

# SUR LA CONSISTANCE DU LISSAGE DES CONTRAINTES PAR CONVOLUTION

**J.F. DEBONGNIE\***

\*Université de Liège,  
LTAS-Méthodes de Fabrication  
1, Chemin des Chevreuils  
4000 LIEGE (Belgique)

## Introduction

Les contraintes  $\sigma_h$  obtenues par éléments finis ne sont pas continues d'un élément à l'autre, ce qui rend leur interprétation graphique difficile. Une procédure classique pour les lisser consiste à construire un nouveau champ de la même forme que les déplacements,

$$\tilde{\sigma}_h = \sum_{i=1}^{nb. \text{noeuds}} N_i \tilde{\sigma}_{h_i}$$

Outre le fait que l'interprétation est facilitée quand le champ est continu, on *espère* le plus souvent que le champ lissé  $\tilde{\sigma}_h$  est une bien meilleure approximation du champ réel  $\sigma$  que le champ  $\sigma_h$  calculé par éléments finis, si bien que l'erreur de discrétisation peut être *estimée* par

$$\sigma - \sigma_h \approx \tilde{\sigma}_h - \sigma_h$$

La validité de cette hypothèse peut être mesurée sur des solutions connues par *l'indice d'efficacité* de cette estimation, défini par

$$\theta = \frac{\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|}{\|\sigma - \sigma_h\|}$$

et dont on attend qu'il soit compris entre 0,8 et 1,2.

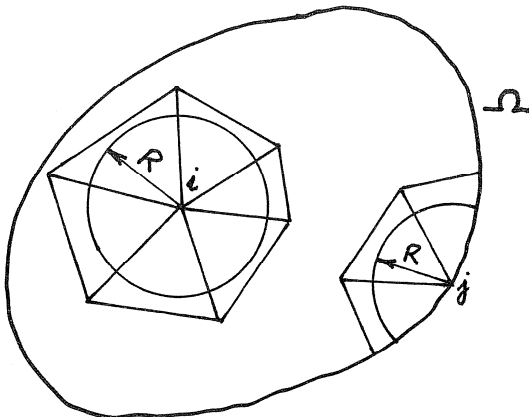
La difficulté principale de ce genre de lissage est d'obtenir des valeurs nodales de qualité. Dans les méthodes dites locales, ces valeurs nodales sont obtenues par une moyenne pondérée des contraintes en quelques points voisins du nœud et judicieusement choisis.

L'idée principale du présent travail est de remplacer ces moyennes discrètes par une moyenne intégrale, ce qui est plus systématique :

$$\tilde{\sigma}_{h_i} = \int_{E_n} \sigma_h(\mathbf{x}_i + \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

avec un noyau de convolution radial  $\varphi$  dont le support est une boule de rayon  $R$  et qui vérifie la condition de normalisation  $\int_{E_n} \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$ . Pour les nœuds intérieurs, on

choisira le rayon  $R$  de manière que la boule soit contenue



dans le corps considéré  $\Omega$  et le plus souvent, dans le groupe d'éléments adjacents au nœud considéré. A la frontière, on ne fera la moyenne que sur les points de la boule contenus dans  $\Omega$ , c.-à-d. sur  $e_j = \{\mathbf{y} \mid |\mathbf{y}| \leq R \text{ et } \mathbf{x}_j + \mathbf{y} \in \Omega\}$  :

$$\tilde{\sigma}_{h_j} = \int_{e_j} \tilde{\sigma}_h(\mathbf{x}_j + \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} / \int_{e_j} \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

## Familles de noyaux

On obtient aisément une famille de noyaux radiaux de support  $B_R$  en suivant le schéma suivant :

- Choisir une fonction radiale  $\bar{\varphi}(\mathbf{x})$  dont le support est  $B_1$  et dont l'intégrale n'est pas nulle.
- Poser  $\varphi_1(\mathbf{x}) = \bar{\varphi}(\mathbf{x}) / \int_{B_1} \bar{\varphi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

- Sur une boule  $B_R$ , le noyau sera  $\varphi_R(\mathbf{x}) = \frac{1}{R^n} \varphi_1\left(\frac{\mathbf{x}}{R}\right)$ .

Un noyau très connu et particulièrement attractif est celui de la *régularisation canonique*, construit à partir de

$$\bar{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2 - 1}\right) & \text{si } |\mathbf{x}| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mais on peut faire des choix plus simples.

## Premières expérimentations

Ce procédé de lissage, avec le noyau de la régularisation canonique, a été testé par *Do Viet Tuyen* [1], sur des champs de contraintes bidimensionnels. Les conclusions suivantes ont été obtenues :

- Dans le cas d'éléments de *degré 1* (contraintes de degré zéro), la méthode de convolution conduit à de bons indices d'efficacité.
- Dans le cas d'éléments de *degré 2*, ce n'est plus le cas et de façon assez étrange, plus le rayon du support de convolution diminue, meilleur est l'indice d'efficacité.

Si l'on note encore que pour des contraintes de degré zéro, *tout* noyau radial conduit au même résultat, ce qui cesse d'être vrai pour des degrés supérieurs, on en vient à se poser la question suivante : *existe-t-il des noyaux plus appropriés que d'autres ?*

## Une condition de consistance

Le processus de convolution peut être considéré comme un opérateur  $T$  qui à partir d'une fonction donnée  $f$  donne une nouvelle fonction  $\tilde{f} = Tf$ . Si  $f_h$  est une approximation de  $f$ , examinons la différence entre la fonction exacte  $f$  et  $\tilde{f}_h = Tf_h$ . On a

$$f - Tf_h = f - Tf + Tf - Tf_h$$

Il est clair que si l'approximation converge,  $f_h \rightarrow f$ , on a

$$\|Tf - Tf_h\| \leq \|T\| \|f - f_h\| \rightarrow 0$$

Mais il subsiste le terme  $f - Tf$  qui est indépendant de  $f_h$  et doit être nul si l'on veut que les solutions lissées convergent

vers la solution exacte. En d'autres termes, la transformation adoptée doit être neutre par rapport au champ de contrainte exact : c'est une condition de consistance.

### Un résultat relatif aux fonctions harmoniques

Il n'est pas possible de trouver un noyau neutre par rapport à toute fonction. Mais on peut obtenir cette propriété pour certaines classes de fonctions. Nous considérerons d'abord les fonctions *harmoniques*. Notons  $\omega$  un point quelconque de la sphère unité. On a, pour  $f$  suffisamment régulière,

$$I = \int_{|\omega|=1} [f(R\omega) - f(0)] d\omega = \int_{|\omega|=1} d\omega \int_0^R D_r f(r\omega) dr$$

En introduisant la fonction  $e(r)$  définie par  $e'(r) = r^{1-n}$  et  $e(\infty) = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_{|\omega|=1} d\omega \int_0^R D_r e D_r f(r\omega) r^{n-1} dr = \int_{B_R} D_i e D_i f d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial B_R} e n_i D_i f dS - \int_{B_R} e D_{ii} f d\mathbf{x} = \int_{B_R} [e(R) - e(r)] \Delta f d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Ce résultat contient le fameux *théorème de la valeur moyenne d'une fonction harmonique* [2] : Toute fonction harmonique vérifie

$$f(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\omega|=1} f(R\omega) d\omega \quad \forall R$$

Où  $\omega_n$  est l'aire de la sphère unité à  $n$  dimensions.

Multiplions ce résultat par une fonction radiale quelconque  $\varphi_R(r)$  et par  $r^{n-1}$ . On obtient

$$f(0)\varphi_R(r)r^{n-1} = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\omega|=1} f(r\omega)\varphi_R(r)r^{n-1} d\omega$$

ce qui, intégré par rapport à  $r$  de 0 à  $R$ , donne

$$f(0) \int_{B_R} \varphi_R(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{B_R} f(\mathbf{y}) \varphi_R(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (*)$$

En translatant ce résultat de  $\mathbf{x}$ , on obtient

$$f(\mathbf{x}) = \int_{B_R(\mathbf{x})} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \varphi_R(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

en supposant la fonction  $\varphi_R$  normalisée. Ainsi, *tout noyau radial normalisé est neutre pour les fonctions harmoniques*. Bien que simple, ce résultat n'est pas cité très souvent [3].

### Cas des fonctions polyharmoniques

Malheureusement, les champs de contraintes élastiques ne sont pas, en général, harmoniques, si bien que leur convolution avec un noyau radial quelconque n'est pas consistante. Mais dans le cas d'un solide homogène et isotrope et pour des forces intérieures de degré 2 au plus, on peut montrer que le champ de contrainte est *biharmonique*. (Signalons au passage que des travaux très intéressants sur les fonctions biharmoniques ont été publiés par *El Kadiri* [6,7]). Plus généralement, on peut considérer un champ  $f$  *p-harmonique*, c'est-à-dire vérifiant l'équation  $\Delta^p f = 0$ . L'approche la plus simple se fonde sur un théorème dû à *Almansi* [8], qui affirme que sur un ensemble étoilé par rapport à l'origine, une fonction *p-harmonique*  $f$  peut être mise sous la forme

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + r^2 f_2(\mathbf{x}) + \dots + r^{2(p-1)} f_p(\mathbf{x})$$

où les fonctions  $f_1, \dots, f_p$  sont harmoniques.

Dès lors, en notant  $J(f) = \int_{B_R} f(\mathbf{x}) \varphi_R(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ , on obtient

$$\begin{aligned} J(f) &= J(f_1) + J(r^2 f_2) + \dots + J(r^{2(p-1)} f_{p-1}) \\ &= f_1(0)J(1) + f_2(0)J(r^2) + \dots + f_p(0)J(r^{2(p-1)}) \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière ligne, nous avons fait usage du résultat (\*) ci-dessus relatif aux fonctions harmoniques. On constate que le terme  $k$ -harmonique  $f_k$  conduit à une erreur de consistance  $O(R^{2k})$ . Ceci est en parfait accord avec les constatations de Do Viet Tuyen : plus le rayon de convolution est grand, plus l'erreur de consistance est grande.

Les conditions de consistance dans le cas des fonctions polyharmoniques sont donc

$$\begin{aligned} A_k &= \int_{B_R} r^{2k} \varphi_R(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \omega_n \int_0^R r^{n-1+2k} \varphi_R(r) dr = 0, \\ &\text{pour } k = 1, \dots, p-1 \end{aligned}$$

On remarquera que cela implique que le noyau *ne peut être positif partout*. Du reste, l'existence de noyaux positifs et neutres pour les fonctions  $p$ -harmoniques,  $p > 1$ , aurait pour conséquence un théorème du maximum comme pour les fonctions harmoniques, ce qui n'est pas le cas.

### Construction de noyaux neutres pour les fonctions biharmoniques

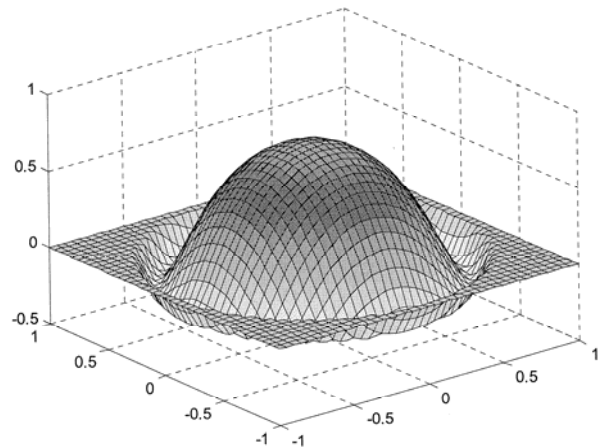
En nous inspirant de calculs faits dans un tout autre cadre par *Parton* et *Perline* [4], nous avons obtenu que si  $\psi_R$  est un noyau radial normalisé vérifiant les conditions

$$\lim_{r \rightarrow R} \psi_R(r) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^n \psi_R(r) = 0$$

on peut en déduire un noyau normalisé  $\varphi_R$  neutre par rapport aux fonctions biharmoniques par la relation

$$\varphi_R = \frac{1}{2} \left[ (n+2) \psi_R + r \frac{d\psi_R}{dr} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{r^{n+1}} \frac{d}{dr} (r^{n+2} \psi_R)$$

Le noyau ainsi construit est représenté ci-dessous dans le cas où  $\psi_R$  est le noyau de régularisation canonique :



On vérifie aisément qu'il est normalisé :

$$\int_0^R r^{n-1} \varphi_R dr = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^{n+2} \psi_R) dr$$

$$= \frac{1}{2} \left[ r^n \psi_R \right]_0^R + \int_0^R r^{n-1} \psi_R dr = \int_0^R r^{n-1} \psi_R dr$$

En outre, il vérifie la condition de consistance, car

$$\int_0^R r^{n+1} \varphi_R dr = \int_0^R \frac{d}{dr} (r^{n+2} \psi_R) dr = \left[ r^{n+2} \psi_R \right]_0^R = 0$$

En général, si l'on part d'un noyau  $\psi_R$  de classe  $C^m$ , le processus ci-dessus mène à un noyau de classe  $C^{m-1}$ .

### Noyaux neutres pour les fonctions polyharmoniques

En examinant de près la démonstration ci-dessus, on remarque que la condition de consistance résulte du fait que l'on obtient l'intégrale d'une dérivée, se ramenant à des termes aux limites nuls. Ceci conduit assez naturellement à la généralisation suivante pour les fonctions polyharmoniques : si  $\psi_R$  est un noyau radial normalisé, vérifiant les conditions

$$\lim_{r \rightarrow R} \psi_R = 0, \dots, \lim_{r \rightarrow R} \frac{d^{p-2}}{dr^{p-2}} \psi_R = 0$$

et

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^n \psi_R = 0, \dots, \lim_{r \rightarrow 0} r^{n+p-2} \frac{d^{p-2}}{dr^{p-2}} \psi_R = 0,$$

un noyau radial normalisé neutre par rapport aux fonctions  $p$ -harmoniques est donné par

$$\varphi_R = \frac{1}{\chi} \frac{1}{r^n} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{p-1} (r^{n+2p-2} \psi_R)$$

avec

$$\chi = \prod_{k=2}^p (2k - 2).$$

En effet, on vérifie aisément par des intégrations par parties que

$$\int_0^R r^{n-1} \varphi_R dr = \int_0^R r^{n-1} \psi_R dr$$

(condition de normalisation) et que

$$\int_0^R r^{n-1+2k} \varphi_R dr = 0, \quad k = 1, \dots, p-1$$

(conditions de consistance).

Si  $\psi_R$  est de classe  $C^m$ , le noyau obtenu est de classe  $C^{m-p+1}$ , ce dont on se rend aisément compte en le développant sous la forme

$$\varphi_r = \alpha_0 \psi_R + \alpha_1 r \frac{d\psi_R}{dr} + \dots + \alpha_{p-1} r^{p-1} \frac{d^{p-1}\psi_R}{dr^{p-1}}$$

### Expérimentation

Le cas biharmonique a été testé par *Tran Thi Thu Thui* [5], sur des problèmes d'élasticité plane. Les résultats sont très concluants, et l'indice d'efficacité obtenu est excellent, tant pour le degré 2 que pour le degré 1.

### Conclusions

Pour des champs de contrainte de degré zéro, tout noyau radial donne aux nœuds une moyenne pondérée identique, les coefficients de pondération étant les angles des éléments adjacents.

Pour des éléments de degré plus élevé, les résultats du lissage dépendent du noyau et en l'absence de précaution particulière, ils sont d'autant plus mauvais que le rayon  $R$  du support de convolution est plus grand. La clef du succès réside dans des conditions de consistance, que nous avons dégagées.

Nous avons ensuite montré comment on peut construire des noyaux consistants, qui ont la propriété d'être neutres par rapport à une solution polyharmonique, et dans le cas biharmonique, de tels noyaux ont été expérimentés avec succès à deux dimensions.

La présente procédure peut être généralisée au cas tridimensionnel et elle ne fait appel à aucun résultat de superconvergence.

### Références

1. **Do Viet Tuyen** – *Error estimation in 2-dimensional linear elasticity based on smoothed stress field obtained by convolution method*  
European Master EMMC Thesis, 1999
2. **V. Mikhailov** – *Equations aux dérivées partielles*  
Mir, Moscou, 1980
3. **L. Schwartz** – *Théorie des distributions*  
Hermann, Paris, 1966
4. **V. Parton, P. Perline** – *Méthodes de la théorie mathématique de l'élasticité*  
Mir, Moscou, 1984
5. **Tran Thi Thu Thuy** – *Consistance du lissage des contraintes par la méthode de convolution*  
European Master EMMC Thesis, 2003
6. **Mohamed El Kadiri** – Sur la propriété de la moyenne restreinte pour les fonctions biharmoniques  
*C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I 335 (2002) pp. 427-429*
7. **Mohamed El Kadiri** – Une réciproque du théorème de la moyenne pour les fonctions biharmoniques  
*Aequationes Math. 65 (2003), pp. 280-287*
8. **S.L. Sobolev** – *Cubature formulas and modern analysis – An introduction*  
Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, 1992