

**UNIVERSITÉ DE LIÈGE
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**

CONCEPTION MÉCANIQUE

FASCICULE 1 : COURS

Prof. J.F. DEBONGNIE

2007

© J.F. Debongnie, 2007
Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées,
Institut de Mécanique
Chemin des Chevreuils, 1
B-4000 Liège

Tous droits réservés.

Toute reproduction, même partielle, sous quelque forme ou sur quelque support que ce soit,
est strictement interdite.

ISBN-13 : 978-2-9600313-3-1

EAN : 9782960031331

D/2007/0480/42

CONCEPTION DE SYSTEMES MECANIQUES

TABLE DES MATIERES

1. PROCESSUS DE CONCEPTION	3
1.1. CARACTERE ITERATIF	3
1.1.1. Cahier des charges	3
1.1.2. Définition du concept	4
1.1.3. Ensembles et sous-ensembles mécaniques, éléments	5
1.1.4. Plans d'ensemble	6
1.1.5. Plans d'éléments	6
1.1.6. Plans de fabrication	6
1.2. ORGANISATION DES BUREAUX D'ÉTUDES ET DE MÉTHODES	7
1.2.1. Organisation préaylorienne	7
1.2.2. Organisationaylorienne	7
1.2.3. Organisation post-aylorienne	8
1.3. EXIGENCES DE LA CONCEPTION	9
1.3.1. Fonctionnalité	9
1.3.2. Fiabilité	10
1.3.3. Coût	10
2. FONCTIONNALITE	11
2.1. DIMENSIONS	11
2.1.1. Normalisation	11
2.1.2. Nombres normaux	12
2.1.3. Interchangeabilité	12
2.1.4. Chaînes de cotes	15
2.1.5. Système ISO de tolérances	22
2.1.5.1. Unité de tolérance	22
2.1.5.2. Degré de tolérance	23
2.1.5.3. Ecart	25
2.1.5.4. Cote de type arbre et cote de type alésage	27
2.1.5.5. Fixation des cotes de type arbre	27
2.1.5.6. Equivalence des ajustements	29
2.1.5.7. Fixation des écarts d'alésages	32
2.1.5.8. Choix des ajustements	33
2.1.5.9. Exemple	33
2.1.6. Bibliographie	36
2.2. TOLÉRANCES GÉOMÉTRIQUES	39
2.2.1. Définition	39
2.2.2. Tolérances de forme	39
2.2.3. Tolérances d'orientation	41

2.2.4. Tolérances de battement	43
2.2.5. Tolérances de localisation	45
2.2.6. Origines des défauts de forme	49
2.2.7. Origine des erreurs de position	49
2.2.8. Bibliographie	50
 2.3. HYPERSTATICITÉ DES MÉCANISMES ET TOLÉRANCES DE POSITION.....	52
2.3.1. Introduction	52
2.3.2. Equilibre d'un corps solide	52
2.3.3. Systèmes de corps liés	52
2.3.4. Caractérisation des liaisons d'un système cinématique	53
2.3.5. Premiers exemples	57
2.3.6. Pourquoi se préoccuper de l'hyperstaticité	59
2.3.7. Classification des liaisons principales	59
2.3.8. Exemple	61
2.3.9. Equations d'équilibre d'un mécanisme	63
2.3.10. Retour à l'exemple précédent – Interprétation des états d'autocontrainte et réduction de l'hyperstaticité	64
2.3.10.1. Localisation de l'hyperstaticité	64
2.3.10.2. Réduction de l'hyperstaticité	65
2.3.11. Problèmes	67
2.3.11.1.	67
2.3.11.2.	69
2.3.11.3.	69
2.3.11.4.	71
2.3.11.5.	73
2.3.11.6.	75
2.3.12. Bibliographie	77
 2.4. RUGOSITÉ	81
2.4.1. Introduction	81
2.4.2. Définitions	83
2.4.3. Paramètres d'état de surface	85
2.4.3.1. Filtrage	85
2.4.3.2. Ligne moyenne, ligne de crête et ligne de fond. Rugosité totale.....	85
2.4.3.3. Notion de profondeur et profondeur moyenne de rugosité	85
2.4.3.4. Rugosité moyenne arithmétique	87
2.4.3.5. Rugosité moyenne quadratique	87
2.4.3.6. Coefficient de plénitude	89
2.4.3.7. Courbe d'Abbott	89
2.4.4. Rugosité théorique en tournage	89
2.4.5. Relations entre les paramètres de rugosité	91
 2.5. EXIGENCES DE RAIDEUR	95
2.5.1. Fonction guidage	95
2.5.2. Commandes	97
2.5.3. Déformations des organes transmettant la puissance	97

2.5.3.1. Classification des transmissions	97
2.5.3.2. Limitation de la torsion des arbres	98
2.5.3.3. Equilibrage des souplesses	99
2.5.3.4. Limitation de la flexion	101
2.5.3.5. Remarque générale	102
2.6. LE FROTTEMENT ET SES CONSÉQUENCES	103
2.6.1. Coefficients de frottement	103
2.6.2. Adhérence	103
2.6.2.1. Boulons	103
2.6.2.2. Frettage	105
2.6.3. Freins et embrayages à friction	109
2.6.4. Courroies	109
2.6.4.1. Relation entre la masse linéique et l'allongement	109
2.6.4.2. Conservation du débit massique	109
2.6.4.3. Conservation de la quantité de mouvement	111
2.6.4.4. L'alternative de glissement	112
2.6.4.5. Où se produit le glissement ?	113
2.6.4.6. Arcs de repos et arcs de travail	113
2.6.4.7. Rendement d'une transmission par courroie	115
2.6.4.8. Efforts sur les arbres	117
2.6.4.9. Relation entre la tension moyenne au repos et la force transmise	118
2.6.4.10. Courroies trapézoïdales	119
2.6.4.11. Vitesse optimale d'une courroie	121
2.6.5. Arc-boutement	123
2.6.6. Le broutage	125
2.6.6.1. Introduction	125
2.6.6.2. Le cas d'un coefficient de frottement cinétique égal au coefficient de frottement au repos	125
2.6.6.3. Le cas d'un coefficient de frottement cinétique inférieur au coefficient de frottement au repos	127
2.6.6.4. Plus petit déplacement du chariot	130
2.6.6.5. Un modèle plus complet	131
2.6.6.6. Relations asymptotiques pour les faibles amortissements	133
2.6.7. Usure	137
2.6.7.1. Généralités. Loi d'Archard	137
2.6.7.2. Vitesse normale d'usure	139
2.6.8. Réversibilité et rendement des mécanismes frottants élémentaires	140
2.6.9. Moyens de réduire le frottement	142
2.6.9.1. Roulements	142
2.6.9.2. Lubrification	143
2.7. QUELQUES NOTIONS DE LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE	143
2.7.1. Le coin d'huile	145
2.7.2. Notions sur les paliers hydrodynamiques	146
2.7.2.1. Analyse dimensionnelle	146
2.7.2.2. Conditions de similitude	147

2.8. CONCEPTION POUR LE MONTAGE ET LE DÉMONTAGE	152
2.9. DÉPENDANCE MUTUELLE DES FORMES ET DES PROCÉDÉS DE FABRICATION	153
2.10. BIBLIOGRAPHIE	154
3. FIABILITE	156
3.1. RECENSEMENT DES EFFORTS	156
3.1.1. Principe	156
3.1.2. Le rhéogramme de la puissance	156
3.1.2.1. Réducteur à engrenages	157
3.1.2.2. Distribution de puissance	159
3.1.2.3. Une distribution plus complexe	162
3.1.2.4. Un cas de faible rendement	162
3.1.3. Efforts secondaires dans les engrenages	163
3.1.3.1. Engrenage droit	163
3.1.3.2. Engrenage à denture hélicoïdale	165
3.1.3.3. Engrenage conique droit	167
3.1.4. Efforts secondaires dans les transmissions par courroie	169
3.1.5. Efforts secondaires dans les transmissions par chaîne	169
3.1.6. Bibliographie	171
3.2. AVANT-PROJET D'UN ARBRE	173
3.2.1. Introduction	173
3.2.2. Le facteur de service	175
3.2.3. La notion de moment idéal	175
3.2.4. Une première formule de dimensionnement à la fatigue	178
3.2.5. Formule des arbres de manège	178
3.2.6. Tourillons d'extrémité	180
3.2.7. Déformations de flexion	180
3.2.8. Calcul vibratoire	181
3.3. PRINCIPES GÉNÉRAUX DE FIABILITÉ	182
3.3.1. Introduction	182
3.3.2. Notion de sécurité	182
3.3.2.1. Analyse du concept de sécurité	182
3.3.2.2. Démarche d'Odingue	183
3.3.3. Notion de critère de mise hors service	185
3.3.4. Bibliographie	188
3.4. ESSAIS MÉCANIQUES DES MATÉRIAUX ET ESSAIS DE TREMPABILITÉ.....	189
3.4.1. Essai de traction	189
3.4.2. Essais de dureté	193
3.4.2.1. Dureté Brinell	193
3.4.2.2. Dureté Vickers	197

3.4.2.3. Dureté Rockwell C	199
3.4.2.4. Une corrélation entre la dureté Rockwell C et la dureté Vickers	200
3.4.2.5. Corrélation entre la dureté Brinell des aciers et leur charge de rupture	201
3.4.2.6. Quelques valeurs indicatives de dureté	201
3.4.3. Essais de résilience	201
3.4.4. La ténacité	203
3.4.5. Le facteur d'intensité de contrainte de la mécanique de la rupture	203
3.4.5.1. Le facteur d'intensité de contrainte	203
3.4.5.2. La propagation des fissures en fatigue	207
3.4.6. Essais de fatigue	207
3.4.7. Bibliographie	210
3.5. PRINCIPES DE LA DÉTERMINATION DES LIMITES DE RÉSISTANCE	211
3.5.1. Notion de contrainte nominale	211
3.5.2. Principes de la détermination des limites de résistance	212
3.5.2.1. Généralités	212
3.5.2.2. Les indices d'effet	213
3.5.3. Rupture statique	215
3.5.3.1. Effet d'échelle	215
3.5.3.2. Effet d'entaille	216
3.5.3.3. Effet d'élaboration	216
3.5.4. Fatigue sous sollicitation alternée	216
3.5.4.1. Effet d'échelle	217
3.5.4.2. Effet d'entaille	217
3.5.4.3. Entailles non calculables	220
3.5.4.4. Effet d'élaboration	221
3.5.5. Sollicitation combinant un terme statique et un terme alterné	221
3.5.6. Sollicitations combinées	225
3.5.7. Contraintes oscillatoires d'amplitude variable	226
3.5.7.1. Le principe du dommage cumulatif	226
3.5.7.2. Discussion physique	228
3.5.7.3. Validité du critère du dommage cumulatif	229
3.5.8. Bibliographie	230
3.6. CONTACTS HERTZIENS	233
3.6.1. Introduction	233
3.6.2. Considérations géométriques	233
3.6.3. Contacts ponctuels	237
3.6.3.1. Pression de Hertz, aire de contact, rapprochement	237
3.6.3.2. Contraintes dimensionnantes	239
3.6.3.3. Déformations permanentes dans le cas d'aciers à roulements	241
3.6.4. Contacts linéaires	241
3.6.4.1. Résultats généraux	241
3.6.4.2. Contraintes	243
3.6.4.3. Déformations permanentes dans le cas d'aciers à roulements	243
3.6.5. Sollicitations dynamiques	243
3.6.6. Premier exemple : couteau de balance	245

3.6.7. Second exemple : roue libre à galets	247
3.6.8. Le modèle de Föppl du coefficient de frottement de roulement	249
3.6.9. Bibliographie	252
3.7. ROULEMENTS	255
3.7.1. Principaux types de roulements	255
3.7.1.1. Roulement rigide à billes	255
3.7.1.2. Roulements à billes à contact oblique	255
3.7.1.3. Roulements à rouleaux	257
3.7.1.4. Roulements à aiguilles	257
3.7.1.5. Butées	257
3.7.2. Fatigue des roulements	257
3.7.3. Relation entre la charge et la durée de vie	261
3.7.4. Comportement sous des charges de direction quelconque	261
3.7.5. Comportement sous une charge dépendant du temps	263
3.7.6. Choix de la durée de vie	266
3.7.7. Calcul statique des roulements	266
3.7.8. Calcul des charges dans le cas de deux roulements à contact oblique (à billes ou à rouleaux) en opposition	267
3.7.8.1. Montage en X et montage en 0	267
3.7.8.2. Répartition des charges axiales	269
3.7.8.3. Identification des angles de contact	272
3.7.8.4. Serrage initial	274
3.7.9. Ajustement des roulements sur l'arbre et le moyeu	274
3.7.10. Bibliographie	275

ORGANIGRAMME ELEMENTAIRE D'UN PROCESSUS DE CONSTRUCTION

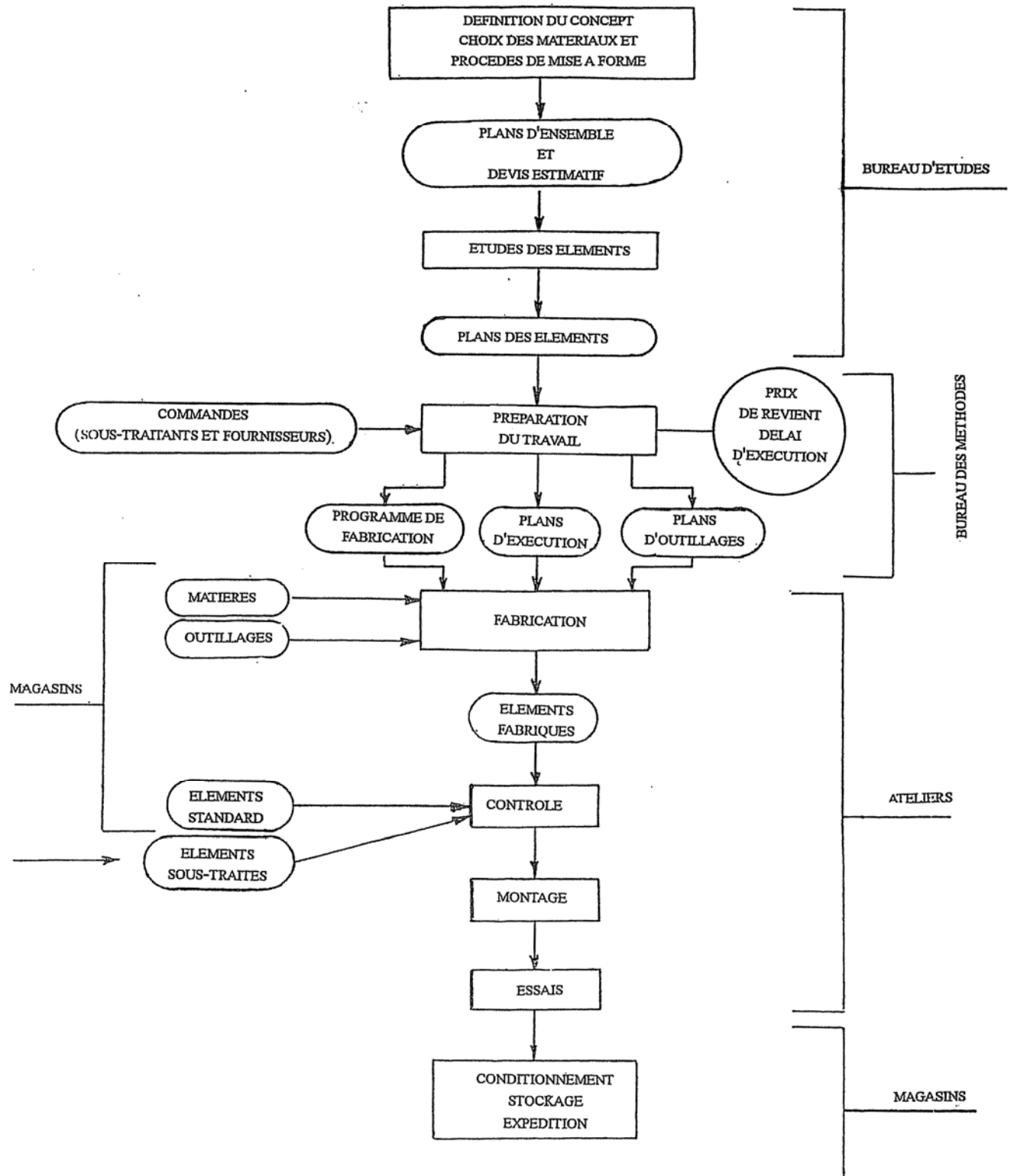


FIG. 1

1. PROCESSUS DE CONCEPTION

1.1 – CARACTÈRE ITÉRATIF

Le processus de conception est essentiellement de nature itérative, ainsi que l'illustre la figure 1.

1.1.1. – Cahier des charges

La conception d'un ensemble mécanique est toujours la réponse à la commande d'un *client*. Ce mot ne doit pas être entendu dans son sens le plus strict : il peut très bien s'agir d'une autre division de l'entreprise. Le client, c'est la personne qui exprime un certain *besoin*. Au départ, ce besoin n'est pas toujours clairement explicité, comme nous allons le montrer sur les exemples qui suivent. Il est donc parfois nécessaire d'établir une discussion avec le client pour établir le *cahier des charges* qui consiste en la description précise et formelle des attentes du client et constitue la partie technique du contrat.

Le besoin du client semble parfois simple à cerner. Par exemple, le client désire un moulin à café. Mais s'agit-il d'un moulin à café domestique ou d'un moulin à café destiné à un débit de boissons ?

- Dans le premier cas, le moulin travaille chaque jour une minute, suite à quoi il se refroidit. On peut alors admettre des échauffements importants, c'est-à-dire un bobinage très fin, peu encombrant et peu coûteux. Bien plus, avant d'être mis au rancart parce que démodé, dans quinze ans pour fixer les idées, combien de temps fonctionnera-t-il ? On calcule :

$$1 \frac{\text{min}}{\text{jour}} \times 365 \frac{\text{jour}}{\text{an}} \times 15 \text{ans} = 5475 \text{ min} = 91,25 \text{h}$$

En d'autres termes, une conception assurant une durée de vie (en fonctionnement, s'entend !) de 100 heures est largement satisfaisante. Ceci se traduit dans les solutions techniques utilisées dans ce genre d'appareil, notamment les paliers lisses poreux.

- Tout autre est la situation dans le cas d'un moulin à café destiné à un débit de boissons. On peut en effet imaginer que ce moulin tourne quatre heures par jour. On suppose le débit de boissons ouvert 300 jours par an. Enfin, comme une panne du moulin constitue une gêne importante pour le tenancier du café, celui-ci désire un bon fonctionnement pendant 10 ans. Ici, le calcul s'établit comme suit :

$$4 \frac{\text{h}}{\text{jour}} \times 300 \frac{\text{jour}}{\text{an}} \times 10 \text{ans} = 12000 \text{h}$$

Comme on peut le voir, ce n'est pas du tout la même chose et la conception de ce moulin sera plus proche de celle des machines de l'industrie. Les bobinages du moteur seront dimensionnés largement pour éviter tout échauffement dangereux, les paliers seront des roulements à billes, etc...

Les exemples de ce genre abondent. Ainsi, les lave-linge domestiques servent par exemple deux fois par semaine, chaque lessive durant une heure. Au bout de quinze ans, durée de vie que les ménages trouveront tout à fait satisfaisante, leur temps de travail aura été de

$$2 \frac{h}{semaine} \times 52 \frac{semaine}{an} \times 15ans = 1560h$$

Par contre, dans le cas des salons lavoirs, le temps quotidien de fonctionnement peut être évalué à 8 heures. De nombreux établissements de ce type sont ouverts jour et nuit toute l'année. Si la machine est destinée à fonctionner 10 ans, elle aura, pendant ce temps, travaillé

$$8 \frac{h}{jour} \times 365 \frac{jour}{an} \times 10ans = 29200h$$

soit près de 20 fois plus. Il va sans dire que les machines sont, dans chaque cas, conçues en fonction de leur durée de vie respective. Ceci explique la mésaventure qu'ont jadis connue bien des exploitants de salons lavoirs qui, ayant acheté des machines domestiques, les ont vu tomber en panne très rapidement, ce qui a mis en péril la rentabilité de leur affaire.

De la même façon, les démarreurs d'automobiles sont à proprement parler de mauvais moteurs électriques, à grande consommation et grand échauffement. C'est seulement la rareté de leur emploi qui les rend durables. Mais cette solution permet d'avoir des moteurs plus compacts et plus légers.

Ces quelques exemples montrent que la définition du cahier des charges doit être très minutieuse et qu'il est toujours nécessaire de préciser les *conditions d'utilisation* de la machine envisagée. Il est souvent utile que le cahier des charges soit défini lors d'un *dialogue* entre le client et le concepteur, ce dernier ayant pour rôle d'apporter son expérience pour mieux cerner les problèmes. Insistons sur le fait qu'une incompréhension entre le client et le concepteur au niveau du cahier des charges ne peut mener qu'à de graves mécomptes. Cette étape du travail, dont on ne parle guère est donc *d'une importance primordiale*.

1.1.2 – Définition du concept

Le *concept*, c'est le principe même du fonctionnement de l'ensemble mécanique considéré. Sa définition, hautement créative, fait appel à :

- L'*expérience*, c'est-à-dire les connaissances acquises lors de réalisations antérieures. On a dit, et cela peut sembler une boutade, que *l'expérience est le résultat de tous les échecs passés*. Il est vrai, cependant, que si l'on construit un pont et qu'il tient, cela ne signifie pas nécessairement que la méthode de calcul était bonne. Par contre, si le pont s'écroule, on peut affirmer, en dehors du cas des malfaçons, que le calcul était erroné. C'est du reste à la suite de l'écroulement d'un certain nombre de ponts au début des chemins de fer que l'on s'est intéressé à les calculer.

- L'*état de la question*. On ne conçoit jamais à partir de rien. La démarche habituelle consiste à cerner les problèmes, et à les classer en deux catégories, d'une part, ceux dont la

solution est connue, et d'autre part, ceux qui restent entiers. Pour ces derniers, on examine les solutions qui ont été données (par soi-même ou par d'autres, y compris les concurrents) à des problèmes voisins (extrapolation). Il est aussi utile d'essayer de formuler le problème autrement, ou de le subdiviser en sous-problèmes. Beaucoup de conceptions nouvelles ne sont en fait que des assemblages inattendus de solutions connues.

Les outils utilisés pour faire l'état de la question sont la littérature, la consultation de spécialistes (il n'y a pas de déshonneur à aller chercher la compétence là où elle se trouve). Beaucoup de jeunes ont la tentation de se cloîtrer pour trouver une solution « nouvelle » de leur cru. *C'est une grave erreur*, menant d'abord à une importante perte de temps et, bien souvent, malheureusement, à des erreurs irréparables.

- Une démarche qui fait un peu sourire est le *remue-méninges* (*brain storming*) consistant à se réunir en *petits groupes*, en convenant qu'il est permis d'énoncer ce qui passe *a priori* pour des âneries. Notre expérience est qu'il n'est pas rare que parmi celles-ci, on trouve, après analyse, les éléments d'une solution satisfaisante.

Lorsqu'un concept est adopté, il faut le *vérifier*, c'est-à-dire repasser tous les points du cahier des charges et s'assurer qu'ils sont satisfaits. Dans le cas contraire, deux démarches sont possibles :

- 1) On revoit le concept pour le mettre en concordance avec le cahier des charges.
- 2) On négocie avec le client, exposant ce que l'on sait et ce que l'on ne sait pas (ou ne peut pas) faire. Il arrive que les ambitions du cahier des charges soient revues à la baisse.

A ce niveau, plusieurs itérations sont parfois nécessaires. Il n'est guère possible de décrire plus précisément le processus de définition du concept qui, dans une certaine mesure, relève de l'art et de la culture du concepteur. Par contre, les problèmes de base peuvent, dans une certaine mesure, faire l'objet d'un processus d'intelligence artificielle.

Le *langage* de la conception mécanique est le *dessin*. Mais au niveau de la définition du concept, il s'agit le plus souvent de croquis à main levée : il n'est encore ni nécessaire ni possible d'être précis, mais il faut bien un support écrit à la réflexion. C'est pourquoi on ne peut trop insister sur la nécessité qu'il y a de s'entraîner à représenter les objets de façon correcte, sans instruments.

1.1.3. Ensembles et sous-ensembles mécaniques, éléments

Un système mécanique peut en général être décomposé à plusieurs niveaux. Considérons par exemple le groupe motopropulseur d'une automobile, considéré comme un tout. On constate qu'il existe en son sein un certain nombre de sous-systèmes qui peuvent être conçus et montés séparément. En l'occurrence, on reconnaîtra le moteur, l'embrayage et la boîte de vitesses : c'est ce que l'on appelle les *sous-ensembles*. Ceux-ci peuvent du reste être décomposés en sous-ensembles de second niveau, par exemple le système comprenant la culasse avec le système de distribution (arbre à cames et soupapes). De décomposition en décomposition, on arrive au stade ultime qui est l'*élément*. Ainsi, le corps de bielle est un élément, de même que le vilebrequin.

Une des difficultés de la conception mécanique est que la conception des ensembles, celle des sous-ensembles et celle des éléments sont liées. Il en résulte que les solutions correspondantes doivent être affinées et modifiées dans un processus itératif.

1.1.4 – Plans d'ensemble

Généralement, on commence par exécuter un plan d'ensemble, de manière à *implanter* chaque élément ou sous-ensemble dans l'ensemble mécanique. C'est ici que se poseront notamment les questions d'*encombrement* des pièces, des interactions éventuelles entre pièces, etc... Un point essentiel est d'assurer la *possibilité de monter les éléments dans l'ensemble*. Ceci demande un examen sérieux et peut avoir une influence non négligeable sur la forme même des éléments.

Un certain nombre d'éléments s'achèteront sur catalogue : boulons, roulements, poulies, courroies, chaînes, ... D'autres feront l'objet de fabrications spéciales et vont donc nécessiter des plans de détail partiels spécifiant au moins les cotes d'encombrement. A ce stade, les calculs sont encore très limités et, pour la plupart, *forfaitaires*. En effet, *une pièce mécanique ne peut être calculée de façon définitive que lorsqu'elle est dessinée dans ses moindres détails*. Ainsi, la résistance à la fatigue d'un arbre ne peut être vérifiée que lorsque l'on connaît tous ses accidents de forme (concentrations de contrainte).

En conséquence, il est rare que le premier plan d'ensemble donne d'emblée satisfaction. Ici encore, des itérations seront nécessaires.

1.1.5 – Plans d'éléments

Chaque élément doit être dessiné en détail. Dans une première étape, ce dessin se fait à partir

- De calculs forfaitaires de résistance et de raideur
- De considérations technologiques : on ne dessine pas de la même manière une pièce destinée à être moulée et une pièce obtenue par mécano-soudure. En outre, il faut assurer les *liaisons* (clavettes, épaulements, ...)

Ce n'est qu'alors qu'il est possible de faire un calcul de *vérification*. Ce dernier mènera à un résultat sous forme d'un coefficient de sécurité, que l'on jugera acceptable, inacceptable ou exagéré. Dans ces deux derniers cas, il faudra corriger les plans, y compris parfois les plans d'ensemble.

1.1.6 – Plans de fabrication

Les plans établis par le bureau d'études passent alors dans un autre bureau appelé *bureau des méthodes*. Celui-ci est composé de spécialistes de la fabrication, qui examineront les différentes étapes du processus de mise à forme et établiront pour chacune d'elles les plans et les spécifications nécessaires. Bien que cette étape déborde quelque peu du processus de

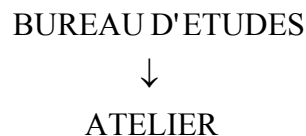
conception mécanique proprement dite, il est utile de préciser que la fabrication a ses exigences, parfois mal perçues par les ingénieurs de conception. Il arrive fréquemment que le bureau des méthodes demande au bureau d'études des modifications, dans le but de simplifier la fabrication et par là même, de diminuer le prix de revient. Là encore, il faudra peut-être revoir les plans.

La conclusion de ceci est qu'il est utile, pour ne pas dire nécessaire, que le concepteur s'intéresse à la façon dont seront fabriquées les pièces qu'il dessine.

1.2 - ORGANISATION DES BUREAUX D'ÉTUDES ET DE MÉTHODES

1.2.1 – Organisation préaylorienne

Au XIX^e siècle, l'organisation des entreprises pouvait être schématisée comme suit :

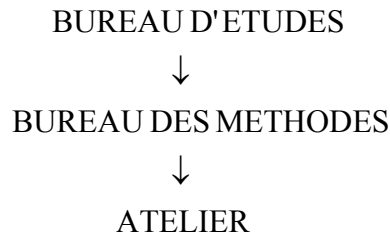


C'est à l'*atelier* que se décidaient le mode de fabrication, les conditions de coupe, le mode d'affûtage des outils, etc... et souvent, la décision était prise par l'ouvrier lui-même. Il en résultait une variation de qualité et d'efficacité importante d'un ouvrier à l'autre.

1.2.2 - Organisation taylorienne

L'organisation que nous venons de décrire a été mise en cause par F.W. TAYLOR, un des plus grands noms de la technologie mécanique. (Par *technologie*, nous entendons ici la science des techniques et non une technique particulière comme c'est souvent le cas dans le langage actuel.) Disons deux mots de sa carrière remarquable. Passé en six ans de manœuvre à ingénieur en chef au sein de la Midvale Steel Company, Taylor s'est rapidement rendu compte de l'importance de faire affûter les outils par un ouvrier unique, suivant des règles bien précises et il a conçu pour la cause une affûteuse. C'est lui qui a introduit l'arrosage des outils. En 1900, en collaboration avec WHITE, il a introduit les aciers rapides. En 1906, comme président de l'A.S.M.E., il a fait un énorme mémoire intitulé *On the art of cutting metals*, où il relate les résultats de ses vingt-cinq années de recherche sur la coupe. C'est dans ce mémoire qu'il introduit la célèbre *loi de Taylor* reliant la durée de vie des outils à la vitesse de coupe. Il y détermine également la vitesse de coupe menant à la production maximale, en tenant compte du temps perdu à changer les outils. Il a terminé sa carrière dans le domaine de l'organisation des entreprises (O.S.T.).

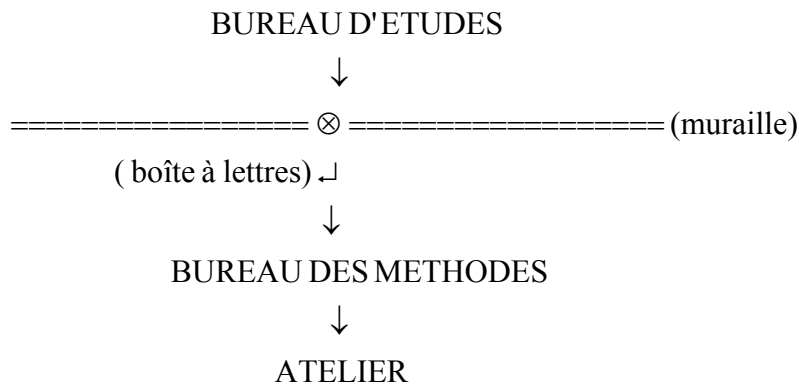
L'idée de base de Taylor est que la fabrication doit être *préparée* par un bureau de spécialistes de ce domaine. C'est le *bureau des méthodes*, qui a pour mission d'organiser *scientifiquement* le travail. Le schéma précédent est donc remplacé par



Cette organisation a fait faire de considérables progrès de productivité et de qualité des pièces, même si les chronométrages qui faisaient partie de l'organisation taylorienne des *temps* ont créé des problèmes avec le monde ouvrier. (Souvent, on ne retient que cet aspect du taylorisme, ce qui est quelque peu caricatural.)

1.2.3 – Organisation post-taylorienne

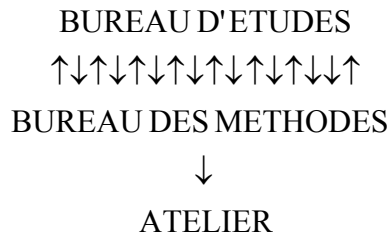
La tendance naturelle des travailleurs à se spécialiser avait progressivement mené, dans de nombreuses entreprises à un schéma de fonctionnement pervers que l'on peut caricaturer comme suit :



Il résulte d'une telle structure

- Incompréhension entre les deux bureaux ;
- Inefficacité ;
- Coûts inutiles.

C'est pourquoi on tend à l'heure actuelle à une structure où la communication entre les deux bureaux est favorisée, ce que l'on pourrait schématiser ainsi :



En particulier, on tend de plus en plus à introduire *dès la première conception* certaines notions issues des méthodes (*ingénierie concurrente*). C'est dans le même ordre d'idées que l'on parle de

- conception en vue de la fabrication (*design for manufacturing*),
- conception en vue de l'assemblage (*design for assembly*),
-

toutes disciplines tendant à rendre le concepteur conscient des implications de ses choix au niveau de la fabrication. Il ne faut pas perdre de vue qu'en dehors de l'utilité incontestable de systèmes experts dans ces domaines, ces concepts n'ont rien de fondamentalement nouveaux, dans la mesure où la conception d'une machine a *depuis toujours* dû déboucher sur sa fabrication et son montage.

1.3 – EXIGENCES DE LA CONCEPTION

1.3.1 – Fonctionnalité

La première qualité que l'on exige d'un ensemble mécanique est sa *fonctionnalité*, c'est-à-dire sa capacité de fonctionner au moins une fois. Dans certains ouvrages, on donne à cette qualité le nom de *viabilité*, que nous ne retiendrons pas, car il ressemble trop au mot *fiabilité* que nous introduirons plus loin.

La fonctionnalité se traduit d'abord par des *conditions géométriques*. Ainsi, le passage d'une pièce à l'intérieur d'une autre, par exemple, d'un piston dans un cylindre, suppose que la pièce intérieure ait une cote inférieure à celle de la pièce contenant. Il doit exister un *jeu* qui, du reste, ne doit être ni trop petit ni trop grand. Il faudra en outre que le piston soit suffisamment cylindrique et non en banane, ce qui ferait le ferait coincer dans le cylindre.

Moins évidentes *a priori* sont les *conditions de raideur*. Ainsi, un arbre ne peut pas avoir une trop grande souplesse en torsion, sous peine de perdre toute précision dans la commande qu'il transmet : les deux extrémités ont un décalage angulaire se traduisant par un retard du côté récepteur. De même, la flexion d'un arbre entraîne des inclinaisons des tourillons dans les paliers, ce qui peut entraîner coincement ou usure prématurée des coussinets. Il faut noter qu'*en construction mécanique, les exigences de raideur sont souvent plus sévères que les conditions de résistance*, ce qui est rarement le cas en génie civil.

Le *frottement* est l'ennemi du mouvement. Il peut entraîner l'arc-boutement, le broutement, l'usure, l'échauffement. D'un autre côté, il peut être mis à profit pour transmettre

des efforts. Dans tous les phénomènes de frottement intervient une variable géométrique dont nous n'avons pas encore parlé, la rugosité.

Enfin, il existe des conditions techniques qui induisent des exigences géométriques particulières. Par exemple, l'assemblage boulonné de deux pièces suppose que les vis aient une tige suffisamment longue, sans excès cependant. Il faudra du reste prévoir autour de l'écrou un dégagement suffisant pour pouvoir faire passer la clef.

1.3.2 – Fiabilité

Mais même si la machine est fonctionnelle, elle ne donnera pas nécessairement satisfaction. Il faut encore qu'elle ait une durée de vie compatible avec son usage. C'est ici qu'intervient le calcul de *vérification*. Contrairement à la fonctionnalité, la fiabilité ne se vérifie pas en cours de conception, mais au terme de celle-ci, avec le risque évident de devoir réviser la conception.

Les questions de fiabilité relèvent essentiellement de la résistance des matériaux ou du calcul d'usure. En matière de résistance des matériaux, on rencontre en construction mécanique des problèmes de fatigue et de contacts hertiens, problèmes qui dépassent le cadre standard des cours généraux destinés aux constructions civiles.

1.3.3 – Coût

Le client potentiel cherche naturellement à obtenir le plus possible pour son argent. Cela signifie qu'à qualité égale, il choisira normalement le produit le moins cher. C'est dire que la maîtrise des coûts revêt une importance capitale. Le maître-mot en terme de coûts est : *faire simple, facile à fabriquer, éviter les matériaux exotiques ou peu usinables*. Un autre outil de réduction des coûts est la *normalisation*, qui permet de réduire le nombre de types d'objets semblables. Enfin, l'*interchangeabilité* est un facteur important de réduction des coûts. C'est au niveau des coûts que se justifie l'ingénierie concurrente.

2. FONCTIONNALITÉ

2.1 – DIMENSIONS

2.1.1 – Normalisation

La *normalisation* est un outil développé par les industriels pour limiter le nombre de types d'objets semblables. C'est ainsi qu'il existe un petit nombre de pneus différents pour les centaines de voitures du marché. Simplement, les jantes sont construites dans un petit nombre de tailles, parmi lesquelles les constructeurs font leur choix. Grâce à cela, quand on doit remplacer un pneu, on peut choisir indifféremment un Michelin, un Pirelli, un Good Year, etc... Les avantages de cet ordre des choses sont multiples :

- peu de produits différents à fabriquer, donc moins d'outillages pour le fabricant : réduction des coûts ;
- le marchand a moins de produits différents à stocker, donc son entrepôt peut être plus petit et sa gestion des stocks est simplifiée : là encore, réduction des coûts ;
- le client trouve plus facilement ce qu'il cherche : satisfaction du consommateur.

Il existe un très grand nombre de produits normalisés. Ainsi, les dimensions extérieures des roulements sont normalisées, ce qui permet de remplacer un roulement SKF par un roulement FAG par exemple. De même, toute la boulonnerie est normalisée. Citons encore les courroies, les bougies d'autos, les dimensions extérieures des tambours de serrures, les CD, etc... *La normalisation est une des clefs de l'interchangeabilité.*

Il est important de s'en tenir le plus possible aux dimensions normalisées pour des raisons de coût. Ainsi par exemple, les vis de diamètre nominal 8 *mm* ont normalement une tête dont le diamètre sur pans est de 13 *mm*. Si l'on désire, par exception, un diamètre sur pans de 12 *mm*, il faut demander une fabrication spéciale et donc plus chère (alors qu'il y a moins de matière !). L'interchangeabilité est alors problématique. Des fantaisies de ce genre – et on en a vu dans le domaine de l'automobile – sont à proscrire absolument, car elles sont anti-économiques. Il est bien rare que l'on ne puisse pas s'en sortir autrement.

A l'heure actuelle, chaque pays a son comité de normalisation :

FRANCE : AFNOR (Association Française de NORmalisation)

BELGIQUE : NBN (Normes Belges/Belgische Normen)

ALLEMAGNE : DIN (Deutsche Industrie Normen)

RUSSIE : GOCT

USA : - ANSI (American National Standard Institute)

- Normes établies par les sociétés d'ingénieurs,

SAE (Society of Automotive Engineers)

ASME (American Society of Mechanical Engineers)

Ex – RDA : TGL

Il existe en outre un comité international de normalisation, l'ISO (International Standardization Organization) qui les chapeaute tous et s'occupe de l'harmonisation des normes. Plus récemment, une harmonisation plus forte des normes européennes a été réalisée, sous le nom EURONORM et le symbole EN.

2.1.2 – Nombres normaux

Les normes recommandent de s'en tenir, dans la mesure du possible, à des dimensions en nombre réduit, qui forment ce que l'on appelle les *séries Renard*. Il s'agit de progressions *géométriques*. Pourquoi géométriques ? Supposons que l'on veuille serrer une vis dont le diamètre sur pans est de 6 mm à l'aide d'une clef de 7 mm. La clef est trop grande, elle tourne fou. Par contre, une clef de 23 mm est parfaitement capable de serrer un écrou de 22 mm sur pans. La raison en est que

$$7/6 = 1.167 \quad (\text{erreur de } 16,7\%)$$

$$23/22 = 1.045 \quad (\text{erreur de } 4,5\%)$$

Ceci pour faire comprendre que c'est le *rapport* des dimensions qui compte. Il est donc rationnel d'établir des séries de dimensions telles que le rapport entre deux termes consécutifs soit toujours le même.

Une seconde exigence qui a conduit aux séries Renard est que ces séries se reproduisent simplement toutes les décades. Pour cela, il faut que la raison de ces séries soit de la forme

$$R_k = 10^{1/k}$$

avec k entier. Les séries courantes sont R₅, R₁₀, R₂₀, R₄₀. Il est clair que

$$R_5 \subset R_{10} \subset R_{20} \subset R_{40}$$

On trouvera ces séries dans le fascicule *QR (Quelques Repères)* de ce cours. On notera que la série R₁₀ contient le nombre $3,15 \approx \pi \approx (9,81)^{1/2}$. Elle contient aussi les nombres simples 2, 4, 5, 8. Enfin, les produits et quotients de nombres normaux d'une même série sont encore des nombres normaux (i.e., les séries Renard sont des groupes par rapport à la multiplication).

2.1.3 – Interchangeabilité

En fabrication unitaire – ce qui reste le cas de la fabrication lourde – il arrive que les pièces soient *appariées*, c'est-à-dire qu'on les corrige de manière à leur permettre de s'assembler correctement. A titre d'exemple, il n'est pas rare que l'on perce simultanément deux pièces à assembler pour pouvoir les boulonner sans problème. Il va sans dire que dans ces circonstances, remplacer une pièce par une autre ne va pas sans un ajustage.

Dans la fabrication en série, on prend les mesures nécessaires à assurer l'*interchangeabilité* des pièces. Il faut noter que ce mot prend, en construction mécanique, un

sens beaucoup plus fort que dans le langage commun. Soit une machine composée des éléments A, B, C, On fabrique les pièces A sur une chaîne, les pièces B sur une autre chaîne, les pièces C sur une troisième chaîne, ..., toutes ces chaînes étant *indépendantes* (et éventuellement très distantes géographiquement). Dans le cadre de l'*interchangeabilité totale*, qui est le cas idéal, on peut monter la machine sans ajustage, *quel que soit le choix particulier d'une pièce A, d'une pièce B, d'une pièce C, ...*, et ces choix ne peuvent pas affecter le fonctionnement de la machine.

L'interchangeabilité totale suppose évidemment une organisation telle que les écarts de dimensions entre deux pièces identiques soient suffisamment faibles pour ne pas être gênants. Tout serait simple s'il était possible de fabriquer des pièces *sans défauts* ou, à la rigueur, avec des défauts *toujours identiques* – il suffirait alors d'en tenir compte. Malheureusement, il n'en est rien : les cotes obtenues ont d'une part, une dispersion aléatoire et d'autre part, une erreur évolutive liée à l'usure de l'outil (*dérive de la cote*). La grandeur de ces erreurs dépend du procédé de fabrication. *Par conséquent, la définition précise d'une cote n'a pas de sens : on peut seulement exiger qu'elle appartienne à un **intervalle** limité par une cote minimale et une cote maximale.* C'est ce que l'on appelle les *tolérances*.

Ainsi, dire qu'un arbre a un diamètre $\phi 100\text{mm}$ n'a pas de sens précis. Par contre, on peut dire

$$99,98 \leq \phi \leq 100,03$$

(Lorsqu'un mécanicien donne une cote par un simple nombre, sans spécifier l'unité, il s'agit toujours de **millimètres**.)

Cependant, ce n'est pas de cette façon que l'on écrit l'intervalle de tolérance. On définit plutôt la cote *nominale* (en général, c'est celle qui a servi dans le calcul), soit ici 100 mm et les *écarts* supérieur et inférieur. L'intervalle ci-dessus sera écrit

$$\phi = 100 \begin{matrix} +0,03 \\ -0,02 \end{matrix}$$

L'écart supérieur est ici +0,03 et l'écart inférieur, -0,02. Il peut se faire que les deux écarts soient de même signe, auquel cas la cote nominale n'est pas contenue dans l'intervalle de tolérance.

L'existence de tolérances complique singulièrement la question de l'interchangeabilité. Soit par exemple un arbre qui doit passer dans un alésage avec un jeu. Notons D et d les diamètres respectifs de l'alésage et de l'arbre. En notant d'un indice M les maxima et d'un indice m les minima, on a les résultats suivants :

$$\text{Jeu nominal: } \bar{j} = \bar{D} - \bar{d}$$

$$\text{Jeu maximal: } j_M = D_M - d_m$$

$$\text{Jeu minimal: } j_m = D_m - d_M$$

Pour éviter des soustractions de nombres comportant beaucoup de chiffres dont un certain nombre sont semblables, il est plus pratique de travailler directement avec les écarts. En notant

$$D_M = \bar{D} + ES \quad (ES = \text{écart supérieur})$$

$$D_m = \bar{D} + EI \quad (EI = \text{écart inférieur})$$

$$d_M = \bar{d} + es$$

$$d_m = \bar{d} + ei$$

on obtient les relations équivalentes

$$\bar{j} = \bar{D} - \bar{d}$$

$$j_M = \bar{j} + ES - ei$$

$$j_m = \bar{j} + EI - es$$

qui, dans le cas fréquent où l'arbre et l'alésage ont *la même* cote nominale, se ramène aux relations simples

$$\bar{j} = 0$$

$$j_M = ES - ei$$

$$j_m = EI - es$$

Par exemple, pour $D = 100 \begin{smallmatrix} +0,05 \\ 0 \end{smallmatrix}$ et $d = 100 \begin{smallmatrix} -0,05 \\ -0,10 \end{smallmatrix}$, on obtient

$$j_M = +0,05 - (-0,10) = 0,15$$

$$j_m = 0 - (-0,05) = 0,05$$

Ce qui est frappant dans cet exemple, c'est que le jeu peut varier du simple au triple ! On pourrait d'ailleurs imaginer des couples d'écarts tels que le jeu minimal soit négatif (*interférence*) ce qui, bien entendu, est gênant si l'arbre doit tourner ou coulisser dans l'alésage.

On constate encore sur cet exemple que l'intervalle de tolérance (différence entre le maximum et le minimum) du jeu est de 0,10 mm alors que les deux cotes composantes, D et d ont un intervalle de tolérance de 0,05 mm seulement. C'est toujours le cas, et nous montrerons plus loin que si l'on note IT les intervalles de tolérance, on a en fait

$$IT(j) = IT(D) + IT(d)$$

Ce qu'il faut en retenir à présent, c'est que les arbres et les alésages doivent être plus précis que le jeu. Un jeu précis demande donc des usinages coûteux et parfois irréalisables. Il existe cependant un artifice : dans un premier stade, on réalise les arbres et les alésages avec un intervalle de tolérance de 0,1 mm. Les cotes de fabrication seront par exemple

$$D = 100 \begin{matrix} +0,1 \\ 0 \end{matrix} \quad d = 100 \begin{matrix} 0 \\ -0,1 \end{matrix}$$

Après fabrication, on mesure *toutes* les pièces, et on les classe comme suit :

Classe I :	alésages	$100 \leq D \leq 100,05$
Classe II :	alésages	$100,05 \leq D \leq 100,1$
Classe 1 :	arbres	$99,9 \leq d \leq 99,95$
Classe 2 :	arbres	$99,95 \leq d \leq 100$

On *marque* sur chaque pièce la classe à laquelle elle appartient, par un point de peinture ou un coup de poinçon. Alors, il est clair qu'en assemblant un alésage de classe I avec un arbre de classe 1, on obtient

$$j_M = 0,05 - (-0,1) = 0,15$$

$$j_m = 0 - (-0,05) = 0,05$$

et on peut vérifier que l'assemblage d'un arbre 2 avec un alésage II conduit aux mêmes jeux extrêmes. Cela signifie que l'on a obtenu les mêmes jeux extrêmes que précédemment, à partir de pièces moins précises et donc moins coûteuses. Mais en contrepartie, il est nécessaire de mesurer toutes les pièces et le stockage est double. L'interchangeabilité n'est plus totale, car on ne peut assembler que par classes correspondantes. C'est ce que l'on appelle l'*interchangeabilité partielle*. Ce procédé est utilisé pour résoudre des problèmes difficiles en termes de fabrication. Le choix d'une interchangeabilité partielle ou d'une interchangeabilité totale doit se faire en fonction d'une comparaison des coûts de chacune de ces solutions.

Bien entendu, on peut établir plus de deux classes pour chaque pièce. En utilisant quatre classes, on peut réduire l'intervalle de tolérance du jeu au quart de la somme des IT de l'arbre et de l'alésage.

2.1.4 – Chaînes de cotes

Les chaînes de cotes constituent un outil pratique et efficace pour déterminer diverses conditions de maximum et de minimum. Pour illustrer leur application, considérons l'assemblage boulonné de la figure 2. Il faut choisir la longueur l de la tige et la longueur filetée l_f de manière à satisfaire aux *conditions* suivantes :

a) La *longueur sortie* y de la tige doit avoir une valeur minimale y_m de manière à garantir que tous les filets de l'écrou portent (on posera par exemple $y_m = p$, le pas de la vis).

b) Cette longueur sortie ne doit cependant pas être trop grande, de manière à éviter que l'on s'accroche à la tige de vis, ce qui constitue un problème de sécurité. On imposera donc un maximum y_M .

c) Il faut éviter que l'écrou soit serré à refus avant de serrer les tôles. On dit que l'on ménage une *réserve de serrage* x , qui doit être au moins égale à une valeur x_m de l'ordre d'un ou deux pas.

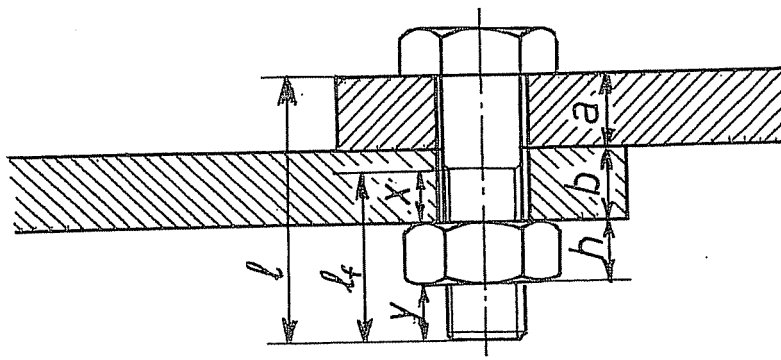


FIG. 2

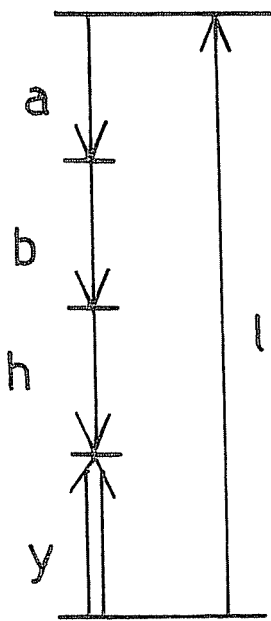


FIG. 3

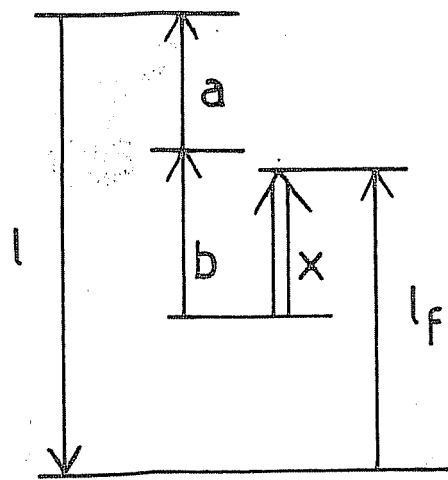


FIG. 4

Naturellement, ces conditions doivent être vérifiées quelles que soient les valeurs de a, b, ℓ, ℓ_f dans leur intervalle de tolérance. Pour résoudre ce problème, on utilise un diagramme vectoriel où l'on commence par dessiner la *cote-condition* comme un vecteur double ($\Rightarrow$), puis on cherche un jeu de vecteurs équivalent uniquement composé de cotes *indépendantes*.

Commençons par la condition y . On trouve (fig. 3)

$$y = \ell - a - b - h$$

Le maximum y_M s'obtient en maximisant les cotes affectées du signe positif et en minimisant les cotes affectées du signe négatif. *Ceci n'est vrai que si les cotes en question sont effectivement indépendantes*. Il vient donc

$$y_M = \ell_M - a_m - b_m - h_m$$

A l'inverse, le minimum y_m s'obtient en minimisant les cotes affectées du signe positif et en maximisant les cotes affectées du signe négatif :

$$y_m = \ell_m - a_M - b_M - h_M$$

Ces deux équations, on déduit les valeurs cherchées de ℓ_M et ℓ_m :

$$\ell_M = y_M + a_m + b_m + h_m$$

$$\ell_m = y_m + a_M + b_M + h_M$$

Insistons sur le fait qu'*il n'est pas équivalent* de partir de la relation

$$\ell = y + a + b + h$$

car y *n'est pas une cote indépendante*. En fait,

$$\ell = y(\ell, a, b, h) + a + b + h$$

ce qui revient à dire que l'on ne peut choisir y indépendamment des autres longueurs. En particulier,

$$\ell_M \neq y_M + a_M + b_M + h_M \quad !!!$$

Passons à la condition portant sur x . On a (fig. 4)

$$x = b + a - \ell + \ell_f$$

(il ne faut pas utiliser la cote y qui n'est pas indépendante), ce qui implique

$$x_m = b_m + a_m - \ell_M + \ell_{fm}$$

et permet de déduire

$$\ell_{fm} = x_m - b_m - a_m + \ell_M$$

La valeur de x_M ne nous intéresse pas dans ce cas-ci.

Autre présentation

Revenons sur le problème relatif à la cote y . De la chaîne de cotes, on déduit immédiatement la relation entre les cotes nominales

$$\bar{y} = \bar{\ell} - \bar{a} - \bar{b} - \bar{h}$$

En soustrayant cette relation à celle qui donne y_M , on obtient

$$(y_M - \bar{y}) = (\ell_M - \bar{\ell}) - (a_m - \bar{a}) - (b_m - \bar{b}) - (h_m - \bar{h})$$

soit, en introduisant les écarts supérieurs ES et les écarts inférieurs EI ,

$$ES(y) = ES(\ell) - EI(a) - EI(b) - EI(h)$$

Ainsi, l'écart supérieur de la cote-condition s'obtient en remplaçant les composantes affectées du signe positif par leur écart supérieur et les composantes affectées du signe négatif par leur écart inférieur.

De même, en soustrayant l'équation aux cotes nominales de l'équation donnant le minimum de la cote y , on obtient la relation

$$EI(y) = EI(\ell) - ES(a) - ES(b) - ES(h)$$

qui est symétrique de la précédente. Il est souvent plus pratique de travailler ainsi avec les écarts, car cela évite de traîner des nombres comportant beaucoup de chiffres.

Discussion

La soustraction des deux équations aux écarts conduit à un résultat très important. On a en effet

$$ES(y) - EI(y) = [ES(\ell) - EI(\ell)] + [-EI(a) + ES(a)] + [-EI(b) + ES(b)] + [-EI(h) + ES(h)]$$

soit, en introduisant les intervalles de tolérance $IT = ES - EI$,

$$IT(y) = IT(\ell) + IT(a) + IT(b) + IT(h)$$

c'est-à-dire que *l'intervalle de tolérance de la condition est la somme des intervalles de tolérance des cotes composantes*. Ce résultat est **toujours vrai**. Il signifie d'abord qu'il est impossible d'obtenir une cote précise en composant des cotes moins précises qu'elle. Il résulte aussi de cette relation que

$$IT(\ell) = IT(y) - IT(a) - IT(b) - IT(h)$$

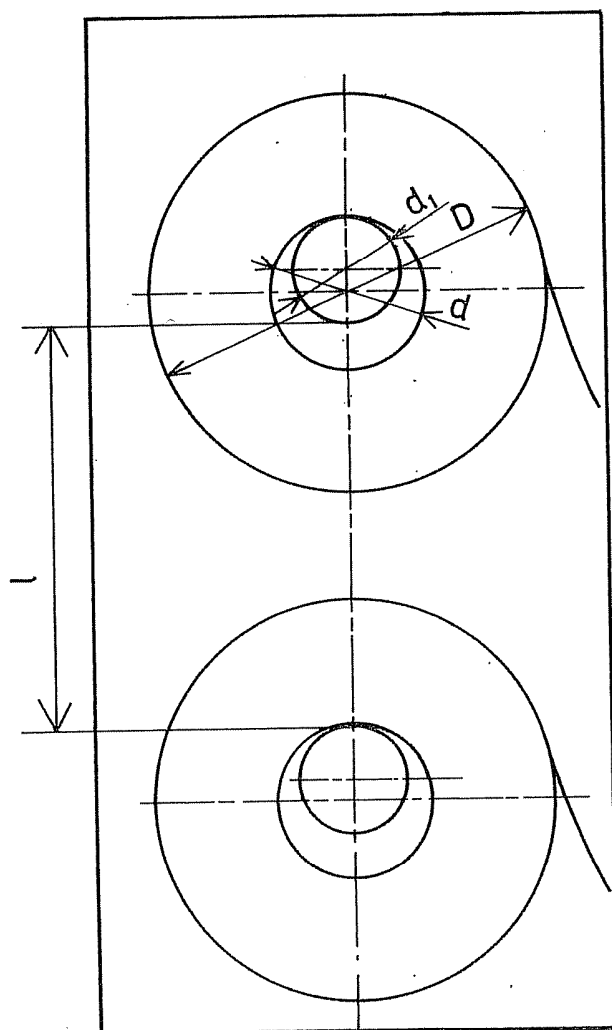


FIG. 5

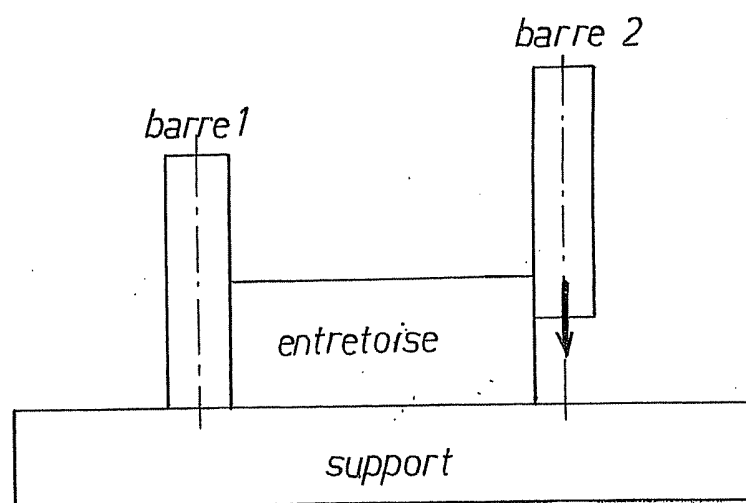


FIG. 6

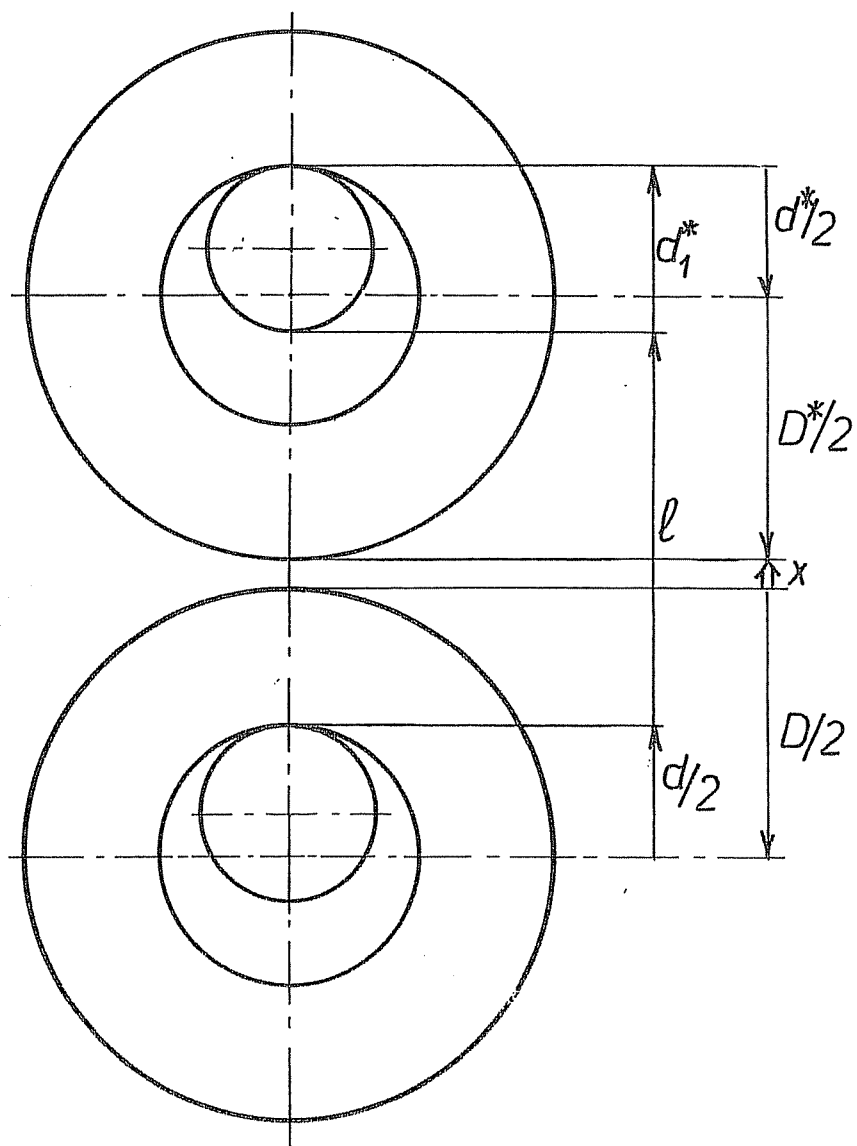


FIG. 7

ce qu signifie que l'on ne pourra trouver $\ell_M > \ell_m$ que si

$$IT(y) > IT(a) + IT(b) + IT(h)$$

C'est la *condition de compatibilité* du problème posé.

Autre exemple

L'exemple suivant est fort instructif. On désire fabriquer un suspensoir pour deux rouleaux de papier hygiénique, au moyen de deux barres circulaires de diamètre d_1 situées sur une même verticale. La distance (au sens ensembliste) de ces deux barres est ℓ (fig. 5). Les rouleaux ont un diamètre intérieur d et un diamètre extérieur D . Chacune des cotes d_1 , d et D est affectée de tolérances. *On demande quelle est la distance minimale des deux barres pour que les deux rouleaux ne se touchent jamais. Plus précisément, on veut que leur distance x soit toujours au moins égale à une valeur x_m .*

Le choix de la cote ℓ , distance ensembliste entre les deux barres et non de la distance de leurs axes résulte du mode de fabrication illustré en figure 6 :. Après avoir monté la barre 1, on positionne la barre 2 à l'aide d'une entretoise de longueur ℓ . (Une telle entretoise peut d'ailleurs servir de moyen de contrôle.)

Dans l'établissement de la chaîne de cotes, il faut distinguer soigneusement les cotes d , d_1 , D de la partie inférieure des cotes d^* , d_1^* et D^* de la partie supérieure. En effet, s'il est bien vrai que leurs valeurs nominales et leurs écarts sont identiques, c'est-à-dire que

$$\bar{d} = \bar{d}^*$$

$$\bar{d}_1 = \bar{d}_1^*$$

$$\bar{D} = \bar{D}^*$$

$$ES(d) = ES(d^*)$$

$$EI(d) = EI(d^*)$$

$$ES(d_1) = ES(d_1^*)$$

$$EI(d_1) = EI(d_1^*)$$

$$ES(D) = ES(D^*)$$

$$EI(D) = EI(D^*)$$

il n'en reste pas moins qu'il s'agit de *réalisations différentes* des mêmes cotes tolérancées et qu'elles sont à ce titre *indépendantes*. On déduit de la figure 7

$$x = -\frac{D}{2} + \frac{d}{2} + \ell + d_1^* - \frac{d^*}{2} - \frac{D}{2}$$

ce qui donne

$$x_m = -\frac{D_M}{2} + \frac{d_m}{2} + \ell_m + d_{1m}^* - \frac{d_M^*}{2} - \frac{D_M^*}{2}$$

et

$$\ell_m = x_m + \frac{D_M}{2} + \frac{D_M^*}{2} - \frac{d_m}{2} + \frac{d_M^*}{2} - d_{1m}^*$$

Nous pouvons à présent utiliser le fait que

$$D_M^* = D_M$$

$$d_M^* = d_M$$

$$d_{1m}^* = d_{1m}$$

ce qui mène au résultat suivant :

$$l_m = x_m + D_M + \frac{1}{2} IT(d) - d_{1m}$$

Si l'on avait négligé de distinguer d et d^* dans les calculs, on aurait perdu le terme $IT(d)/2$ dans cette expression.

2.1.5 – Système ISO de tolérances

2.1.5.1 – Unité de tolérance

Nous avons donc vu qu'il doit exister des tolérances sur les cotes. La question est de préciser l'écart supérieur et l'écart inférieur de manière aussi sensée que possible. Les besoins de la pratique ont depuis longtemps conduit à définir des systèmes universels permettant de fixer ces écarts en fonction de la dimension de la pièce, de sa destination et de la dépense que l'on consent à engager pour sa fabrication. On dit qu'il s'agit de *systèmes de toléranciation*. Nous ne parlerons que du système ISO qui est devenu pratiquement universel.

Le premier problème à résoudre dans un système de toléranciation est de définir, en fonction de la cote considérée D , une *unité de tolérance* $i(D)$ correspondant à une difficulté de réalisation constante, quelle que soit la cote D . Dans le système ISO, cette unité de tolérance est donnée par la relation

$$\frac{i}{\mu m} = 0,45 \left(\frac{D}{mm} \right)^{1/3} + 0,001 \frac{D}{mm}$$

(Ce type de notation pour une équation entre mesures et non entre grandeurs est conforme à la norme DIN 1313, 1978).

Dans cette relation, le premier terme représente la difficulté de *réalisation* de la cote – le présent système admet qu'elle dépend de la racine cubique de la cote - et le second, la difficulté de la *mesurer* – ici admise proportionnelle à la cote.

Cependant, pour éviter une multiplication inutile des unités de tolérance, on a découpé l'ensemble des dimensions comprises entre 1 mm et 500 mm en treize échelons principaux, qui sont

$$\begin{aligned} &]1,3] ,]3,6] ,]6,10] ,]10,18] ,]18,30] ,]30,50] ,]50,80] ,]80,120] , \\ &]120,180] ,]180,250] ,]250,315] ,]315,400] ,]400,500] \end{aligned}$$

(Il existe également, pour certains cas particuliers, des échelons secondaires, subdivisions des précédents).

Pour une cote d appartenant à un échelon $[d_1, d_2]$, on calcule l'unité de tolérance à partir de la *moyenne géométrique des extrémités de l'intervalle*. Par exemple, la cote $d = 12 \text{ mm}$ se trouve dans l'intervalle $]10, 18[$, pour lequel

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{10 \cdot 18} = 13,42 \text{ mm} \\ \frac{i}{\mu\text{m}} &= 0,45 \sqrt[3]{13,42} + 0,001 \cdot 13,42 = 1,083 \end{aligned}$$

2.1.5.2 – Degré de tolérance

Il va de soi que toutes les cotes d'une pièce ne requièrent pas la même précision. Ne doivent être précises que les cotes jouant dans un assemblage. Par contre, dans de nombreux cas, les cotes d'encombrement ne sont pas fonctionnelles et peuvent rester brutes de forgeage ou de fonderie. Ceci a mené à définir la notion de *degré de tolérance* (on disait autrefois *qualité*) qui, pour une cote donnée, définit la *tolérance fondamentale* (largeur de l'intervalle de tolérance IT ; on dit encore, de façon un peu abusive, *intervalle de tolérance*). Plus le nombre de tolérance est élevé, plus IT est grand, à taille égale. Il existe 18 nombre de tolérance, à savoir

$$01, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 16$$

(La notation 01 doit être comprise comme (-1)). Au nombre de tolérance n correspond la tolérance fondamentale IT_n selon les lois suivantes :

$$\begin{aligned} IT5 &= 7i & IT11 &= 100i \\ IT6 &= 10i & IT12 &= 160i \\ IT7 &= 16i & IT13 &= 250i \\ IT8 &= 25i & IT14 &= 400i \\ IT9 &= 40i & IT15 &= 640i \\ IT10 &= 64i & IT16 &= 1000i \end{aligned}$$

Pour les nombres de tolérance inférieurs à 5, les formules donnant les tolérances fondamentales sont un peu plus compliquées [2, 3] et nous ne nous y attarderons pas. En

VARIATION DU PRIX DE REVIENT
AVEC LA QUALITE D'EXECUTION [1]

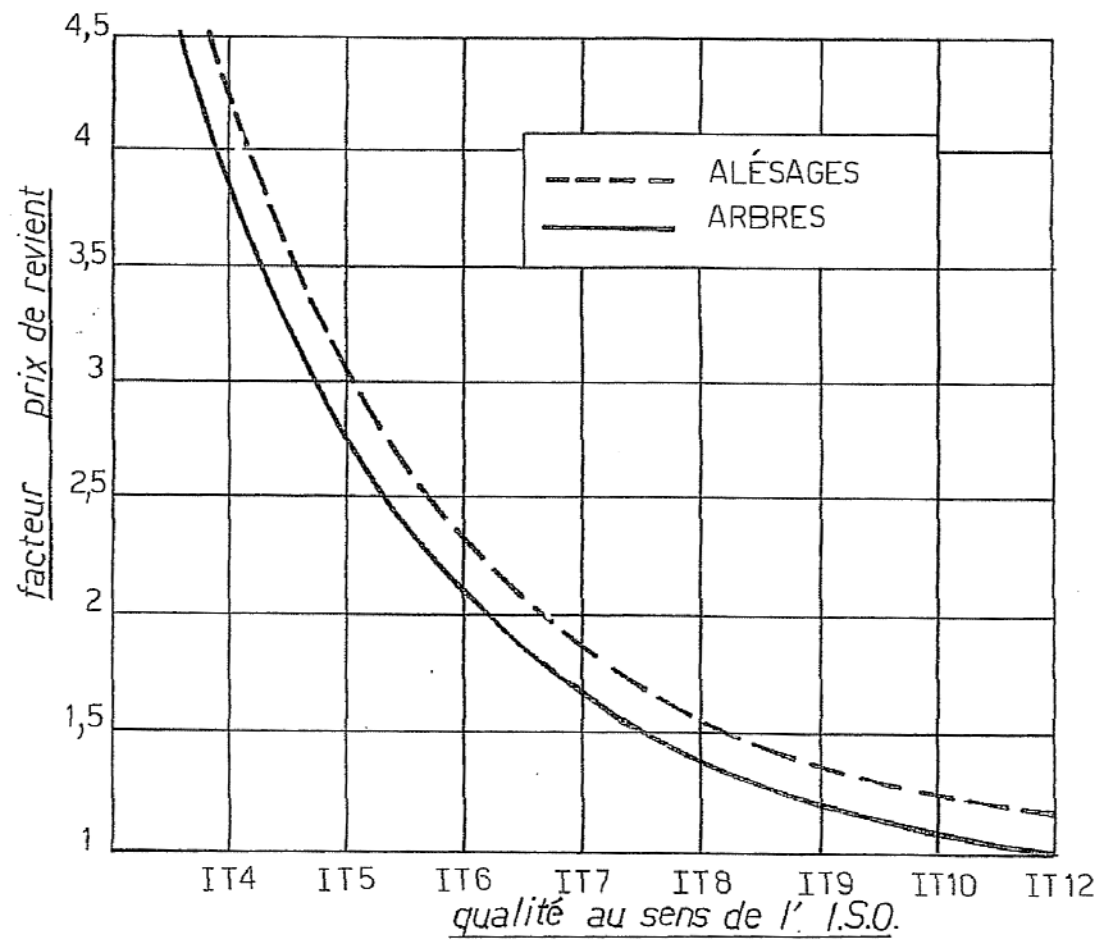


FIG. 8

outre, il y a des règles d'arrondissement, que l'on trouve dans les mêmes ouvrages. On notera qu'à partir de $IT6 = 10i$, les tolérances fondamentales sont en progression géométrique suivant la série Renard $R5$ dont la raison vaut approximativement 1,6.

Le domaine d'application des différents nombres de tolérance peut être schématisé comme suit

01	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<i>Calibres très précis</i>						<i>Construction mécanique</i>						<i>Grossier</i>					
						↪ arbres						Ebauches, cotes					
						↪ alésages						non fonctionnelles					

La figure 8 donne une idée de la variation du prix de revient avec le degré de tolérance. On notera en particulier que les alésages sont toujours plus chers, à tolérance égale, que les arbres.

2.1.5.3 – Écarts

Après avoir défini la grandeur de l'intervalle de tolérance, il faut encore préciser sa *position*. Considérons en effet un ajustement alésage/arbre et supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un palier. On désire donc obtenir un *jeu*, c'est-à-dire que le diamètre de l'arbre doit être plus petit que celui de l'alésage. On pourrait évidemment envisager de distinguer les deux diamètres sur le dessin. Mais la petitesse du jeu nécessiterait alors des échelles extravagantes. C'est pourquoi il est d'usage de confondre les deux diamètres sur le dessin et de leur attribuer *la même cote nominale* : ils ne se distingueront que par leurs *écarts* par rapport à la cote nominale. On aura donc, en utilisant des majuscules pour l'alésage et des minuscules pour l'arbre ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Diamètre nominal} & \overline{D} = \overline{d} = \phi \\ \text{Alésage} & D \in (\phi + EI, \phi + ES) \\ \text{Arbre} & d \in (\phi + ei, \phi + es) \end{array} \right.$$

et le jeu sera garanti si le plus gros arbre passe dans l'alésage le plus étroit, ce qui aura lieu si $es < EI$. On constate que de cette façon, le problème de savoir s'il s'agit d'un jeu ou d'une interférence se ramène à une comparaison des écarts.

L'analyse des écarts est facilitée par l'usage d'un diagramme où l'on dessine les cotes de bas en haut. La cote nominale est repérée par une ligne horizontale dite *ligne de référence* (fig. 9). Un intervalle de tolérance est alors dessiné par une zone rectangulaire dont les deux côtés horizontaux sont situés au niveau des écarts inférieur et supérieur.

Pour une cote donnée sur une pièce donnée, les deux écarts peuvent soit être de signe contraire, soit tous deux positifs ou négatifs. Dans tous les cas, on appelle *écart fondamental* ef celui qui a la plus petite valeur absolue. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} ef = es & \text{si la zone de tolérance est entièrement située en - dessous de la ligne de référence} \\ ef = ei & \text{si la zone de tolérance est entièrement située au - dessus de la ligne de référence} \end{array} \right.$$

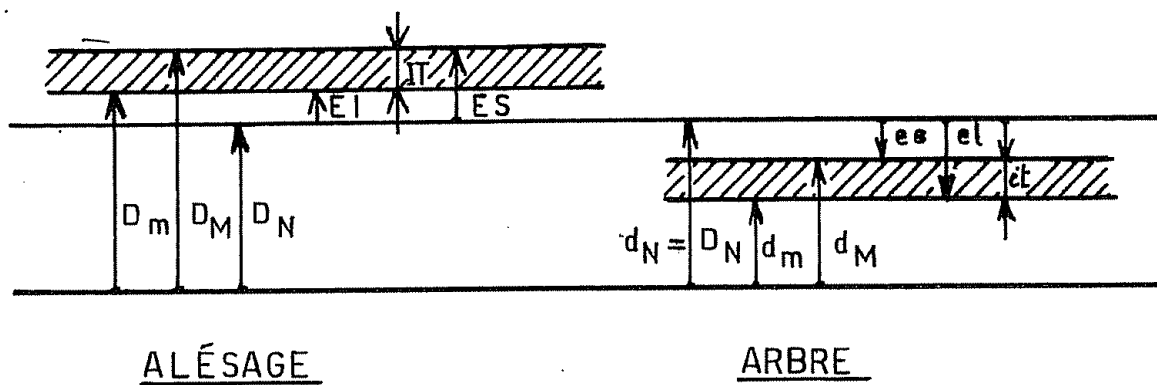


FIG. 9

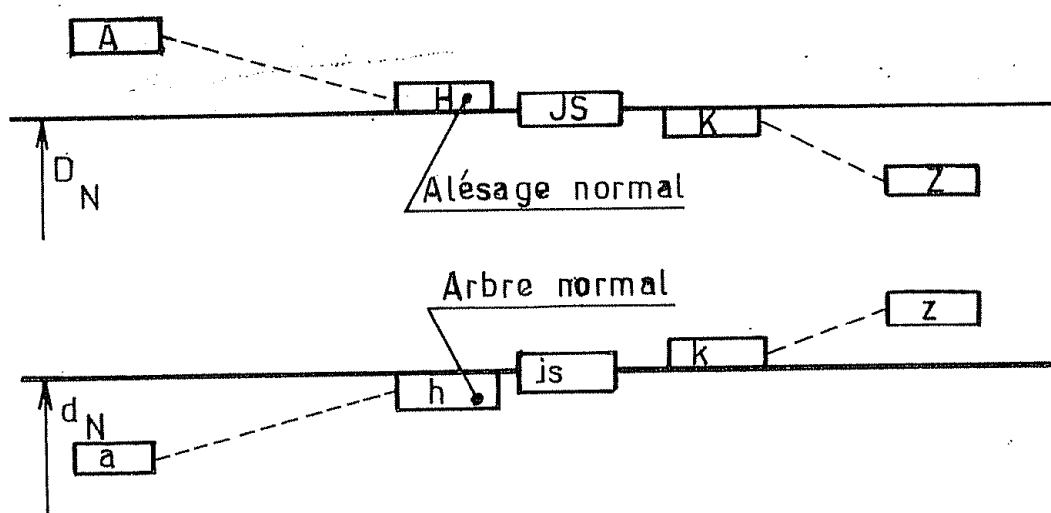


FIG. 10

qu'il s'agisse d'un arbre ou d'un alésage. Enfin, lorsque la zone de tolérance chevauche la ligne de référence, on donne les deux écarts.

Les écarts fondamentaux sont, dans le système ISO, en nombre fini pour une cote donnée, ce qui définit le *type* de l'intervalle de tolérance. Le type est caractérisé par une lettre de l'alphabet, minuscule dans le cas d'un arbre et majuscule dans le cas d'un alésage. Par conséquent, les arbres a, b, c, d, sont de plus en plus gros et les alésages A, B, C, D, ... de plus en plus étroits (fig. 10). Une importance spéciale est accordée aux arbres et alésages dits *normaux*, notés h et H, tels que $es = 0$ pour les arbres et $EI = 0$ pour les alésages. Ceci revient à dire que l'on appelle *normales* les pièces dont le maximum de matière correspond à la cote nominale. Chaque fois que c'est possible, on essaie d'avoir soit l'arbre, soit l'alésage normal. On parle alors du *système de l'arbre normal* et du *système de l'alésage normal*, respectivement.

2.1.5.4 – Cote de type arbre et cote de type alésage

Les arbres et alésages ne sont pas les seules pièces à tolérer. Cependant, le même système se généralise à toute espèce de cote, à condition de voir ce qui se passe quand on augmente la quantité de matière. On appelle donc, dans le cadre de la tolérancement, *cote de type arbre* une cote qui augmente lorsqu'il y a un supplément de matière ou, ce qui revient au même, une cote qui diminue lors de l'usinage qui, bien entendu, enlève de la matière. Au contraire, une cote qui diminue lors d'un surcroît de matière ou, ce qui revient au même, qui augmente lors de l'usinage, est appelée *cote de type alésage*. Ainsi, la largeur d'une rainure de clavette dans un arbre est une cote *de type alésage*, car un usinage subséquent de cette largeur l'augmente.

2.1.5.5. – Fixation des cotes de type arbre

Pour les cotes de type arbre, les écarts fondamentaux sont *indépendants du degré de tolérance*. Ainsi, un arbre a7 et un arbre a8 ont leur écart supérieur commun et égal à l'écart fondamental $ef(a)$. On a donc

$$es(a7) = es(a8) = ef(a)$$

$$ei(a7) = ef(a) - it7$$

$$ei(a8) = ef(a) - it8$$

Les écarts fondamentaux se calculent par les formules suivantes, où

$$[es] = \frac{es}{\mu m}, \quad [ei] = \frac{ei}{\mu m}, \quad [N] = \frac{N}{mm}, \quad [ITn] = \frac{ITn}{\mu m}$$

N étant la cote nominale.

$$\textbf{Type a : } [es] = \begin{cases} -(265 + 1.3[N]) & \text{pour } [N] \leq 120 \\ -3,5[N] & \text{pour } [N] > 120 \end{cases}$$

$$\text{Type b : } [es] = \begin{cases} -(140 + 0,85[N]) & \text{pour } [N] \leq 160 \\ -1,8[N] & \text{pour } [N] > 160 \end{cases}$$

$$\text{Type c : } [es] = \begin{cases} -52[N]^{0,2} & \text{pour } [N] \leq 40 \\ -(95 + 0,8[N]) & \text{pour } [N] > 40 \end{cases}$$

Type cd : $[es]$ = moyenne géométrique des $[es]$ des types c et d

$$\text{Type d : } [es] = -16[N]^{0,44}$$

$$\text{Type e : } [es] = -11[N]^{0,41}$$

Type ef : $[es]$ = moyenne géométrique des $[es]$ des types e et f

$$\text{Type f : } [es] = -5,5[N]^{0,41}$$

Type fg : $[es]$ = moyenne géométrique des $[es]$ des types f et g

$$\text{Type g : } [es] = -2,5[N]^{0,34}$$

$$\text{Type h : } [es] = 0$$

Type j : *pas de formule*

$$\text{Type js : } \begin{cases} es = 0,5ITn \\ ei = -0,5ITn \end{cases}$$

$$\text{Type k : } [ei] = \begin{cases} 0,6[N]^{1/3} & \text{pour IT4 à IT7} \\ 0 & \text{pour IT01 à IT3 et IT8 à IT16} \end{cases}$$

$$\text{Type m : } ei = IT7 - IT6$$

$$\text{Type n : } [ei] = 5[N]^{0,34}$$

$$\text{Type p : } ei = IT7 + 0 \text{ à } 5\mu m$$

Type r : $[ei]$ = moyenne géométrique entre les $[ei]$ des types p et s

$$\text{Type s : } [ei] = \begin{cases} [IT8] + 1 \text{ à } 4 & \text{pour } [N] \leq 50 \\ [IT7] + 0,4[N] & \text{pour } [N] > 50 \end{cases}$$

$$\text{Type t : } [ei] = [IT7] + 0,63[N]$$

$$\text{Type u : } [ei] = [IT7] + [N]$$

$$\text{Type v : } [ei] = [IT7] + 1,25[N]$$

$$\text{Type x : } [ei] = [IT7] + 1,6[N]$$

$$\text{Type y : } [ei] = [IT7] + 2[N]$$

$$\text{Type z : } [ei] = [IT7] + 2,5[N]$$

$$\text{Type za : } [ei] = [IT8] + 3,15[N]$$

$$\text{Type zb : } [ei] = [IT9] + 4[N]$$

$$\text{Type zc : } [ei] = [IT10] + 5[N]$$

2.1.5.6 – Equivalence des ajustements

La fixation des écarts fondamentaux des cotes de type alésage est plus complexe, pour une raison que l'on ne peut comprendre qu'après s'être posé le problème de l'*équivalence des ajustements*. Dans l'ajustement d'un arbre de diamètre d avec un alésage de diamètre D , auxquels on attribue la même cote nominale, on peut définir le *jeu* par

$$j = D - d$$

Dans cette optique, il faut comprendre un jeu négatif comme une *interférence* (plus précisément, dans ce cas, l'interférence est $i = d - D$). On déduit immédiatement les valeurs suivantes du jeu maximal j_M et du jeu minimal j_m :

$$j_M = D_M - d_m = ES - ei$$

$$j_m = D_m - d_M = EI - es$$

Deux ajustements différents sont dits *équivalents* s'ils mènent aux mêmes jeux maximal et minimal. Pour rendre le système de tolérancement aussi simple que possible, on désirerait que les ajustements *homologues* des systèmes de l'alésage normal et de l'arbre normal, comme

$$H9/e6 \quad \text{et} \quad E9/h6$$

(c'est à dire obtenus en maintenant le degré de tolérance de chaque pièce mais en permutant les types), soient équivalents. Nous allons montrer que ce n'est pas toujours possible sans condition supplémentaire. Deux cas sont à considérer :

- *CAS 1* : les deux zones de tolérances sont situées de part et d'autre de la ligne de référence, c'est-à-dire que la pièce non normale est moins que normale (a à h ou A à H) (fig. 11).

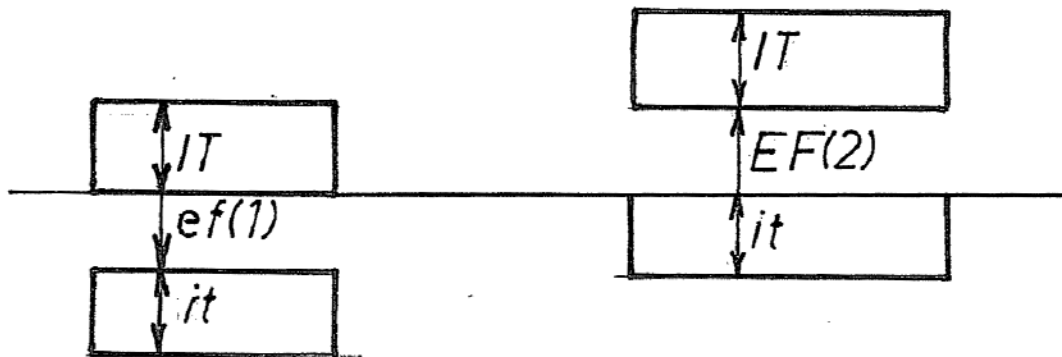


FIG. 11

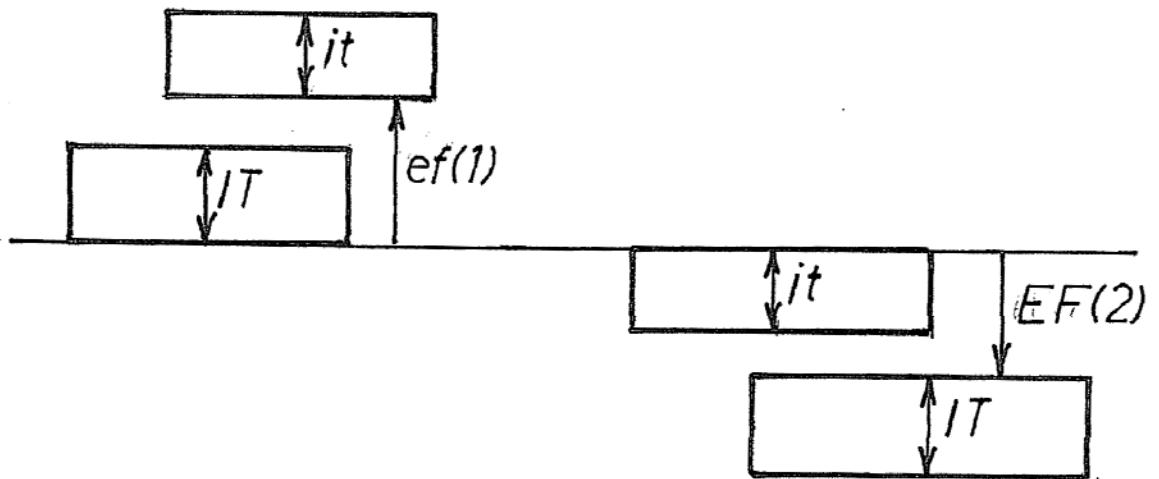


FIG. 12

Dans le système de l'alésage normal, on a

$$\begin{aligned}EI(1) &= 0 \\ES(1) &= IT \\es(1) &= ef(1) \\ei(1) &= ef(1) - it\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}j_M(1) &= ES(1) - ei(1) = IT - ef(1) + it \\j_m(1) &= EI(1) - es(1) = -ef(1)\end{aligned}$$

Dans le système de l'arbre normal, on a

$$\begin{aligned}EI(2) &= EF(2) \\ES(2) &= EF(2) + IT \\es(2) &= 0 \\ei(2) &= -it\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}j_M(2) &= ES(2) - ei(2) = EF(2) + IT + it \\j_m(2) &= EI(2) - es(2) = EF(2)\end{aligned}$$

La condition d'équivalence des deux ajustements, égalité des jeux extrêmes, est visiblement

$$EF(2) = -ef(1)$$

Cela signifie que *l'équivalence sera réalisée si les écarts des alésages sont exactement opposés aux écarts des arbres*, indépendamment des tolérances fondamentales IT et it.

• *CAS 2 : Les deux zones de tolérances sont situées du même côté de la ligne de référence (fig. 12). Ceci se produit si la pièce non normale est plus que normale, c'est-à-dire au moins js ou JS.*

Dans le système de l'alésage normal, on a ici

$$\begin{aligned}EI(1) &= 0 \\ES(1) &= IT \\ei(1) &= ef(1) \\es(1) &= ef(1) + it\end{aligned}$$

ce qui donne

$$j_M(1) = ES(1) - ei(1) = IT - ef(1)$$

$$j_m(1) = EI(1) - es(1) = -ef(1) - it$$

Dans le système de l'arbre normal, on a

$$ES(2) = EF(2)$$

$$EI(2) = EF(2) - IT$$

$$es(2) = 0$$

$$ei(2) = -it$$

si bien que

$$j_M(2) = ES(2) - ei(2) = EF(2) + it$$

$$j_m(2) = EI(2) - es(2) = EF(2) - IT$$

L'identité des jeux extrêmes ne sera réalisée que si

$$IT - ef(1) = EF(2) + it$$

(La deuxième condition est identique, car dans les deux cas, $j_M - j_m = IT + it$). Ainsi, la condition d'équivalence est donnée par

$$EF(2) = -ef(1) + IT - it$$

Cette dernière condition ne peut plus être vérifiée indépendamment des degrés de tolérance. Il est donc nécessaire, à ce stade de faire un *choix* de qualités menant à l'équivalence.

2.1.5.7 – Fixation des écarts des alésages

La fixation des écarts des alésages découle des résultats ci-dessus. Pour les alésages des types A à H, on pose naturellement

$$ES_n = -ei_n$$

ce qui, comme nous l'avons vu, garantit l'équivalence des homologues quel que soit leur degré de tolérance.

Pour les alésages à partir du type JS, la condition d'équivalence des homologues est en général

$$ES_p = -ei_q + IT_p - IT_q$$

et il faut *choisir* une correspondance entre le degré de tolérance de l'alésage et celui de l'arbre. Il est clair que si l'on faisait le choix $p=q$, on se ramènerait à la simple opposition des écarts. Mais cela mènerait à réaliser des alésages aussi précis que les arbres, *ce qui n'est pas économique*, du moins pour les pièces précises. La bonne pratique, dans ce cas, est de choisir

pour l'alésage un degré de tolérance d'une unité supérieur à celui de l'arbre, par exemple $H7/p6$. Aussi a-t-on choisi, *pour les faibles degrés de tolérance*, la relation

$$ES_n = -ei_{n-1} + IT_n - it_{n-1}$$

qui garantit l'équivalence d'homologues comme

$$H6/p5 \quad \text{et} \quad P6/h5$$

Le détail des relations utilisées est donné dans le fascicule *QR*, page T5. On notera que, par exception, les écarts N sont caractérisés, pour les grands degrés de tolérance, par la relation $ES = 0$.

Il existe encore quelques exceptions de moindre importance, que nous ne détaillerons pas ici.

2.1.5.8 – Choix des ajustements

Comme nous l'avons déjà signalé, les ajustements courants sont soit à alésage normal H , soit à arbre normal h . Généralement, on préfère le système de l'*alésage normal*, car il évite d'avoir recours à des alésoirs spéciaux. On réserve le système de l'arbre normal aux cas où il présente un intérêt économique certain, par exemple lors de l'utilisation d'un arbre acheté pré-rectifié.

Selon la position relative des deux zones de tolérance, on distingue les ajustements *avec jeu*, où la zone de tolérance de l'arbre est tout entière en retrait de celle de l'alésage, les ajustements *avec serrage*, où la zone de tolérance de l'arbre est tout entière au-delà de celle de l'alésage et enfin, les *ajustements incertains*, où les zones de tolérance se chevauchent partiellement (fig. 13).

On trouvera des indications sur les ajustements les plus courants dans le fascicule *QR*, avec quelques exemples d'application.

Nous concluons en disant qu'il faut toujours, en matière de tolérances, se pénétrer du principe suivant : « *aussi grossier que possible, aussi fin que nécessaire* » [4].

2.1.5.9 – Exemple (fig. 14)

Le jeu entre l'axe et le presse-étoupe d'un ventilateur doit valoir au moins 0,1 mm et au plus 0,4 mm. En effet, d'une part, il ne faut pas mettre la mobilité de l'arbre en danger, ce qui impose un jeu minimal ; d'autre part, il faut empêcher la pénétration de la garniture entre l'arbre et l'alésage, ce qui fixe le maximum. Pour des raisons liées à la fabrication, on désire que la dimension maximale de l'arbre soit son diamètre nominal $N = 16$ mm. On demande

a) de calculer les écarts en mm pour l'arbre et l'alésage, en leur donnant une tolérance égale et aussi grossière que possible.

b) de déterminer l'ajustement ISO qui convient le mieux, tout en respectant strictement le cahier des charges.

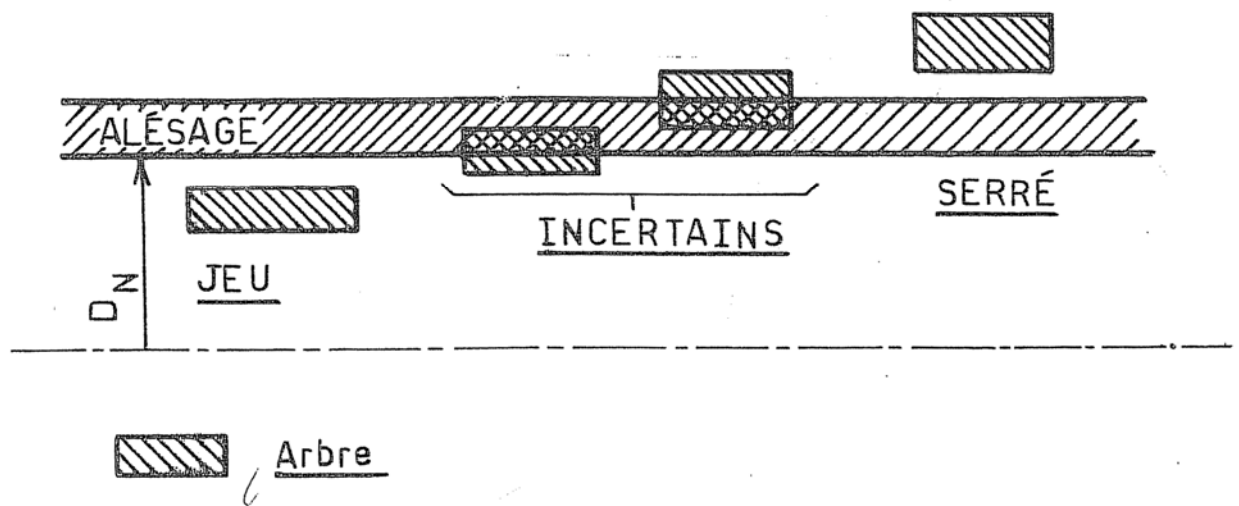


FIG. 13

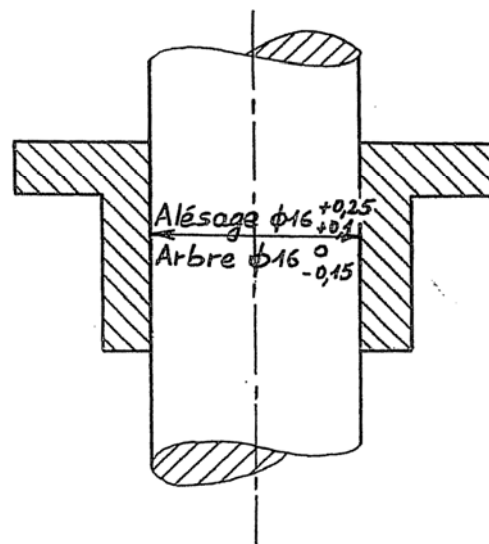


FIG. 14

Solution

a) Le jeu maximal est

$$ES - ei = EI + 2IT$$

et l'écart minimal, EI . On obtient donc les relations

$$EI + 2IT \leq 0,4mm$$

$$EI \geq 0,1mm$$

En les soustrayant, on trouve

$$2IT \leq 0,3mm = 300\mu m$$

$$IT \leq 150\mu m$$

On aura donc, au plus grossier,

$$EI = 0,1mm$$

$$ES = 0,1 + 0,150 = 0,25mm$$

$$ei = -IT = -0,15mm$$

$$es = 0$$

La figure 14 montre comment inscrire ces tolérances.

b) D'après le tableau des tolérances fondamentales (*fascicule QR, page T2*), $IT11 = 110\mu m$, $IT12 = 180\mu m$, ce qui conduit à choisir le degré de tolérance 11. L'arbre sera évidemment du type $h11$. Pour ce qui est de l'alésage, la correspondance des écarts fondamentaux (*fascicule QR, page T5*) indique que pour le degré de tolérance 11, on a toujours $EF11 = -ef11$. Or, on a (*QR, page T3*)

$$c11 \leftrightarrow es = -95\mu m$$

$$b11 \leftrightarrow es = -150\mu m$$

Comparons ces deux possibilités. La première donnera successivement

$$EI(C11) = 95\mu m$$

$$ES(C11) = 95 + 110 = 205\mu m$$

$$j_M = 205 + 110 = 305\mu m$$

$$j_m = 95 + 0 = 95\mu m$$

soit une légère entorse au cahier des charges pour le jeu minimal. La seconde mènera à

$$EI(B11) = 150\mu m$$

$$ES(B11) = 150 + 110 = 260\mu m$$

$$j_M = 260 + 110 = 370\mu m$$

$$j_m = 150 + 0 = 150\mu m$$

Cette solution respecte parfaitement le cahier des charges. Finalement, l'ajustement convenable est $B11/h11$.

2.1.6 – Bibliographie

1. G. NIEMANN – *Maschinenelemente*, Band I
2d. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975
ISBN 3-540-06809-0
2. *Normes belges* NBN 101 à 103
3. *Normes allemandes* DIN 7151
4. H. ROLOFF, W. MATEK – *Maschinenelemente*
7 Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1976
ISBN 3-528-14028-3
5. G. LENORMAND, J. TINEL – *Mémento de dessin industriel*, Tome 2
Foucher, Paris, 1979
6. A. CHEVALIER – *Guide du dessinateur industriel*
Hachette, Paris, 2004
ISBN 2-01-168831-0

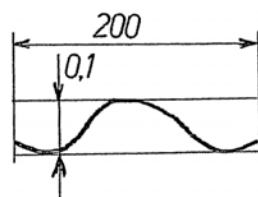
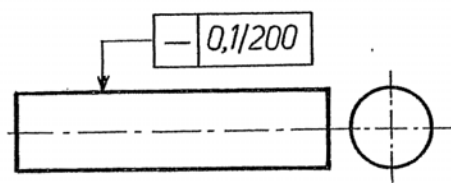


FIG. 15

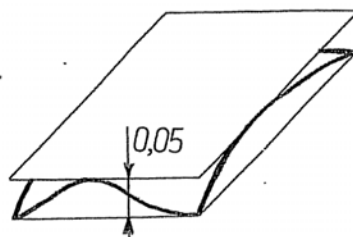
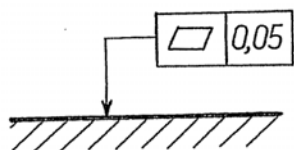


FIG. 16

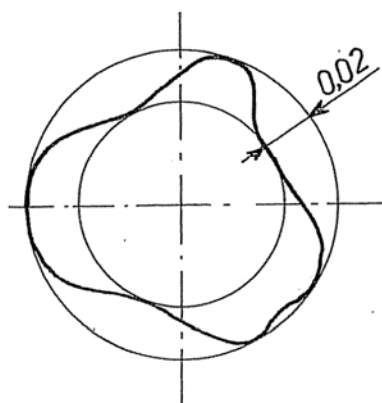
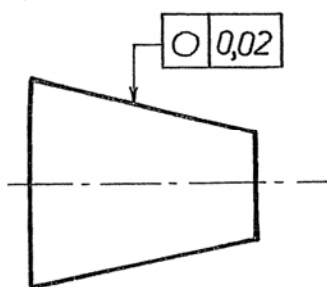


FIG. 17

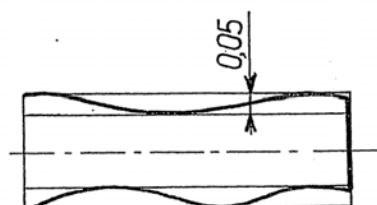
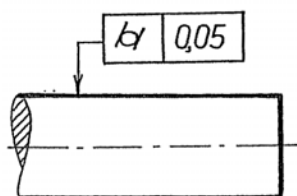


FIG. 18

2.2 – TOLÉRANCES GÉOMÉTRIQUES

2.2.1 – Définition

On appelle *tolérances géométriques* des tolérances qui portent sur la forme, l'orientation ou la localisation de certaines parties d'un organe de machine, indépendamment de ses dimensions. Ces tolérances correspondent à des conditions de fonctionnement correct de l'ensemble mécanique considéré.

2.2.2 – Tolérances de forme

a) Rectitude d'une ligne ou d'un axe (fig. 15)

Le *défait de rectitude* d'une ligne est la distance minimale de deux droites parallèles qui encadrent exactement la ligne en question. Les deux droites d'encadrement peuvent avoir une orientation quelconque et le minimum est pris en modifiant leur orientation commune. C'est ce défaut qui est coté en figure 15. La cotation 0,1/200 signifie que le défaut de rectitude doit être inférieur à 0,1mm sur toute longueur de 200mm prise sur la ligne considérée. Autrement dit, quelle que soit la longueur de 200mm prise sur la ligne considérée, cette ligne doit pouvoir être entièrement comprise entre deux droites parallèles, d'orientation quelconque, et distantes de 0,1mm.

b) Planéité d'une surface (fig. 16)

Le *défait de planéité* d'une surface est la distance minimale de deux plans parallèles qui encadrent exactement la surface en question. Ici encore, le minimum est obtenu en faisant varier l'orientation commune des deux plans. La figure 16 exprime que ce défaut doit être inférieur à 0,05mm ou, ce qui est équivalent, qu'il est possible de trouver deux plans parallèles, distants de 0,05mm, entre lesquels la surface est entièrement comprise, sachant que l'on peut, dans ce test, orienter les deux plans de manière arbitraire.

c) Circularité d'une courbe (fig. 17)

Le *défait de circularité* d'une courbe est la différence minimale de rayon des deux cercles concentriques qui encadrent exactement la courbe donnée. Le minimum est obtenu en faisant varier le centre commun des deux cercles. La figure 17 exprime que ce défaut doit être inférieur à 0,02mm. Il est équivalent de dire que l'on doit parvenir à trouver deux cercles concentriques, de centre quelconque, dont les rayons diffèrent de 0,02mm, tels que la courbe soit entièrement comprise entre ces deux cercles.

d) Cylindricité d'une surface (fig. 18)

Le *défait de cylindricité* d'une surface est la différence minimale de rayon de deux cylindres coaxiaux qui encadrent exactement la surface en question. Le minimum s'obtient en modifiant la position et l'orientation de l'axe commun des deux cylindres. La figure 25 exprime que ce défaut doit être inférieur à 0,05mm. Il est équivalent de dire qu'on doit

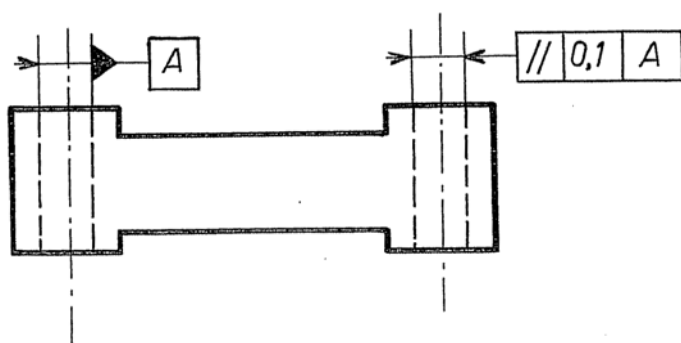


FIG. 19

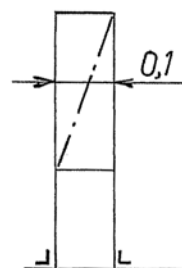
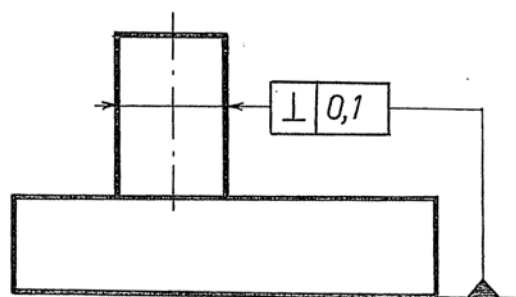
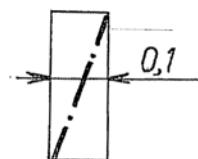


FIG. 20

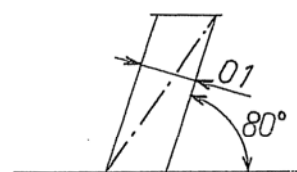
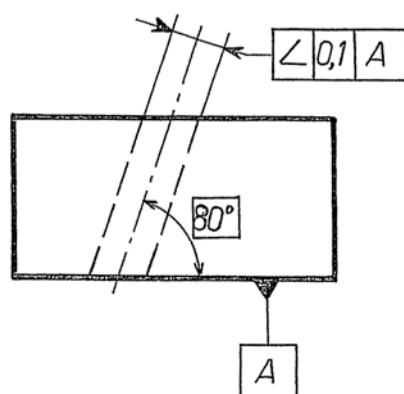


FIG. 21

pouvoir trouver deux cylindres coaxiaux d'axe commun quelconque, dont la différence de rayon est égale à $0,05\text{mm}$, tels que la surface soit entièrement comprise entre ces deux cylindres.

2.2.3 – Tolérances d'orientation

Il s'agit toujours de l'orientation d'une ligne ou d'une surface *par rapport à une référence*. Celle-ci est indiquée sur le dessin par le symbole



où A est l'étiquette de référence.

a) Parallélisme (fig. 19)

Le *défaut de parallélisme* de l'axe tolérancé est la distance minimale de deux droites parallèles à la référence qui encadrent exactement cet axe. Cette distance doit ici être inférieure à $0,1\text{ mm}$, dans le plan du dessin.

b) Perpendicularité (fig. 20)

Le *défaut de perpendicularité* de l'axe du cylindre est la distance minimale de deux droites perpendiculaires, contenues dans le plan du dessin, qui encadrent exactement l'axe considéré. Ce défaut doit ici être inférieur à $0,1\text{mm}$.

c) Inclinaison (fig. 21)

Dans ce plan apparaît une *cote encadrée*. C'est une cote de *référence*, réalisable à l'aide d'un calibre très précis (la règle des métrologues est que le calibre doit avoir une erreur inférieur au *dixième* de la tolérance à mesurer). Une cote de référence n'est *jamaïs* tolérancée. Cela étant, le *défaut d'inclinaison* est la distance minimale entre deux droites inclinées selon la cote encadrée, qui encadrent exactement la ligne tolérancée. Cette distance doit ici être inférieure à $0,1\text{mm}$.

Remarques

Ces définitions, pour simples qu'elles paraissent, appellent cependant un certain nombre de remarques.

1) Référence simulée.

Lorsque la référence est imparfaite, notamment, quand elle est une surface de la pièce présentant une erreur de planéité, il faut en fait la remplacer par une surface parfaite qui

FIG. 22

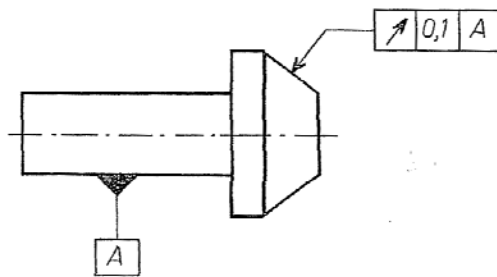
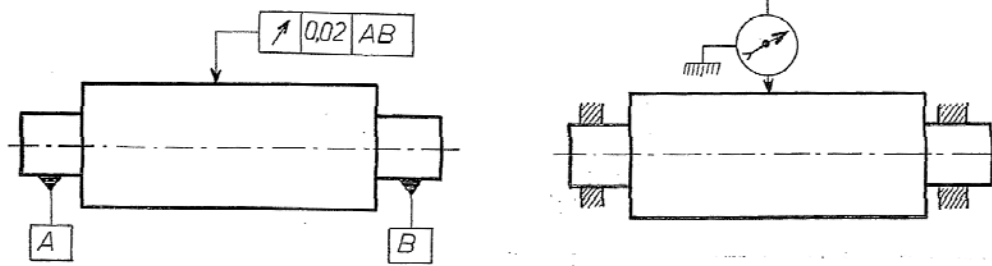


FIG. 23

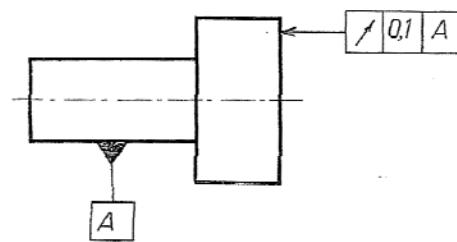


FIG. 24

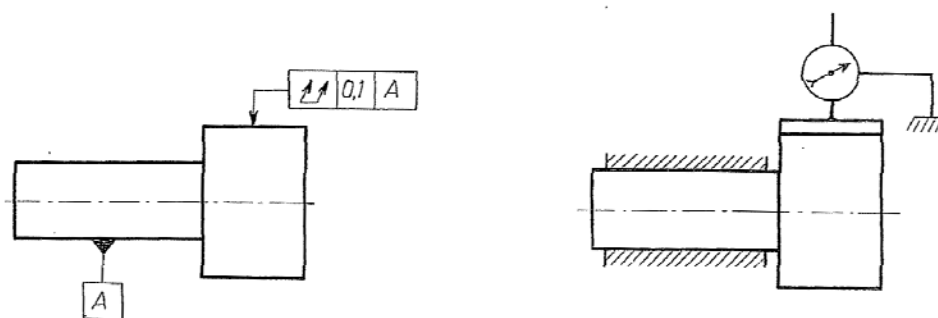


FIG. 25

approche la surface réelle. On dit que l'on utilise une *référence simulée*. Le choix correct de cette référence simulée est un réel problème en soi. Il semble que le choix le plus correct est la direction des deux plans de l'encadrement le plus fin de la surface de référence, comme on les obtient dans l'analyse du défaut de planéité. Cette question ne fait pas l'unanimité, certains préconisant le plan de meilleure approximation au sens des moindres carrés, ce qui est très discutable.

2) Non-réciprocité du parallélisme

Il suit de la définition du défaut de parallélisme qu'il contient implicitement le défaut de forme de la surface tolérancée. Il en résulte que le défaut de parallélisme d'une surface A imparfaite par rapport à une surface B parfaite diffère en général du défaut de parallélisme de la surface B par rapport à la surface A simulée. Nous invitons le lecteur à s'en persuader sur des exemples.

Il résulte de ceci que des tolérances d'orientation entre lignes et surfaces d'une pièce n'ont vraiment de sens *que si les tolérances de forme de ces lignes et surfaces sont petites par rapport à celles d'orientation*.

2.2.4 – Tolérances de battement

Le battement, c'est le fait qu'une pièce supposée de révolution, placée sur ces appuis naturels (paliers), « ne tourne pas rond ».

a) battement simple radial (fig. 22)

En plaçant le corps sur ces deux paliers A et B, qui forment une référence composée, on mesure le déplacement radial d'un comparateur lors de la rotation. Ce déplacement, ici appelé battement radial, ne doit pas dépasser, selon le plan, 0,02mm.

b) Battement oblique (fig. 23)

On place ici le corps sur un palier long A, et on mesure le battement perpendiculairement à la surface conique considérée.

c) Battement axial (fig. 24)

Idem, en plaçant le comparateur dans la direction de l'axe. Certains auteurs parlent, pour ce type de battement, du *voile* de la surface.

d) Battement radial total (fig. 25)

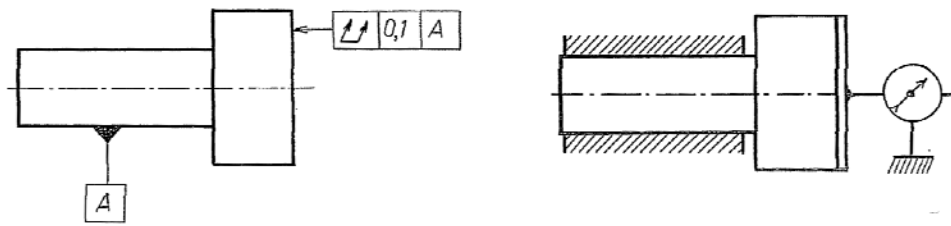


FIG. 26

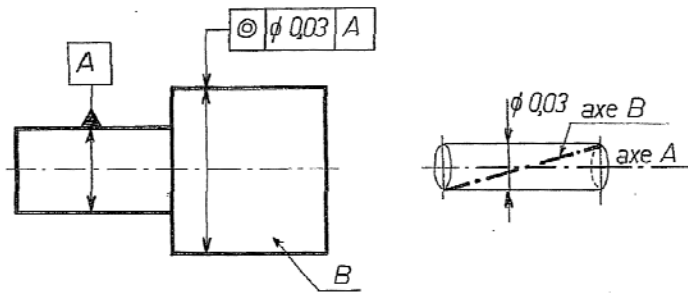


FIG. 27

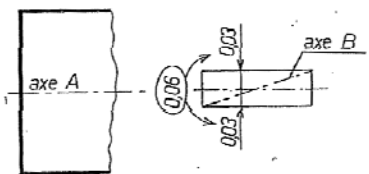
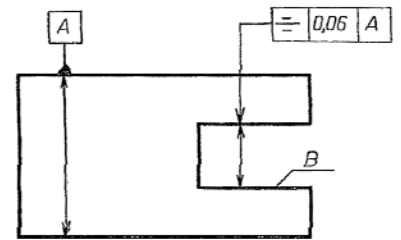


FIG. 28

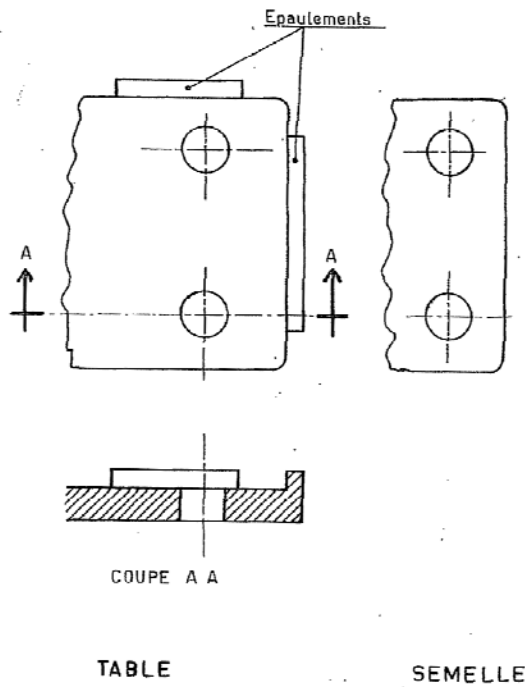


FIG. 29

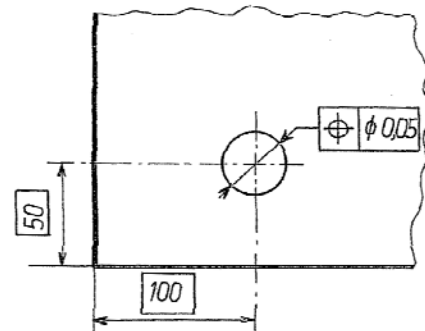


FIG. 30

On peut schématiser ce défaut en imaginant que l'on lie au comparateur une barre axiale. On mesure donc toute la longueur de la surface en une fois. (Ceci n'est qu'un schéma : en pratique, la mesure se fait autrement).

e) Battement axial total (fig. 26)

Schématisé sur la figure.

2.2.5 – Tolérances de localisation

a) Coaxialité (fig. 27)

L'axe du cylindre tolérancé doit être contenu dans une zone cylindrique de diamètre 0,03 mm concentrique à l'axe du cylindre de référence A.

b) Symétrie (fig. 28)

Le plan méridien de la rainure doit être compris entre deux plans parallèles, distants de 0,06 mm *et symétriquement placés par rapport au plan méridien de référence A* (donc, à 0,03 mm de part et d'autre du plan de référence !)

c) Localisation d'un point

Pour expliquer la raison d'être de ce type de tolérances, nous emprunterons un exemple de l'ouvrage [1].

Soit à poser une semelle sur une table possédant deux bossages de positionnement. La fixation se fait à l'aide de boulons (*fig. 29*). Les trous sont évidemment plus grands que les tiges des vis. En fabrication unitaire, on perce les deux trous simultanément à travers les deux pièces assemblées à l'aide de serre-joints. Cette façon de faire garantit que les deux trous sont l'un en face de l'autre, sans pour autant garantir leur position. Dans le cas d'une série, les deux pièces sont fabriquées *séparément* et de plus, on veut qu'elles soient *interchangeables*.

Pour résoudre ce problème, on pose comme principe fondamental que *les pièces doivent laisser passer les tiges de vis si celles-ci sont dans leur position idéale*. Ce principe permet de *découpler* les problèmes relatifs aux deux pièces, ce qui garantit l'interchangeabilité. Sur la figure 30, les cotes encadrées représentent la position *idéale* du trou, c'est-à-dire, la position idéale des axes des vis. Comme l'illustre la figure 31, la distance extrême entre l'axe du trou et celui de la vis d'obtient par

$$x = \frac{D - d}{2}$$

Selon les valeurs effectives des diamètres, cette distance admissible varie entre

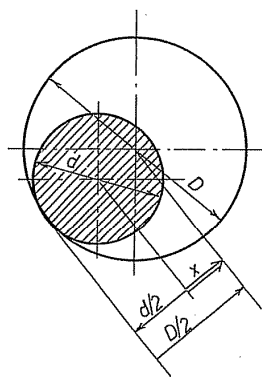


FIG. 31

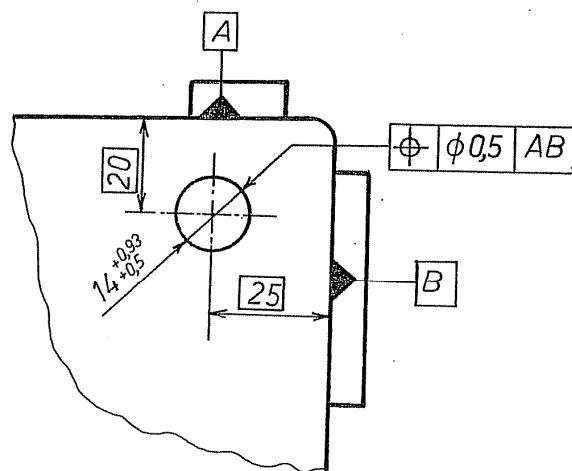
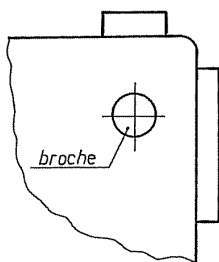


FIG. 32



CALIBRE POUR LA SEMELLE

FIG. 33

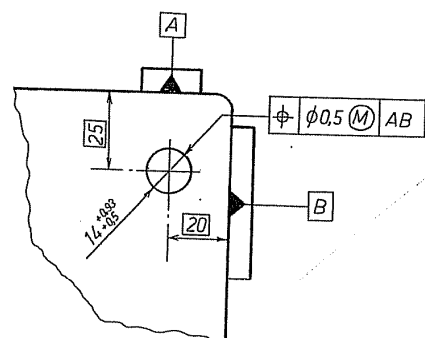


FIG. 34

$$x_M = \frac{D_M - d_m}{2}$$

et

$$x_m = \frac{D_m - d_M}{2}$$

L'assemblage est donc *certainement possible* si le centre du trou se trouve à une distance inférieure ou égale à x_m du trou de la vis, c'est-à-dire s'il est situé dans un cercle de diamètre

$$t = 2x_m = D_m - d_M$$

centré sur la position théorique de la vis. Cette tolérance est indiquée en figure 32.

d) Cotation au maximum de matière

La cotation précédente est *fonctionnelle*, c'est-à-dire qu'elle garantit la fonctionnalité, en l'occurrence, la possibilité d'assembler les deux pièces. Mais elle n'est pas *optimale*. En effet, on peut atteindre cette même fonctionnalité en étant moins exigeant sur la localisation des trous.

Revenons en effet sur l'expression admissible entre les deux axes,

$$x = \frac{D - d}{2}$$

Nous en avons cherché la plus petite valeur en faisant varier le diamètre du trou et celui de la vis. Mais si l'on considère une pièce donnée, dont le trou a un diamètre effectif $D_{eff} > D_m$, il est clair que ce trou peut avoir un décentrement allant jusqu'à

$$x_{eff} = \frac{D_{eff} - d_M}{2}$$

sans compromettre la possibilité d'assemblage. Ainsi, un plus grand diamètre du trou permet une plus grande erreur de localisation et inversement. C'est à dire que *la condition la plus défavorable à l'assemblage est le maximum de matière*. On se convainc aisément que cette propriété est tout à fait générale. Partant de la valeur t_{MM} correspondant au maximum de matière, la valeur réellement permise pour un diamètre effectif D_{eff} est donnée par

$$t_{eff} = t_{MM} + (D_{eff} - D_{MM})$$

A première vue, cette condition est bien trop compliquée pour pouvoir être mesurée. Il n'en est rien. Au contraire, elle se vérifie aisément à l'aide de *calibres*. Le calibre destiné à vérifier la semelle reproduit exactement la table, sauf que les trous sont remplacés par des broches ayant le diamètre maximal d_M des vis (avec une tolérance dix fois plus fine que les pièces). Ce calibre est représenté en figure 33. Toute semelle capable de s'enficher

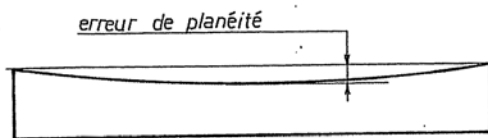
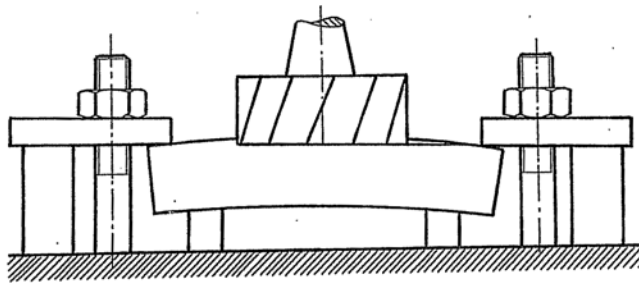


FIG. 35

DÉFAUT DÛ AU BRIDAGE

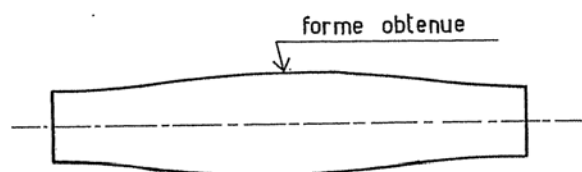
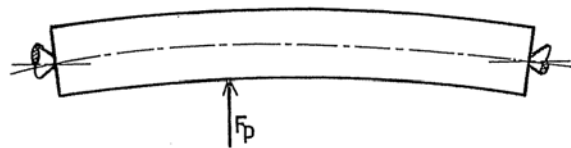
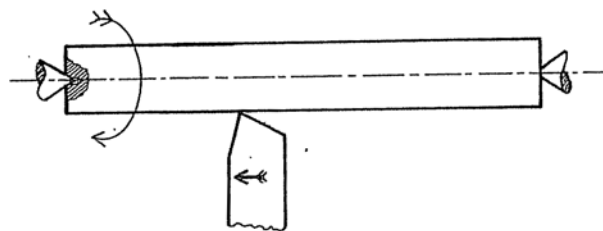


FIG. 36

DÉFAUT DÛ AUX FORCES DE COUPE

correctement dans ce calibre convient pour l'assemblage. Le fait de se limiter à cette seule exigence, sans se soucier de la valeur effective du diamètre du trou, s'appelle *cotation au maximum de matière* et se note sur le dessin comme en figure 34. Le symbole **M** entouré d'un cercle signifie que la tolérance $\phi 0,5$ ne s'applique qu'au maximum de matière et peut être relaxée en fonction du diamètre primitif. Il implique visiblement un mode de vérification approprié et *lié à la fonctionnalité réelle de la manière la plus stricte*, ce qui concurremment, mène à la définition *la plus économique* des tolérances.

2.2.6 – Origine des défauts de forme

Les défauts de forme sont essentiellement liés aux particularités des procédés de fabrication. En nous restreignant au cas de l'usinage, les deux causes principales de défauts sont :

- *Les déformations de bridage*

La pièce à usiner est nécessairement bridée sur la machine-outil, car il faut l'empêcher de se déplacer sous l'effet des efforts de coupe. Un bridage mal conçu peut entraîner une déformation élastique de la pièce, comme l'illustre la figure 35. La pièce est alors fraisée dans sa position déformée, et la fraise réalise un plan. Mais lorsque l'on débride la pièce, elle tend naturellement à reprendre sa forme relaxée et la surface usinée sera courbe.

- *Les efforts d'usinage*

La composante dite *passive* de la force de coupe tend à faire reculer la pièce devant l'outil. Il s'ensuit que l'on coupe moins que prévu. Cette erreur est en général différente d'un point à l'autre, si bien que la forme n'est pas respectée (*fig. 36*). Dans le cas présent, c'est la pièce qui se déforme, car l'outil est très raide, mais il peut arriver, pour d'autres configurations d'usinage, que la déformation de l'outil joue également un rôle.

De ces deux effets, celui du bridage peut être maîtrisé par une conception judicieuse du dispositif de positionnement et de serrage de la pièce. Ainsi, dans le cas de la figure 35, il est clair que le vice du système réside dans le fait que le serrage ne se fait pas en face des appuis, ce qui provoque la flexion de la pièce. Par contre, l'effet des forces de coupe est intrinsèque au procédé et fixe en fait ses limites en termes de précision. On notera que les efforts de coupe sont *grosso modo* proportionnels à la section de coupe. C'est la raison pour laquelle en finition, on prend de petites passes. Il existe cependant un *copeau minimal* en deçà duquel l'outil refuse de couper la pièce.

2.2.7 – Origine des erreurs de position

Les erreurs de position peuvent découler de circonstances multiples, parmi lesquelles nous citerons

- *Le processus d'assemblage*. Le cas le plus criant est celui de la soudure qui, en se refroidissant, se contracte, ce qui déforme l'assemblage.

● *Les reprises en usinage.* Lorsque, par exemple, on retourne une pièce pour usiner son autre face, il est difficile d'assurer un positionnement tout à fait correct. Il en résulte des erreurs de position relative des surfaces situées des deux côtés de la pièce. Pour le bureau des méthodes, une tolérance fine sur la position relative de deux surfaces signifie que l'on essaiera d'associer ces deux surfaces, c'est-à-dire de les usiner toutes deux *en un seul montage*.

2.2.8 – Bibliographie

1. G. LENORMAND, J. TINEL – *Mémento de dessin industriel*
Tome 1, Foucher, Paris, 1975
2. A. CHEVALIER – *Guide du dessinateur industriel*
Hachette Technique, Paris, 2004
ISBN 2-0116-8831-0
3. C. BARLIER, R. BOURGEOIS - *Mémotech productique – Conception et dessin*
Educavivre, éd. A. Casteilla, Paris, 1988
ISBN 2-7135-0936-X
4. C. HAZARD – *Mémotech Dessin technique, normes, CAO*
Educavivre, éd. Casteilla, Paris, 2002
ISBN 2-7135-2372-9
5. R. QUATREMER, J.-P. TROTIGNON, M. DEJANS, H. LEHU – *Précis Construction mécanique*
Tome 1 : *Projets-études, composants, normalisation*
Nathan, Paris, 1996
ISBN 2-09-177192-9
6. J.-L. FANCHON – *Guide des sciences et technologies industrielles*
Nathan, Paris, 1994
ISBN 2-09-176632-1

2.3 – HYPERSTATICITÉ DES MÉCANISMES ET TOLÉRANCES DE POSITION

2.3.1 – Introduction

Dans cette section, nous examinerons quelques propriétés fondamentales des mécanismes formés de corps rigides. L'étude est volontairement limitée aux propriétés les plus simples. Notre seul but est de montrer au lecteur comment calculer l'indice d'hyperstaticité d'un mécanisme et de lui faire percevoir d'une part, la relation entre la surabondance des liaisons et l'existence de champs de force auto-équilibrés et d'autre part, la correspondance entre l'hyperstaticité et la nécessité de définir des tolérances géométriques suffisamment fines. La théorie exposée ci-dessous est placée dans le cadre des travaux virtuels, particulièrement simple et révélateur.

2.3.2 – Équilibre d'un corps solide

En général, un solide libre dans l'espace possède six degrés de liberté : trois de translation et trois de rotation. La description du mouvement de ce solide consiste à donner les lois

$$x_i : t \mapsto x_i(t), \quad i = 1, \dots, 6$$

décrivant la variation temporelle de ces six degrés de liberté.

Supposons que l'on applique sur le corps en question un système quelconque de forces. Le travail virtuel se ramène toujours à la forme générale

$$\delta \mathfrak{S} = \sum_{i=1}^6 p_i \delta x_i$$

où apparaissent les *forces généralisées* p_i . Dans le calcul de celles-ci, nous inclurons à la façon d'Alembert, les forces d'inertie, ce qui permet de se ramener à un problème d'*équilibre*. La condition exprimant cet équilibre est

$$\delta \mathfrak{S} = 0$$

2.3.3 – Systèmes de corps liés

Considérons à présent un système de c corps solides. En ignorant toutes les liaisons qui peuvent exister entre ces corps, le nombre de degrés de liberté serait

$$n = 6c$$

C'est ce que nous appellerons le *nombre de degrés de liberté hors liaisons*. Dans la suite, nous noterons ces degrés de liberté $x_1, \dots, x_n$. Cependant, il n'existe pas de mécanisme sans

[illegible][illegible]
$$dx_1 = \delta x_1, \dots, dx_n = \delta x_n, \quad dt = 0$$
[illegible]
$$\mathbf{L}\delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
$$\begin{cases} L = \{L_{ij}(\mathbf{x}, t)\} \\ \delta \mathbf{x}^T = (\delta x_1, \dots, \delta x_n) \end{cases}$$

53

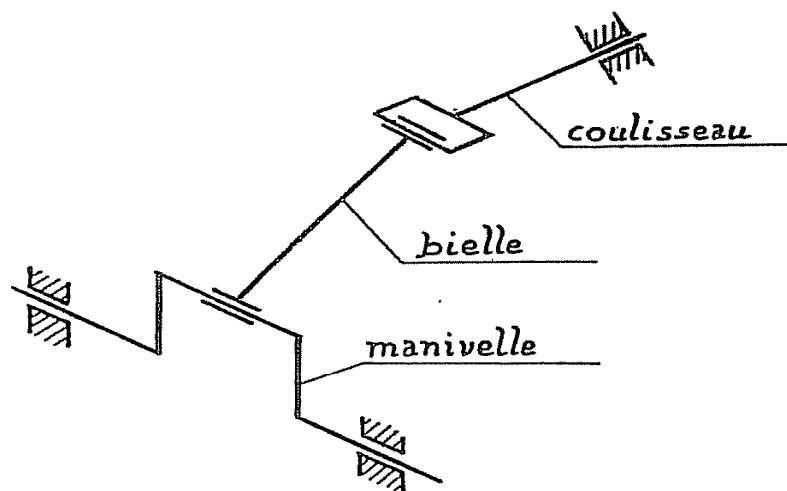


FIG. 37

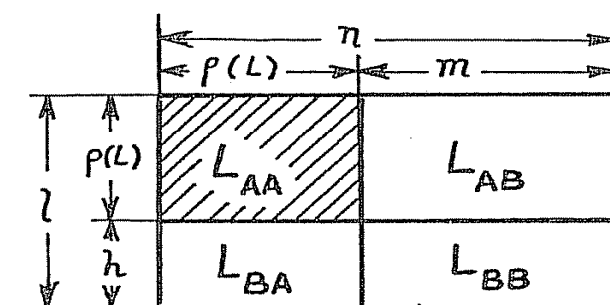


FIG. 38

modifier *l'ordre* dans lequel on considère les variables et les conditions en ne change rien au problème, on peut supposer que le noyau dur est situé en haut et à gauche de $\mathbf{L}$. Les liaisons prennent alors la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{AA} & \mathbf{L}_{AB} \\ \mathbf{L}_{BA} & \mathbf{L}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_A \\ \delta \mathbf{x}_B \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1)$$

où $\mathbf{L}_{AA}$ est le noyau dur de $\mathbf{L}$. Toutes les lignes de la sous-matrice $[\mathbf{L}_{BA} \ \mathbf{L}_{BB}]$ sont donc combinaisons linéaires des lignes de la sous-matrice $[\mathbf{L}_{AA} \ \mathbf{L}_{AB}]$, ce qui s'écrit

$$[\mathbf{L}_{BA} \ \mathbf{L}_{BB}] = \mathbf{H}_{BA} [\mathbf{L}_{AA} \ \mathbf{L}_{AB}] = [\mathbf{H}_{BA} \mathbf{L}_{AA} \ \mathbf{H}_{BA} \mathbf{L}_{AB}] \quad (2)$$

Du premier groupe d'équations (1), on tire

$$\delta \mathbf{x}_A = -\mathbf{L}_{AA}^{-1} \mathbf{L}_{AB} \delta \mathbf{x}_B \quad (3)$$

et, en introduisant cette valeur dans le second groupe d'équations, on obtient

$$(\mathbf{L}_{BB} - \mathbf{L}_{BA} \mathbf{L}_{AA}^{-1} \mathbf{L}_{AB}) \delta \mathbf{x}_B = \mathbf{0} \quad (4)$$

Mais précisément, la condition de dépendance linéaire (2) permet d'écrire

$$\mathbf{L}_{BB} - \mathbf{L}_{BA} \mathbf{L}_{AA}^{-1} \mathbf{L}_{AB} = \mathbf{H}_{BA} \mathbf{L}_{AB} - \mathbf{H}_{BA} \mathbf{L}_{AA} \mathbf{L}_{AA}^{-1} \mathbf{L}_{AB} = \mathbf{0} \quad (5)$$

si bien que l'équation (4) prend la forme triviale

$$\mathbf{0} \delta \mathbf{x}_B = \mathbf{0}$$

On en conclut que *les variables $\delta \mathbf{x}_B$ sont indépendantes*. Les variables $\delta \mathbf{x}_A$ leur sont liées par la condition (3).

Le nombre de variables indépendantes du problème, que l'on appelle *degré de mobilité* m , est donc égal au nombre de variables $\delta \mathbf{x}_B$. L'examen du schéma de la figure 38 montre à l'évidence que ce nombre est donné par

$$m = n - \rho(\mathbf{L})$$

Par ailleurs, les lignes de la matrice $[\mathbf{L}_{BA} \ \mathbf{L}_{BB}]$ sont des liaisons dépendant des $\rho(\mathbf{L})$ premières et sont donc *surabondantes*. Le nombre de ces liaisons surabondantes est appelé *indice d'hyperstaticité* et nous l'écrivons h . Il est clair que

$$h = \ell - \rho(\mathbf{L})$$

En rapprochant ces deux relations, on obtient aisément

$$\rho(\mathbf{L}) = n - m = \ell - h$$

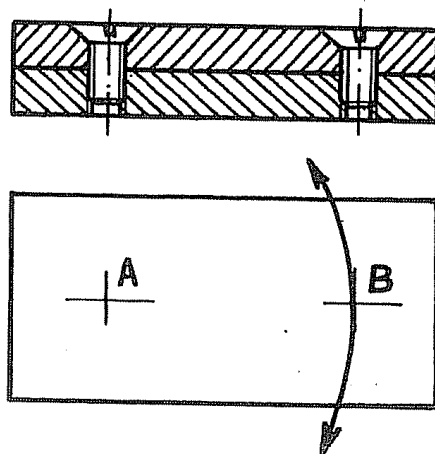


FIG. 39

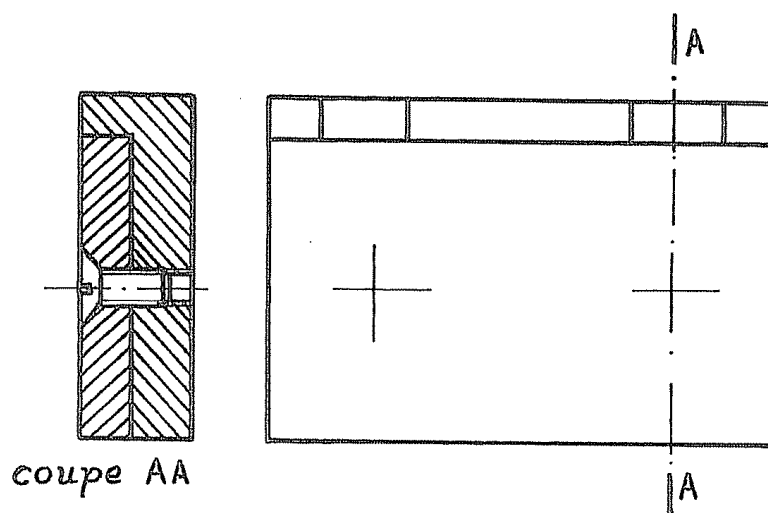


FIG. 40

Cette relation s'écrit d'habitude dans le sens de la recherche de l'indice d'hyperstaticité :

$$h = \ell + m - n$$

L'indice d'hyperstaticité est donc la somme du nombre de liaisons et du degré de mobilité, diminuée du nombre de degrés de liberté hors liaisons.

2.3.5 – Premiers exemples

Exemple 1 (fig. 39)

Lorsque la vis A est serrée, le centre de la vis B peut se mouvoir sur une circonférence. On suppose les pièces suffisamment planes pour ne pas créer de problèmes de superposition. La pièce inférieure étant supposée fixe, le seconde a $n = 6$ degrés de liberté hors liaisons. Les liaisons sont :

- Contact plan.....	3
- Centre fixé.....	2
- Second centre fixé.....	2
TOTAL.....	<u>7</u>

Comme on doit avoir ici une mobilité $m = 0$, il vient

$$h = 7 + 0 - 6 = 1$$

La condition surabondante est que la distance des centres doit être identique sur les deux pièces.

Exemple 2 (fig. 40)

De même que ci-dessus, $n = 6$.

Liaisons :

- Contact plan	3
- Deux bossages courts de positionnement	2
- Deux vis	4
TOTAL.....	<u>9</u>

$$m = 0$$

$$h = \ell + m - n = 9 + 0 - 6 = 3$$

Les liaisons surabondantes sont ici :

- Distance des deux trous à la ligne des deux bossages (2 conditions)

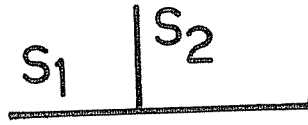


FIG. 41

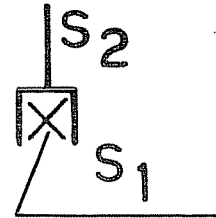
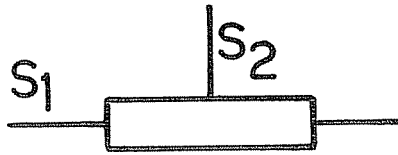
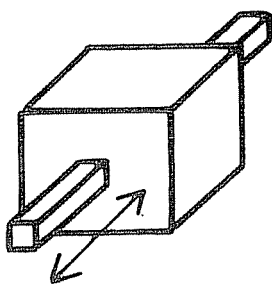


FIG. 42

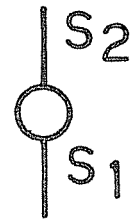


FIG. 43

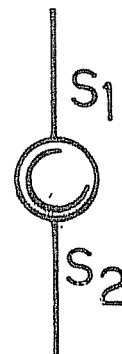
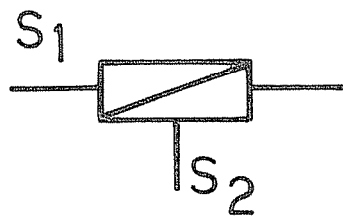


FIG. 44

- Distance des centres des deux trous (1 condition)

2.3.6 – Pourquoi se préoccuper de l'hyperstaticité ?

Mais, dira-t-on, l'hyperstaticité peut-elle être gênante ? La réponse est affirmative. En pratique, les liaisons sont toujours *approchées* parce que les pièces et les liaisons ne sont pas parfaites. Il s'ensuit qu'à la place de la matrice des liaisons $\mathbf{L}$, on a en réalité la matrice perturbée

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{AA} + \Delta\mathbf{L}_{AA} & \mathbf{L}_{AB} + \Delta\mathbf{L}_{AB} \\ \mathbf{L}_{BA} + \Delta\mathbf{L}_{BA} & \mathbf{L}_{BB} + \Delta\mathbf{L}_{BB} \end{bmatrix}$$

De ce fait, les lignes de la partie inférieure de la matrice, qui étaient, en l'absence de perturbations, combinaisons linéaires des autres, peuvent devenir indépendantes. Cela revient à dire que l'indice d'hyperstaticité h diminue et, comme l et n ne peuvent varier, m diminue. Cela signifie que

- La mobilité peut diminuer (certains mouvements deviennent impossibles)
- Si $m = 0$, on peut arriver à une impossibilité de résoudre l'équation liant l , m , n et h , par exemple,

$$h_{\text{réel}} = 0, \quad \ell = 10, \quad n = 6$$

c'est à dire que les liaisons sont devenues *incompatibles*.

En fait, il faut interpréter l'indice d'hyperstaticité h comme *le nombre de conditions à imposer sous forme de tolérances géométriques pour que le mécanisme puisse être monté ou fonctionner* (conditions de compatibilité des liaisons). Il en découle qu'une *hyperstaticité croissante signifie une plus grande difficulté de mise en œuvre* (travail plus soigné et plus cher). Chaque fois que c'est possible, il est utile d'essayer de limiter l'hyperstaticité, l'idéal étant, du point de vue de la facilité de réalisation, l'isostaticité.

2.3.7 – Classification des liaisons principales

Nous classerons les liaisons courantes par liberté croissante.

a) 0 degré de liberté : c'est l'*encastrement*, schématisé en figure 41

b) 1 degré de liberté ($l = 5$). Ce degré de liberté peut être

- une *translation* : *glissière*, fig. 42
- une *rotation* : *pivot*, fig. 43
- une combinaison des deux (on parle de *viration* ou de *vissage*) : *liaison hélicoïdale*, fig. 44. C'est typiquement le système vis-écrou.

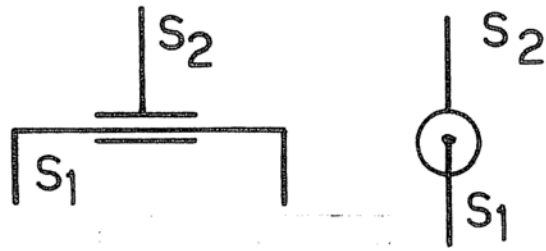


FIG. 45

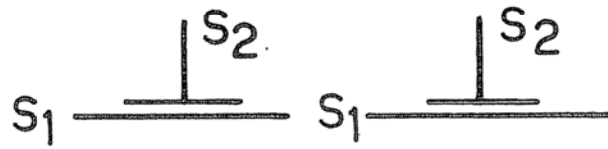


FIG. 46



FIG. 47

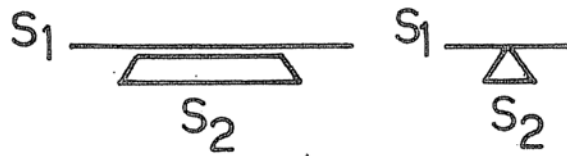


FIG. 48

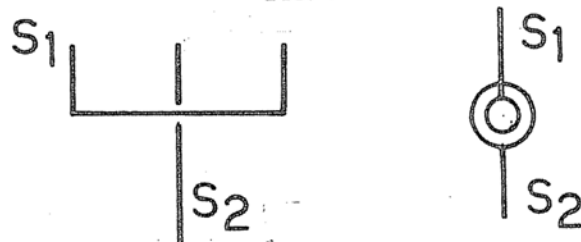


FIG. 49

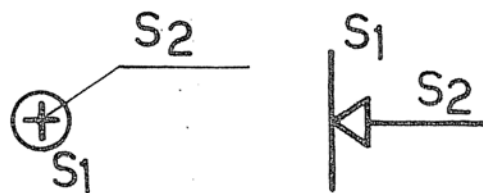


FIG. 50

A priori, on pourrait combiner toutes ces libertés jusqu'à 5 degrés de liberté. On obtiendrait ainsi de 0 à 3 translations, de 0 à 3 rotations ou encore de 0 à 3 combinaisons des deux, avec un maximum de 5 degrés de liberté pour qu'il subsiste une liaison, ce qui donne un grand nombre de possibilités. Nous nous limiterons aux liaisons les plus courantes :

c) 2 degrés de liberté ($l = 4$) : *pivot glissant*, fig. 45.

d) 3 degrés de liberté ($l = 3$) :

- *Appui plan*, fig. 46

- *Rotule*, fig. 47

e) 4 degrés de liberté ($l = 2$) :

- *Liaison linéaire rectiligne*, fig. 48

- *Liaison linéaire annulaire*, fig. 49

f) 5 degrés de liberté ($l = 1$) : *liaison ponctuelle*, fig. 50

2.3.8 – Exemple

Considérons le système piston-bielle-manivelle schématisé en figure 51 et calculons les différents paramètres qui caractérisent ce mécanisme.

- *Nombre de d. d. l. hors liaisons :*

$$n = 6 \times 3 = 18$$

- *Nombre de liaisons :*

A : pivot glissant.....	4
B : pivot.....	5
C : pivot.....	5
D : pivot.....	5
E : pivot glissant.....	4

$$l = \overline{23}$$

- *Mobilité* : Un seul mouvement est possible. La position du mécanisme est en effet entièrement déterminée par l'angle de rotation de la manivelle :

$$m = 1.$$

- *Hyperstaticité* :

$$h = \ell + m - n = 23 + 1 - 18 = 6$$

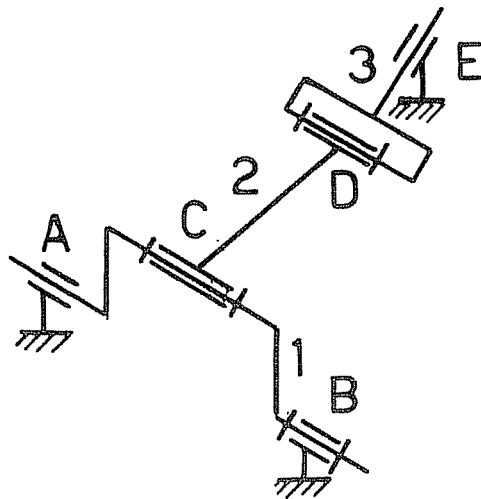


FIG. 51

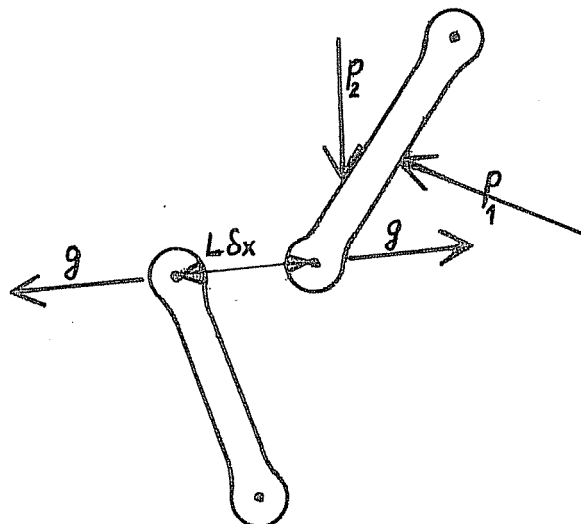


FIG. 52

On constate que le mécanisme ainsi conçu est considérablement hyperstatique. Nous reviendrons sur cet exemple plus loin, de manière à voir comment on peut réduire l'hyperstaticité.

2.3.9 – Equations d'équilibre d'un mécanisme

Il n'est guère courant, dans un exposé introductif, d'envisager les équations d'équilibre d'un mécanisme formé de corps rigides sous leur forme générale. Pourtant, elles sont très instructives.

Ecrivons d'abord l'équation des travaux virtuels du mécanisme en tenant compte des liaisons. Il vient, compte tenu de l'équation de liaison (3)

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{S} &= \mathbf{p}_A^T \delta\mathbf{x}_A + \mathbf{p}_B^T \delta\mathbf{x}_B = \mathbf{p}_B^T \delta\mathbf{x}_B - \mathbf{p}_A^T \mathbf{L}_{AA}^{-1} \mathbf{L}_{AB} \delta\mathbf{x}_B \\ &= \delta\mathbf{x}_B^T (\mathbf{p}_B - \mathbf{L}_{AB}^T \mathbf{L}_{AA}^{-T} \mathbf{p}_A)\end{aligned}$$

Le vecteur $\delta\mathbf{x}_B$ étant libre de toute liaison, la nullité du travail virtuel mène aux *équations d'équilibre*

$$\mathbf{p}_B = \mathbf{L}_{AB}^T \mathbf{L}_{AA}^{-T} \mathbf{p}_A \quad (6)$$

A l'inverse, si l'on considère chaque élément du mécanisme séparément, les forces qui lui sont appliquées équilibrent les forces de liaison aux autres pièces. On peut donc aussi écrire le principe des travaux virtuels en faisant abstraction des liaisons, à condition de tenir compte du travail que ne manqueraient pas d'effectuer les forces de liaison en cas de rupture de la compatibilité. (On pourrait aussi exposer ceci à l'aide de multiplicateurs de Lagrange). Ce travail d'incompatibilité aura la forme (*fig. 52*)

$$\delta\mathfrak{S}_{inc} = \mathbf{g}^T \mathbf{L} \delta\mathbf{x}$$

si bien que l'équation d'équilibre deviendra

$$0 = \delta\mathfrak{S}_{hors\ liaisons} + \delta\mathfrak{S}_{inc} = \mathbf{p}^T \delta\mathbf{x} - \mathbf{g}^T \mathbf{L} \delta\mathbf{x}$$

ce qui mène aux équations d'équilibre

$$\mathbf{L}^T \mathbf{g} = \mathbf{p}$$

La condition d'existence d'une solution $\mathbf{g}$ de ce système n'est autre que la condition d'équilibre (6). Examinons en effet la résolution de ce système, préalablement développé en

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{AA}^T \mathbf{g}_A + \mathbf{L}_{BA}^T \mathbf{g}_B = \mathbf{p}_A \\ \mathbf{L}_{AB}^T \mathbf{g}_A + \mathbf{L}_{BB}^T \mathbf{g}_B = \mathbf{p}_B \end{cases}$$

De la première équation, on déduit

$$\mathbf{g}_A = \mathbf{L}_{AA}^{-T} \mathbf{p}_A - \mathbf{L}_{AA}^{-T} \mathbf{L}_{BA}^T \mathbf{g}_B \quad (7)$$

résultat qui, introduit dans la seconde équation, donne

$$\left(\mathbf{L}_{BB}^T - \mathbf{L}_{AB}^T \mathbf{L}_{AA}^{-T} \mathbf{L}_{BA}^T \right) \mathbf{g}_B = \mathbf{p}_B - \mathbf{L}_{AB}^T \mathbf{L}_{AA}^{-T} \mathbf{p}_A$$

Or, par (5), la matrice du premier membre est nulle, ce qui n'est possible que si le second membre est nul, c'est à dire sous la condition d'équilibre (6).

Cela étant, l'équation ci-dessus se ramène à

$$\mathbf{0} \mathbf{g}_B = \mathbf{0}$$

ce qui signifie que les h nombres composant le vecteur $\mathbf{g}_B$ sont arbitraires. Par la relation (7), on voit finalement que les forces de liaison ne sont définies qu'à h états arbitraires près, tous sans effet sur $\mathbf{p}$. On les appelle *états d'autocontrainte*. Matriciellement, ce sont les singularités de $\mathbf{L}^\dagger$, comme le montre la relation (7).

Physiquement, ces états d'autocontrainte peuvent être interprétés comme les efforts qu'il a fallu fournir pour rendre possible l'assemblage de pièces imparfaitement appariées. On peut souvent les découvrir par simple inspection, en examinant l'effet d'une perturbation géométrique des liaisons.

En pratique, les corps ne sont pas parfaitement rigides, mais se déforment sous l'effort. Cette propriété permet d'éclairer le rôle des $\mathbf{g}_B$. Lorsque la pièce est fabriquée, ses dimensions et ses formes sont entachées d'erreurs qui pourraient rendre l'assemblage impossible sans forcer quelque peu. Ainsi, le palier A de la manivelle a toujours des défauts de coaxialité, en position et en angle, avec le palier B. Une partie de ces défauts est reprise par les jeux, l'autre par des efforts parasites. Il est bien entendu que ces efforts parasites croissent avec la valeur des défauts et avec la raideur des pièces. *C'est précisément pour éviter des efforts excessifs qu'il est nécessaire de prévoir des tolérances de position.* Lorsque l'assemblage est vraiment trop raide, un *ajustage* est nécessaire pour le rendre compatible. Cette opération, de type artisanal, est toujours coûteuse.

Il est donc nécessaire de réduire au strict minimum l'hyperstaticité des mécanismes, sans cependant compromettre la qualité de fonctionnement par une trop grande souplesse. C'est ce que nous allons illustrer sur l'exemple qui suit.

2.3.10 – Retour à l'exemple précédent – Interprétation des états d'autocontrainte et réduction de l'hyperstaticité.

2.3.10.1 – Localisation de l'hyperstaticité

Revenons au système piston-bielle-manivelle considéré ci-dessus. Cette fois, nous examinerons le mécanisme *progressivement*.

1) Manivelle (fig. 53)

En considérant la manivelle sur ses deux paliers, on calcule aisément

$$n = 6$$

$$m = 1$$

$$\ell = 9 \quad (\text{paliers A et B})$$

$$h = \ell + m - n = 9 + 1 - 6 = 4$$

Ce résultat s'explique aisément. En effet, le palier B suffirait à maintenir la manivelle. En *déplaçant légèrement* dans la pensée le palier A, on peut identifier les 4 états d'autocontrainte comme

- Les efforts dans les deux directions orthogonales au palier A
- Les deux moments de flexion au palier A.

2) Manivelle et bielle (fig. 54)

$$n = 12 \quad (\text{deux corps})$$

$$m = 2 \quad (\text{angle de la manivelle et angle de la bielle})$$

$$\ell = 14 \quad (\text{A, B et C})$$

$$h = \ell + m - n = 14 + 2 - 12 = 4 \quad (\text{inchangé})$$

Il n'y a pas à ce stade d'hyperstaticité nouvelle.

3) Piston tout seul (fig. 55)

$$n = 6 \quad (\text{un corps})$$

$$m = 2 \quad (\text{translation et rotation})$$

$$\ell = 4 \quad (\text{pivot glissant})$$

$$h = \ell + m - n = 4 + 2 - 6 = 0$$

4) Système complet

On sait que $h=6$. Les deux hyperstaticités nouvelles peuvent être visualisées comme les efforts correspondant à une erreur de position (*effort*) et une erreur d'orientation (*moment*) de la liaison coulisseau-bielle.

2.3.10.2 – Réduction de l'hyperstaticité

a) Fixation de la manivelle (fig. 56)

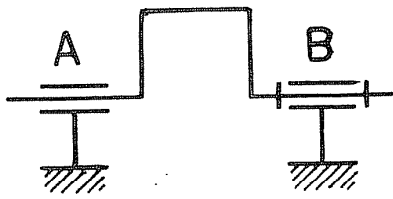


FIG. 53

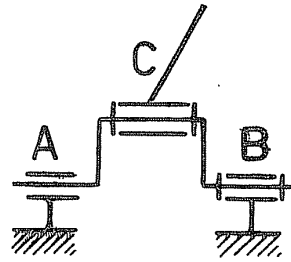


FIG. 54

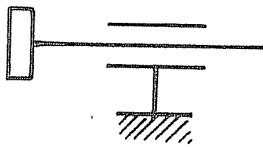


FIG. 55

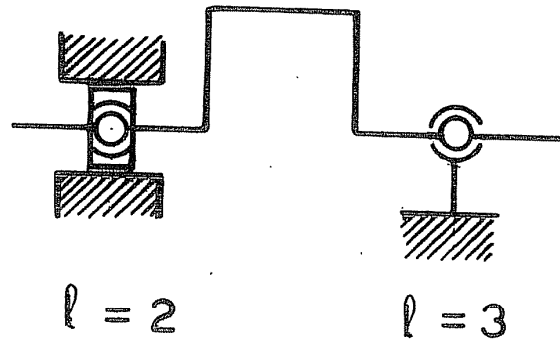


FIG. 56

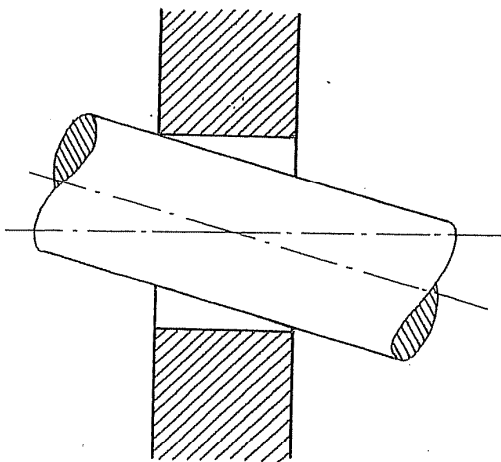


FIG. 57

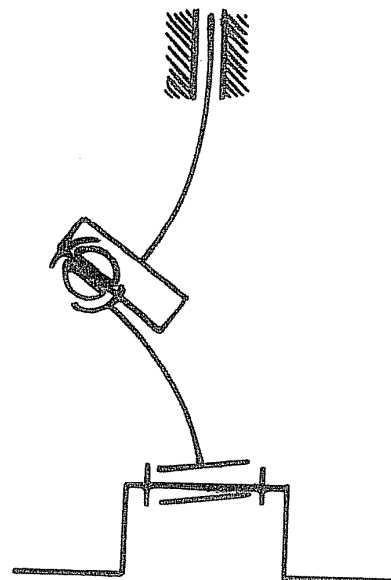


FIG. 58

On remplacera le palier de gauche par un roulement à rotule avec libre dilatation ($l=2$) et le palier droit par un roulement à rotule fixé axialement ($l=3$). Il vient alors

$$n = 6$$

$$m = 1$$

$$\ell = 5$$

$$h = 5 + 1 - 6 = 0$$

Le guidage de la manivelle est alors *isostatique*. Cette solution permet d'avoir des palier totalement indépendants. Dans le cas de palier appartenant à un même bloc, il est possible d'adopter le montage hyperstatique d'origine à condition d'usiner les deux palier dans une même sous-phase, c'est-à-dire sans démonter la pièce de la machine-outil. Il faut naturellement que les deux tourillons de la manivelle soient eux-mêmes bien dans le prolongement l'un de l'autre. Tout cela fera l'objet de tolérances géométriques. En pratique, on utilise souvent des paliers lisses *courts* qui, du fait de leur jeu, permettent une certaine inclinaison de l'arbre et sont donc assimilables à des appuis simples, comme l'illustre la figure 57. La fixation axiale se fait alors par des épaulements, sur un seul palier.

b) Fixation de la tête de bielle sur la manivelle : inchangée.

c) Fixation du pied de bielle sur le piston

On est tenté de remplacer cette liaison par une rotule libre de se mouvoir sur l'axe du piston. Mais comme l'illustre la figure 58, cela peut rendre le système instable, l'articulation favorisant le flambage du système. Il convient donc d'être prudent à ce niveau. En construction des moteurs pistons, on se contente de laisser un jeu entre le pied de bielle et le piston, mais on maintient l'hyperstaticité angulaire, ce qui oblige d'ailleurs à vérifier après montage que l'axe de la tête de bielle est bien perpendiculaire à l'axe de la course du piston. Il existe des montages spéciaux pour effectuer cette vérification.

2.3.11 – Problèmes

2.3.11.1 – Etablir le degré d'hyperstaticité du guidage en translation par deux glissières en V schématisée en figure 59. Donner les bases de sa toléranciation.

Nombre de ddl hors liaisons : $n = 6$

Mobilité : $m = 1$

Liaisons : 4 plans, $\ell = 4 \times 3 = 12$

Hyperstaticité : $h = \ell + m - n = 12 + 1 - 6 = 7$

Il y a donc 7 conditions géométriques à prévoir (*fig.60*)

- Les vés doivent avoir le bon angle (2 conditions)
- Les axes des vés doivent être perpendiculaires à la référence formée de deux contacts à la cote encadrée 20 (2 conditions)

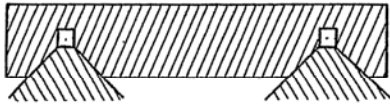


FIG. 59

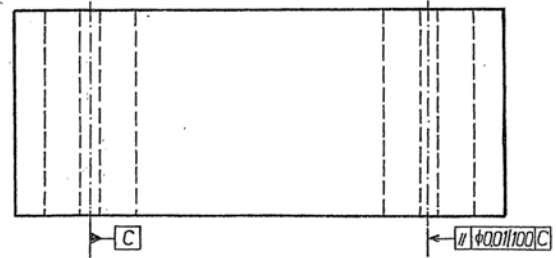
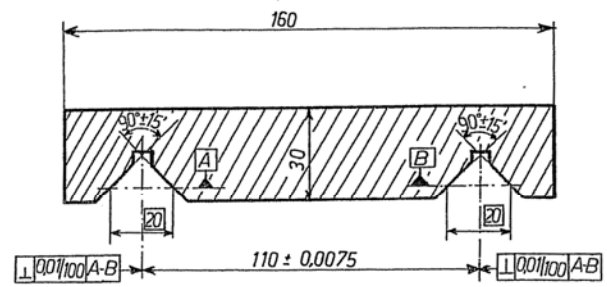


FIG. 60

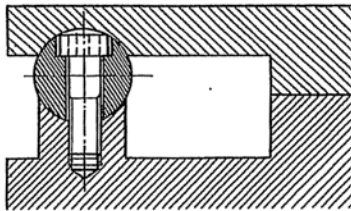


FIG. 61

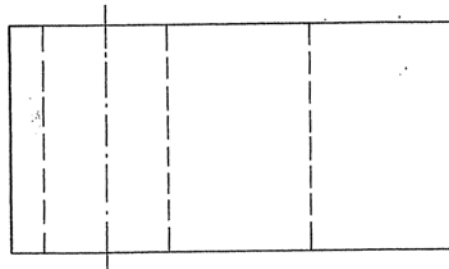
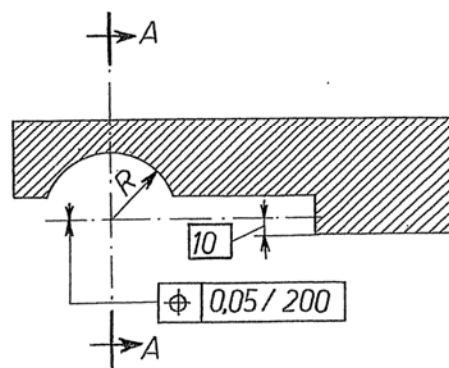
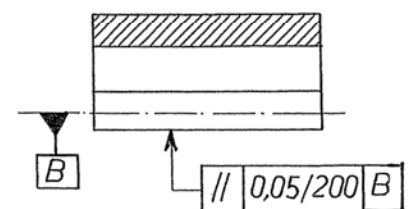


FIG. 62



COUPE A-A



- La distance des vés doit être correcte (1 condition)
- Les axes des vés dans le sens de la marche doivent être parallèles (2 conditions)

2.3.11.2 – Comparer le guidage précédent au guidage combinant un cylindre et un plat (fig. 61). Tolérancer ce dernier.

Ici,

$$\begin{aligned}
 n &= 6 \\
 m &= 1 \\
 \text{Liaisons : } &\left\{ \begin{array}{l} \text{cylindre} \dots\dots\dots 4 \\ \text{plan} \dots\dots\dots 3 \\ \hline \ell = 7 \end{array} \right. \\
 h &= \ell + m - n = 7 + 1 - 6 = 2
 \end{aligned}$$

Le guidage n'est plus que deux fois hyperstatique, ce qui simplifie sa conception pour la forme. Tolérances : voir fig. 62.

2.3.11.3 – Examiner la crapaudine de la figure 63 et mettre son hyperstaticité en évidence. Montrer qu'elle est particulièrement gênante et chercher une correction.

$$\begin{aligned}
 n &= 6 \\
 m &= 1 \\
 \text{Liaisons : } &\left\{ \begin{array}{l} \text{cylindre} \dots\dots\dots 4 \\ \text{plan} \dots\dots\dots 3 \\ \hline \ell = 7 \end{array} \right. \\
 h &= \ell + m - n = 2
 \end{aligned}$$

Le problème réside dans le fait que l'arbre peut avoir une extrémité imparfaitement perpendiculaire à son axe. Il portera donc mal sur le plan, ce qui risque de créer des pressins excessives.

Correction : il faut appuyer l'extrémité de l'arbre sur une sphère. Le système devient alors *presque* isostatique dans sa réalisation selon la figure 64. En effet,

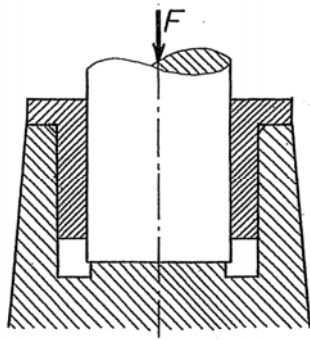


FIG. 63

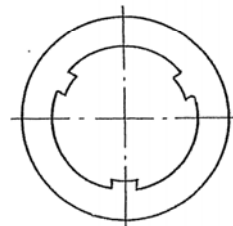
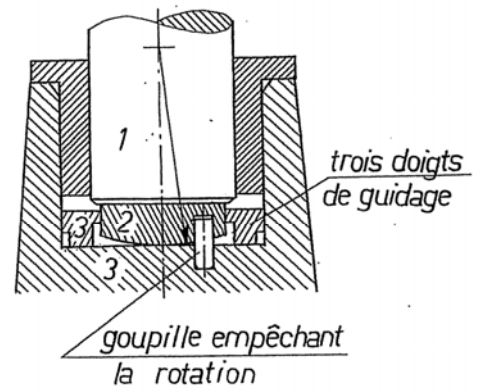


FIG. 64

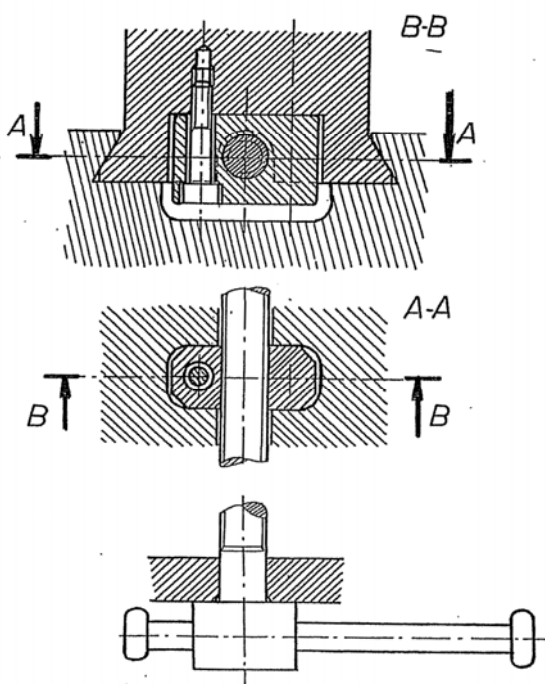


FIG. 65

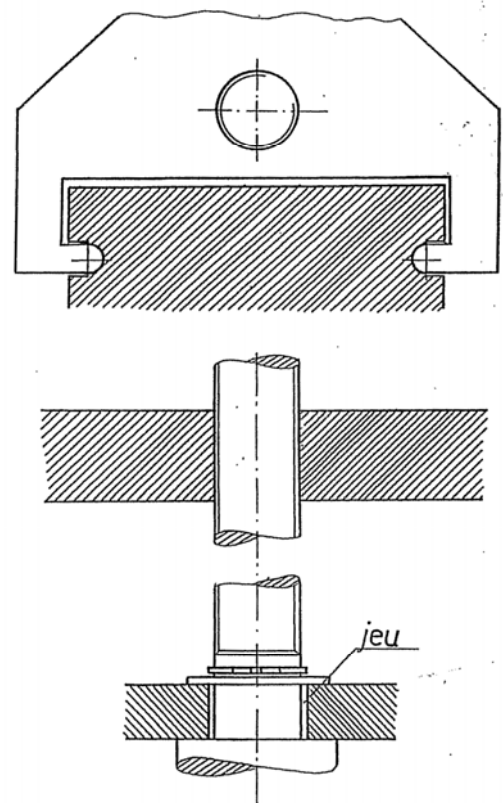


FIG. 66

$n = 12$ (deux corps)

$m = 1$

<i>Liaisons :</i>	{	1/3 : <i>cylindre</i>	4
		1/2 : <i>plan</i>	3
		2/3 : <i>contact ponctuel</i>	1
		<i>goupille</i>	1
		3 doigts $\approx$ <i>ponctuels</i>	3
			$\ell = 12$

$$h = \ell + m - n = 12 + 1 - 12 = 1$$

L'hyperstaticité restante se situe dans les *trois* doigts qui fixent les deux mouvements selon x et y. Mais la condition d'assemblage se limite ici à la précision de l'alésage simultané des trois doigts, ce qui ne pose pas de problème particulier. De toute façon, le problème consistant à faire bien porter l'arbre est résolu.

Remarque – Dans un but de simplification, nous avons volontairement omis le système de graissage dans les figures ci-contre. Il n'en est pas moins indispensable, de même qu'il faut éviter le contact arbre/sphère sur l'axe, qui mènerait inmanquablement au grippage.

2.3.11.4 – Etudier les propriétés des étaux des figures 65 et 66.

• Etau de la figure 65

Mâchoire mobile + vis = 2 pièces mobiles $\Rightarrow n = 12$

Mobilité : $m = 1$

Liaisons :	{	Vis/bâti : rotoïde.....	5
		Vis/écrou : hélicoïdale.....	5
		Mâchoire/bâti : 4 plans.....	12
			$\ell = 22$

$$h = \ell + m - n = 22 + 1 - 12 = 11$$

Si l'on examine la liaison mâchoire/bâti, on a

$$n = 6$$

$$m = 1$$

$$\ell = 12$$

$$h = \ell + m - n = 12 + 1 - 6 = 7$$

Cette liaison est beaucoup trop forte !

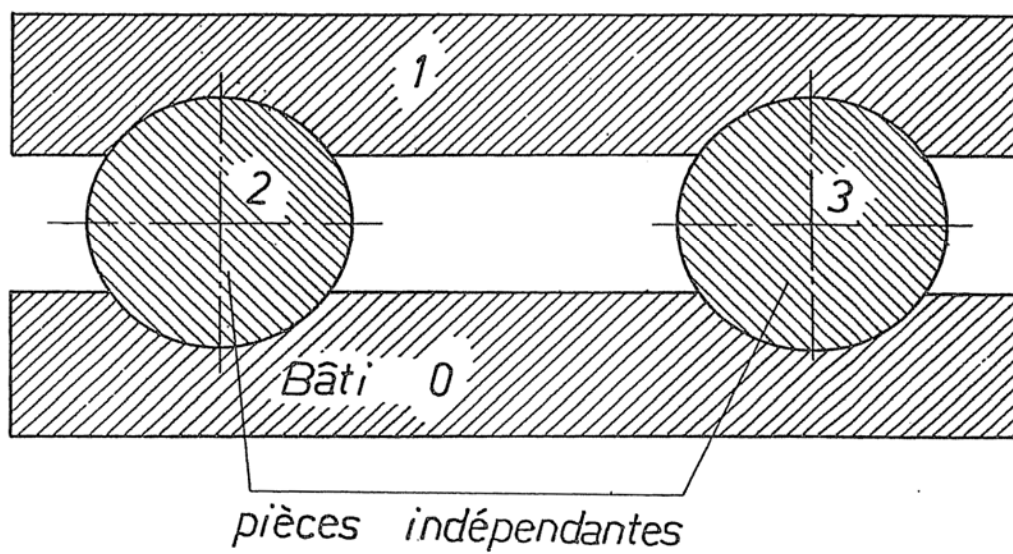


FIG. 67

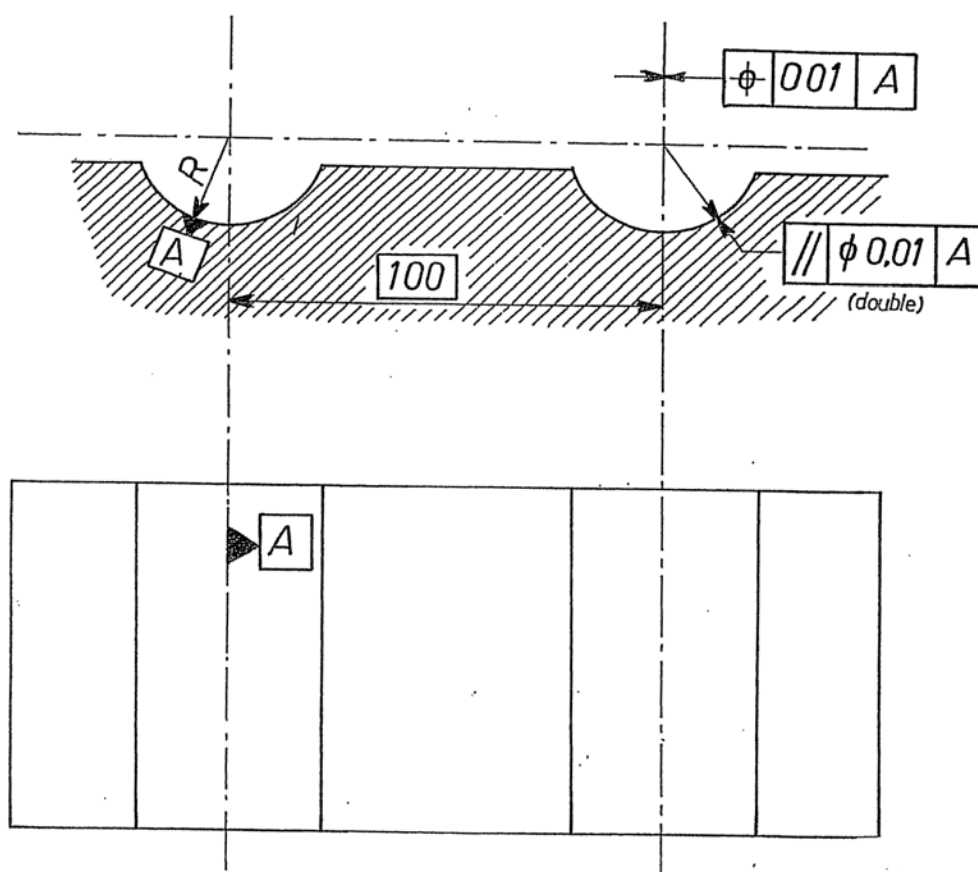


FIG. 68

• *Etau de la figure 66*

$$n = 12$$

$$m = 1$$

$$\text{Liaisons:} \left\{ \begin{array}{l} \text{Vis/bâti : grâce au jeu, rien que le d.d.l. longitudinal.....1} \\ \text{Vis/écrou : hélicoïdale.....5} \\ \text{Mâchoire/bâti : 2 cylindres.....8} \end{array} \right.$$

$$\ell = 14$$

$$h = \ell + m - n = 14 + 1 - 12 = 3$$

Dans ce cas, toutes les liaisons surabondantes sont entre la mâchoire et le bâti. En effet, pour cet assemblage,

$$n = 6$$

$$m = 1$$

$$\ell = 8$$

$$h = \ell + m - n = 8 + 1 - 6 = 3$$

2.3.11.5 – *Calculer l'hyperstaticité du système de la figure 67. Etablir les bases de ses tolérances géométriques.*

$$n = 3 \times 6 = 18$$

$m = 5$ (trois mouvements de translation indépendants, et les cylindres peuvent tourner)

$$\text{Liaisons} \left\{ \begin{array}{l} 0/2.....4 \\ 0/3.....4 \\ 1/2.....4 \\ 1/3.....4 \end{array} \right.$$

$$\ell = 16$$

$$h = \ell + m - n = 16 + 5 - 18 = 3$$

Erreurs de position possibles :

- 1) Axes des alésages des pièces 0 et 1 en des positions différentes (1 condition)
- 2) Erreur de parallélisme des axes dans le plan horizontal (1 condition)
- 3) Erreur de parallélisme des axes dans le plan vertical (1 condition)

Tolérances : voir figure 68.

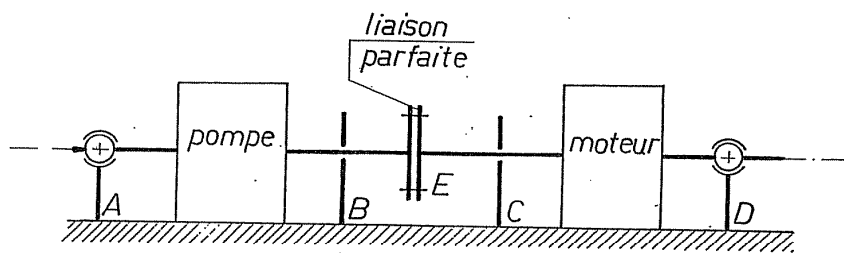


FIG. 69

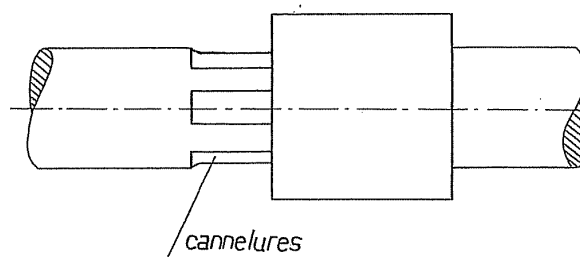


FIG. 70

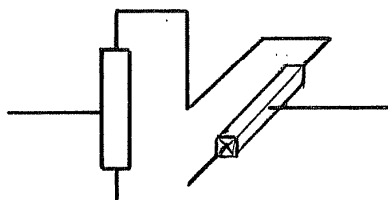


FIG. 71

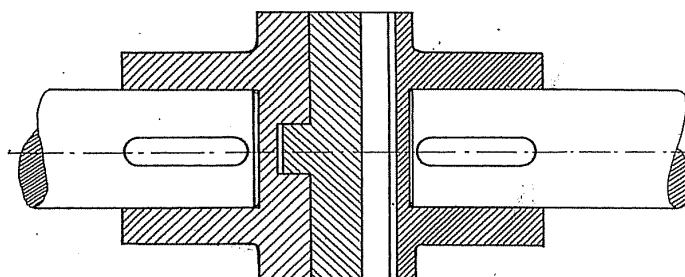


FIG. 72

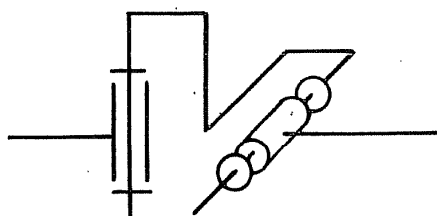


FIG. 73

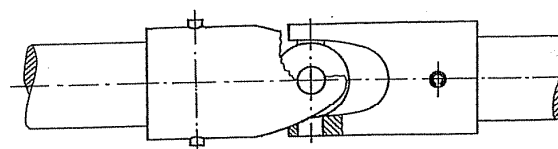


FIG. 74

2.3.11.6 – Accouplement – *Un moteur électrique est accouplé à une pompe. Leurs paliers respectifs sont des types suivants (fig. 69)*

- A – Palier court avec butée*
- B – Palier court*
- C – Palier court*
- D – Palier court avec butée*

L'accouplement entre les deux arbres se fait à l'aide de plateaux parfaitement solidaires des arbres et boulonnés entre eux. Discuter de l'hyperstaticité du système.

Nombre de d.d.l. hors liaisons = $n=2 \times 6 = 12$
 Mobilité : $m=1$

Liaisons : on admettra que les paliers courts ne fixent pas les rotations de flexion, ce qui se justifie pour des rotations suffisamment faibles (fig. 57). Dès lors,

A.....3
 B.....2
 C.....2
 D.....3
 Accouplement.....6

$$\overline{l = 16}$$

$$h = l + m - n = 16 + 1 - 12 = 5$$

Examinons la nature de l'hyperstaticité. Tout d'abord, on remarque que l'arbre du moteur et celui de la pompe sont tenus de manière isostatique si l'on supprime l'accouplement E. On remarquera d'ailleurs qu'une liaison au moins isostatique est une nécessité dans la mesure où l'on ne peut admettre, par exemple, que le moteur se démonte lors de son transport. C'est donc l'accouplement qui est la source des problèmes :

a) Les machines peuvent être placées à une distance impropre, ce qui provoque des efforts de traction ou de compression dans l'accouplement. *Bien plus, de tels efforts peuvent provenir d'une dilatation de l'arbre du fait de son échauffement* (1 erreur).

b) Les points de percée des deux axes dans le plan médian de l'accouplement peuvent être différents (2 erreurs).

c) Les deux axes peuvent être inclinés l'un par rapport à l'autre, tout en étant concourants (2 erreurs).

Il convient de noter que les erreurs b) et c) peuvent encore être alimentées par la *flexion* des arbres.

Il est possible de réduire cette hyperstaticité et, par conséquent, les efforts qui en résultent, par les moyens suivants :

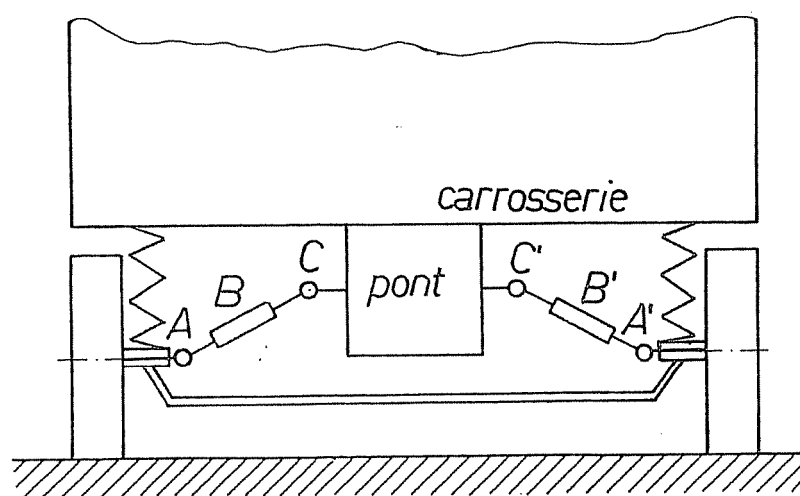


FIG. 75

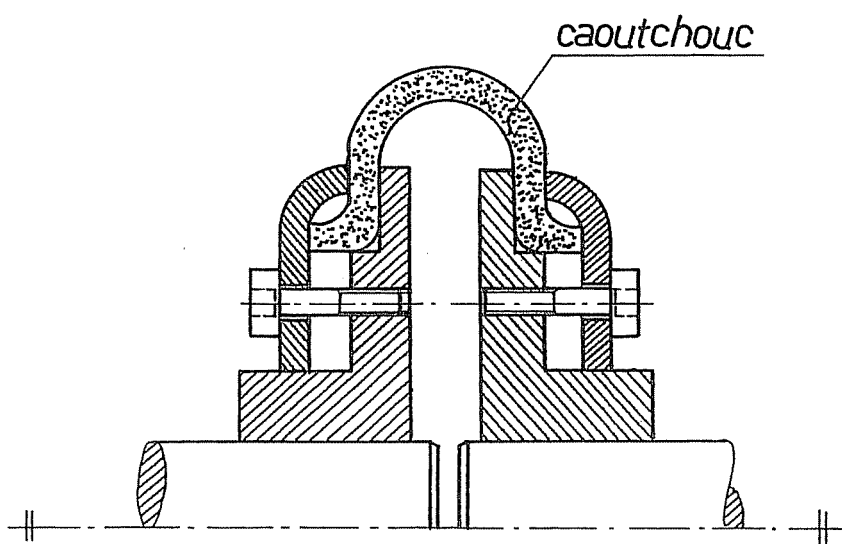


FIG. 76

a) Les butées seront placées aussi près que possible de l'accouplement, c'est-à-dire en B et C, de manière à réduire les allongements thermiques au droit de celui-ci. Dans les cas difficiles, on a recours à un *joint de dilatation*, fig. 70, qui permet un mouvement relatif longitudinal.

b) La solution théorique du problème de positionnement des arbres est le *joint d'OLDHAM*, dont le schéma est donné en figure 71 et la réalisation, en figure 72.

c) La solution théorique du problème de l'inclinaison des arbres est le *joint de CARDAN*, dont le schéma est donné en figure 73. La figure 74 représente une de ses nombreuses réalisations pratiques.

Cependant, il s'agit là de solutions extrêmes, à ne choisir que lorsque les inclinaisons ou erreurs de positionnement sont fortes. Cette situation ne se produit guère que dans le cas d'un moteur et d'un récepteur mobiles l'un par rapport à l'autre. C'est notamment le cas de la transmission *de DION* en automobile, où le pont suspendu à la carrosserie et les roues ont de grands déplacements relatifs (fig. 75). Cette transmission nécessite deux cardans A et C et un joint de dilatation B pour chaque arbre de roue. Elle est donc coûteuse, ce qui l'a fait abandonner dès le début du XX^e siècle. Elle a cependant été remise à l'honneur sur certaines voitures dans les années 1970, pour ses grandes qualités de tenue de route.

Dans le cas d'arbres fixes, on se contente le plus souvent d'*accouplements élastiques*. Il en existe de nombreuses espèces, mais les plus courants réalisent une des liaisons à l'aide d'un matériau souple (caoutchouc). La figure 76 en représente un modèle, connu sous le nom de *PERIFLEX*. Dans la mesure où les erreurs de positionnement restent *raisonnables*, ce genre d'accouplement est très satisfaisant. Il reste cependant nécessaire de pouvoir régler la position d'une des deux machines pour éviter une erreur trop grande. Ceci se fait à l'aide de lames de clinquant sous les pattes de la machine et de trous de fixation en boutonnière ou simplement assez grands pour laisser un bon jeu permettant le réglage.

2.3.12 – Bibliographie

1. A. CHEVALIER – *Guide du dessinateur industriel*
Hachette Technique, Paris, Edition 2004
ISBN 2-01-16-8831-0
2. G. LENORMAND, A. TINEL – *Mémento de dessin industriel*
Tome I, Foucher, Paris, 1978
3. I. ARTOBOLVSKI – *Théorie des mécanismes et des machines*
Mir, Moscou, 1977
4. Z. ZINOVIEV – *Théorie des mécanismes et des machines*
2^e édition revue, Mir, Moscou, 1969
5. F. FREUDESTEIN, G. SANDOR – *Kinematics of Mechanisms*
Chap. 4 de *Mechanical Design and Systems Handbook*,
Éd. Par H.A. ROTHBART, Mc Graw Hill, 1964

6. F. KOENIGSBERGER – *Machines-outils*
Vander, Bruxelles, 1969
7. G. NIEMANN – *Maschinenelemente*
Band 1, 2. Auflage, Springer, Berlin, 1975

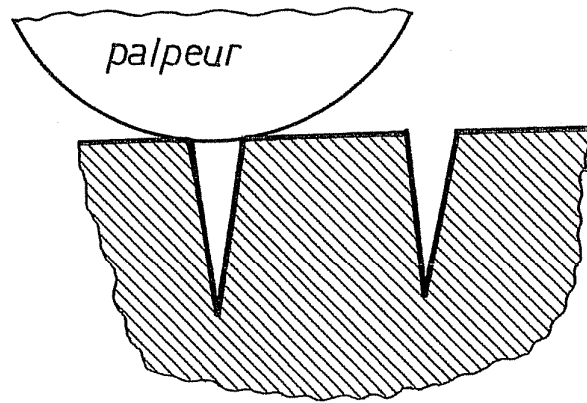
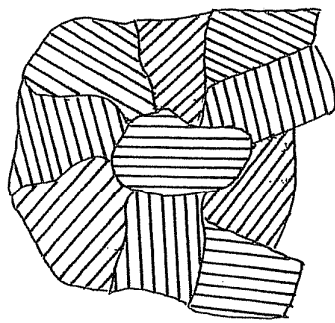


FIG. 77



Aspect d'une surface grattée ,

FIG. 78

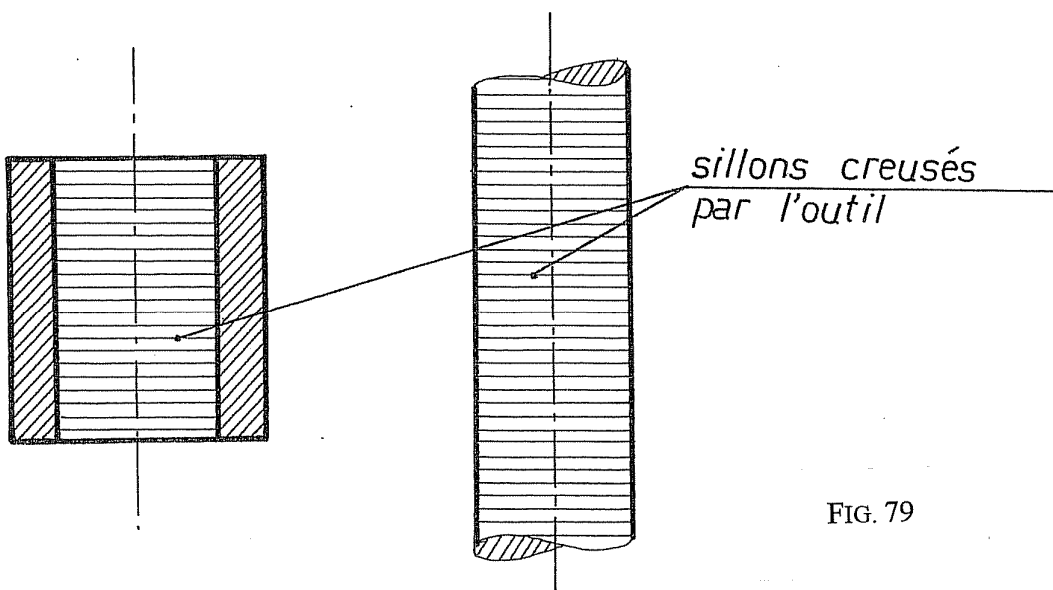


FIG. 79

2.4 – RUGOSITÉ

2.4.1 – Introduction

Toutes les cotes et tolérances décrites jusqu'ici relevaient de la *macrogéométrie*, c'est-à-dire celle que l'on mesure avec des appareils courants, dont les palpeurs ont un rayon de courbure relativement grand. Ces appareils sont incapables de suivre un détail de forme limité à une zone très petite ou, comme on dit encore, de faible longueur d'onde. C'est ce qu'illustre la figure 77.

Or, il est des applications où la *microgéométrie* joue un rôle essentiel. En voici quelques exemples.

- En *fatigue* (résistance aux charges alternées), les irrégularités de surface qui forment la rugosité sont autant d'*entailles* qui altèrent la résistance de la pièce. En gros, plus la pièce est rugueuse, plus faible est sa résistance aux sollicitations dynamiques.

- Le *grattage*, procédé de finition manuel (et donc coûteux !), outre qu'il permet d'obtenir une grande précision, conduit à une surface formée de petites cuvettes (*fig. 78*) qui forment autant de micro-coins d'huile permettant d'assurer une certaine lubrification des glissières rectilignes. C'est pourquoi ce procédé de finition, qui pourrait sembler d'un autre âge, continue d'avoir la faveur des constructeurs de machines-outils de précision.

- L'*orientation* même des stries laissées par l'outil peut avoir de l'importance. Ainsi, la réalisation classique d'arbres et alésages, que ce soit au tour, à l'aléreuse ou en rectification, laisse des traits d'outil circulaires. Si l'arbre et l'alésage doivent être frettés, on ne peut donc s'attendre à un effet d'obstacle mutuel des rugosités qui, au contraire, s'engrènent comme vis et écrou (*fig. 79*). Il existe un autre procédé, dit *superfinish*, développé par la firme Chrysler juste avant la seconde guerre mondiale, et qui consiste à utiliser des pierres taillées à la forme de la pièce auxquelles on donne un mouvement de rotation relativement lent et un mouvement de va-et-vient rapide (*réciprocation*), le tout en présence d'un lubrifiant. Le processus de coupe s'arrête dès qu'un film d'huile suffisant repousse les pierres. On peut, par ce procédé, obtenir un état de surface très fin, à stries croisées, bien plus avantageux en frettage (*fig. 80*)

- Les rugosités compromettent l'*étanchéité* des assemblages (*fig. 81*). En effet, les pièces reposent essentiellement sur leurs sommets, un peu aplatis cependant, du fait de la pression. Entre ces sommets, le fluide trouve de véritables conduits lui permettant de passer. On peut corriger cet effet à l'aide de *joints élastiques* qui remplissent à peu près les creux ou, plus exactement, ne laissent subsister que des canaux très minces, dans lesquels la fuite calculée par l'hydraulique est négligeable et la fuite réelle nulle, car il faut une certaine section minimale pour laisser passer les molécules du fluide. Bien entendu, ceci ne vaut que si les creux *ne sont pas trop profonds*.

- Sous l'effet d'une pression intense, bien qu'inférieure à la limite élastique, la rugosité présente à la surface d'une pièce peut se tasser, ce qui modifie la cote mesurée de la pièce et peut perturber les assemblages. Ce phénomène se rencontre notamment en frettage, comme nous le verrons plus loin. Il est d'autant plus prononcé que la rugosité est plus forte et plus concave.

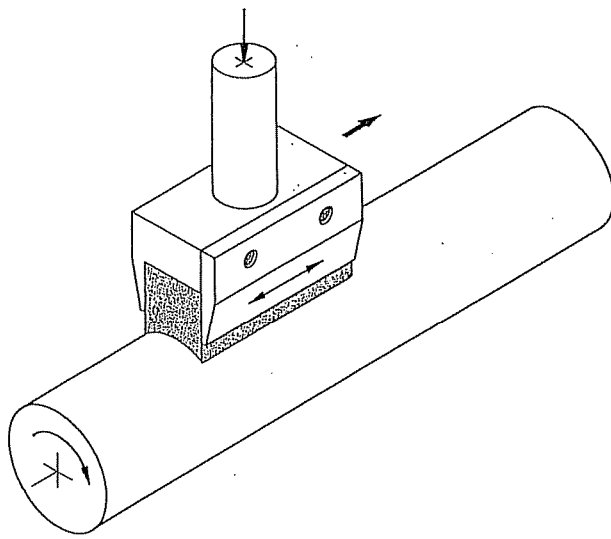


FIG. 80

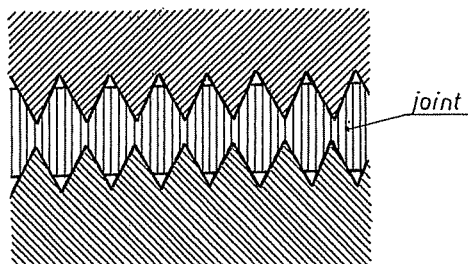
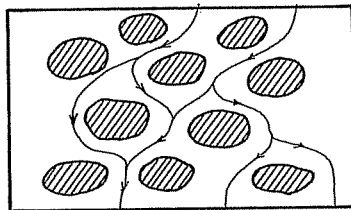
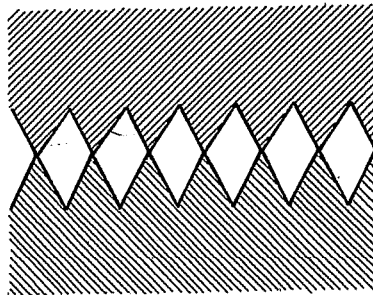


FIG. 81

Ces quelques exemples montrent que la rugosité n'est pas qu'une affaire d'esthétique. Sa caractérisation et sa mesure sont importantes tant sur le plan fonctionnel que du point de vue de la viabilité.

2.4.2 – Définitions

On appelle *surface réelle* la surface qui limite le corps et le sépare du milieu ambiant. Par opposition, la surface définie par le dessin est appelée *surface nominale*.

Pour mesurer la surface réelle, on utilise des palpeurs à rayon très petit. Le palpeur se meut dans un plan perpendiculaire à la surface et on mesure donc l'intersection de ce plan avec la surface. Cette intersection est appelée *profil*. De la même façon que pour la surface, on distingue le *profil réel* et le *profil nominal*. Mais si faible que soit le rayon du palpeur, il tend (*fig. 82*) à arrondir le profil des pics et sa capacité de pénétrer dans les gorges étroites est limitée. Dès lors, le *profil mesuré*, enregistrement de la trajectoire du palpeur, sera *différent* du profil réel (erreur systématique).

La mesure se fait sur une certaine longueur L , appelée *longueur d'exploration*, mais le calcul des paramètres de rugosité se fait seulement sur une portion de la longueur d'exploration, appelée *longueur de base*. Cette longueur est liée conventionnellement à l'ordre de grandeur de la rugosité selon des règles que nous n'examinerons pas ici.

Par rapport au profil nominal, le profil mesuré est entaché d'erreurs qui, selon leur *longueur d'onde*, sont classés en quatre ordres (*fig. 83*).

1) Premier ordre : *erreur de forme*. Sa longueur d'onde est comparable aux dimensions de la pièce. Elle résulte essentiellement de la déformation *statique* de la pièce lors de l'usinage. Elle est mesurable par les moyens de mesure usuels. Elle peut valablement être exprimée en centièmes de millimètres.

2) Deuxième ordre : *ondulations*. Leur longueur d'onde est intermédiaire entre les dimensions de la pièce et celle des traces laissées par l'outil. Elles résultent généralement de vibrations lors de l'usinage.

3) Troisième ordre : *rugosité principale*. Il s'agit essentiellement des traces laissées par l'outil. La rugosité s'exprime en micromètres.

4) Quatrième ordre : *arrachements*, formant un complément de rugosité plus ou moins aléatoire.

Pour donner une image de ces quatre ordres, on peut faire la comparaison avec un champ labouré. Il peut avoir une pente ou une courbure générale : premier ordre. Autour de cette forme générale, il peut encore exister des ondulations ayant une longueur d'onde nettement plus petite que les dimensions du champ : second ordre. La charrue a fait ses sillons : troisième ordre. Enfin, dans ces sillons, certaines mottes de terre se sont retournées de manière aléatoire : quatrième ordre.

Le profil mesuré est la superposition des quatre ordres.

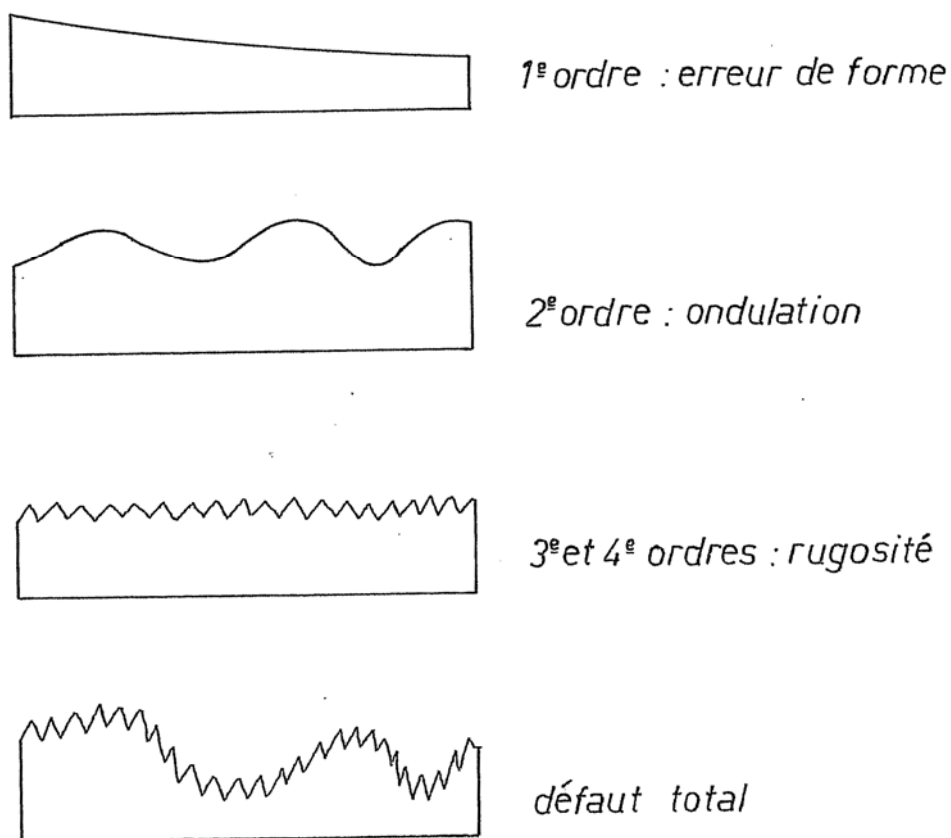
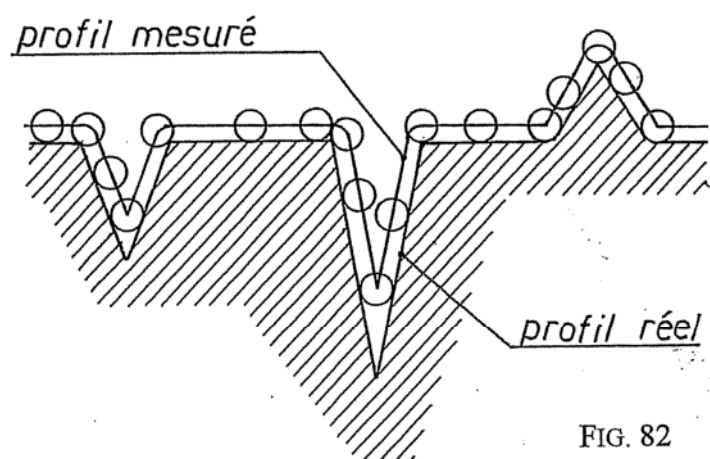


FIG. 83

2.4.3 – Paramètres d'état de surface

2.4.3.1 – Filtrage

Le premier problème consiste à *séparer* les deux derniers ordres (rugosité) des deux premiers (forme et ondulation). Ceci se fait par un filtrage passe-haut du signal donné par le palpeur (fig. 84). Ce filtrage est assez délicat et demande un opérateur expérimenté.

2.4.3.2. – Ligne moyenne, ligne de crête et ligne de fond. Rugosité totale.

Le profil mesuré est donc le résultat de ce filtrage. On commence alors par définir la direction générale du profil mesuré en lui ajustant une ligne ayant la même forme que le profil nominal, de manière à minimiser les carrés des écarts. On obtient ainsi la *ligne moyenne* (fig. 85). A chaque point du profil mesuré, on peut alors associer sa coordonnée normale à la ligne moyenne, appelée *hauteur*, comptée positivement dans la direction de l'air et négativement dans la direction de l'intérieur de la pièce. Ces hauteurs, notées h , varient entre un maximum h_M (évidemment positif) et un minimum h_m (évidemment négatif). La différence entre ces deux extrêmes est appelée *rugosité totale* R_t ou encore *rugosité maximale* R_{max} :

$$R_t = R_{max} = h_M - h_m$$

Par le point ou les points de hauteur maximale, on peut faire passer une parallèle à la ligne moyenne, qui porte le nom de *ligne de crête*. De même, par le ou les points de hauteur minimale, on peut faire passer une parallèle à la ligne moyenne, qui porte le nom de *ligne de fond*. La rugosité totale est donc la distance entre la ligne de crête et la ligne de fond.

La rugosité totale est très utilisée en Allemagne. On peut lui reprocher de dépendre essentiellement de points *accidentellement* élevés ou profonds. Mais ce paramètre est très pratique et très simple à évaluer dans les études théoriques de la rugosité principale.

2.4.3.3 – Notion de profondeur et profondeur moyenne de rugosité.

La distance, prise orthogonalement à la ligne moyenne, entre la ligne de crête et un point du profil mesuré, est appelée *profondeur* de ce point et notée y . C'est une grandeur essentiellement positive, puisque

$$y = h_M - h$$

On appelle *profondeur moyenne de rugosité* la grandeur

$$R_p = \frac{1}{L} \int_0^L y dx$$

calculée en prenant la coordonnée x le long de la ligne moyenne, de 0 à L . Lorsque le profil nominal est rectiligne, c'est encore la distance entre la ligne moyenne et la ligne de crête et cette propriété reste approximativement vraie pour un profil courbe.

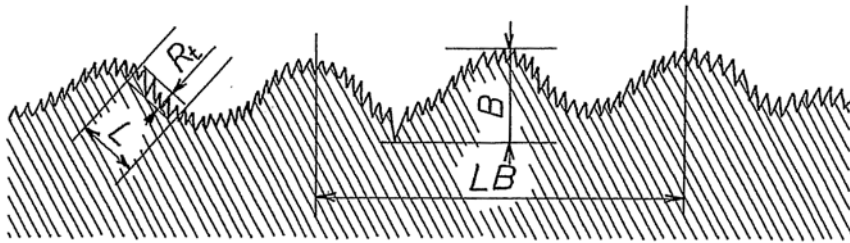


FIG. 84

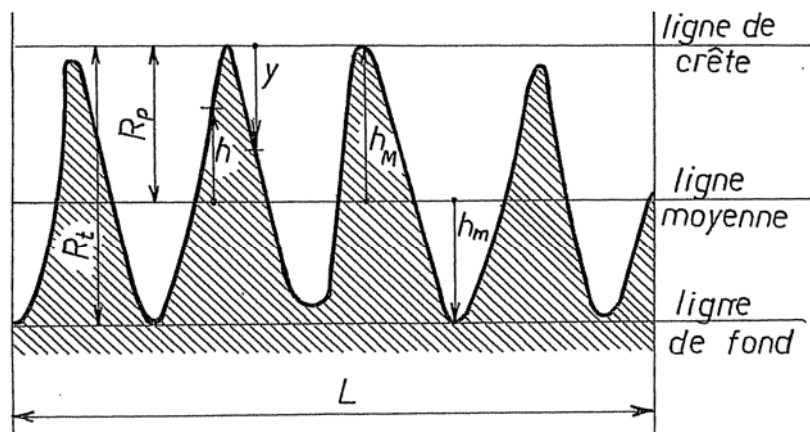


FIG. 85

Ce paramètre se mesure aisément en appliquant sur la surface un gicleur d'air comprimé et en mesurant la perte de charge (rugomètre SOLEX). Trop souvent ignoré, ce paramètre conditionne la capacité de la surface à se tasser sous l'effet d'une forte pression. En effet, le tassement maximal correspond au cas où les sommets remplissent exactement les creux : les sommets ont alors reculé de R_p . C'est donc R_p qu'il faut prendre en compte quand on estime la perte d'interférence de deux pièces frettées sous l'effet de leur pression réciproque. (Et non R_a , comme on le lit trop souvent dans la littérature).

2.4.3.4 – Rugosité moyenne arithmétique

Le paramètre de rugosité le plus souvent cité est la *rugosité moyenne arithmétique* R_a , définie par

$$R_a = \frac{1}{L} \int_0^L |h| dx$$

Il n'existe pas de mesure directe de ce paramètre, que l'on ne peut obtenir qu'en effectuant numériquement la moyenne à partir du profil mesuré. Du reste, nous ne connaissons pas d'application où c'est précisément ce paramètre qui joue un rôle clef. Dans la littérature anglo-saxonne, on donne à R_a le nom de *C.L.A. roughness* (*C.L.A.* = *center line average*).

2.4.3.5 – Rugosité moyenne quadratique

Il convient encore de signaler la plus ancienne mesure de rugosité, développée par Abbott juste avant la seconde guerre mondiale. Il s'agit de la *rugosité moyenne quadratique* R_q définie par

$$R_q = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L h^2 dx}$$

Les anglo-saxons donnent à ce paramètre le nom de *R.M.S. roughness* (*R.M.S.* = *root mean square*). En fait, ce paramètre avait été choisi pour des raisons de technique métrologique. On faisait défiler un palpeur le long du profil, à vitesse constante. Le palpeur était relié à un capteur inductif qui produisait une tension proportionnelle au déplacement. On mesurait cette tension à l'aide d'un voltmètre à cadre qui donnait naturellement la valeur dite *efficace* de la tension, c'est-à-dire, à l'échelle près, R_q .

Cette mesure de rugosité est pratiquement tombée en désuétude. A notre sens, il devrait être remis à l'honneur dans le cas des surfaces rectifiées. En effet, dans ce cas, la distribution des hauteurs est à peu près gaussienne. R_q est alors l'*écart-type* de la distribution et c'est à lui qu'il faut faire appel pour une définition probabiliste du contact. Nous pensons notamment aux problèmes liés à la lubrification en film très mince (régime dit *onctueux*).

On peut démontrer la relation d'ordre suivante, vraie pour tout profil :

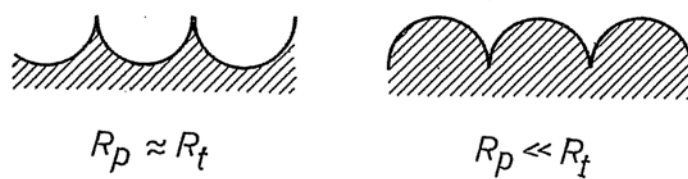
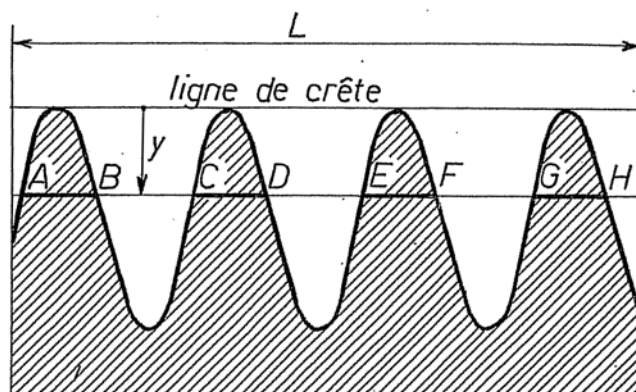
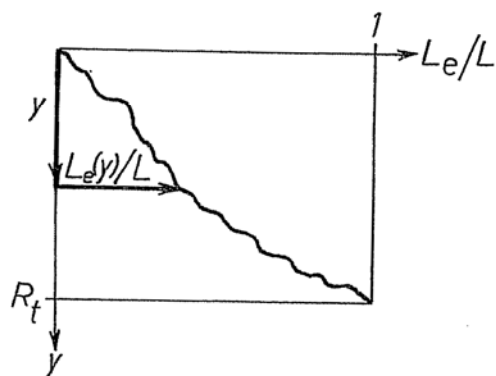


FIG. 86



$$L_e(y) = AB + CD + EF + GH$$

FIG. 87



COURBE D'ABBOTT

FIG. 88

$$R_a \leq R_q \leq R_t$$

2.4.3.6 – Coefficient de plénitude

La simple donnée de R_a ne fournit qu'un ordre de grandeur des rugosités, mais ne permet pas de déduire leur *forme*. On obtient déjà une idée plus précise en comparant les valeurs de R_p et R_t . On a évidemment toujours

$$R_p = \frac{1}{L} \int_0^L y dx = y_{\text{moy}} \leq y_M = R_t$$

Mais comme le montre la figure 86, si R_p est proche de R_t , cela signifie que la profondeur moyenne est proche de la profondeur maximale, c'est-à-dire que le profil est très évidé. Au contraire, si R_p est petit devant R_t , cela signifie que la profondeur moyenne est petite devant la profondeur maximale, ce qui revient à dire que le profil est très plein. Dans cet esprit, on définit le *coefficient de plénitude* k_V ($V = \text{Volligkeitsgrad}$, plénitude en allemand) par

$$k_V = 1 - \frac{R_p}{R_t}$$

Ce coefficient est toujours compris entre 0 et 1. Plus il est proche de l'unité, plus le profil est plein et capable de supporter de fortes pressions sans se tasser.

2.4.3.7 – Courbe d'Abbott

Une information plus précise à ce sujet est donnée par la *courbe d'ABBOTT* (*Tragkurve* en allemand), fondée sur la notion de *longueur portante*. Traçons (fig. 87) une parallèle à la ligne de crête à une profondeur y . Une partie de cette ligne, de longueur totale L_e , est située à l'intérieur de la matière, le reste, de longueur $(L - L_e)$ étant hors de la pièce. L_e est appelée *longueur portante*. Le rapport L_e/L est appelé *fraction portante*. C'est évidemment une fonction de la profondeur y . Établisons le diagramme où l'on porte en ordonnée, vers le bas, la profondeur y de 0 à R_t et en abscisse, pour chaque y , la fraction portante $\frac{L_e(y)}{L}$. La courbe ainsi obtenue est appelée *courbe d'Abbott* (fig. 88). C'est une image intégrée du profil. Nous laissons au lecteur le soin de répondre à la question suivante : *comment déterminer R_p et k_V à partir de la courbe d'Abbott ?*

2.4.4 – Rugosité théorique en tournage

Nous avons dit que le terme principal de rugosité (troisième ordre) était constitué des traces d'outil. Il faut bien se rendre compte qu'il est parfaitement maîtrisable technologiquement. La figure 89 illustre le profil laissé par un outil de tour dont le bec a un rayon r_c . En somme, l'outil dessine sur la pièce une espèce de filetage dont le pas est l'*avance*

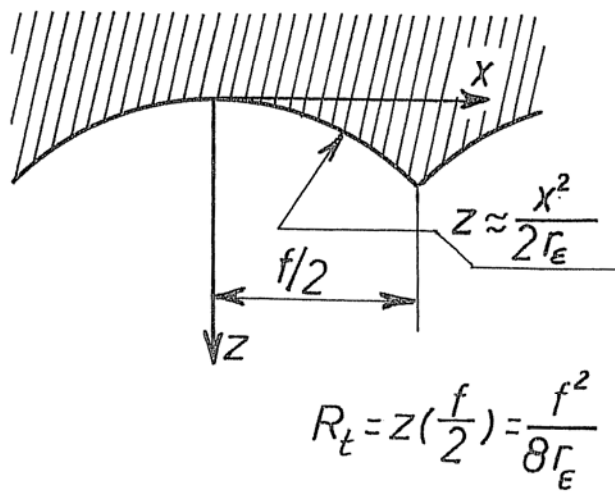
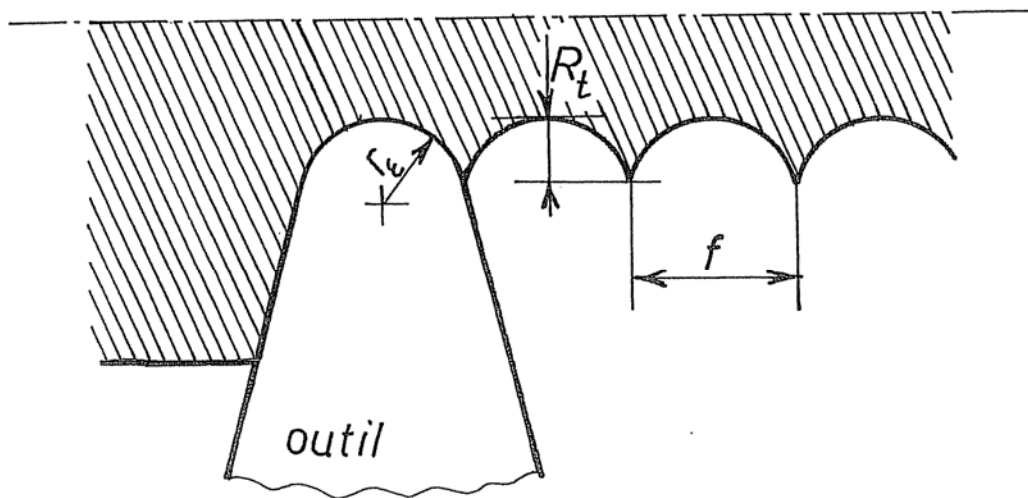


FIG. 89

par tour f . En assimilant l'arc de cercle constituant une arcade à une parabole, on obtient la relation approchée

$$z = \frac{x^2}{2r_\varepsilon}$$

où x est l'abscisse prise à partir du fond et z , la cote à partir de ce fond. On en déduit immédiatement

$$R_t = z \left(\frac{f}{2} \right) = \frac{f^2}{8r_\varepsilon}$$

On trouverait, par des calculs un peu plus longs,

$$R_a = 0,03208 \frac{f^2}{r_\varepsilon}$$

$$R_p = \frac{f^2}{12r_\varepsilon}$$

$$R_q = 0,03727 \frac{f^2}{r_\varepsilon}$$

Cela signifie que pour obtenir un bon état de surface, il faut utiliser un rayon de bec d'outil relativement grand (une valeur raisonnable est $r_\varepsilon = 0,8$ mm) et une faible avance. Bien entendu, si l'on diminue l'avance par tour, on devra faire plus de tours pour usiner une longueur donnée de la pièce et par conséquent, travailler plus longtemps. Le temps de travail est proportionnel à $1/f$ et donc à $1/(R_a)^{1/2}$. *Le coût varie donc comme l'inverse de la racine carrée de la rugosité.* Pour le concepteur, cela signifie qu'il faut éviter d'exiger des rugosités inutilement faibles, car le coût s'en ressent.

2.4.5 – Relations entre les paramètres de rugosité

a) Dans le cas d'une rugosité en arcs concaves (tournage, fraisage), on peut établir les relations théoriques

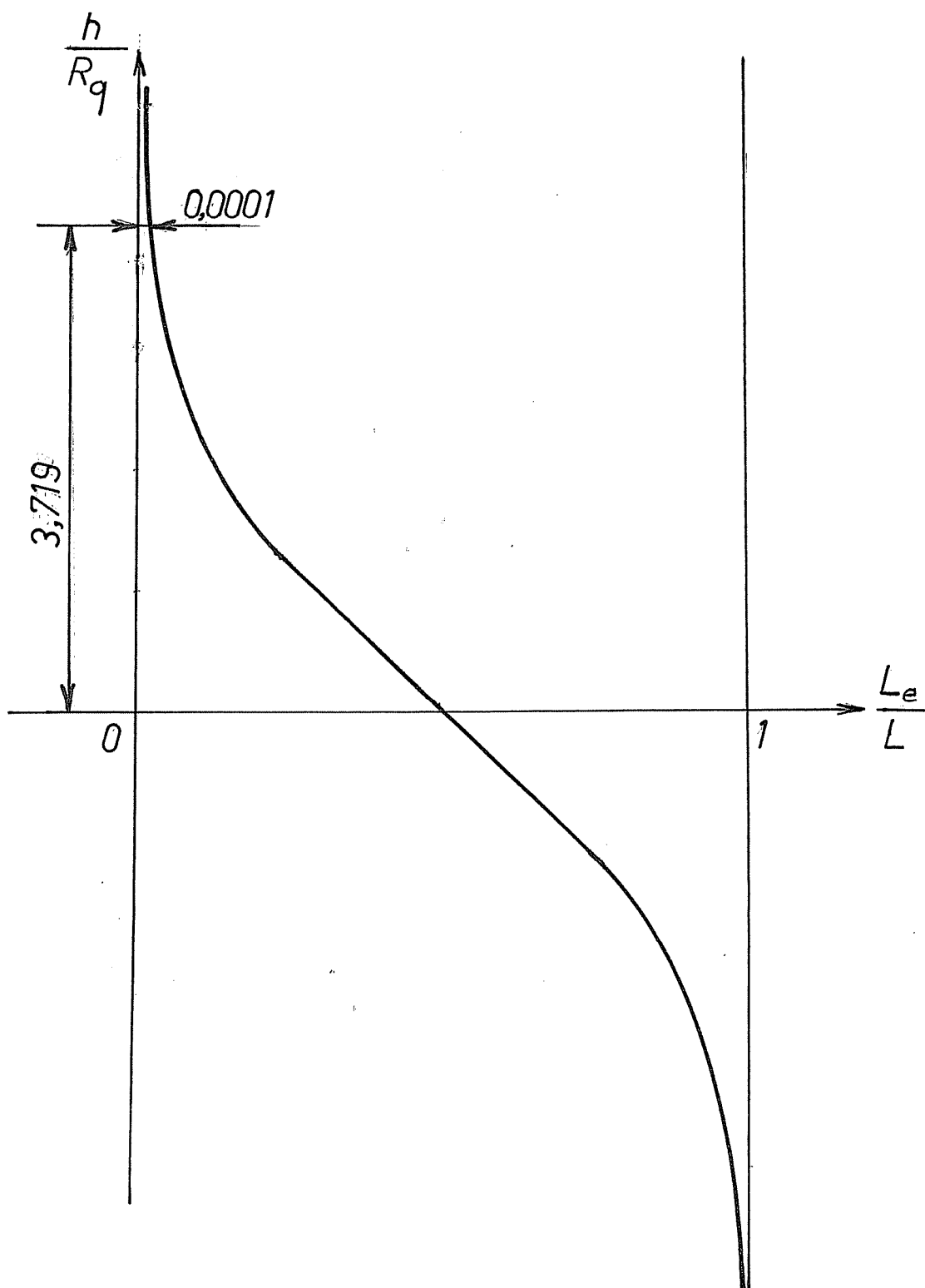


FIG. 90

$$\frac{R_p}{R_a} = 2,598$$

$$\frac{R_p}{R_t} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{R_t}{R_a} = 3,897 \approx 4$$

$$\frac{R_a}{R_t} = 0,2566 \approx \frac{1}{4}$$

$$\frac{R_q}{R_a} = 1,165$$

$$\frac{R_q}{R_t} = 0,2982 \approx 0,3$$

On notera que le coefficient de plénitude est donné par

$$k_V = 1 - \frac{R_p}{R_t} = \frac{1}{3}$$

Ce sont donc des surfaces fort évidées, convenant assez mal au frettage. Pour ce type d'application, il faut préférer des surfaces rectifiées.

b) Pour les surfaces rectifiées et superfinies, il est raisonnable d'admettre que les écarts h par rapport à la ligne moyenne ont une distribution aléatoire suivant approximativement une loi normale. L'écart-type de la distribution s'identifie à R_q qui devient alors la variable naturelle de la distribution. Dans le cadre de ce modèle, la profondeur moyenne de rugosité et la rugosité totale n'ont pas de sens précis, car la ligne de crête théorique est à l'infini. On tourne la difficulté en définissant une courbe d'Abbott modifiée donnant la fraction portante à une distance h de la ligne moyenne (*fig. 90*). Cette fraction portante est donnée par la relation

$$\frac{L_e(h)}{L} = P\left(-\frac{h}{R_q}\right)$$

où P est la fonction des probabilités cumulées,

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

La position de la ligne de crête est alors définie de manière probabiliste comme la hauteur à laquelle la fraction portante est inférieure à un certain seuil, par exemple, 0,0001. On choisit naturellement la valeur complémentaire à l'unité pour la ligne de fond, ce qui

donne $R_t = 2R_p$ et un coefficient de plénitude d'un demi. La rugosité moyenne arithmétique est l'espérance mathématique de la valeur absolue de h , c'est-à-dire

$$\frac{R_a}{R_q} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

En posant $t^2 / 2 = u$, d'où $t dt = du$, on obtient

$$\frac{R_a}{R_q} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0,7979$$

En fixant par exemple le seuil de fraction portante à 0,0001, on obtient

$$R_p^{(0,0001)} = 3,719 R_q = 4,660 R_a = 0,5 R_t^{(0,0001)}$$

On constate que cela donne $R_t^{(0,0001)} = 9,322 R_a$, à comparer à la valeur 3,897 R_a obtenue en tournage.

2.5 – Exigences de raideur

La *raideur* est une caractéristique trop souvent oubliée dans la conception. Or, une souplesse trop grande d'un système mécanique peut amener à de graves mécomptes.

2.5.1 – Fonction guidage

Le propre d'un mécanisme est d'admettre un certain mouvement. Mais il peut survenir des mouvements parasites gênants. Nous prendrons pour exemple la suspension d'un essieu arrière de véhicule automobile. Nous considérons un essieu rigide moteur à pont intégré, comme on en trouve notamment sur les camions et les 4x4. Les roues sont censées pouvoir se mouvoir verticalement, et c'est à cela que sert la suspension. Une solution qui a longtemps prévalu consistait à utiliser des ressorts à lames, qui combinent la fonction ressort avec la fonction guidage. Dans bien des configurations, le ressort est attaché directement au châssis d'un côté et par l'intermédiaire d'une jumelle de l'autre (*fig. 91*). La raison d'être de la jumelle est que lorsque le ressort travaille, sa courbure varie, ce qui provoque une variation de la distance entre ses deux oeilletons. Cette disposition permet de reprendre la *poussée* (l'effort qui fait accélérer le véhicule), le poids du véhicule et les efforts transversaux, mais non la *réaction*, couple qui tend à faire tourner le corps de l'essieu. La réaction est alors reprise par le fourreau de l'arbre de transmission, qui est rotulé à la sortie de la boîte de vitesses. Outre que ce système mène à des masses non suspendues importantes, ce qui nuit à la tenue de route, il se trouve que lors d'un virage, du fait du roulis du véhicule, l'essieu braque légèrement (*microbraquage*). Le guidage est donc imparfait, et cela provoque des perturbations indésirables de la trajectoire, qui troublent le conducteur. Enfin, un défaut des ressorts à lames est qu'en cas de surcharge extrême, ils peuvent se rompre.

A l'heure actuelle, cette solution a été abandonnée sur les véhicules de tourisme. Une solution alternative est illustrée en figure 92. Il s'agit en fait d'un essieu rigide directeur d'autobus, mais le principe est le même. Le ressort n'assure plus aucun guidage. Ce sera un ressort à boudin (pas de danger de rupture, car les spires deviennent jointives en régime élastique) ou un bloc de caoutchouc synthétique. Pour guider l'essieu, on utilise

- Deux barres longitudinales pour reprendre la poussée
- Une barre longitudinale dans un autre plan que les premières, pour reprendre la réaction
- Une barre transversale appelée *barre Panhard*, dont le rôle est d'empêcher le mouvement transversal de l'essieu. Elle est fixée de manière à être presque horizontale, pour éviter une erreur de trajectoire verticale trop forte.

On notera que dans cette solution, les barres ne sont sollicitées qu'en *extension*, ce qui assure les déformations minimales. En outre, une caractéristique essentielle de cette solution est la *séparation complète des fonctions* ressort, guidage longitudinal, guidage latéral. C'est la manière *la plus sûre* de bien guider. Il existe d'autres types de suspension, pour les essieux avant ou arrière des véhicules, où certaines fonctions guidage et ressort sont rassemblées. Il en résulte inmanquablement des couplages et des déformations parasites qu'il convient de calculer.

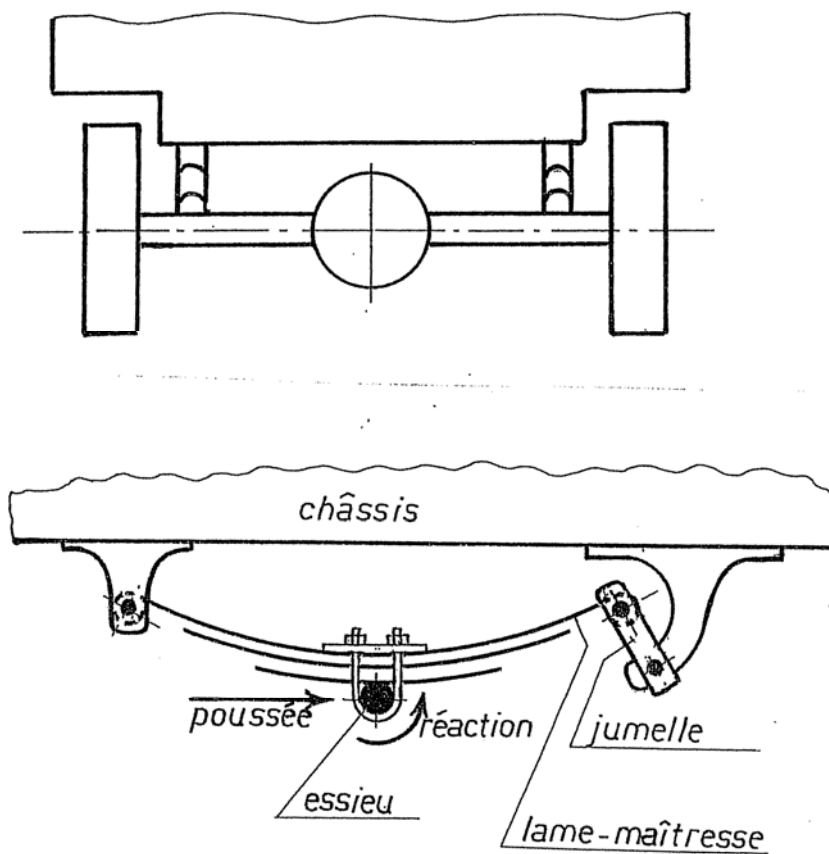


FIG. 91

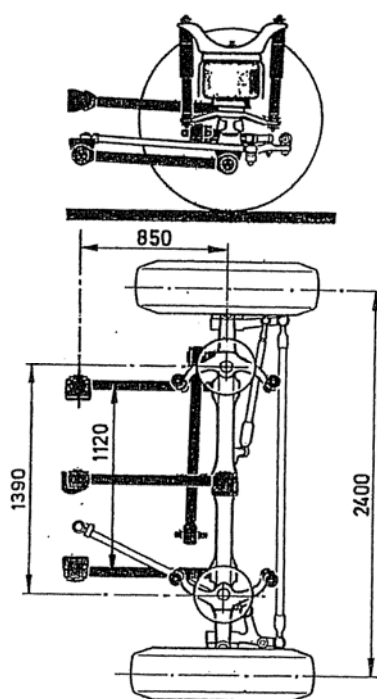


FIG. 92

De toute manière, le mot d'ordre en matière de guidage est *raideur*.

2.5.2 – Commandes

Les commandes de toutes sortes sont destinées à transmettre un signal. Une trop grande souplesse du dispositif de commande a pour effet que le signal reçu est déformé. Ainsi, on imagine mal un mécanisme de direction de voiture qui se déformerait inconsidérément : les mouvements donnés au volant doivent se répercuter parfaitement aux roues. De plus, dans les commandes complexes ayant des articulations, il faut absolument maîtriser les *jeux* qui conduisent à de l'*hystérésis* et peuvent rendre la commande inopérante. Ainsi, par exemple,

- Des jeux excessifs dans la direction d'une voiture rendent sa conduite très délicate.
- Des jeux excessifs dans la tringlerie de commande d'une boîte de vitesse rendent le passage des vitesses difficile et parfois, presque impossible.
- Un jeu dans le mécanisme d'avance de la table d'une fraiseuse rend le fraisage en avalant impossible (on casse les fraises, quand ce n'est pas pire).

Il existe divers principes de rattrapage des jeux, tous fondés sur une certaine forme de précontrainte.

2.5.3 – Déformations des organes transmettant la puissance

2.5.3.1 – Classification des transmissions

La puissance est toujours le produit d'une force par une vitesse. Nous parlons ici de forces et vitesses généralisées : souvent, il s'agit en fait d'un couple et d'une vitesse angulaire. Transmettre une puissance, c'est donc transmettre à la fois un mouvement et une force. En pratique, il y a toujours une perte, ce qui mène à introduire la notion de rendement. Dans la plupart des cas, ce rendement est proche de l'unité, mais il existe certaines exceptions, comme les transmissions par vis et écrou. Poussant plus loin l'analyse, on constate qu'il existe en fait deux grandes familles de transmissions :

- Les transmissions *positives* dans lesquelles le mouvement est transmis coûte que coûte, une surcharge pouvant mener à la rupture de certains constituants. C'est le cas des arbres et des roues dentées, par exemple. Dans ces transmissions, la perte de puissance est en fait une perte d'effort.
- Les transmissions *par effort*, où c'est l'effort qui est transmis, la perte se manifestant sous la forme d'une diminution de la vitesse. En cas de surcharge, on débouche sur le patinage, qui n'est pas destructif pour autant qu'il ne s'éternise pas. C'est le cas des courroies, notamment.

2.5.3.2 – Limitation de la torsion des arbres

La transmission de puissance dans un arbre consiste à transmettre le couple et la vitesse angulaire. La torsion induite par le couple doit être limitée, sans quoi l'inertie des organes mènera à des vibrations de torsion indésirables et, en outre, l'angle de rotation à la sortie de l'arbre sera en retard sur l'angle de rotation à l'entrée, ce qui peut être très gênant. Pour les arbres longs, il est classique de limiter la torsion à $\frac{1}{4}$ de degré par mètre, ce qui revient à

$$\theta' = \frac{1}{4} \frac{^\circ}{m} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{180} \frac{rad}{m} = \frac{1}{4} \frac{\pi}{180} \frac{rad}{1000mm} = 4,363.10^{-6} rad / mm$$

Par la formule classique de la torsion des arbres cylindriques, si M_t est le moment de torsion, on a

$$\theta' = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{M_t}{G \frac{\pi d^4}{32}}$$

ce qui signifie que le diamètre doit valoir

$$d = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi} \frac{M_t}{G \theta'}}$$

Pour un arbre en acier,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{210000}{2,6} MPa = 80770 MPa$$

Il vient donc

$$\frac{d}{mm} = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi \cdot 80770 \cdot 4,363.10^{-6}}} \sqrt[4]{\frac{M_t}{Nmm}} = 2,3194 \sqrt[4]{\frac{M_t}{Nmm}}$$

Dans la pratique, on préfère travailler directement avec la puissance et la fréquence de rotation. On notera que

$$M_t = \frac{P}{2\pi N}$$

En utilisant comme unité de puissance le cheval, $ch = 736W$ et comme unité de fréquence de rotation, le $tr/min = tr/60s$, on pourra donc écrire le résultat précédent sous la forme

$$\frac{d}{mm} = K \sqrt[4]{\frac{P / ch}{N / (tr / min)}}$$

La manière la plus simple de trouver le facteur K consiste à faire une règle de trois. Pour une puissance d'1 ch et une fréquence de rotation d'1 tr/min , on a

$$P = 736W$$

$$\omega = 2\pi N = 2\pi rad / min = 2\pi \frac{rad}{60s} = 0,1047 rad / s$$

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{736}{0,1047} = 7030 Nm = 7,030.10^6 Nmm$$

et

$$\frac{d}{mm} = 2,319 \sqrt[4]{7,030.10^6} = 20319 \times 51,49 = 119,4$$

On arrondit généralement ce résultat en remplaçant 119,4 par 120, ce qui donne

$$\frac{d}{120mm} = \sqrt[4]{\frac{P / ch}{N / (tr / min)}} \quad \text{avec} \quad ch = 736W.$$

C'est un cas particulier de la formule dite *des arbres de manège*, que nous rencontrerons plus loin.

2.5.3.3 – Equilibrage des souplesses

Il est même des cas où il faut veiller à *équilibrer les souplesses*. Considérons par exemple la transmission des voitures à moteur transversal avant. Pour des raisons d'architecture, la sortie du différentiel est en général située non pas au milieu du véhicule, mais devant le conducteur. Il s'ensuit que l'arbre de la roue gauche est plus court que l'arbre de la roue droite. Par ailleurs, l'effet du différentiel est d'égaliser les couples sur chacun de ces arbres. En affectant de l'indice g les grandeurs relatives à l'arbre gauche et l'indice d à tout ce qui touche à l'arbre droit, on a donc

$$M_{tg} = M_{td}$$

Dans une conception fondée sur la *résistance*, on donnerait donc à chaque arbre le même module de torsion,

$$\left(\frac{I_p}{D/2} \right)_g = \left(\frac{I_p}{D/2} \right)_d$$

Il est à noter que ces arbres peuvent être creux. Alors, en notant

$$Q = d / D$$

le rapport entre le diamètre intérieur et le diamètre extérieur, on a en général

$$I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = (1 - Q^4) \frac{\pi D^4}{32}$$

et

$$\frac{I_p}{D/2} = (1 - Q^4) \frac{\pi D^3}{16}$$

si bien que la condition d'égale résistance est

$$D_g \sqrt[3]{1 - Q_g^4} = D_d \sqrt[3]{1 - Q_d^4}$$

En particulier, si les deux arbres ont le même Q , on obtient l'égalité de leur diamètre. Mais si l'on procède ainsi, l'arbre droit, plus long, aura une déformation de torsion plus grande que l'arbre gauche. En effet, en notant C la valeur commune de $I_p/(D/2)$ et ℓ les longueurs,

$$\theta_g = \frac{M_t \ell_g}{I_{pg}} = \frac{M_t \ell_g}{C \frac{D_g}{2}} = K \left(\frac{\ell}{D} \right)_g$$

$$\theta_d = \frac{M_t \ell_d}{I_{pd}} = \frac{M_t \ell_d}{C \frac{D_d}{2}} = K \left(\frac{\ell}{D} \right)_d$$

Le résultat est que, dans cette hypothèse, les angles de torsion des deux arbres sont entre eux comme les rapports ℓ/D . Dans ce cas, si l'on considère un démarrage, les deux roues auront une action inégale, ce qui gêne le conducteur. Il convient en fait que les deux arbres de roue aient non pas la même résistance, mais *la même raideur*. La condition est

$$\frac{M_t \ell_g}{GI_{pg}} = \theta_g = \theta_d = \frac{M_t \ell_d}{GI_{pd}}$$

soit

$$\frac{D_g^4 (1 - Q_g^4)}{D_d^4 (1 - Q_d^4)} = \frac{\ell_g}{\ell_d}$$

Ainsi, l'arbre le plus long devra être plus gros que l'autre, alors même que les moments de torsion sont identiques.

2.5.3.4 – Limitation de la flexion

Divers organes, parmi lesquels les engrenages et surtout les courroies, soumettent les arbres à de la *flexion*. Celle-ci entraîne des variations de position (*flèche*) et des inclinaisons. Il existe diverses règles de limitation de ces effets indésirables.

- Dans les *machines courantes*, on cite généralement la condition

$$\frac{f_{\max}}{\ell} \leq \frac{1}{3000}$$

où f représente la flèche et ℓ , la distance entre paliers. Il s'agit en fait d'une limitation implicite des pentes φ . Supposons pour fixer les idées qu'un arbre sur deux appuis d'extrémité ait une déformée approximativement donnée par la relation

$$v(x) = f_{\max} \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

où x est la coordonnée selon l'axe (c'est le premier harmonique de Fourier). Alors, la pente aux extrémités est donnée par

$$\varphi = \frac{\pi f_{\max}}{\ell} = \frac{\pi}{3000} = \frac{1,047}{1000} \approx \frac{1}{1000}$$

- En construction des *machines-outils*, on cite souvent les conditions un peu plus restrictives

$$\begin{aligned} \frac{f_{\max}}{\ell} &\leq \frac{1}{5000} \\ \varphi_{\max} &\leq \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

- Les *roulements* supportent assez mal les inclinaisons de l'arbre. En général, il faut que l'inclinaison au droit d'un roulement vérifie

$$\varphi \leq \frac{1}{1000}$$

excepté pour les roulements à rotule, qui admettent des inclinaisons de quelques degrés (1° à 4° selon les types : il faut consulter les catalogues).

- Dans les *moteurs électriques*, la flèche provoque une variation de l'entrefer et un déséquilibre des forces magnétiques. On impose généralement, si δ est l'entrefer,

$$f_{\max} \leq \frac{\delta}{10}$$

2.5.3.5 – Remarque générale

Dans bien des cas, les exigences de raideur sont *plus sévères* que les exigences de résistance. C'est une des différences entre la construction mécanique et les constructions civiles.

2.6 – Le frottement et ses conséquences

2.6.1 – Coefficients de frottement

Soient deux corps pressés l'un sur l'autre par une force N normale à leur surface de contact. Pour amorcer un mouvement de glissement, il faut appliquer une force tangentielle

$$T_0 = \mu_0 N$$

Le coefficient μ_0 est appelé *coefficient de frottement au repos*. Un fois le mouvement amorcé, la réaction tangentielle de frottement décroît légèrement avec la vitesse et finit par se stabiliser à une valeur

$$T = \mu N$$

où μ est le *coefficient de frottement cinétique* (fig. 93). Dans la pratique, on néglige le plus souvent la petite différence entre ces deux coefficients. Mais nous verrons qu'il existe certains phénomènes qui reposent essentiellement sur cette différence.

2.6.2 – Adhérence

L'adhérence se produit donc pour $T \leq \mu_0 N$. Cette propriété est mise à profit dans les liaisons *par adhérence*. Comme ici, l'adhérence est recherchée, on utilise en pratique dans les calculs μ et non μ_0 , ce qui revient en fait à prendre une petite sécurité supplémentaire.

2.6.2.1- Boulons

On appelle *boulon* l'ensemble formé par une *vis* et un *écrou*. En serrant deux pièces l'une contre l'autre à l'aide de boulons, on peut provoquer un effort normal tel que les pièces *adhèrent*. Ainsi, dans l'accouplement à plateaux de la figure 94, le couple est transmis *par frottement* des deux plateaux *et non par effet d'obstacle des tiges de vis*. Les trous des deux plateaux ont du reste un diamètre supérieur à celui des vis, ce qui permet, moyennant une tolérance de localisation au maximum de matière, d'assurer l'interchangeabilité.

Remarque : On a réalisé jadis des accouplements à *boulons cisailés* dans lesquels on faisait effectivement appel à l'effet d'obstacle des vis. Mais pour que ce type d'accouplement résiste aux chocs de démarrage, il faut que les vis soient exactement ajustés aux trous, ce qui présente de réelles difficultés de fabrication et nuit à l'interchangeabilité. Actuellement, on n'utilise plus que le système que nous décrivons, dit à *boulons tendus*.

Soient D le diamètre du cercle sur lequel sont placés les trous, M_t le couple à transmettre et Z le nombre de boulons. On devra donc donner aux boulons une précharge N_0 telle que

$$M_t = Z\mu N_0 \frac{D}{2}$$

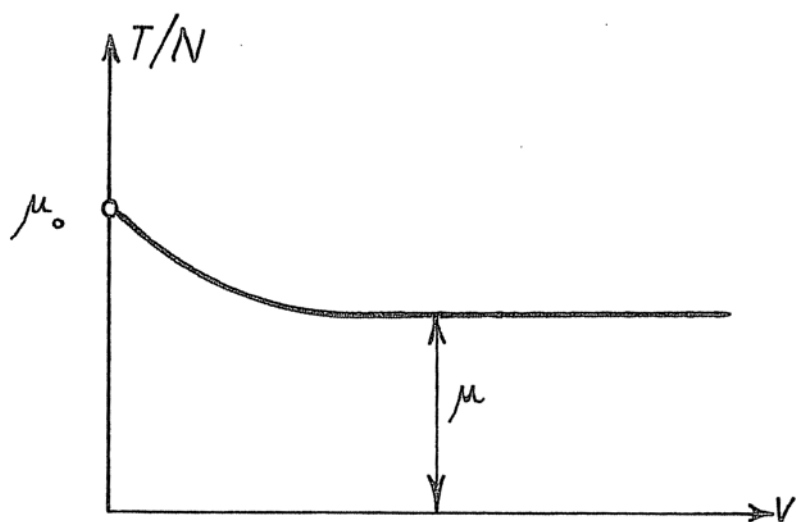


FIG. 93

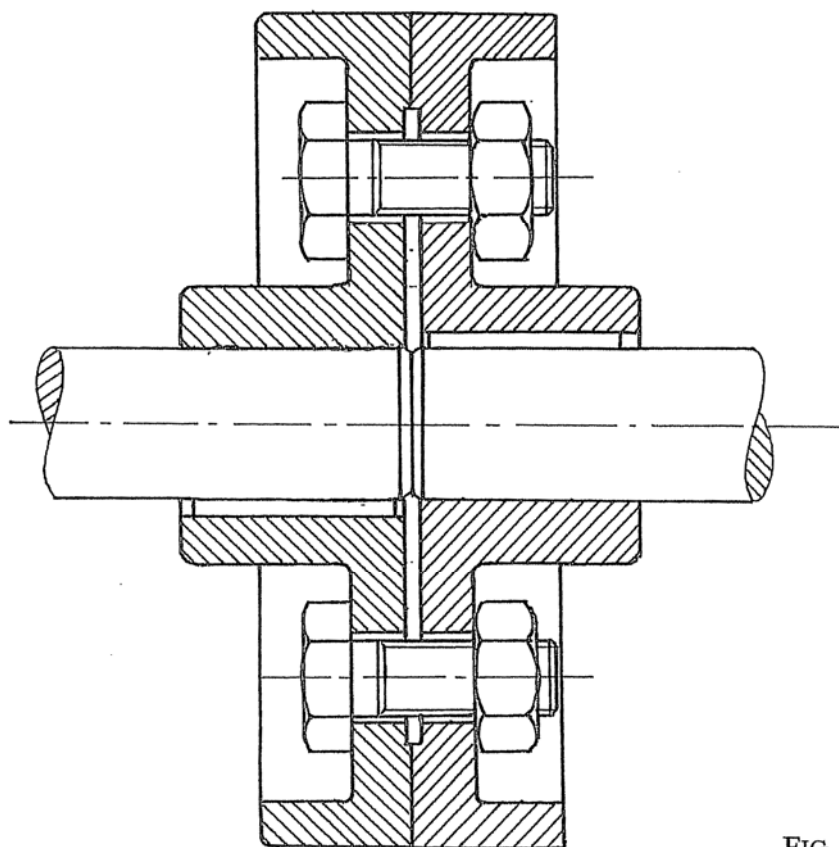


FIG. 94

ce qui donne

$$N_0 = \frac{M_t}{Z\mu \frac{D}{2}}$$

On choisit les boulons pour résister à cette précontrainte, et on les serre avec une clef dynamométrique. Le couple de serrage vaut approximativement

$$C = 0,2N_0d$$

où d est le diamètre nominal de la vis.

2.6.2.2-Frettage

Il s'agit d'assurer la transmission du couple entre un arbre et un moyeu par adhérence. L'arbre a un diamètre légèrement supérieur à l'alésage du moyeu et selon la valeur de l'interférence, on assemble à la presse, en chauffant le moyeu ou en refroidissant l'arbre. Le diamètre de l'arbre et l'alésage du moyeu ont la même cote nominale, et on obtient l'interférence par le jeu des écarts. Le problème est un peu compliqué par l'existence des tolérances.

a) Généralités

Nous noterons

$$Q = \frac{d_{\text{int}}}{d_{\text{ext}}} \quad \text{pour l'arbre et le moyeu}$$

Indice a pour l'arbre et indice m pour le moyeu

ν = coefficient de Poisson

E = module de Young

d = diamètre de la portée de frettage

δ = interférence

La théorie de l'élasticité enseigne que sous l'effet d'une pression p , un arbre a une variation de diamètre donnée par

$$\frac{\Delta d_a}{d_a} = -C_a p$$

avec

$$C_a = \frac{1}{E_a} \left(\frac{1+Q_a^2}{1-Q_a^2} - \nu_a \right)$$

Sous la même pression, la variation de diamètre d'un alésage vérifie la relation

$$\frac{\Delta d_m}{d_m} = C_m p$$

où

$$C_m = \frac{1}{E_m} \left(\frac{1+Q_m^2}{1-Q_m^2} + \nu_m \right)$$

Les pièces frettées ont finalement un diamètre commun

$$\bar{d} = d_a - C_a p d_a = d_m + C_m p d_m$$

ce qui implique que pour obtenir une pression p , il faut une interférence $\delta(p)$ donnée par

$$\delta(p) = d_a - d_m = p(C_a d_a + C_m d_m) \approx p(C_a + C_m)d$$

car en réalité, les écarts entre les cotes de l'arbre et du moyeu sont très faibles par rapport au diamètre nominal. On obtient donc la relation

$$\frac{\delta(p)}{d} = (C_a + C_m)p$$

b) Interférence requise

La transmission des efforts nécessitera une certaine pression p_{requis} que nous calculerons ci-dessous. Pour l'obtenir, il faut une interférence $\delta(p_{requis})$ calculée par la formule ci-dessus. Mais lors du montage, il se produit un *tassement des rugosités* qui diminue l'interférence réelle et donc la pression de serrage. On sait que le tassement maximal des rugosités d'une surface est donné par la profondeur moyenne de rugosité R_p . On peut donc s'attendre à ce que l'arbre subisse une diminution de rayon de R_{pa} et, par conséquent, une diminution de diamètre $2R_{pa}$. De même, le diamètre du moyeu peut varier de $2R_{pm}$. Dès lors, l'interférence minimale à réaliser est

$$\delta_m^{requis} = \delta(p_{requis}) + 2(R_{pa} + R_{pm})$$

Demandons-nous à présent quelle est la *pression requise*. Pour une pression p , les contraintes tangentielles seront au plus égales à μp . Un moment de torsion M_t induira des contraintes azimutales τ_θ telles que, si ℓ est la longueur du moyeu,

$$M_t = \pi d l \tau_\theta \frac{d}{2} \quad \text{soit} \quad \tau_\theta = \frac{M_t}{\pi \frac{d^2}{2} \ell}$$

Une éventuelle force axiale F_a induira des contraintes axiales τ_a telles que

$$F_a = \pi d l \tau_a \quad \text{soit} \quad \tau_a = \frac{F_a}{\pi d \ell}$$

La pression nécessaire est donc donnée par la condition

$$p_{requis}^0 = \frac{1}{\mu} \tau_{résul} \tan t = \frac{1}{\mu} \sqrt{\tau_\theta^2 + \tau_a^2}$$

Lorsque l'ensemble est destiné à tourner à *grande vitesse*, les forces centrifuges induisent des contraintes radiales positives qui *diminuent* la pression. Il faut en conséquence obtenir au repos une pression majorée d'autant. Nous nous limiterons ici au cas où l'arbre et le moyeu ont les mêmes valeurs de E et ν et la même masse volumique ρ . Dans ce cas, il est assez facile de montrer que la correction de pression est

$$\Delta p = \frac{3+\nu}{32} \rho \omega^2 d^2 \left(\frac{1}{Q_m^2} - 1 \right)$$

(Le lecteur intéressé au cas général de deux matériaux différents, qui est plus compliqué, pourra consulter par exemple l'ouvrage de Kollmann [1].) La pression requise est alors

$$p_{requis} = p_{requis}^0 + \Delta p$$

c) Interférence admissible

La pression régnant entre l'arbre et le moyeu ne peut dépasser une certaine valeur sous peine d'endommager le moyeu. La pression admissible p_{adm} dépend du type de moyeu.

- pour un moyeu *fragile* (fonte), le mode de mise hors service est la *rupture*. Le critère à utiliser est la plus grande contrainte principale,

$$\sigma_1 = \frac{1+Q_m^2}{1-Q_m^2} p$$

Cette contrainte doit être limitée à R_m/s_m où R_m est la limite de rupture et s_m , le coefficient de sécurité qui, en vertu de la gravité d'une rupture fragile, doit être pris égal à 2 au moins. Il en résulte la condition

$$p_{adm} = \frac{1 - Q_m^2}{1 + Q_m^2} \frac{R_m}{s_m} \quad s_m \geq 2$$

• Pour un moyeu *ductile* (acier), le mode de mise hors service est l'écoulement plastique. La contrainte de comparaison de Tresca vaut

$$\sigma_T = \frac{2p}{1 - Q_m^2}$$

Elle doit être limitée à R_e/s_e où R_e est la limite élastique, et s_e la sécurité qui doit être prise au moins égale à 1,25. Le risque est en effet moins grand et, du reste, il est possible de réaliser des frettages en régime plastique, ce que nous n'envisagerons pas ici (voir par exemple [1]). Il en résulte la condition

$$p_{adm} = \frac{1 - Q_m^2}{2} \frac{R_e}{s_e}$$

Cette pression admissible étant définie, on calcule l'interférence admissible par

$$\frac{\delta_{adm}}{d} = (C_a + C_m)p$$

d) Choix de l'ajustement

L'alésage sera choisi d'un degré de tolérance $n = 8, 7$ ou 6 , par ordre de préférence. Le degré de tolérance de l'arbre sera $(n - 1)$. On devra donc avoir

$$IT_n + IT_{n-1} \leq \delta_{adm} - \delta_{requis}$$

On commence donc par établir un tableau de la forme

n	IT _n	IT _{n-1}	IT _n +IT _{n-1}	?
8	*	*	*	NON
7	*	*	*	OK
6	*	*	*	OK

Il faut choisir la plus grande valeur de n qui convient. En cas d'échec, il faut augmenter le diamètre de la portée ou la longueur de l'assemblage, sans pour autant dépasser $\ell/d = 2$. Ceci illustre le caractère itératif dont il a été fait mention au début du cours. On cherche alors des ajustements tels que

$$\delta_M \leq \delta_{adm} \quad \text{et} \quad \delta_m \geq \delta_{requis}$$

2.6.3 – Freins et embrayages à friction

Les *freins* sont des dispositifs destinés à transformer l'énergie cinétique en chaleur. Dans un frein à disque, par exemple, deux plaquettes fixes sont serrées sur un disque tournant. Le problème essentiel des freins est l'*échauffement*. Au-delà d'une certaine température, les garnitures (FERODO) s'usent très vite.

Les *embrayages à friction* sont des systèmes où on établit la liaison de deux arbres coaxiaux par adhérence d'un disque entre une mâchoire et un plateau. (Nous parlons ici de l'embrayage monodisque à sec, mais il existe d'autres types d'embrayages.) En augmentant progressivement la pression de la mâchoire, on peut ainsi faire démarrer un arbre en douceur, une partie de la puissance étant transformée en chaleur du fait du glissement. Une fois serré, et c'est généralement sa position de repos, l'embrayage ne patine plus, sauf usure exagérée des garnitures du disque. L'embrayage est un cas typique de transmission par effort.

2.6.4 – Courroies

Les courroies transmettent de la puissance par frottement. Le fonctionnement de la transmission est régi par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, que nous étudierons dans le cadre d'une description *eulérienne*.

2.6.4.1 – Relation entre la masse linéique et l'allongement

Considérons un élément de courroie de masse m . A l'état relaxé, cet élément de courroie a une longueur ℓ_0 et la masse linéique est donc donnée par

$$m'_0 = \frac{m}{\ell_0}$$

En service, cet élément de courroie est soumis à des efforts et prend donc un allongement proportionnel ε . Sa longueur est donc $\ell = \ell_0(1 + \varepsilon)$, si bien que sa masse linéique devient

$$m' = \frac{m}{\ell} = \frac{m}{\ell_0(1 + \varepsilon)} = \frac{m'_0}{1 + \varepsilon}$$

2.6.4.2 – Conservation du débit massique

Le débit massique

$$G = m'v$$

se conserve d'un point à l'autre de la courroie, car dans le cas contraire, on verrait de la masse s'accumuler en certains endroits. Tenant compte de la relation entre m' et m'_0 , on a

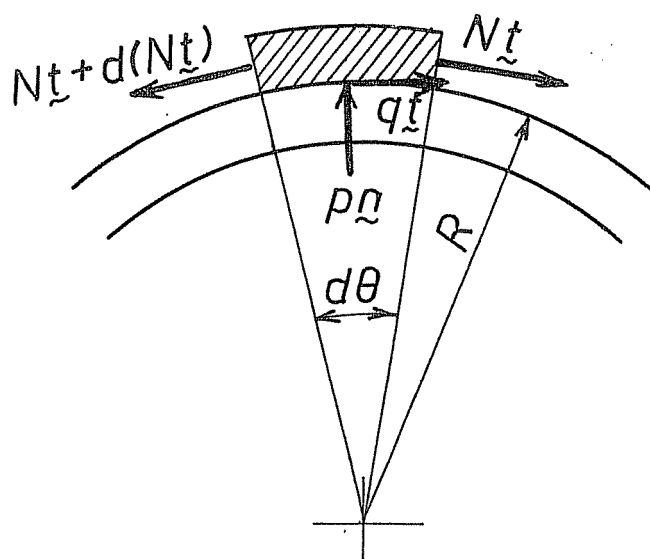


FIG. 95

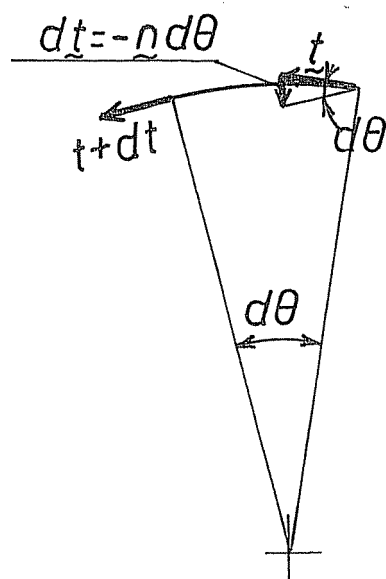


FIG. 96

$$G = \frac{m'_0}{1 + \varepsilon} v$$

Comme le débit et m'_0 se conservent tous deux, on arrive à la conclusion que le groupement

$$v_0 = \frac{v}{1 + \varepsilon}$$

se conserve également et que l'on peut écrire

$$G = m'_0 v_0$$

La grandeur v_0 est la vitesse *fictive* qui mènerait au même débit si la courroie ne s'allongeait pas.

2.6.4.3 – Conservation de la quantité de mouvement

Considérons (*fig. 95*) un élément de courroie d'angle $d\varphi$ sur une poulie de rayon R . La poulie lui applique des forces normales p par unité de longueur et des forces tangentielles q par unité de longueur. Par convention, ces dernières sont opposées au mouvement (*convention de la poulie réceptrice*). Les éléments du bilan des quantités de mouvement s'établissent comme suit :

- Q.M. entrante..... $Gv\mathbf{t}$
- Q.M. sortante..... $G(v + dv)(\mathbf{t} + d\mathbf{t})$
- Forces appliquées..... $-N\mathbf{t} + (N + dN)(\mathbf{t} + d\mathbf{t}) - q\mathbf{t}Rd\theta + p\mathbf{n}Rd\theta$

Le bilan s'écrit

$$\text{Q.M. sortante} = \text{Q.M. entrante} + \text{Forces appliquées}$$

soit explicitement

$$Gv d\mathbf{t} + G dv \mathbf{t} = N d\mathbf{t} + dN \mathbf{t} - q \mathbf{t} R d\theta + p \mathbf{n} R d\theta$$

Tenant compte de la relation géométrique classique

$$d\mathbf{t} = -\mathbf{n} d\theta$$

du reste illustrée en figure 96, on obtient les deux équations projetées

$$\begin{aligned} \text{selon } \mathbf{t}: \quad & (dN - G dv) = qR \\ \text{selon } \mathbf{n}: \quad & (N - Gv) = pR \end{aligned}$$

On notera que comme $dG = 0$, la première équation s'écrit encore

$$d(N - Gv) = qR$$

On voit ainsi apparaître dans les deux équations le même groupement

$$\bar{N} = N - Gv = N - m'v^2 = N - m'_0 v_0 v = N - m'_0 v_0^2 (1 + \varepsilon)$$

que nous appellerons *effort à l'arrêt* parce qu'il se confond avec N si la vitesse est nulle. Cet effort vérifie les équations

$$\begin{aligned}\bar{N} &= pR \\ \frac{d\bar{N}}{d\theta} &= qR\end{aligned}$$

2.6.4.4 – L'alternative de glissement

Calculons la dérivée de l'effort à l'arrêt par rapport à la déformation. La dernière expression donnée ci-dessus pour cet effort mène directement à

$$\frac{d\bar{N}}{d\varepsilon} = \frac{dN}{d\varepsilon} - m'_0 v^2 = ES - m'_0 v_0^2$$

où E et S sont respectivement le module de Young et la section de la courroie. Cette dérivée est positive pour

$$v_0 < \sqrt{\frac{ES}{m'_0}} = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

où ρ_0 est la masse volumique de la courroie relaxée. On reconnaît dans le dernier membre la *célérité du son* (notée c) dans la courroie, qui est toujours bien supérieure à v_0 dans les transmissions. En effet, des données réalistes sont [3] $E = 500\text{Mpa}$, $\rho_0 = 1000\text{kg/m}^3$, ce qui donne

$$c = \sqrt{\frac{500 \cdot 10^6}{1000}} = 707,1\text{m/s}$$

alors que les vitesses atteintes par les courroies ne dépassent guère 50m/s . En conséquence, nous pouvons affirmer que $d\bar{N}/d\varepsilon$ est *positif*.

Mais alors, l'équilibre combiné aux lois de frottement implique

$$q \neq 0 \Rightarrow \frac{d\bar{N}}{d\theta} \neq 0 \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{d\theta} \neq 0 \Rightarrow \frac{dv}{d\theta} \neq 0 \Rightarrow \text{il y a glissement} \Rightarrow |q| = \mu p$$

A l'inverse,

$$|q| < \mu p \Rightarrow \text{il y a adhérence} \Rightarrow \frac{dv}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{d\theta} \Rightarrow \frac{d\bar{N}}{d\theta} = 0 \Rightarrow q = 0$$

Ainsi, seules deux situations sont possibles :

- 1) Glissement avec transmission d'un effort tangentiel μp
- 2) Adhérence sans transmission d'effort tangentiel.

En d'autres termes, *la courroie ne peut transmettre un effort qu'en glissant.*

2.6.4.5 – Où se produit le glissement ?

A priori, on pourrait admettre que sur l'arc d'enroulement de la courroie, se succèdent des arcs de glissement que l'on peut nommer *arcs de travail* et des arcs d'adhérence encore appelés *arcs de repos*. Il n'en est rien. En effet, les forces de frottement s'opposent toujours au mouvement relatif. Par conséquent, on a $q > 0$ si la courroie va plus vite que la poulie ($v > \omega R$) et $q < 0$ si elle va plus lentement que la poulie ($v < \omega R$). Donc on a dans tous les cas

$$q(v - \omega R) \geq 0$$

ce qui entraîne successivement

$$\frac{d\bar{N}}{d\theta}(v - \omega R) \geq 0$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta}(v - \omega R) \geq 0$$

$$\frac{dv}{d\theta}(v - \omega R) \geq 0$$

soit encore

$$\frac{d}{d\theta}[(v - \omega R)^2] \geq 0$$

Par conséquent, la vitesse de glissement ne peut qu'augmenter le long de la poulie, ce qui implique qu'*il ne peut exister qu'un seul arc de repos d'un seul tenant, à l'entrée de la poulie.*

2.6.4.6 – Arcs de repos et arcs de travail

En dehors du cas du glissement franc (frein à courroie, fig. 97), il existe normalement sur chacune des poulies, prise dans le sens du mouvement, un *arc de repos* d'angle α_r où la courroie adhère à la poulie sans transmettre d'effort et un *arc de travail* où la courroie change de vitesse pour transmettre un effort. Sur la poulie motrice, la courroie ralentit et sur la poulie réceptrice, elle accélère. Dans l'arc de travail de la poulie réceptrice, la combinaison des deux équations d'équilibre

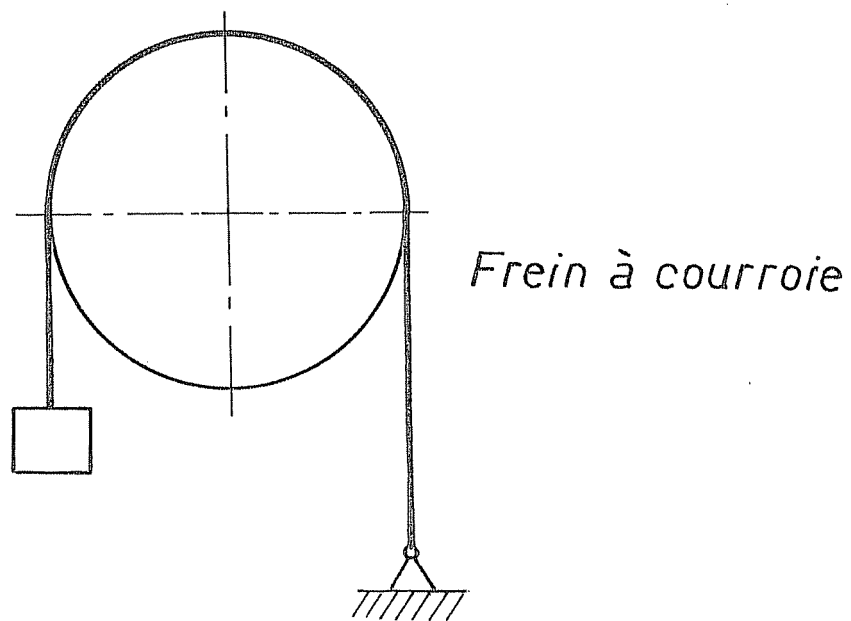


FIG. 97

$$\frac{d\bar{N}}{d\theta} = \mu p R \quad \bar{N} = p R$$

conduit à l'équation différentielle

$$\frac{d\bar{N}}{d\theta} - \mu \bar{N} = 0$$

dont la solution est

$$\bar{N} = \bar{t} e^{\mu\theta}$$

où $\bar{t}$ est l'effort à l'arrêt du *brin mou*. L'effort à l'arrêt du *brin tendu* est donc

$$\bar{T} = \bar{t} e^{\mu\alpha_t}$$

où α_t est l'arc de travail. La même équation différentielle s'applique à la poulie motrice, à condition de remplacer μ par $(-\mu)$, car les efforts tangentiels sont en sens opposé. Comme les efforts dans les brins sont les mêmes pour les deux poulies, on doit avoir

$$\frac{\bar{T}}{\bar{t}} = \exp[(\mu\alpha_t)_{MOT}] = \exp[(\mu\alpha_t)_{REC}]$$

ce qui implique l'égalité du groupement $\mu\alpha_t$ sur les deux poulies. Si l'on fait croître progressivement l'effort transmis, en gardant constant l'effort dans le brin mou, pour fixer les idées, les arcs de travail vont croître simultanément sur les deux poulies, jusqu'à ce que sur la plus petite d'entre elles, il s'étende à tout l'arc embrassé. A ce moment, il y a glissement tout au long de cette poulie, et la relation entre les vitesses est perdue. En somme, on peut dire les choses ainsi : transmettre la puissance, c'est transmettre la force *et* la vitesse ; l'arc de travail transmet la force $Q = \bar{T} - \bar{t}$, mais la transmission de la vitesse est le rôle de l'arc de repos, qui est donc *nécessaire*.

2.6.4.7 – Rendement d'une transmission à courroie

Le *rendement* d'une transmission par courroie est lié à la variation de la vitesse de la courroie. Les deux poulies s'échangent exactement l'effort Q . Mais à l'entrée de la poulie motrice, la vitesse de la courroie est celle du brin tendu, donc

$$(\omega R)_{MOT} = v_0 \left(1 + \frac{T}{ES}\right)$$

Au contraire, à l'entrée de la poulie réceptrice, la vitesse de la courroie est celle du brin mou, si bien que

$$(\omega R)_{REC} = v_0 \left(1 + \frac{t}{ES}\right)$$

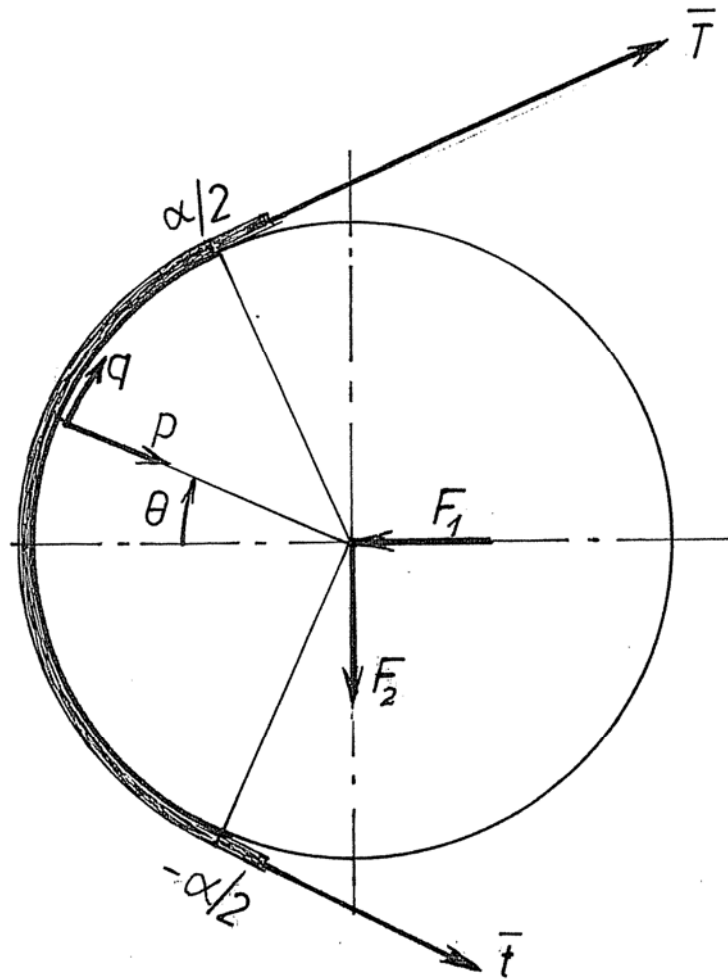


FIG. 98

Le rendement vaut donc

$$\eta = \frac{(\omega R)_{REC}}{(\omega R)_{MOT}} = \frac{1 + \frac{t}{ES}}{1 + \frac{T}{ES}}$$

Comme les efforts sont petits devant la raideur en extension ES , on peut écrire approximativement

$$\begin{aligned}\eta &\approx 1 - \frac{T-t}{ES} = 1 - \frac{\bar{T} + m'_0 v_0^2 (1 + \varepsilon_T) - \bar{t} - m'_0 v_0^2 (1 + \varepsilon_t)}{ES} = \\ &= 1 - \frac{Q + m'_0 v_0^2 \frac{T-t}{ES}}{ES} = 1 - \frac{Q + m'_0 v_0^2 (1 - \eta)}{ES}\end{aligned}$$

En se rappelant que le groupement

$$c = \sqrt{\frac{ES}{m'_0}}$$

n'est autre que la célérité du son, on obtient ainsi

$$\eta \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right) = 1 - \frac{Q}{ES}$$

La vitesse de la courroie ne dépasse jamais 50 m/s. La célérité du son est de l'ordre de 700 m/s. On commet donc une erreur par défaut de moins d'un demi pourcent sur le rendement en écrivant la relation

$$\eta = 1 - \frac{Q}{ES}$$

classique dans la littérature. Ce qu'il faut remarquer, c'est que le rendement est d'autant plus faible que l'effort transmis Q est plus grand.

2.6.4.8 – Efforts sur les arbres

Une caractérisation essentielle des transmissions par courroie est le fait qu'elles soumettent les arbres à des efforts importants. Considérons (*fig. 98*) une poulie réceptrice. La réaction de l'arbre équilibre les efforts transmis par la courroie à la poulie. La composante F_l de cette réaction dans la direction de la bissectrice des deux brins est donnée par

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} R(q \sin \theta + p \cos \theta) d\theta = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} R \left(\frac{d\bar{N}}{d\theta} \sin \theta + \bar{N} \cos \theta \right) d\theta = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} R \frac{d}{d\theta} (\bar{N} \sin \theta) d\theta \\
&= \bar{T} \sin \frac{\alpha}{2} - \bar{t} \sin \left(-\frac{\alpha}{2} \right) = (\bar{T} + \bar{t}) \sin \frac{\alpha}{2} = 2\bar{N}_0 \sin \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

en introduisant la *tension moyenne à l'arrêt*

$$\bar{N}_0 = \frac{\bar{T} + \bar{t}}{2}$$

encore appelée improprement *tension de pose*. (Dans le cas d'une transmission à entraxe constant, elle n'est que *très approximativement* égale à la tension de pose.)

La composante F_2 perpendiculaire à la précédente et tournée vers le brin mou est donné par

$$\begin{aligned}
F_2 &= \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} R(q \cos \theta - p \sin \theta) d\theta = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} R \left(\frac{d\bar{N}}{d\theta} \cos \theta - \bar{N} \sin \theta \right) d\theta = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} R \frac{d}{d\theta} (\bar{N} \cos \theta) d\theta \\
&= \bar{T} \cos \frac{\alpha}{2} - \bar{t} \cos \left(-\frac{\alpha}{2} \right) = (\bar{T} - \bar{t}) \cos \frac{\alpha}{2} = Q \cos \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

Les mêmes calculs valent pour la poulie motrice, mais les réactions sont évidemment opposées. Ce qui paraît paradoxal, c'est le fait que les arbres sont en fait sollicités par les tensions à l'arrêt et non par les tensions totales T et t . C'est que le terme $m'v^2$ est en fait la force centrifuge que subit la courroie en s'enroulant sur les poulies. Cette force centrifuge est équilibrée par les brins et l'allongement qui s'ensuit *diminue* la pression de la courroie sur la poulie.

2.6.4.9 – Relation entre la tension moyenne au repos et la force transmise

On sait que

$$\bar{T} = \bar{t} e^{\mu \alpha_t}$$

mais α_t n'est pas connu *a priori*. La pratique courante consiste à écrire

$$\bar{T} = \bar{t} e^{\tilde{\mu} \alpha_p}$$

où α_p est *le plus petit* des deux arcs embrassés, et $\tilde{\mu}$ est un coefficient de frottement équivalent dont la définition théorique est

$$\tilde{\mu} = \mu \frac{\alpha_t}{\alpha_p}$$

Il contient donc implicitement compte d'un rapport α_t / α_p inférieur à l'unité, ce qui donne une sécurité par rapport au glissement. Voici quelques valeurs de $\tilde{\mu}$:

COURROIE	$\tilde{\mu}$
Cuir côté poil	$0,3+v/(100\text{m/s})$
Cuir côté chair	$0,2+v/(100\text{m/s})$
Coton	0,3
Soie artificielle imprégnée	0,35
Synthétique	0,5

Pratiquement, on connaît Q . On détermine alors la tension moyenne à l'arrêt par la relation

$$\frac{Q}{2N_0} = \frac{\bar{T} - \bar{t}}{\bar{T} + \bar{t}} = \frac{e^{\tilde{\mu}\alpha} - 1}{e^{\tilde{\mu}\alpha} + 1} = th\left(\frac{\tilde{\mu}\alpha}{2}\right)$$

ce qui permet de calculer les efforts supportés par les axes.

2.6.4.10 – Courroies trapézoïdales

Les *courroies trapézoïdales* permettent d'obtenir un frottement équivalent plus grand que les courroies plates. En effet (*fig. 99*), elles reposent sur leurs flancs, qui sont inclinés. Les forces de pression par unité de longueur p_l sur chaque flanc ont une résultante radiale

$$p = 2p_l \sin \frac{\delta}{2}$$

Les efforts tangentiels sur les flancs sont, par unité de longueur, q_l sur chaque flanc. Lors du glissement, elles sont liées aux forces de pression par unité de longueur p_l par la relation

$$q_l = \mu_1 p_l$$

où μ_1 est le coefficient de frottement entre la courroie et les flasques de la poulie. La résultante de ces efforts tangentiels est

$$q = 2q_l = 2\mu_1 \frac{p}{2 \sin \frac{\delta}{2}} = \mu_1 \frac{p}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

On se ramène donc à la théorie des courroies plates en introduisant le *coefficient de frottement équivalent*

$$\mu = \frac{q}{p} = \frac{\mu_1}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

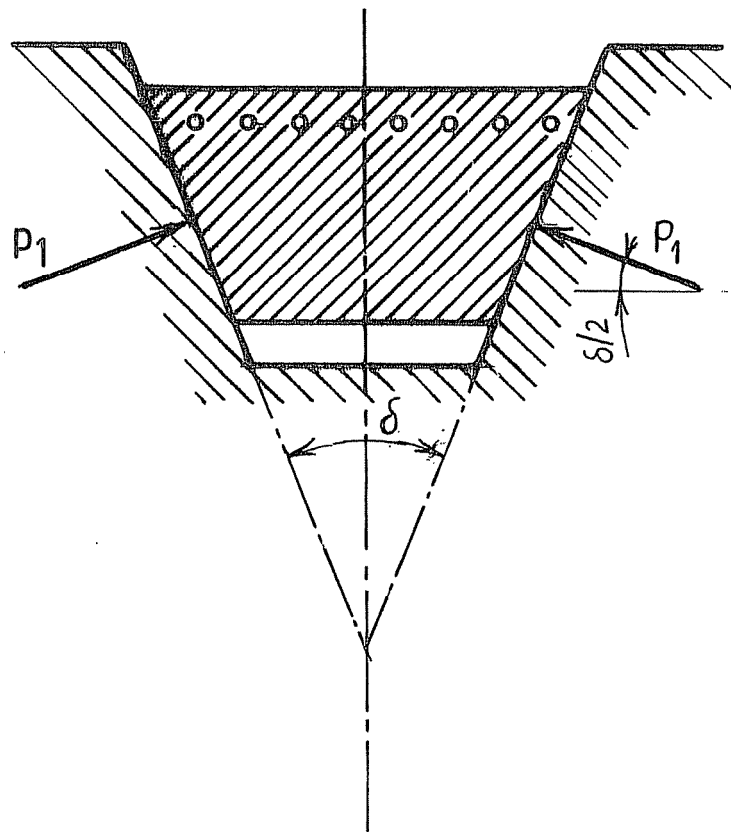


FIG. 99

En pratique, l'angle δ est de l'ordre de 34° , ce qui donne

$$\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} = 3,420$$

On obtient ainsi des coefficients de frottement équivalents de l'ordre de 1 à 2,5. Les courroies trapézoïdales peuvent donc transmettre un effort plus grand pour la même tension moyenne à l'arrêt. Mais elles ne permettent pas de travailler avec des vitesses aussi grandes que les courroies plates. On ne dépasse guère, avec des courroies trapézoïdales, 30 m/s.

2.6.4.11 – Vitesse optimale d'une courroie

Soit à réaliser une transmission entre deux arbres dont on donne les fréquences de rotation. On donne en outre le type et la section de la courroie. On peut, sauf problèmes éventuels d'encombrement, choisir le diamètre des deux poulies, étant entendu que le rapport des deux diamètres est l'inverse du rapport de transmission. Choisir le diamètre d de la *petite* poulie calée sur l'arbre rapide (tournant à la fréquence de rotation N donnée) revient à choisir la vitesse v de la courroie puisque, en négligeant la très faible variation de vitesse de la courroie, on a

$$v = \pi d N$$

La puissance vaut

$$P = Qv = \left(1 - e^{-\tilde{\mu}\alpha_p}\right) \bar{T}v = \left(1 - e^{-\tilde{\mu}\alpha_p}\right) (T_v - m'v^3)$$

Dans cette relation, on a fait apparaître la grande tension T , car c'est elle qui est dimensionnante pour la tenue de la courroie. Si S est la section de la courroie, on associe à la tension T la contrainte nominale d'extension

$$\sigma_e = \frac{T}{S}$$

En l'absence de flexion, la limite de cette contrainte est $\sigma_{e\lim}$. Le passage sur la plus petite poulie entraîne une contrainte de flexion de la forme

$$\sigma_f = E_f \frac{h}{d}$$

où h est l'épaisseur de la courroie. La limite de cette contrainte est $\sigma_{f\lim}$. Elle correspond par la relation ci-dessus à un diamètre limite (limite inférieure !) $d_{\lim}$. La mise hors service sous ces deux contraintes aura lieu si

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_{e \text{ lim}}} + \frac{\sigma_f}{\sigma_{f \text{ lim}}} = 1$$

Le fonctionnement adopté aura une sécurité s si l'état $(s\sigma_e, s\sigma_f)$ vérifie la condition de mise hors service ci-dessus, ce qui signifie que la sécurité s est donnée par

$$\frac{1}{s} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{e \text{ lim}}} + \frac{\sigma_f}{\sigma_{f \text{ lim}}} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{e \text{ lim}}} + \frac{d_{\text{lim}}}{d}$$

On en tire la contrainte d'extension admissible

$$\sigma_e = \sigma_{e \text{ lim}} \left(\frac{1}{s} - \frac{d_{\text{lim}}}{d} \right)$$

Introduisant ce résultat dans la formule de la puissance, on obtient, en se rappelant que $m' = \rho S$,

$$P = \left(1 - e^{-\tilde{\mu}\alpha_p} \right) S \left[\sigma_{e \text{ lim}} \left(\frac{1}{s} - \frac{d_{\text{lim}}}{d} \right) v - \rho v^3 \right]$$

Remarquant que $\frac{v}{d} = 2\pi N$, on obtient finalement

$$P = \left(1 - e^{-\tilde{\mu}\alpha_p} \right) S \left[\frac{\sigma_{e \text{ lim}}}{s} v - \sigma_{e \text{ lim}} \pi d_{\text{lim}} N - \rho v^3 \right]$$

On constate qu'à mesure que la vitesse croît, à partir de zéro, la puissance commence par croître linéairement avec elle, mais qu'elle passe par un maximum pour ensuite décroître. La vitesse conduisant au maximum, dite *vitesse optimale*, est la solution de l'équation

$$\frac{\sigma_{e \text{ lim}}}{s} - 3\rho v^2 = 0$$

c'est-à-dire

$$v_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\left(\frac{\sigma_{e \text{ lim}}}{s} \right)}{\rho}}$$

On notera qu'elle ne dépend pas de la limite de flexion. Par contre, la puissance en dépend.

Cette vitesse ne peut pas toujours être atteinte, car à une grande vitesse correspond de grands diamètres d et D des poulies, ce qui entraîne la nécessité d'adopter un plus grand entraxe. En effet, il est généralement admis que l'entraxe e doit vérifier la relation

$$e \geq 0,7(D + d)$$

2.6.5 – Arc-boutement

L'arc-boutement est le fait qu'un mécanisme se coince à cause du frottement. Le cas le plus caractéristique est celui du guidage en translation. La figure 100 représente un coulisseau de longueur ℓ sollicité par une force F agissant dans la direction du mouvement, mais excentrée d'une longueur x par rapport à l'axe du guidage. La manière la plus simple de décrire le problème consiste à introduire la notion de *rendement* du système. Supposons qu'il y a mouvement. Sous l'effet de l'effort appliqué F , le coulisseau s'incline légèrement, et son contact avec les bords du guidage se concentre aux angles 1 et 2, où naissent des réactions normales N_1 et N_2 et des réactions de frottement T_1 et T_2 . Ces dernières s'opposent au mouvement, si bien que la force réellement utilisable pour vaincre une résistance est

$$F_{ut} = F - T_1 - T_2$$

Il est donc naturel d'introduire le rendement

$$\eta = \frac{F_{ut}}{F}$$

qui doit être positif pour que la force F puisse faire avancer le coulisseau en vainquant une force antagoniste. Pour déterminer ce rendement, écrivons les équations d'équilibre :

- *Equilibre dans la direction perpendiculaire à F :*

$$N_1 = N_2 = N$$

Il en découle immédiatement que les forces de frottement T_1 et T_2 auront la même valeur

$$T_1 = T_2 = T = \mu N$$

où μ est le coefficient de frottement supposé identique des deux côtés.

- *Equilibre de rotation :*

$$(N_1 + N_2) \frac{\ell}{2} = Fx$$

soit

$$N\ell = Fx$$

- *Rendement :*

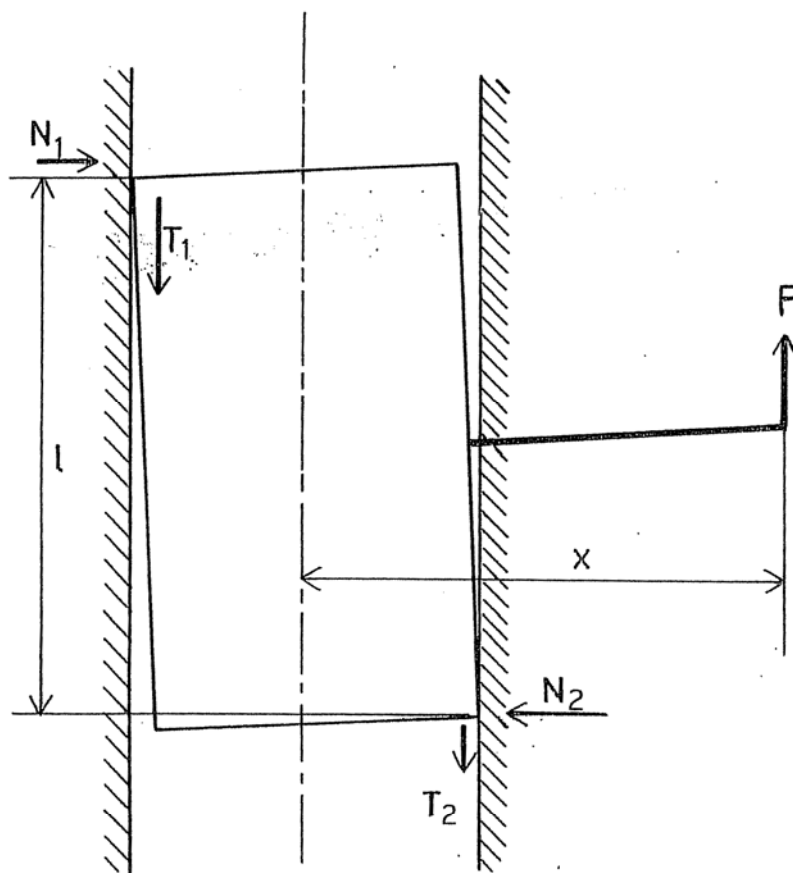


FIG. 100

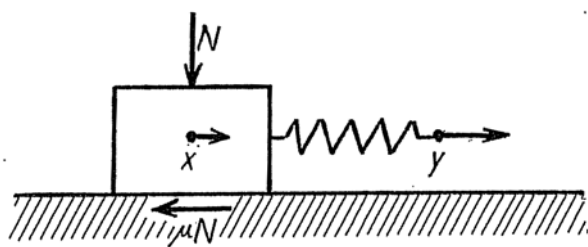


FIG. 101

$$\eta = \frac{F - 2\mu N}{F} = \frac{F - 2\mu F \frac{x}{\ell}}{F} = 1 - 2\mu \frac{x}{\ell}$$

Ce rendement n'est strictement positif que si

$$x < \frac{\ell}{2\mu}$$

Au-delà de cette valeur de l'excentrement, le mouvement sous l'effet de la charge F devient impossible : il y a *arc-boutement*.

Il faut retenir de ceci que les guidages en translation doivent être suffisamment longs ou avoir très peu de frottement (d'où l'intérêt des fourreaux à billes). Plus généralement, *les guidages en translation sont à éviter autant que possible, car ils sont à la source de nombreux ennuis à cause du frottement*. Il existe évidemment des cas où l'on ne peut pas s'en passer, mais il faut alors avoir bien en tête le problème de l'arc-boutement.

2.6.6 – Le broutage

2.6.6.1- Introduction

Il existe un état intermédiaire entre le glissement tranquille et l'arc-boutement, caractérisé par un mouvement intermittent : c'est le *broutage (stick-slip)*. Ce phénomène est en grande partie dû au fait que le coefficient de frottement statique et le coefficient de frottement cinétique sont différents, mais il existe déjà à l'état naissant quand les deux coefficients sont égaux.

2.6.6.2 – Le cas d'un coefficient de frottement cinétique égal au coefficient de frottement au repos

Considérons le système représenté en figure 101. Il s'agit d'un chariot glissant sur une surface, tiré par une commande en déplacement, à travers un système idéalisé par un ressort de raideur k . La commande en déplacement est supposée avoir une vitesse constante $\dot{y} = v$. La coordonnée x du chariot et la coordonnée y de la commande sont choisies de manière à valoir zéro au départ, le ressort étant relaxé. Lorsque la commande démarre, en $t = 0$, le chariot reste sur place et il en est ainsi jusqu'à ce que l'effort appliqué par le ressort égale la réaction de frottement $F_f = \mu N$, N étant la force normale appliquée au chariot. Le repos du chariot subsiste donc jusqu'à ce que la commande y prenne la valeur y_0 donnée par

$$ky_0 = F_f$$

soit jusqu'à l'instant t_0 tel que

$$t_0 = \frac{y_0}{v} = \frac{F_f}{kv}$$

A ce moment, le chariot commence à se mouvoir et l'équation de son mouvement est

$$m\ddot{x} = k(y - x) - F_f$$

soit

$$m\ddot{x} + kx = ky - F_f = k(y - y_0) = kv(t - t_0)$$

En introduisant pour la simplicité des écritures le temps $\tau = t - t_0$, on obtient

$$m\ddot{x} + kx = kv\tau$$

Divisons cette équation par m et introduisons la pulsation propre du système donnée par

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

On obtient

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 v\tau$$

La solution générale de l'équation homogène est de la forme

$$x_h = A \cos \omega\tau + B \sin \omega\tau$$

Une solution particulière évidente de l'équation complète est

$$x_p = v\tau$$

La solution est donc de la forme

$$x = x_h + x_p = A \cos \omega\tau + B \sin \omega\tau + v\tau$$

et, par dérivation, on obtient

$$\dot{x} = -\omega A \sin \omega\tau + \omega B \cos \omega\tau + v$$

En $\tau = 0$, le déplacement et la vitesse du chariot sont nuls. On a donc

$$0 = x(0) = A$$

$$0 = \dot{x}(0) = \omega B + v$$

ce qui donne successivement

$$x = -\frac{v}{\omega} \sin \omega \tau + v \tau$$

$$\dot{x} = v(1 - \cos \omega \tau)$$

Analysant ces résultats, on constate que la vitesse commence par augmenter jusqu'à une valeur double de v pour $\omega \tau = \pi$, puis diminue, jusqu'à s'annuler pour $\omega \tau = 2\pi$. A ce moment,

$$x = v \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{et} \quad y = v \left(\frac{2\pi}{\omega} + t_0 \right)$$

donc

$$k(y - x) = kv t_0 = F_f$$

ce qui signifie que le mouvement recommence comme en $t = t_0$. Au total, le mouvement est pulsé, oscillant périodiquement entre une vitesse double de v et une vitesse nulle. On est donc loin du mouvement calme que l'on aurait pu imaginer. Il s'agit en fait d'un *broutage naissant*.

2.6.6.3 – Le cas d'un coefficient de frottement cinétique inférieur au coefficient de frottement au repos.

Dans ce cas, nous admettrons le modèle de frottement suivant :

- Pour $\dot{x} = 0$, la force de frottement vaut $F_{f0} = \mu_0 N$
- Pour $\dot{x} \neq 0$, elle vaut $F_f = \mu N$, avec $\mu < \mu_0$

Le raisonnement commence comme ci-dessus. Le chariot reste au repos jusqu'à ce que

$$ky_0 = F_{f0} \quad \text{soit} \quad t_0 = \frac{F_{f0}}{kv}$$

On pose encore $\tau = t - t_0$. A l'instant t_0 , le chariot commence à se déplacer et la force de frottement tombe à F_f . L'équation du mouvement est alors

$$m\ddot{x} = k(y - x) - F_f$$

soit

$$m\ddot{x} + kx = ky - F_f = ky - F_{f0} + (F_{f0} - F_f) = kv(t - t_0) + (F_{f0} - F_f) = kv\tau + (F_{f0} - F_f)$$

Divisons l'équation par m , introduisons encore la pulsation propre ω comme ci-dessus, ainsi que le *nombre de broutage*

$$\beta = \frac{F_{f0} - F_f}{m\omega v}$$

Il vient

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 v \tau + \beta \omega v$$

On vérifie aisément que la solution générale de cette équation est de la forme

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega \tau + B \sin \omega \tau + v \tau + \beta \frac{v}{\omega} \\ \dot{x} &= -\omega A \sin \omega \tau + \omega B \cos \omega \tau + v \end{aligned}$$

En $\tau = 0$, on a les conditions

$$\begin{aligned} 0 = x(0) &= A + \beta \frac{v}{\omega} & \text{soit} & \quad A = -\beta \frac{v}{\omega} \\ 0 = \dot{x}(0) &= \omega B + v & \text{soit} & \quad B = -\frac{v}{\omega} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$x = \beta \frac{v}{\omega} (1 - \cos \omega \tau) + v \tau - \frac{v}{\omega} \sin \omega \tau$$

et

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \beta v \sin \omega \tau + v(1 - \cos \omega \tau) = v(1 - \cos \omega \tau + \beta \sin \omega \tau) \\ &= 2v \left(\sin^2 \frac{\omega \tau}{2} + \beta \sin \frac{\omega \tau}{2} \cos \frac{\omega \tau}{2} \right) \\ &= 2v \sin \frac{\omega \tau}{2} \left(\sin \frac{\omega \tau}{2} + \beta \cos \frac{\omega \tau}{2} \right) \end{aligned}$$

On observe que cette vitesse s'annule la première fois en un instant τ^* vérifiant

$$\operatorname{tg} \frac{\omega \tau^*}{2} = -\beta$$

Ceci se produit pour la première fois dans le second quadrant et auparavant, la vitesse est toujours positive, car $\sin \frac{\omega \tau}{2} > 0$. Au moment de cet arrêt, on a

$$\begin{aligned}
v\tau^* - x(\tau^*) &= \frac{v}{\omega} [\sin \omega\tau^* - \beta(1 - \cos \omega\tau^*)] \\
&= 2 \frac{v}{\omega} \sin \frac{\omega\tau^*}{2} \left[\cos \frac{\omega\tau^*}{2} - \beta \sin \frac{\omega\tau^*}{2} \right] \\
&= 2 \frac{v}{\omega} \sin \frac{\omega\tau^*}{2} \left[\cos \frac{\omega\tau^*}{2} + \operatorname{tg} \frac{\omega\tau^*}{2} \sin \frac{\omega\tau^*}{2} \right] \\
&= 2 \frac{v}{\omega} \operatorname{tg} \frac{\omega\tau^*}{2} \left(\cos^2 \frac{\omega\tau^*}{2} + \sin^2 \frac{\omega\tau^*}{2} \right) = -2\beta \frac{v}{\omega} \\
&= -2 \frac{F_{f0} - F_f}{m\omega^2} = -2 \frac{F_{f0} - F_f}{k}
\end{aligned}$$

La force appliquée par le ressort à ce moment vaut donc

$$F_{\text{ressort}} = k(y_0 + v\tau^* - x(\tau^*)) = F_{f0} - 2(F_{f0} - F_f) = 2F_f - F_0$$

Comme le chariot est arrêté, la force de frottement à vaincre pour le remettre en mouvement vaut à nouveau F_{f0} . On constate que le chariot ne peut avancer, car

$$2F_f - F_{f0} < F_{f0} \quad \text{puisque} \quad F_f < F_{f0}$$

Il ne peut pas non plus reculer car la force vers l'arrière vérifie

$$F_{f0} - 2F_f < F_{f0} \quad \text{puisque} \quad F_f > 0$$

Le chariot reste donc au repos, et le ressort se tend progressivement jusqu'à ce que sa force de traction égale à nouveau F_{f0} . Le mouvement reprend alors comme ci-dessus.

*Ainsi, le mouvement est saccadé, se caractérisant par une suite de périodes d'arrêt et de périodes de mouvement effectif. C'est ce que l'on appelle le **broutage**, en anglais, **stick-slip**.*

Le broutage étant périodique, il émet un *bruit*. Ce sont les grincements de charnières, par exemple. Dans le cas où l'on doit commander un mouvement régulier, comme dans les machines-outils, par exemple, le broutage est inadmissible.

On notera du reste que c'est le broutage qui explique le fonctionnement du violon où l'archet commence par entraîner la corde puis, quand l'effort dépasse la réaction de frottement, la corde glisse. Ce glissement s'accélère puis ralentit sous l'effet de la raideur de la corde, pour arriver finalement au repos relatif par rapport à l'archet. Alors, tout recommence.

2.6.6.4 – Plus petit déplacement du chariot

Une des caractéristiques des systèmes broutants est que le déplacement se fait toujours par sauts. Supposons par exemple qu'à l'instant où le chariot commence à se mouvoir, on bloque la commande. L'équation différentielle du mouvement est la même que précédemment, mais amputée du terme $\omega^2 v \tau$:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \beta \omega v$$

Sa solution est de la forme

$$x = A \cos \omega \tau + B \sin \omega \tau + \beta \frac{v}{\omega}$$
$$\dot{x} = -\omega A \sin \omega \tau + \omega B \cos \omega \tau$$

et les conditions initiales sont

$$0 = x(0) = A + \beta \frac{v}{\omega} \quad d'o\grave{u} \quad A = -\beta \frac{v}{\omega}$$
$$0 = \dot{x}(0) = B \quad d'o\grave{u} \quad B = 0$$

On obtient donc

$$x = \beta \frac{v}{\omega} (1 - \cos \omega \tau)$$

La vitesse, donnée par

$$\dot{x} = \beta v \sin \omega \tau$$

ne s'annule que pour $\omega \tau = \pi$, ce qui correspond à un déplacement

$$x = 2\beta \frac{v}{\omega}$$

Le chariot ne peut pas repartir, car à ce moment,

$$y - x = \frac{F_{f0}}{k} - 2 \frac{F_{f0} - F_f}{k} = \frac{2F_f - F_{f0}}{k}$$

donc

$$|F_{ressort}| = |2F_f - F_{f0}| < F_{f0}$$

Il existe donc un déplacement minimal, qui vaut

$$x = 2\beta \frac{v}{\omega} = 2 \frac{F_{f0} - F_f}{m\omega v} \frac{v}{\omega} = 2 \frac{F_{f0} - F_f}{m\omega^2} = 2 \frac{F_{f0} - F_f}{k}$$

Ce déplacement minimal est d'autant plus grand que la différence entre F_{f0} et F_f est grande et que la raideur k est faible. Ce phénomène peut être extrêmement gênant si l'on cherche à obtenir des mouvements précis.

2.6.6.5 – Un modèle plus complet [10]

Le modèle précédent laisse croire que le broutage est inévitable dès que la liaison entre la commande et le chariot a une certaine souplesse et que le coefficient de frottement au repos est supérieur au coefficient de frottement en mouvement. En pratique, les choses se présentent différemment, grâce à l'amortissement visqueux qui apparaît dès qu'il y a une lubrification. L'équation de mouvement du chariot s'écrit alors

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{f0} - F_f + kv\tau$$

où c est le coefficient d'amortissement visqueux. En introduisant, outre la pulsation propre ω et le nombre de broutage β , le *taux d'amortissement*

$$\varepsilon = \frac{c}{2m\omega}$$

on obtient

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\omega\dot{x} + \omega^2 x = \beta\omega v + \omega^2 v\tau$$

On vérifie sans peine que la solution générale de cette équation est de la forme

$$x = e^{-\varepsilon\omega\tau} (A \cos \Omega\tau + C \sin \Omega\tau) + (\beta - 2\varepsilon) \frac{v}{\omega} + v\tau$$

où

$$\Omega = \omega\sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

La vitesse correspondante est

$$\dot{x} = e^{-\varepsilon\omega\tau} [(-\varepsilon\omega A + \Omega C) \cos \Omega\tau - (\varepsilon\omega C + \Omega A) \sin \Omega\tau] + v$$

Les conditions initiales $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ impliquent

$$A = (2\varepsilon - \beta) \frac{v}{\omega}$$

$$C = -\frac{v}{\Omega} (1 + \beta\varepsilon - 2\varepsilon^2)$$

On en déduit

$$\Omega C - \varepsilon \omega A = -v$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon \omega C + \Omega A &= v \left(-\frac{\varepsilon \omega}{\Omega} - \frac{\beta \varepsilon^2 \omega}{\Omega} + \frac{2\varepsilon^3 \omega}{\Omega} + 2\varepsilon \frac{\Omega}{\omega} - \beta \frac{\Omega}{\omega} \right) \\ &= v \left(-\frac{\varepsilon \omega}{\Omega} - \frac{\beta}{\Omega \omega} (\Omega^2 + \varepsilon^2 \omega^2) + \frac{2\varepsilon}{\Omega \omega} (\Omega^2 + \varepsilon^2 \omega^2) \right) \\ &= v \left(-\frac{\varepsilon \omega}{\Omega} - \beta \frac{\omega}{\Omega} + 2 \frac{\varepsilon \omega}{\Omega} \right) = -v \frac{\omega}{\Omega} (\beta - \varepsilon) = -v \frac{\beta - \varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

Il est commode de poser

$$\theta = \Omega \tau \quad ; \quad E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad ; \quad B = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

ce qui donne

$$\frac{\dot{x}}{v} = 1 - e^{-E\theta} [\cos \theta - (B - E) \sin \theta]$$

Le broutage se produit si cette vitesse s'annule pour un certain θ positif. Cela signifie que la courbe de la vitesse croise l'axe des θ et que, prolongée, elle aurait un minimum au-dessous de cet axe. Si la vitesse a son minimum positif, il n'y a pas d'arrêt. La limite de broutage correspond donc au cas où le minimum de la vitesse vaut précisément zéro. Il faut, pour la trouver, joindre à la condition d'annulation de la vitesse, la condition supplémentaire

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\dot{x}}{v} \right) = e^{-E\theta} [B \cos \theta + (1 - BE + E^2) \sin \theta]$$

L'annulation de ces deux grandeurs correspond aux deux équations

$$\cos \theta + (B - E) \sin \theta = e^{E\theta}$$

et

$$B \cos \theta + (1 - BE + E^2) \sin \theta = 0 \quad (0)$$

De la première, on tire

$$B = E + \cot g \theta - \frac{e^{E\theta}}{\sin \theta} \quad (1)$$

ce qui, introduit dans la seconde, donne

$$\left(E + \cot g \theta - \frac{e^{E\theta}}{\sin \theta} \right) \cos \theta + \left[1 - E \left(E + \cot g \theta - \frac{e^{E\theta}}{\sin \theta} \right) + E^2 \right] \sin \theta = 0$$

soit, après réduction et multiplication par $\sin \theta$,

$$1 + (E \sin \theta - \cos \theta) e^{E\theta} = 0 \quad (2)$$

Cette équation permet de déterminer θ à partir de E . On peut alors déduire B par la relation (1). On obtient ainsi les valeurs suivantes :

ε	E	θ (rad)	B	β	$1/\beta$
0	0	2π	0	0	∞
0,01	0,01000	5,932	0,3651	0,3650	2,739
0,02	0,02000	5,791	0,5311	0,5310	1,883
0,05	0,05006	5,522	0,9118	0,9106	1,098
0,1	0,1005	5,240	1,478	1,470	0,6802
0,2	0,2041	4,881	2,781	2,725	0,3670
0,5	0,5774	4,263	14,07	12,19	0,08207
0,6	0,7500	4,106	27,91	22,33	0,04479
0,7	0,9802	3,952	68,35	48,81	0,02049
0,8	1,333	3,789	261,9	157,1	$6,365 \cdot 10^{-3}$
0,9	2,065	3,593	3828	1669	$599,2 \cdot 10^{-6}$
1	∞	π	∞	∞	0

La correspondance entre ε et $1/\beta$ est représentée en figure 102. Son allure générale est hyperbolique. Pour ε donné, il y a broutage pour $1/\beta$ inférieure à la valeur indiquée dans le tableau, c'est-à-dire à gauche de la courbe. On notera que $1/\beta$ est proportionnel à la vitesse de commande. *Le broutage n'existe donc qu'à faible vitesse.*

2.6.6.6 – Relations asymptotiques pour les faibles amortissements

Le cas le plus critique est celui des faibles amortissements. Pour les faibles valeurs d' ε , on a, à la limite de broutage,

$$\theta = 2\pi - \Theta$$

avec Θ petit. L'équation (2) ci-dessus, qui s'écrit encore

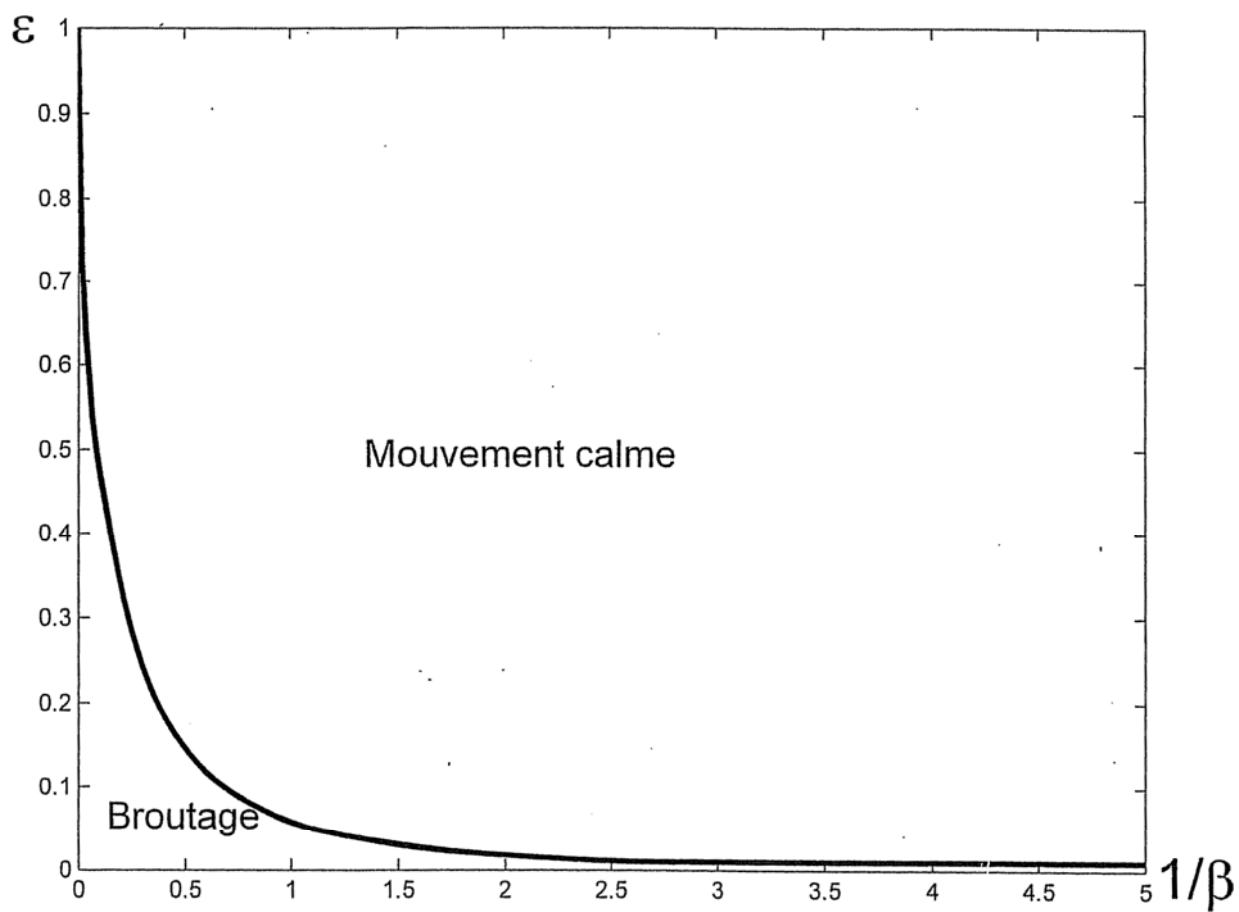


FIG. 102

$$E \sin \theta - \cos \theta + e^{-E\theta} = 0$$

prend alors la forme approchée

$$-E\Theta - \left(1 - \frac{\Theta^2}{2}\right) + 1 - 2\pi E + E\Theta \approx 0$$

dont on déduit

$$\Theta \approx 2\sqrt{\pi E}$$

La relation (0),

$$B \cos \theta + (1 - BE + E^2) \sin \theta = 0$$

se ramène à

$$B \left(1 - \frac{\Theta^2}{2}\right) - (1 - BE + E^2) \approx 0$$

soit, en y introduisant la valeur approchée que nous venons de trouver pour Θ ,

$$B - 2\pi E - (1 - \dots) 2\sqrt{\pi E} \approx 0$$

ce qui donne

$$B \approx 2\sqrt{\pi E}$$

On a donc, pour les faibles amortissements,

$$\frac{B^2}{E} \approx \frac{\beta^2}{\varepsilon} = \frac{(F_{f0} - F_f)^2}{m\omega^2 v} \frac{m\omega}{c} = 4\pi$$

La condition d'absence de broutage se ramène ainsi à

$$\frac{(\mu_0 - \mu)^2 N^2}{m\omega v c} = \frac{(\mu_0 - \mu)^2 N^2}{v c \sqrt{km}} < 4\pi$$

On évite donc le broutage en diminuant la force normale N , en diminuant l'écart entre μ_0 et μ (choix du couple de frottement), en augmentant la raideur de la commande et enfin en augmentant l'amortissement visqueux (lubrification). Le rôle de la masse est plus ambigu. Si on peut l'augmenter indépendamment de la charge normale, cette augmentation est profitable. mais si la force normale se réduit au poids du chariot, on a

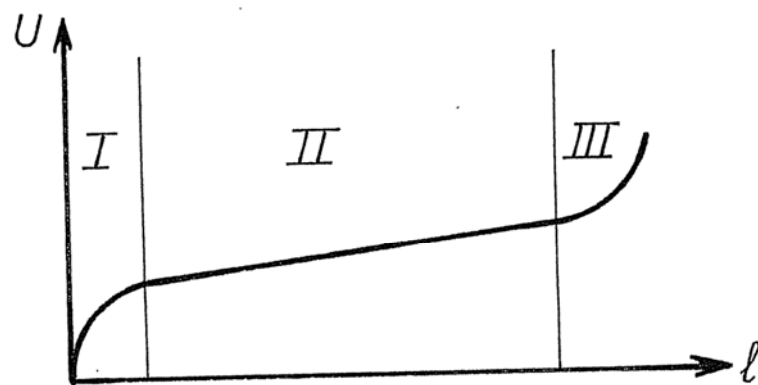


FIG. 103

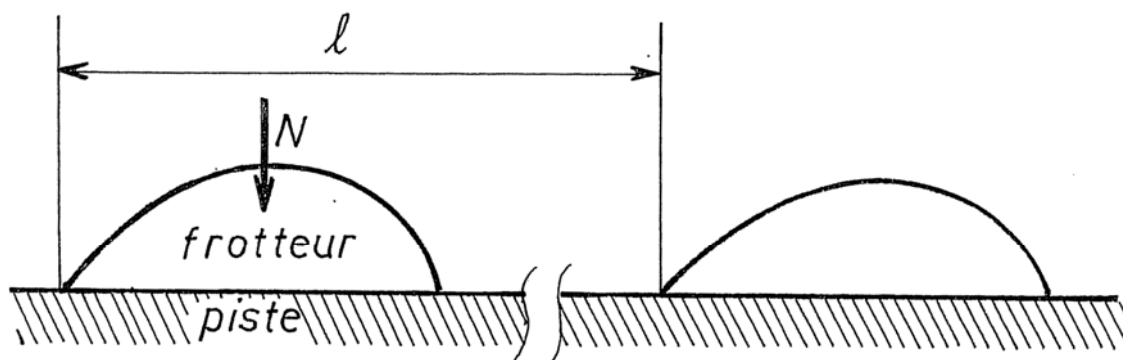


FIG. 104

$$\frac{N^2}{m^{1/2}} = m^{3/2} g^2$$

si bien que l'augmentation de la masse est préjudiciable.

Signalons finalement qu'il existe une très belle animation du stick-slip sur le site INTERNET [4].

2.6.7 – Usure

2.6.7.1 – Généralités. Loi d'Archard

Par *usure*, on entend l'enlèvement progressif de matière sur le corps le plus tendre du couple de frottement. La compréhension des mécanismes d'usure est un problème très difficile et sort largement du cadre du présent cours. Nous nous limiterons donc aux conclusions empiriques les plus simples.

Lorsque l'on fait glisser un frotteur sur une surface plus dure, il perd progressivement de la matière. On mesure l'usure par le *volume* perdu. On constate l'existence de trois stades (*fig. 103*) :

1) L'usure est au départ relativement rapide, mais sa vitesse décroît progressivement. C'est la période de *rodage*, pendant laquelle le frotteur s'adapte à sa fonction.

2) Dans un second stade, l'usure croît plus lentement et à une vitesse sensiblement constante. C'est le régime d'*usure établie*, qui correspond normalement à la plus grande partie de la durée de vie.

3) Enfin, dans un stade ultime, l'usure croît de plus en plus vite, jusqu'à atteindre des valeurs qui compromettent le bon fonctionnement du mécanisme. C'est la phase d'*usure catastrophique*.

Pour le régime établi, on peut tenir le raisonnement suivant, fondé sur l'analyse dimensionnelle. Les grandeurs en cause sont reprises dans le tableau suivant (*voir fig. 104*)

Grandeur	Dimension
Volume usé U	L^3
Force normale N	F
Chemin parcouru ℓ	L
Dureté (Brinell) H	F/L^2

Il convient de noter que, contrairement à une croyance répandue, *l'usure ne dépend pas du coefficient de frottement*.

Ces quatre grandeurs dépendant de deux unités, on peut trouver $(4 - 2) = 2$ nombres sans dimensions. On trouve aisément

$$\Pi_1 = \frac{U}{\ell^3}$$

$$\Pi_2 = \frac{N}{H\ell^2}$$

Il doit donc exister une relation de la forme

$$\frac{U}{\ell^3} = f\left(\frac{N}{H\ell^2}\right)$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{U}{\ell} = \ell^2 f\left(\frac{N}{H\ell^2}\right) \quad (1)$$

Or, en régime établi, l'usure est proportionnelle au chemin parcouru. Donc, si l'on convient de mesurer l'usure et le chemin parcouru *à partir de la fin du rodage*, on doit avoir

$$\frac{d}{d\ell}\left(\frac{U}{\ell}\right) = 0$$

Appliquons cette condition au second membre de la relation (1). On obtient

$$0 = \frac{d}{d\ell}\left[\ell^2 f\left(\frac{N}{H\ell^2}\right)\right] = 2\ell f\left(\frac{N}{H\ell^2}\right) + \ell^2\left(-2\frac{N}{H\ell^3}\right)f'\left(\frac{N}{H\ell^2}\right)$$

soit

$$f\left(\frac{N}{H\ell^2}\right) = \frac{N}{H\ell^2} f'\left(\frac{N}{H\ell^2}\right)$$

En posant $x = \frac{N}{H\ell^2}$, on a donc

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x}$$

ce qui conduit à la solution

$$\ln|f(x)| = \ln|x| + \ln k$$

Comme x et $f(x)$ sont positifs, cela équivaut à

$$f(x) = kx$$

La solution est donc

$$\frac{U}{\ell^3} = f\left(\frac{N}{H\ell^2}\right) = k \frac{N}{H\ell^2}$$

soit

$$U = k \frac{N\ell}{H}$$

C'est la *loi d'Archard*. Le coefficient k est appelé *taux d'usure* et dépend du couple de matériaux envisagés. On en trouvera des valeurs dans le fascicule QR.

2.6.7.2 – Vitesse normale d'usure

Dérivons la relation (1) par rapport au temps. On obtient

$$\frac{dU}{dt} = \frac{N \frac{d\ell}{dt}}{H} = \frac{Nv}{H}$$

où v est la vitesse du frotteur. Divisons ce résultat par l'aire de la surface de contact S . Il vient

$$\frac{dU}{Sdt} = k \frac{Nv}{HS}$$

Or, le volume usé vérifie

$$\frac{dU}{dt} = Su_n$$

où u_n est la *vitesse normale d'usure*, c'est-à-dire le taux d'avancement du front d'usure. Par ailleurs, N/S est la *pression* p à la surface de contact. On obtient donc

$$u_n = \frac{k}{H} pv$$

C'est la forme locale de la loi d'Archard. Si dans maintes applications, paliers, rotules, etc., on limite le produit pv , c'est pour limiter la vitesse normale d'usure.

Par ailleurs, il existe un certain nombre de cas où le champ des vitesses normales est soumis à des conditions de compatibilité cinématique, ce qui fait que la répartition des vitesses d'usure est connue. Cette propriété permet dans bien des cas de *déduire* la répartition des pressions après rodage à partir de la loi d'Archard locale. Ainsi, dans un frein à disque, la

vitesse relative v du disque par rapport aux plaquettes varie avec le rayon, mais comme u_n est la vitesse uniforme de rapprochement des plaquettes, il découle de la loi d'Archard qu'après rodage, le produit pv est uniforme sur tout le patin.

2.6.8 – Réversibilité et rendement des mécanismes frottants élémentaires.

Nous appellerons *mécanisme frottant élémentaire* un mécanisme comportant une entrée naturelle notée 1, une sortie naturelle notée 2 et une surface de liaison transmettant une puissance normale P_n et dissipant une puissance de frottement P_f proportionnelle à cette dernière :

$$P_f = k|P_n|$$

le coefficient k étant indépendant du sens de transit de la puissance. Aucune autre dissipation de puissance n'est envisagée. En outre, quel que soit le transit de la puissance, on a

$$|P_n| \leq P_{motrice} \quad \text{et} \quad P_{réceptrice} \leq |P_n|$$

Ce schéma représente assez bien les engrenages et les mécanismes à vis.

La conservation de la puissance implique évidemment

$$P_{motrice} = P_{réceptrice} + P_f$$

Nous supposons que dans le sens direct, c'est-à-dire lorsque le côté moteur est l'entrée naturelle 1, le mécanisme ne coince pas, c'est-à-dire que la puissance réceptrice est positive. Dans le sens inverse, c'est-à-dire pour une attaque par la sortie naturelle, deux comportements sont possibles :

- Le mécanisme ne coince pas non plus. On dit alors que le mécanisme est *réversible*.
- Le mécanisme coince. On dit alors qu'il est *irréversible*. Mathématiquement, cela revient à dire que la puissance réceptrice est alors négative : pour se mouvoir, le mécanisme a besoin d'un apport de puissance du côté récepteur.

Le *rendement du mécanisme dans le sens direct* est donné par le rapport de la puissance réceptrice P_2 à la puissance motrice P_1 ,

$$\eta_{direct} = \frac{P_2}{P_1}$$

Nous allons montrer que *si un mécanisme frottant élémentaire est irréversible, son rendement dans le sens direct est inférieur à 1/2*.

Dans le sens direct, on a

$$P_1 \geq |P_n| \geq P_2$$

et

$$P_1 - P_2 = k|P_n|$$

Dans le sens inverse, considérons un état où la puissance normale au contact a la même valeur $|P_n|$ que dans le sens direct. Il y correspond une puissance motrice P_2^* positive et une puissance réceptrice P_1^* négative, puisque le mécanisme est irréversible. Des deux relations

$$P_2^* \geq |P_n| \geq P_1^*$$

et

$$k|P_n| = P_2^* - P_1^* \geq P_2^*$$

on déduit

$$k|P_n| \geq P_2^* \geq |P_n|$$

donc

$$k \geq 1$$

Mais alors, dans le sens direct,

$$P_1 = P_2 + k|P_n| \geq P_2 + kP_2 = (1+k)P_2$$

si bien que

$$\eta_{direct} = \frac{P_2}{P_1} \leq \frac{1}{1+k} \leq \frac{1}{2}$$

comme annoncé.

Il faut se garder de croire que la réciproque est vraie : il peut exister des mécanismes réversibles dont le rendement est inférieur à 1/2 . Par contre, un mécanisme dont le rendement est supérieur à 1/2 est nécessairement réversible.

Notons que *l'irréversibilité peut être recherchée*. Ainsi, dans un assemblage par boulons, ceux-ci doivent être irréversibles, puisqu'on ne désire pas qu'ils se desserrent tout seuls. Il en est de même du mécanisme d'un étau. Dans les appareils de levage, on peut utiliser soit un mécanisme réversible, auquel cas il faudra un frein pour fixer la position d'arrêt, soit un mécanisme irréversible qui dispense du frein mais a un rendement moindre.

A titre d'exemple, dans un mécanisme vis-écrou à filet carré, le rendement dans le sens direct est donné par

$$\eta_{direct} = \frac{tg\alpha}{tg(\alpha + \varphi)}$$

où

- α est l'angle d'hélice du filet, qui se calcule par

$$tg\alpha = \frac{p}{\pi d}$$

p étant le pas, d le diamètre moyen du filet.

- φ est l'angle de frottement, défini par

$$tg\varphi = \mu$$

Le rendement en sens inverse vaut

$$\eta_{inverse} = \frac{tg(\alpha - \varphi)}{tg\alpha}$$

L'irréversibilité correspond au cas où ce dernier rendement est négatif, ce qui a lieu pour $\alpha \leq \varphi$. On vérifie aisément que dans ce cas, le rendement direct est inférieur à 1/2. Dans les mécanismes à vis irréversibles, le pas est généralement très faible, et le rendement est généralement compris entre 0,1 et 0,3 dans le sens direct. Il est encore plus faible dans les vis à filet de profil triangulaire utilisées dans les assemblages.

2.6.9 – Moyens de réduire le frottement

2.6.9.1 – Roulements

Une manière efficace et bien connue de réduire le frottement consiste à remplacer des mouvements de glissement par des mouvements de roulement : roues, roulements, galets, etc.

On notera cependant les faits suivants

- Les éléments roulants *s'usent* aussi et, en tout cas, ont toujours une *durée de vie limitée* par leur fatigue superficielle.
- La perte d'énergie, bien que faible, *n'est pas nulle*.
- Dans le cas de mouvements *pendulaires* (bielles), les éléments roulants sont soumis à des accélérations importantes et doivent être aussi légers que possible. On utilise alors des roulements à *aiguilles*.

Les principes du calcul des roulements font l'objet d'un chapitre spécial.

2.6.9.2 – Lubrification

Un autre moyen de réduire le frottement est la lubrification. Dans les conditions idéales, on parvient à instaurer entre les surfaces frottantes un *film d'huile porteur*, capable de séparer les surfaces frottantes et de transmettre l'effort sans que les surfaces ne se touchent. Il n'y a plus, alors, d'usure, et on peut envisager une durée de vie indéfinie. Cependant, la perte d'énergie n'est pas nulle, car il faut cisailer le fluide, ce qui fait apparaître sa viscosité.

a) Dans le cas de paliers tournant à une vitesse suffisante, le *mouvement* même de l'arbre suffit à créer cette portance. C'est ce que nous verrons en section 2.7. On parle alors de *lubrification hydrodynamique*. Cependant, *au démarrage*, le frottement et, par conséquent, le risque de grippage, est important. Le lubrifiant est d'ordinaire de l'huile, mais à très grande vitesse, on peut même utiliser de l'air. C'est le cas de la fraise rapide du dentiste, dite *turbine*. Il est bon de noter que le lubrifiant sert aussi au *refroidissement* du palier.

b) Dans le cas des faibles vitesses, on injecte de l'huile sous pression dans des chambres. La portance est due au fait que l'écoulement de l'huile dans les minces espaces bordant la chambre entraîne une forte perte de charge, donc une forte pression dans la chambre. C'est la *lubrification hydrostatique*, qui permet des vitesses très faibles. On l'utilise par exemple dans les télescopes, qui font un tour sur une journée. Le démarrage ne pose pas de problème, mais si la pompe à huile tombe en panne, un accident majeur peut se produire. Il faut donc un dispositif de sécurité qui arrête la machine en cas de pression insuffisante de la pompe.

La lubrification sous pression convient également pour les charges dynamiques, comme dans les têtes de bielles ou les paliers de vilebrequins.

c) Les mouvements de translation n'ont pas la propriété de créer un film d'huile porteur, hormis la géométrie spéciale *en coin*. Il arrive que l'on crée artificiellement un certain nombre de cavités en coin dans une des deux surfaces frottantes. Dans le domaine de la machine-outil, on emploie encore fréquemment des surfaces *grattées*, très chères, car obtenues manuellement, qui ont la propriété de se présenter sous forme d'une succession de cuvettes qui sont autant de micro-coins d'huile. Le film n'est pas portant, mais soulage les surfaces, qui s'usent moins. En outre, la présence d'huile apporte un certain amortissement visqueux favorable pour éviter le broutage, qui est inadmissible pour une machine-outil.

2.7 – Quelques notions de lubrification hydrodynamique

L'étude approfondie de la lubrification hydrodynamique fait l'objet du cours de *Lubrification* et sort largement du cadre du présent cours. Nous nous limiterons ici à quelques notions de base.

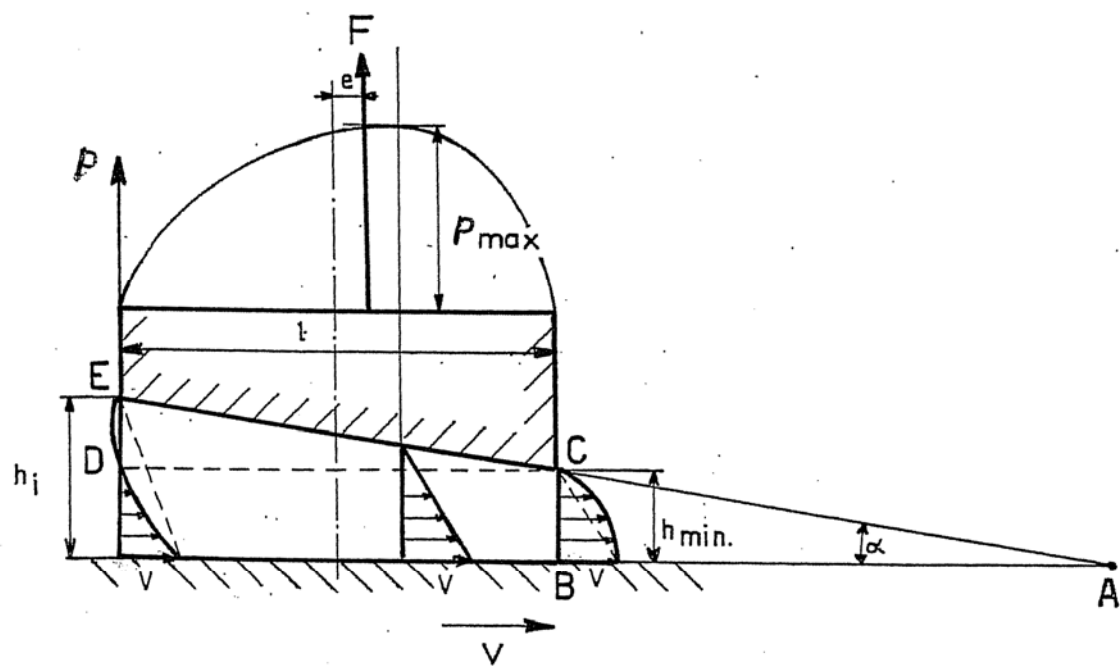


FIG. 105

2.7.1 – Le coin d’huile

Considérons un système composé d’une surface horizontale avançant à vitesse constante V , face à une surface fixe inclinée d’un angle α . Le tout baigne dans l’huile (*fig. 105*). En prenant un axe x dans le sens du mouvement et un axe y perpendiculaire à celui-ci, la vitesse horizontale du fluide u doit valoir V sur la surface intérieure et 0 sur la surface extérieure. On peut admettre que la vitesse v selon y est nulle. L’écoulement est supposé suffisamment lent pour que l’on puisse négliger les forces d’inertie du fluide (écoulement de Stokes). En notant μ la viscosité de l’huile, on a donc les équations

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta v = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

La pression est donc indépendante de y , ce qui permet d’intégrer la seconde équation comme suit. Tout d’abord,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\mu} \frac{dp}{dx} + C(x)$$

Ensuite,

$$u(x, y) = \frac{y^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} + C(x)y + D(x)$$

La condition $u = V$ en $y = 0$ fournit immédiatement $D(x) = V$. En $y = h$, on a alors

$$u(x, h) = \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} + C(x)h + V = 0$$

ce qui donne

$$C(x) = -\frac{V}{h} - \frac{h}{2\mu} \frac{dp}{dx}$$

La solution est donc

$$u(x, y) = V \left(1 - \frac{y}{h} \right) - \frac{hy - y^2}{2\mu} \frac{dp}{dx}$$

Ceci exprime l’équilibre. Il faut encore exprimer la continuité, sous forme de conservation du débit par unité de profondeur selon le troisième axe z . Notons q ce flux. Il vaut

$$q(x) = \int_0^h u(x, y) dy = V \frac{h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx}$$

La conservation du volume du fluide s'exprime par la condition

$$q(x) = q = cte$$

Or, à l'entrée comme à la sortie du coin, la pression (relative) s'annule. Il doit donc exister un point intermédiaire où la dérivée de la pression s'annule. En ce point, le profil des vitesses est triangulaire et par conséquent, si H est la hauteur du film en ce point,

$$q = V \frac{H}{2}$$

Comme q est constant, on peut écrire

$$q = V \frac{H}{2} = V \frac{h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx}$$

ce qui entraîne

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu V}{h^3} (h - H)$$

Dès lors, à l'entrée, comme $h > H$, la dérivée de la pression est positive ; à la sortie, elle est négative, car $h < H$. La pression est donc positive dans tout le système, et il en résulte un effort tendant à séparer le coin de la surface mobile. C'est *l'effet de coin d'huile*, qui est mis à profit dans certaines butées, appelées *butées Mitchell*. Observons que le gradient de pression est proportionnel à la *viscosité* et à la *vitesse* et décroît lorsque l'épaisseur moyenne du film augmente. La création de coins d'huile est à la base de la lubrification hydrodynamique.

2.7.2 – Notions sur les paliers hydrodynamiques

Le coin d'huile étudié ci-dessus est créé artificiellement. Mais dans le cas d'un palier, il existe un coin d'huile naturel lié au fait que l'arbre est légèrement *excentré* dans le palier du fait de la charge. La théorie du palier lisse hydrodynamique sort largement du cadre du présent cours. Mais il est possible d'obtenir un certain nombre de résultats à partir d'une analyse dimensionnelle accouplée à des considérations de similitude.

2.7.2.1 – Analyse dimensionnelle

Le tableau suivant donne les variables de la lubrification et leurs unités

VARIABLE	UNITE
1) Viscosité μ	$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$
2) Fréquence de rotation N	T^{-1}
3) Pression moyenne p_0	$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$
4) Jeu radial a	L
5) Rayon de l'arbre r	L
6) Longueur du palier ℓ	L

Par pression moyenne, il faut entendre la charge P divisée par la surface projetée du palier, $2\ell r$:

$$p_0 = \frac{P}{2\ell r}$$

On est donc en présence de 6 grandeurs dépendant de 3 unités, ce qui conduira à $(6 - 3) = 3$ nombres sans dimension. On trouve aisément les nombres suivants :

$$n = \frac{\ell}{2r} = \text{élancement du palier}$$

$$j = \frac{a}{r} = \text{jeu relatif}$$

$$\Pi = \frac{\mu N}{p_0} = \text{paramètre de fonctionnement}$$

A partir de ces trois nombres, on peut obtenir toute espèce de résultat, notamment le *coefficient de perte* (parfois appelé improprement coefficient de frottement)

$$f = \frac{M_p}{2P.r}$$

où M_p est le moment de perte, c'est-à-dire le moment nécessaire à faire tourner l'arbre en vainquant les forces visqueuses. On aura donc une relation de la forme

$$f = F\left(\frac{a}{r}, \frac{\ell}{2r}, \frac{\mu N}{p_0}\right)$$

2.7.2.2 – Conditions de similitude

a) Le paramètre décrivant la perte indépendamment de r et a est fr/a

Le jeu du palier est très faible devant le rayon de l'arbre, ce qui permet de négliger la courbure et d'écrire les relations comme si le palier était développé. Nous ferons la mise à échelle suivante :

$$x = r\theta \quad \text{et} \quad y = a\eta$$

et nous écrirons encore

$$p = p_0 A(\theta, \eta) \quad \text{et} \quad \tau = \tau_0 B(\theta, \eta)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= p_0 \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{p_0}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \tau}{\partial y} &= \tau_0 \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dy} = \frac{\tau_0}{a} \frac{\partial B}{\partial \eta} \end{aligned}$$

ce qui ramène l'équation d'équilibre à

$$\frac{p_0}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{\tau_0}{a} \frac{\partial B}{\partial \eta} \quad (1)$$

Cela étant, le moment de perte est donné par

$$M_p = \ell \int_0^{2\pi} \tau_{arbre} \cdot r^2 d\theta = \ell r^2 \tau_0 \int_0^{2\pi} B(\theta, 0) d\theta$$

Il nous est loisible de choisir pour τ_0 la moyenne de τ_{arbre} , c'est-à-dire

$$\tau_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_{arbre} d\theta = \frac{\tau_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(\theta, 0) d\theta \quad \text{soit} \quad \int_0^{2\pi} B(\theta, 0) d\theta = 2\pi$$

On obtient ainsi

$$M_p = 2\pi \tau_0 \ell r^2$$

et

$$f = \frac{M_p}{2P \cdot r} = \frac{2\pi \tau_0 \ell r^2}{2 p_0 \ell r^2} = \pi \frac{\tau_0}{p_0}$$

Cela étant, l'équation (1) s'écrit encore

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{\tau_0}{p_0} \frac{r}{a} \frac{\partial B}{\partial \eta} = \frac{1}{\pi} f \frac{r}{a} \frac{\partial B}{\partial \eta}$$

et comme $\frac{\partial A}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial B}{\partial \eta}$ sont indépendants de r et a , cela signifie que le groupement $f \frac{r}{a}$ est indépendant de r et a .

b) *La variable de Sommerfeld*

Mettons à échelle l'équation

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Nous écrivons

$$u(x, y) = 2\pi Nr C(\theta, \eta)$$

ce qui donne

$$\frac{p_0}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{\mu \cdot 2\pi Nr}{a^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2}$$

soit

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = 2\pi \frac{\mu N}{p_0} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2}$$

On voit apparaître ici le nombre sans dimension

$$X = \frac{\mu N}{p_0} \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

qui porte le nom de *variable de Sommerfeld*. Pour la recherche du coefficient de perte f , on aura donc à déterminer une loi de la forme

$$f \frac{r}{a} = F(X, n)$$

c) *Le cas limite des très grands nombres de Sommerfeld ($n = \infty$)*

Les très grandes valeurs du nombre de Sommerfeld correspondent aux très grandes fréquences de rotation ou aux très faibles charges. Supposons donc la charge très faible. L'arbre peut donc être considéré comme centré dans le palier et on a alors (*fig. 106*)

$$\tau = \tau_0 = \mu \frac{V}{a} = \mu \frac{2\pi Nr}{a}$$

Il en découle

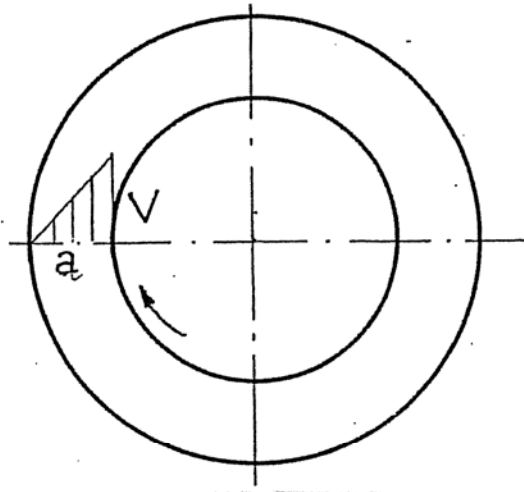


FIG. 106

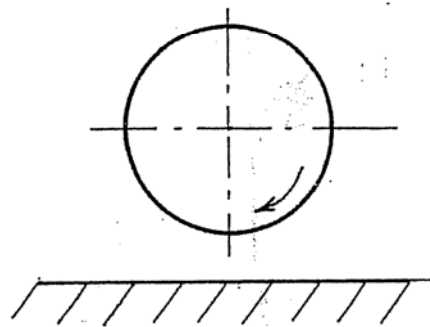


FIG. 107

$$f \frac{r}{a} = \pi \frac{\tau_0}{p_0} \frac{r}{a} = \pi \frac{\mu \cdot 2\pi N r}{p_0 a} \frac{r}{a} = 2\pi^2 X$$

Ce résultat est connu sous le nom de *loi de Petroff*.

d) Le cas limite des très petites valeurs de X (n = ∞)

Le cas des très petites valeurs de X correspond notamment à $\frac{a}{r} \rightarrow \infty$. A la limite, on trouve le problème d'un arbre sur un plan (*fig. 107*), pour lequel la notion de jeu perd tout sens physique. On doit donc avoir un coefficient de perte indépendant du jeu, ce qui s'écrit

$$0 = \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{a}{r} F \left(\frac{\mu N}{p_0} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) \right] = \frac{1}{r} F(X) + \frac{a}{r} \frac{\mu N r^2}{p_0} \left(-\frac{2}{a^3} \right) F'(X)$$

soit

$$F(X) - 2 \frac{\mu N}{p_0} \frac{r^2}{a^2} F'(X) = 0$$

ou encore

$$\frac{F'(X)}{F(X)} = \frac{1}{2X}$$

La solution de cette équation est

$$\ln F(X) = \frac{1}{2} \ln X + \ln(cte)$$

soit

$$F(X) = cte \cdot \sqrt{X}$$

et finalement,

$$f \frac{r}{a} = cte \cdot \sqrt{X}$$

e) Cas général

Pour des valeurs quelconques du nombre de Sommerfeld, il faut trouver une loi approchée qui soit correcte aux limites, c'est-à-dire que fr/a doit être sensiblement proportionnel à X pour les grandes valeurs de cette variable et sensiblement proportionnel à la

racine carrée de X quand X est petit. Vogelpohl a proposé de raccorder ces deux lois pour $(2\pi X) = 1$, ce qui donne

$$f \frac{r}{a} = \begin{cases} \pi(2\pi X) & \text{pour } (2\pi X) \geq 1 \\ \pi\sqrt{2\pi X} & \text{pour } (2\pi X) < 1 \end{cases}$$

(Très exactement, Vogelpohl a proposé le facteur 3 à la place de π , mais la différence n'est que de 5% [9]). D'autres lois ont été proposées, par exemple par Leloup [7]. Leurs résultats sont sensiblement équivalents.

f) Valeur du jeu radial et ordre de grandeur du coefficient de perte

Une norme allemande recommande de choisir le jeu radial à partir de la formule

$$\frac{a}{mm} = \frac{(d / mm)^{0,3}}{90}$$

où d est le diamètre de l'arbre. A partir de là, voyons, sur des données raisonnables quel est l'ordre de grandeur du coefficient de perte. Posons $d = 50 \text{ mm}$ et $X = 0,2$. Il vient

$$\begin{aligned} r &= \frac{d}{2} = 25 \text{ mm} \\ \frac{a}{mm} &= \frac{50^{0,3}}{90} = 0,036 \text{ mm} \\ \frac{a}{r} &= \frac{0,036}{25} = 1,440 \cdot 10^{-3} \\ 2\pi X &= 2\pi \cdot 0,2 = 1,257 > 1 \\ f \frac{r}{a} &= \pi \cdot 1,257 = 3,948 \\ f &= 3,498 \cdot 1,440 \cdot 10^{-3} = 5,685 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

On constate qu'en régime hydrodynamique, le coefficient de perte est très petit. Il est un peu plus grand, cependant qu'avec les roulements, pour lesquels f varie, selon le type, entre $1 \cdot 10^{-3}$ et $4 \cdot 10^{-3}$. Mais sous une charge constante, les paliers lisses ne s'usent pas tant que le régime hydrodynamique est maintenu, tandis que les roulements ont une durée de vie limitée.

2.8 - Conception pour le montage et le démontage

Le *montage* d'un ensemble mécanique peut, selon la manière dont il est conçu, aller de la simplicité extrême au casse-tête chinois. Il peut même être impossible, ce qui, faut-il le préciser, est particulièrement gênant. Nous n'entrerons pas ici dans le détail du *design for assembly*, pour lequel nous renverrons à la littérature, par exemple [2]. Il s'agit là de préceptes permettant d'améliorer les conditions de montage.

Ce dont il faut se persuader, c'est qu'une conception n'est complète que lorsque l'on a rédigé, mentalement pour les cas simples ou par écrit pour les cas complexes, la *gamme de montage*, c'est-à-dire la liste ordonnée de toutes les opérations de montage. On se rend alors souvent compte que certaines choses pourraient être améliorées et parfois aussi, malheureusement, que l'on rencontre une impossibilité. Ce dernier cas s'évite en ayant constamment à l'esprit le problème du montage, tout au long de la conception.

Le *démontage* est nécessaire dans certaines opérations d'entretien, ne fût-ce que pour remplacer les pièces d'usure comme les plaquettes de freins d'une automobile. La facilité de démontage est déterminante dans le coût de l'opération. Pour la satisfaction du client à moyen terme, c'est-à-dire après un certain temps de service ayant impliqué des opérations d'entretien, il s'agit d'un point important.

Il faut encore, à l'heure actuelle, parler du démontage final lors de la mise hors service définitive de la machine. On s'intéresse alors à la possibilité de récupérer ou de recycler un maximum d'éléments. La discipline qui s'occupe de ces problèmes est appelée *design for disassembly*.

2.9 – Dépendance mutuelle des formes et des procédés de fabrication

Les formes d'éléments que l'on peut obtenir dépendent du mode de fabrication envisagé, lui-même tributaire du matériau utilisé. Voici quelques indications à ce sujet.

a) Le moulage s'adresse à la fonte, les alpx (alliages d'aluminium et de silicium), le zamak (matériau des carburateurs) et aux plastiques. L'acier se coule plus difficilement.

Les formes moulées sont toujours arrondies. En outre, leurs épaisseurs ne peuvent pas varier trop brutalement, car on risque des retassures (bulles). Il faut prendre garde au fait que les parties extérieures de la pièce se refroidissent plus tôt que les parties intérieures, si bien que ces dernières se retrouvent tendues après solidification.

Le moulage est le seul procédé permettant de faire aisément des pièces avec de nombreuses cavités. L'exemple le plus évident est la culasse des moteurs à explosion.

La fonte courante résiste mal à la traction. Mais il existe également des fontes nodulaires très résistantes. Les vilebrequins sont à présent souvent moulés.

Signalons enfin que la fonte a l'avantage d'être amortissante, ce qui diminue les vibrations.

b) Le forgeage permet d'obtenir des formes *démoulables* par déformation plastique à chaud. La déformation crée une direction préférentielle selon laquelle la résistance est plus grande. Cette propriété est souvent recherchée. On obtient par forgeage des pièces assez complexes, mais la possibilité de réaliser des creux est limitée aux formes démoulables.

c) On peut également obtenir des pièces complexes en assemblant des pièces plus simples par *soudage*. Cependant, le soudage entraîne inmanquablement des contraintes résiduelles et des déformations, si bien que les pièces assemblées doivent souvent être retouchées.

d) On peut également *usiner* les pièces dans la masse. Il faut bien se rendre compte que dans ce cas, le volume de copeaux peut être *énorme*, et leur encombrement peut aller jusqu'à 50 fois leur volume. Ce procédé est cependant très utilisé en construction aéronautique. Les possibilités d'usiner des formes intérieures sont limitées par la condition de passage de l'outil. En rectification, il est impossible d'obtenir un angle rentrant vif. Il faut alors soit réaliser un *dégagement*, encore appelé *sortie d'outil*, soit utiliser des entretoises.

2.10 – Bibliographie

1. F.G. KOLLMANN – *Welle-Nabe Verbindungen*
Springer Verlag, Berlin, 1984
ISBN 3-540-12215-X
2. G. BOOTHROID, P.DEWHURST, W. KNIGHT – *Product design for manufacture and assembly*
Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1994
ISBN 0-8247-7565-1
3. G. NIEMANN – *Maschinenelemente II*
Springer, Berlin, 1965
4. *The Friction Lab : An oscillator with friction*
monet.unibas.ch/~elmer/flab/coulombSlider/index.html
5. W. STEINHILPER, R. ROEPER – *Maschinen und Konstruktionselemente 3*
Springer, Berlin, 1994
ISBN 3-540-57429-8
6. G. DROUIN, M. GOU, P. THIRY, R. VINET – *Eléments de machines*
Editions de l'Ecole polytechnique de Montréal, 1986
ISBN 2-553-00190-8
7. L. LELOUP – *Etude de la lubrification et calcul des paliers*
2^e édition, Sciences et Lettres, Liège, 1961
8. J. STOLK, C. KROS – *Machienenonderdelen*
21^e druk, Morks, Dordrecht, 1981
9. G. NIEMANN – *Maschinenelemente I*
2. Auflage, Springer, Berlin, 1975
ISBN 3-540-06809-0

- 10.** Z.J. JANIA, D. SINCLAIR, Friction clutches and brakes
in H.G. ROTHBART, *Mechanical design and systems handbook*,
Mc Graw Hill, New York, 1964
ISBN 0-07-054019-5

3. FIABILITÉ

3.1 – RECENSEMENT DES EFFORTS

Le premier problème qui se pose en fiabilité est le *recensement des efforts*. Les efforts peuvent être une donnée du problème, fondée sur une analyse statistique par exemple. Dans un certain nombre de cas, ils font l'objet de *règlements*.

Nous nous pencherons plus particulièrement sur le recensement des efforts dans une *transmission*. Ceci nous permettra d'envisager un certain nombre d'éléments courants en mécanique.

3.1.1 – Principe

La première démarche consiste à déterminer le schéma de la circulation de la *puissance*. On en déduit aisément les *efforts actifs*, c'est-à-dire ceux qui travaillent. Mais la plupart des transmissions ne peuvent exister que moyennant des *efforts secondaires*, induisant de la flexion et parfois aussi de l'extension. Contrairement à ce que leur dénomination pourrait faire croire, ces efforts ne sont pas nécessairement plus petits que les efforts actifs. Ils jouent souvent un rôle fondamental dans la résistance de l'arbre et de ses supports. La détermination des efforts secondaires fait l'objet d'une deuxième étape du calcul, où l'on tient à la fois compte des efforts actifs et du type de transmission envisagé.

3.1.2 – Le rhéogramme de la puissance

La puissance fournie par le ou les moteurs est amenée aux récepteurs par la transmission, ce qui occasionne d'ailleurs certaines pertes. On a donc en général la relation

$$\sum P_{mot} = \sum P_{rec} + \sum pertes$$

Dans un très grand nombre de transmissions mécaniques, les pertes sont faibles devant la puissance à transmettre, c'est-à-dire que le rendement

$$\eta = \frac{\sum P_{rec}}{\sum P_{mot}}$$

est voisin de l'unité. C'est pourquoi, en dehors de cas très particuliers, il est d'usage, au moins dans un premier calcul, de négliger les pertes (ce qui équivaut à poser $\eta = 1$). Dans ces conditions, la puissance passe des moteurs aux récepteurs sans perte ni profit, à la manière d'un fluide incompressible. Le *rhéogramme de la puissance* est précisément le schéma de ces « écoulements ».

A partir du rhéogramme, il est aisé de déterminer les efforts moteurs, car la puissance P est toujours de la forme

$$P = Qv$$

où v est une vitesse généralisée et Q , l'effort actif associé. En pratique, on rencontre des vitesses de translation où la formule ci-dessus s'applique sans modification, et des vitesses de rotation, pour lesquelles la formule ci-dessus doit s'entendre comme

$$P = M_t \omega = M_t \cdot 2\pi N$$

où M_t est le moment de torsion, ω la vitesse angulaire, et N , la fréquence de rotation. Nous allons illustrer cette manière de faire par quelques exemples.

3.1.2.1 - Réducteur à engrenages

Un réducteur est destiné à transformer une puissance à grande vitesse de rotation ω_m en une puissance à faible vitesse de rotation ω_r . Le réducteur à engrenages de la figure 108 possède deux étages. Le rendement des engrenages est élevé (98%), ce qui permet de négliger les pertes. On a donc immédiatement

$$M_{tm} = \frac{P}{\omega_m} \quad \text{et} \quad M_{tr} = \frac{P}{\omega_r}$$

ce qui signifie que le couple récepteur est beaucoup plus important que le couple moteur. Remarquons que cela signifie que ces deux couples ne sont pas équilibrés et que, dès lors, si l'on fait le bilan d'équilibre du réducteur complet, on constate qu'il faut que la différence

$$\Delta M_t = M_{tr} - M_{tm}$$

passse quelque part. *Ce quelque part*, c'est la liaison entre le réducteur et la fondation. Il est donc essentiel d'*attacher* le réducteur !

La puissance passe de l'entrée au point A par l'arbre moteur. Elle passe alors par les roues dentées sur l'arbre intermédiaire, où elle fait le chemin DE. De là, elle passe par le second engrenage à l'arbre récepteur, où elle fait le chemin de H vers la sortie.

On en déduit immédiatement que le moment de torsion est *nul* dans les portions d'arbre AB, CD, EF, GH.

On peut tout aussi aisément déduire les efforts actifs dans les engrenages. Grâce à la présence des dents, deux circonférences (une sur chaque roue) roulent sans glisser l'une sur l'autre. C'est ce que l'on appelle les circonférences *primitives*. Si d_1 et d_2 sont leurs diamètres, elles ont donc en leur point de contact I une vitesse commune v donnée par

$$v = \omega_m \frac{d_1}{2} = \omega_i \frac{d_2}{2}$$

ce qui implique évidemment

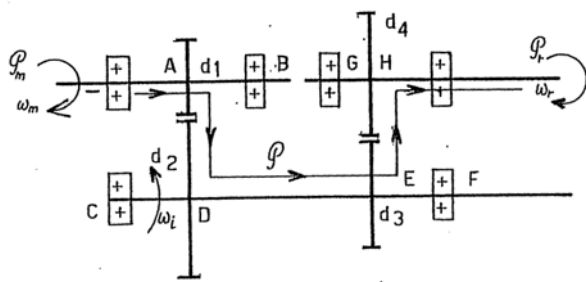


FIG. 108

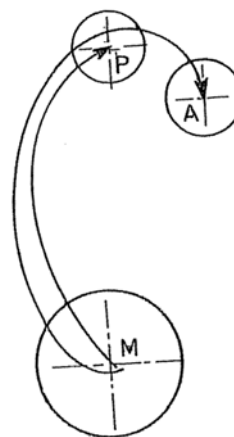
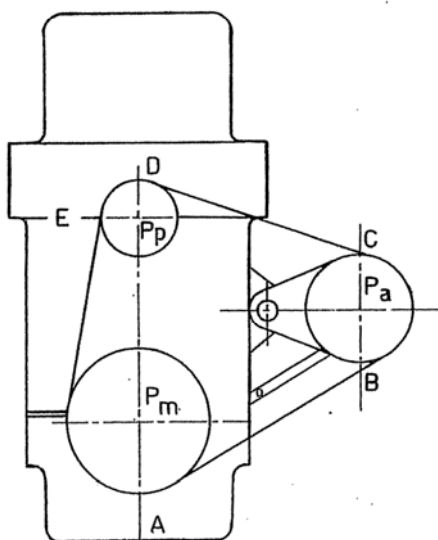
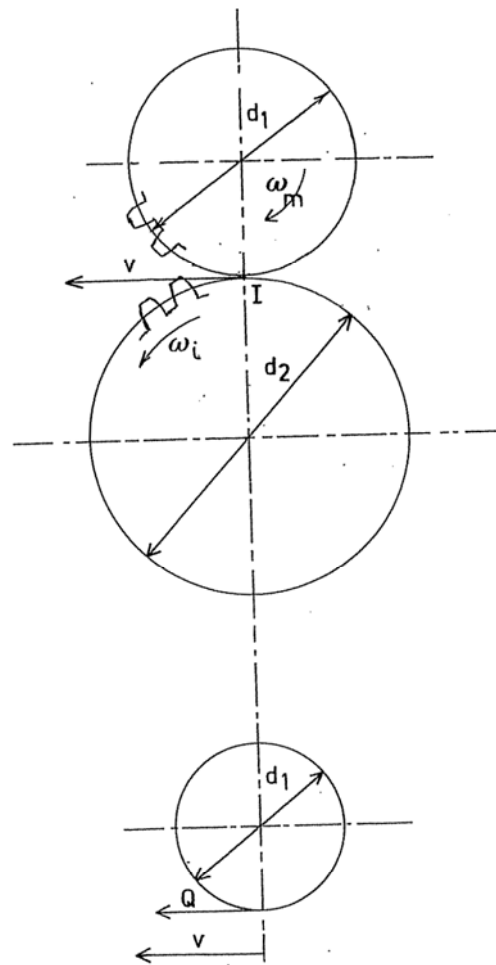


FIG. 109

$$\frac{\omega_m}{\omega_i} = \frac{d_2}{d_1}$$

Pratiquement, pour que deux roues puissent engrener, il faut qu'elles aient le même *pas p*. Ce pas est donné par

$$p = \frac{\pi d}{Z}$$

où Z est le nombre de dents. Cependant, le pas est une grandeur désagréable, car le diamètre est normalement un nombre rationnel, de même évidemment que le nombre entier de dents. Il en découle que le pas est un nombre irrationnel. Du reste, sur les plans, on ne voit pas la circonférence, mais le diamètre. C'est pourquoi on ne parle jamais du pas, mais du *module*

$$m = \frac{p}{\pi} = \frac{d}{Z}$$

qui est un nombre rationnel, et ce sont les modules qui sont normalisés (*voir QR*, page ENG3). Il est clair que deux roues qui engrenent ont le même module. Il en découle également que

$$\frac{\omega_m}{\omega_i} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{mZ_2}{mZ_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

c'est-à-dire que les vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux nombres de dents.

Cela étant, la roue motrice fournit une puissance

$$P = Qv$$

Q étant la composant tangentielle de l'effort d'interaction entre les deux roues, ce qui donne

$$Q = \frac{P}{v}$$

C'est l'effort actif. Nous verrons plus loin quels sont les efforts secondaires qui l'accompagnent.

3.1.2.2 – Distribution de puissance

Considérons la distribution de puissance aux auxiliaires d'un moteur à explosion, pompe à eau et ventilateur d'une part, alternateur d'autre part (*fig. 109*). On utilise une courroie trapézoïdale. Supposons que l'alternateur doive tourner 1,8 fois plus vite que le moteur et la pompe à eau, 1,5 fois plus vite :

$$\omega_p = 1,5\omega_m \quad \text{et} \quad \omega_a = 1,8\omega_m$$

La caractéristique d'une courroie est de transmettre (au rendement près) sa vitesse tangentielle aux poulies. On a donc

$$v = \frac{\omega_m d_m}{2} = \frac{\omega_p d_p}{2} = \frac{\omega_a d_a}{2}$$

si bien que les diamètres doivent être dans le rapport inverse des vitesses angulaires :

$$d_p = \frac{d_m}{1,5} \quad \text{et} \quad d_a = \frac{d_m}{1,8}$$

Le bilan des puissances est

$$P_m = P_a + P_p$$

Si, par exemple, l'alternateur consomme $230W$ et le groupe pompe-ventilateur, $500W$, on aura donc

$$P_m = 730W$$

Telle est la puissance consommée par le moteur pour faire tourner ses auxiliaires.

Venons-en aux efforts actifs. On appelle effort actif d'une courroie sur une poulie le rapport

$$Q = \frac{P}{v}$$

C'est la charge concentrée qui fournirait la même puissance ou encore, la somme de tous les efforts tangentiels fournis par la courroie à la poulie. Si donc la vitesse de la courroie vaut $30m/s$, on aura

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{P_m}{v} = \frac{730}{30} = 24,33N \\ Q_p &= \frac{P_p}{v} = \frac{500}{30} = 16,67N \\ Q_a &= \frac{P_a}{v} = \frac{230}{30} = 7,67N \end{aligned}$$

Dans tout ceci, nous assimilons le rendement à l'unité. En pratique, il se situe aux environs de 96...98%

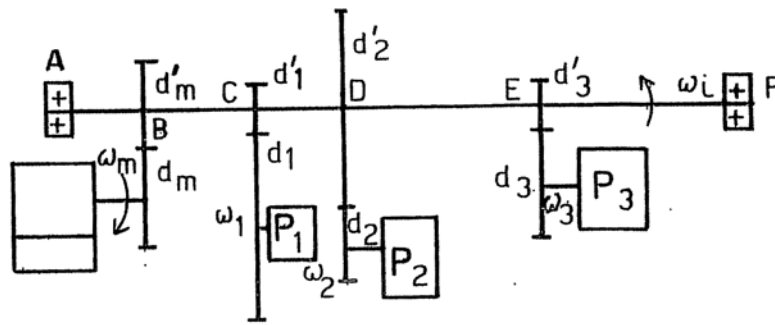


FIG. 110

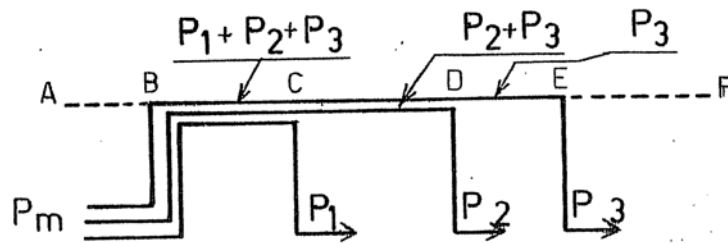


FIG. 111

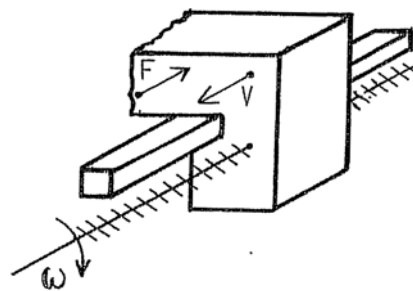


FIG. 112

3.1.2.3 – Une distribution plus complexe

Pour la transmission de la figure 110, on obtient aisément le rhéogramme de la figure 111 en partant des récepteurs. Supposons que l'on désire connaître les moments de torsion régnant dans les différents tronçons de l'arbre secondaire. Il suffit de diviser la puissance par la vitesse angulaire.

$$\text{Section AB: } M_t = 0$$

$$\text{Section BC: } M_t = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{\omega_i}$$

$$\text{Section CD: } M_t = \frac{P_2 + P_3}{\omega_i}$$

$$\text{Section DE: } M_t = \frac{P_3}{\omega_i}$$

$$\text{Section EF: } M_t = 0$$

Les moments de torsion dans les arbres récepteurs sont

$$M_{t1} = \frac{P_1}{\omega_1}, \quad M_{t2} = \frac{P_2}{\omega_2}, \quad M_{t3} = \frac{P_3}{\omega_3}$$

Enfin, les efforts actifs dans les engrenages valent

$$Q_1 = \frac{P_1}{\omega_1 \frac{d_1}{2}}, \quad Q_2 = \frac{P_2}{\omega_2 \frac{d_2}{2}}, \quad Q_3 = \frac{P_3}{\omega_3 \frac{d_3}{2}}$$

3.1.2.4 – Un cas de faible rendement

Il existe certains cas où il est indispensable de tenir compte des pertes parce qu'elles sont importantes. C'est notamment le cas des transmissions par vis et écrou. Dans ces transmissions, très communes dans les machines-outils notamment, la rotation de la vis provoque le mouvement de translation d'un corps, par exemple le chariot d'un tour (*fig. 112*). A chaque tour de la vis correspond une avance du chariot égale au pas p de la vis, donc, en notant N la fréquence de rotation de la vis, la vitesse v du chariot est donnée par

$$v = Np$$

En fonction du pas et du coefficient de frottement, le fonctionnement peut être réversible ou irréversible, c'est-à-dire que le chariot est capable ou incapable de faire tourner la vis en se déplaçant. Selon les applications, la réversibilité est souhaitable ou non. Rappelons que dans le cas irréversible, le rendement est inférieur à 0,5 et qu'il est donc impératif d'en tenir compte.

Supposons que la vis envisagée ait un rendement η . La puissance à la vis est donnée par

$$P_{vis} = M_{tvis} . 2\pi N$$

Si le chariot doit vaincre une force F , la puissance correspondante vaudra

$$P_{chariot} = Fv$$

Pour obtenir le moment que doit fournir la vis, on écrit que la puissance reçue par le chariot est égale à la puissance de la vis *multipliée par le rendement*,

$$P_{chariot} = \eta P_{vis}$$

soit explicitement

$$Fv = \eta M_t . 2\pi N$$

ce qui donne

$$M_t = \frac{1}{\eta} F \frac{v}{2\pi N} = \frac{1}{\eta} F \frac{Np}{2\pi N} = \frac{1}{\eta} F \frac{p}{2\pi}$$

3.1.3 – Efforts secondaires dans les engrenages

3.1.3.1 – Engrenage droit

Commençons par préciser le vocabulaire exact relatif aux engrenages. Un *engrenage* est un système dans lequel deux *roues dentées* engrènent entre elles. On appelle généralement *pignon* la petite roue dentée, l'autre étant simplement dénommée *roue*. Affectons ici d'un indice 2 les grandeurs relatives au pignon et d'un indice 1 les grandeurs relatives à la roue (*fig. 113*). Nous savons que l'effet des dents est d'amener les circonférences primitives à rouler sans glisser l'une sur l'autre. Leur vitesse commune v au point de contact est donc

$$v = \omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2}$$

Pour que les dents d'une des deux roues puissent entrer et sortir des entredents de la roue conjuguée, il faut évidemment qu'elles soient plus étroites en leur sommet qu'en leur base. Au point de contact, le profil de la dent a donc sa normale inclinée d'un angle β par rapport à la tangente au cercle passant par ce point de contact. Cet angle est appelé *angle de pression*. La dent conjuguée doit à ce moment avoir, au point de contact, *le même angle*. C'est à partir de ces conditions que l'on détermine le profil des dents, dont l'étude précise relève de cours spécialisés. En mécanique de puissance, on utilise exclusivement le profil en *développante de cercle*. Il possède cette propriété fondamentale que *l'angle de pression reste constant tout au long de l'engrènement*. A l'heure actuelle, cet angle est normalisé à la valeur

$$\beta = 20^\circ$$

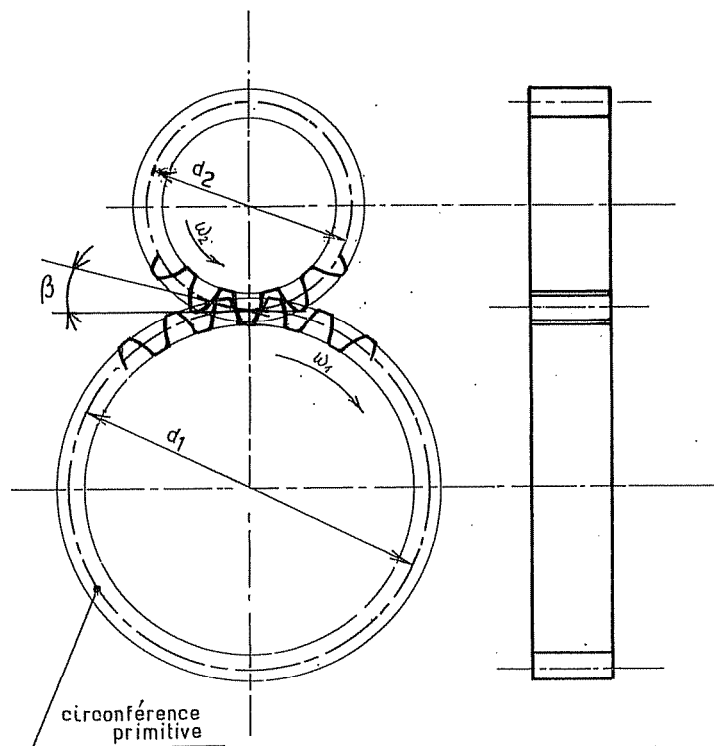


FIG. 113

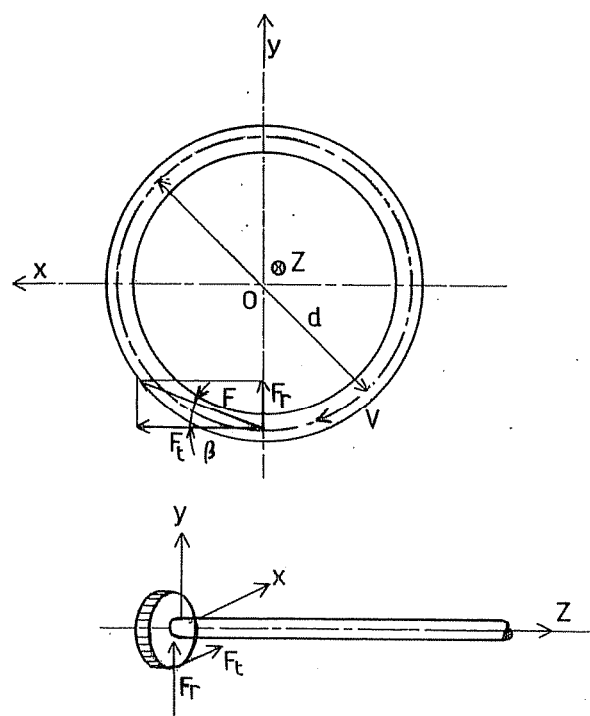


FIG. 114

Si l'on néglige les frottements, l'action de la roue menante sur la roue menée est située sur la normale commune aux deux profils. On a donc (fig. 114)

$$\text{Force tangentielle: } F_t = Q = \frac{P}{v} = \frac{P}{\omega \frac{d}{2}}$$

$$\text{Force radiale} \quad : \quad F_r = F_t \operatorname{tg} \beta$$

Pour un angle de pression de 20° , la tangente vaut 0,36, ce qui signifie que l'effort secondaire vaut ici 36% de l'effort actif. Les forces ci-dessus induisent les sollicitations suivantes pour l'arbre :

- Moment de torsion $M_t = F_t \frac{d}{2}$.
- Flexion dans le plan xOz, sous l'effet de l'effort tranchant F_t
- Flexion dans le plan yOz, sous l'effet de l'effort tranchant F_r

3.1.3.2 – Engrenage à denture hélicoïdale

Diverses considérations pratiques, au rang desquelles interviennent le silence de fonctionnement et la régularité de l'engrènement, conduisent à préférer dans bien des cas la denture hélicoïdale. Sa caractéristique est que les dents sont inclinées par rapport à la génératrice du cylindre primitif d'un certain angle γ . Cet angle d'hélice varie entre 8° et 20° selon les applications. Il vaut souvent 10° .

Sur une dent, on a toujours (fig. 115)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_r$$

avec

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \beta$$

et l'angle de contact reste en général de 20° . Mais du fait de l'angle d'hélice γ , la force tangentielle $\mathbf{F}_t$ se décompose elle-même en une composante active $\mathbf{Q}$ et une *force axiale* $\mathbf{F}_a$. On a donc

$$F_a = Q \operatorname{tg} \gamma \quad \text{et} \quad F_t = \frac{Q}{\cos \gamma}$$

soit en définitive

$$Q = \frac{P}{\omega \frac{d}{2}}, \quad F_a = Q \operatorname{tg} \gamma, \quad F_r = Q \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \gamma}$$

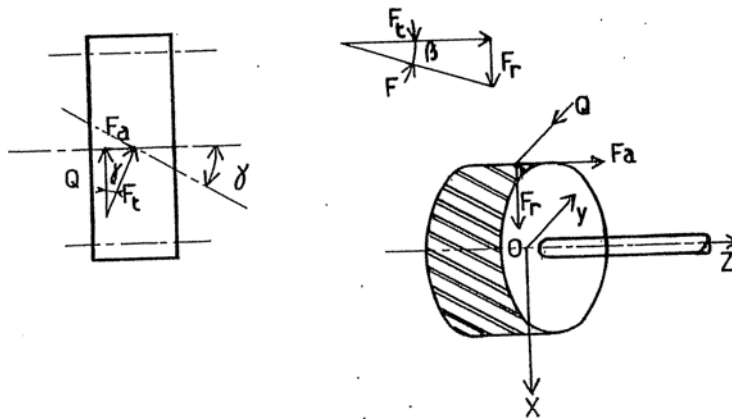


FIG. 115

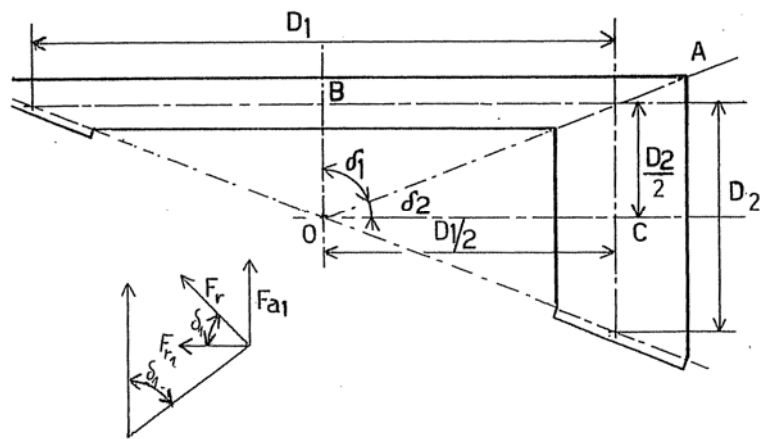


FIG. 116

Ces efforts soumettent l'arbre à

- un moment de torsion $M_t = Q \frac{d}{2}$
- une flexion dans le plan xOz, due aux efforts F_r et F_a
- une flexion dans le plan yOz, due à l'effort Q
- un effort axial F_a qui devra être repris par une butée.

Remarque importante : l'effort axial change de sens avec le couple.

3.1.3.3 – Engrenage conique droit

Nous nous limiterons au cas courant de l'engrenage entre deux arbre perpendiculaires. Les deux demi-angles au sommet des cônes, δ_1 et δ_2 (fig. 116) sont liés par les relations

$$\begin{aligned}\delta_1 + \delta_2 &= \frac{\pi}{2} \\ \frac{D_1}{2} \operatorname{tg} \delta_2 &= \frac{D_2}{2} \\ \frac{D_2}{2} \operatorname{tg} \delta_1 &= \frac{D_1}{2}\end{aligned}$$

ce qui implique, en notant Z le nombre de dents,

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{D_1}{D_2} = \frac{Z_1}{Z_2}, \quad \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{D_2}{D_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

La force active vaut

$$Q = \frac{P}{\omega_1 \frac{D_1}{2}} = \frac{P}{\omega_2 \frac{D_2}{2}}$$

La composante normale à la ligne OA, dans le plan BAC, vaut

$$F_n = Q \operatorname{tg} \beta$$

β étant l'angle de pression. Elle se décompose en

$$\begin{aligned}F_{r1} = F_{a2} &= F_n \cos \delta_1 = F_n \sin \delta_2 \\ F_{r2} = F_{a1} &= F_n \sin \delta_1 = F_n \cos \delta_2\end{aligned}$$

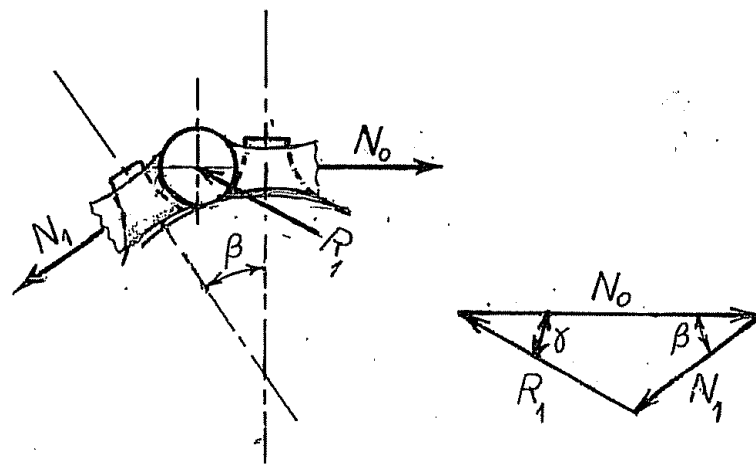


FIG. 117

3.1.4 – Efforts secondaires dans les transmissions par courroie

Les efforts secondaires dus aux courroies ont été calculés lors de l'étude des courroies dans le chapitre sur le frottement. Nous ferons simplement remarquer que ces efforts secondaires sont de loin supérieurs à l'effort actif Q .

3.1.5 – Efforts secondaires dans les transmissions par chaîne

Dans les transmissions par chaîne à rouleaux, les rouleaux transmettent l'effort à la roue dentée avec une certaine obliquité γ égale au demi-angle de la dent (*fig. 117*). Cette obliquité est de l'ordre de 15 à 19°. On a donc, si β est l'angle entre deux maillons, les relations

$$\begin{aligned}N_0 &= N_1 \cos \beta + R_1 \cos \gamma \\N_1 \sin \beta &= R_1 \sin \gamma\end{aligned}$$

De la seconde, on tire immédiatement

$$R_1 = N_1 \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

ce qui implique

$$N_0 = N_1 \left(\cos \beta + \frac{\sin \beta \cos \gamma}{\sin \gamma} \right) = N_1 \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \gamma}$$

Cette relation se reproduit de maillon en maillon. Après n maillons, il subsiste donc un effort

$$N_n = N_0 \left(\frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \right)$$

On a évidemment $\beta = \frac{2\pi}{Z}$ où Z est le nombre de dents de la roue. Le nombre de dents *en prise* est donné par

$$Z_p = \text{partie entière} \left(Z \frac{\alpha}{2\pi} \right)$$

où α est l'arc embrassé. L'effort au brin mou vaut donc

$$t = T \left(\frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \right)^{Z_p}$$

Ainsi, par exemple, pour $\gamma = 15^\circ$ et 17 dents, on a

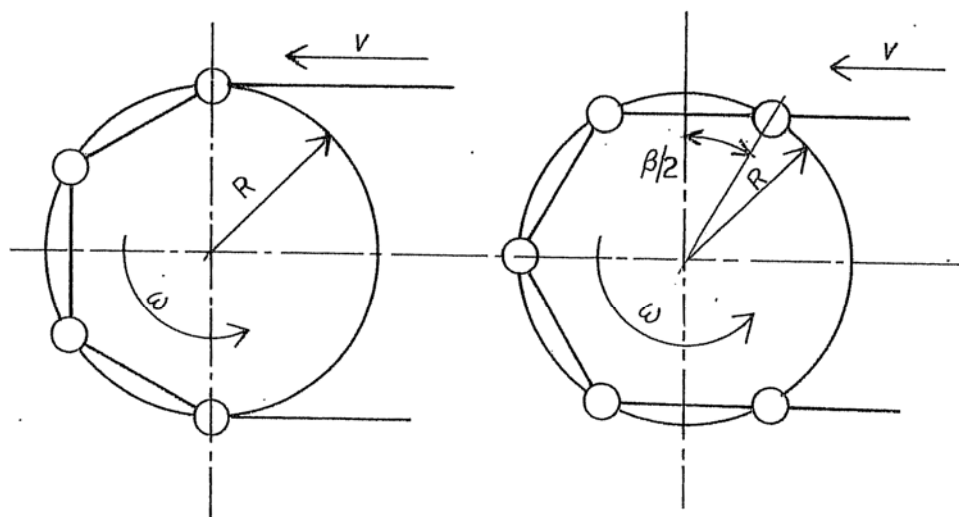


FIG. 118

$$\beta = \frac{360}{17} = 21,18^\circ$$

et

$$\frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{\sin(15^\circ)}{\sin(36,18^\circ)} = 0,4384$$

Le nombre de dents en prise vaut, si l'arc embrassé est de 180° ,

$$Z_p = \text{partie entière} \left(17 \frac{180}{360} \right) = 8$$

On obtient donc

$$\frac{t}{T} = (0,4384)^8 = 0,001364$$

L'effort dans le brin mou est donc *négligeable* et on peut écrire sans grande erreur $T = Q$. L'effort sur l'axe est dès lors approximativement égal à l'effort actif Q , dans la direction du brin tendu. C'est là l'avantage des chaînes sur les courroies : à effort actif égal, elles soumettent l'arbre à des efforts bien moindres.

Il existe cependant un inconvénient aux transmissions par chaînes. Il s'agit de l'**effet de polygone**, qui consiste en ceci : supposons (*fig. 118*) que la roue, motrice, tourne à une vitesse de rotation constante ω . Dans la première configuration illustrée à la figure 118, la vitesse du brin tendu de la chaîne est donnée par

$$v = \omega R$$

tandis que dans la seconde configuration, elle vaut

$$v = \omega R \cos \frac{\beta}{2}$$

La transmission du mouvement n'est donc pas parfaitement régulière. Cet effet s'accroît pour les roues à faible nombre de dents, pour lesquelles l'angle β est relativement grand.

Les *courroies crantées* s'apparentent aux chaînes pour la transmission de l'effort, avec $\gamma = 20 \dots 25^\circ$. Elles n'ont pas d'effet de polygone.

3.1.6 – Bibliographie

1. G. NIEMANN – *Maschinenelemente 2*
Springer, Berlin, 1965
2. G. KOEHLER, H. ROEGNITZ – *Maschinenteile 2*

Teubner, Stuttgart, 1976
ISBN 3-519-26313-0

3. V. DOBROVOLSKI et al. – *Eléments de machines*
Mir, Moscou, 1974

4. J. BOULVIN – *Mécanique appliquée aux machines*
3^e édition, Albin Michel, paris, 1922

3.2 – AVANT-PROJET D'UN ARBRE

3.2.1 – Introduction

Le calcul des efforts peut en général être mené sur un schéma de principe de la chaîne cinématique. L'avant-projet consiste à dessiner l'arbre réel, de telle façon qu'il soit capable d'absorber ces efforts

- *en résistant suffisamment longtemps*
- *sans trop se déformer*
- *sans vibrations exagérées*

et, condition absolue, il doit être *réalisable aussi simplement que possible*. Ajoutons que dans certaines applications interviennent de manière importante des conditions sur le *poids* (automobile et surtout, aviation).

Illustrons ces conditions sur un exemple. Soit à dessiner un arbre de sortie de réducteur, se terminant par un accouplement élastique. On admettra que cet accouplement ne transmet aucun moment de flexion. Il convient, bien entendu, que l'arbre de sortie soit dimensionné pour résister. Le moment de *flexion* est généralement le terme principal de la sollicitation. Il a l'allure donnée en figure 119.

a) Si l'on se limite au seul critère de résistance, on donnera à l'arbre une section plus grande au droit de la roue dentée. Nous serons cependant amenés à réviser cette conception.

b) Pour ce type d'applications, les roulements sont montés *serrés sur l'arbre* et libres dans les logements. Le dessin de la figure 119 est donc inadmissible, car il donne à l'arbre la possibilité de se mouvoir axialement. Nous touchons ici à un grand principe de la construction mécanique : *même si aucune force calculable ne tend à provoquer ce mouvement parasite*, il aura toutes les chances de se produire du fait de causes fortuites ou secondaires : très légères inclinaisons, vibrations, etc... Il faut donc empêcher le mouvement axial, sur *un* roulement (et non sur les deux, car cela empêcherait la libre dilatation de l'arbre). On obtiendra ce résultat (*fig. 120*) à l'aide d'épaulements et de couvercles. Il faut encore assurer l'*étanchéité* pour éviter que des particules abrasives n'entrent dans les roulements et les engrenages.

c) Si la souplesse de l'arbre est trop grande, il se pourrait que l'engrènement soit défectueux.

d) Il faut être attentif à la réalisation. Lors de chaque étude, on s'occupera explicitement de l'*ordre de montage* des pièces, pour vérifier que la machine est *réalisable*. Ainsi, pour l'arbre de la figure 120, on a conçu la gamme d'assemblage suivante qui n'est certes pas optimale, mais présente un certain intérêt par la répercussion qu'elle a sur la forme de l'arbre :

1. *Montage du roulement A (serré) sur l'arbre*
2. *Montage du roulement B (serré) sur l'arbre*
3. *Enfiler l'arbre par la droite dans les paliers, en enfilant simultanément la roue dentée (qui ne peut donc pas être frettée)*
4. *Pose du couvercle de gauche*

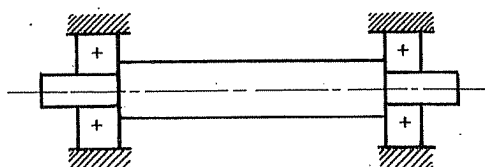
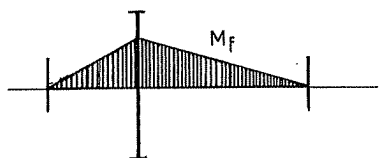
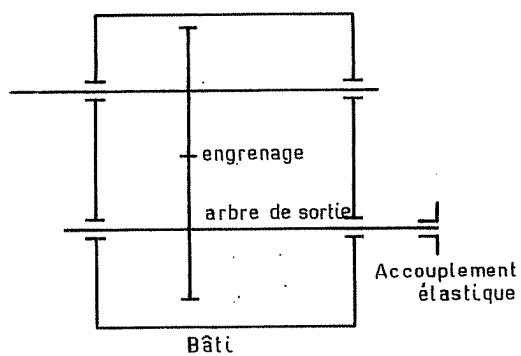


FIG. 119

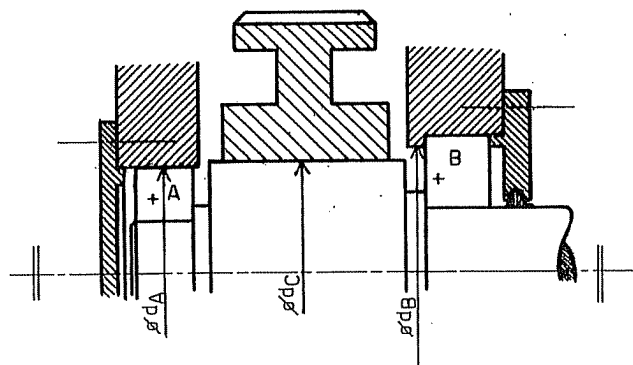


FIG. 120

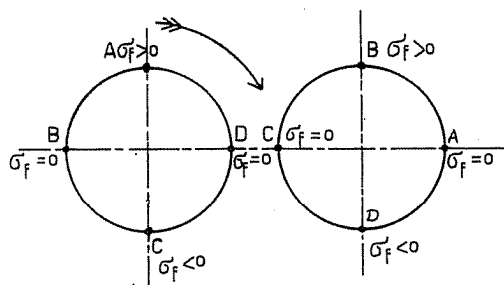
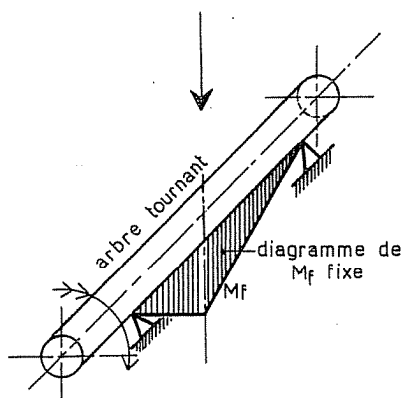


FIG. 121

5. Pose de la garniture d'étanchéité dans le couvercle droit
6. Enfiler le couvercle droit sur l'arbre et le fixer au bâti.

On remarquera que l'opération 3 est délicate et c'est pour cette raison que nous avons dit que la gamme d'assemblage n'est pas optimale. Mais une chose est certaine : cette gamme exige les conditions

$$d_A < d_C < d_B$$

sans quoi l'étape 3 est géométriquement impossible.

3.2.2 – Le facteur de service

Les efforts calculés correspondent en fait à des valeurs de référence, généralement calculées pour un fonctionnement tranquille dans des conditions moyennes. Jusqu'ici, aucun compte n'a été tenu des *conditions particulières* d'application de la charge ni de l'aspect *probabiliste* de la sollicitation. C'est pourquoi, il faut multiplier la sollicitation calculée par un *facteur de service* que nous noterons K et qu'il faut se garder de confondre avec le coefficient de sécurité dont nous parlerons plus loin.

Dans un certain nombre de domaines où la sécurité est déterminante, il existe des *règlements* fixant les facteurs de service. Dans la construction mécanique courante, on se sert souvent de l'abaque de Richter et Ohlendorf que l'on trouvera dans le fascicule QR (*page A1*) et qui fait intervenir les facteurs suivants :

- 1) Type de moteur, plus ou moins brutal.
- 2) Fréquence des démarrages. Il faut se rappeler que lors des démarrages, il existe des surcharges dues aux forces d'inertie.
- 3) Distribution statistique de la charge et des chocs. Une machine qui travaille presque toujours à faible charge ne doit pas être dimensionnée comme si la pleine charge était de règle.
- 4) Sensibilité de l'organe calculé.
- 5) Temps de service quotidien.

3.2.3 – La notion de moment idéal

La plupart des arbres sont soumis à la fois à de la flexion et de la torsion. Dans la majorité des cas, l'arbre tourne par rapport à la direction du moment de flexion. Il en résulte que la contrainte de flexion en un point A de l'arbre varie constamment entre un maximum positif et un minimum négatif de même grandeur (*fig. 121*). On dit que l'arbre est soumis à la *fatigue*.

La résistance à la fatigue est plus faible que la résistance statique et même que la limite élastique. A cela s'ajoutent les concentrations de contrainte, si bien qu'il faut se limiter, au niveau de l'avant-projet, à des contraintes admissibles assez basses.

La combinaison du moment de flexion et du moment de torsion se traite souvent à l'aide de la notion de *moment idéal*. L'idée est la suivante. A un moment de flexion M_f est associée une contrainte de flexion

$$\sigma_f = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}}$$

La contrainte de torsion est quant à elle égale à

$$\tau_t = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}}$$

On peut adopter comme critère de mise hors service

$$\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_{f \text{ lim}}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_t}{\tau_{t \text{ lim}}} \right)^2 = 1$$

ce qui généralise le critère de von Mises. Ici, $\sigma_{f \text{ lim}}$ et $\tau_{t \text{ lim}}$ sont les contraintes qui mèneraient à la mise hors service pour de la flexion seule ou de la torsion simple, respectivement. En définissant, comme l'école allemande, le facteur

$$\alpha = \frac{\sigma_{f \text{ lim}}}{\tau_{t \text{ lim}} \sqrt{3}}$$

on transforme ce critère en

$$\sigma_f^2 + 3\alpha^2 \tau_t^2 = \sigma_{f \text{ lim}}^2$$

En service, on se limitera à une contrainte plus faible, c'est-à-dire que l'on adoptera une *pseudo-sécurité* s^* et que l'on se limitera à une *contrainte admissible* (jadis appelée *taux de travail*)

$$\sigma_{f \text{ adm}} = \frac{\sigma_{f \text{ lim}}}{s^*}$$

Si nous parlons de *pseudo-sécurité*, c'est parce que ce premier calcul ne tient pas compte des concentrations de contrainte. Mais celles-ci ne pourront être déterminées que lorsqu'on aura dessiné entièrement l'arbre, ce qui est précisément ce que nous nous attachons à faire. Il est

clair qu'il faudra *in fine* vérifier la résistance de façon plus précise. Le critère provisoire est donc

$$\sqrt{\sigma_f^2 + 3\alpha^2 \tau_t^2} = \sigma_{fadm}$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $\frac{\pi d^3}{32}$. On a

$$\frac{\pi d^3}{32} \sigma_f = M_f, \quad \frac{\pi d^3}{32} \tau_t = \frac{1}{2} M_t$$

et il est naturel de poser

$$\frac{\pi d^3}{32} \sigma_{fadm} = M_{fadm}$$

Ceci permet de récrire le critère sous la forme

$$\sqrt{M_f^2 + 0,75\alpha^2 M_t^2} = M_{fadm}$$

Le premier membre de cette relation est appelé *moment idéal* et noté M_i . On écrit donc

$$M_i = M_{fadm} \quad \text{avec} \quad M_i = \sqrt{M_f^2 + 0,75\alpha^2 M_t^2}$$

Pour une sollicitation statique, en se référant par exemple à la limite élastique, on sait que le coefficient α vaut l'unité. En fatigue, il faut se référer à la limite d'endurance qui peut être évaluée à

- la moitié de la limite de rupture R_m si la sollicitation est *alternée*, c'est à dire oscille entre σ_M et $(-\sigma_M)$

- *trois quarts* de la limite de rupture si la sollicitation est *pulsée*, c'est-à-dire oscille entre σ_M et 0.

Dans chacun de ces cas, la limite de torsion vaut la limite de flexion divisée par $\sqrt{3}$.

En pratique, le moment de torsion est nominalelement constant, mais pour tenir compte des démarrages, on juge généralement qu'il est sage de faire le calcul comme s'il était pulsé. Cela donne

$$\sigma_{f \lim} \approx \frac{R_m}{2}, \quad \tau_{t \lim} \approx 0,75 \frac{R_m}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = \frac{\sigma_{f \lim}}{\tau_{t \lim} \sqrt{3}} = \frac{1}{2 \cdot 0,75} = \frac{1}{1,50} = \frac{2}{3}$$

si bien que

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} M_t^2} = \sqrt{M_f^2 + \frac{1}{3} M_t^2}$$

C'est cette expression que nous adopterons dans tous les cas courants. Ajoutons que si le moment de torsion était également alterné, ce qui est rare, on obtiendrait

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + 0,75 M_t^2}$$

et que si l'on supposait que le moment de torsion est rigoureusement constant, on obtiendrait

$$M_i = \sqrt{M_f^2 + \frac{3}{16} M_t^2}$$

3.2.4 – Une première formule de dimensionnement à la fatigue

Pour un arbre tournant par rapport à la charge, on peut dans un premier temps choisir le diamètre par la formule

$$\frac{d}{mm} = 42,8 \frac{\left(\frac{M_i}{Nm} \right)^{0,352}}{\left(\frac{R_m}{MPa} \right)^{1/3}}$$

La valeur paradoxale de l'exposant du numérateur, 0,352, s'explique par le fait que pour établir cette formule, il a été tenu compte d'un certain facteur d'échelle. Le calcul peut se faire graphiquement grâce au diagramme que l'on trouvera dans la fascicule *QR*, page A2.

3.2.5 – Formule des arbres de manège

Pour les arbres longs sollicités par un moment de torsion supposé pulsé et un moment de flexion *proportionné* – nous allons voir ce que cela signifie - on utilise encore la très vieille formule des arbres de manège

$$\frac{d}{120mm} = 3 \text{ ou } 4 \sqrt[4]{\frac{\frac{P}{736W}}{\frac{N}{tr/min}}}$$

Il faut adopter *la plus grande* des deux racines. Pour les petits diamètres, c'est la racine quatrième qui est la plus grande et nous savons que cette formule limite l'angle de torsion à ¼ de degré par mètre. Pour les grands diamètres, c'est la racine cubique qui entre en jeu. Il s'agit

alors d'un calcul de résistance. Le principe est le suivant. Si l'on connaît le moment idéal M_i , on peut en déduire le diamètre par la relation

$$M_i = \frac{\pi d^3}{32} \sigma_{fadm}$$

qui équivaut à

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_i}{\pi \sigma_f}}$$

et en admettant qu'il y a une certaine proportion entre le moment idéal et le moment de torsion, ce que l'on peut écrire $M_i = kM_t$, il vient en effet

$$d = \sqrt[3]{\frac{32k}{\pi \sigma_f} M_t} = k \sqrt[3]{\frac{32}{\pi \sigma_f} M_t} = k_1 \sqrt[3]{\frac{P}{N}}$$

La question est à présent de déterminer ce que l'on entend exactement par un moment de flexion *proportionné* au moment de torsion. La contrainte de flexion admissible est fixée dans cette formule à 50MPa. Pour $P = 736W$ et $N = 1 \text{ tr/min}$, on a

$$\omega = \frac{\pi}{30} \text{ rad / s}$$

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{736.30}{\pi} \text{ Nm} = 7028 \text{ Nm} = 7,028.10^6 \text{ Nmm}$$

La formule des arbres de manège donne alors $d = 120\text{mm}$, donc

$$M_i = \frac{\pi.(120)^3}{32} .50 = 8,482.10^6 \text{ Nm}$$

et

$$k = \frac{8,482}{7,028} = 1,207$$

Cela revient à dire que

$$M_i^2 = k^2 M_t^2 = 1,457 M_t^2 = M_f^2 + \frac{1}{3} M_t^2$$

soit

$$M_f^2 = \left(1,457 - \frac{1}{3}\right) M_t^2 = 1,123 M_t^2 \quad , \quad M_f = 1,06 M_t$$

Ainsi, on peut considérer comme *proportionné* tout moment de flexion ne dépassant pas 1,06 fois le moment de torsion.

On trouvera dans le fascicule *QR*, page A3, un abaque à points alignés correspondant à la formule des arbres de manège.

3.2.6 – Tourillons d'extrémité

On appelle *tourillons* les parties de l'arbre qui sont engagées dans les paliers. Dans le cas de tourillons d'extrémité, c'est-à-dire situés en bout d'arbre, le moment de flexion et le moment de torsion sont nuls. Il ne faudrait pas en déduire que le diamètre de l'arbre peut également être nul. En effet, il existe un effort tranchant T , auquel l'arbre doit pouvoir résister. En considérant que cet effort tranchant est appliqué au milieu du palier de longueur ℓ , il en résulte au bord du palier, vers l'intérieur, un moment de flexion

$$M_f = T \frac{\ell}{2}$$

La contrainte de flexion correspondante,

$$\sigma_f = \frac{32M_f}{\pi d^3} = \frac{16T\ell}{\pi d^3}$$

devra être limitée à 50MPa , ce qui fournit la condition

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{T\ell}{\sigma_{fadm}}} \quad \text{avec} \quad \sigma_{fadm} = 50\text{MPa}$$

3.2.7 – Déformations de flexion

Pour déterminer la déformée, on utilise l'équation de l'élastique

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_f}{EI} = \frac{M_f}{E \frac{\pi d^4}{64}}$$

dans chacun des deux plans perpendiculaires contenant l'arbre, et on somme vectoriellement les déplacements. Il faut alors veiller à ce que les flèches et les rotations remplissent les conditions exprimées dans la partie *fonctionnalité* de ce cours

3.2.8 – Calcul vibratoire

Il faut alors s'assurer qu'il n'y a pas de risque de résonance. Pour les vibrations de torsion, le calcul est assez classique et nous ne nous y attarderons pas. Il existe également un phénomène redoutable en flexion : les *vitesse critiques de flexion*, phénomène où l'arbre tourne comme une corde à sauter. La première vitesse critique de flexion se produit à une fréquence de rotation égale à la fréquence de résonance en flexion. On trouvera dans le fascicule QR, page A6, quelques indications sur le calcul des vitesses critiques de flexion et des fréquences propres de torsion.

3.3 – PRINCIPES GÉNÉRAUX DE FIABILITÉ

3.3.1 – Introduction

L'objet de l'étude de fiabilité est de vérifier que l'ensemble mécanique considéré assurera correctement son service pendant une durée que l'utilisateur jugera *suffisante*. Précisons. Contrairement peut-être au sens commun, point n'est besoin d'assurer une durée de vie illimitée à chaque pièce. Ce n'est d'ailleurs pas possible et chacun sait qu'il existe des pièces que l'on remplace plus ou moins fréquemment, comme les courroies, les roulements, les garnitures d'embrayages et de freins et bien d'autres encore. Toutes ces pièces ont une durée de vie *nécessairement* limitée pour des raisons physiques. Bien entendu, il ne faudrait pas que ces remplacements soient trop fréquents, car l'utilisateur ne serait pas satisfait. En effet, chaque arrêt de la machine est pour lui coûteux ou désagréable. A l'inverse, si la durée de vie était trop longue, le prix de la machine risquerait d'être plus élevé que dans la concurrence, le poids serait inutilement élevé, etc. Il y a quelques années, un grand fabricant de roulements s'est avisé de calculer aussi précisément que possible la durée de vie des boîtes à paliers qu'elle fabriquait depuis longtemps pour les wagons de chemins de fer allemands. Le résultat fut *370 ans* ce qui fait évidemment sourire et pose la question d'une opportunité de réduire quelque peu les dimensions de ces boîtes à paliers [1].

En fait, la durée de vie d'une machine est conditionnée par celle de ses organes principaux dont le remplacement nécessite des frais comparables à l'échange pur et simple de la machine (c'est ce que les assureurs appellent un sinistre total). Cette durée est elle-même limitée, car tôt ou tard, la machine sera remplacée par une autre, plus moderne et plus rentable pour l'utilisateur : c'est l'*obsolescence*. Il convient de noter à ce sujet que les grands constructeurs de biens pour tout public tendent à créer une obsolescence *subjective* en créant de nouvelles modes : être démodé, c'est être *considéré comme* obsolète. Le but est évidemment de pousser à la consommation.

3.3.2 – Notion de sécurité

3.3.2.1 – Analyse du concept de sécurité

La notion de sécurité étant souvent mal comprise, il convient de bien préciser le problème. Nous considérerons d'abord une sollicitation simple, qui pourra être l'extension pour fixer les idées. Pour connaître la contrainte que le système peut supporter, on fait un certain nombre d'expériences. Les résultats de ces expériences sont malheureusement soumis à un certain nombre de facteurs imprévisibles, même si les plus grandes précautions sont prises pour uniformiser les conditions des essais. En particulier, il faut se rappeler que le matériau est fait d'un amas de grains avec des dislocations, des joints, des inclusions etc... *A priori*, on penserait qu'en améliorant la pureté du matériau, la dispersion doit diminuer. Palmgren [2] a montré que pour les roulements, c'est le contraire qui se passe. Il donne de ce phénomène l'explication suivante. Quand le matériau est très imparfait, il est presque inmanquable que des imperfections diminuent la résistance. Quand au contraire, le matériau est très proche de la perfection, il existera toujours des cas où les rares imperfections jouent un rôle, ce qui signifie que la dispersion entre les très faibles et les très grandes durées de vie est importante. En résumé, il existe *inévitablement* une *dispersion* des résultats.

En multipliant les expériences, on peut établir une courbe de probabilité de résistance de l'éprouvette. Cette probabilité est encore appelée *fiabilité*. La forme de cette courbe est très généralement celle de la figure 122, où l'on a noté S la fiabilité et σ la contrainte. La courbe (σ, S) est tangente à la droite $S = 1$ pour $\sigma = 0$ et admet une asymptote $S = 0$ pour $\sigma \rightarrow \infty$. Cette courbe étant supposée connue, on se fixe une *fiabilité de référence* S^* , en principe arbitraire, et on définit la *contrainte limite* σ_{lim} comme l'abscisse correspondant à S^* . Ceci est illustré par la figure 123.

Un accroissement de la fiabilité correspond, comme le montre la figure 123, à une diminution de la contrainte. Dès lors, si l'on estime que dans l'application envisagée, il faut assurer une fiabilité plus grande que celle de référence, il faudra se limiter à une contrainte $\sigma(S) < \sigma_{lim}$. Le rapport

$$s = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma(S)} > 1$$

est alors appelé *coefficient de sécurité*. Graphiquement, si l'on trace un axe des σ (fig. 124), le coefficient de sécurité est le rapport entre la longueur OB représentant σ_{lim} et la longueur OA représentant la contrainte appliquée σ .

Fixer le coefficient de sécurité à une valeur supérieure à l'unité revient donc à garantir une fiabilité plus grande que celle de référence. Mais il existe des applications où la fiabilité de référence n'est pas nécessaire. On pourra alors choisir un coefficient de sécurité *inférieur à l'unité*. Pour montrer que ce n'est pas une vue de l'esprit, donnons tout de suite un exemple. La capacité statique d'un roulement à billes est la charge qu'il peut supporter à l'arrêt sans que les billes ne créent de trop grands cratères dans les pistes. La conséquence de ces cratères est un fonctionnement bruyant. Autant ce problème est important dans le cas d'un appareil devant fonctionner à côté d'un lit d'hôpital, autant il est totalement indifférent sur un chantier de génie civil. Dans le premier cas, on choisira une sécurité de 2, mais dans le second cas, une sécurité de 1/2 est tout à fait normale.

On est donc loin de la conception naïve d'une valeur critique sans dispersion, ce qui correspondrait au diagramme de la figure 125. Mais dans le cadre de cette conception étriquée, on peut se demander si un coefficient de sécurité sert bien à quelque chose !

3.3.2.2 – Démarche d'Odingue

Le choix du coefficient de sécurité dépend d'un certain nombre de facteurs liés au matériau, à l'utilisation de l'organe et à la précision du calcul des contraintes. Odingue [3] a proposé de déterminer le coefficient de sécurité par la formule

$$S = S_{mat} \cdot S_{grav} \cdot S_{préc}$$

où

- S_{mat} dépend de la dispersion des résultats relatifs au matériau. Voici quelques valeurs indicatives :

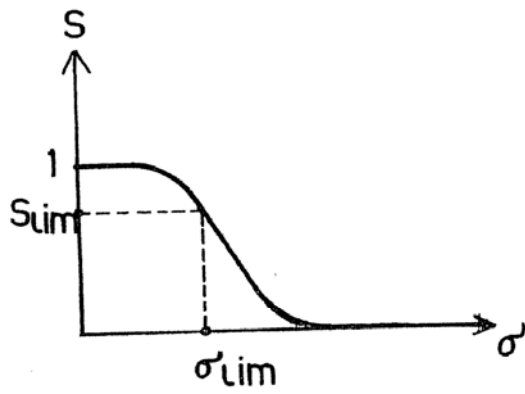


FIG. 122

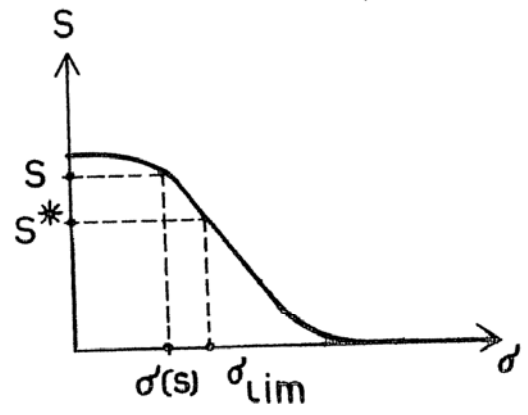


FIG. 123

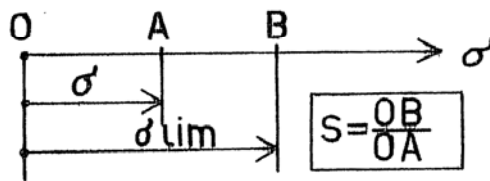


FIG. 124

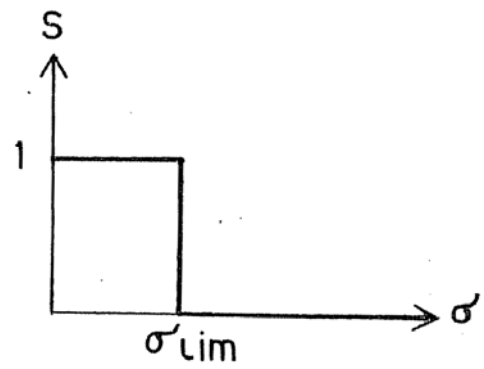


FIG. 125

$s_{mat} = 1,05$ à $1,10$ pour une pièce obtenue à partir d'une ébauche forgée ou laminée, *en statique*.

$s_{mat} = 1,15$ à $1,20$ pour une pièce obtenue à partir d'une ébauche moulée, *en statique*.

$s_{mat} = 1,20$ à $1,30$ pour une pièce soumise à la *fatigue*.

• s_{grav} tient compte de la gravité d'une mise hors service. (Il est moins grave de casser un moulin à café que de n'avoir plus de direction à sa voiture.) En voici des valeurs indicatives :

$s_{grav} = 1$ à $1,3$

• s_{prec} tient compte de la précision du calcul, de la confiance que l'on a dans ses hypothèses et en général, dans ses résultats. On pose en moyenne

$s_{prec} = 1,2$ à $1,3$, parfois plus.

Remarquons que ce coefficient permet, par exemple, si l'on fait un calcul très grossier, donnant la valeur de la contrainte à un facteur 2 près, d'attribuer la valeur 2 à s_{prec} . Ceci correspond bien au sentiment que, dans ce cas, il faut calculer largement.

Les valeurs que nous avons évoquées conduisent à un coefficient de sécurité minimal de

$$1,05 \cdot 1,1 \cdot 1,2 \approx \mathbf{1,25}$$

et à un coefficient maximal de

$$1,30 \cdot 1,30 \cdot 1,30 = 2,197 \approx \mathbf{2,2}$$

En pratique, il est assez courant, pour une sollicitation statique, de travailler avec un coefficient de sécurité de 1,25 par rapport à la limite élastique. Lorsqu'il s'agit d'un risque de rupture fragile (fonte), on adopte le plus souvent un coefficient de sécurité de 2 par rapport à la limite de rupture. *En fatigue*, le coefficient de sécurité se situe entre 2 et 2,5.

Dans un certain nombre de branches de l'industrie, il existe des *règlements* relatifs aux coefficients de sécurité. C'est notamment le cas du calcul des chaudières, pour lequel on se réfère souvent au code A.S.M.E.

3.3.3 – Notion de critère de mise hors service

Jusqu'à présent, nous avons envisagé une sollicitation simple. Nous avons vu que dans ce cas, si OB représente sur l'axe des σ la longueur correspondant à σ_{lim} et si OA représente sur le même axe la valeur de la contrainte σ dont on veut vérifier la sécurité, le coefficient de sécurité est le rapport

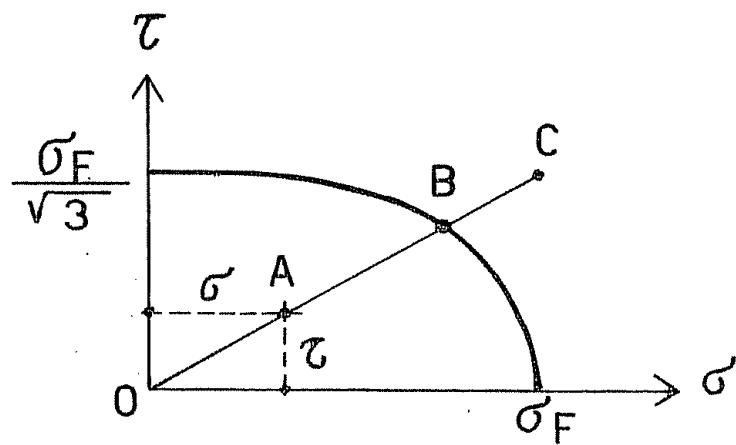


FIG. 126

$$s = \frac{OB}{OA}$$

Une sollicitation composée $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31})$ peut être représentée par un point de l'espace à six dimensions dont les axes représentent chacun une des composantes. On pourra ainsi, dans cet espace, définir des *surfaces d'équifiabilité* de la forme

$$F(\sigma, S) = 1$$

A la fiabilité de référence S^* correspond la surface d'équation

$$f(\sigma) \equiv F(\sigma, S^*) = 1$$

La fonction f est appelée *critère de mise hors service* et la surface correspondante, *surface limite*. Cette surface étant définie, on dit que la sollicitation σ présente une sécurité s si la sollicitation homothétique

$$S\sigma = (s\sigma_{11}, s\sigma_{22}, s\sigma_{33}, s\sigma_{12}, s\sigma_{23}, s\sigma_{31})$$

est située sur la surface limite, c'est-à-dire si

$$f(s\sigma) = 1$$

La figure 126 illustre cette notion dans le cas du critère de von Mises pour une sollicitation (σ, τ) . La courbe limite est ici une ellipse. OA est le vecteur représentatif de l'état de contrainte considéré, B est le point de percée du prolongement de ce segment sur la courbe limite. La sécurité est encore

$$s = \frac{OB}{OA}$$

Pour être rigoureux, il faut remarquer que n'importe quelle fonction $\sigma \rightarrow f(\sigma)$ ne peut pas être candidate à servir de critère de mise hors service. Pour que nos définitions aient du sens, il faut que l'ensemble $E = \{f(\sigma) \leq 1\}$ jouisse au moins des propriétés suivantes :

- a) Il contient l'origine
- b) Il contient entièrement le segment joignant l'origine à un point quelconque de sa frontière. Un ensemble jouissant de cette propriété est dit *étoilé par rapport à l'origine*.
- c) Quel que soit l'élément de l'espace des contraintes, il existe sur la demi-droite partant de l'origine vers ce point, un point de la surface limite à une distance non nulle de l'origine. (On dit que E est *absorbant*).

Enfin, dans les cas courants, E est *convexe*.

3.3.4 – Bibliographie

1. G. BERGLING – Analysis of failure statistics for railway axlebox bearings
Rolling bearings reliability, éd. S.K.F., 1977
2. A. PALMGREN – Life dispersion of rolling bearings
The ball bearing journal n°4, 1950, S.K.F., Göteborg
3. V. DOBROVOLSKI *et al.* – *Eléments de machines*
Mir, Moscou, 1974

3.4 – ESSAIS MÉCANIQUES DES MATÉRIAUX

3.4.1 – Essai de traction

Le plus connu des essais de matériaux est l'*essai de traction*. L'éprouvette classique de traction a la forme représentée à la figure 127. Outre la portion cylindrique sur laquelle porte la mesure, il faut en effet prévoir des têtes permettant la prise de l'éprouvette dans les mâchoires de la machine. Entre les têtes et la portion cylindrique, on ménage une section conique pour limiter les concentrations de contrainte. Il convient en effet que l'éprouvette se rompe dans sa partie cylindrique. Les éprouvettes courantes ont un rapport ℓ_0/d_0 entre leur longueur et leur diamètre égal à 5. Dans le cas où l'on utilise des éprouvettes à section non circulaire, la condition est

$$\ell_0 = 5,65\sqrt{S_0}$$

La machine de traction permet d'enregistrer le diagramme force/allongement. Définissant la *contrainte* par le rapport entre la force appliquée F et la section de départ S_0 ,

$$\sigma = \frac{F}{S_0}$$

et la *déformation* par le rapport entre l'allongement $\Delta\ell$ et la longueur initiale ℓ ,

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

on peut effectuer un changement d'échelle menant au diagramme contrainte/déformation (fig. 128). Les grandeurs importantes que l'on peut en principe mesurer sur ce diagramme sont

- Le *module de Young* E
- La *limite élastique* R_e ou, si elle n'est pas nettement marquée, la *limite élastique conventionnelle* à 0,2% d'allongement permanent, $R_{0,2}$
- La *résistance à la rupture* R_m , contrainte correspondant au maximum du diagramme (σ, ε) .
- L'allongement à la rupture A . Si celui-ci est supérieur à 5%, le matériau est réputé *ductile*. S'il est inférieur à 5%, le matériau est réputé *fragile*.

Cependant, il convient de noter que la droite de Hooke est quasiment verticale sur les diagrammes de traction courants, ce qui rend l'évaluation du module de Young *très imprécise*. C'est pourquoi on préfère généralement mesurer le module de Young par un essai de vibration. Un essai efficace de ce type consiste à placer un barreau cylindrique sur un tripode central et à l'exciter en extension à ses deux bouts (fig. 129). En modifiant la fréquence d'excitation, on peut déterminer la fréquence de résonance. Le mode propre correspondant est la demi sinusoïde d'équation spatiale

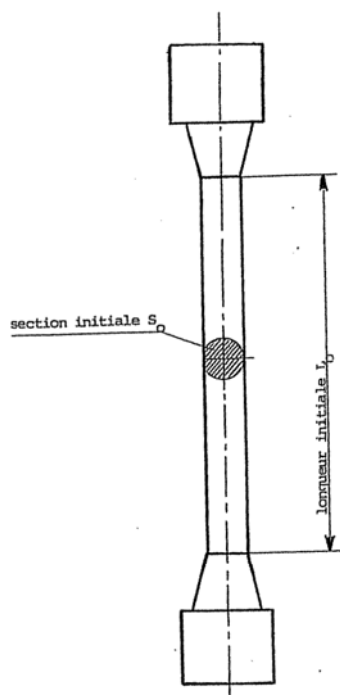


FIG. 127

ÉPROUVETTE DE TRACTION

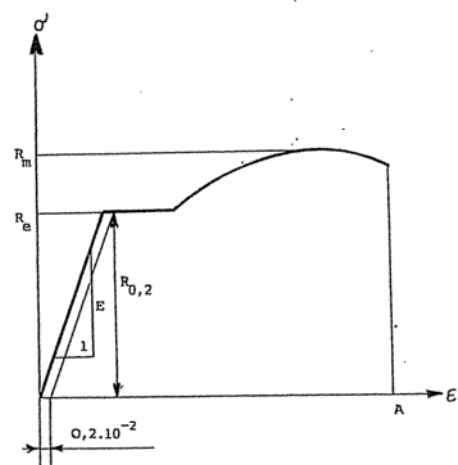


FIG. 128

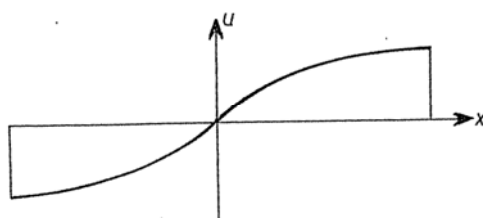
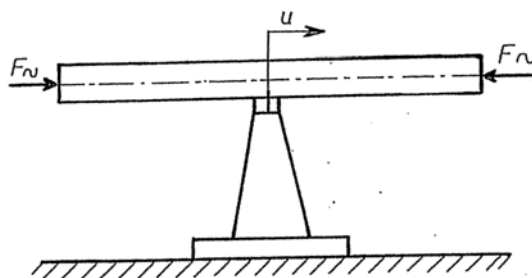


FIG. 129

$$u(x) = A \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

Pour une variation temporelle en $\sin \omega t$, l'énergie de déformation vaut

$$V = \frac{1}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} ES_0 u'^2 dx \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} ES_0 \frac{\pi^2 A^2}{\ell^2} \frac{\ell}{2} \sin^2 \omega t$$

et l'énergie cinétique,

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \rho S_0 u^2 dx \omega^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} \rho S_0 A^2 \frac{\ell}{2} \omega^2 \cos^2 \omega t$$

La vibration est caractérisée par un échange constant entre ces deux énergies, l'une étant maximale quand l'autre est nulle. On a donc

$$V_{\max} = T_{\max}$$

ce qui donne la relation suivante pour la pulsation propre ω :

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{E}{\rho}$$

Connaissant la fréquence propre $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ on peut donc déduire le module de Young par la relation

$$E = \rho \frac{\omega^2}{\pi^2} \ell^2 = 4\rho \nu^2 \ell^2$$

Cette mesure est assez précise. Cependant, on peut lui reprocher une erreur *de principe*. En effet, les vibrations sont des phénomènes rapides, si bien que la chaleur n'a pas le temps de se propager au cours des oscillations. Le phénomène est donc pratiquement *adiabatique*. Au contraire, l'essai de traction est lent et on peut considérer qu'il est *isotherme*. Le module de Young adiabatique E_{ad} n'a aucune raison d'être égal au module de Young isotherme E_{is} . Cette question a fait l'objet de longs débats au XIX^e siècle, et n'a été tranchée que par Lord Kelvin qui a démontré la relation suivante : si α est le coefficient de dilatation thermique, si c_p est la chaleur massique à contrainte constante et si T est la température absolue, on a

$$\frac{1}{E_{ad}} = \frac{1}{E_{is}} - \frac{\alpha^2 T}{\rho c_p} = \frac{1}{E_{is}} \left(1 - \frac{E_{is} \alpha^2 T}{\rho c_p} \right)$$

Prenons pour exemple un acier courant, pour lequel on peut admettre les valeurs suivantes :

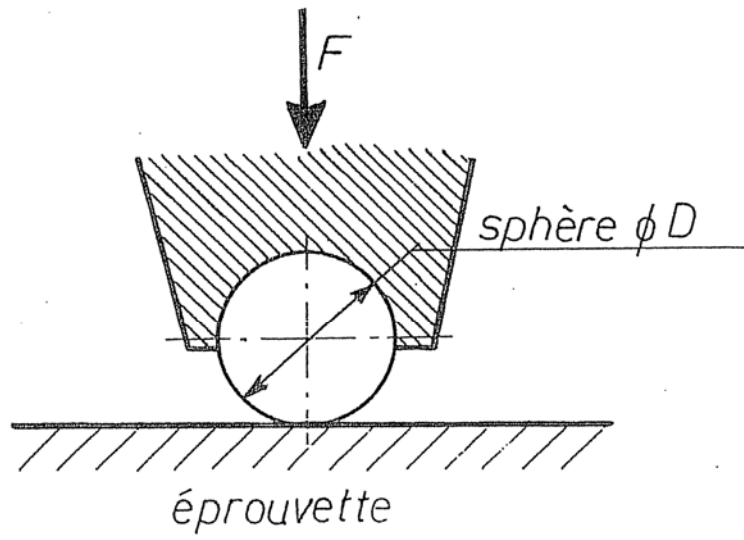


FIG. 130

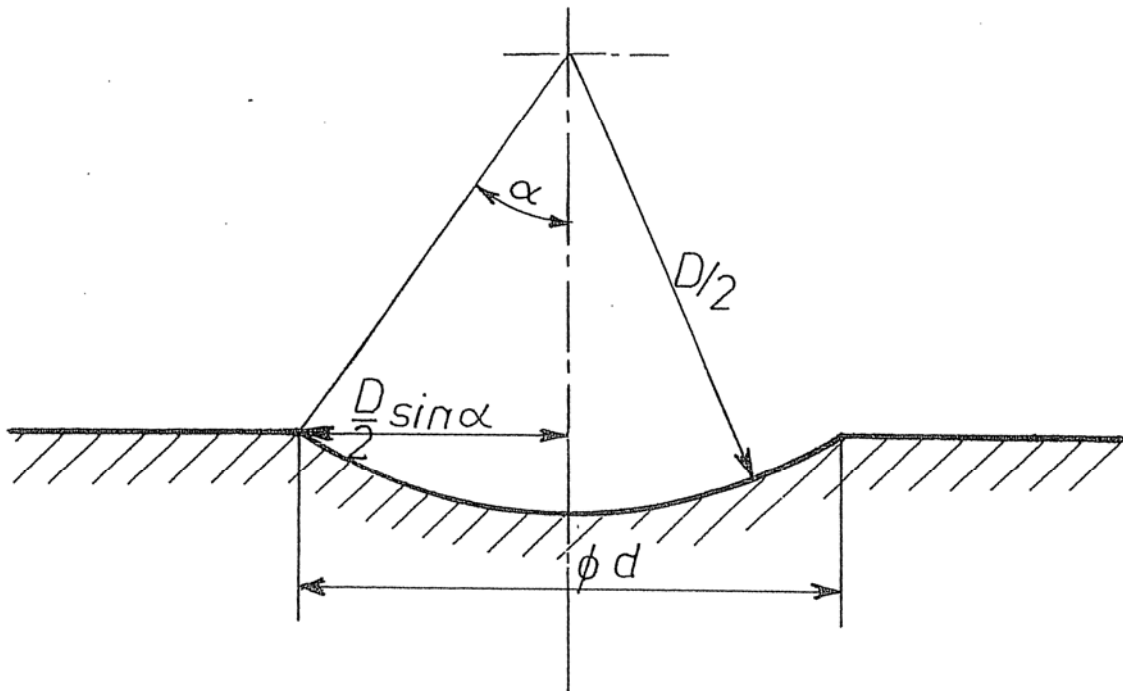


FIG. 131

$$E_{is} = 210000 \text{ MPa}$$

$$\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$c_p = 450 \frac{\text{J}}{\text{K.kg}}$$

à une température de 293K. Le groupe entre parenthèse de la formule de Kelvin vaut alors

$$(\dots) = \left(1 - 2,524 \cdot 10^{-3}\right)$$

soit une différence de 0,25% entre les deux modules. Cette erreur systématique est bien inférieure à celle de l'évaluation du module de Young à partir de la courbe de traction. Il faut cependant encore tenir compte des imprécisions sur ρ et ℓ , ce qui fait dire à l'O.T.U.A. (Office Technique pour l'Utilisation de l'Acier, France) qu'il est vain d'espérer une précision sur le module de Young meilleure que 5%.

3.4.2 – Essais de dureté

Par *dureté*, on entend la résistance qu'un matériau oppose à la pénétration d'un corps. Cette propriété joue un rôle important dans les problèmes de contact hertzien, ainsi que dans les phénomènes d'usure.

Les essais de dureté consistent généralement à faire pénétrer un corps réputé dur dans la pièce sous un effort donné et à mesurer soit l'empreinte qu'il y laisse, soit la profondeur à laquelle il s'arrête. Il s'agit donc d'essais *non destructifs*, du moins si l'on fait abstraction de l'empreinte laissée en surface.

3.4.2.1 – Dureté Brinell

L'essai Brinell consiste à faire pénétrer une bille en acier trempé (*HBS*) ou en carbure (*HBW*), de diamètre donné, sous une charge F (fig. 130). On maintient la charge pendant un certain temps, puis on mesure le diamètre d de l'empreinte. En négligeant le retour élastique, cette empreinte peut être assimilée à une calotte sphérique de diamètre D égal à celui de la bille. En se reportant à la figure 131, on constate que la surface de cette calotte vaut

$$S = 2\pi \int_0^\alpha \left(\frac{D}{2}\right)^2 \sin \theta d\theta = \frac{\pi D^2}{2} (1 - \cos \alpha)$$

on détermine α par la relation

$$\frac{d}{2} = \frac{D}{2} \sin \alpha$$

dont on déduit

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{d^2}{D^2}}$$

Il vient donc

$$S = \frac{\pi D^2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{D^2}} \right)$$

C'est la formule officielle. Mais en multipliant le numérateur et le dénominateur par

$$1 + \sqrt{1 - \frac{d^2}{D^2}}$$

on peut encore l'écrire

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{d^2}{D^2}}}$$

ce qui est plus précis numériquement. Cela étant, la dureté Brinell est définie en principe par

$$HB = \frac{F}{S}$$

Elle a la dimension d'une pression et devrait en principe s'exprimer en *MPa*, ce que font certains. Mais il est un usage fortement établi d'encore utiliser comme unité le *kgf/mm²* et, comme cette unité n'est plus reconnue, on dit simplement que le corps a par exemple une dureté de 220 Brinell, ce qui signifie

$$HB = 220.9,81 MPa$$

Nous ne recommandons pas cet usage, mais on ne peut pas l'ignorer.

Tout serait parfait si la dureté Brinell était une caractéristique intrinsèque du matériau. Malheureusement, ce n'est pas le cas, et pour un matériau donné, le rapport F/S dépend du diamètre de la bille. La raison en est que pour des enfoncements différents, les deux empreintes ne sont pas homothétiques. Pour faire apparaître le paramètre secondaire qui intervient, nous ferons appel à l'analyse dimensionnelle. Les variables intervenant dans l'essai sont

Grandeur	Unité
La charge F	F
Le diamètre de la bille D	L
La surface S	L^2
Une dureté intrinsèque σ_0	FL^{-2}

On a donc 4 grandeurs dépendant de 2 unités, ce qui fournit deux nombres sans dimensions. Le premier de ceux-ci pourra être

$$\Pi_1 = \frac{S}{D^2}$$

Il caractérise en fait le résultat de l'expérience. Comme second nombre sans dimension, on peut choisir

$$\Pi_2 = \frac{F}{\sigma_0 D^2}$$

qui caractérise les conditions de l'expérience. Il existe donc une relation

$$\Pi_1 = f(\Pi_2)$$

soit

$$\frac{S}{D^2} = f\left(\frac{F}{\sigma_0 D^2}\right) = f\left(\frac{k}{\sigma_0}\right)$$

en introduisant la grandeur

$$k = \frac{F}{D^2}$$

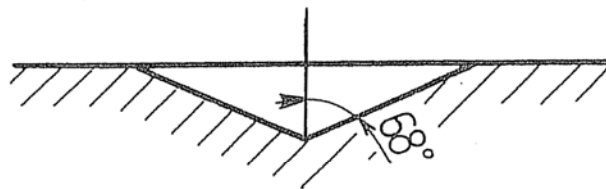
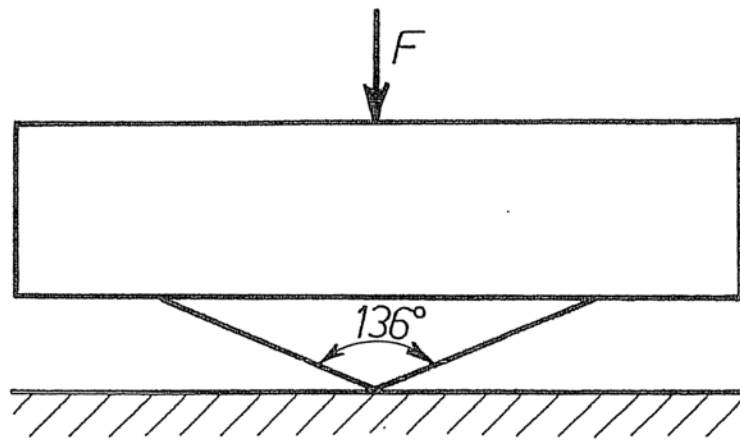
appelée *pression spécifique*. On en déduit

$$S = D^2 f\left(\frac{k}{\sigma_0}\right)$$

et

$$HB = \frac{F}{S} = \frac{F}{D^2} \frac{1}{f\left(\frac{k}{\sigma_0}\right)} = \frac{k}{f\left(\frac{k}{\sigma_0}\right)}$$

ce qui entraîne finalement



empreinte

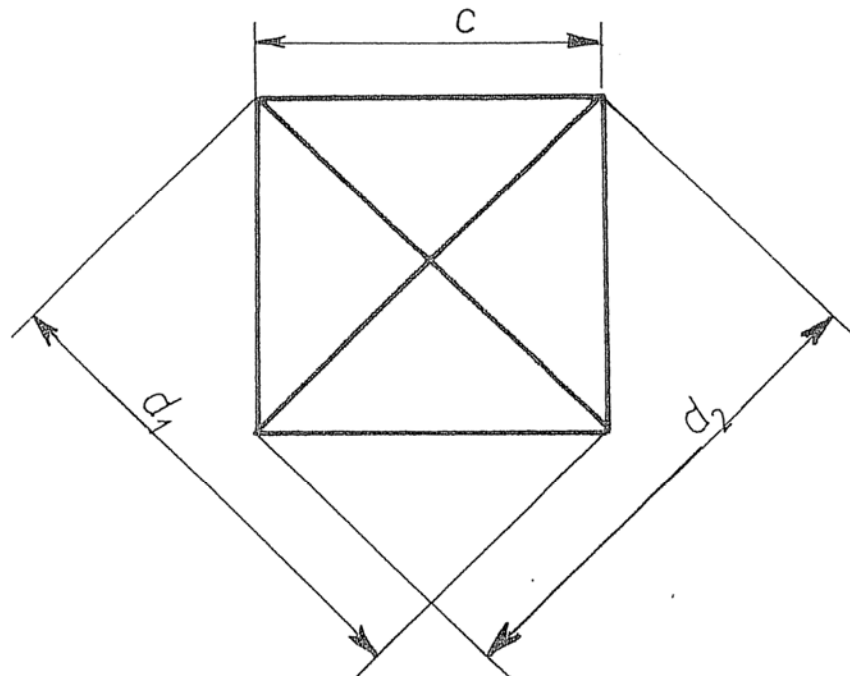


FIG. 132

$$\frac{HB}{\sigma_0} = \frac{\frac{k}{\sigma_0}}{f\left(\frac{k}{\sigma_0}\right)} = g\left(\frac{k}{\sigma_0}\right)$$

Ceci signifie que *pour un matériau donné, la dureté Brinell n'est déterminée de manière unique que si l'on spécifie la pression spécifique de l'essai.*

Les valeurs habituelles de la pression spécifique sont

Matériau à tester	k/(9,81MPa)
Aciers	30
Alliages d'Al	2,5 ; 5 ; 10
Alliages de Cu	5 ; 10 ; 30

Pour spécifier que l'essai a été réalisé, par exemple, avec $k = 30.9,81MPa$, on écrit

$$HB_{30} = 450 \quad (x9,81MPa)$$

L'essai n'est considéré comme significatif que si le rapport d/D est situé

- entre 0,2 et 0,6 en France
- entre 0,2 et 0,7 en Allemagne

On modifie éventuellement le rapport d/D en changeant la pression spécifique. En effet, cela a pour effet une pénétration plus profonde dans la matière.

3.4.2.2 – Dureté Vickers

L'essai Vickers se distingue du précédent par son pénétrateur. Il s'agit ici d'une pyramide de diamant, à base carrée, avec un angle au sommet de 136° . Le choix du diamant est judicieux, car le diamant est le matériau le plus dur que l'on puisse trouver. De plus, la forme en pyramide a pour effet que toutes les empreintes sont homothétiques, au contraire de la dureté Brinell. Pour le reste, la dureté Vickers est définie, comme la dureté Brinell, comme le rapport de la charge appliquée à la surface de l'empreinte,

$$HV = \frac{F}{S}$$

Comme le montre la figure 132, cette empreinte est constituée de quatre triangles de base c et de hauteur

$$h = \frac{c}{2\sin(68^\circ)}$$

Sa surface vaut donc

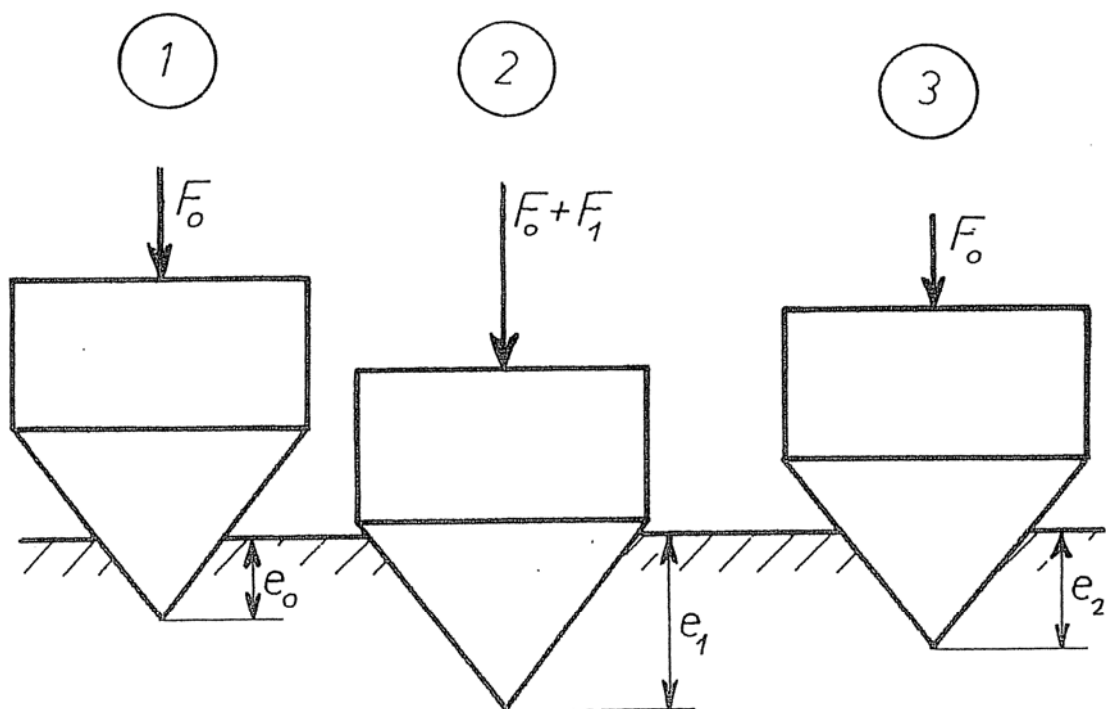


FIG. 133

$$S = 4 \frac{ch}{2} = \frac{c^2}{\sin(68^\circ)} = 1,079c^2$$

En pratique, on mesure au microscope les deux diagonales d_1 et d_2 . Elles ne sont pas nécessairement égales, car la surface du corps peut ne pas être parfaitement perpendiculaire à la trajectoire du pénétrateur. On prend donc la moyenne d de ces deux diagonales,

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

Il est clair que

$$c = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

si bien que

$$S = \frac{d^2}{2 \sin(68^\circ)} = 0,5393d^2$$

On en déduit

$$HV = \frac{F}{S} = 1,854 \frac{F}{d^2}$$

en unités cohérentes. Ici encore, il est resté d'usage d'exprimer les duretés Vickers en kgf/m^2 .

L'avantage essentiel de l'essai Vickers est de donner des résultats sensiblement indépendants de la charge. Ceci s'explique par le fait que deux empreintes de profondeur différentes sont géométriquement semblables. La charge la plus utilisée est

$$F = 30,9,81N = 294N$$

On préfère la dureté Vickers dans le cas des grandes duretés.

3.4.2.3 – Dureté Rockwell C

Les essais Brinell et Vickers sont fondés sur la mesure d'une pression, ce qui est raisonnable. Mais ils impliquent la mesure du contour de l'empreinte à l'aide d'un microscope, ce qui n'est ni facile ni rapide. Ce sont donc essentiellement des essais de laboratoire. Dans les entreprises, on préfère un processus plus rapide, et c'est pourquoi l'essai Rockwell a été créé. Il est assez différent des deux précédents. Tout d'abord au lieu de mesurer une pression, on mesure ici une *profondeur de pénétration*. En outre, on recourt à une *échelle arbitraire*.

Le pénétrateur peut être une bille d'acier (Rockwell B) ou un cône de diamant (Rockwell C). L'essai Rockwell B convient pour les matériaux tendres et l'essai Rockwell C

pour les matériaux durs. Nous ne décrivons ici que l'essai Rockwell C, mais les principes restent les mêmes dans le cas du Rockwell B. Le pénétrateur, en Rockwell C, est un cône de diamant de 120° d'angle au sommet. Le principe de l'essai est schématisé par la figure 133 :

1) On commence par appliquer une charge $F_0 = 98N$, ce qui provoque une pénétration de profondeur e_0 . Cette pénétration est indiquée par une aiguille tournante. A ce moment, on règle le zéro du cadran en face de l'aiguille. En fait, cette première étape est destinée à franchir la croûte du matériau, qui n'est pas intéressante.

2) On applique alors une surcharge $F_1 = 1373N$, ce qui induit une pénétration e_1 .

3) Enfin, on supprime la surcharge F_1 , tout en maintenant F_0 . La pénétration résiduelle est e_2 .

Comme on a mis le cadran en face de l'aiguille lorsque la pénétration était e_0 , on mesure directement en face de l'aiguille

$$e_3 = e_2 - e_0$$

sur une échelle dont chaque division équivaut à $2\mu m$. On lit donc le *nombre*

$$e = \frac{e_3}{2\mu m}$$

Il va de soi que plus ce nombre est petit, plus grande est la dureté. Par définition,

$$HRC = 100 - e$$

L'avantage essentiel de la dureté Rockwell est sa rapidité de mise en œuvre (pas de lecture au microscope).

3.4.2.4 – Une corrélation entre la dureté Rockwell C et la dureté Vickers

La dureté Rockwell C consiste à mesurer une profondeur de pénétration e et on a

$$HRC = A - Be$$

De son côté, la dureté Vickers est proportionnelle à l'inverse de la surface de l'empreinte, et celle-ci est proportionnelle au carré de la profondeur. On peut donc s'attendre à trouver une relation de la forme

$$HRC = C - \frac{D}{\sqrt{HV}}$$

Un ajustement par les moindres carrés à partir de la correspondance donnée dans la norme DIN50150 conduit à la corrélation suivante :

$$HRC \approx 116,5 - \frac{150}{\sqrt{\frac{HV}{GPa}}}$$

3.4.2.5 – Corrélation entre la dureté Brinell des aciers et leur charge de rupture

L'expérience montre qu'il existe une corrélation entre la dureté Brinell des aciers et leur charge de rupture,

$$R_m = \alpha \cdot HB$$

en unités cohérentes, avec $\alpha = 0,35 \dots 0,36$.

3.4.2.6 – Quelques valeurs indicatives de dureté

Il est utile d'avoir en tête quelques ordres de grandeur de dureté pour les aciers

Acier	HB	HV	HRC
St50 ($R_m = 500MPa$)	150	160	-
St80 ($R_m = 800MPa$)	240	250	22
100Cr6 trempé (acier à roulements)	-	850	63

La limite d'usinabilité généralement admise est 400 HB, 400HV ou 40 HRC.

3.4.3 – Essais de résilience

La *résilience* est la propriété des matériaux de résister aux chocs. Lors d'un choc *mou*, c'est-à-dire sans rebondissement, le corps frappé doit absorber tout d'un coup une quantité importante d'énergie sous forme de travail de déformation. L'essai de résilience a pour but de mesurer l'énergie menant à la rupture sur une éprouvette entaillée. La figure 134 représente l'éprouvette *Mesnager*, qui se caractérise par une entaille en U. On préfère à l'heure actuelle l'éprouvette *ISO* à entaille en V, qui est représentée en figure 135. Le dispositif d'essai le plus courant est le *mouton de Charpy* (fig. 136) dont le principe est le suivant. Il s'agit d'un lourd pendule que l'on bloque en position haute, à un angle α_0 . En convenant de mesurer les hauteurs à partir de l'axe de rotation du pendule, son énergie potentielle vaut alors

$$V_0 = -Mg\ell \cos \alpha_0$$

où ℓ est la distance de son centre de gravité à l'axe de rotation. On lâche le pendule, qui vient briser l'éprouvette en lui cédant une énergie W . Il continue ensuite sa course jusqu'à l'angle α_1 où il a transformé son énergie cinétique résiduelle en énergie potentielle. On a donc

$$V_1 = V_0 - W = -Mg\ell \cos \alpha_1$$

En conséquence, la rupture de l'éprouvette a nécessité une énergie

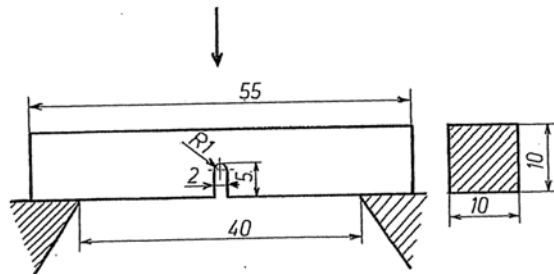


FIG. 134

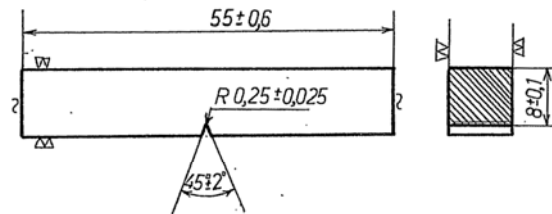


FIG. 135

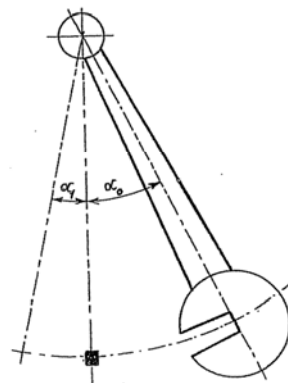


FIG. 136

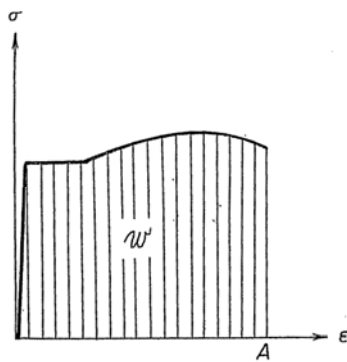


FIG. 137

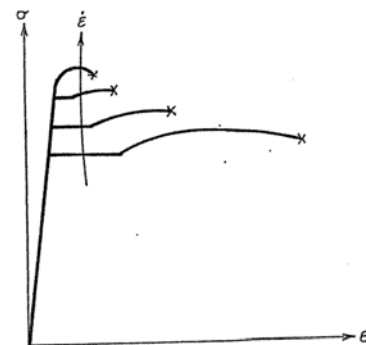


FIG. 138

$$W = V_0 - V_1 = Mgl(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0)$$

Les essais de résilience sont le plus souvent comparatifs. On se contente alors de la grandeur

$$KU \text{ ou } KV \text{ (épreuve en U ou en V)} = W$$

Néanmoins, on utilise aussi la mesure de résilience définie par

$$\begin{cases} KCU = \frac{KU}{S_0} \\ KCV = \frac{KV}{S_0} \end{cases}$$

où S_0 est la section de l'éprouvette au droit de l'entaille. Cela n'a à vrai dire pas grand sens, car il faudrait logiquement diviser l'énergie par un certain volume contraint et non par une surface. Il n'est donc pas étonnant que les essais réalisés sur des éprouvettes différentes ne soient pas comparables. Il est important de veiller à usiner les éprouvettes avec soin, c'est-à-dire sans défauts de forme et sans stries d'usinage, de manière à éviter tout effet d'entaille secondaire.

3.4.4 – La ténacité

Par *ténacité*, on entend l'énergie nécessaire pour rompre *statiquement* un volume unitaire du matériau en traction. Il s'agit de la grandeur

$$w = \int_0^A \sigma d\varepsilon$$

c'est-à-dire de l'aire sous la courbe de traction (*fig. 137*). Cette grandeur ne permet pas d'évaluer l'énergie de rupture par choc, parce que la courbe de la contrainte en fonction de la déformation *varie avec la vitesse de sollicitation* $\dot{\varepsilon}$ (*fig. 138*). Il faudrait donc enregistrer la courbe de traction sous choc, ce qui est très difficile en raison de la rapidité du phénomène.

3.4.5 – le facteur d'intensité de contrainte de la mécanique de la rupture

3.4.5.1 – Le facteur d'intensité de contrainte

La mécanique de la rupture est la discipline qui s'occupe de la propagation des fissures, domaine très important en construction aéronautique notamment. Le problème de base est une fissure non débouchante de largeur $2a$ (*fig. 139*). dans une membrane indéfinie soumise à un champ de contrainte uniforme σ_n à une distance très grande de la fissure. On étudie ce problème en théorie de l'élasticité en considérant un trou elliptique de demi grands axes a et b (*fig. 140*) et en faisant tendre b vers zéro. On obtient alors au voisinage du trou la solution asymptotique suivante (*voir le zoom de la figure 139*) :

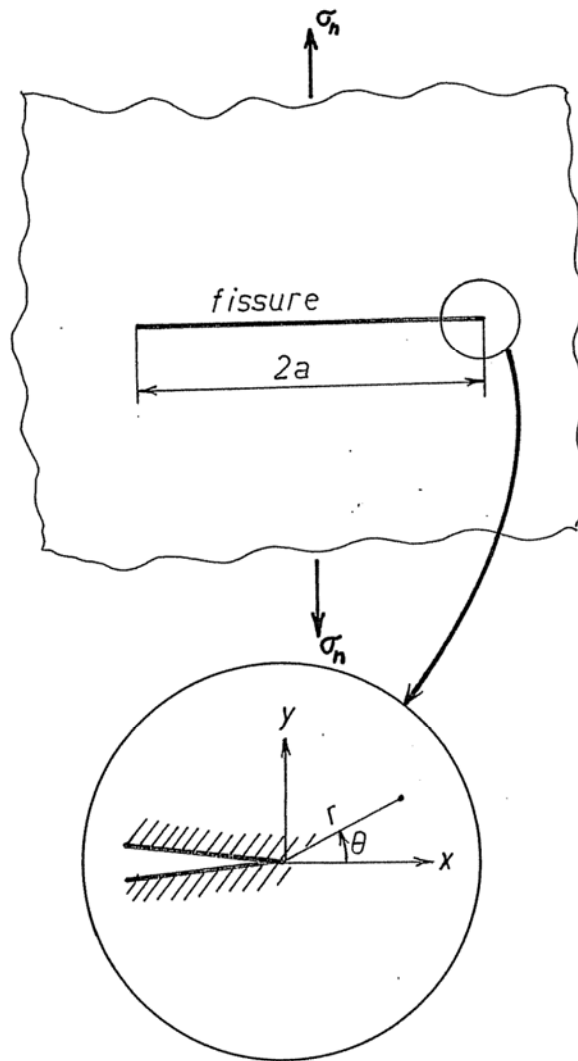


FIG. 139

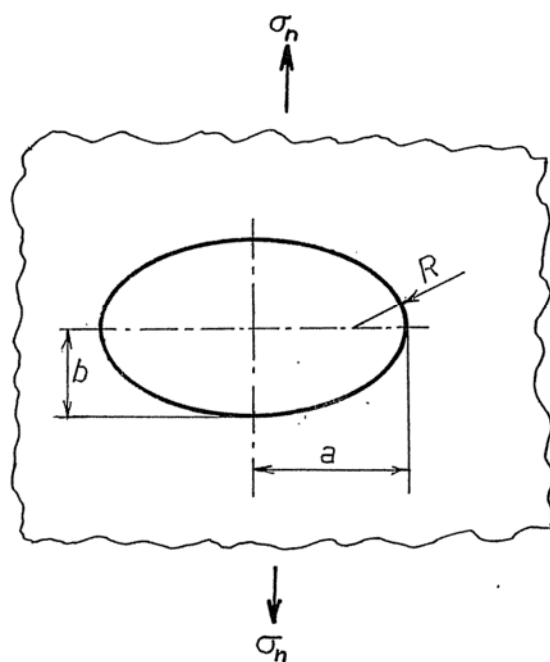


FIG. 140

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + o\left(\frac{a}{r}\right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + o\left(\frac{a}{r}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + o\left(\frac{a}{r}\right) \\ \text{où } K_I &= \sigma_n \sqrt{\pi a}\end{aligned}$$

Bien que ces champs de contrainte soient singuliers, leur énergie sur un cercle de rayon ρ est finie, puisqu'elle contient des termes de la forme

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\rho \frac{\sigma^2}{2E} r dr = \int_0^{2\pi} f^2(\theta) d\theta \int_0^\rho \frac{K^2}{2E \cdot 2\pi r} r dr = \frac{1}{4\pi E} \int_0^{2\pi} f^2(\theta) d\theta K^2 \rho$$

On constate que le champ de contrainte au voisinage de l'entaille dépend essentiellement de la grandeur K_I qui est appelée *facteur d'intensité de contrainte*. Elle se mesure le plus souvent en $MPa\sqrt{m}$. L'hypothèse fondamentale de la mécanique de la rupture est que *la fissure va se propager si le facteur d'intensité de contrainte atteint une certaine valeur critique K_{Ic} dépendant du matériau*. Cela revient à dire que le danger d'une fissure est proportionnel à la contrainte appliquée et à la racine carrée de sa longueur. Il existe du reste des corrélations entre K_{Ic} et la résilience KV sur éprouvettes en V [4].

Si l'on revient au trou elliptique, son rayon de courbure R au niveau du grand axe est donné par

$$R = \frac{b^2}{a}$$

Il est établi en théorie de l'élasticité que la contrainte maximale au bord du trou est donnée par

$$\sigma_{\max}(a, R) = \alpha_k(a, R) \sigma_n$$

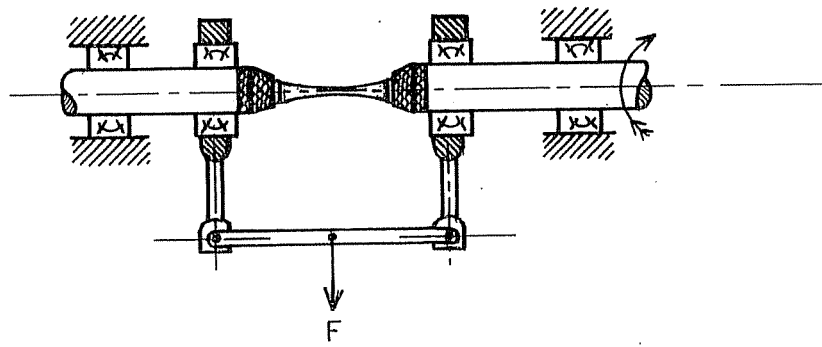
où α_k est le coefficient de concentration de contrainte donné par

$$\alpha_k(a, R) = 1 + 2 \frac{a}{b} = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{R}}$$

Lorsque b s'approche de zéro, il en est de même de R et on a

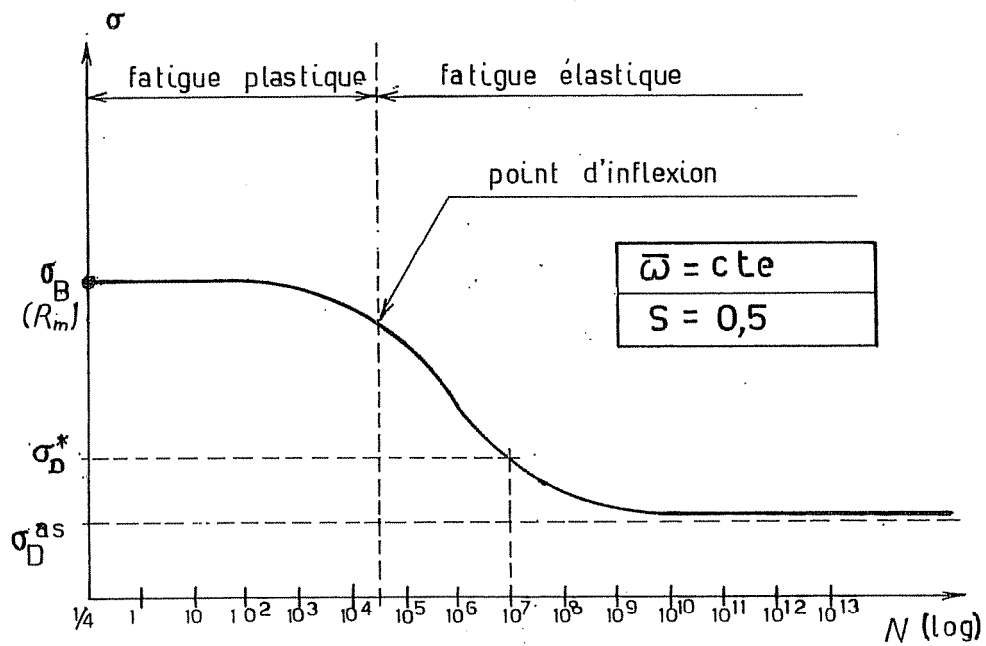
$$\sigma_{\max}(a, R) \approx 2\sigma_n \sqrt{\frac{a}{R}}$$

ce qui entraîne



FATIGUE PAR FLEXION ROTATIVE

FIG. 141



COURBE DE WÖHLER

FIG. 142

$$K_I = \sigma_n \sqrt{\pi a} = \lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \sigma_{\max}(a, R) \sqrt{\pi R} \right] = \sigma_n \lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \alpha_k(a, R) \sqrt{\pi R} \right]$$

Ce résultat est dû à Irwin [1,2].

3.4.5.2 – La propagation des fissures en fatigue

Lorsque le champ de contrainte est variable dans le temps, la propagation des fissures dépend de l'amplitude de la variation du facteur d'intensité de contrainte

$$\Delta K_I = K_{I \max} - K_{I \min}$$

et du rapport

$$Rapport = \frac{K_{I \min}}{K_{I \max}}$$

de la façon suivante. Le taux d'accroissement $\frac{da}{dn}$ de la fissure en fonction du nombre de cycles n suit une loi de la forme

$$\frac{da}{dn} = f(\Delta K_I, Rapport)$$

La fonction f est croissante et on invoque souvent une loi de puissance (loi de Paris [3]), mais il existe un seuil en deçà duquel la fissure ne se propage pas :

$$\frac{da}{dn} = 0 \quad \text{pour} \quad \Delta K_I \leq \Delta K_{I \text{ seuil}}(Rapport)$$

Ce seuil est à mettre en rapport avec la limite d'endurance dont nous allons parler dans la prochaine section.

3.4.6 – Essais de fatigue

Le comportement en fatigue des matériaux est une donnée de première importance pour le mécanicien. L'essai de fatigue le plus courant consiste à soumettre une éprouvette en rotation sous un moment de flexion connu et fixe dans l'espace. Un des dispositifs possibles est illustré en figure 141. C'est ce que l'on appelle un essai de flexion rotative.

On appelle *courbe de Wöhler* le graphe obtenu en portant en ordonnée les contraintes d'essai et en abscisse le nombre de cycles avant rupture (*fig. 142*). On utilise généralement comme abscisse le *logarithme* du nombre de cycles. La courbe de Wöhler a en général une courbure négative pour les faibles nombres de cycles (*fatigue plastique*) et une courbure positive pour les grands nombres de cycles (*fatigue élastique*). Son asymptote horizontale définit la *limite d'endurance* souvent notée σ_D . Pour les aciers, cette limite d'endurance se

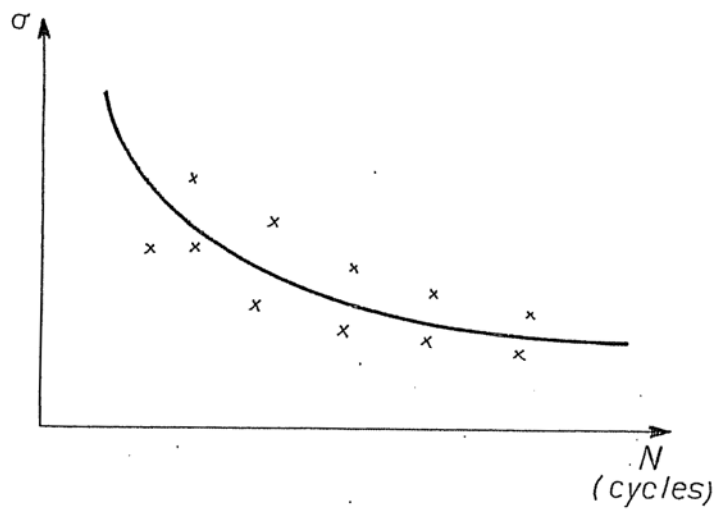


FIG. 143

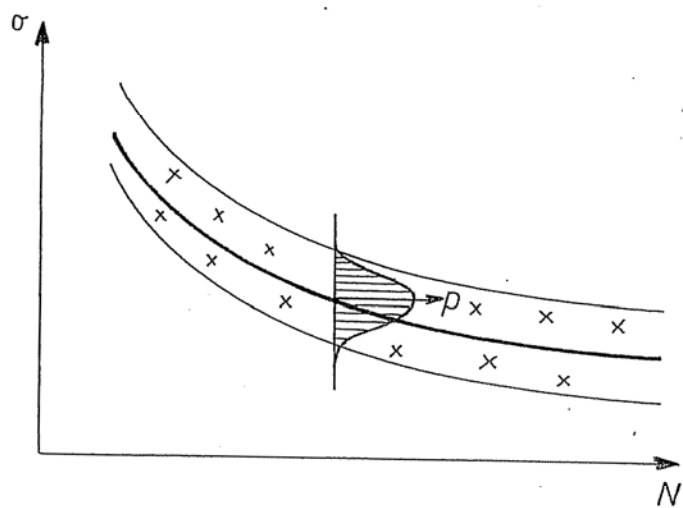


FIG. 144

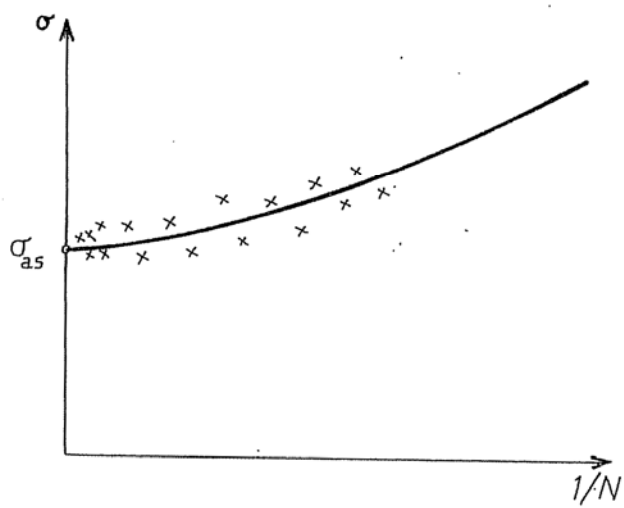


FIG. 145

situe plus ou moins à la moitié de la limite de rupture statique. Pour les aluminiums, par contre, l'endurance est souvent *nulle*. Pour éviter de prolonger trop les essais, on s'arrête généralement à 10^7 cycles pour les aciers, et on confond alors la limite d'endurance vraie avec la limite à 10^7 cycles, dite limite d'endurance conventionnelle, qui est un peu supérieure à la vraie. C'est pourquoi nous noterons σ_{as} la vraie limite d'endurance, l'indice *as* signifiant *asymptotique*.

La première difficulté liée à ces essais est leur *durée*. Supposons en effet que l'on veuille faire subir à l'éprouvette 10^7 cycles en flexion rotative. Pour des raisons de construction, la machine tourne généralement à 1500 tr/min. Il faudra donc, pour réaliser un essai,

$$\frac{10^7}{1500} = 6667 \text{ min} = 111h$$

soit quatre jours et demi. Si l'on ajoute à cela le caractère nettement dispersé des résultats, fait qui oblige à multiplier les essais, on se rend compte que l'établissement d'une seule courbe de Wöhler nécessite une longue campagne d'essais. Ceci explique que les résultats disponibles en fatigue sont relativement peu nombreux.

La seconde difficulté est la *dispersion* des résultats, qui est illustrée en figure 143. Si l'on considère, comme la nature de l'essai le suggère, que la variable indépendante est la contrainte et que le nombre de cycles est la fonction, on peut, pour un même niveau de contrainte obtenir des résultats aussi différents que

Essai 1 : 10^4 cycles ; essai 2 : 10^6 cycles ; essai 3 : pas de rupture après 10^7 cycles

Par contre, on sait depuis longtemps que si l'on considère la dispersion des contraintes pour une durée de vie donnée, on obtient (*fig. 144*) une distribution normale, d'écart-type à peu près constant dans toute la zone de fatigue élastique, et *raisonnable*. On peut donc tracer des lignes d'équiprobabilité de rupture à hauteur constante par rapport à la courbe médiane qui sert de référence. On se rend donc compte qu'au voisinage de la limite d'endurance, il est possible aussi bien d'avoir une rupture assez tôt que de ne pas avoir de rupture.

Ainsi que l'a fait remarquer Belyaev [5], pour tracer valablement une courbe de Wöhler, il faut utiliser comme abscisse non pas n ou $\log n$, mais $1/n$. Ainsi, la limite d'endurance est l'ordonnée à l'origine de la courbe et non pas une asymptote difficile à trouver (*fig. 145*). De cette façon, on peut procéder graphiquement ou ajuster par les moindres carrés une loi de la forme

$$\sigma = f\left(\frac{1}{n}\right)$$

par exemple,

$$\sigma = \sigma_{as} + A\left(\frac{1}{n}\right)^B$$

où il faut ajuster σ_{ase} , A et B. Il s'agit en l'occurrence d'un ajustement non linéaire.

3.4.7 – Bibliographie

1. W. GNILKE – *Lebensdauerberechnung der Maschinenelemente*
Hanser, München, 1980
ISBN 3-446-13261-9
2. D. FRANÇOIS, A. PINEAU, A. ZAOUI - *Comportement mécanique des matériaux*,
tome 2, Hermès, Paris, 1993
ISBN 2-86601-348-4
3. J. SCHIJVE – *Fatigue of structures and materials*
Kluwer, Dordrecht, 2001
ISBN 0-7923-7014-7
4. R. HERTZBERG – *Deformation and fracture mechanics of engineering materials*
3d edition, Wiley, New York, 1989
ISBN 0-471-63589-8
5. N.M. BELYAEV – *Strength of materials*
Mir, Moscou, 197

3.5 – PRINCIPES DE LA DÉTERMINATION DES LIMITES DE RÉSISTANCE

3.5.1 – Notion de contrainte nominale

Il est nécessaire en mécanique de considérer des formes très accidentées, changeant fréquemment de section, creusées de rainures de clavettes, comportant des saignées, percées de trous radiaux, etc. Il en résulte que le champ de contraintes est fortement perturbé. On peut évidemment envisager de rechercher le champ de contrainte avec grande précision au moyen des méthodes numériques modernes (éléments finis), ce qui permet en principe de calculer les contraintes en chaque point. Mais cette démarche, outre qu'elle est longue et coûteuse, ne résout qu'une partie du problème, car l'expérience montre que la seule valeur des contraintes ne suffit pas toujours pour évaluer la sécurité à la rupture, qui dépend également d'autres facteurs, notamment le *gradient* de contrainte.

La manière classique de procéder, pour les arbres entre autres, est quelque peu différente. Étant donné une section perturbée d'entailles, on la remplace par une section voisine, choisie *arbitrairement*, mais bien précisée, que l'on appelle *section nominale*. C'est dans cette section (évidemment plus simple si l'on veut en tirer avantage) que l'on calcule les contraintes, comme dans un arbre régulier. Bien entendu, ces *contraintes nominales* ne correspondent pas à la réalité. Mais on peut les utiliser comme mesure de la sollicitation lors d'expériences de rupture, ce qui permet de résoudre le problème à l'aide de données expérimentales.

Soit par exemple un arbre de diamètre d dans lequel a été pratiquée une rainure de clavette de profondeur b . Sa section est compliquée et déjà, le calcul des moments d'inertie est lourd. Aussi utilise-t-on souvent comme section nominale la plus grande section circulaire inscrite, soit un cercle de diamètre $(d - b)$. Mais ce choix, commun en Allemagne, est purement conventionnel, et il en est qui utilisent le plus grand cercle centré intérieur à la section, soit un cercle de diamètre $(d - 2b)$. On trouve encore d'autres choix dans la littérature russe. *Il est donc capital, lorsqu'on donne une contrainte nominale, de préciser à quelle section elle se rapporte (ou comment on la calcule), sous peine de graves mécomptes.*

Les trois sollicitations d'un arbre, que l'on calcule dans la section nominale de diamètre D , sont

a) la *contrainte d'extension* σ_e , qui se calcule à partir de la résultante normale de la force N par la formule

$$\sigma_e = \frac{N}{\pi D^2}$$

b) La *contrainte de flexion* σ_f , est liée au moment de flexion résultant

$$M_f = \sqrt{M_{fx}^2 + M_{fy}^2}$$

Ox et Oy étant les deux axes perpendiculaires à l'axe de l'arbre qui lui, est l'axe Oz . Elle se calcule par la formule

$$\sigma_f = \frac{M_f}{\frac{\pi D^3}{32}} = \frac{32M_f}{\pi D^3}$$

c) La *contrainte de torsion* τ_t qui se calcule à partir du moment de torsion M_t par la formule

$$\tau_t = \frac{M_t}{\frac{\pi D^3}{16}} = \frac{16M_t}{\pi D^3}$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons la notation σ pour désigner l'une quelconque de ces trois contraintes.

3.5.2 – Principes de la détermination des limites de résistance

3.5.2.1 – Généralités

Le calcul de vérification suppose d'abord la détermination des sections dangereuses, que l'on suppose indépendantes quant à la résistance. Ceci n'est vrai que si elles sont suffisamment éloignées. Avec un peu d'expérience, on les repère aisément : ce sont toujours des sections où apparaissent des discontinuités ou des accidents de forme.

Pour chacune d'elles, on détermine

- Les contraintes nominales
- Les contraintes limites
- La sécurité s , rapport entre les précédentes

L'étape la plus difficile dans ce calcul est la détermination des contraintes limites, car elles dépendent de nombreux facteurs, au rang desquels il faut citer

- La forme effective de la section et de son voisinage. C'est ce que l'on appelle *l'effet d'entaille*.
- La dimension de la pièce. La résistance est différente pour des pièces semblables de grandeur différente. C'est ce que l'on appelle *l'effet d'échelle*.
- L'état de surface. La rugosité peut être préjudiciable à la tenue de la pièce. C'est ce que l'on appelle *l'effet d'élaboration*.

- Dans certains cas, il faut tenir compte de l'environnement : températures élevées, corrosion. Nous ne traiterons pas ces effets qui relèvent de cours spécialisés.

3.5.2.2 – Les indices d'effet

L'approche traditionnelle consiste à tenir compte des effets cités ci-dessus en divisant la contrainte limite obtenue sur une éprouvette de laboratoire par des *indices d'effet* qui sont

- a) l'indice d'effet d'échelle β_g (g pour *Größe*, taille en allemand)
- b) l'indice d'effet d'entaille β_k (k pour *Kerbwirkung*, effet d'entaille en allemand)
- c) l'indice d'effet d'élaboration β_b (b pour *Bearbeitung*, élaboration en allemand)

Ces indices ne sont malheureusement pas indépendants et diffèrent selon l'ordre dans lequel on les considère. Une première manière de faire est celle de Leroy et Viseur [2], qui est illustrée en figure 146.

1) On relie l'éprouvette de laboratoire de dimension de référence D^* , lisse (c'est-à-dire sans entaille et ayant une rugosité très faible R_t^*) à une éprouvette géométriquement semblable de dimension D par l'indice d'effet d'échelle

$$\beta_g(\text{matériau}, D) = \frac{\sigma_{\lim}(D^*, \text{lisse}, R_t^*)}{\sigma_{\lim}(D, \text{lisse}, R_t^*)}$$

2) A échelle constante, on tient compte de la forme par l'indice d'effet d'entaille

$$\beta_k(\text{matériau}, D, \text{entaille}) = \frac{\sigma_{\lim}(D, \text{lisse}, R_t^*)}{\sigma_{\lim}(D, \text{entaille}, R_t^*)}$$

3) L'échelle et la forme étant maintenues identiques, on tient compte de l'état de surface par l'indice d'effet d'élaboration

$$\beta_b(\text{matériau}, D, \text{entaille}, R_t) = \frac{\sigma_{\lim}(D, \text{entaille}, R_t^*)}{\sigma_{\lim}(D, \text{entaille}, R_t)}$$

Sous cette forme, l'indice d'effet d'échelle est indépendant de l'entaille, mais l'indice d'effet d'entaille dépend de l'échelle et, malheureusement, on ne dispose pratiquement pas dans la littérature des données relatives à l'effet d'entaille pour plusieurs tailles différentes. Aussi, de nombreux auteurs procèdent différemment. Ils commencent par l'effet d'entaille à la taille de référence :

$$\overline{\beta_k}(\text{matériau}, \text{entaille}) = \frac{\sigma_{\lim}(D^*, \text{lisse}, R_t^*)}{\sigma_{\lim}(D^*, \text{entaille}, R_t^*)}$$

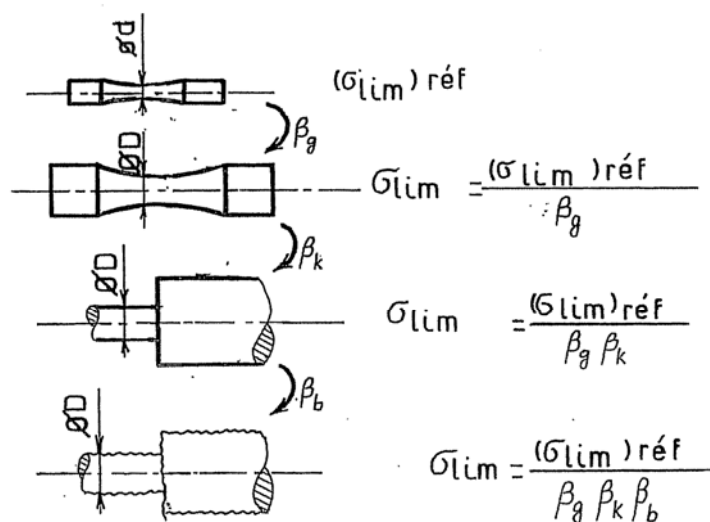


FIG. 146

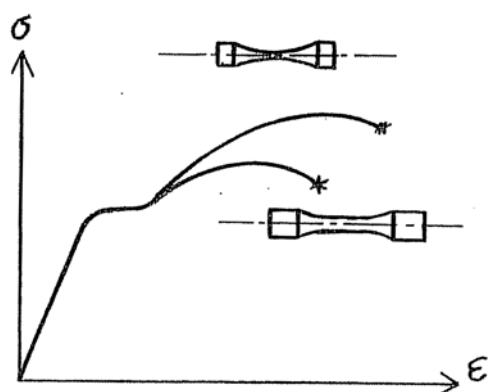


FIG. 147

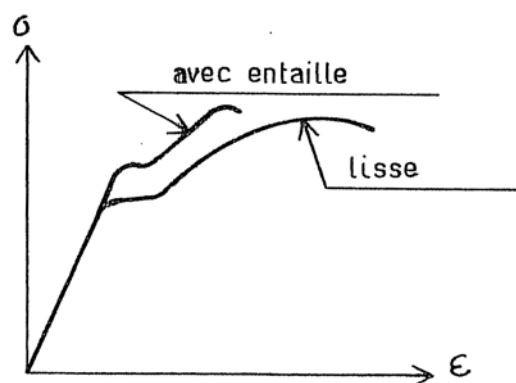


FIG. 148

Ils font alors intervenir un indice d'effet d'échelle dépendant de l'entaille selon des abaques fondés sur le coefficient de concentration de contrainte et à vrai dire sujets à caution :

$$\overline{\beta_g}(\text{matériau}, \text{entaille}, D) = \frac{\sigma_{\text{lim}}(D^*, \text{entaille}, R_t^*)}{\sigma_{\text{lim}}(D, \text{entaille}, R_t^*)}$$

et enfin, leur indice d'effet d'élaboration est identique à celui de Leroy et Viseur

$$\overline{\beta_b} = \beta_b$$

car il traduit le même rapport.

On le voit, aucune de ces deux approches n'est satisfaisante, du fait du manque de données. Nous n'adopterons donc pas cette démarche telle quelle et nous la remplacerons, en fatigue notamment, par une analyse plus réaliste des faits dans laquelle l'effet d'échelle et l'effet d'entaille sont imbriqués.

3.5.3 – Rupture statique

La rupture statique est un phénomène relativement facile à cerner, car indépendant du temps. Le résultat de l'essai est formel et définitif : la pièce résiste ou elle casse. Un essai de traction est simple, bref et peu coûteux et la dispersion n'est pas grande. Il convient cependant d'étudier les effets d'échelle, d'entaille et d'élaboration, trop souvent omis dans les cours de résistance des matériaux. Nous affecterons d'un indice supérieur (0) les grandeurs relatives à la rupture statique. La limite de rupture en extension se note internationalement R_m . Sur éprouvettes de laboratoire, les contraintes limites sont donc $\sigma_{e \text{ lim}}^{(0)*} = R_m$ en extension, $\sigma_{f \text{ lim}}^{(0)*} = R_m$ en flexion et $\tau_{t \text{ lim}}^{(0)*} = \frac{R_m}{\sqrt{3}}$ en torsion. La contrainte nominale limite relative au cas réel se calcule par la formule

$$\sigma_{\text{lim}}^{(0)} = \frac{\sigma_{\text{lim}}^{(0)*}}{\beta_g^{(0)} \beta_k^{(0)} \beta_b^{(0)}}$$

3.5.3.1 – Effet d'échelle

On constate expérimentalement que la contrainte de rupture des grande éprouvettes est inférieure à celle des petites, comme l'illustre la figure 147. En se fondant sur l'hypothèse d'une répartition statistique des défauts dans la pièce et sur le postulat du lien le plus faible, qui revient à dire qu'une rupture locale entraîne la rupture totale, Weibull [3] a obtenu la relation

$$\beta_g^{(0)} = \left(\frac{D}{D^*} \right)^{3/m}$$

On constate que cette formule prédit très bien l'effet d'échelle des matériaux *fragiles* [14]. Pour les matériaux ductiles, l'effet d'échelle est *plus faible* et la relation de Weibull peut être utilisée avec une extra sécurité. Pour les aciers, m peut être pris égal à 24.

3.5.3.2 – Effet d'entaille

Pour les matériaux *ductiles*, on constate expérimentalement que sous l'effet d'une entaille, la contrainte de rupture est *augmentée*, tandis que l'allongement à la rupture est diminué, ce qu'illustre la figure 148. On attribue ce comportement au caractère nettement triaxial du champ de contrainte au voisinage de l'entaille (contraintes principales $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma_3$), ce qui a pour effet de bloquer les déformations plastiques. On a donc

$$\beta_k^{(0)} < 1$$

ce qui permet de poser avec une certaine sécurité

$$\beta_k^{(0)} = 1$$

c'est-à-dire de ne pas se soucier des entailles. On notera cependant que la ténacité et la résilience sont diminuées.

Il en est tout autrement des matériaux *fragiles* dans lesquels le régime élastique se maintient pratiquement jusqu'à la rupture. Il faut alors tenir compte de la contrainte maximale

$$\sigma_{\max} = \alpha_k \sigma_n$$

où σ_n est la contrainte nominale et α_k est le coefficient de concentration de contrainte, dont on trouvera un atlas dans le fascicule *QR*. Ainsi, pour les matériaux fragiles,

$$\beta_k^{(0)} = \alpha_k$$

3.5.3.3 – Effet d'élaboration

On ne constate pas d'effet significatif de l'état de surface sur la limite de rupture statique, ce qui permet d'écrire

$$\beta_b^{(0)} = 1$$

3.5.4 – Fatigue sous sollicitation alternée

Nous envisageons à présent le cas d'une sollicitation de la forme

$$\sigma(t) = \sigma_a \sin \omega t$$

dont l'amplitude est donc σ_a . C'est typiquement la sollicitation de flexion d'un arbre qui tourne sous un moment de flexion fixe dans l'espace. Sous ce type de sollicitation, on constate à la fois un effet d'échelle, un effet d'entaille et un effet d'élaboration, en bonne partie interdépendants. Nous affecterons d'un indice supérieur (1) les grandeurs relatives à l'endurance sous sollicitation alternée.

3.5.4.1 – Effet d'échelle

L'expérience montre que sur des pièces *lisses*,

- Il n'y a pas d'effet d'échelle en extension
- Il existe un effet d'échelle marqué en flexion et torsion.

Par contre, sur des pièces *entaillées*, on constate qu'il existe un effet d'échelle *quelle que soit la sollicitation*.

Ces faits paradoxaux semblent indiquer qu'il existe un *effet de gradient*. Ce qui distingue, sur les pièces lisses, l'extension de la flexion et la torsion, c'est que dans ces dernières, le gradient de contrainte n'est pas nul, puisque la contrainte passe de zéro sur l'axe à sa valeur maximale à la périphérie. Dans les éprouvettes entaillées, il existe, quelle que soit la sollicitation, un gradient de contrainte au voisinage du fond de l'entaille où se produit une concentration de contrainte. Nous retrouverons cet effet en étudiant l'effet d'entaille.

Une deuxième chose qu'il faut remarquer, c'est que le seul paramètre intrinsèque du matériau est la limite d'endurance *en extension*, que nous noterons dans la suite σ_{D_0} . On peut dire que c'est la limite d'endurance à gradient de contrainte nul.

3.5.4.2 – Effet d'entaille

Les entailles jouent un très grand rôle en fatigue. Toute entaille classique est caractérisées par son *acuité*, rapport d'une dimension de référence que nous noterons d au rayon à fond d'entaille R . A partir de diagrammes et de formules que l'on trouvera dans le fascicule *QR*, on peut en déduire le *coefficient de concentration de contrainte* encore appelé *facteur de forme* α_k , rapport entre la contrainte maximale à fond d'entaille σ_k et la contrainte nominale σ_n :

$$\alpha_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_n} = f\left(\frac{d}{R}, \text{type d'entaille, paramètres secondaires}\right)$$

Il faut noter à ce sujet que α_k est la notation allemande. La notation anglo-saxonne est K_t . Il n'y a aucun doute que c'est la contrainte maximale à fond d'entaille qui importe. Mais quand on examine les valeurs limites $\sigma_{k \lim}^{(1)}$ qu'elle prend à l'endurance, on constate qu'elles sont variables. On constate entre autres que

- L'effet de l'entaille est d'autant plus marqué que l'acier est plus dur
- L'effet de l'entaille est d'autant plus marqué que la pièce est plus grosse
- La limite d'endurance, en termes de la contrainte maximale, de pièces entaillées géométriquement semblables, décroît lorsque la taille des pièces augmente, même en extension
- Plus étonnant, les entailles *vives*, c'est-à-dire dont le rayon R est nul, pour lesquelles le coefficient de contrainte est infini, conduisent néanmoins à une endurance non nulle (quoique faible) en termes de la contrainte nominale, et *cette limite dépend peu du type d'acier*.

Toutes ces constatations peuvent être expliquées si l'on admet qu'en réalité, ce n'est pas seulement la contrainte maximale qui entre en ligne de compte, mais que la forme du diagramme des contraintes au voisinage du maximum joue également un rôle. Cette forme peut être caractérisée par le *gradient relatif de contrainte*

$$\chi = \left[\frac{\text{grad} \sigma}{\sigma} \right]_{\text{au point où } \sigma \text{ est maximal}}.$$

introduit par Siebel [23,24] et Petersen [25]. Pour des pièces lisses de diamètre D , ce gradient relatif vaut 0 en extension et $\frac{2}{D}$ en flexion et torsion. En présence d'une entaille de rayon R , cette valeur doit en général être augmentée de

$$\Delta\chi = \frac{2}{R} + \frac{1}{\alpha_k} \approx \frac{2}{R}$$

en extension et flexion et de

$$\Delta\chi = \frac{1}{R}$$

en torsion. Les valeurs à prendre en compte sont données dans l'atlas de concentrations de contraintes du fascicule *QR*.

La limite d'endurance, en termes de la contrainte maximale est alors une fonction du matériau et du gradient relatif,

$$\sigma_{k \text{ lim}}^{(1)} = \Sigma(\text{matériau}, \chi)$$

Cette fonction doit vérifier deux conditions aux limites.

1) Pour un gradient relatif nul, on doit retrouver la limite d'endurance en extension, c'est-à-dire que

$$\Sigma(\text{matériau}, 0) = \sigma_{D_0}$$

2) A l'autre extrême, lorsque le gradient relatif est infini (rayon nul), on se retrouve dans le cadre de la mécanique de la rupture. On sait que pour une contrainte statique,

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma_{\max}}{2} \sqrt{\pi R} \right) = K_I$$

Comme il s'agit d'une contrainte alternée, il s'agit en fait de la moitié de la variation de K_I entre son maximum et son minimum. A l'endurance, on peut admettre qu'il s'agit du seuil de non-propagation des fissures. Donc

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma_{k \lim}^{(1)}}{2} \sqrt{\pi R} \right) = \frac{1}{2} \Delta K_{I \text{ seuil}}$$

Il se trouve que ce seuil est à peu près identique pour la plupart des aciers [22]. De plus, en extension et flexion, pour une entaille à très petit rayon, le gradient relatif tend vers $2/R$, donc

$$R = \frac{2}{\chi}$$

et comme $\sigma_{k \lim}^{(1)}$ n'est autre que $\Sigma(\chi)$, cela revient à dire que

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} \left(\frac{\Sigma(\chi)}{\sqrt{\chi}} \right) = \frac{\Delta K_{I \text{ seuil}}}{\sqrt{2\pi}} = A$$

où A est une grandeur à peu près constante pour la plupart des aciers. On peut admettre la valeur [18]

$$A = 70 \text{ MPa} \sqrt{\text{mm}}$$

L'expression la plus simple qui vérifie ces deux conditions aux limites est

$$\Sigma(\chi) = \sigma_{D_0} + A\sqrt{\chi}$$

En termes de la contrainte nominale, la limite d'endurance est alors donnée par

$$\sigma_{n \lim}^{(1)} = \frac{\Sigma(\chi)}{\alpha_k}$$

pour des pièces à rugosité négligeable. Nous verrons plus loin comment tenir compte de l'effet d'élaboration.

Pour la torsion, le raisonnement ci-dessus ne s'applique pas directement. On se contente généralement dans ce cas de l'évaluation

$$\tau_{m \lim}^{(1)} = \frac{\Sigma(\chi_t)}{\sqrt{3}\alpha_{kt}}$$

qui, jusqu'à preuve du contraire, semble dans le sens de la sécurité.

On notera que pour les arêtes *vives* peuvent être traitées dans la présente approche par un passage à la limite pour $R \rightarrow 0$, pour autant que l'on dispose d'une formule analytique du coefficient de concentration de contrainte α_k .

3.5.4.3 – Entailles non calculables

Il existe cependant un certain nombre d'entailles dont le coefficient de concentration de contrainte et le gradient ne sont pas calculables, soit que le rayon n'est pas bien défini (rainures de clavettes, gorges de circlips), soit que la concentration de contrainte ne relève pas d'un rayon (pièces freinées). Pour tous ces cas, on peut adopter une méthode de *similitude*. Soit une famille de pièces géométriquement semblables. Toutes les pièces de cette famille ont en commun les deux paramètres α_k et χD où D est une dimension représentative de la taille de la pièce. Définissons le *facteur d'affaiblissement*

$$\gamma = \frac{\sigma_{n \lim}^{(1)}}{\sigma_{D_0}}$$

Ce facteur vérifie, en vertu des relations précédentes,

$$\gamma = \frac{1}{\alpha_k} + \frac{\sqrt{\chi D}}{\alpha_k} \frac{A}{\sigma_{D_0} \sqrt{D}} = C_1 + C_3 \frac{A}{\sigma_{D_0} \sqrt{D}}$$

Dans cette expression, les deux coefficients C_1 et C_3 ne dépendent que de la famille de pièces considérée et on voit apparaître le nombre sans dimension $\frac{A}{\sigma_{D_0} \sqrt{D}}$. Pour les aciers courants,

A a une valeur constante, ce qui permet d'écrire la relation ci-dessus sous la forme

$$\gamma = C_1 + \frac{C_2}{\sigma_{D_0} \sqrt{D}}$$

en posant $C_2 = C_3 K$. On peut par ce moyen déterminer la limite d'endurance de n'importe quel représentant de cette famille de pièces, à partir de deux résultats expérimentaux au moins. Les pages F32 et F34 du fascicule *QR* donnent un certain nombre de valeurs de coefficients C_1 et C_2 obtenues à partir de résultats de la littérature [21].

3.5.4.4 – Effet d'élaboration

Les rugosités sont autant d'entailles microscopiques et l'endurance des pièces *lisses* doit être divisée par un facteur $\beta_b^{(1)}$ dépendant de la rugosité totale R_t et de la dureté de l'acier. Les valeurs données par le diagramme de la page F5 du fascicule *QR* sont relatives à l'extension et à la flexion. En torsion, l'effet d'élaboration est moins marqué et on peut écrire [20]

$$\beta_{bt}^{(1)} = \frac{\beta_b^{(1)}}{0,4\beta_b^{(1)} + 0,6}$$

Dans le cas de pièces entaillées, il semble excessif de considérer le produit

$$\alpha_k \beta_b^{(1)} = [1 + (\alpha_k - 1)] [1 + (\beta_b^{(1)} - 1)] = 1 + (\alpha_k - 1) + (\beta_b^{(1)} - 1) + (\alpha_k - 1)(\beta_b^{(1)} - 1)$$

Selon [19], il est plus raisonnable d'admettre que les contraintes additionnelles d'entaille représentées par les nombres $(\alpha_k - 1)$ et $(\beta_b^{(1)} - 1)$ s'additionnent, ce qui donne à la place du produit $\alpha_k \beta_b^{(1)}$, le facteur

$$1 + (\alpha_k - 1) + (\beta_b^{(1)} - 1) = \alpha_k + (\beta_b^{(1)} - 1) = \alpha_k \beta_{b\text{ corr}}^{(1)}$$

où apparaît l'indice d'effet d'élaboration corrigé

$$\beta_{b\text{ corr}}^{(1)} = 1 + \frac{\beta_b^{(1)} - 1}{\alpha_k}$$

Dans le cadre de la méthode de similitude, ceci revient à écrire

$$\beta_{b\text{ corr}}^{(1)} = 1 + C_1 (\beta_b^{(1)} - 1)$$

De tout ceci, il faut retenir que l'effet d'élaboration est moindre pour les pièces entaillées que pour les pièces lisses. Pour ces dernières, la rugosité peut parfois jouer un rôle dévastateur.

3.5.5 – Sollicitations combinant un terme statique et un terme alterné

On rencontre souvent des sollicitations de la forme

$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t$$

combinant un terme constant σ_m positif ou négatif et une oscillation d'amplitude σ_a positive. Quitte à changer l'origine des temps d'une demi-alternance, il est préférable d'écrire

$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \text{sign}(\sigma_m) \sin \omega t$$

On définit alors la sollicitation maximale (en grandeur)

$$\sigma_M = |\sigma_m| + \sigma_a$$

et le *taux de pulsation*

$$\varpi = \frac{\sigma_a}{\sigma_M}$$

Avec ces notations, la sollicitation s'écrit donc

$$\sigma(t) = \sigma_M \text{sign}(\sigma_m) [(1 - \varpi) + \varpi \sin \omega t]$$

et apparaît comme l'interpolation linéaire entre un terme constant et un terme alterné. Pour $\varpi = 0$, la sollicitation est *statique*. Pour $\varpi = 1$, elle est *alternée*. Pour $\varpi = \frac{1}{2}$, elle est dite *pulsée* et oscille entre 0 et le maximum. Enfin, pour les autres valeurs de ϖ , on dit qu'elle est *ondulée*.

A l'endurance, la composante σ_a limite dépend de la composante moyenne, et réciproquement. La courbe d'interaction entre ces deux composantes s'appelle *diagramme d'endurance*. Il en existe plusieurs représentations. Dans la littérature anglo-saxonne, on utilise surtout le diagramme de *Haigh* représenté en figure 149, où l'on porte σ_m en abscisse et σ_a en ordonnées. En Allemagne, on utilise presque exclusivement le diagramme de *Smith-Goodman* où l'on porte en abscisse σ_m et en ordonnée σ_M . En outre, sur ce diagramme, on dessine également la courbe de $\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$ (fig. 150). Ces deux diagrammes supposent σ_m positif.

On peut également représenter la valeur limite de σ_M en fonction du taux de pulsation (fig. 151). Pour $\varpi = 0$, la limite est évidemment la limite de rupture statique $\sigma_{n \lim}^{(0)}$. Pour $\varpi = 1$, c'est la limite d'endurance en sollicitation alternée $\sigma_{n \lim}^{(1)}$. Pour une valeur intermédiaire du taux de pulsation, nous noterons $\sigma_{n \lim}^{(\varpi)}$ la valeur limite de la contrainte maximale. Appelons *facteur d'endurance* le nombre

$$\xi(\varpi) = \frac{\sigma_{n \lim}^{(\varpi)}}{\sigma_{n \lim}^{(0)}}$$

Sa valeur en $\varpi = 1$,

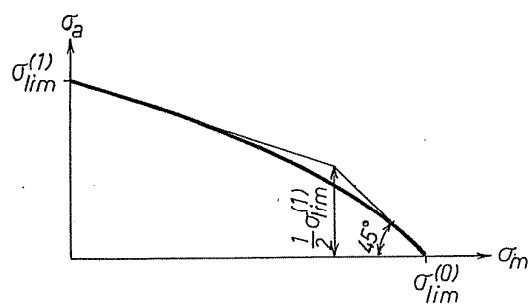


FIG. 149

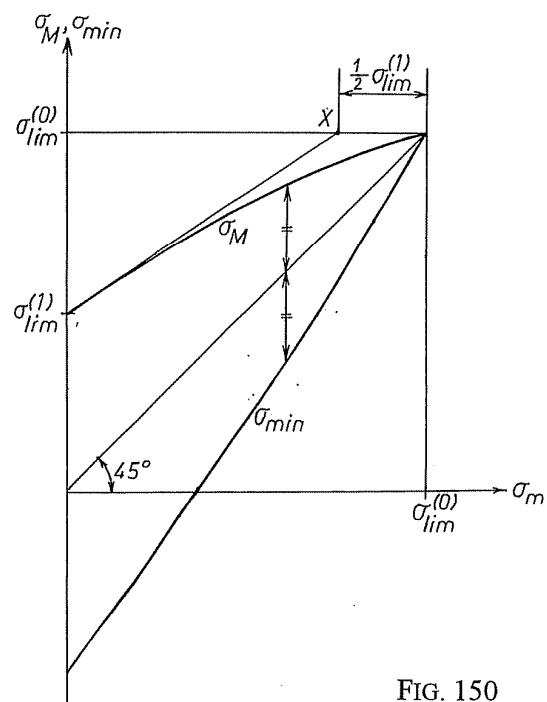


FIG. 150

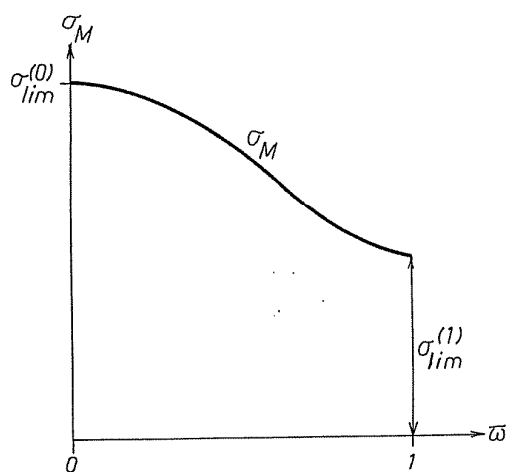


FIG. 151

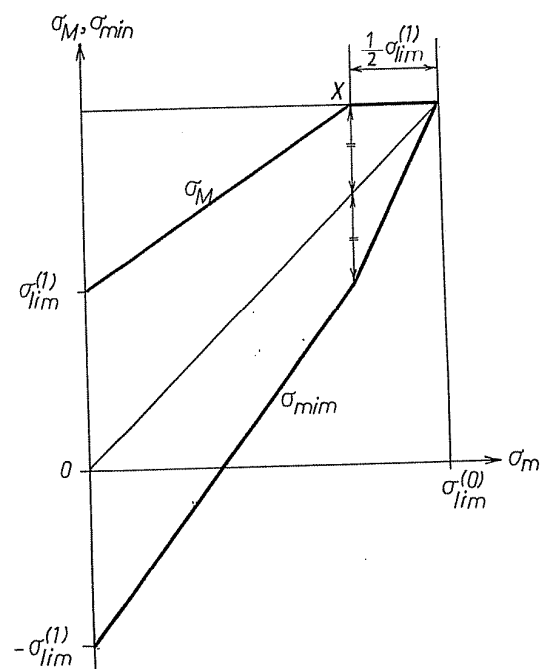


FIG. 152

$$\xi(1) = \frac{\sigma_{n \lim}^{(1)}}{\sigma_{n \lim}^{(0)}}$$

définit la courbe qu'il faut choisir sur le diagramme de la page F3 du fascicule *QR* qui n'est autre qu'un réseau de diagrammes d'endurance. Sur cette courbe, à l'abscisse ϖ correspondant à la sollicitation, l'ordonnée vaut $\xi(\varpi)$. La contrainte nominale limite a alors pour maximum

$$\sigma_{n \lim}^{(\varpi)} = \xi(\varpi) \sigma_{n \lim}^{(0)}$$

Ce diagramme est fondé sur la relation

$$\xi(\varpi) = \frac{\xi(1)}{\varpi^n + (1 - \varpi^n) \xi(1)}$$

avec

$$n = \frac{1}{1 - \frac{\xi(1)}{2}}$$

Sur un diagramme de Smith-Goodman, la tangente à cette courbe en $\sigma_m = 0$ passe par le point X de coordonnées $\left(\sigma_{n \lim}^{(0)} - \frac{1}{2} \sigma_{n \lim}^{(1)}, \sigma_{n \lim}^{(0)} \right)$, (*fig. 150*) ce qui correspond assez bien aux données expérimentales.

En Allemagne, on utilise souvent le diagramme VDI qui est la simplification du précédent dans lequel la courbe ci-dessus est remplacée par sa tangente en $\sigma_m = 0$ jusqu'à son point de rencontre X avec la droite d'ordonnée $\sigma_{n \lim}^{(0)}$. Ce diagramme, représenté en figure 152, est un petit peu optimiste pour les grandes valeurs de la composante statique de la contrainte, mais ce fait prête peu à conséquence, car à ce niveau, on est en fait limité par la condition de plastification. On peut du reste établir que le diagramme VDI est équivalent à un diagramme d'endurance d'équation

$$\begin{cases} \text{pour } \varpi > \frac{\xi(1)}{2} : & \xi(\varpi) = \frac{\xi(1) \cdot \left(1 - \frac{\xi(1)}{2}\right)}{\frac{\xi(1)}{2} + \varpi [1 - \xi(1)]} \\ \text{pour } \varpi \leq \frac{\xi(1)}{2} : & \xi(\varpi) = 1 \end{cases}$$

3.5.6 – Sollicitations combinées

Un arbre est très souvent soumis à la fois à de l'extension, de la flexion et de la torsion. Chacune de ces composantes d'indice général i a son maximum propre σ_{inM} et son taux de pulsation ϖ_i . Prise séparément, elle a pour limite $\sigma_{in\lim}$. De nombreuses expériences [12,13,6] ont montré que dans tous les cas, on peut écrire le critère d'endurance

$$\left(\frac{\sigma_{en}}{\sigma_{en\lim}} + \frac{\sigma_{fn}}{\sigma_{fn\lim}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{tn}}{\tau_{tn\lim}} \right)^2 = 1$$

quels que soient les taux de pulsation respectifs, à condition d'utiliser les limites correspondantes. La sécurité s d'une sollicitation $(\sigma_{en}, \sigma_{fn}, \tau_{tn})$ s'obtient, suivant la règle générale, en exprimant que la sollicitation homothétique $(s\sigma_{en}, s\sigma_{fn}, s\tau_{tn})$ se trouve sur la surface limite, ce qui donne [2]

$$\frac{1}{s^2} = \left(\frac{\sigma_{en}}{\sigma_{en\lim}} + \frac{\sigma_{fn}}{\sigma_{fn\lim}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{tn}}{\tau_{tn\lim}} \right)^2$$

La littérature russe [1,16,17] utilise la notion de *sécurités partielles*

$$s_e = \frac{\sigma_{en\lim}}{\sigma_{en}}, \quad s_f = \frac{\sigma_{fn\lim}}{\sigma_{fn}}, \quad s_t = \frac{\tau_{tn\lim}}{\tau_{tn}}$$

ce qui mène à écrire

$$\frac{1}{s^2} = \left(\frac{1}{s_e} + \frac{1}{s_f} \right)^2 + \left(\frac{1}{s_t} \right)^2$$

L'avantage de cette manière de voir est qu'elle mène à des calculs très systématiques.

Signalons encore que pour le cas classique flexion-torsion, la littérature allemande utilise souvent une *contrainte de flexion équivalente*

$$\sigma_{f\acute{e}q} = \sqrt{\sigma_{fn}^2 + 3\alpha^2 \tau_{tn}^2}$$

et en déduisent la sécurité par la formule

$$s = \frac{\sigma_{fn\lim}}{\sigma_{f\acute{e}q}}$$

Le coefficient α est défini par

$$\alpha = \frac{\sigma_{fn \text{ lim}}}{\tau_{tn \text{ lim}} \sqrt{3}}$$

On vérifie aisément que c'est équivalent à notre critère, bien qu'un peu moins simple conceptuellement. C'est du reste cette formule que nous avons utilisée anticipativement dans la section consacrée au moment idéal.

3.5.7 – Contraintes oscillatoires d'amplitude variable

3.5.7.1 – Le principe du dommage cumulatif

Envisageons à présent le cas d'une sollicitation sinusoïdale dont l'amplitude varie dans le temps :

$$\sigma(t) = \sigma_m(t) + \sigma_a(t) \sin \omega t$$

Dans un premier stade, nous supposons que les fonctions $\sigma_m(t)$ et $\sigma_a(t)$ sont des fonctions en escalier, c'est-à-dire que l'on a une succession de sollicitations de la forme

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (\sigma_{m1}, \sigma_{a1}) \text{ pendant } n_1 \text{ cycles} \\ \sigma_2 &= (\sigma_{m2}, \sigma_{a2}) \text{ pendant } n_2 \text{ cycles} \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_k &= (\sigma_{mk}, \sigma_{ak}) \text{ pendant } n_k \text{ cycles} \end{aligned}$$

et que certaines au moins de ces sollicitations dépassent la limite d'endurance. La pièce va-t-elle résister ? Pour répondre à cette question, Palmgren [26] a proposé en 1924 le raisonnement suivant (dans le cadre des roulements qui, en première approximation, ont une endurance nulle) :

A la sollicitation 1 correspond par la courbe de Wöhler une durée de vie de N_1 cycles. Après les n_1 cycles, on a donc consommé une partie $\frac{n_1}{N_1}$ de la durée de vie. On dit que la pièce a subi un *dommage*

$$D_1 = \frac{n_1}{N_1}$$

Il est clair que si ce dommage dépasse l'unité, la pièce se rompt.

Pour la sollicitation 2, la courbe de Wöhler donne une durée de vie de N_2 cycles, donc aux n_2 cycles parcourus correspond un dommage

$$D_2 = \frac{n_2}{N_2}$$

L'hypothèse fondamentale de Palmgren est qu'à ce stade, on n'a plus le droit de créer un dommage supérieur à $(1 - D_1)$, ce qui revient à dire que pour éviter la rupture à ce stade, il faut que

$$D_2 < 1 - D_1$$

Il est équivalent de dire que le dommage cumulé des deux sollicitations est donné par

$$D = D_1 + D_2$$

et que la pièce ne sera à même de supporter les deux sollicitations successives que si ce dommage cumulé reste inférieur à l'unité.

Et ainsi de suite. Pour la succession des k sollicitations de 1 à k , le dommage cumulé est donné par

$$D = D_1 + \dots + D_k = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i}$$

et que la pièce tiendra ou se rompra selon que le dommage est inférieur ou supérieur à l'unité. Autrement dit, le critère de rupture est

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1$$

L'application de ce critère à tout type de fatigue, c'est-à-dire pas seulement aux roulements, a été proposée par Miner en 1945 [27]. C'est pourquoi on parle souvent du critère de Miner ou du critère de Palmgren-Miner, mais la justice voudrait qu'on l'appelle critère de Palmgren.

On peut généraliser au cas où la sollicitation change constamment en fonction du temps. Alors, sur un intervalle de temps $]t, t + dt[$ la pièce est soumise à dn cycles sous la sollicitation $\sigma(t) = (\sigma_m(t), \sigma_a(t))$ à la quelle correspond une durée de vie en cycles $N(\sigma(t))$. L'incrément de dommage est donc

$$dD = \frac{1}{N(\sigma(t))} \frac{dn}{dt} dt$$

donc, après un temps t^* , on a le dommage

$$D(t^*) = \int_0^{t^*} \frac{1}{N(\sigma(t))} \frac{dn}{dt} dt$$

et, selon le critère de Palmgren, la rupture surviendra lorsque ce dommage vaudra l'unité. Si l'on note T la durée de vie exprimée en temps, on aura donc

$$D(T) = \int_0^T \frac{1}{N(\sigma(t))} \frac{dn}{dt} dt = 1$$

3.5.7.2 – Discussion physique

Nous empruntons le raisonnement suivant à Lemaître et Chaboche [28]. Le dommage de Palmgren est une notion abstraite. Mais on peut imaginer qu'il existe dans le matériau une variable constitutive δ permettant d'exprimer son dommage d'une manière objective. On peut admettre que sous une sollicitation σ appliquée pendant dn cycles, ce dommage varie selon une *équation d'état* du type

$$d\delta = f(\sigma, \delta) dn$$

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse imaginer quant à la structure de cette fonction f consiste à la supposer *séparée* :

$$f(\sigma, \delta) = A(\sigma).B(\delta)$$

Dans ce cas, l'équation d'état s'intègre simplement en

$$\frac{d\delta}{B(\delta)} = A(\sigma) dn$$

Considérons d'abord le cas simple d'une sollicitation d'amplitude constante. En admettant que la rupture se produise pour une valeur du dommage physique δ^* , il y correspond le nombre de cycles à la rupture $N(\sigma)$ par la condition

$$\int_0^{\delta^*} \frac{d\delta}{B(\delta)} = A(\sigma).N(\sigma)$$

L'intégrale du premier membre ne dépend que de δ^* et peut donc être écrite $C(\delta^*)$. Il en découle

$$A(\sigma) = \frac{C(\delta^*)}{N(\sigma)}$$

Lorsque la sollicitation varie dans le temps, on obtient après un temps t_1 un dommage physique δ_1 donné par

$$C(\delta_1) = \int_0^{t_1} A(\sigma(t)) \frac{dn}{dt} dt = \int_0^{t_1} \frac{C(\delta^*)}{N(\sigma(t))} \frac{dn}{dt} dt$$

soit encore

$$\frac{C(\delta_1)}{C(\delta^*)} = \int_0^{t_1} \frac{1}{N(\sigma(t))} \frac{dn}{dt} dt$$

On constate que le dommage physique δ_1 vaudra δ^* , c'est-à-dire que la rupture surviendra après un temps T tel que

$$\int_0^T \frac{1}{N(\sigma(t))} \frac{dn}{dt} = 1$$

On retrouve bien le principe du dommage cumulatif.

3.5.7.3 – Validité du critère du dommage cumulatif

Il est raisonnable de relier l'endommagement à la probabilité de rupture. En effet, si à un niveau de contrainte donné, on constate qu'un certain nombre d'éprouvettes se rompent, c'est bien qu'elles ont été endommagées. En examinant la figure 144, on constate que la probabilité de rupture est encore non nulle pour des valeurs de la contrainte inférieures à la limite d'endurance moyenne. Pour ces niveaux de contrainte, le dommage calculé par la règle de Palmgren est nul, puisqu'à partir de la courbe de Wöhler moyenne, on trouve toujours

$$\frac{n}{N} = \frac{n}{\infty} = 0$$

Il en résulte que *le critère de Palmgren est toujours en défaut au voisinage de l'endurance*.

Dans certains cas, on peut écrire la probabilité de rupture sous la forme

$$P(\sigma, n) = f\left(\frac{n}{N(\sigma)}\right)$$

où $N(\sigma)$ est la durée de vie sous la contrainte σ , correspondant à une probabilité de rupture de référence P^* . Alors, si la fonction f est croissante, on peut écrire

$$\frac{n}{N(\sigma)} = f^{-1}(P)$$

d'où

$$\frac{dP}{dn} = \frac{1}{N(\sigma)} f'\left(\frac{n}{N(\sigma)}\right) = \frac{1}{N(\sigma)} f'\left(f^{-1}(P)\right) = A(\sigma).B(P)$$

Il s'agit bien d'une loi séparée par rapport à σ et P , et le principe du dommage cumulatif s'applique. C'est le cas des roulements, où la loi de probabilité est une loi de Weibull. On peut imaginer que c'est le cas pour des matériaux d'endurance nulle, comme certains alliages d'aluminium. Mais ce n'est certainement pas vrai au voisinage d'une limite d'endurance, car

cela reviendrait à admettre que cette limite n'est pas dispersée, toutes les courbes d'équiprobabilité de rupture se rejoignant sur cette limite.

Mais pratiquement, si un matériau présente une limite d'endurance raisonnablement grande (aciers), il n'est guère opportun de faire un calcul pour une durée de vie finie. Ce n'est que lorsque cette limite est nulle ou en tout cas très faible que le problème se pose et dans ce cas, le principe du dommage cumulatif est la seule approche simple du problème. .

3.5.8 – Bibliographie

1. V. DOBROVOLSKI et al. – *Eléments de machines*
Mir, Moscou, 1974
2. A. LEROY, B. VISEUR – Communications personnelles
3. W. WEIBULL – *Proc. Roy. Swed. Inst. Engng. Research, Stockholm*, n°151, 1939
4. R.W. BAILEY – The utilization of creep data in engineering design
Proc. Inst. Mech. Engrs 131 (1935)
5. Ch. MASSONNET – *Résistance des matériaux*
Tome 2, Dunod, Paris
6. R.E. PETERSON – Stress concentration phenomena in fatigue of metals
T.A.S.M.E., 55, 1933, pp. 157-171
7. R.E. PETERSON – *Stress concentration factors*
Wiley, New York, 1974
ISBN 0-471-68329-9
8. R.B. HEYWOOD – *Designing against fatigue*
Chapman and Hall, London, 1962
9. H. ROLFF, W. MATEK – *Maschinenelemente*
Vieweg, Braunschweig, 1976
ISBN 3-528-14028-3
10. R. CAZAUD, G. POMEY, P. RABBE, Ch. JANSSEN – *La fatigue des métaux*
Dunod, Paris, 1968
11. H.G. GOUGH, H.V. POLLARD – Strength of materials under combined alternating stresses
Proc. I.M.E., 131, 1935
12. H.G. GOUGH, W.J. CLENSHAW – Some experiments on the resistance of metals to fatigue under combined stress
Aeronautical Research Council reports, ed. H.M.S.O., London, 1951
13. K. HOHENEMSER, W. PRAGER, *Metallwirtschaft* vol. 12, p. 342, 1933

14. N. DAVIDENKOV, E. SHEVANDIN, F. WITMANN – *Jl. Appl. Mech.* **14**, pp. 63-67, 1947
15. S. FENSTER, H.H. GOULD, C.H. LEVINSON – Mechanical Design
sect. 18 de *Mechanical Design and Systems Handbook*, éd. H.A. ROTHBART,
Mc Graw Hill, 1964
16. V. FEODOSSIEV – *Résistance des matériaux*
3^e édition, Mir, Moscou, 1976
17. G. PISSARENKO, A. YAKOVLEV, V. MATVEEV – *Aide-mémoire de résistance des matériaux*
Mir, Moscou, 1979
18. J.F. DEBONGNIE – On the link between design against fatigue and fracture mechanics
Proc. 2000 ASME DETC, sept. 10-13, Baltimore, Maryland
19. K.H. KLOOS – Grundlagen der Werkstoff- und Bauteileigenschaften
in *Dubbel Taschenbuch für die Maschinenbau*,
17. Auflage, Springer, Berlin, 1990
ISBN 3-540-52381-2
20. P.Y. KRAVCHENKO- *Fatigue Resistance*
Pergamon, 1964
21. J.F. DEBONGNIE – Predicting the fatigue notch effect from partial experimental data
International Conference on Engineering Design, ICED01, Glasgow, Aug. 21-23, 2001
22. R. NORTON – *Machine Design*
Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996
ISBN 0-13-555475-6
23. E. SIEBEL – Neue Wege der Festigkeitsberechnung
Z.V.D.I. **90**, n°5, pp. 135-139, 1948
24. E. SIEBEL, M. STIELER – Ungleichförmige Spannungsverteilung bei schwingende Beanspruchung
Z.V.D.I. **97** n°5, pp. 121-152, 11 février 1955
25. C. PETERSEN – Die Gestaltfestigkeit von Bauteilen
Z.V.D.I. **94** n°30, pp. 977-982, 21 oct. 1952
26. A. PALMGREN – Die Lebensdauer von Kugellagern
Z.V.D.I. **68** n°14, 5 avril 1924
27. M.A. MINER – Cumulative damage in fatigue
J. Applied Mech. **12** (1945), p. A159

- 28.** J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE – *Mécanique des milieux solides*
Dunod-Bordas, Paris, 1988
Isbn 2-10-001937-1

3.6 – CONTACTS HERTZIENS

3.6.1 – Introduction

Toute machine comporte un certain nombre d'organes ayant entre eux des liaisons partielles, dites *connexions*. Celles-ci peuvent être *conformes*, ce qui signifie que les deux corps s'épousent exactement sur chacune d'elles. Mais on rencontre aussi des connexions non conformes, que l'on appelle *contacts hertziens*. Parmi ces derniers, on peut encore distinguer les contacts *ponctuels*, par exemple une sphère sur un plan, et les contacts *linéaires*, que l'on trouve par exemple entre deux cylindres ayant une génératrice commune (*fig. 153*).

Les exemples de contacts hertziens abondent. Citons (*fig. 154*) les galets, les cames, les dents d'engrenages, les couteaux de balances, les roues lisses pressées que l'on rencontre dans certains variateurs de vitesse.

Dans tous ces contacts, les surfaces peuvent subir diverses détériorations qui les rendent impropres à assurer correctement leur fonction :

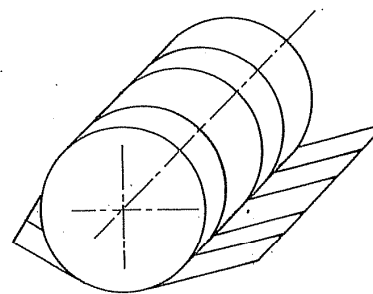
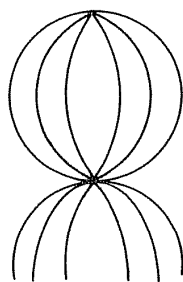
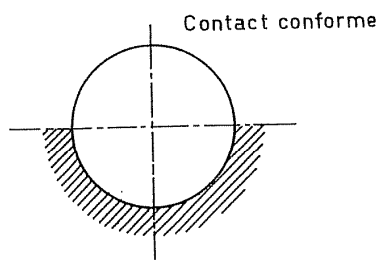
- *déformations plastiques*, formant des empreintes. Une accumulation de telles déformations sous l'effet de charges dynamiques très élevées s'appelle le *matage* ;
- *fatigue superficielle*, se manifestant par de petites fissures se propageant en *écaillés* (petites plaques qui se détachent) ou *piqûres* (petits cratères), selon les conditions de la lubrification ;
- *usure*, c'est-à-dire enlèvement progressif de matière ;
- *grippage*, c'est-à-dire soudure locale des surfaces. Il peut apparaître des *microgrippages*, petites soudures qui cassent dès leur naissance en détériorant la surface et le *grippage caractérisé* dans lequel la soudure est étendue et bloque le mouvement.

3.6.2 – Considérations géométriques

La surface d'un corps possède, en un point régulier P deux rayons de courbure principaux, situés dans deux plans orthogonaux (*fig. 155*). Par convention, nous dirons qu'un rayon de courbure est *positif* si le centre de courbure correspondant est situé du même côté de P que la matière. Dans le cas contraire, on affectera le rayon de courbure du signe *négatif*. Nous appellerons *courbures* les inverses des rayons de courbure :

$$\rho_1 = \frac{1}{R_1} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{1}{R_2}$$

Lorsque deux corps I et II sont en contact de telle façon que leurs plans principaux de courbure coïncident en au point P de contact, seul cas que nous considérerons ici (*fig. 156*), commençons par observer que dans la direction x_1 , l'écart entre les deux surfaces, compté selon la normale commune au contact, est donné par



Contact ponctuel

Contact linéaire

FIG. 153

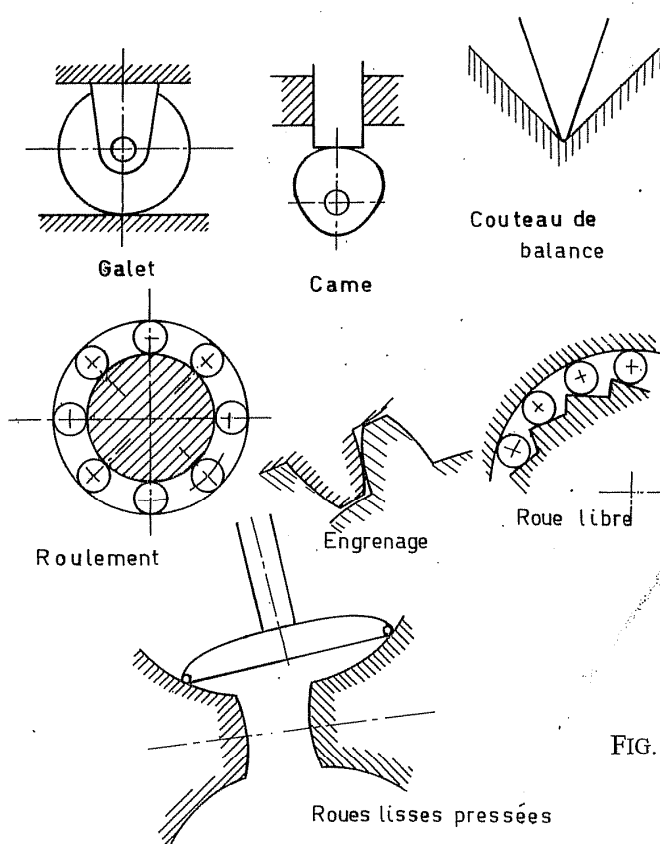


FIG. 154

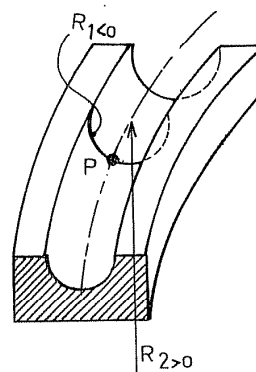
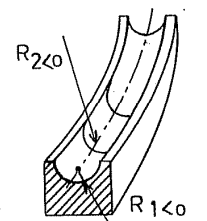
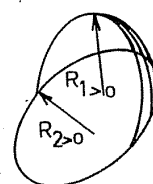


FIG. 155

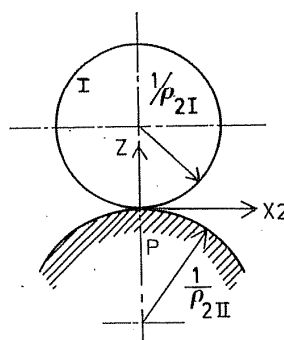
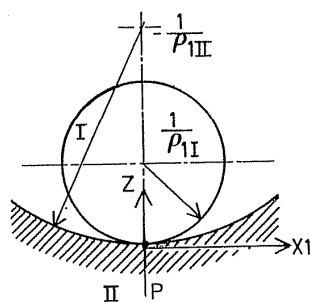


FIG. 156

$$\Delta z = \frac{1}{2}(\rho_{1I} + \rho_{1II})x_1^2$$

en assimilant, au voisinage du contact, les profils des deux corps à des paraboles. Nous donnerons au groupement $(\rho_{1I} + \rho_{1II})$ le nom de *divergence dans la direction 1*. De même, dans la direction 2, on a

$$\Delta z = \frac{1}{2}(\rho_{2I} + \rho_{2II})x_2^2$$

On se convainc aisément que le contact au point P n'est possible que si les deux divergences sont non négatives,

$$\rho_{1I} + \rho_{1II} \geq 0 \quad \text{et} \quad \rho_{2I} + \rho_{2II} \geq 0$$

La nullité de la divergence dans une direction mène à un contact linéaire, et la nullité des deux divergences mène à un contact conforme.

Pour caractériser le contact, on utilise les deux grandeurs suivantes :

- La *somme des courbures*

$$\sum \rho = (\rho_{1I} + \rho_{1II}) + (\rho_{2I} + \rho_{2II})$$

qui, du reste, est aussi la somme des divergences. En vertu des considérations qui précèdent, c'est un nombre positif.

- La *dissymétrie du contact*

$$F(\rho) = \frac{(\rho_{1I} + \rho_{1II}) - (\rho_{2I} + \rho_{2II})}{\sum \rho}$$

qui appelle les commentaires suivants. Tout d'abord, comme les deux divergences sont positives, leur différence est, en grandeur, inférieure à leur somme. Donc

$$0 \leq F(\rho) \leq 1$$

- Lorsque $F(\rho) = 0$, on a nécessairement

$$\rho_{1I} + \rho_{1II} = \rho_{2I} + \rho_{2II}$$

Les deux divergences sont identiques, et tout de passe comme dans le contact d'une sphère sur un plan : le contact est dit *sphérique*.

- A l'opposé, lorsque $F(\rho) = 1$, cela signifie que

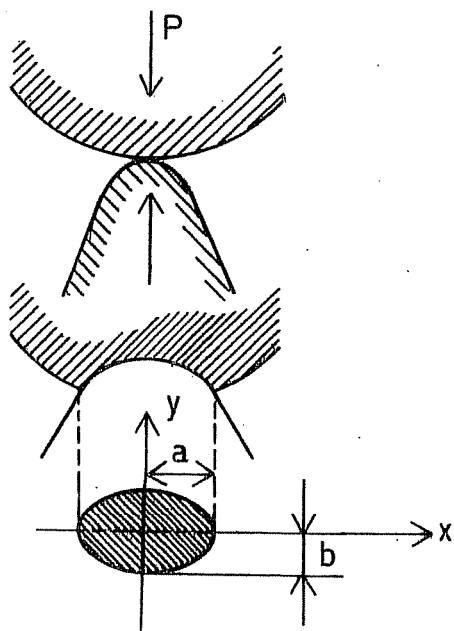


FIG. 157

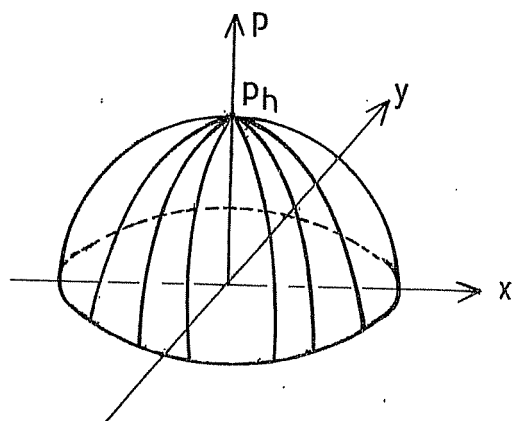


FIG. 158

$$|(\rho_{1I} + \rho_{1II}) - (\rho_{2I} + \rho_{2II})| = \sum \rho = (\rho_{1I} + \rho_{1II}) + (\rho_{2I} + \rho_{2II})$$

on a donc *ou bien*

$$(\rho_{1I} + \rho_{1II}) - (\rho_{2I} + \rho_{2II}) = (\rho_{1I} + \rho_{1II}) + (\rho_{2I} + \rho_{2II})$$

ce qui implique

$$\rho_{2I} + \rho_{2II} = 0$$

ou bien

$$-(\rho_{1I} + \rho_{1II}) + (\rho_{2I} + \rho_{2II}) = (\rho_{1I} + \rho_{1II}) + (\rho_{2I} + \rho_{2II})$$

ce qui implique alors

$$\rho_{1I} + \rho_{1II} = 0$$

Dans les deux cas, il s'agit d'un contact *linéaire*.

- Entre ces deux extrêmes, on trouve les contacts ponctuels dissymétriques.

Tenant compte du fait que $F(\rho)$ est toujours compris entre 0 et 1, il est de tradition d'introduire l'angle auxiliaire θ défini par

$$\cos \theta = F(\rho)$$

3.6.3 – Contacts ponctuels

3.6.3.1 – Pression de Hertz, aire de contact, rapprochement

La théorie des contacts ponctuels est due à Hertz [1]. L'effort P pressant les surfaces a pour effet d'établir une petite *surface de contact* dont la projection est une ellipse de demi axes a et b , a étant par définition le plus grand des deux (*fig. 157*). Cette déformation fait naître un champ de pression de la forme (*fig. 158*)

$$p = p_H \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

dont le maximum p_H est appelé *pression de Hertz*. On peut également calculer le rapprochement h des deux corps. Les grandeurs, a , b , p_H et h dépendent de la charge, de la somme des courbures, de l'angle θ défini ci-dessus et d'un *module d'élasticité moyen* E_m dépendant des modules de Young E et des coefficients de Poisson ν des deux corps, selon la relation

$$\frac{2}{E_m} = \frac{1 - \nu_I^2}{E_I} + \frac{1 - \nu_{II}^2}{E_{II}}$$

On peut donner une expression très simple et très facile à retenir des formules de Hertz en recourant à l'analyse dimensionnelle. Les données du problème ont les dimensions suivantes :

$$\begin{aligned} [P] &= F \\ [E_m] &= \frac{F}{L^2} \\ [\sum \rho] &= \frac{1}{L} \\ [\theta] &= 1 \end{aligned}$$

A part θ qui est sans dimension, il reste trois paramètres dépendant de deux unités, ce qui ne permet de former qu'un seul autre nombre sans dimension

$$\Pi = \frac{P(\sum \rho)^2}{E_m}$$

que nous appellerons *nombre de contact*. La théorie montre que a , b et p_H varient *dans la même proportion* avec la charge, et comme

$$P \propto abp_H \propto \Pi$$

on a

$$a, b \text{ et } p_H \propto \Pi^{1/3}$$

D'autre part, la géométrie implique que h soit proportionnel à a^2 . Cela étant, aux résultats a , b , h et p_H , on associera de manière tout à fait naturelle les nombres sans dimension $a\sum\rho$, $b\sum\rho$, $h\sum\rho$ et $\frac{p_H}{E_m}$. Ceci mène à écrire les formules de Hertz sans dimension suivantes :

$$\begin{aligned} a\sum\rho &= k_a(\theta).\Pi^{1/3} \\ b\sum\rho &= k_b(\theta).\Pi^{1/3} \\ \frac{p_H}{E_m} &= k_p(\theta).\Pi^{1/3} \\ h\sum\rho &= k_h(\theta).\Pi^{2/3} \end{aligned}$$

On trouvera aux pages CH2 et CH3 du fascicule *QR* des diagrammes permettant de déterminer les coefficients k_a , k_b , k_p , k_h et l'angle θ en fonction du paramètre $e = \frac{b}{a}$.

3.6.3.2 – Contraintes dimensionnantes

Si l'on adopte le critère de Tresca pour la déformation plastique, on cherchera la valeur maximale τ_{st} du cisaillement équivalent $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_{princ.M} - \sigma_{princ.m})$. Ce maximum se produit à une certaine profondeur z_{st} sous le centre de l'aire de contact. On obtient le résultat suivant :

$$\tau_{st} = T_{st} p_H \text{ à une profondeur } z_{st} = \zeta_{st} b$$

Les deux paramètres T_{st} et ζ_{st} s'obtiennent à l'aide des courbes de la page CH4 du fascicule *QR*. Le critère de Tresca indique que la première plastification aura lieu pour

$$\tau_{st} = \frac{R_e}{2}$$

R_e étant la limite élastique. On constate sur le diagramme donnant T_{st} que l'on peut admettre sans grande erreur, quel que soit l'excentricité du contact,

$$T_{st} \approx \frac{1}{3}$$

ce qui donne à la limite élastique exprimée en termes de la pression de Hertz

$$p_H \text{ lim } \text{él} \approx \frac{3}{2} R_e$$

Une sécurité de 1,25 est largement suffisante. Du reste, en technique du roulement, on admet une certaine déformation permanente.

Dans le cas fréquent où l'un des deux corps défile devant l'autre, par exemple en roulant, la contrainte de cisaillement maximale vaut τ_{st} lorsque le second corps se trouve au-dessus du point considéré et 0 s'il en est éloigné. La variation du cisaillement maximal en ce point vaut donc $T_{st} p_H$. Mais il existe, comme le montre la figure 159, à une distance $z_0 = \zeta_0 b$ de la surface, une contrainte de cisaillement qui a une forme symétrique par rapport à la verticale au droit du contact. Lors du roulement, elle passe de $\tau_0 = T_0 p_H$ à $-\tau_0$, si bien que sa variation est $2T_0 p_H$. Or, il se trouve que $2T_0 \geq T_{st}$, ce qui pousse à admettre que c'est cette variation qui est responsable de l'écaillage [3, 4, 7].

Certaines mesures technologiques sont fondées sur la notion de *pression spécifique* k définie par

$$k = \frac{P}{D^2}$$

C'est notamment le cas des essais relatifs aux roulements à billes. Mais les limites élastiques correspondantes *dépendent des divergences*, car c'est en fait p_H qui est la vraie variable.

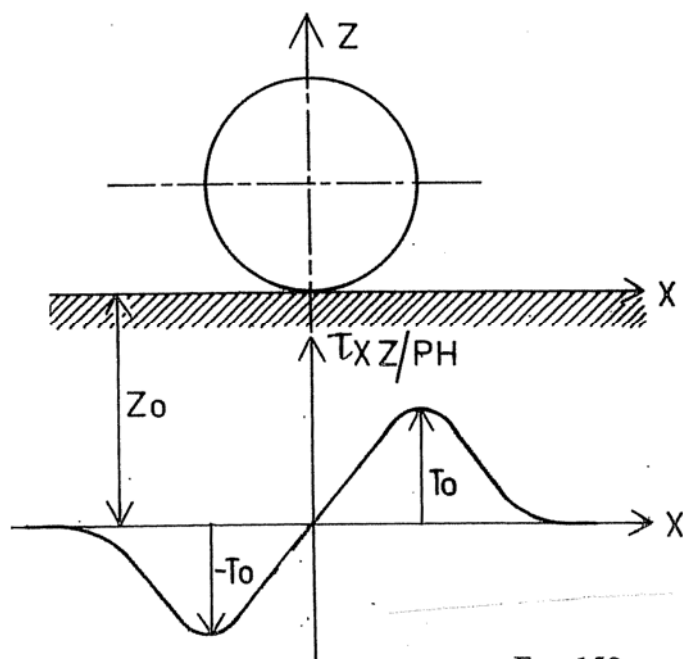


FIG. 159

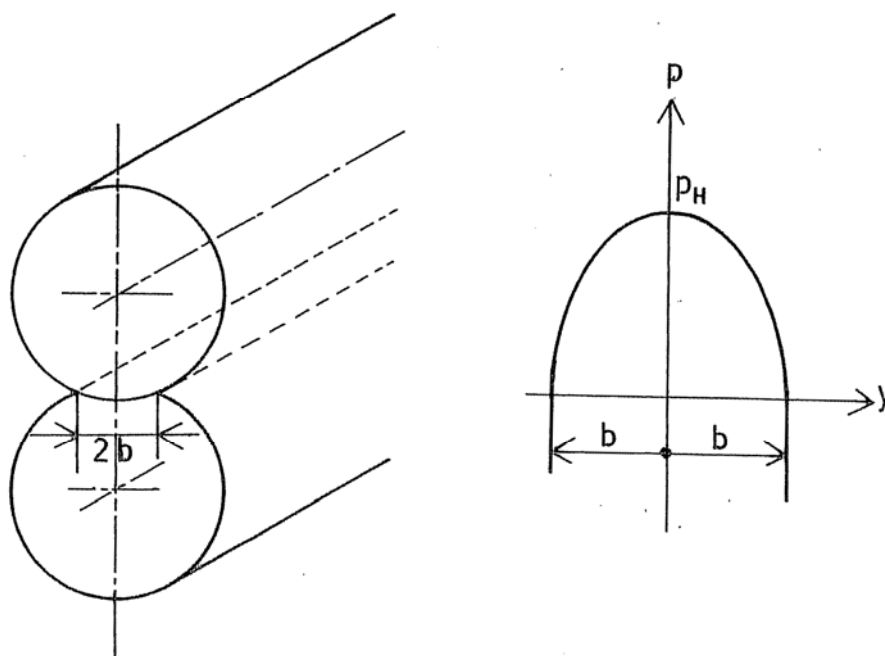


FIG. 160

3.6.3.3 – Déformations permanentes dans le cas d'aciers à roulements

La valeur maximale du cisaillement étant concentrée sur une petite zone, on peut y excéder assez largement la limite élastique avant qu'une déformation permanente soit mesurable en surface. D'après Palmgren, Lundberg et Bratt [5, 6], le rapprochement permanent δ_p entre une bille et une piste, toutes deux constituées d'acier à roulement trempé d'une dureté Vickers de 7500 à 8500 MPa peut être évalué par la formule suivante :

$$\frac{\delta_p}{D} = 6.10^{-7} \left(\frac{k}{MPa} \right)^2 \left[\frac{D^2}{4} (\rho_{1I} + \rho_{1II})(\rho_{2I} + \rho_{2II}) \right]$$

On notera que dans cette formule, la facteur entre crochets vaut l'unité dans le cas d'une sphère sur un plan.

Il est de pratique courante de limiter le rapport $\frac{\delta_p}{D}$ à une valeur donnée. Ainsi, dans le cas des roulements, on cite généralement la valeur $\frac{\delta_p}{D} = 10^{-4}$. La pression spécifique correspondante s'obtient en inversant la formule ci-dessus, ce qui donne

$$\frac{k}{MPa} = \frac{1291}{\frac{D}{2} \sqrt{(\rho_{1I} + \rho_{1II})(\rho_{2I} + \rho_{2II})}} \sqrt{\frac{\delta_p}{D}}$$

3.6.4 – Contacts linéaires

3.6.4.1 – Résultats généraux

Considérons deux cylindres parfaits de longueur infinie pressés l'un sur l'autre (fig. 160). La sollicitation est définie par la *charge par unité de longueur* P' . dans le cas pratique de cylindres de longueur ℓ_a (en principe grande), on a

$$P' = \frac{P}{\ell_a}$$

On obtient une distribution de pression parabolique sur une *bande de contact* de largeur b :

$$p = p_H \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2}$$

De la même manière que pour le contact ponctuel, nous allons donner une présentation fondée sur un nombre sans dimension. Interviennent ici, les paramètres suivants :

- P' , force par unité de longueur..... $[P'] = \frac{F}{L}$
- $\Sigma\rho = \rho_I + \rho_{II}$, somme des courbures ou divergence.... $[\Sigma\rho] = \frac{1}{L}$
- E_m , module d'élasticité équivalent..... $[E_m] = \frac{F}{L^2}$

ce qui conduit au nombre sans dimension

$$\Pi = \frac{P' \Sigma \rho}{E_m}$$

que nous appellerons encore *nombre de contact*. De la même manière qu'en contact ponctuel, la pression et la largeur de la bande de contact contribuent de manière proportionnelle à la charge par unité de longueur :

$$b \propto p_H$$

et comme

$$\Pi \propto P' \propto b \cdot p_H$$

on a

$$b \propto \sqrt{\Pi} \quad \text{et} \quad p_H \propto \sqrt{\Pi}$$

Les formules exactes sont

$$b \Sigma \rho = \sqrt{\frac{8}{\pi} \Pi}$$

$$\frac{p_H}{E_m} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \Pi}$$

Pour le rapprochement, la théorie se heurte à une difficulté. En effet, si les deux cylindres sont réellement infinis, le rapprochement n'a pas une valeur bornée. Dans le cas de corps de longueur finie, on peut calculer le rapprochement de l'axe d'un cylindre par rapport à un point éloigné de l'autre corps par la formule de Lundberg [3,6]

$$h = 2,537 \frac{P^{0,9}}{E_m^{0,9} \ell_a^{0,8}}$$

Il est intéressant de noter que dans cette formule, *la divergence n'intervient pas*, ce qui est paradoxal. Du reste, il faut remarquer que cette formule est dimensionnellement correcte, puisque

$$\left. \begin{aligned} [P^{0,9}] &= F^{0,9} \\ [E_m^{0,9}] &= \left(\frac{F}{L^2}\right)^{0,9} = \frac{F^{0,9}}{L^{1,8}} \\ [\ell_a^{0,8}] &= L^{0,8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\frac{P^{0,9}}{E_m^{0,9} \ell_a^{0,8}} \right] = L$$

3.6.4.2 - Contraintes

Les contraintes se calculent à partir de la pression de Hertz comme pour un contact ponctuel, avec une excentricité $e = 0$.

Dans le cas d'un contact linéaire, on appelle *pression spécifique* la grandeur

$$k = \frac{P'}{D} = \frac{P}{\ell_a D}$$

où D représente toujours *le plus petit* des deux diamètres. Il est d'usage de limiter cette pression spécifique, mais la limite doit être choisie en fonction des courbures.

3.6.4.3 – Déformations permanentes dans le cas d'aciers à roulements

Selon [5, 6], on peut calculer la déformation permanente par la formule

$$\frac{\delta_p}{D} = 5,657 \cdot 10^{-11} \left(\frac{k}{MPa} \sqrt{\frac{D}{2} \Sigma \rho} \right)^3$$

La formule inverse, qui sert à limiter la pression spécifique, est

$$\frac{k}{MPa} = \frac{2605 \sqrt[3]{\frac{\delta_p}{D}}}{\sqrt{\frac{D}{2} \Sigma \rho}}.$$

3.6.5 – Sollicitations dynamiques

Les sollicitations dynamiques se rencontrent chaque fois qu'il y a glissement ou roulement. On notera en particulier le cas des roulements à billes pour lesquels des recherches très approfondies ont pu être menées. L'expérience montre que la durée de vie est pratiquement toujours limitée et que la loi de la durée de vie N en cycles en fonction de la charge P est de la forme

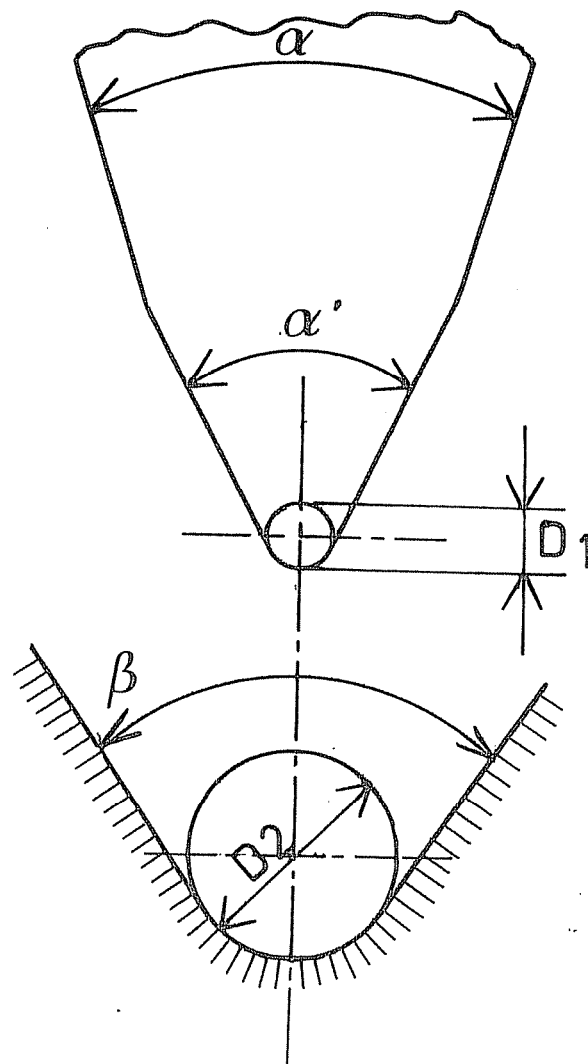


FIG. 161

$$\frac{N}{N^*} = \left(\frac{P^*}{P} \right)^{\alpha_p}$$

où N^* est la durée de vie correspondant à la charge de référence arbitraire P^* . L'exposant α_p vaut 3 pour un contact ponctuel et 4 pour un contact linéaire. En termes des pressions de Hertz, cela se traduit par

$$\frac{N}{N^*} = \left(\frac{p_H^*}{p_H} \right)^{\alpha_H}$$

avec les exposants

$$\alpha_H = \begin{cases} 9 & \text{pour un contact ponctuel} \\ 8 & \text{pour un contact linéaire} \end{cases}$$

En l'absence de renseignements expérimentaux, on peut admettre pour les aciers trempés les limites suivantes citées par Niemann [9]

$$\text{Pour } N^* = 33Mc, \quad p_H^* \approx \begin{cases} 0,5HB & \text{en contact ponctuel} \\ 0,3HB & \text{en contact linéaire} \end{cases}$$

Ces relations sont valables en unités cohérentes pour p_H et HB .

3.6.6 – Premier exemple : couteau de balance [9]

Les couteaux de balance se fabriquent en acier trempé (acier à roulements 100Cr6) ou en acier cémenté. Il convient d'obtenir une dureté Vickers de l'ordre de 7500MPa au moins. Les dimensions, définies par la figure 161, prennent, suivant l'usage de la balance, les valeurs suivantes :

TYPE	$\alpha/\text{degré}$	$\alpha'/\text{degré}$	D_1/mm	$\beta/\text{degré}$	D_2/mm
Précision	45	75	0,03	120	0,15
Moyenne	60	80	0,2	140	0,5
Lourde	90	90	1,5	140	3,0
Machines d'essais de résistance	90	110	2,35	160	4,0

Il s'agit, pour le bon fonctionnement de la balance, de limiter la déformation permanente. La plus forte exigence correspond à la balance de précision, et on peut, de ligne en ligne du précédent tableau, demander de moins en moins. Fixons les valeurs suivantes :

$$\frac{\delta_p}{D_1} = \begin{cases} 0,15 \cdot 10^{-4} & \text{précision} \\ 33 \cdot 10^{-4} & \text{moyenne} \\ 60 \cdot 10^{-4} & \text{lourde} \\ 100 \cdot 10^{-4} & \text{machines d'essais de résistance} \end{cases}$$

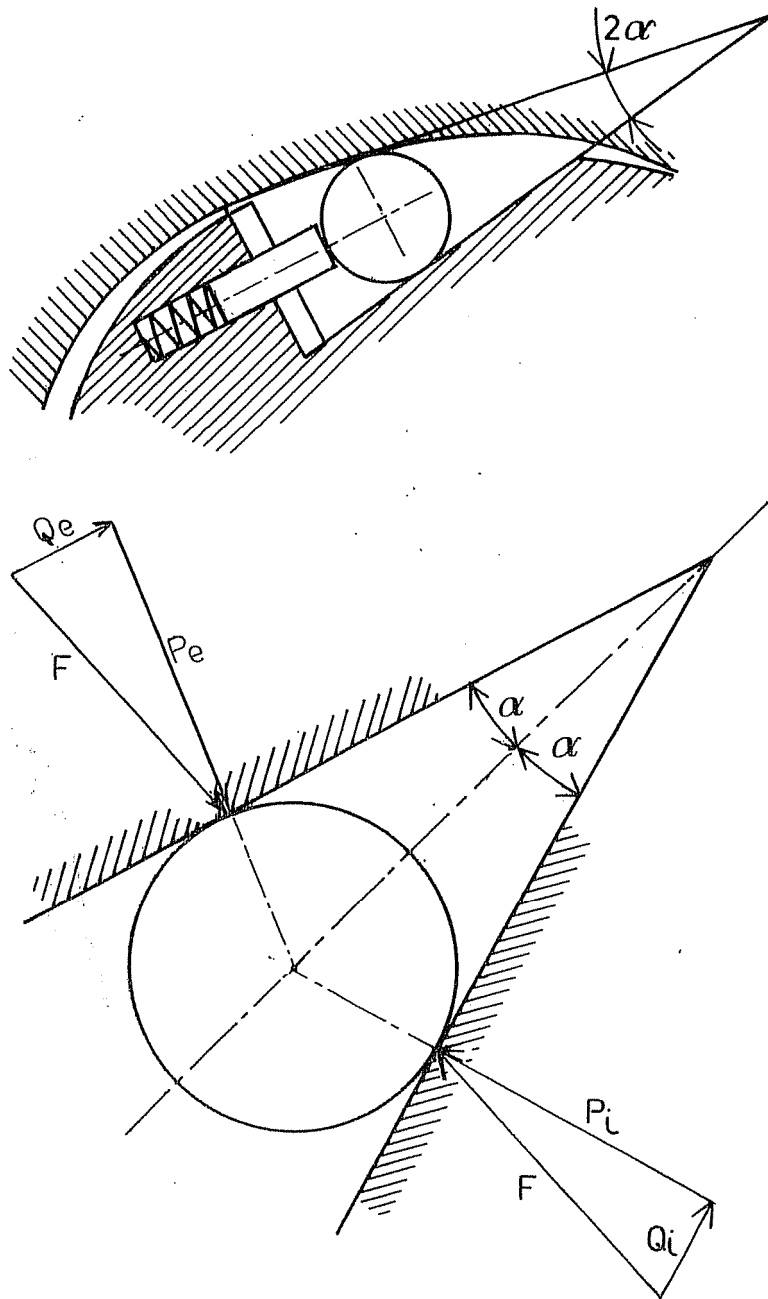


FIG. 162

On demande de choisir les charges spécifiques convenables. En effet, cela définit en fait, pour la charge donnée, la longueur de contact nécessaire, ce qui est un point essentiel de la conception.

Nous sommes dans le cadre d'application de la formule donnée en §3.6.4.3. On a ici

$$\frac{D}{2} \Sigma \rho = \frac{D_1}{2} \left(\frac{2}{D_1} - \frac{2}{D_2} \right) = 1 - \frac{D_1}{D_2}$$

Il vient donc

$$\frac{k}{MPa} = \frac{26,05}{\sqrt{1 - \frac{D_1}{D_2}}} \sqrt[3]{\frac{\delta_p}{D_1}}$$

Les calculs sont effectués dans le tableau suivant :

TYPE	$\frac{D_1}{mm}$	$\frac{D_2}{mm}$	$\frac{\delta_p}{D_1}$	$\sqrt[3]{\frac{\delta_p}{D_1}}$	$\sqrt{1 - \frac{D_1}{D_2}}$	$\frac{k}{MPa}$	$\frac{P'}{N/mm}$
Précision	0,03	0,15	$0,15 \cdot 10^{-4}$	0,02466	0,8944	71,83	2,155
Moyenne	0,2	0,5	$33 \cdot 10^{-4}$	0,1489	0,7746	500,7	100,1
Lourde	1,5	3	$60 \cdot 10^{-4}$	0,1817	0,7071	669,4	1004
Essai rés.	2,35	4	$100 \cdot 10^{-4}$	0,2154	0,6423	873,8	2053

3.6.7 – Second exemple – roue libre à galets [9]

Dans certaines roues libres (*fig. 162*), les galets sont emprisonnés dans le coin lors d'une rotation dans le sens antihorlogique du moyeu. Dans le sens de rotation inverse, les galets sont chassés dans leurs logements.

L'équilibre (si l'on fait abstraction du ressort) implique

$$P_i = P_e = F \cos \alpha$$

$$Q_i = Q_e = F \sin \alpha$$

Le coincement recherché n'aura lieu que si

$$Q_i < \mu P_i \quad \text{et} \quad Q_e < \mu P_e$$

ce qui ne sera possible que si

$$\tan \alpha < \mu$$

ce qui revient à dire que l'angle α est inférieur à l'angle de frottement. Il faut à tout prix limiter les déformations de contact. Aussi choisit-on des aciers très durs, de cémentation

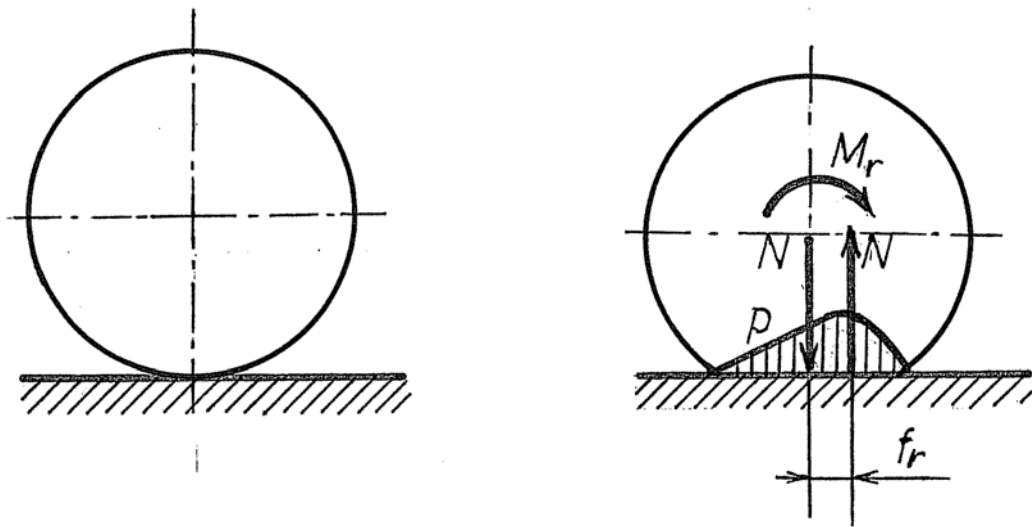


FIG. 163

(16MnCr5) ou d'amélioration (100Cr6), de manière à obtenir une dureté des chemins de roulement de l'ordre de $HRC = 62 \pm 2$, ce qui correspond approximativement à $HV = 7800 \dots 8900 MPa$. La déformation admise est le dix-millième du diamètre du rouleau. On obtient, si la piste intérieure est plane,

$$\frac{D}{2} \sum \rho = 1$$

$$\frac{k}{MPa} = 2605 \sqrt[3]{10^{-4}} = 120,9$$

Cependant, le coincement de la roue se fait par choc, ce dont on tient compte par un facteur de service $K = 3$. On aura donc la valeur

$$k = 120,9 MPa \quad \text{si compté à partir de } M_{t \max} = KM_{tnom}$$

ou

$$k = 40,30 MPa \quad \text{si compté à partir de } M_{tnom}$$

Pour les autres dimensions, le rouleau a une largeur comprise entre 1,5D et 4D. Le tambour a une épaisseur comprise entre 0,75D et D.

3.6.8 – Le modèle de Föppl du coefficient de frottement de roulement

On sait que pour faire rouler sur une surface plane une pièce cylindrique (*roue*) soumise à un effort normal N , il faut développer un couple de roulement

$$M_r = f_r N$$

et on admet souvent que le *bras de levier de roulement* f_r , qui a la dimension d'une longueur, est constant pour un couple de matériaux. Cette affirmation ne peut être générale. En effet, ce phénomène est généralement expliqué par la déformation de contact, qui permet (*fig. 163*) la naissance d'un système de pressions dont la résultante N passe à une distance f_r du centre. Si f_r est indépendant du diamètre, la résultante peut passer hors de la roue pour un diamètre suffisamment petit, ce qui est physiquement inacceptable. Pour obtenir un modèle plus réaliste, commençons par nous intéresser à la déformation de contact. La largeur de contact est donnée par la formule générale

$$b \sum \rho = \sqrt{\frac{8}{\pi} \Pi}$$

Dans le cas considéré, si R est le rayon de la roue, on a

$$\sum \rho = \frac{1}{R}$$

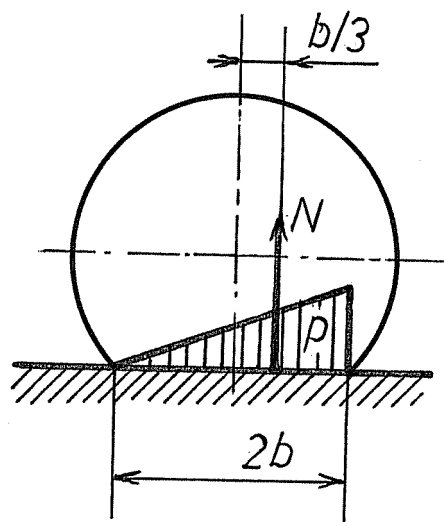


FIG. 164

Il vient donc

$$b = \sqrt{\frac{8}{\pi} \Pi \cdot R}$$

D'un autre côté, si l'on note N la charge radiale de la roue et ℓ_a , sa largeur, on a

$$\Pi = \frac{N}{E_m \ell_a} \sum \rho = \frac{N}{E_m \ell_a R}$$

Il vient donc

$$b = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{N}{E_m \ell_a R}} \cdot R = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{NR}{E_m \ell_a}}.$$

En admettant l'hypothèse – certes simpliste – que sur la largeur de contact $2b$, la distribution des pressions est linéaire (*fig. 164*), la résultante passe à une distance de l'arrière du contact égale à

$$\frac{2}{3} \cdot 2b = \frac{4}{3} b = b + \frac{b}{3}$$

donc à une distance $\frac{b}{3}$ de l'axe de la roue. On a alors

$$f_r = \frac{b}{3}$$

En réalité, la distribution de pression est plus complexe et selon Föppl [10], la vraie valeur est

$$f_r = \frac{\pi}{32} b$$

En explicitant b , cela donne

$$f_r = \frac{\pi}{32} \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{NR}{E_m \ell_a}} = 0,1567 \sqrt{\frac{NR}{E_m \ell_a}}$$

Le couple nécessaire pour faire tourner la roue est donc donné par

$$M_r = 0,1567 \sqrt{\frac{R}{E_m \ell_a}} N^{3/2}$$

Il est souvent plus intéressant de connaître la force horizontale T qu'il faut appliquer sur l'axe de la roue pour la faire tourner (*force de traction*). Elle est donnée par

$$M_r = TR \quad \text{soit} \quad T = \frac{M_r}{R}$$

Elle vaut donc

$$T = 0,1567 \frac{N^{3/2}}{\sqrt{E_m \ell_a R}}$$

On constate qu'elle croît plus que proportionnellement avec la charge. Par ailleurs, elle diminue lorsque le rayon de la roue augmente. On parle parfois du *facteur de résistance au roulement*

$$\mu_r = \frac{T}{N}$$

qui vaut donc

$$\mu_r = 0,1567 \sqrt{\frac{N}{E_m \ell_a R}}$$

La comparaison de ce facteur avec le coefficient de frottement de glissement μ permet de déterminer si sous l'effet de la force de traction T , la roue va rouler ou glisser. Elle roulera si la force nécessaire à la faire tourner est inférieure à la force nécessaire à la faire glisser, soit si

$$\mu_r < \mu$$

Dans le cas contraire, elle glissera. D'après la formule que nous venons d'obtenir, les roues de très petit diamètre risquent de glisser plutôt que de rouler.

3.6.9 – Bibliographie

1. H. HERTZ – Über die Berührung fester elastischer Körper
Gesammelte Werke, tome I, chap. 5, pp. 155-174
 (Extrait du *Journal für die reine and angewandete Mathematik*, **92**, pp. 156-171, 1881)
2. G. LUNDBERG, A. PALMGREN – Dynamic capacity of rolling bearings
Acta Polytechnica, Mech. Engng. Series, **1**, n°3, 1947
3. G. LUNDBERG, A. PALMGREN – Dynamic capacity of roller bearings
Acta Polytechnica, Mech. Engng. Series, **2**, n°4, 1952
4. G. LUNDBERG, A. PALMGREN – Dynamic capacity of rolling bearings
The Ball Bearing Journal, n°304, pp. 50-61, 1947

5. A. PALMGREN, G. LUNDBERG, BRATT – Capacidad de carga estatica de los rodamientos de bolas y de rodillos
La Revista de Cojinetas a Bolas, n°48, pp. 36-44, 1943
6. A. PALMGREN – *Les Roulements*
Editions SKF
7. A.B. JONES – The mathematical theory of rolling element bearings
Chap. 13 de *Mechanical Design and Systems Handbook*, éd. H.A. Rothbart,
Mc Graw Hill, 1964
ISBN 0-07-054019-5
8. G. LUNDBERG – Cylinder compressed between two plane bodies
SKF, Göteborg. Cité dans [3]
9. G. NIEMANN – *Maschinenenelemente*, tome 1,
2^e edition, Springer, Berlin, 1975
ISBN 3-540-06809-0
10. G. SPINNLER – *Conception des machines – Principes et applications*
Tome 1 : Statique.
Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1997
ISBN 2-88074-301-X

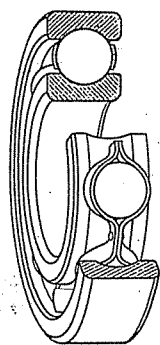


FIG. 165

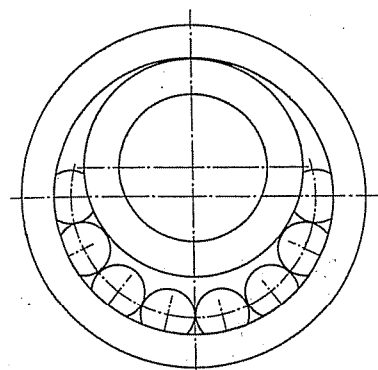


FIG. 166

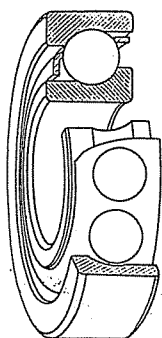


FIG. 167

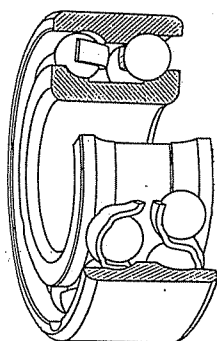


FIG. 168

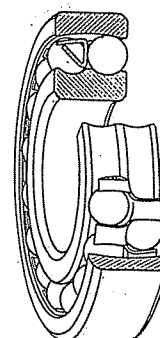


FIG. 169

3.7 – ROULEMENTS

3.7.1 – Principaux types de roulements

A quelques rares exceptions près, les roulements sont constitués des éléments suivants :

- Des *éléments roulants*, billes, rouleaux ou aiguilles
- Une *bague extérieure*, dans laquelle est creusée une piste pour guider les éléments roulants.
- Une *bague intérieure*, également creusée d'une piste.
- Une *cage* destinée à maintenir entre les éléments roulants la distance voulue

Il existe de très nombreux types de roulements, et nous ne présenterons ici que les plus courants. Nous sommes redevable, pour les figures, à la société SKF-France.

3.7.1.1 – Roulement rigide à billes

C'est le plus courant des roulements. La conformité des pistes avec les billes est très forte dans la direction axiale ($r_{piste} = 0,52D_{bille}$). Ces roulements peuvent reprendre une charge radiale, une charge axiale modérée et ont une certaine raideur vis-à-vis de l'inclinaison de l'arbre. L'inclinaison admissible est de 2' à 10'. Pour monter ce type de roulements, on excentre la bague intérieure par rapport à la bague extérieure, ce qui rend possible l'introduction des billes (*fig. 166*). On recentre alors le tout, et on place la cage qui est composée de deux pièces qui, sur la figure 165, sont rivées. Très répandu, ce type de roulements est aussi le moins cher.

3.7.1.2 – Roulements à billes à contact oblique (*fig. 167*)

Ces roulements sont conçus pour reprendre une combinaison de charge radiale et de charge axiale. En l'absence d'une charge axiale suffisante, les deux bagues ont tendance à se séparer. Ces roulements sont donc toujours montés par paire.

Certains roulements sont constitués de deux rangées de billes à contact oblique (*fig. 168*) montées en O, expression que nous expliquerons plus loin. Ces roulements constituent un réel encastrement de l'arbre.

A l'inverse, si l'on place deux rangées de billes sur une piste extérieure sphérique, dont le centre est sur l'arbre, on obtient un roulement à rotule (*fig. 169*). Ces roulements permettent une inclinaison de l'arbre de 1,5 à 3°.

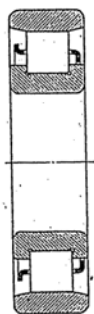


FIG. 170

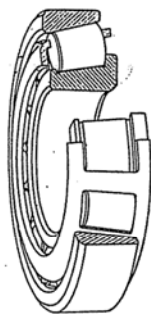


FIG. 171

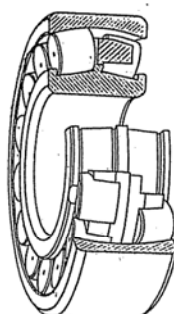


FIG. 172

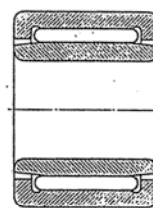


FIG. 173

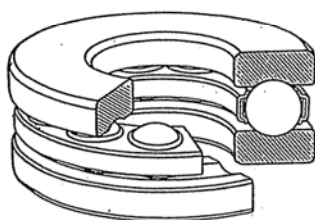


FIG. 174

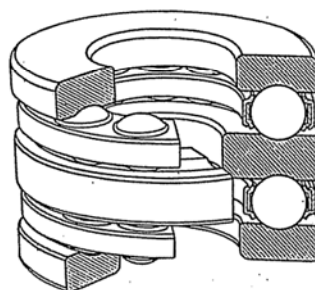


FIG. 175

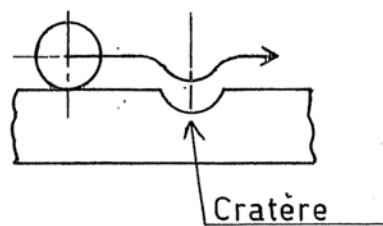
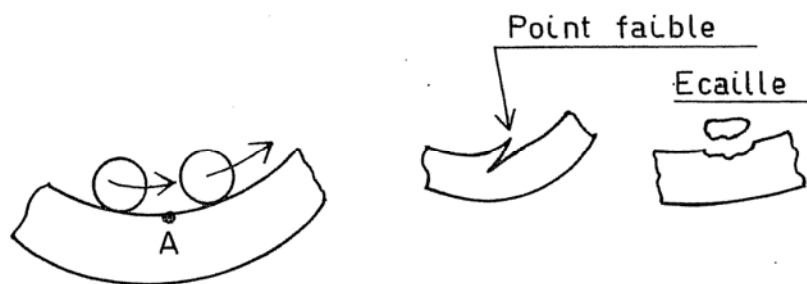


FIG. 176

3.7.1.3 – Roulements à rouleaux

Les roulements à rouleaux supportent des charges plus grandes que les roulements à billes et ils sont en outre plus rigides. Les roulements à rouleaux cylindriques ont le plus souvent une seule bague épaulée latéralement. Sur la figure 170, c'est la bague intérieure. Il est clair qu'un tel roulement est totalement incapable de reprendre une charge axiale. L'inclinaison admissible de l'arbre dans un tel roulement est de 2° .

L'équivalent en roulements à rouleaux du roulement à billes à contact oblique est le roulement à rouleaux coniques (*fig. 171*). Il faut noter qu'ici, les efforts, normaux à deux génératrices opposées d'un rouleau, ont une résultante tendant à chasser le rouleau en direction de sa grande base. Il est donc impératif d'avoir des épaulements sur une des deux bagues – en général, c'est la bague intérieure – et la grande base du rouleau frotte réellement sur l'épaulement. De la même façon que les roulements à billes à contact oblique, ces roulements se montent par paire, de manière à équilibrer les efforts axiaux.

De la même façon qu'avec des billes, on peut obtenir un roulement à rotule sur deux rangées de rouleaux en tonneau (*fig. 172*). Ce type de roulement a été inventé par A. Palmgren de la société SKF.

3.7.1.4 – Roulements à aiguilles.

On appelle *roulements à aiguilles* des roulements ayant des rouleaux très minces, comparables à des aiguilles (*fig. 173*). Ces roulements ont des applications spécifiques, notamment les têtes de bielles des moteurs à deux temps. La raison en est que le mouvement pendulaire de la bielle induit des accélérations diverses qui, avec de gros rouleaux, provoqueraient des efforts d'inertie importants, nuisibles à la cage.

3.7.1.5 – Butées

On appelle *butée* un roulement destiné à reprendre une charge axiale. La figure 174 représente une butée à billes à simple effet, ce qui signifie qu'elle ne peut reprendre des efforts que dans un seul sens. La figure 175 représente une butée à double effet. Il existe également des butées à rouleaux.

3.7.2 – Fatigue des roulements

Considérons un roulement tournant sous une charge donnée de direction fixe. L'expérience montre qu'après un certain temps de fonctionnement (heureusement assez grand), le roulement commence à émettre un bruit caractéristique que l'on considère généralement comme le signe de sa défaillance. L'origine de ce bruit est le phénomène d'*écaillage*, dont voici la genèse. Les éléments roulants font supporter aux chemins de roulement des efforts répétés et comme nous l'avons vu lors de l'étude du contact hertzien, il existe une profondeur à laquelle le cisaillement est alterné. A l'issue, d'un certain nombre de cycles, il arrive qu'une fissure se forme en un point faible. Petit à petit, cette fissure se propage jusqu'à la surface, et on assiste à la formation d'une écaille qui se détache en laissant sur la piste un cratère. Les éléments roulants, en passant sur ce cratère, subissent des accélérations qui sont à l'origine du bruit dont nous avons parlé (*fig. 176*).

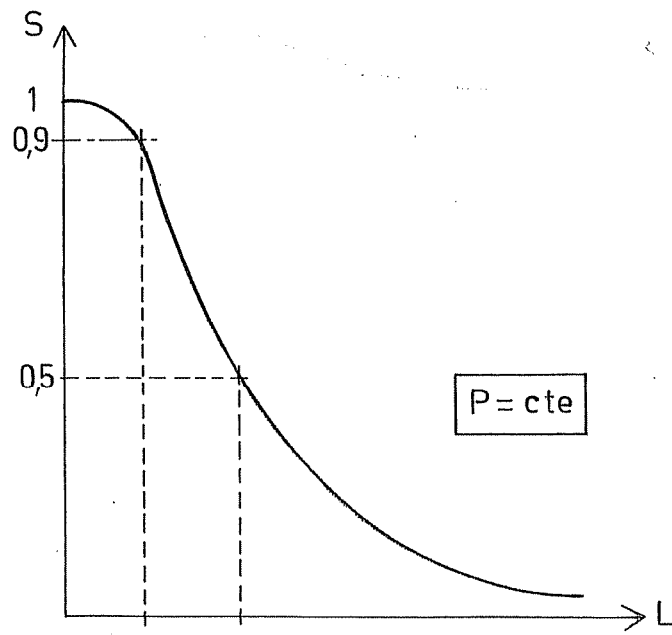


FIG. 177

Le phénomène d'écaillage est *inévitabile* et se produit d'autant plus vite que la charge est plus élevée. Les roulements ont donc une durée de vie *finie*, que l'on note L , et qui se compte en nombre de cycles, c'est-à-dire en nombre de tours de l'arbre. Malheureusement, le nombre de cycles avant écaillage sous une charge donnée est *très dispersé*, ce qui complique l'analyse. Des études statistiques ont été menées de longue date par les constructeurs, et elles mènent à une courbe de probabilité de la durée de vie de la forme représentée en figure 177. Il est d'usage de noter L_{10} la durée de vie correspondant à 10% de défaillances (soit une fiabilité de 90%), L_{50} la durée de vie correspondant à 50% de défaillances et ainsi de suite. On constate que

$$L_{50} \approx 5,23L_{10}$$

ce qui donne une idée de la dispersion.

La fiabilité de référence S^* généralement adoptée par les constructeurs est de 90%. Il y correspond la *durée de vie nominale* L (on omet l'indice 10). Pour les autres fiabilités, les travaux les plus récents [6, 7] ont conduit à la formule suivante :

$$\frac{\ln S}{\ln 0,9} = \left(\frac{L_{1-S} - L_0}{L - L_0} \right)^e \quad (\text{loi de Weibull})$$

où L_0 est la durée de vie atteinte par tous les paliers ($L_0 \approx 0,05L$) et e , un exposant de dispersion, mesurant la vitesse d'endommagement du matériau. On peut adopter la valeur $e = 1,11$ pour tous les types de roulements. Cette loi donne les résultats suivants :

S	$\frac{L_{1-S}}{L}$
0,2	11,1
0,5	5,23
0,8	1,92
0,9	1
0,95	0,547
0,98	0,265
0,99	0,165
0,995	0,111
0,998	0,077
0,999	0,064
1	0,05

Ainsi, un roulement devant tourner 10 000h avec une fiabilité exceptionnelle de 99,9% devra être calculé pour une durée de vie nominale

$$L_h = \frac{10000}{0,064} = 156000h$$

(Quand on exprime la durée de vie en heures, on écrit L_h)

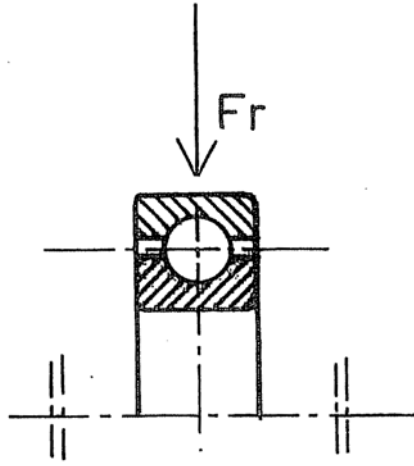


FIG. 178

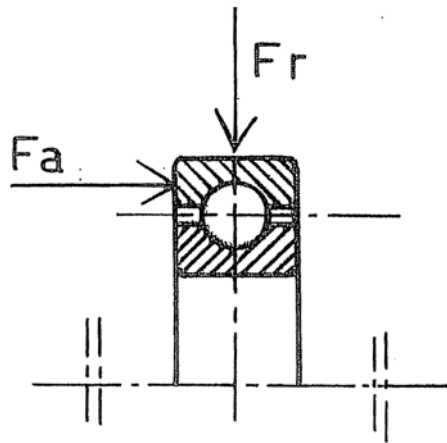


FIG. 179

3.7.3 – Relation entre la charge et la durée de vie

Les essais ont montré que la relation entre la charge P appliquée au roulement et sa durée nominale de vie L peut s'écrire

$$\frac{L}{L^*} = \left(\frac{C}{P} \right)^p$$

où L est la durée de vie en *nombre de tours*, $L^* = 10^6$ *tours*, et C , la *capacité de charge dynamique du roulement*. C'est la charge pour laquelle la durée nominale de vie L_{10} égale L^* , soit un million de tours. L'exposant p vaut

$$p = \begin{cases} 3 & \text{pour les roulements à billes} \\ \frac{10}{3} & \text{pour les roulements à rouleaux} \end{cases}$$

A propos des essais et des simplifications qui ont présidé au choix de ces deux exposants, on pourra consulter les articles [8, 9, 10].

3.7.4 – Comportement sous des charges de direction quelconque

Jusqu'à présent, nous avons parlé de la charge sans en préciser la direction. Or, la durée de vie dépend de cette direction. On associe en fait à chaque type de roulement une *direction de référence* qui sert lors des essais. Pour fixer les idées, considérons le cas simple d'un roulement rigide à billes. Pour ce type de roulement, la direction de référence est radiale (*fig. 178*). La durée de vie nominale de ce roulement sous une charge radiale $F_r = C$ sera donc d'un mégacycle. Mais quelle sera sa durée de vie sous un chargement (F_r, F_a) combinant une charge radiale et une charge axiale, comme le représente la figure 179 ? Pour répondre à cette question, on introduit la notion de *charge équivalente*, qui se définit comme suit. Supposons que le chargement (F_r, F_a) conduise à une durée de vie nominale L . Il a donc la même durée de vie que la charge radiale P vérifiant

$$P = C \left(\frac{L^*}{L} \right)^{1/p}$$

qui est appelée *charge équivalente*. On peut déterminer la charge équivalente avec une bonne approximation à l'aide de formules du type

$$P = XF_r + YF_a$$

dont on trouve les coefficients X et Y dans les catalogues des constructeurs. Du reste, ce calcul est actuellement normalisé sur base des travaux fondamentaux de Palmgren et Lundberg [5, 8, 9, 10]

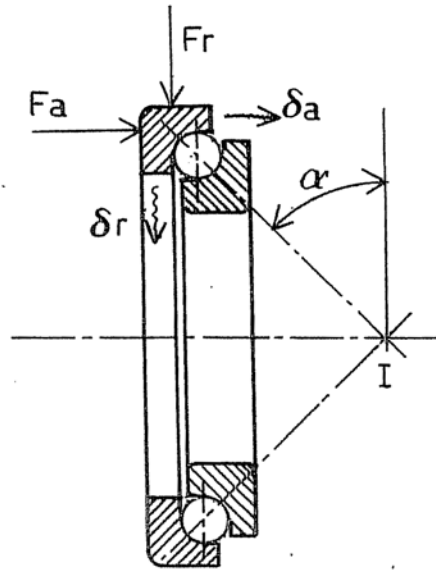


FIG. 180

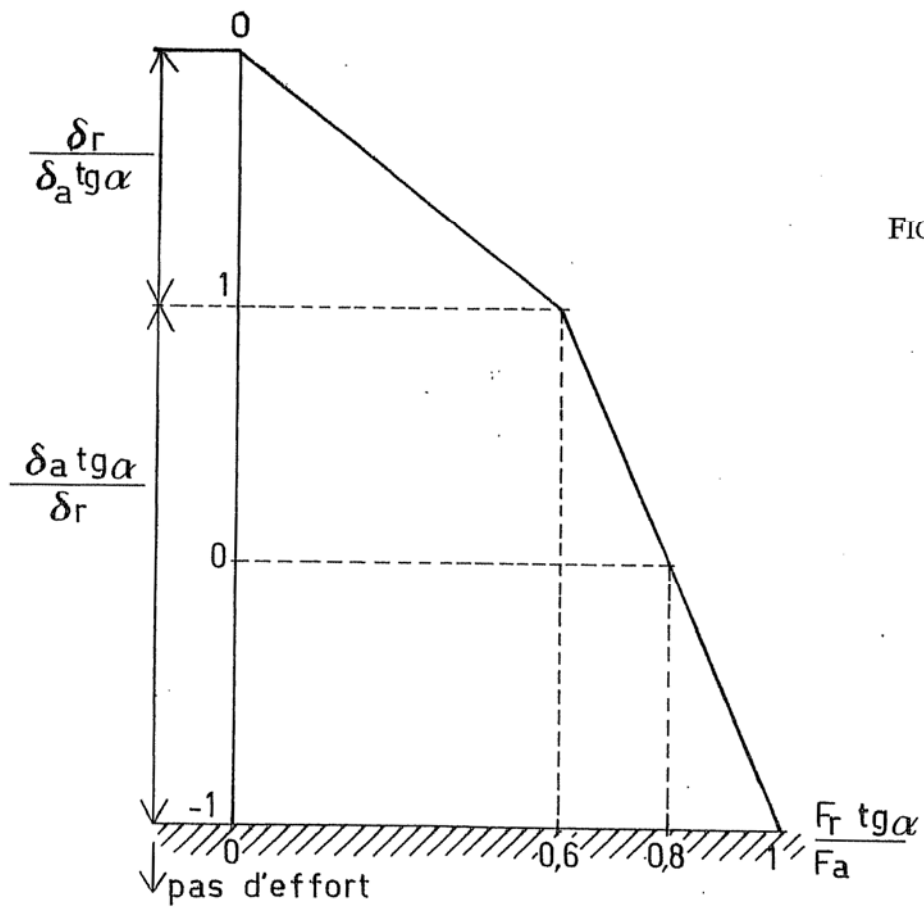


FIG. 181

Pour les *butées*, le cas de charge de référence est une charge purement *axiale*, ce qui est bien normal, puisqu'il s'agit de la sollicitation la plus naturelle de ce type de roulements.

Le cas des roulements à billes à contact oblique et des roulements à rouleaux coniques est un peu plus délicat. En effet, l'effort dans un élément roulant dépend de son déplacement de compression élastique dans la direction de contact, mesuré sur l'élément roulant supérieur de la figure 180 par

$$\delta = \delta_r \cos \alpha + \delta_a \sin \alpha$$

α étant l'angle de contact. Il ne peut y avoir d'effort que si

$$\delta_a \sin \alpha > -\delta_r \cos \alpha$$

Plus précisément, la loi de comportement des roulements à contact oblique (à billes ou à rouleaux) admet la représentation approximative donnée en figure 181. En particulier,

$$\frac{\delta_a}{\delta_r \tan \alpha} = 0$$

c'est-à-dire que *le déplacement est purement radial* pour

$$\frac{F_r \tan \alpha}{F_a} = 0,8$$

soit

$$F_a = 1,25 F_r \tan \alpha$$

C'est ce cas de charge qui sert de référence : pour un roulement à contact oblique, *la charge de référence est la composante radiale de la charge donnant un déplacement purement radial*. Le chargement est donc

$$(F_r, F_a) = (P, 1,25 P \tan \alpha)$$

3.7.5 – Comportement sous une charge dépendant du temps

Dans de nombreuses applications, la charge n'est pas constante. Soit par exemple [11] un roulement à billes de capacité dynamique égale à 40 500N, monté sur une boîte de vitesses d'automobile, et devant fonctionner dans les conditions suivantes :

CONDITIONS	1	2	3
x = fraction du temps d'utilisation	0,1	0,1	0,8
Fréquence de rotation N/(tr/min)	750	1050	1500
Charge équivalente P/Newton	10260	7840	5780

Quelle durée théorique (mesurée en temps) peut atteindre ce roulement ?

La réponse à ce genre de problèmes est fondée sur le principe du dommage cumulatif qui du reste, a été introduit par Palmgren dans ce cadre précis en 1924 [12] et n'a été généralisé à d'autres cas de fatigue que plus tard, par Miner (1945). Traitons d'abord ce problème de manière formelle.

Soit x_k la fraction de temps de travail à la fréquence de rotation N_k . La *fréquence de rotation moyenne* est donnée par

$$\bar{N} = \sum_k N_k$$

Après le temps de vie T , on aura parcouru

$$\begin{cases} n = \bar{N}T & \text{tours au total} \\ n_k = x_k N_k T & \text{tours dans les conditions } k \end{cases}$$

Le dommage associé au fonctionnement dans les conditions k auxquelles correspond la durée de vie L_k est donné par

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{n_k}{L_k} = x_k N_k T \cdot \frac{1}{L^*} \left(\frac{P_k}{C} \right)^p \\ &= \bar{N}T \cdot \frac{1}{L^* C^p} \frac{x_k N_k}{\bar{N}} P_k^p \end{aligned}$$

Le dommage total en fin de durée de vie est égal à 1. On a donc

$$1 = \sum_k D_k = \bar{N}T \cdot \frac{1}{L^* C^p} \sum_k \frac{x_k N_k}{\bar{N}} P_k^p$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$1 = \frac{\bar{N}T}{L^*} \left(\frac{P_{eq}}{C} \right)^p$$

où apparaît la *charge équivalente*

$$P_{\dot{eq}} = \sqrt[p]{\sum_k \frac{x_k N_k}{\bar{N}} P_k^p}$$

Comme le nombre de cycles total en fin de durée de vie vaut

$$L = \bar{N}T$$

cela équivaut encore à écrire

$$\frac{L}{L^*} = \left(\frac{P_{\dot{eq}}}{C} \right)^p$$

Voyons à présent comment ce concept de charge équivalente permet de résoudre le problème posé ci-dessus. On a ici

$$\bar{N} = x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 = 0,1.750 + 0,1.1050 + 0,8.1500 = 1380 \text{ tr / min}$$

Pour calculer la charge équivalente, nous calculerons d'abord

$$\begin{aligned} \frac{x_1 N_1}{\bar{N}} &= \frac{0,1.750}{1380} = 0,05435 \\ \frac{x_2 N_2}{\bar{N}} &= \frac{0,1.1050}{1380} = 0,07609 \\ \frac{x_3 N_3}{\bar{N}} &= \frac{0,8.1500}{1380} = 0,8696 \end{aligned}$$

On vérifie, à titre de preuve, que la somme de ces coefficients vaut l'unité. La charge équivalente vaut alors

$$\begin{aligned} P_{\dot{eq}} &= \sqrt[3]{0,05435 P_1^3 + 0,07609 P_2^3 + 0,8696 P_3^3} \\ &= \sqrt[3]{0,05435.(10260)^3 + 0,07609.(7840)^3 + 0,8696.(5780)^3} \\ &= \sqrt[3]{58,70.10^9 + 36,67.10^9 + 167,9.10^9} = 6409 N \end{aligned}$$

La durée de vie en nombre de cycles est donc

$$L = \left(\frac{C}{P} \right)^3 L^* = \left(\frac{40500}{6409} \right)^3 . 10^6 = 252,3.10^6 \text{ tours}$$

Il y correspond un temps de vie

$$T = \frac{L}{\bar{N}} = \frac{252,3.10^6}{1380} = 182,9.10^3 \text{ min} = 3048 h$$

Le problème inverse, qui est celui de la conception, consiste à trouver la capacité dynamique nécessaire pour obtenir un temps de vie donné. Dans ce cas, on calcule comme ci-dessus la fréquence de rotation moyenne et la charge équivalente, on obtient le nombre de cycles de vie par

$$L = \overline{NT}$$

et la capacité de charge dynamique nécessaire s'en déduit par

$$C = P_{\acute{e}q} \left(\frac{L}{L^*} \right)^{1/p}$$

3.7.6 – Choix de la durée de vie

La durée de vie peut être fixée par le cahier des charges. A défaut, on peut s'inspirer des valeurs données dans le tableau suivant :

TYPE D'APPAREIL	DURÉE EN HEURES
Appareil d'usage restreint : Démonstration, mesures, portes	500.....1000
Usage intermittent : Outil manuel, appareil ménager, Appareil de levage	2000.....10000
Fonctionne 8h/jour	10000.....30000
Fonctionne 24h/jour	30000.....100000

3.7.7 – Calcul statique des roulements

Lorsqu'un roulement ne tourne pas, il n'est évidemment pas soumis à la fatigue et, du reste, la formule de durée de vie conduit à une charge admissible

$$P = C \left(\frac{L^*}{0} \right)^{1/p} = \infty$$

Mais il est bien évident qu'une charge trop importante peut mener à des déformations permanentes sous forme d'empreintes dans les pistes, un peu comme dans un essai Brinell. Les déformations locales nuisent à la *précision du guidage* et provoquent, lors de la rotation, un certain *bruit*. Dans cette optique, on définit la *capacité de charge statique* C_0 comme la charge qui, ayant la direction de référence, produit une déformation permanente aux contacts égale à 10^{-4} fois le diamètre de l'élément roulant. On limite alors la charge statique P_0 par un *coefficient de sécurité* s_0 , c'est-à-dire que l'on admet la valeur

$$P_0 = \frac{C_0}{s_0}$$

Pour des applications nécessitant un fonctionnement très silencieux (ex. : appareils médicaux d'hôpital), ou une grande précision de rotation (ex : machines-outils), on posera $s_0 = 2$. A l'opposé, si le roulement ne tourne guère, si son silence importe peu (ex : engins de génie civil) ou si l'on veut coûte que coûte gagner du poids (ex : aviation), on pourra descendre jusqu'à $s_0 = \frac{1}{2}$.

Dans le cas d'une charge de direction quelconque, on calcule une charge équivalente

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a$$

à l'aide des coefficients X_0 et Y_0 donnés dans les catalogues de constructeurs.

3.7.8 – Calcul des charges dans le cas de deux roulements à contact oblique (à billes ou à rouleaux) en opposition

3.7.8.1 – Montage en X et montage en O

La résultante des efforts des différents éléments roulants d'un roulement à contact oblique passe par le *centre de pression I* (fig. 182) et ne peut exister que si

$$F_a \geq F_r \tan \alpha$$

α étant l'angle de contact. Pour pouvoir reprendre des efforts axiaux dans les deux sens, on monte *deux roulements en opposition*. Deux montages sont possibles : en *X* et en *O*.

Le montage en *X* (fig. 183) est caractérisé par le fait que les centres de pression sont situés entre les deux roulements. Les lignes de contact tracées de part et d'autre de l'axe dessinent alors une figure qui suggère la lettre *X*, d'où le nom de ce montage. Dans ce montage, les charges radiales passent en des points plus rapprochés que les roulements eux-mêmes, ce qui diminue le moment que peut reprendre le système. A la limite, pour une distance $\ell = 0$ entre les centres de pression, on obtient une rotule (du moins, au premier ordre).

Dans le montage en *O*, (fig. 184), les centres de pression sont à l'extérieur des roulements. Les lignes de contact tracées de part et d'autre de l'axe dessinent alors une figure qui suggère la lettre *O*. Les centres de pression sont alors plus éloignés que les roulements, ce qui augmente le moment que peut reprendre le système. Même si les roulements sont accolés, la distance ℓ des centres de pression est positive.

On utilise donc le montage en *X* lorsque le moment à reprendre est petit ou que la distance entre les paliers est grande. Pour des raisons de montage, on le préfère lorsque c'est l'arbre qui tourne. Le montage en *O* s'utilise dans tous les cas où des paliers très proches

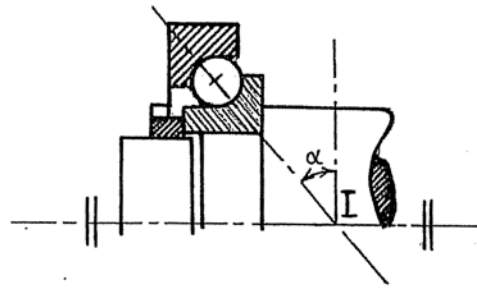
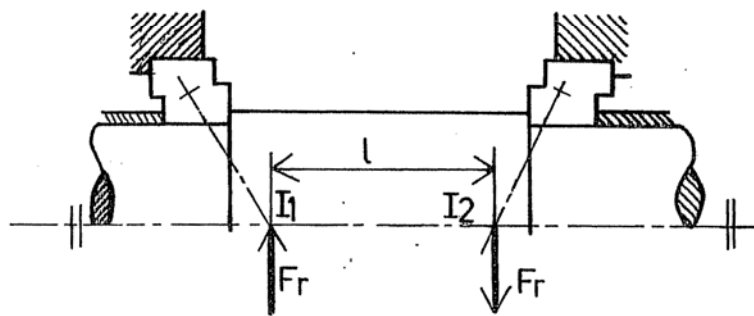


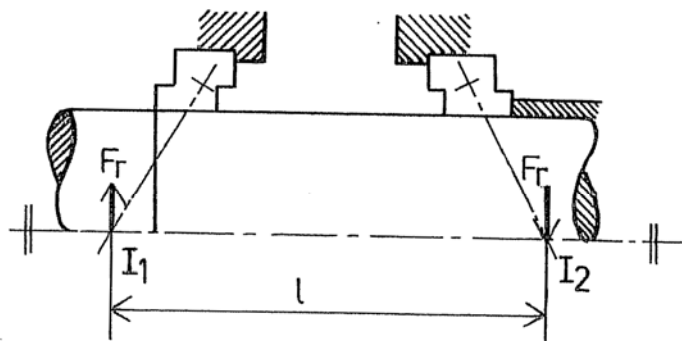
FIG. 182



$$M = l F_r$$

Montage en X

FIG. 183



$$M = l F_r$$

Montage en O

FIG. 184

doivent reprendre un grand moment. Le cas typique est la roue de véhicule. Du reste, on préfère le montage en O lorsque c'est le moyeu qui tourne sur un arbre fixe, car le montage est plus aisé.

On notera encore que le montage en O permet, sans efforts supplémentaires, une dilatation de l'arbre plus grande que celle du bâti, ce qui n'est pas le cas du montage en X . Celui-ci permet par contre un raccourcissement relatif de l'arbre par rapport au bâti.

3.7.8.2 – Répartition des charges axiales

Dans ces deux montages, le calcul de la charge revenant à chaque roulement est délicat : une charge radiale sur le roulement 1 a tendance à séparer ses deux bagues. Mais ce mouvement est empêché par la présence du roulement 2. Il en résulte une charge axiale mutuelle dont le calcul relève de l'hyperstatique. Le même problème subsiste lorsqu'une charge axiale K_a est appliquée à l'ensemble.

Pour écrire les relations de manière unique, nous conviendrons d'appeler *roulement 1* celui que la charge axiale K_a tend à surcharger et *roulement 2* celui que cette charge a tendance à décharger. Ainsi (*fig. 185*), la charge axiale du roulement 2 s'ajoute à K_a pour donner la charge axiale sur le roulement 1 :

$$K_a = F_{a1} - F_{a2}$$

Mais cette relation d'équilibre ne suffit pas à déterminer F_{a1} et F_{a2} et il faut faire intervenir les lois liant les déplacements des roulements à leur charge. En notant δ_a le déplacement axial d'un roulement dans le sens de la compression, on peut écrire [1]

$$\delta_a = G(F_r \operatorname{tg} \alpha)^{1/m} \Phi_r(y)$$

où G est une constante du roulement, m un exposant valant 1,5 pour les roulements à billes et 1,1 pour les roulements à rouleaux, y un facteur de direction de la charge donné par

$$y = \frac{F_a}{F_r \operatorname{tg} \alpha}$$

tandis que Φ_r est une fonction ayant l'allure représentée en figure 186. (Pour plus de détails, on pourra se référer aux pages R3 et suivantes du fascicule *QR*.)

En l'absence de serrage initial, on a $\delta_{a1} = -\delta_{a2}$ car les deux roulements sont rigidement liés. Dès lors, un des deux roulements a un déplacement positif et l'autre, un déplacement négatif. Comme le montre la courbe de la figure 186, cela implique la relation

$$\Phi_r(y_1) \Phi_r(y_2) < 0$$

Mais il y a plus : si la fonction Φ_r est négative, cela implique que son argument y a une valeur comprise entre 1 et 1,25. Dès lors, on peut affirmer qu'un des deux roulements

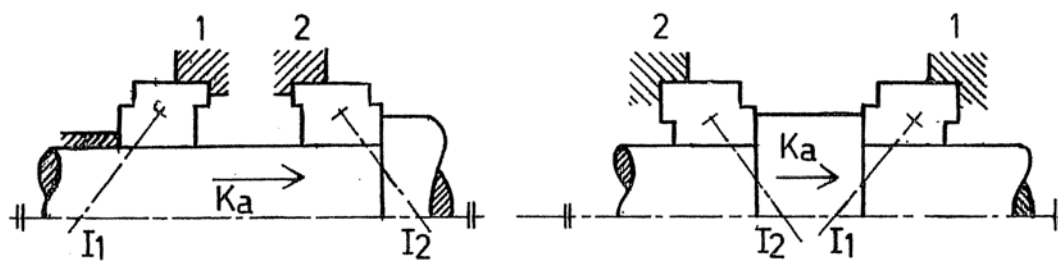


FIG. 185

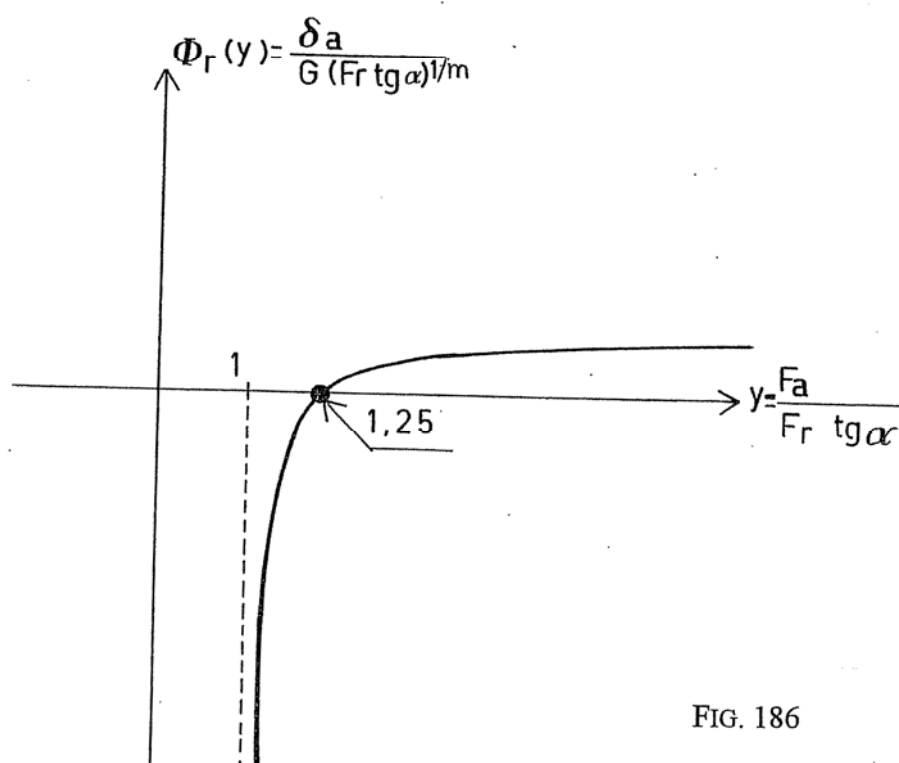


FIG. 186

fonctionne entre $y = 1$ et $y = 1,25$ et que l'autre roulement fonctionne avec une valeur de y supérieure à 1,25.

Il est d'usage de simplifier le problème en admettant que le roulement ayant la plus petite valeur de y fonctionne en $y = 1,25$. Cette procédure *exagère* un peu les charges axiales sur les roulements. Nous dirons par convention que ce roulement fonctionnant en $y = 1,25$ (ce qui signifie $F_a = 1,25F_r \tan \alpha$) est *le maître* et que l'autre, que nous appellerons *l'esclave*, prend le reste de la charge axiale. Le maître peut être le roulement 1 ou le roulement 2, ce qui signifie que deux schémas de calcul sont possibles :

Schéma 1 : le roulement 1 est le maître

Alors,

$$F_{a1} = 1,25F_{r1} \tan \alpha_1$$

$$F_{a2} = F_{a1} - K_a$$

Ce schéma est *en échec* si $F_{a2} < 1,25F_{r2} \tan \alpha_2$. Dans ce cas, il faut adopter le schéma 2.

Schéma 2 : le roulement 2 est le maître

Alors,

$$F_{a2} = 1,25F_{r2} \tan \alpha_2$$

$$F_{a1} = F_{a2} + K_a$$

Ce schéma est *en échec* si $F_{a1} < 1,25F_{r1} \tan \alpha_1$. Dans ce cas, il faut adopter le schéma 2.

La procédure la plus simple et la plus facile à retenir est d'essayer l'un des deux schémas et, en cas d'échec, d'adopter l'autre. Les constructeurs de roulements présentent le calcul de manière déterministe en définissant trois cas [5, 6]. C'est strictement équivalent, mais plus compliqué et plus difficile à retenir.

Mais ceci pose une question de cohérence. En effet, est-on sûr qu'il ne soit pas possible que *les deux* schémas soient en échec ? Nous allons montrer que l'échec de l'un quelconque des deux schémas implique la réussite de l'autre.

a) Supposons d'abord le schéma 1 en échec. Cela signifie que si l'on pose $F_{a1} = 1,25F_{r1} \tan \alpha_1$, on obtient

$$F_{a2} = F_{a1} - K_a = 1,25F_{r1} \tan \alpha_1 - K_a < 1,25F_{r2} \tan \alpha_2$$

ce qui signifie que

$$K_a > 1,25F_{r1} \tan \alpha_1 - 1,25F_{r2} \tan \alpha_2$$

Dès lors, dans le schéma 2, où l'on pose $F_{a2} = 1,25F_{r2}tg\alpha_2$, le calcul de F_{a1} donne

$$F_{a1} = F_{a2} + K_a > 1,25F_{r2}tg\alpha_2 + (1,25F_{r1}tg\alpha_1 - 1,25F_{r2}tg\alpha_2) = 1,25F_{r1}tg\alpha_1$$

donc le schéma 2 n'est pas en échec.

b) Supposons à présent le schéma 2 en échec, ce qui revient à dire que si l'on pose $F_{a2} = 1,25F_{r2}tg\alpha_2$, on obtient

$$F_{a1} = F_{a2} + K_a = 1,25F_{r2}tg\alpha_2 + K_a < 1,25F_{r1}tg\alpha_1$$

On a donc

$$K_a < 1,25F_{r1}tg\alpha_1 - 1,25F_{r2}tg\alpha_2$$

Mais alors, dans le schéma 1, où l'on pose $F_{a1} = 1,25F_{r1}tg\alpha_1$, on obtient pour F_{a2}

$$F_{a2} = F_{a1} - K_a > 1,25F_{r1}tg\alpha_1 - (1,25F_{r1}tg\alpha_1 - 1,25F_{r2}tg\alpha_2) = 1,25F_{r2}tg\alpha_2$$

donc le schéma 1 n'est pas en échec.

Finissons par noter que les deux schémas ne sont compatibles que si

$$K_a = F_{a1} - F_{a2} = 1,25F_{r1}tg\alpha_1 - 1,25F_{r2}tg\alpha_2$$

3.7.8.3 – Identification des angles de contact

En pratique, les angles de contact ne sont pas indiqués explicitement dans les catalogues. Mais on peut les connaître à partir des règles de calcul de la charge équivalente qui sont de la forme

$$\begin{cases} P = F_r & \text{si } \frac{F_a}{F_r} \leq e \\ P = XF_r + YF_a & \text{si } \frac{F_a}{F_r} > e \end{cases}$$

Dans le cas des roulements à billes à contact oblique, on a tout simplement

$$1,25tg\alpha = e$$

et dans le cas des roulements à rouleaux coniques,

$$1,25tg\alpha = \frac{1}{2Y}$$

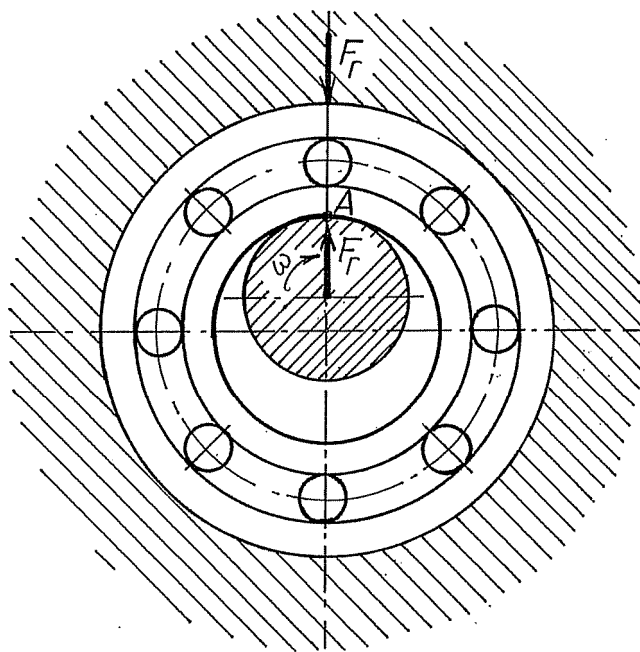


FIG. 187

3.7.8.4 – Serrage initial

Pour être rigoureux, l'état ainsi calculé correspond à un certain serrage (il faut entendre par là un rapprochement des deux paliers sous l'effet d'un écrou serré d'un côté). Ce serrage que nous noterons Δ , est donné par

$$\Delta = G_1(F_{r1} \operatorname{tg} \alpha_1)^{1/m} \Phi_r(y_1) + G_2(F_{r2} \operatorname{tg} \alpha_2)^{1/m} \Phi_r(y_2)$$

On trouvera toutes les données nécessaires à son calcul dans le fascicule *QR*, pages R3 et suivantes. La précharge correspondante vaut

$$F_{a0} = \left(\frac{\Delta}{G_1 + G_2} \right)^m$$

On peut du reste modifier cette précharge soit pour obtenir la durée de vie maximale de l'ensemble des deux roulements, soit pour raidir le guidage de l'arbre. Cette question est discutée en [1] et les résultats principaux sont repris dans le fascicule *QR* du présent cours.

3.7.9 – Ajustement des roulements sur l'arbre et le moyeu

Il est essentiel de distinguer, pour chacune des bagues du roulement, si en service, elle tourne par rapport à la charge ou elle reste fixe par rapport à la charge. Ainsi,

- Dans le cas d'un arbre tournant soumis à une charge fixe dans l'espace, la bague intérieure du roulement tourne par rapport à la charge, et la bague extérieure reste fixe par rapport à la charge ;
- Dans le cas d'un arbre tournant avec un balourd, la charge tourne dans l'espace comme l'arbre. Dans ce cas, la bague intérieure du roulement est fixe par rapport à la charge et la bague extérieure tourne. par rapport à la charge.
- Imaginons une roue folle soumise à une charge fixe dans l'espace. La bague extérieure, liée à la roue, tourne par rapport à la charge et la bague intérieure, liée à l'axe, est fixe par rapport à la charge.

La règle fondamentale est la suivante : *Une bague qui, en service, tourne par rapport à la charge doit être montée serrée.* Par contre, une bague fixe par rapport à la charge peut très bien avoir du jeu.

Pourquoi cette règle ? Imaginons un arbre tournant par rapport à la charge radiale et supposons que la bague intérieure du roulement ait du jeu. Comme le montre la figure 187, le contact se fait en un seul point *A*. Si la force radiale F_r est suffisante, la bague va *rouler* sur l'arbre. Ce roulage forcé, bien qu'il n'entraîne pas de glissement entre les surfaces, entraîne cependant une usure rapide de l'arbre et de la bague parce que les surfaces sont sèches et très chargées, et qu'il existe des microglissements au voisinage du point de contact du fait de la dilatation tangentielle de la bague par effet de Poisson. Ce phénomène est connu sous le nom de *laminage* et le seul moyen de l'éviter est de recourir à un ajustement serré. On trouvera en

page R10 du fascicule *QR* des indications sur les ajustements à choisir. Il en existe d'ailleurs dans les catalogues des constructeurs. Le même phénomène se produit sur la bague extérieure lorsqu'elle tourne par rapport à la charge.

Par ailleurs, dans le montage classique d'un arbre sur deux roulements rigides à billes, avec une charge fixe dans l'espace, on fixe axialement à l'aide d'un serrage latéral la bague extérieure d'un seul des deux roulements, l'autre restant libre axialement, de manière à permettre la dilatation thermique de l'arbre.

3.7.10 – Bibliographie

1. J.F. DEBONGNIE – Calcul et choix du serrage d'une paire de roulements à contact oblique
Revue M, **28**, n°3, 1982
2. A. PALMGREN – *Les roulements*
Editions SKF, deuxième édition non datée.
3. P. ESCHMANN, L. HASBARGEN, K. WEIGAND – *Die Wälzlagerpraxis*
R. Oldenburg, München, 1978
ISBN 3-486-31102-6
4. H. DAHLKE – *Handbuch Wälzlagertechnik*
Vieweg, Braunschweig, 1994
ISBN 3-528-06572-9
5. SKF – *Catalogue général*
Editions SKF, 1989
7. FAG – *Programme standard*
Catalogue WL 41510/2 FA, 1990
8. A. PALMGREN – On the carrying capacity and life of ball bearings
The Ball Bearing Journal n°3, pp. 34-44, 1937
9. G. LUNDBERG, A. PALMGREN – Dynamic capacity of rolling bearings
Acta Polytechnica, Mechanical engineering series, **1**, n°3, Stockholm, 1947
10. G. LUNDBERG, A. PALMGREN – Dynamic capacity of roller bearings
Acta Polytechnica, Mechanical engineering series, **2**, n°4, Stockholm, 1952
11. W. FISCHER – *Calcul de la capacité de charge dynamique des roulements*
SKF, Paris, 1960
12. A. PALMGREN – Die Lebensdauer von Kugellagern
Z.V.D.I. **68**, n°14, pp. 339-341, 5 avril 1924