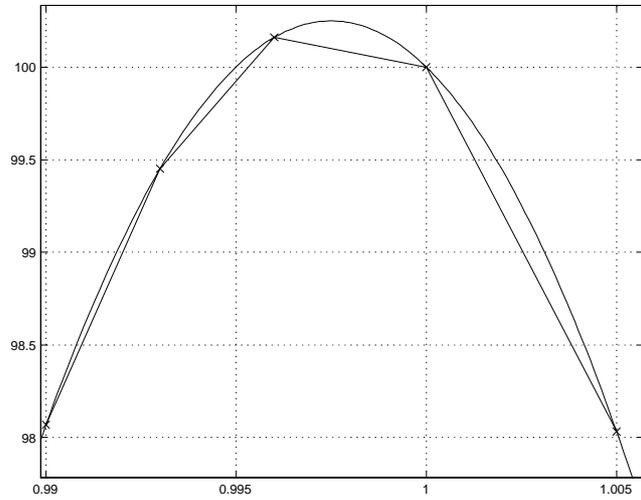


FIGURE 12.9. REPRÉSENTATION DE LA FONCTION À INTÉGRER ET DES POINTS D'INTÉGRATION TROUVÉS ( $\varepsilon = 0.03$ )  
- ZOOM SUR LE PIC

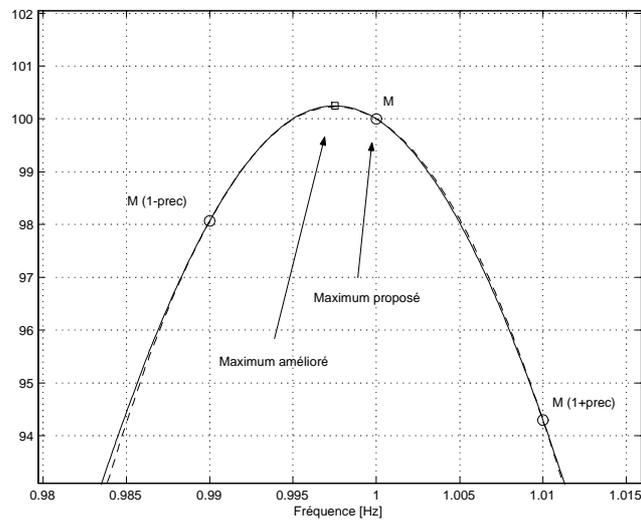


FIGURE 12.10. AMÉLIORATION DE LA REPRÉSENTATION DU VRAI MAXIMUM

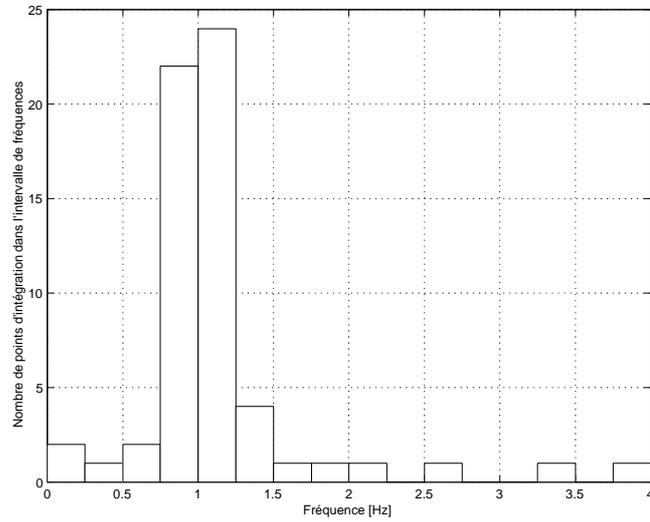


FIGURE 12.11. HISTOGRAMME DE LA RÉPARTITION DES POINTS D'INTÉGRATION

	Fonction 1 ( $\xi = 0.01$ )		Fonction 2 ( $\xi = 0.05$ )	
	Intégrale	Nb. P.I.	Intégrale	Nb. P.I.
Analytique	78.54		15.708	
$\varepsilon = 0.001$	78.60	316	15.709	282
$\varepsilon = 0.03$	79.02	80	15.812	66
$prec = 0$				
$\varepsilon = 0.03$	78.47	64	15.803	62
$prec = 0.01$				

Tableau 12.1. : Table Caption

cessite un temps de calcul assez important (de l'ordre de la seconde) et il est primordial de diminuer le nombre de points pour lesquels il faut calculer la fonction. Dans ce cas, le temps supplémentaire mis par les opérations d'identification des intervalles à subdiviser peut être considéré comme négligeable.

La méthode est la plus efficace lorsque la fonction à intégrer vérifie ces deux conditions :

- être fort pointue, ou du moins, nécessiter une distribution optimale non uniforme des points d'intégration
- nécessiter un grand nombre d'opérations pour son estimation ; sinon une méthode "rouleau compresseur" qui évalue la fonction en un nombre trop important de points espacés uniformément pourrait donner d'aussi bons résultats.

# **Annexe C**

## **Transparents de la présentation**