Bruno Teheux

Treillis des sous-algèbres et opérateurs sur les MV-algèbres

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme d'études approfondies
interuniversitaire en mathématiques
2003–2004

Je remercie le professeur Georges Hansoul qui m'a permis de réaliser ce mémoire et qui a su avançer les arguments qui m'ont aidé à sortir de certaines impasses.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude à Philippe Niederkorn, qui m'a, lors de ma licence, initié à la théorie des dualités naturelles et aux MV-algèbres.

Enfin, je remercie Sarah pour les efforts nombreux qu'elle déploie quotidiennement pour me supporter.

Table des matières

Introduction

L'intérêt que porte l'homme à la science des raisonnements remonte à l'antiquité grecque. On trouve en effet dans les travaux d'ARISTOTE les premiers balbutiements de ce qu'on qualifie aujourd'hui la logique classique. Le point de vue alors abordé était celui du philosophe, et le degré de vérité que pouvaient prendre les propositions ne dépassait que rarement la simple dichotomie vrai–faux.

Il faut attendre le milieu du dix-neuvième siècle pour que le mathématicien G. BOOLE donne des bases mathématiques solides à l'étude du calcul des propositions. Ce fut le point de départ de la logique algébrique, dont le principe premier consiste à greffer à l'ensemble des propositions d'une logique une structure d'algèbre, appelée algèbre de LINDEBAUM–TARSKI. Le mathématicien peut alors déployer la panoplie de l'algèbre universelle pour s'attaquer à l'étude des propriétés de son système formel.

Consécutivement au développement de la logique propositionnelle classique initiée par G. BOOLE, les mathématiciens commencèrent à s'interroger à propos de la possibilité de dépasser le cadre classique ne permettant qu'une approche grossière du raisonnement humain.

Ce fut la naissance des logiques modales, par lesquelles les logiciens tentèrent de modéliser différents types de raffinements des propositions, comme la possibilité, la connaissance, la probabilité ou l'obligation. L'introduction de la modalité dans la logique classique se traduit par la définition d'un opérateur sur l'algèbre de BOOLE des formules.

Parallèlement, d'autres mathématiciens, peu satisfaits des résultats offerts par les logiques modales, développèrent des systèmes formels dans lesquels les propositions peuvent prendre plus de deux valeurs de vérités. Ainsi, J. ŁUKASIEWICZ introduisit en 1920 un système trivalué (cf. [**31**] et [**2**] pour une traduction en anglais) qu'il étendit tout naturellement à des systèmes n-valués et infini-valués (cf. [**32**] traduit en anglais dans [**2**]).

C'est dans ce contexte que naquirent les MV-algèbres. En effet, elles furent pour la première fois étudiées par C.C. CHANG en 1958 (cf. [**4**] et [**5**]) car elles apparaissaient comme les algèbres de LINDENBAUM de la logique infini-valuée de ŁUKASIEWICZ. L'étude de la variété de ces algèbres (dont les algèbres de BOOLE forment une sous-variété) permit notamment à C.C. CHANG d'établir la complétude du système infini-valué de ŁUKASIEWICZ (cf [**5**]). Mais la classe de ces algèbres regorge de richesses insoupçonnées qui attirèrent l'attention de nombreux algébristes depuis leur découverte.

Un des outils puissants de l'algèbre universelle est la théorie des dualités. Son principe de base consiste à associer une structure topologique $\underset{\sim}{X}$ à une algèbre $\underline{A}$ telle qu'on peut reconstruire $\underline{A}$ à partir de $\underset{\sim}{X}$. Les exemples historiques de dualité — la dualité de STONE pour les algèbres de BOOLE (cf. [**30**]), la dualité de PRIESTLEY pour les treillis distributifs (cf. [**27**] et [**28**]), la dualité de Pontriagyn pour les groupes abéliens (cf. [**25**] et [**26**]) — illustrent parfaitement la richesse de cette théorie.

Récemment encore, P. Niederkorn développa (cf. [**23**]) une dualité pour les variétés de MV-algèbres engendrées par une MV-chaîne finie, dualité qui fut étendue dans [**21**] aux variétés de MV-algèbres finiment engendrées par P. Niederkorn, P. Mathonet et B. Teheux.

Dans ce mémoire, nous nous proposons d'appliquer cet outil à deux problèmes classiques de l'algèbre universelle.

Le premier de ces problèmes est l'étude du treillis des sous-algèbres. Depuis toujours, les mathématiciens s'intéressent à déterminer les propriétés communes du treillis des sous-algèbres des algèbres de leur variété de prédilection. Par exemple, Grätzer, Koh et Makkai obtinrent dans [**13**] une caractérisation du treillis des sous-algèbres d'une algèbre de Boole et Sachs étudia dans [**29**] les éléments maximaux dans ces treillis (une synthèse de toutes ces propriétés peut être trouvée dans [**1**]).

Cependant, la théorie des dualités ne fut que rarement appliquée pour résoudre des problèmes liés aux treillis des sous-algèbres (contrairement au treillis des quotients). Ainsi, dans la plupart des cas, la notion de sous-algèbre ne semble pas se dualiser « confortablement » dans la catégorie duale. Des exceptions existent, comme c'est le cas pour les R-sous-treillis d'un treillis distributif borné (cf. [**33**]), ou pour les sous-algèbres des algèbres de Heyting (cf [**15**]).

Dans le troisième chapitre de ce travail, nous essayons donc de convaincre le lecteur que le cas de la dualité pour les variétés $\mathbb{HSP}(\underline{\text{Ł}}_n)$ est une autre exception qui prouve qu'une dualité peut se montrer généreuse en résultats sur l'étude du treillis des sous-algèbres. Ainsi, entre autres conséquences, nous obtenons le caractère dualement atomique de ces treillis, nous en décrivons les éléments maximaux, et en étudions la modularité et la distributivité.

Le deuxième problème auquel nous nous sommes attaqués, et qui constitue le quatrième chapitre, est centré sur la construction d'une dualité pour une théorie des MV-algèbres à opérateurs. La théorie des algèbres de Boole à opérateurs, introduite par B. Jónsson et A. Tarski dans [**16**] et [**17**], et qui connut un second souffle en 1963 quand Kripcke introduisit les modèles qui portent son nom, peut être vue comme une contrepartie algébrique de la logique modale. C'est pour faciliter leur étude que G. Hansoul développa dans [**14**] une dualité catégorique pour la classe de ces algèbres, étendant par là les résultats de [**16**]. L'idée de cette dualité est de construire le dual d'une algèbre de Boole à opérateur $\langle \underline{\mathfrak{B}}, \Box \rangle$ en considérant le dual $\chi(\underline{\mathfrak{B}})$ de $\underline{\mathfrak{B}}$ sous la dualité de Stone et en traduisant l'opérateur $\Box$ en une relation binaire sur $\chi(\underline{\mathfrak{B}})$.

Pour établir une dualité pour les MV-algèbres à opérateurs, le premier obstacle qu'il a fallu surmonter était de déterminer une axiomatisation des opérateurs qui à la fois étend l'axiomatique booléenne et qui se révèle aussi être suffisamment riche que pour permettre la dualisation. Notons d'emblée que les résultats de McNaughton (cf. [**22**]) concernant les fonctions termes sur [0,1] ont été d'une importance capitale à cet effet.

Ainsi, dans le quatrième chapitre, nous définissons la classe des MV-algèbres à opérateurs et nous développons, en mimant la technique classique, une dualité pour la classe des MV-algèbres munies d'un opérateur unaire et qui sont construites sur une MV-algèbre d'une variété finiment engendrée. Cette dualité étend la dualité booléenne et l'axiomatisation de la classe duale ne fait intervenir qu'une condition de structure supplémentaire par rapport au cas classique. Nous avons espoir que dans un futur proche, cette dualité puisse nous mener à l'étude d'une logique modale multi-valuée.

Pour faciliter la lecture de cet ouvrage au lecteur peu familier avec la théorie des MV-algèbres et des dualités, nous avons consacré le premier chapitre à de brefs prolégomènes. Nous avons réservé le deuxième chapitre à des rappels concernant les définitions et propriétés des différents types de modularité sur les treillis.

Les chapitre 3 et 4, qui forment le noyau de ce travail, peuvent être lus indépendemment l'un de l'autre. Le lecteur désorienté trouvera à la fin de l'ouvrage un index et un index des notations qui, nous l'espérons, lui permettront de retrouver son chemin dans le dédale du vocabulaire mathématique.

CHAPITRE 1

Prolégomènes

Dans ce chapitre, nous voulons rappeler au lecteur les définitions et les propriétés qui sont nécessaires à la compréhension du travail exposé dans la suite de cet ouvrage. Nous supposons que le lecteur est déjà familier avec la théorie de l'algèbre universelle (et avec ses exemples les plus connus: treillis, algèbres de BOOLE, etc.) et de la topologie générale, qu'il connaît le vocabulaire élémentaire de la théorie des catégories et que la théorie des dualités entre algèbres et structures topologiques ne lui est pas tout à fait étrangère. Le ton étant donc essentiellement au rappel, nous renvoyons le lecteur désorienté aux ouvrages [**3**] et [**11**] pour obtenir plus d'informations à propos de l'algèbre universelle, à l'article [**10**] en ce qui concerne les structures topologiques, au livre [**20**] pour la théorie des catégories et enfin au travail [**9**] de DAVEY et WERNER pour la théorie des dualités naturelles.

1. MV-algèbres

1.1. Définitions et exemples. Nous avons consacré le noyau de ce mémoire à l'étude de certaines propriétés des MV-algèbres. Ce n'est donc que justice que de leur consacrer la première partie de ces prolégomènes.

Les MV-algèbres furent introduites en 1958 par C.C. CHANG (cf. [**4**] et [**5**]) pour donner un aspect algébrique aux logiques multi-valuées de ŁUCKASIEWICZ. Les algèbres de LINDEBAUM de ces logiques sont en effet des MV-algèbres et l'application des techniques de l'algèbre universelle à ces dernières a permis d'aboutir (entre autre chose) à une preuve algébrique du théorème de complétude de la logique infini-valuée de ŁUCKASIEWICZ (cf. [**5**]). Depuis lors, la variété des MV-algèbres, qui apparaît comme une extension de la variété des algèbres de BOOLE, fut étudiée par de nombreux algébristes dont les motivations furent aussi diverses qu'éloignées des considérations logiques qui lui avaient donné naissance. Le lecteur intéressé trouvera dans [**6**] un petit panorama de la théorie des MV-algèbres.

Bien que depuis 1958 la classe des MV-algèbres ait reçu plusieurs axiomatisations différentes (on les connaissait alors sous le vocable d'algèbres de WAJESBERG, de BCK-algèbres commutatives bornées, leur variété pouvant également être considérée comme une sous-variété de la variété des BL-algèbres), on s'accorde aujourd'hui pour définir une *MV-algèbre* comme étant une algèbre $\langle \underline{A}; \oplus, \odot, \neg, 0, 1\rangle$ (nous noterons $\mathcal{L}_{\mathrm{MV}}$ le langage des MV-algèbres) de type (2,2,1,0,0) telle que $\langle \underline{A}; \oplus, 0\rangle$ est un monoïde abélien et satisfaisant aux équations suivantes:

(MV1)	$\neg\neg x = x,$	(MV2)	$x \oplus 1 = x,$
(MV3)	$\neg 0 = 1,$	(MV4)	$x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y),$
(MV5)	$(x \odot \neg y) \oplus y = (y \odot \neg x) \oplus x.$		

Souvent, nous utiliserons l'expression $x \to y$ comme abréviation de $y \oplus \neg x$. Nous désignerons par $\mathcal{MV}$ la variété des MV-algèbres.

Notons que si $\langle \underline{A}; \oplus, \odot, \neg, 0, 1\rangle$ est une MV-algèbre, il est possible de greffer sur A une structure de *treillis distributif borné* (inférieurement par 0 et supérieurement par 1. Cf. **[4]** ou **[6]** pour les preuves.) L'ordre $\leq$ qui lui est associé est alors défini par

$$x \leq y \Leftrightarrow x \rightarrow y = 1,$$

et les opérations $\vee$ et $\wedge$ de ce treillis sont données par

$$\begin{aligned} x \vee y &= (y \odot x) \oplus x, \\ x \wedge y &= (y \oplus \neg x) \odot x. \end{aligned}$$

Ces opérations jouissent sur toute MV-algèbre des propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z), \\ x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z). \end{aligned}$$

Par *MV-chaîne* (ou MV-algèbre totalement ordonnée), on entend naturellement une MV-algèbre dont l'ordre associé est total.

Par ailleurs, un élément x de la MV-algèbre $\underline{A}$ (nous commettrons souvent l'abus consacré par l'usage qui consiste à désigner une algèbre par son univers) est dit *idempotent* si $x \oplus x = x$. Nous noterons $\mathfrak{B}(\underline{A})$ l'ensemble des éléments idempotents de $\underline{A}$. Il s'agit d'une sous-algèbre de $\underline{A}$ et c'est même la plus grande sous-algèbre de $\underline{A}$ à être une algèbre de BOOLE (l'opération $\vee$ coïncide alors avec $\oplus$ et $\wedge$ avec $\odot$). C'est en ce sens que la variété des algèbres de BOOLE apparaît comme une sous-variété de $\mathcal{MV}$. Il suffit en effet d'ajouter l'équation $x \oplus x = x$ à l'axiomatisation de $\mathcal{MV}$ pour obtenir une base équationnelle de la variété des algèbres de BOOLE.

L'exemple le plus fondamental de MV-algèbre est l'algèbre $\langle [0,1]; \oplus, \odot, \neg, 0, 1\rangle$ définie sur l'intervalle réel [0,1] par

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \min(x + y, 1), \\ \neg x &= 1 - x. \end{aligned}$$

Un des résultats principaux de C.C. CHANG (cf. **[5]**) est d'avoir obtenu que la variété des MV-algèbres est engendrée par l'algèbre [0,1]. Dans ce cas, il est trivial de vérifier que l'ordre associé à la MV-algèbre [0,1] coïncide avec l'ordre usuel sur les réels. D'autres exemples importants sont constitués par les sous-algèbres $\underline{\text{Ł}}_n = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ de [0,1] (où $n \in \mathbb{N}_0$). En effet, la classification des sous-variétés de $\mathcal{MV}$ obtenue par KOMORI (cf. **[18]** et **[19]**) montre que les sous-variétés finiment engendrées coïncide avec les variétés engendrées par un nombre fini de MV-chaînes $\underline{\text{Ł}}_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

1.2. Congruence et filtre implicatif. Similairement au cas des algèbres de BOOLE, toute congruence sur une MV-algèbre est caractérisée par la classe de 1. Ainsi, on dit qu'un sous-ensemble F de la MV-algèbre $\underline{A}$ est un *filtre implicatif* (ou tout simplement *filtre*) si F contient 1 et si chaque fois que F contient les éléments x et $x \rightarrow y$ alors F contient également y. Bien-sûr, on dit qu'un filtre est *propre* si il ne contient pas 0, qu'il est *non trivial* s'il diffère de $\{1\}$ et qu'il est *maximal* s'il est maximal parmi les filtres propres. On constate aisément que l'ensemble $\mathcal{F}(\underline{A})$ des filtres de la MV-algèbre $\underline{A}$ est un treillis borné. On définit également la fonction *distance*

$$d : \underline{A}^2 \rightarrow \underline{A} : (x,y) \mapsto (x \odot \neg y) \oplus (y \odot \neg x).$$

Avec ces définitions, on peut montrer que si F est un filtre sur $\underline{A}$ alors la relation binaire θ_F définie par

$$(x,y) \in \theta_F \Leftrightarrow \neg d(x,y) \in F$$

est une congruence sur $\underline{A}$ telle que $1^{\theta_F} = F$. Inversement, si $\theta \in \mathsf{Con}(\underline{A})$, alors 1^θ est un filtre tel que $\theta_{1^\theta} = \theta$. De plus, ces correspondances biunivoques sont isotones, de sorte que le treillis $\mathsf{Con}(\underline{A})$ des congruences d'une MV-algèbre $\underline{A}$ est isomorphe au treillis $\mathcal{F}(\underline{A})$ de ses filtres. Par ailleurs, cet isomorphisme donne un sens à des notations du type $\underline{A}/F$ (qui est par définition le quotient de $\underline{A}$ par θ_F) lorsque F est un filtre de $\underline{A}$.

Il est aussi intéressant de définir la notion de *filtre premier* d'une MV-algèbre $\underline{A}$: il s'agit d'un filtre propre de $\underline{A}$ qui contient $\neg x \oplus y$ ou $\neg y \oplus x$ pour tous x et y dans $\underline{A}$. On constate alors que, par définition de l'ordre sur une MV-algèbre $\underline{A}$, le quotient de $\underline{A}$ par un de ses filtres F est une MV-chaîne si et seulement si F est un filtre premier.

Enfin, notons que le théorème d'extension de STONE pour les algèbres de BOOLE possède son pendant pour les MV-algèbres. En effet, si $\underline{A}$ est une MV-algèbre non triviale, si x est un élément de $\underline{A}$ et si F est un filtre propre de $\underline{A}$ qui ne contient pas x, alors il existe un filtre premier de $\underline{A}$ qui contient F mais pas x.

1.3. Précisions à propos des variétés finiment engendrées.

1.3.1. *Les sous-variétés finiment engendrées.* Comme nous l'avons déjà énoncé plus haut, les sous-variétés finiment engendrées de $\mathcal{MV}$ sont les variétés $\mathbb{HSP}(\underline{Ł}_{n_1},\ldots,\underline{Ł}_{n_r})$ où $r \in \mathbb{N}_0$ et $\{n_1,\ldots,n_r\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Par ailleurs, on constate facilement que l'algèbre $\underline{Ł}_m$ est plongeable dans $\underline{Ł}_n$ (m et n dans $\mathbb{N}_0$) si et seulement si m appartient à l'ensemble des diviseurs de n, que nous noterons $\mathrm{div}(n)$ (dans ce cas, le plongement est d'ailleurs unique). Ainsi, il vient

$$\mathbb{HSP}(\underline{Ł}_{n_1},\ldots,\underline{Ł}_{n_r}) \subseteq \mathbb{HSP}(\underline{Ł}_{\mathrm{ppcm}\{n_1,\ldots,n_r\}}).$$

Enfin, on peut montrer que l'algèbre $\underline{Ł}_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) est semi-primale, ce qui implique, par le théorème de JÓNSSON, que

$$\mathbb{HSP}(\underline{Ł}_n) = \mathbb{ISP}(\underline{Ł}_n),$$

propriété fondamentale pour la construction d'une dualité naturelle sur $\mathbb{HSP}(\underline{Ł}_n)$.

1.3.2. *Termes et fonctions linéaires par morceaux.* Pour les développements du quatrième chapitre de ce mémoire, nous allons avoir besoin d'une description des *fonctions termes* (à une variable) du langage $\mathcal{L}_{\mathrm{MV}}$ des MV-algèbres sur $[0,1]$. Cette description est un cas particulier d'un résultat dû à MCNAUGHTON (cf. **[22]**). Ce résultat affirme, dans le cas (restreint) qui nous occupe, que l'ensemble de ces fonctions termes coïncide avec l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ telles que

- l'application f est continue relativement à la topologie euclidienne;
- il existe des polynômes du premier degré $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ à coefficients entiers assurant que pour tout a dans $[0,1]$, il existe un i dans $\{1,\ldots,k\}$ tel que $f(a) = p_i(a)$.

Autrement dit, les $\mathcal{L}_{\mathrm{MV}}$-termes sur $[0,1]$ ne sont autres que les fonctions continues et linéaires (à coefficients entiers) par morceaux (que l'on appelle encore *fonctions de* MCNAUGHTON).

Par exemple, si $\frac{i}{n}$ appartient à $\underline{Ł}_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$), nous pouvons définir la fonction

$$\tau_i^{[0,1]} : [0,1] \to [0,1] : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{i-1}{n}, \\ n.x - (i-1) & \text{si } \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}, \\ 1 & \text{si } x > \frac{i}{n}, \end{cases}$$

qui est une fonction de McNaughton, donc l'interprétation d'un $\mathcal{L}_{\mathrm{MV}}$-terme τ_i sur [0,1]. Dans la suite, nous réserverons la notation τ_i pour désigner ce terme. Notons d'emblée que son interprétation sur $\underline{Ł}_n$ est une fonction croissante qui vérifie

$$\tau_i^{Ł_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{i}{n}, \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{i}{n}. \end{cases}$$

Ces termes nous seront bien utiles car il sont des « témoins » de la position respective des points de $\underline{Ł}_n$ entre eux.

2. Dualité pour la variété $\mathbb{HSP}(\underline{Ł}_n)$

L'outil essentiel pour l'étude des deux problèmes posés dans ce mémoire est une dualité développée par P. Niederkorn dans **[23]** pour la classe $\mathbb{HSP}(\underline{Ł}_n)$ (n désignera un entier naturel non nul fixé pour le reste de ce chapitre). Notons, bien que cela porte peu à conséquence pour nos applications, que cette dualité est un exemple d'une *dualité naturelle*, qui est une technique générale permettant d'obtenir des dualités entre des quasi-variétés d'algèbres et des classes de structures topologiques. Nous suggérons au lecteur intéressé par ce sujet de consulter l'ouvrage [**9**].

La catégorie dont nous allons obtenir un dual est la catégorie $\mathcal{MV}_n$ dont les objets sont les membres de $\mathbb{HSP}(\underline{Ł}_n)$ et dont les morphismes sont les homomorphismes de MV-algèbres. Pour définir la classe duale, désignons par $\underset{\sim}{Ł}_n$ la structure topologique

$$\underset{\sim}{Ł}_n = \langle Ł_n; \{Ł_m \mid m \in \mathrm{div}(n)\}, \tau\rangle,$$

où

(X1) la topologie τ est discrète;

(X2) $\mathrm{div}(n)$ désigne l'ensemble des diviseurs (positifs) de n;

(X3) pour tout m dans $\mathrm{div}(n)$, il faut voir $Ł_m$ comme une relation unaire sur $\underset{\sim}{Ł}_n$.

On définit alors la catégorie $\mathcal{X}_n$ dont les objets sont les membres de $\mathbb{IS}_c\mathbb{P}(\underset{\sim}{Ł}_n)$ (c'est-à-dire les structures topologiques isomorphes à un sous-espace fermé d'une puissance de $\underset{\sim}{Ł}_n$) et dont les morphismes sont les applications continues respectant la structure relationnelle des membres de $\mathbb{IS}_c\mathbb{P}(\underset{\sim}{Ł}_n)$.

En fait, les objets de $\mathcal{X}_n$ sont exactement les structures topologiques

$$\underset{\sim}{X} = \langle X; \{r_m^{\underset{\sim}{X}} \mid m \in \mathrm{div}(n)\}, \tau\rangle$$

où

- la topologie τ est booléenne (c'est -à-dire compacte, séparée et possédant une base d'ouverts-fermés);
- $r_m^{\underset{\sim}{X}}$ est un sous-espace fermé de X pour tout m dans $\mathrm{div}(n)$;
- on a $r_n^{\underset{\sim}{X}} = X$ et $r_m^{\underset{\sim}{X}} \cap r_q^{\underset{\sim}{X}} = r_{\mathrm{pgcd}(m,q)}^{\underset{\sim}{X}}$ pour tous diviseurs m et q de n.

Cela étant, les $\mathcal{X}_n$-morphismes de la $\mathcal{X}_n$-structure $\underset{\sim}{X}$ dans la $\mathcal{X}_n$-structure $\underset{\sim}{Y}$ sont les applications continues f de X dans Y telles que pour tout $m \in \mathrm{div}(n)$,

$$x \in r_m^{\underset{\sim}{X}} \Rightarrow f(x) \in r_m^{\underset{\sim}{Y}}.$$

Le foncteur permettant de passer de la catégorie $\mathcal{MV}_n$ à la catégorie $\mathcal{X}_n$ est le foncteur D_n défini par

$$\mathsf{D}_n : \mathcal{MV}_n \to \mathcal{X}_n : \begin{cases} \underline{A} \in \mathcal{MV}_n \mapsto \mathsf{D}_n(\underline{A}) = \mathcal{MV}_n(\underline{A},\underline{Ł}_n) \\ f \in \mathcal{MV}_n(\underline{A},\underline{B}) \mapsto \mathsf{D}_n(f) \in \mathcal{X}_n(\mathsf{D}_n(\underline{B}),\mathsf{D}_n(\underline{A})), \end{cases}$$

où $u \in r_m^{\mathsf{D}(\underline{A})}$ si et seulement si $u(\underline{A}) \subseteq \underline{Ł}_m$ et où $\mathsf{D}_n(f)(u) = u \circ f$.

Quant au foncteur E_n transformant les objets et les morphismes de $\mathcal{X}_n$ en objets et morphismes de $\mathcal{MV}_n$, il est défini par

$$\mathsf{E}_n : \mathcal{MV}_n \to \mathcal{X}_n : \begin{cases} \underset{\sim}{X} \in \mathcal{X}_n \mapsto \mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X}) = \mathcal{X}_n(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Ł}_n) \\ \psi \in \mathcal{X}_n(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) \mapsto \mathsf{E}_n(\psi) \in \mathcal{MV}_n(\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{Y}),\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})), \end{cases}$$

où $\mathsf{E}_n(\psi)(\alpha) = \alpha \circ \phi$.

Ces foncteurs ainsi définis, on peut montrer (cf. [**23**]) que les catégorie $\mathcal{MV}_n$ et $\mathcal{X}_n$ sont dualement équivalentes par les foncteurs D_n et E_n et que l'application

$$e_{\underline{A}} : \underline{A} \to \mathsf{E}_n\mathsf{D}_n(\underline{A}) : a \mapsto e_{\underline{A}}(a) : u \in \mathsf{D}_n(\underline{A}) \mapsto u(a)$$
$$(\text{resp. } \epsilon_{\underset{\sim}{X}} = \underset{\sim}{X} \to \mathsf{D}_n\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X}) : u \mapsto \epsilon_{\underset{\sim}{X}}(u) : \alpha \in \mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X}) \mapsto \alpha(u))$$

est un $\mathcal{MV}_n$-isomorphisme (resp. un $\mathcal{X}_n$-isomorphisme).

Notons que si $\underline{A}$ est un objet de $\mathcal{MV}_n$, on peut obtenir une sous-base de topologie de $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ (vu comme sous-espace fermé de $\underset{\sim}{Ł}_n^{\underline{A}}$) constituée d'ouverts-fermés en recourant aux ensembles

$$[x : \frac{i}{n}] = \{u \in \mathsf{D}_n(\underline{A}) \mid u(x) = \frac{i}{n}\},$$

où x est un élément de $\underline{A}$ et i un élément de $\{0,\dots,n\}$. Par ailleurs, on peut montrer (cf. [**23**]) que l'espace topologique sous-jacent à la structure $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ est homéomorphe au dual de l'ensemble $\mathfrak{B}(\underline{A})$ des idempotents de $\underline{A}$ sous la dualité de Stone pour les algèbres de Boole. De plus, si on envisage la dualité de Stone sous l'angle des caractères, c'est-à-dire si l'espace dual d'une algèbre de Boole $\underline{\mathfrak{B}}$ est défini comme l'ensemble $\chi(\underline{\mathfrak{B}})$ des homomorphismes de cette algèbre dans l'algèbre de Boole triviale (c'est le point de vue des dualités naturelles), une base de cet espace est donnée par les ensembles $[x : 0]$ où $x \in B$. Cela étant, les termes τ_i précédemment définis permettent de jongler entre les deux sous-bases

$$\{[x : \tfrac{i}{n}] \mid x \in \underline{A} \text{ et } \tfrac{i}{n} \in \underline{Ł}_n\} \quad \text{et} \quad \{[a : 0] \mid a \in \mathfrak{B}(\underline{A})\}.$$

En effet, il vient

$$[x : \frac{i}{n}] = \begin{cases} [\tau_{i+1}(x) : 0] \cap [\neg\tau_i(x) : 0] = [\tau_{i+1}(x) \oplus \neg\tau_i(x) : 0] & \text{si } i < n \\ [\neg\tau_i(x) : 0] & \text{si } i = n \end{cases}$$

si x est un élément de $\underline{A}$ (ce qui implique que $\tau_i(x)$ est un idempotent) et i un naturel plus petit que n.

Pour terminer ces considérations topologiques, rappelons que si X est un espace de Boole, on dit que R est une *relation de* Boole sur X si R est une relation d'équivalence sur X telle que pour tout couple de point $(x,y) \in (X \times X) \setminus R$ on peut trouver un ouvert-fermé R-saturé séparant x et y. En fait, ces conditions sont exactement celles qu'il faut imposer à une équivalence R sur X pour que le quotient topologique X/R soit également un espace de BOOLE. Dans la suite, nous noterons $\mathfrak{B}(X)$ l'ensemble des équivalences de BOOLE sur l'espace de BOOLE X.

Une des richesses de cette dualité réside en ce qu'elle transforme les plongements en morphismes injectifs et inversement. En conséquence, elle fait correspondre les produits aux sommes et les sommes aux produits. Or, on constate sans difficulté que la somme d'un nombre fini de $\mathcal{X}_n$-structures n'est autre que leur union disjointe. Cette caractéristique nous permet d'obtenir très facilement les duaux des objets finis de $\mathcal{MV}_n$ et $\mathcal{X}_n$.

Ainsi, si $\underset{\sim}{X}$ est un objet fini de $\mathcal{X}_n$, son dual $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$ est un produit de $|\underset{\sim}{X}|$ sous-algèbres de $\underline{Ł}_n$, le facteur correspondant à un x dans $\underset{\sim}{X}$ étant $\underline{Ł}_{m_x}$ si et seulement si

$$m_x = \text{pgcd}(\{m' \in \text{div}(n) \mid x \in r_{m'}^{\underset{\sim}{X}}\}).$$

On obtient donc en particulier (de manière indirecte) que toute $\mathcal{MV}_n$-algèbre finie est un produit fini de sous-algèbre de $\underline{Ł}_n$.

Par ailleurs, si $\underline{A}$ est une $\mathcal{MV}_n$-algèbre finie, alors son dual $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ est une $\mathcal{X}_n$-structure discrète possédant un nombre d'éléments égal au nombre de facteurs dans la décomposition de $\underline{A}$ en produit de sous-algèbres de $\underline{Ł}_n$. L'élément x correspondant au facteur $\underline{Ł}_m$ appartient à $r_{m'}^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ si et seulement si m divise m'. Nous aurons largement l'occasion d'illustrer cet aspect de la dualité lorsque nous étudierons le treillis des sous-algèbres pour les membres de $\mathbb{HSP}(\underline{Ł}_n)$.

3. Représentation booléenne des éléments de $\mathbb{HSP}(\underline{Ł}_n)$

La dualité que nous venons de développer permet également d'obtenir une représentation de tout élément $\underline{A}$ de $\mathcal{MV}_n$ comme un produit booléen sur l'espace $\mathsf{D}(\underline{A})$ des quotients simples de $\underline{A}$.

Avant de préciser ce résultat, rappelons que si X est un espace de BOOLE, une algèbre $\underline{A}$ est *produit booléen de la famille d'algèbres* (de même type que $\underline{A}$) $(A_x)_{x\in X}$ si

- l'algèbre $\underline{A}$ est un produit sous-direct des $\underline{A}_x$ $(x \in X)$;
- pour tous a et b dans $\underline{A}$, le sous-espace $[a = b] = \{x \in X \mid a(x) = b(x)\}$ est un ouvert-fermé de X;
- pour tous a et b dans X et tout ouvert-fermé ω de X, l'élément $a|_\omega \cup b|_{X\setminus\omega}$ appartient à $\underline{A}$ (i.e. à sa représentation sous directe dans $\prod_{x\in X} \underline{A}_x$).

On qualifie d'*archimédienne* toute MV-algèbre $\underline{A}$ isomorphe à un produit booléen de sous-algèbres de [0,1]. En fait, on peut obtenir (cf. **[8]**) que dans le cas d'une MV-algèbre archimédienne, cette représentation est unique (à isomorphisme près).

Cela étant, si $\underline{A}$ est une MV-algèbre de $\mathcal{MV}_n$, la dualité que nous venons de développer entre $\mathcal{MV}_n$ et $\mathcal{X}_n$ nous fournit une représentation booléenne (donc unique) comme produit booléen sur (l'espace topologique sous-jacent à) $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ des quotients simples de $\underline{A}$. Plus précisément, l'application

$$e_{\underline{A}} : \underline{A} \hookrightarrow \prod_{u\in\mathsf{D}(\underline{A})} u(\underline{A}) : a \mapsto (u(a))_{u\in\mathsf{D}(\underline{A})}$$

est une représentation booléenne (cf. **[23]** pour plus de détails).

4. Une catégorie équivalente à $\mathcal{X}_n$

Dans cette section, nous allons développer une équivalence catégorique entre la catégorie $\mathcal{X}_n$ et une catégorie dont les objets sont des objets topologiquement moins riches, mais structurellement plus simples que ceux de $\mathcal{X}_n$. Il est en effet parfois plus facile d'exprimer les propriétés des structures quotients dans cette nouvelle catégorie que dans $\mathcal{X}_n$.

Ainsi, si $\underset{\sim}{X}$ est une $\mathcal{X}_n$-structure, les sous-espaces $r_m^{\underset{\sim}{X}}$ possèdent l'avantage d'être fermés et vérifient entre eux des relations simples mais néanmoins contraignantes. Pour éviter de s'encombrer de ces relations, il est naturel de recourir aux sous-espaces $s_m^{\underset{\sim}{X}}$ définis par

$$s_m^{\underset{\sim}{X}} = r_m^{\underset{\sim}{X}} \setminus \bigcup_{m' \in \operatorname{div}(m) \setminus \{m\}} r_{m'}^{\underset{\sim}{X}}$$

pour tous diviseur m de n.

Au vu de cette définition, il est clair que $\{s_m^{\underset{\sim}{X}} \mid m \in \operatorname{div}(n)\}$ forme une partition de $\underset{\sim}{X}$. Malheureusement, ces ensembles ne jouissent plus de propriétés topologiques élégantes. A la lumière de ces remarques, nous sommes amenés à la définition suivante.

Définition 4.1. La catégorie $\mathcal{X}_n'$ est la catégorie dont les objets sont les structures topologiques $\underset{\approx}{X} = \langle X; \{s_m^{\underset{\approx}{X}} \mid m \in \operatorname{div}(n)\}, \tau\rangle$ où

- la topologie τ est booléenne,
- $\{s_m^{\underset{\approx}{X}} \mid m \in \operatorname{div}(n)\}$ est une partition de X,
- pour tous diviseur m de n, le sous-espace $\bigcup_{m' \in \operatorname{div}(m)} s_m^{\underset{\approx}{X}}$ est un fermé de X;

et dont les morphismes sont les applications continues $\psi : \underset{\approx}{X} \to \underset{\approx}{Y}$ vérifiant

$$\psi(s_m^{\underset{\approx}{X}}) \subseteq \bigcup_{m' \in \operatorname{div}(m)} s_{m'}^{\underset{\approx}{X}}.$$

Ainsi définie, il apparaît clairement que la catégorie $\mathcal{X}_n'$ est isomorphe à la catégorie $\mathcal{X}_n$.

Proposition 4.2. *Soient $\mathsf{F}_n : \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_n'$ et $\mathsf{K}_n : \mathcal{X}_n' \to \mathcal{X}_n$ les foncteurs définis par*

$$\mathsf{F}_n : \begin{cases} \underset{\sim}{X} = \langle X; \{r_m^{\underset{\sim}{X}} \mid m \in \operatorname{div}(n)\}, \tau\rangle \mapsto \langle X; \{r_m^{\underset{\sim}{X}} \setminus \bigcup_{\substack{m' \in \operatorname{div}(m) \\ m' \neq m}} r_{m'}^{\underset{\sim}{X}} \mid m \in \operatorname{div}(n)\}, \tau\rangle \\ \phi \in \mathcal{X}_n(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}) \mapsto \phi \end{cases}$$

et par

$$\mathsf{K}_n : \begin{cases} \underset{\approx}{X} = \langle X; \{s_m^{\underset{\approx}{X}} \mid m \in \operatorname{div}(n)\}, \tau\rangle \mapsto \langle X; \{\bigcup_{m' \in \operatorname{div}(m)} s_{m'}^{\underset{\approx}{X}} \mid m \in \operatorname{div}(n)\}, \tau\rangle \\ \phi \in \mathcal{X}_n'(\underset{\approx}{X}, \underset{\approx}{Y}) \mapsto \phi. \end{cases}$$

Alors F_n et K_n définissent une équivalence entre les catégories $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{X}_n'$.

On déduit donc de cette proposition que les catégories $\mathcal{MV}_n$ et $\mathcal{X}_n'$ sont dualement équivalentes. La proposition suivante décrit les foncteurs qui permettent de naviguer entre ces deux catégories. Bien entendu, nous noterons $\underset{\approx}{Ł}_n$ la structure $\mathsf{F}_n(\underset{\sim}{Ł}_n)$.

Proposition 4.3. *Soient $\mathsf{D}_n' : \mathcal{MV}_n \to \mathcal{X}_n'$ et $\mathsf{E}_n' : \mathcal{X}_n' \to \mathcal{MV}_n$ les foncteurs définis par*

$$\mathsf{D}_n' : \begin{cases} \underline{A} \mapsto \langle \mathcal{MV}_n(\underline{A}, \underline{Ł}_n); \{\{u \in \mathcal{MV}_n(\underline{A}, \underline{Ł}_n) \mid u(\underline{A}) = \underline{Ł}_m\} \mid m \in \operatorname{div}(n)\}, \tau\rangle \\ f \in \mathcal{MV}_n(\underline{A}, \underline{B}) \mapsto \mathsf{D}_n'(f) \in \mathcal{X}_n(\mathsf{D}_n'(\underline{B}), \mathsf{D}_n, (\underline{A})) : u \mapsto u \circ f \end{cases}$$

et par

$$\mathsf{E}'_n : \begin{cases} \underset{\approx}{X} \mapsto \mathcal{X}'_n(\underset{\approx}{X},\underset{\approx}{L}_n) \\ \phi \in \mathcal{X}'_n(\underset{\approx}{X},\underset{\approx}{Y}) \mapsto \mathsf{E}'_n(\phi) \in \mathcal{MV}_n(\mathsf{E}'_n(\underset{\approx}{Y}),\mathsf{E}'_n(\underset{\approx}{X})) : \alpha \mapsto \alpha \circ \phi. \end{cases}$$

Alors catégories $\mathcal{MV}_n$ et $\mathcal{X}'_n$ sont dualement équivalentes par les foncteurs D'_n et E'_n.

Les catégories $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{X}'_n$ sont fort similaires. De plus, les mécanismes mis en jeu dans la dualité entre $\mathcal{MV}_n$ et $\mathcal{X}_n$ sont également proches de ceux de la dualité entre $\mathcal{MV}_n$ et $\mathcal{X}'_n$. Ainsi, dans la suite de ce travail, nous procéderons avec opportunisme: nous nous tournerons vers la dualité qui permet d'exprimer le plus facilement nos résultats. Nous emploierons donc tantôt le foncteur D_n (ou E_n), tantôt le foncteur D'_n (ou E'_n), mais, pour ne pas alourdir nos notations, nous privilégierons systématiquement la notation D_n et E_n ainsi que $\mathcal{X}_n$, le contexte permettant de déterminer quelle version de la dualité nous employons.

5. Algèbres de Boole à opérateurs

Pour s'assurer que le lecteur perçoive bien les similitudes entre les opérateurs sur les algèbres de Boole et les opérateurs sur les MV-algèbres (que nous allons définir dans le chapitre 4) et pour fixer les notations, nous allons très succinctement esquisser les prémisses de la théorie des algèbres de Boole à opérateurs et de leur dualité.

Un *opérateur k-aire* ($k \in \mathbb{N}_0$) sur l'algèbre de Boole $\underline{\mathfrak{B}}$ est une application $f : \underline{\mathfrak{B}}^k \to \underline{\mathfrak{B}}$ telle que

- f est *conormal*: si $l \leq k$ et si $b_1,\ldots,b_{l-1},b_{l+1},\ldots,b_k$ sont des éléments de $\underline{\mathfrak{B}}$, il vient
$$f(b_1,\ldots,b_{l-1},1,b_{l+1},\ldots,b_k) = 1;$$
- f respecte $\wedge$ sur chacun de ses arguments: si $l \leq k$,
$$f(b_1,\ldots,b_{l-1},a \wedge b,b_{l+1},\ldots,b_k) = f(b_1,\ldots,b_{l-1},a,b_{l+1},\ldots,b_k) \wedge f(b_1,\ldots,b_{l-1},b,b_{l+1},\ldots,b_k)$$
pour tous $b_1,\ldots,b_{l-1},b_{l+1},\ldots,b_k,a,b$ dans $\underline{\mathfrak{B}}$.

Cela étant, une algèbre $\langle \underline{\mathfrak{B}}, \vee, \wedge, 0,1,(f_i)_{i\in I}\rangle$ est une *algèbre de* Boole à opérateurs si

- $\langle \underline{\mathfrak{B}}, \vee, \wedge, 0,1\rangle$ est une algèbre de Boole;
- f_i est un opérateur k_i-aire pour tout i dans I.

Les opérateurs unaires sont bien souvent notés $\Box$ et sont appelés *opérateurs modaux*. Les algèbres de Boole munies d'un opérateur modal sont appelées algèbre modale.

5.1. Dualité pour les opérateurs modaux. Rappelons brièvement la machinerie de la dualité topologique construite pour les algèbres de Boole munies d'un opérateur modal. Si $\underline{\mathfrak{B}}$ est une algèbre de Boole nous noterons $\chi(\underline{\mathfrak{B}})$ son dual sous la dualité de Stone exprimée avec le point de vue des dualités naturelles. Ainsi $\chi(\underline{\mathfrak{B}})$ est l'ensemble des homomorphismes des $\underline{\mathfrak{B}}$ dans l'algèbre de Boole triviale, muni de la topologie naturelle. De plus, si X est un espace de Boole, nous noterons $\eta(X)$ l'algèbre de Boole formée des applications continues de X dans $\{0,1\}$.

Cela étant, si $\langle \underline{\mathfrak{B}},\Box\rangle$ est une algèbre modale, on définit sur $\chi(\underline{\mathfrak{B}})$ la relation $R^{\chi(\underline{\mathfrak{B}})}$ par

$$(u,v) \in R \Leftrightarrow \forall\ x\ (u(\Box x) = 1 \Rightarrow v(x) = 1).$$

La relation ainsi obtenue est à graphe fermé et vérifie $R^{-1}([b:0]) = [\Box b:0]$ et est donc telle que l'image inverse par R d'un ouvert-fermé reste un ouvert-fermé. Ce sont en fait exactement les conditions qu'il faut imposer à une relation binaire R sur un espace de BOOLE X pour pouvoir définir à l'aide de R un opérateur modal sur $\eta(X)$.

C'est pourquoi nous qualifierons de *booléenne* une relation binaire sur un espace de BOOLE X vérifiant

- $R^{-1}(\omega)$ est un ouvert-fermé pour tout ouvert-fermé ω de X;
- le graphe de R est un fermé de X^2.

La catégorie des *espaces de* BOOLE *modaux* est alors définie comme la catégorie dont les objets sont les espaces de BOOLE modaux (i.e. des espaces de BOOLE munis d'une relation booléenne) et dont les morphismes entre les espaces modaux $\langle X,R_X\rangle$ et $\langle Y,R_Y\rangle$ sont les applications continues $\psi : X \to Y$ vérifiant

$$\psi \circ R_X = R_Y \circ \psi.$$

Alors, on obtient que la catégorie $\mathcal{MB}$ des algèbres modales (dont les morphismes sont les homomorphismes d'algèbres de BOOLE qui respectent $\Box$) est dualement équivalente à la catégorie $\mathcal{ME}$ des espaces modaux par les foncteurs χ' et η' définis par

$$\chi' : \mathcal{MB} \to \mathcal{ME} : \begin{cases} \langle \underline{\mathfrak{B}},\Box\rangle \mapsto \langle \chi(\underline{\mathfrak{B}}),R^{\chi(\underline{\mathfrak{B}})}\rangle \\ f \in \mathcal{MB}(\langle \underline{\mathfrak{B}},\Box_{\underline{\mathfrak{B}}}\rangle,\langle \underline{\mathfrak{C}},\Box_{\underline{\mathfrak{X}}}\rangle) \mapsto \chi'(f) \in \mathcal{ME}(\chi'(\underline{\mathfrak{C}}),\chi'(\underline{\mathfrak{B}})) : u \mapsto u \circ f \end{cases}$$

et

$$\eta' : \mathcal{ME} \to \mathcal{MB} : \begin{cases} \langle X,R\rangle \mapsto \langle \chi(X),\Box_X\rangle \\ \psi \in \mathcal{ME}(\langle X,R_Y\rangle,\langle Y,R_Y\rangle) \mapsto \eta'(\psi) \in \mathcal{MB}(\eta'(Y),\eta'(X)) : \alpha \mapsto \alpha \circ \psi, \end{cases}$$

où $\Box_X$ est défini par

$$(\Box_X \alpha)(u) = 0 \Leftrightarrow u \in R^{-1}(\alpha^{-1}(0)).$$

CHAPITRE 2

Treillis distributifs, modulaires et semimodulaires

Nous allons ici rappeler les définitions des treillis distributifs, modulaires et (dualement) semimodulaires ainsi que les liens que ces définitions entretiennent entre elles. Certains des résultats présentés nous seront en effet utiles dans le chapitre suivant. Nous renvoyons le lecteur intéressé par des informations complémentaires à **[12]**, d'où nos résultats sont tirés.

Rappelons d'abord que si a et b sont deux éléments de l'ensemble ordonné $\langle L; \leq \rangle$, on note

$$a \prec b$$

en abréviation de

$$(a < b) \ \& \ (\forall\ c \in L\ ((a \leq c \leq b) \Rightarrow (c = a \text{ ou } c = b)),$$

(on dira que a *précède* b ou que b *couvre* a.)

1. Définitions et propriétés

Définitions 1.1. Soit $L = \langle L, \vee, \wedge \rangle$ un treillis. On dit que L

- est *semimodulaire* s'il satisfait le propriété de couverture

  $$a \prec b \Rightarrow (a \vee c \prec b \vee c \text{ ou } a \vee c = b \vee c)$$

  pour tous a,b,c dans L;
- est *dualement semimodulaire* s'il satisfait

  $$a \prec b \Rightarrow (a \wedge c = a \wedge b \text{ ou } a \wedge c \prec a \wedge b),$$

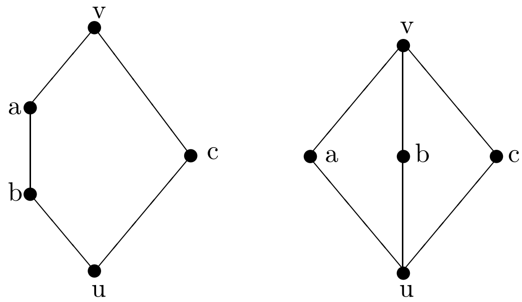
  pour tous a,b,c dans L;
- est *modulaire* s'il satisfait

  $$a \geq b \Rightarrow (a \wedge (c \vee b) = (a \wedge c) \vee b),$$

  pour tous a,b,c dans L;
- est *distributif* s'il satisfait l'équation

  $$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Nous aurons l'occasion d'illustrer abondamment ces différentes définitions dans le chapitre suivant. Notons d'emblée qu'un treillis distributif est modulaire et que les deux treillis représentés ci-dessous et appelés respectivement *pentagone* (noté N_5) et *diamant* (noté M_3) sont des exemples de treillis non distributifs. Ce sont en fait les prototypes de treillis non distributifs, car le théorème suivant caractérise les treillis non distributifs comme les treillis ne possédant ni N_5 ni M_3 comme sous-treillis.



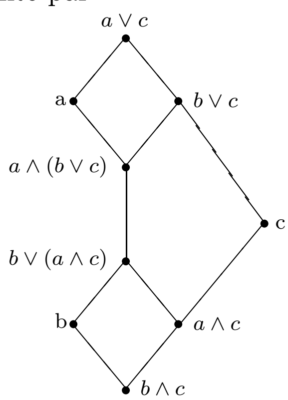
Proposition 1.2. *Soit L un treillis.*

(1) *Le treillis L est modulaire si et seulement s'il ne contient pas de sous-treillis isomorphe au pentagone.*

(2) *Le treillis L est distributif si et seulement s'il ne contient pas de sous-treillis isomorphe au pentagone ou au diamant.*

Preuve. (1) Tout sous-treillis d'un treillis modulaire est modulaire. Donc, comme N_5 n'est pas modulaire, il ne peut être plongeable dans un treillis modulaire.

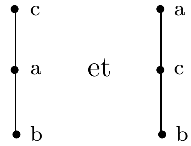
Inversement, commençons par montrer que le treillis libre engendré par 3 éléments a,b,c tels que $b < a$ est le treillis représenté par



En effet, puisque $b < a$, les seuls *suprema* et *infema* qu'il est possible de construire à partir de deux éléments parmi a, b et c sont les éléments $a \vee c$, $b \vee c$, $a \wedge c$ et $b \wedge c$. Alors, on montre que les 7 éléments

$$a,\ b,\ c,\ a \vee c,\ b \vee c,\ a \wedge c,\ b \wedge c$$

sont tous distincts dans l'algèbre libre. Pour cela, par définition de l'algèbre libre, il suffit de prouver que pour toute paire d'éléments distincts choisie parmi ces éléments, on peut construire un treillis H contenant trois éléments a, b et c vérifiant $b < a$ dans lequel la paire correspondante est formée d'éléments distincts. Par exemple, les treillis



conviennent pour montrer que $a \neq a \vee c$ et $a \vee c \neq b \vee c$ respectivement.

Maintenant, nous construisons tous les *suprema* et *infema* possibles entre un élément de $\{a,b,c\}$ et un des 7 éléments de $\{a,b,c,a\vee c,b\vee c,a\wedge c,b\wedge c\}$. On constate que seuls les éléments $b\vee(a\wedge c)$ et $a\wedge(b\vee c)$ n'ont pas encore été pris en compte. Il nous reste alors à montrer que les 9 éléments

$$a,\ b,\ c,\ a\vee c,\ b\vee c,\ a\wedge c,\ b\wedge c,\ b\vee(a\wedge c),\ a\wedge(b\vee c)$$

forment un treillis. Ceci ce fait très aisément en utilisant les lois d'absorbtion et la position relative de a et b.

Cela étant, si L est un treillis non modulaire et si a, b et c sont trois éléments de L tels que $a\geq b$ et $a\wedge(c\vee b)\neq a\wedge(c\vee b)$, alors le sous-treillis de L généré par ces trois éléments est une image homomorphe du treillis libre que nous venons de construire. Cependant, on constate facilement que si cet homomorphisme identifie deux éléments parmi les cinq éléments c, $a\wedge c$, $b\vee c$, $a\wedge(b\vee c)$, $b\vee(a\wedge c)$, alors il identifie également $a\wedge(b\vee c)$ à $b\vee(a\wedge c)$, ce qui est absurde par construction. On en déduit donc que le treillis engendré par a, b et c dans L contient un sous-treillis isomorphe au pentagone.

Comme dans le premier cas, la condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons qu'il existe des éléments x, y et z de L tels que $x\wedge(y\vee z)\neq(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$. Nous pourrions pour cela, comme dans la preuve du point (1), faire appel au treillis modulaire libre engendré par 3 éléments. Cette technique revient en fait à considérer les éléments u, a, b, c et v définis par

$$\begin{gathered} u=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(x\wedge z),\quad v=(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(x\vee z),\\ a=(x\wedge v)\vee u,\qquad\qquad b=(y\wedge v)\vee u,\\ z=(z\wedge v)\vee u \end{gathered}$$

et à constater qu'ils forment un treillis isomorphe au diamant. $\diamondsuit$

Nous connaissons déjà deux manières de définir la modularité. La proposition suivante en donne une troisième, sous forme d'une équation, ce qui permet de conclure que la classe des treillis modulaire est une variété.

Proposition 1.3. *Soit L un treillis. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *L est modulaire;*
(2) *L ne contient pas de sous-treillis isomorphe au pentagone;*
(3) *l'équation*

$$x\wedge(y\vee z)=x\wedge((y\wedge(x\vee z))\vee z)$$

est satisfaite dans L.

Preuve. Nous avons déjà démontré l'équivalence de (1) et (2). Montrons que la condition (1) implique la condition (3). En effet, en utilisant la modularité de L, il vient

$$(y\wedge(x\vee z))\vee z=(y\vee z)\wedge(x\vee z)$$

puisque $x\vee z\geq z$. Dès lors,

$$x\wedge((y\wedge(x\vee z))\vee z)=x\wedge(y\vee z)\wedge(x\vee z)=x\wedge(y\vee z).$$

Montrons maintenant que la condition (3) a pour conséquence la condition (2). Pour cela, il nous suffit de montrer que l'équation de (2) n'est pas satisfaite dans N_5. En effet, dans N_5 il vient $a \wedge (c \vee b) = a$ alors que $a \wedge ((c \wedge (a \vee b)) \vee b) = b$, ce qui conclut la démonstration. $\diamondsuit$

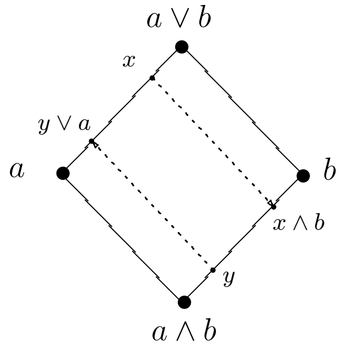
Clôturons cette section en élucidant les liens que les différents types de treillis introduits entretiennent entre eux. Ce travail nécessite un résultat préliminaire, mieux connu dans la littérature sous le nom de *théorème d'isomorphie* (pour les treillis modulaires).

Lemme 1.4. *Si L est un treillis modulaire et si a et b sont deux éléments de L, alors l'application*

$$\phi_b : [a,a \vee b] \to [a \wedge b,b] : x \mapsto x \wedge b$$

est un isomorphisme. Son inverse est donné par l'application

$$\psi_a : [a \wedge b,b] \to [a,a \vee b] : y \mapsto y \vee a.$$



Preuve. Notons d'emblée que les applications ϕ_b et ψ_a sont isotones. Ainsi, si on montre que $\psi_a \circ \phi_b$ est l'application identité sur $[a,a \vee b]$, alors on pourra conclure à l'injectivité de ϕ_b (et à la surjectivité de ψ_a). De plus, on considérant la propriété duale, on pourra également conclure au fait que $\phi_b \circ \psi_a$ vaut également l'identité sur $[a \wedge b,b]$, d'où la surjectivité de ϕ_b (et l'injectivité de ψ_a). Or en appliquant la propriété de modularité, il vient successivement

$$\psi_a(\phi_b(x)) = \psi_a(x \wedge b) = a \vee (x \wedge b) = x \wedge (b \vee a) = x$$

pour tout x dans $[a,a \vee b]$. $\diamondsuit$

Proposition 1.5. *Soit L un treillis. Les proposition suivantes sont satisfaites*

(1) *Si L est distributif, alors il est modulaire.*
(2) *Si L est modulaire, alors il est semimodulaire et dualement semimodulaire.*
(3) *Si L est fini, semimodulaire et dualement semimodulaire, alors il est modulaire.*

Preuve. La proposition (1) est triviale. Démontrons le deuxième proposition. Considérons trois éléments a, b et c d'un treillis modulaire L tels que $a \prec b$. Si $a \vee c = b \vee c$, on conclut. Sinon, on ne peut avoir $b \leq (a \vee c)$. Dès lors, il vient $b \wedge (a \vee c) = a$ et en appliquant le lemme précédent à b et $a \vee c$, on obtient un isomorphisme entre les intervalles $[a,b]$ et $[a \vee c,b \vee c]$. Comme $a \vee c \neq b \vee c$ et que b couvre a, on déduit de l'existence de cet isomorphie que $b \vee c$ couvre $a \vee c$.

Quand à la troisième propriété, il s'agit d'un cas particulier du théorème 2 que nous allons démontrer dans la prochaine section. $\diamondsuit$

2. Longueur et treillis semimodulaires

Nous allons démontrer dans cette section une des propriétés les plus intéressantes des treillis semimodulaires: dans un treillis semimodulaire de longueur finie, toutes les chaînes maximales ont la même longueur. En corollaire de ce théorème, nous montrerons que pour un treillis de longueur finie, il est équivalent d'être modulaire ou simultanément semimodulaire et dualement semimodulaire.

Rappelons qu'on appelle *longueur* d'une chaîne finie C l'entier $|C|-1$. Par extension, on dit qu'un ensemble ordonné $\langle L;\leq\rangle$ est de *longueur* n (où $n\in\mathbb{N}$) s'il existe dans L une chaîne de longueur n et si toutes les chaînes de L sont de longueur plus petite que n. On dira ainsi qu'un ensemble ordonné $\langle L;\leq\rangle$ est de *longueur finie* s'il est de longueur n pour un certain naturel n. Notons que dans ce cas, cet ensemble est nécessairement borné

Théorème 2.1. ***(The Jordan-Hölder Chain Condition)*** *Si L est un treillis de longueur finie semimodulaire, alors les chaînes maximales de L ont même longueur.*

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur la longueur de L. Si la longueur de L vaut 0 ou 1, la propriété est triviale. Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour tous les treillis semimodulaires de longueur $< n$. Désignons alors par L un treillis semimodulaire de longueur n et par $C=\{a_0,\dots,a_n\}$ (où $a_0=0<a_1<\dots<a_{n-1}<a_n=1$) une chaîne maximale de longueur n. Soit $C'=\{b_0,\dots,b_m\}$ (où $b_0=0<b_1<\dots<b_{m-1}<b_m=1$) une autre chaîne maximale de L. Si $a_1=b_1$ alors, dans $[a_1)$, qui est un sous-treillis semimodulaire de L (puisque la relation de couverture est conservée dans $[a_1)$), la chaîne $C\setminus\{a_0\}$ est maximale et a une longueur $n-1$. Dès lors, la chaîne $C'\setminus\{b_1\}$, qui est également une chaîne maximale de $[a_1)$, doit avoir la longueur $n-1$ par hypothèse de récurrence. Dans ce cas, on a donc $m=n$.

Si au contraire $a_1\neq b_1$, alors on considère une chaîne maximale C'' du treillis $[a_1\vee b_1)$. Soit k la longueur de C''. Comme L est semimodulaire et que $a_0=b_0=0$, il vient $a_1\prec a_1\vee b_1$ et $b_1\prec a_1\vee b_1$. Dès lors, $C''\cup\{a_1\}$ est une chaîne maximale de longueur $k+1$ de $[a_1)$ et $C\setminus\{a_0\}$ est une chaîne de longueur $n-1$ de $[a_1)$. On déduit par hypothèse de récurrence que $k+1=n-1$. En appliquant le même raisonnement à $C''\cup\{b_1\}$ et à $C'\setminus\{b_0\}$, on obtient aussi que $k+1=m-1$. Ainsi, $m=n$. ◊

On peut également caractériser la semimodularité et la modularité en utilisant les fonctions hauteurs sur L.

Définition 2.2. Soit L un treillis de longueur finie. On définit une fonction *hauteur* h sur L: si $a\in L$ on définit $h(a)$ comme la longueur de la plus longue chaîne maximale de $(a]$.

Selon la proposition 2.1, si L est un treillis semimodulaire de longueur finie, $h(a)$ est égal à la longueur de n'importe quelle chaîne maximale de $(a]$.

Proposition 2.3. *Soit L un treillis de longueur finie. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(1) *L est semimodulaire;*
(2) *si a, b et c sont des éléments de L tels que $a\neq b$, $a\wedge b\prec a$ et $a\wedge b\prec b$, alors $a\prec a\vee b$ et $b\prec a\vee b$;*

(3) *si* $a \leq b$ *sont des éléments de* L *et si* C *est une chaîne maximale de* $[a, b]$*, alors* $\{x \vee c \mid x \in C\}$ *est une chaîne maximale de* $[a \vee c, b \vee c]$

(4) $h(a) + h(b) \geq h(a \wedge b) + h(a \vee b)$.

Preuve. Tout d'abord, il est trivial que les conditions (1) et (3) sont équivalentes.

Montrons maintenant que (1) est une conséquence de (2). Soient a et b deux éléments de L tels que b couvre a. Si $c \leq a$ ou si $a \vee c \geq b$, alors il est clair que $a \vee c \prec b \vee c$ ou $a \vee c = b \vee c$. Si au contraire $c \not\leq a$ et $a \vee c \not\geq b$, alors b n'est pas un élément de $[a, a \vee c]$. Considérons alors $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = a \vee c$ une chaîne maximale de l'intervalle $[a, a \vee c]$. On obtient ainsi que les éléments distincts b et a_1 couvrent a alors que $b \wedge a_1 = a$. Dès lors, on déduit de l'hypothèse (2) que $b \vee a_1$ couvre a_1. On procédant par induction, on montre que $b \vee a_i$ couvre a_i pour tout $i \leq n$. En particulier $b \vee a_n = b \vee (a \vee c) = b \vee c$ couvre $a_n = a \vee c$, ce qui suffit.

Prouvons ensuite que (3) implique (4). Puisque (3) est équivalent à la semimodularité, nous allons pouvoir appliquer le théorème 2.1. Soient a et b deux éléments de L et C une chaîne maximale de $[a \wedge b, b]$. Par le théorème 2.1, on sait que la longueur de C vaut $h(b) - h(a \wedge b)$. Par ailleurs, selon (3), l'ensemble $D = \{a \vee x \mid x \in C\}$ est une chaîne maximale de $[a, a \vee b]$. Or, par définition de D, la longueur de D est au plus égale à celle de C. Comme la longueur de D vaut $h(a \vee b) - h(a)$, il vient $h(b) - h(a \wedge b) \leq h(a \vee b) - h(a)$.

Pour démontrer que (4) admet (2) comme conséquence, on montre par récurrence sur $h(x)$ que (2) est vrai dans les intervalles du type $(x]$ pour tout x dans L. Si $h(x) = 0$, c'est-à-dire si $x = 0$, la propriété est triviale. Supposons maintenant que la propriété est satisfaite dans tous les intervalles $(y]$ tels que $h(y) < h(x)$, c'est-à-dire pour tous les $y < x$, et démontrons la pour $(x]$. Soient a et b deux éléments de $(x]$ tels que $a \neq b$, $a \wedge b \prec a$ et $a \wedge b \prec b$. Puisque $a < x$, on sait par hypothèse de récurrence que la proposition (2) est satisfaite dans le treillis $(a]$ et donc, puisque (2) implique (1), que $(a]$ est semimodulaire. Ainsi, puisque a couvre $a \wedge b$, on obtient en appliquant le théorème 2.1, que $h(a) - h(a \wedge b) = 1$. Dès lors, selon l'hypothèse (4), il vient

$$h(a \vee b) \leq h(a) + h(b) - h(a \wedge b) = h(b) + 1,$$

ce qui suffit pour conclure que $b \prec a \vee b$. On procède de même pour montrer que $a \prec a \vee b$ $\diamondsuit$

Corollaire 2.4. *Si* L *est un treillis de longueur finie, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *le treillis* L *est modulaire;*

(2) *le treillis* L *est semimodulaire et dualement semimodulaire;*

(3) *pour tous* a *et* b *dans* L*, il vient* $h(a) + h(b) = h(a \wedge b) + h(a \vee b)$.

Preuve. On sait déjà que la première condition implique la deuxième. Montrons que la troisième est une conséquence de la deuxième. Comme L est semimodulaire, on obtient par le théorème 2.3 que si a et b sont deux éléments de L on a

$$h(a) + h(b) \geq h(a \wedge b) + h(a \vee b).$$

Par ailleurs, comme L est dualement semimodulaire, c'est-à-dire que le dual de L est semimodulaire, en appliquant cette même proposition au dual de L, on obtient

$$h(a) + h(b) \leq h(a \wedge b) + h(a \vee b),$$

(on note que dans le dual de L, la hauteur d'un élément x est égal à la longueur de L moins la hauteur de x dans L).

Enfin, supposons que la condition (3) soit satisfaite et montrons que l'on peut obtenir (1). En effet, si L n'est pas modulaire, il contient un pentagone $\{u,a,b,c,v\}$. On a donc

$$h(i) = h(a \vee c) = h(a) + h(c) - h(a \wedge c) = h(a) + h(c) - h(0)$$

et

$$h(i) = h(b \vee c) = h(b) + h(c) - h(b \wedge c) = h(b) + h(c) - h(0),$$

donc $h(a) = h(b)$, ce qui est clairement absurde. $\diamondsuit$

CHAPITRE 3

Treillis des quotients dans $\mathcal{X}_n$

Posséder une dualité topologique pour une classe d'algèbres est souvent un avantage non négligeable pour l'étude de cette classe. Les grands exemples historiques de dualités topologiques (la dualité de STONE pour les algèbres de BOOLE (cf. [**30**]), la dualité de PRIESTLEY pour les treillis distributifs bornés (cf. [**27**] et [**28**]), la dualité de PONTRYAGIN pour les groupes abéliens (cf. [**25**] et [**26**])) ont permis des avancées considérables dans la connaissance des classes d'algèbres étudiées: étude des objets libres, du treillis des quotients, des coproduits, des classes d'isomorphie etc.

Cependant, ces dualités ne constituent pas la panacée aux problèmes de l'algébriste. Il y a évidemment des questions qui sont aussi difficiles à étudier d'un point de vue topologique qu'algébrique.

L'étude du treillis des sous-algèbres fait partie de cette classe de problèmes qu'une dualité topologique ne permet pas *systématiquement* de simplifier. Ainsi, l'histoire a démontré que seules quelques dualités parmi celles développées ont permis de dualiser *heureusement* l'étude des propriétés du treillis des sous-algèbres. Ce fut le cas par exemple pour les algèbres de HEYTING ou pour les R-sous-treillis d'un treillis distributif borné (cf. [**15**] et [**33**] respectivement).

Comme nous allons essayer de nous en convaincre, le cas de la dualité pour la classe $\mathbb{HSP}(\underset{\sim}{\text{Ł}}_n)$ (n désigne un naturel non nul pour le reste du chapitre) est un nouvel exemple de dualité permettant l'étude du treillis des sous-algèbres. En effet, nous parviendrons, grâce à la dualité, à prouver que le treillis des sous-algèbres d'une $\mathcal{MV}_n$-algèbre est dualement atomique, nous déterminerons les conditions sous-lesquelles une $\mathcal{MV}_n$-algèbre finie possède un treillis de sous-algèbres dans lequel tout élément est intersection d'éléments maximaux et nous étudierons avec succès la semi-modularité, la modularité et la distributivité de ces treillis.

1. Structures quotients dans $\mathcal{X}_n$

1.1. Quotients dans $\mathcal{X}_n$. Dans cette section, nous allons définir l'ensemble des *quotients* d'une structure de $\mathcal{X}_n = \mathbb{IS}_c\mathbb{P}(\underset{\sim}{\text{Ł}}_n)$ et y greffer une structure de treillis. C'est ainsi que, tout au long de ce chapitre, nous réserverons les notations $\underset{\sim}{X}$ et $\underset{\sim}{Y}$ pour désigner des structures de $\mathcal{X}_n$.

À cause de la nature relationnelle de $\underset{\sim}{\text{Ł}}_n$, nous ne pouvons pas, étant donné un morphisme surjectif $\pi : \underset{\sim}{X} \to \underset{\sim}{Y}$, reconstruire la structure $\underset{\sim}{Y}$ uniquement sur base de la connaissance du noyau de π et de $\underset{\sim}{X}$. En effet, la condition de continuité imposée aux morphismes de $\mathcal{X}_n$ assure que l'espace Y sous-jacent à $\underset{\sim}{Y}$ est isomorphe à $X/\ker(\pi)$ (par définition de la topologie quotient). Malheureusement – contrairement au cas des algèbres ou des structures topologiques purement fonctionnelles – le fait que le morphisme π transporte les relations $r_m^{\underset{\sim}{X}}$ dans $r_m^{\underset{\sim}{Y}}$ (m parcourant les diviseurs de n) n'est pas une condition assez forte pour en déduire la structure sur $\underset{\sim}{Y}$. Ainsi, il est possible de définir plusieurs structures sur Y faisant de π un $\mathcal{X}_n$-morphisme.

Ces réflexions nous amènent à la définition suivante.

Définition 1.1. Une *structure quotient* (ou simplement un *quotient*) d'une structure $\underset{\sim}{X}$ de $\mathcal{X}_n$ est la donnée d'une équivalence de BOOLE R sur X et d'un ensemble $\Gamma^{X/R} = \{r_m \mid m \in \mathrm{div}(n)\}$ de sous ensembles de X/R tels que

- la structure $\langle X/R;\, \Gamma^{X/R};\, \tau\rangle$, où τ désigne la topologie quotient, est un élément de $\mathcal{X}_n$;
- l'application de passage au quotient $\pi : \underset{\sim}{X} \to \langle X/R;\, \Gamma^{X/R};\, \tau\rangle$ est $\mathcal{X}_n$-morphisme.

Ce quotient sera noté $\langle X/R,\Gamma^{X/R}\rangle$ (ou souvent $\langle X/R,\Gamma\rangle$ lorsqu'aucune confusion ne sera possible) et nous réserverons la notion $\mathrm{Quot}(\underset{\sim}{X})$ pour désigner l'ensemble des quotients de $\underset{\sim}{X}$.

Nous avons donc remédié à la « faiblesse » de la notion de $\mathcal{X}_n$-morphisme en définissant les quotients par la donnée d'un quotient topologique *et* d'une structure sur ce quotient topologique.

Dans la suite, nous assimilerons souvent le quotient $\langle X/R,\Gamma\rangle$ avec la structure de $\mathcal{X}_n$ définie par Γ sur X/R (c'est-à-dire $\langle X/R;\, \Gamma, \tau\rangle$), le contexte permettant d'éliminer toute confusion.

EXEMPLE 1.2. Illustrons dès à présent cette définition par un exemple bâti sur une structure $\underset{\sim}{X}$ finie. Fixons $n = 6$ et considérons la structure $\underset{\sim}{X} = \{x,y\}$ où $x \in s_2^{\underset{\sim}{X}}$ et $y \in s_6^{\underset{\sim}{X}}$.

Pour représenter les quotients de *cette* structure, nous adoptons les conventions suivantes :

- nous représentons tout quotient $\langle X,\Gamma\rangle$ de $\underset{\sim}{X}$ construit sur $\{x,y\}$ par un couple d'entiers (m_x,m_y) où $x \in s_{m_x}^{\langle X,\Gamma\rangle}$ et $y \in s_{m_y}^{\langle X,\Gamma\rangle}$;
- les structures quotients $\langle X/R,\Gamma\rangle$ de $\underset{\sim}{X}$ où $R = \{X\}$ sont quant à elles représentées par un entier (m_X) défini par $X \in s_{m_X}^{\langle X/R,\Gamma\rangle}$.

Cela étant, l'ensemble $\mathrm{Quot}(\underset{\sim}{X})$ contient dix éléments:

$$\mathrm{Quot}(\underset{\sim}{X}) = \{(2,6),(2,3),(2,2),(2,1),(1,6),(1,3),(1,2),(1,1),(2),(1)\}.$$

Nous exploiterons à nouveau cette structure $\underset{\sim}{X}$ pour illustrer nos futurs développements.

À la lecture de l'exemple précédent, bien qu'un peu simpliste, nous pouvons déjà nous demander s'il est possible d'obtenir une formule permettant d'exprimer le cardinal de $\mathrm{Quot}(\underset{\sim}{X})$ à partir de grandeurs liées à $\underset{\sim}{X}$ lorsque cette structure est finie. Cette question de combinatoire est plus compliquée qu'il n'y paraît. En effet, il est vrai qu'on trouve dans la littérature une formule permettant de compter le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble fini. Il est également aisé, étant donné une équivalence R sur l'espace sous-jacent à la structure finie $\underset{\sim}{X}$, de compter le nombre de quotients de $\underset{\sim}{X}$ construits sur X/R. Malheureusement, le travail de combiner les deux informations dans une formule exploitable est d'une toute autre nature, et ne nous paraît pas trivial. La question de l'obtention de cette formule reste d'ailleurs ouverte.

1.2. Treillis sur $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$**.** Sans structure, l'ensemble $\mathrm{Quot}(\underset{\sim}{X})$ est un peu pauvre. Nous allons donc lui greffer la structure de treillis dont l'ordre sous-jacent est défini de la manière suivante.

Définition 1.3. Étant donné deux quotients $\langle X/R,\Gamma\rangle$ et $\langle X/S,\Delta\rangle$ de $\mathcal{X}_n$, nous écrirons $\langle X/R,\Gamma\rangle \leq \langle X/S,\Delta\rangle$ si

- $R \leq S$;
- la factorisation $\widetilde{\pi}_S$ de π_S à travers X/R est un $\mathcal{X}_n$-morphisme de $\langle X/R,\Gamma\rangle$ dans $\langle X/S,\Delta\rangle$.

Il est immédiat de vérifier que $\leq$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathrm{Quot}(\underset{\sim}{X})$. La proposition suivante affirme qu'elle définit en fait une structure de treillis et en décrit les opérations.

Proposition 1.4. *La relation $\leq$ définit sur* $\mathrm{Quot}(\underset{\sim}{X})$ *une structure de treillis. De plus, si $\langle X/R,\Gamma\rangle$ et $\langle X/S,\Delta\rangle$ sont deux quotients de $\underset{\sim}{X}$ alors*

- $\langle X/R,\Gamma\rangle \wedge \langle X/S,\Delta\rangle = \langle X/(R \wedge S),\Lambda\rangle$*, où*
$$\Lambda = \{\widetilde{\pi}_R^{-1}(r_m^{\langle X/R,\Gamma\rangle}) \cap \widetilde{\pi}_S^{-1}(r_m^{\langle X/S,\Delta\rangle}) \mid m \in \mathrm{div}(n)\},$$
$\widetilde{\pi}_R^{-1}$ *(resp. $\widetilde{\pi}_S^{-1}$) désignant la factorisation de π_R (resp. π_S) à travers $X/(R \wedge S)$;*
- $\langle X/R,\Gamma\rangle \vee \langle X/S,\Delta\rangle = \langle X/(R \vee S),\Upsilon\rangle$ *où $x \in r_m^{\langle X/(R\vee S),\Upsilon\rangle}$ si et seulement si m est divisible par*
$$\mathrm{pgcd}(\{l \in \mathrm{div}(n) \mid \widetilde{\pi}_{R\vee S,R}^{-1}(x) \cap r_l^{\langle X/R,\Gamma\rangle} \neq \emptyset \textit{ ou } \widetilde{\pi}_{R\vee S,S}^{-1}(x) \cap r_l^{\langle X/S,\Delta\rangle} \neq \emptyset\}),$$
où $\widetilde{\pi}_{R\vee S,R}$ (resp. $\widetilde{\pi}_{R\vee S,S}$) désigne la factorisation de $\pi_{R\vee S}$ à travers X/R (resp. à travers X/S).

Preuve. Montrons tout d'abord que $\langle X/(R \wedge S),\Lambda\rangle$ est bien un quotient de $\underset{\sim}{X}$. Les applications $\widetilde{\pi}_R$ et $\widetilde{\pi}_S$ étant continues, il est manifeste que Λ est constitué de sous-espaces fermés. Par ailleurs, la condition (X3) est ici trivialement satisfaite. On vérifie alors directement que notre construction nous assure que $\widetilde{\pi}_R$ et $\widetilde{\pi}_S$ sont des morphismes.

D'autre part, si $\langle X/T,\Sigma\rangle$ désigne un quotient de $\underset{\sim}{X}$ qui est plus petit à la fois que $\langle X/R,\Gamma\rangle$ et que $\langle X/S,\Delta\rangle$, alors T est nécessairement plus petit que $R \wedge S$. Il reste à vérifier que Λ définit la plus grande structure sur $X/(R \wedge S)$ qui fasse de $\widetilde{\pi}_R$ et $\widetilde{\pi}_S$ des morphismes, ce qui est évident.

Passons à la preuve de l'existence et de la description du *supremum.* On déduit de la définition de $\langle X/(R \vee S),\Upsilon\rangle$ que

$$r_m^{\langle X/(R\vee S),\Upsilon\rangle} = \bigcup_{1\leq r\leq|\mathrm{div}(n)|} \ \bigcup_{\substack{(m_1,\ldots,m_r)\in\mathrm{div}(n)^r \\ \mathrm{pgcd}(m_1,\ldots,m_r)\in\mathrm{div}(m)}} I_{(m_1,\ldots,m_r)}, \tag{1}$$

où $I_{(m_1,\ldots,m_r)}$ est défini par

$$\bigcup_{1\leq i\leq r} \widetilde{\pi}_{R\vee S,\,R}(r_{m_1}^{\langle X/R,\Gamma\rangle}) \cap \ldots \cap \widetilde{\pi}_{R\vee S,\,R}(r_{m_i}^{\langle X/R,\Gamma\rangle}) \cap \widetilde{\pi}_{R\vee S,\,S}(r_{m_{i+1}}^{\langle X/S,\Delta\rangle}) \cap \ldots \cap \widetilde{\pi}_{R\vee S,\,S}(r_{m_r}^{\langle X/S,\Delta\rangle}).$$

En effet, si m est un multiple de

$$\mathrm{pgcd}(\{l \in \mathrm{div}(n) \mid \widetilde{\pi}_{R\vee S,R}^{-1}(x) \cap r_l^{\langle X/R,\Gamma\rangle} \neq \emptyset \text{ ou } \widetilde{\pi}_{R\vee S,S}^{-1}(x) \cap r_l^{\langle X/S,\Delta\rangle} \neq \emptyset\}),$$

si

$$\{m_1,\ldots,m_i\} = \{l \in \mathrm{div}(n) \mid \widetilde{\pi}^{-1}_{R\vee S,\,R}(x) \cap r_l^{\langle X/R,\Gamma\rangle} \neq \emptyset\}$$

et si

$$\{m_{i+1},\ldots,m_r\} = \{l \in \mathrm{div}(n) \mid \widetilde{\pi}^{-1}_{R\vee S,\,S}(x) \cap r_l^{\langle X/S,\Delta\rangle} \neq \emptyset\},$$

alors x est un élément de

$$\widetilde{\pi}_{R\vee S,\,R}(r_{m_1}^{\langle X/R,\Gamma\rangle}) \cap \cdots \cap \widetilde{\pi}_{R\vee S,\,R}(r_{m_i}^{\langle X/R,\Gamma\rangle}) \cap \widetilde{\pi}_{R\vee S,\,S}(r_{m_{i+1}}^{\langle X/S,\Delta\rangle}) \cap \cdots \cap \widetilde{\pi}_{R\vee S,\,S}(r_{m_r}^{\langle X/S,\Delta\rangle}).$$

Inversement, si $(m_1,\ldots,m_r)$ est un r-uplet de diviseurs de n vérifiant

$$\mathrm{pgcd}(m_1,\ldots,m_r) \in \mathrm{div}(m)$$

et si x est un élément de

$$\widetilde{\pi}_{R\vee S,\,R}(r_{m_1}^{\langle X/R,\Gamma\rangle}) \cap \cdots \cap \widetilde{\pi}_{R\vee S,\,R}(r_{m_i}^{\langle X/R,\Gamma\rangle}) \cap \widetilde{\pi}_{R\vee S,\,S}(r_{m_{i+1}}^{\langle X/S,\Delta\rangle}) \cap \cdots \cap \widetilde{\pi}_{R\vee S,\,S}(r_{m_r}^{\langle X/S,\Delta\rangle}),$$

alors

$$\{m_1,\ldots,m_r\} \subseteq \{l \in \mathrm{div}(n) \mid \widetilde{\pi}^{-1}_{R\vee S,R}(x) \cap r_l^{\langle X/R,\Gamma\rangle} \neq \emptyset \text{ ou } \widetilde{\pi}^{-1}_{R\vee S,S}(x) \cap r_l^{\langle X/S,\Delta\rangle} \neq \emptyset\}.$$

Dès lors,

$$\mathrm{pgcd}(\{l \in \mathrm{div}(n) \mid \widetilde{\pi}^{-1}_{R\vee S,R}(x) \cap r_l^{\langle X/R,\Gamma\rangle} \neq \emptyset \text{ ou } \widetilde{\pi}^{-1}_{R\vee S,S}(x) \cap r_l^{\langle X/S,\Delta\rangle} \neq \emptyset\})$$

est un diviseur du $\mathrm{pgcd}(m_1,\ldots,m_r)$ qui divise m.

De l'égalité (1), on déduit que les sous-espaces $r_m^{\langle X/(R\vee S),\Upsilon\rangle}$ de $X/(R \vee S)$ sont fermés. En effet, les $r_m^{\langle X/R,\Gamma\rangle}$ et $r_m^{\langle X/S,\Delta\rangle}$ sont des sous-espaces fermés d'espaces compacts, et sont donc eux-mêmes des compacts. Il s'ensuit que $\widetilde{\pi}_{R\vee S,\,R}(r_m^{\langle X/R,\Gamma\rangle})$ et $\widetilde{\pi}_{R\vee S,\,S}(r_m^{\langle X/S,\Delta\rangle})$ sont des fermés en tant que sous-espaces compacts (puisqu'images continues de compacts) d'un espace séparé.

Par ailleurs, la structure $\langle X/(R \vee S),\Upsilon\rangle$ proposée vérifie la condition (X3) de l'axiomatisation des structures de $\mathcal{X}_n$. En effet, si x est un élément de $X/(R \vee S)$ et si on désigne par m_x l'entier

$$\mathrm{pgcd}(\{l \in \mathrm{div}(n) \mid \widetilde{\pi}^{-1}_{R\vee S,R}(x) \cap r_l^{\langle X/R,\Gamma\rangle} \neq \emptyset \text{ ou } \widetilde{\pi}^{-1}_{R\vee S,S}(x) \cap r_l^{\langle X/S,\Delta\rangle} \neq \emptyset\}),$$

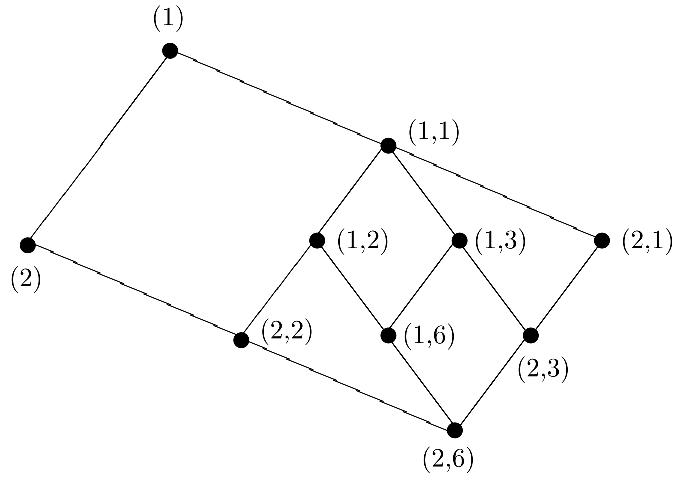
il vient successivement

$$\begin{aligned} x \in r_m^{\langle X/(R\vee S),\Upsilon\rangle} \cap r_{m'}^{\langle X/(R\vee S),\Upsilon\rangle} \quad &\Leftrightarrow \quad m_x \in \mathrm{div}(m) \text{ et } m_x \in \mathrm{div}(m') \\ &\Leftrightarrow \quad m_x \in \mathrm{div}(\mathrm{pgcd}(m,m')) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in r_{\mathrm{pgcd}(m,m')}^{\langle X/(R\vee S),\Upsilon\rangle}. \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que $\langle X/(R \vee S),\Upsilon\rangle$ est le *supremum* des structures $\langle X/R,\Gamma\rangle$ et $\langle X/S,\Delta\rangle$, ce qui est évident. ♢

Dans la suite, nous désignerons par $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ le treillis des quotients de $\underset{\sim}{X}$ dont les opérations $\vee$ et $\wedge$ sont définies dans la propositon 1.4.

Exemple 1.5. Appliquons la proposition 1.4 en représentant le treillis des quotients de la structure définie dans l'exemple 1.2. On obtient alors le treillis $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ qui se représente par



1.3. Liens entre $\mathsf{Quot}(\mathsf{D}_n(\underline{A}))$ et $\mathsf{Sub}(\underline{A})$. Dans ce qui suit, nous noterons $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ le treillis des sous-algèbres de l'algèbre $\underline{A}$ de $\mathcal{A}$. Pour rappel, l'*infmum* de deux sous-algèbres de $\underline{A}$ est leur intersection et leur *supremum* est la sous-algèbre de $\underline{A}$ engendrée par l'union de leurs éléments.

L'intérêt de l'étude du treillis des quotients d'une structure de $\mathcal{X}_n$ apparaît lorsqu'on constate qu'il partage ses propriétés avec le treillis des sous-algèbres de son algèbre duale.

Proposition 1.6. *Si $\underline{A}$ est une algèbre de $\mathcal{A}$, alors le treillis $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ est anti-isomorphe au treillis $\mathsf{Quot}(\mathsf{D}_n(\underline{A}))$.*

Preuve. Cela résulte du fait que les foncteurs D_n et E_n font correspondre les morphismes surjectifs aux plongements et inversement.

Cela étant, définissons l'application ϕ par

$$\phi : \mathsf{Sub}(\underline{A}) \to \mathsf{Quot}(\mathsf{D}_n(\underline{A})) : \underline{B} \mapsto \langle \mathsf{D}_n(\underline{A})/\ker(\mathsf{D}_n(i_{\underline{B},\underline{A}})),\Gamma_{\underline{B}}\rangle,$$

si $i_{\underline{B},\underline{A}} : \underline{B} \hookrightarrow \underline{A}$ est le plongement canonique et si

$$\Gamma_{\underline{B}} = \{\widetilde{\mathsf{D}_n(i_{\underline{B},\underline{A}})}^{-1}(r_m^{\mathsf{D}(\mathsf{B})}) \mid m \in \mathrm{div}(n)\},$$

où $\widetilde{\mathsf{D}_n(i_{\underline{B},\underline{A}})}$ est la factorisation de $\mathsf{D}_n(i_{\underline{B},\underline{A}})$ à travers $\mathsf{D}_n(\underline{A})/\ker(i_{\underline{B},\underline{A}})$.

Cette application ϕ est clairement bijective. Montrons qu'elle est antitone. Si $\underline{B}$ est une sous-algèbre de $\underline{A}$ et si $\underline{C}$ est une sous-algèbre de $\underline{B}$ alors le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D}_n(\underline{A}) \arrow[rr, two heads, "\mathsf{D}_n(i_{\underline{B},\underline{A}})"] \arrow[d, "\pi_{\ker(i_{\underline{B},\underline{A}})}"'] \arrow[drr, "\pi_{\ker(i_{\underline{C},\underline{A}})}"] & & \mathsf{D}_n(\underline{B}) \arrow[r, two heads, "\mathsf{D}_n(i_{\underline{C},\underline{B}})"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}_{\ker(i_{\underline{C},\underline{A}})}"] & \mathsf{D}_n(\underline{C}) \\
\langle \mathsf{D}_n(\underline{A})/\ker(\mathsf{D}_n(i_{\underline{B},\underline{A}})),\Gamma_B\rangle \arrow[urr, "\cong"'] & & \langle \mathsf{D}_n(\underline{A})/\ker(\mathsf{D}_n(i_{\underline{C},\underline{A}})),\Gamma_{\underline{C}}\rangle \arrow[ur, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

ce qui prouve que $\phi(\underline{B}) \leq \phi(\underline{C})$.

Inversement, si α est un $\mathcal{X}_n$-morphisme surjectif entre $\langle X/R,\Gamma\rangle$ et $\langle X/S,\Delta\rangle$, alors $\mathsf{E}_n(\alpha)$ est (à isomorphisme près) un plongement de $\phi^{-1}(\langle X/S,\Delta\rangle)$ dans $\phi^{-1}(\langle X/R,\Gamma\rangle)$, ce qui montre que ϕ^{-1} est antitone. $\diamondsuit$

Ainsi, la proposition précédente nous donne un outil adapté dans l'étude du treillis $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ des sous-algèbres des éléments $\underline{A}$ de $\mathcal{A}$. En effet, l'étude de ce treillis est équivalente à celle de $\mathsf{Quot}(\mathsf{D}_n(\underline{A}))$. Or, la description des « relations » entre les éléments de ce treillis est parfois plus aisée que celles entre les sous-algèbres de $\underline{A}$. Nous pouvons donc déterminer plus facilement les propriétés de *structure* du treillis $\mathsf{Quot}(\mathsf{D}_n(\underline{A}))$. Ces propriétés se transportent alors au treillis $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ par dualité.

Les propriétés particulières des *éléments* de $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ sont quant à elles beaucoup moins accessibles par cette technique. En effet, il nous faudrait pour cela obtenir une description plus précise du dual des éléments de $\mathcal{X}_n$, ce qui n'est pas toujours trivial. Nous aurons plusieurs fois l'occasion d'illustrer cette dichotomie dans la suite.

EXEMPLE 1.7. L'algèbre duale de la structure $\underset{\sim}{X}$ définie dans l'exemple 1.2 est $\underline{A} = Ł_2 \times Ł_6$. Son treillis de sous-algèbres se représente par le treillis anti-isomorphe à celui représenté dans l'exemple 1.5.

2. À la recherche d'éléments maximaux dans $\mathsf{Sub}(\underline{A})$

Le premier problème auquel nous pouvons nous attaquer avec succès consiste à déterminer s'il est possible de trouver au dessus de chaque élément de $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ un élément maximal. Dualement, cela revient à déterminer si le treillis $\mathsf{Quot}(\mathsf{D}_n(\underline{A}))$ est atomique.

Pour répondre à cette question, nous allons d'abord obtenir le description des éléments minimaux dans $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$.

2.1. Quotient *minimum* de $\underset{\sim}{X}$ pour une équivalence de BOOLE donnée. Étant donnée une équivalence de BOOLE R définie sur l'espace sous-jacent à $\underset{\sim}{X}$, nous allons montrer que l'ensemble des quotients de $\underset{\sim}{X}$ qui sont construits sur X/R est un sous-treillis de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ qui admet un *minimum*.

Proposition 2.1. *Si R est une équivalence de* BOOLE *sur X, alors l'ensemble des quotients de $\underset{\sim}{X}$ qui sont construits sur X/R est un sous treillis de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ dont le* minimum *est la structure $\langle X/R, \Gamma^{X/R}_{\mathsf{Min}}\rangle$ définie par*

$$\Gamma^{X/R}_{\mathsf{Min}} = \{ \bigcup_{1 \le r \le |\mathrm{div}(n)|} \bigcup_{\substack{\{m_1,\dots,m_r\} \subseteq \mathrm{div}(n) \\ \mathrm{pgcd}(m_1,\dots,m_r) \in \mathrm{div}(m)}} \pi_R(r^{\underset{\sim}{X}}_{m_1}) \cap \dots \cap \pi_R(r^{\underset{\sim}{X}}_{m_r}) \mid m \in \mathrm{div}(n)\}.$$

Preuve. Le fait que l'ensemble des quotients de $\underset{\sim}{X}$ qui sont construits sur X/R soit un sous-treillis de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ est trivial.

Cela étant, si la structure $\langle X/R, \Gamma^{X/R}_{\mathsf{Min}}\rangle$ est effectivement un quotient de $\underset{\sim}{X}$, il ne fait aucun doute qu'elle soit le *minimum* des quotients de $\underset{\sim}{X}$ dont l'espace sous-jacent est X/R.

Or, il est clair que $\Gamma^{X/R}_{\mathsf{Min}}$ est constitué de fermés de X/R. Par ailleurs la condition (X3) de l'axiomatisation des éléments de $\mathcal{X}_n$ est satisfaite: si m et m' sont des diviseurs de n, alors

$$r^{\langle X/R, \Gamma^{X/R}_{\mathsf{Min}}\rangle}_{\mathrm{pgcd}(m,m')} \subseteq r^{\langle X/R, \Gamma^{X/R}_{\mathsf{Min}}\rangle}_{m} \cap r^{\langle X/R, \Gamma^{X/R}_{\mathsf{Min}}\rangle}_{m'}.$$

Inversement, si $m_1, \dots, m_r$ et $m_{r+1}, \dots, m_s$ sont des diviseurs de n tels que $\mathrm{pgcd}(m_1, \dots, m_r) = m$ et $\mathrm{pgcd}(m_{r+1}, \dots, m_s) = m'$ alors $\mathrm{pgcd}(m_1, \dots, m_s) = \mathrm{pgcd}(m, m')$, ce qui prouve que

$$r^{\langle X/R, \Gamma^{X/R}_{\mathsf{Min}}\rangle}_{m} \cap r^{\langle X/R, \Gamma^{X/R}_{\mathsf{Min}}\rangle}_{m'} \subseteq r^{\langle X/R, \Gamma^{X/R}_{\mathsf{Min}}\rangle}_{\mathrm{pgcd}(m,m')}.$$

$\diamondsuit$

Dans la plupart des cas, si aucune confusion n'est possible, nous n'hésiterons pas à noter par $\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle$ la structure $\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}^{X/R}\rangle$.

Dualement, la proposition précédente s'interprète comme ceci: pour toute sous-algèbre de BOOLE $\mathfrak{C}$ de l'ensemble des idempotents $\mathfrak{B}(\underline{A})$ de $\underline{A}$, l'ensemble des sous-algèbres de $\underline{A}$ qui possède $\mathfrak{C}$ comme ensemble d'idempotents est un sous-treillis de $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ (ce qui est évident) qui admet un *maximum* (*idem*) dont on a obtenu la description du dual.

Une question moins triviale consiste à déterminer pour quelles structures $\underset{\sim}{X}$ l'ensemble constitué des structures $\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle$ où R parcourt l'ensemble des équivalences de BOOLE sur X est un sous-treillis de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$.

2.2. Description des éléments minimaux dans $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$. Nous allons maintenant donner une description des éléments minimaux du treillis $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$.

2.2.1. *Structures construits sur un quotient propre de X.* La proposition 2.1 nous suggère de bons candidats comme éléments minimaux : les quotients $\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle$ où R est une équivalence minimale du treillis des équivalences de BOOLE sur X. Cependant, ces structures ne sont pas nécessairement minimales. Nous pourrions en effet imaginer construire un quotient de $\underset{\sim}{X}$ sur le même espace sous-jacent à $\underset{\sim}{X}$ et qui soit strictement compris entre $\underset{\sim}{X}$ et $\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle$. Ce cas est régi par le proposition suivante.

Proposition 2.2. *Si R est une equivalence de* BOOLE *sur X, alors*

(1) *la plus grande structure $\langle X,\nabla_R\rangle$ construite sur le même espace topologique que $\underset{\sim}{X}$ et qui fait de $\pi : \langle X,\nabla_R\rangle \to \langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle$ un $\mathcal{X}_n$-morphisme est définie par*

$$x \in r_m^{\langle X,\nabla_R\rangle} \quad si \quad \operatorname{pgcd}(\{l \in \operatorname{div}(n) \mid x^R \cap r_l^{\underset{\sim}{X}} \neq \emptyset\}) \in \operatorname{div}(m);$$

(2) *si en plus R est une équivalence de* BOOLE *minimale, alors le quotient $\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle$ est minimal dans $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ si et seulement si les ensembles $r_m^{\underset{\sim}{X}}$ sont R-saturés (*i.e. *$r_m^{\underset{\sim}{X}}$ est une union de R-classes d'équivalence pour tout $m \in \operatorname{div}(n)$).*

Preuve. La première partie de l'énoncé découle du fait que

$$r_m^{\langle X,\nabla_R\rangle} = \pi_R^{-1}(r_m^{\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle})$$

pour tout diviseur m de n. La seconde est une conséquence de la première: la condition de saturation des relations $r_m^{\underset{\sim}{X}}$ est équivalente à l'égalité des structures $\underset{\sim}{X}$ et $\langle X,\nabla_R\rangle$. ♢

Si on se rappelle que les équivalences de BOOLE minimales sur l'espace de BOOLE X sont les relations binaires R pour lesquelles il existe deux éléments $x \neq y$ de X tels que

$$R = \{\{z\} \mid z \in X \setminus \{x,y\}\} \cup \{\{x,y\}\},$$

la proposition 2.2 nous donne alors la forme des quotients minimaux de $\underset{\sim}{X}$ qui ont pour espace sous-jacent un quotient propre de X. On en déduit en effet que ces quotients sont obtenus en reliant deux points de $\underset{\sim}{X}$ qui se situent dans un même $s_m^{\underset{\sim}{X}}$, la structure sur le quotient étant alors définie naturellement.

2.2.2. *Structures construites sur X.* Nous allons maintenant envisager le cas des quotients minimaux de $\underset{\sim}{X}$ construits sur *le même* espace sous-jacent que $\underset{\sim}{X}$.

Proposition 2.3. *La structure $\langle X,\Gamma\rangle$ est minimale dans $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ si et seulement si il existe un diviseur m de n, un diviseur premier p de m et un élément x de $s_m^{\underset{\sim}{X}}$ tels que*

$$r_k^{\langle X,\Gamma\rangle} = \begin{cases} r_k^{\underset{\sim}{X}} & \text{si } \frac{m}{p} \notin \operatorname{div}(k), \\ r_k^{\underset{\sim}{X}} \cup \{x\} & \text{si } \frac{m}{p} \in \operatorname{div}(k), \end{cases}$$

pour tout $k \in \operatorname{div}(n)$.

Preuve. La preuve découle simplement du fait que $\{x\}$ est un fermé de X pour tout $x \in X$ puisque l'espace X est séparé. ♢

Ainsi, pour construire de telles structures, on « transporte » un élément x de $s_m^{\underset{\sim}{X}}$ dans $s_{m'}^{\langle X,\Gamma\rangle}$ où m' est un élément maximal dans le treillis des diviseurs de m.

On obtient l'atomicité du treillis $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ en conséquence des propositions 2.2 et 2.3.

Proposition 2.4. *Si $\underset{\sim}{X}$ est une structure de $\mathcal{X}_n$, alors le treillis $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ est atomique.*

Preuve. Si $\langle X,\Gamma\rangle$ est un quotient propre de $\underset{\sim}{X}$, alors la proposition 2.3 nous assure l'existence d'un atome entre $\underset{\sim}{X}$ et $\langle X,\Gamma\rangle$.

Si R est une équivalence de Boole non triviale sur X et si $\langle X/R,\Gamma\rangle$ est un quotient de $\underset{\sim}{X}$, alors il existe dans le treillis des équivalences de Boole sur X une relation minimale R' sous R. Si les relations $r_m^{\underset{\sim}{X}}$ sont R'-saturées pour tout $m \in \operatorname{div}(n)$, alors $\langle X/R',\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle$ est un atome de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ plus petit que $\langle X/R,\Gamma\rangle$. Si aucune des équivalences minimales sous R ne satisfait à cette condition de saturation, alors la proposition 2.3 nous fournit quand-même l'existence d'un atome sous $\langle X/R,\Gamma\rangle$. ♢

On peut se demander si toutes les configurations d'atomes sont envisageables. C'est-à-dire s'il est possible de trouver des structures $\underset{\sim}{X}$ dont le treillis des quotients possède à la fois des atomes construits sur X et des atomes construits sur des quotients propres de X; des structures possédant un type d'atomes mais pas l'autre, etc.

Exemple 2.5. Nous allons exhiber, pour chacune des configurations précitées, un exemple de structure $\underset{\sim}{X}$ satisfaisant à cette configuration.

- *Structures $\underset{\sim}{X}$ possédant des atomes construits sur des quotients propres* mais pas *d'atome construit sur X.* On constate que le treillis de l'exemple 1.5 en est un modèle.
- *Structures $\underset{\sim}{X}$ possédant des atomes construits sur X* mais pas *d'atome construit sur des quotients propres X.* La structure $\underset{\sim}{Y} = \{x,y\}$, où

  $$s_1^{\underset{\sim}{Y}} = \{x,y\},$$

  en est un exemple. En fait, les modèles de cette configuration d'atomes sont exactement les structures $\underset{\sim}{X}$ qui vérifient $s_1^{\underset{\sim}{X}} = X$ (c'est-à-dire les espaces de Boole).
- *Structures $\underset{\sim}{X}$ possédant des atomes construits sur X* et *des atomes construits sur des quotients propres X.* La structure $\underset{\sim}{Z} = \{x,y\}$, où

  $$s_2^{\underset{\sim}{Z}} = \{x,y\},$$

en est un exemple.

Une autre question qui se pose à ce stade de notre réflexion est de déterminer la classe des structures de $\mathcal{X}_n$ dans les quotients desquels tout élément est *supremum* d'atomes. Il s'agit évidemment d'une classe propre de $\mathcal{X}_n$, comme le prouve l'exemple 1.5 (l'élément (2) n'est pas *supremum* d'atomes).

Pour répondre à cette question, nous allons partir à la recherche d'un système de $\vee$-générateurs qui *contient* les atomes.

2.3. Système de $\vee$-générateurs dans le cas fini. Par *système de $\vee$-générateurs* de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$, nous entendons un sous-ensemble G de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ tel que

- tout élément de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ s'écrit comme un *supremum* d'un nombre fini d'éléments de G;
- l'ensemble G est minimal parmi les ensembles possédant cette propriété.

Nous allons, sous l'hypothèse que $\underset{\sim}{X}$ soit *fini*, construire un système de $\vee$-générateurs de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ qui contient les atomes de ce treillis.

Définition 2.6. Soient $\underset{\sim}{X}$ un membre fini de $\mathcal{X}_n$ et x un élément de $s_m^{\underset{\sim}{X}}$. Si p est un diviseur premier de m (nous noterons $\mathrm{P}(m)$ l'ensemble des diviseurs premiers de m) et si l est un naturel non nul tel que $p^l \in \mathrm{div}(m)$, alors on définit le quotient

$$\langle X, \Gamma_{(x,\, m/p^l)} \rangle$$

de $\underset{\sim}{X}$ par

$$s_k^{\langle X,\Gamma_{(x,\, m/p^l)}\rangle} = \begin{cases} s_k^{\underset{\sim}{X}} & \text{si } k \neq \frac{m}{p^l}, \\ s_k^{\underset{\sim}{X}} \cup \{x\} & \text{si } k = \frac{m}{p^l}, \end{cases}$$

pour tout $k \in \mathrm{div}(n)$.

Si on joint à l'ensemble des structures de la définition précédente les structures $\langle X/R, \Gamma_{\mathsf{Min}} \rangle$ où R parcourt l'ensemble $\mathfrak{B}_{\mathsf{Min}}(X)$ des équivalences de BOOLE minimales sur X, on obtient alors un système de $\vee$-générateurs.

Proposition 2.7. *L'ensemble*

$$G = \{\langle X/R, \Gamma_{\mathsf{Min}} \rangle \mid R \in \mathfrak{B}_{\mathsf{Min}}(X)\} \cup \bigcup_{m \in \mathrm{div}(n)} \bigcup_{x \in s_m^{\underset{\sim}{X}}} \{\langle X, \Gamma_{(x,\, m/p^l)} \rangle \mid p \in \mathrm{P}(m) \;\&\; p^l \in \mathrm{div}(m)\}$$

est un système de $\vee$-générateurs de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ qui en contient les atomes.

Preuve. Il est clair que G contient les atomes de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$. Montrons que G est une partie $\vee$-génératrice. En effet, si $\langle X/S, \Delta \rangle$ est un quotient de $\underset{\sim}{X}$, alors l'équivalence de BOOLE S est le *supremum* d'une partie Φ de $\mathfrak{B}_{\mathsf{Min}}(X)$.

Construisons alors la structure $\langle X, \Delta' \rangle$, où Δ' est défini par

$$r_m^{\langle X, \Delta' \rangle} = \pi_S^{-1}(r_m^{\langle X/S, \Delta \rangle}).$$

Il s'agit d'un quotient de $\underset{\sim}{X}$ qui est *supremum* d'une partie G' de G. Au total, il vient

$$\langle X/S, \Delta \rangle = \bigvee G' \vee \bigvee_{R \in \Phi} \langle X/R, \Gamma_{\mathsf{Min}} \rangle.$$

Il reste à montrer que G est minimal parmi les parties $\vee$-génératrices de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$. Il est clair que si R est une équivalence de BOOLE minimale sur X, alors $G \setminus \{\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle\}$ ne peut générer $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ puisque le sous-treillis $\vee$-engendré par $G \setminus \{\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle\}$ ne contient pas la structure $\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle$.

Par un raisonnement similaire, on déduit qu'on ne peut pas débarrasser G d'une structure du type $\langle X,\Gamma_{(x,\,m/p^l)}\rangle$ (où $m \in \mathrm{div}(n)$, $s \in s_m^{\underset{\sim}{X}}$, $p \in \mathrm{P}(m)$ et $p^l \in \mathrm{div}(m)$) tout en conservant une partie $\vee$-génératrice. $\diamondsuit$

On obtient très facilement par simple comptage le cardinal de la partie génératrice dont il est question dans la proposition précédente.

Corollaire 2.8. *Si $\underset{\sim}{X}$ est une structure finie de $\mathcal{X}_n$, alors $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ admet un système de $\vee$-générateurs qui possède*

$$\mathrm{C}^2_{|X|} + \sum_{m\in\mathrm{div}(n)} \sum_{p\in\mathrm{P}(m)} |\{l \in \mathbb{N}_0 \mid p^l \in \mathrm{div}(m)\}|.|s_m^{\underset{\sim}{X}}|$$

éléments. ■

Ainsi, une $\mathcal{X}_n$-structure finie $\underset{\sim}{X}$ admet un treillis des quotients $\vee$-généré par ses atomes si et seulement si la partie G dont il est question dans la proposition 2.7 coïncide avec l'ensemble des atomes de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$. La proposition suivante sert de critère pour caractériser l'ensemble de ces structures.

Proposition 2.9. *Une $\mathcal{X}_n$-structure finie $\underset{\sim}{X}$ admet un treillis des quotients $\vee$-généré par ses atomes si et seulement s' il existe un diviseur m de n dont la décomposition en nombres premiers ne fait apparaître que des facteurs distincts et qui vérifie*

$$s_m^{\underset{\sim}{X}} = X.$$

Preuve. Montrons que la condition est nécessaire. En effet, supposons qu'il existe deux naturels distincts m et m' et deux éléments x et y tels que $x \in s_m^{\underset{\sim}{X}}$ et $y \in s_{m'}^{\underset{\sim}{X}}$. Alors la structure $\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle$ où

$$R = \{\{u\} \mid u \in X \setminus \{x,y\}\} \cup \{\{x,y\}\}$$

est un élément de G qui n'est pas un atome selon la proposition 2.2.

Supposons maintenant qu'il existe un naturel m, un diviseur premier p de m tels que p^2 divise m et $s_m^{\underset{\sim}{X}} = X$. Alors, si x est un élément de $\underset{\sim}{X}$, la structure

$$\langle X,\Gamma_{(x,\,m/p^2)}\rangle$$

fait partie de G sans être un atome de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$.

Cela étant, on prouve directement que la condition est suffisante. $\diamondsuit$

Le raisonnement précédent peut s'étendre (partiellement) aux structures *non finies*. En effet, dans ce cas, toute partie $\vee$-génératrice minimale de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ qui contient les atomes doit nécessairement contenir G. Si cette partie coïncide avec l'ensemble des atomes, il en est de même pour G (*cf.* la démonstration de la proposition 2.7). Or, la démonstration de la nécessité de la proposition 2.9 reste valide dans le cas non fini. On peut donc affirmer que les $\mathcal{X}_n$-structures (non finies) qui admettent un treillis des quotients généré par les atomes se trouvent *parmi* les puissances booléennes des algèbres $Ł_m$ où m est un diviseur de n dont la décomposition en nombres premiers ne fait intervenir que des facteurs distincts. Malheureusement, la suffisance de cette condition fait intervenir des problèmes de nature topologique (qui ne sont pas une conséquence du caractère booléen de X, mais bien de la structure qui est greffée dessus). Ces problèmes topologiques disparaissent naturellement lorsque $m = 1$. La structure se réduit alors en effet à un espace de BOOLE.

Dualement, la proposition 2.9 prend la forme suivante.

Proposition 2.10. *Supposons que $\underline{A}$ soit une algèbre finie de $\mathcal{A}$. Toute sous-algèbre de $\underline{A}$ est intersection de sous-algèbres maximales de $\underline{A}$ si et seulement si $\underline{A}$ est isomorphe à une puissance finie de l'algèbre $\underline{Ł}_m$ où m est un diviseur de n dont la décomposition en nombre premiers ne fait apparaître que des facteurs distincts.* ■

EXEMPLE 2.11. Ainsi, on peut trouver dans l'algèbre $Ł_2 \times Ł_6$, dont le dual est la structure définie dans l'exemple 1.2, une sous-algèbre qui n'est pas intersection de sous-algèbres maximales (c'est la cas de l'algèbre duale de (2,1) par exemple).

D'autre part, toute sous-algèbre de $\underline{Ł}_{15}$ est intersection d'éléments maximaux. Son treillis de sous-algèbre est isomorphe au treillis des diviseurs de 15.

2.4. Éléments maximaux dans $\mathsf{Sub}(\underline{A})$. Les considérations de la section précédente se dualise en l'étude des éléments maximaux dans $\mathsf{Sub}(\underline{A})$.

Ainsi, à l'aide de la proposition 1.6, on obtient le dual de la proposition 2.4.

Proposition 2.12. *Si $\underline{A}$ est une algèbre de $\mathcal{A}$ alors il existe au dessus de toute sous-algèbre $\underline{B}$ de $\underline{A}$ une algèbre $\underline{C}$ maximale dans $\mathsf{Sub}(\underline{A})$.* ■

Les développements qui suivent illustrent parfaitement la dichotomie dont nous faisions écho dans la remarque précédant la section 2. En effet, nous avons pu obtenir le caractère dualement atomique de $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ (propriété de *structure* de $\mathsf{Sub}(\underline{A})$) grâce à l'étude du treillis $\mathsf{Quot}(\mathsf{D}_n(\underline{A}))$. Cependant, bien que nous ayons une méthode de construction effective des éléments minimaux de ce dernier, nous ne pourrons pas obtenir une telle construction pour les éléments maximaux de $\mathsf{Sub}(\underline{A})$. Tout au plus pouvons nous proposer les descriptions suivantes des éléments maximaux. Une de celles-ci demande une définition préliminaire.

Définition 2.13. Soient R une équivalence de BOOLE sur l' espace de BOOLE X et $(\underline{A}_x)_{x\in X}$ une famille d'algèbres (de même type). Un *R-produit booléen* des $\underline{A}_x$ $(x \in X)$ est une algèbre $\underline{A}$ (de même type que les $\underline{A}_x$) telle que

- l'algèbre $\underline{A}$ est produit sous-direct (par un plongement p) des $(A_x)_{x\in X}$;
- pour tous a et b dans $p(\underline{A})$, le sous-espace $[p(a) = p(b)] = \{x \in X \mid p(a)(x) = p(b)(x)\}$ est un fermé de X;
- pour tous a et b dans $p(\underline{A})$ et tout ouvert-fermé *R-saturé* de X, l'élément $p(a)|_\omega \cup p(b)|_{X\setminus\omega}$ appartient à $p(\underline{A})$.

Ainsi, on ne modifie que légèrement la troisième condition de la définition de produit booléen (souvent appelée *patchwork property* pour des raisons évidentes) pour obtenir le définition d'un R-produit booléen. Cette condition n'est en effet alors imposée qu'aux ouverts-fermés R-saturés.

Proposition 2.14. *Soit $\underline{B}$ une sous-algèbre de la $\mathcal{MV}_n$-algèbre $\underline{A}$ et i le plongement canonique de $\underline{B}$ dans $\underline{A}$. Alors, l'application*

$$e_{\underline{A}}|_{\underline{B}} : \underline{B} \hookrightarrow \prod_{u \in \mathsf{D}_n(\underline{A})} u(\underline{A})$$

est une représentation de $\underline{B}$ comme $\ker(\mathsf{D}_n(i))$-produit booléen des quotients simples de $\underline{A}$ si et seulement si les sous-espaces $r_m^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ sont $\ker(\mathsf{D}_n(i))$-saturés.

En particulier, la sous-algèbre $\underline{B}$ est maximale dans $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ et vérifie $\mathfrak{B}(\underline{B}) \neq \mathfrak{B}(\underline{A})$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

- *l'algèbre $\mathfrak{B}(\underline{B})$ est une sous-algèbre maximale de $\mathfrak{B}(\underline{A})$;*
- *l'application*
$$e_{\underline{A}}|_{\underline{B}} : \underline{B} \hookrightarrow \prod_{u \in \mathsf{D}_n(\underline{A})} u(\underline{A})$$
est une représentation de $\underline{B}$ comme $\ker(\mathsf{D}_n(i))$-produit booléen des quotients simples de $\underline{A}$.

Preuve. Montrons que la condition est nécessaire. Le fait que $\underline{B}$ soit produit sous-direct par $e_{\underline{A}}$ des $u(\underline{A})$ ($u \in \mathsf{D}_n(\underline{A})$) nous enseigne que $u(\underline{A}) = u(\underline{B})$ quel que soit u dans $\mathsf{D}_n(\underline{A})$. Donc, si $(u,v) \in \ker(\mathsf{D}_n(i))$, il vient $u(\underline{B}) = v(\underline{B})$, c'est-à-dire $u(\underline{A}) = v(\underline{A})$, ce qui suffit pour conclure que les $r_m^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ sont $\ker(\mathsf{D}_n(i))$-saturés.

Inversement, si les sous-espaces $r_m^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ sont $\ker(\mathsf{D}_i)$-saturés, alors il est clair que $e_{\underline{A}}|_{\underline{B}}$ est un plongement.

Par ailleurs, si u est un élément de $\mathsf{D}(\underline{A})$, on déduit la surjectivité de $p_u \circ e_{\underline{A}}|_{\underline{B}}$ du fait que $u^{\ker(\mathsf{D}_n(i))}(\underline{B}) = u(\underline{A})$ puisque la classe de u est dans les mêmes sous-espaces $r_m^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ que u.

Bien sûr, les égalisateurs $[e_{\underline{A}}(b) = e_{\underline{A}}(c)]$ sont des ouverts-fermés de $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ pour tous b et c dans $\underline{B}$ puisque $\underline{B}$ est une sous-algèbre de $\underline{A}$ et que $e_{\underline{A}}$ est une représentation booléenne de $\underline{A}$.

On vérifie pour conclure que la *patchwork property* est satisfaite pour les ouverts-fermés $\ker(\mathsf{D}(i))$-saturés de $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ et pour tous $e_{\underline{A}}(b)$ et $e_{\underline{A}}(c)$ dans $e_{\underline{A}}(\underline{B})$. On sait déjà que $\alpha = e_{\underline{A}}(b)|_\omega \cup e_{\underline{A}}(c)|_{\mathsf{D}_n(\underline{A})\setminus\omega}$ appartient à $e_{\underline{A}}(\underline{A})$. Pour prouver qu'il s'agit également d'un élément de $e_{\underline{A}}(\underline{B})$, il nous suffit de vérifier que $\alpha(u) = \alpha(v)$ pour tout $(u,v) \in \ker(\mathsf{D}_n(i))$. Or, puisque ω est $\ker \mathsf{D}_n(i)$-saturé, il vient

$$\alpha(u) = \alpha(v) = \begin{cases} u(b) & \text{si } u \in \omega \\ u(c) & \text{si } u \in \mathsf{D}_n(\underline{A}) \setminus \omega, \end{cases}$$

ce qui conclut donc la démonstration de la première partie.

La deuxième partie est une conséquence directe de la première et de la proposition 2.2 $\diamondsuit$

La proposition suivante tente de décrire les sous-algèbres maximales de $\underline{A}$ qui possèdent les mêmes idempotents que $\underline{A}$.

Proposition 2.15. *La sous-algèbre $\underline{B}$ de $\underline{A}$ est maximale dans $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ et possède les mêmes idempotents que $\underline{A}$ si et seulement s'il existe un u dans $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ tel que l'application*

$$e_{\underline{A}}|_{\underline{B}} : \underline{B} \hookrightarrow \prod_{u \in \mathsf{D}_n(\underline{A})} \underline{B}_u$$

où

- *$\underline{B}_v = v(\underline{A})$ pour tout $v \in \mathsf{D}_n(\underline{A})$ tel que $v \neq u$;*
- *$\underline{B}_u$ est une sous-algèbre maximale de $u(\underline{A})$;*

est une représentation booléenne de $\underline{B}$.

Preuve. Simple conséquence de la proposition 2.3. ♢

3. Éléments maximaux dans $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$

Décrire les éléments maximaux du treillis $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ lorsque $\underset{\sim}{X}$ est une $\mathcal{X}_n$-structure est une tâche plus facile que d'en décrire les atomes.

Nous allons pour cela adopter la notation suivante: nous désignerons par $\mathrm{pgcd}(\underset{\sim}{X})$ l'entier

$$\mathrm{pgcd}(\underset{\sim}{X}) = \mathrm{pgcd}(\{l \in \mathrm{div}(n) \mid r_l^{\underset{\sim}{X}} \neq \emptyset\})$$

pour toute $\mathcal{X}_n$-structure $\underset{\sim}{X}$. Si Y est un sous-espace fermé de X, on notera $\underset{\sim}{Y}$ la restriction de la structure de $\underset{\sim}{X}$ sur Y (le contexte permettant toujours de déterminer pour tout Y fermé dans X quelle est la structure considérée sur X et dont va hériter $\underset{\sim}{Y}$).

Proposition 3.1. *Un structure quotient $\langle X/R,\Gamma\rangle$ de $\underset{\sim}{X}$ est maximale dans $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ si et seulement si elle satisfait l'une des conditions suivantes:*

(1) *on a*
- *$R = \{X\}$,*
- $\mathrm{pgcd}(\underset{\sim}{X}) \neq 1$,
- *il existe un diviseur premier p de $\mathrm{pgcd}(\underset{\sim}{X})$ tel que*
$$s_p^{\langle X/R,\Gamma\rangle} = \{X\};$$

(2) *il existe un ouvert-fermé ω de X tel que $R = \{X, X \setminus \omega\}$ et tel que*
$$s_1^{\langle X/R,\Gamma\rangle} = X/R.$$

Preuve. On prouve aisément que les structures proposées sont maximales. Montrons dès lors que tout quotient maximal $\langle X/R,\Gamma\rangle$ de $\underset{\sim}{X}$ est d'une des deux formes proposées. En effet, si $R = \{X\}$, puisque $\langle X/R,\Gamma\rangle$ n'est pas *maximum*, il vient $X \in s_p^{\langle X/R,\Gamma\rangle}$ où p est un diviseur premier de n. Du fait que $\langle X/R,\Gamma\rangle$ est un quotient de $\underset{\sim}{X}$, on déduit que p doit être un diviseur de $\mathrm{pgcd}(\underset{\sim}{X})$.

Si au contraire, R est une équivalence propre, alors elle forme un atome du treillis des équivalence de BOOLE sur X. Sinon, il existerait un élément S de $\mathfrak{B}(X) \setminus \{\{X\}\}$ plus grand que R. La structure $\langle X/S,\Delta\rangle$ définie par

$$s_1^{\langle X/S,\Delta\rangle} = X/S$$

serait alors un quotient plus grand que $\langle X/R,\Gamma\rangle$ mais non *maximum*, ce qui contredirait la maximalité de ce dernier quotient. Ainsi, il existe un ouvert-fermé ω de X tel que $R = \{X, X \setminus \omega\}$ et la conclusion s'ensuit aisément. ♢

L'exemple 1.5 nous indique que les deux types d'éléments maximaux peuvent coexister dans le treillis des quotients d'une $\mathcal{X}_n$-structure. Mieux, puisque le treillis des équivalences de BOOLE sur un espace de BOOLE est dualement atomique, il existera toujours dans $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ des éléments maximaux satisfaisant à la deuxième condition de la proposition 3.1. On obtient donc ainsi une démonstration topologique d'une propriété algébrique bien connue.

Proposition 3.2. *Si $\underset{\sim}{X}$ est une structure de $\mathcal{X}_n$, alors le treillis $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ est dualement atomique.*

Preuve. Soit $\langle X/R,\Gamma\rangle$ un quotient propre de $\underset{\sim}{X}$. Si $R = X$, cela implique que $\mathrm{pgcd}(\underset{\sim}{X}) \neq 1$, et on peut construire au dessus de $\langle X/R,\Gamma\rangle$ un élément maximal vérifiant la deuxième condition de la proposition 3.1.

Sinon, R est une équivalence de BOOLE propre sur X, et on déduit du caractère dualement atomique de $\mathfrak{B}(X)$ que l'on peut construire au dessus de $\langle X/R,\Gamma\rangle$ un élément maximal satisfaisant à la deuxième condition de la propositon 3.1. ♢

4. Semimodularité de $\mathsf{Sub}(\underline{A})$

Nous allons exploiter notre dualité pour étudier la semimodularité du treillis $\mathsf{Sub}(\underline{A})$. Ainsi, selon la propriété 1.6, le treillis $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ est semimodulaire si et seulement si $\mathsf{Quot}(\mathsf{D}_n(\underline{A}))$ est dualement semimodulaire.

Nous partons donc à la recherche des structures $\underset{\sim}{X}$ qui possèdent à un treillis des quotients dualement semimodulaire.

Le premier lemme permet de limiter la « taille » de ces structures (et est lié à la semimodularité du treillis des sous-algèbres pour les algèbres de BOOLE) et le second impose des contraintes sur leur « forme ».

Lemme 4.1. *Si $|\underset{\sim}{X}| \geq 4$ alors $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ n'est pas dualement semimodulaire.*

Preuve. Supposons que x, y, z et t soient quatre éléments distincts de $\underset{\sim}{X}$. Définissons les équivalences de BOOLE R et S par

$$R = \{u \mid u \in X \setminus \{x,y,z,t\}\} \cup \{\{x,y\},\{z,t\}\}$$

et

$$S = \{u \mid u \in X \setminus \{x,y,z,t\}\} \cup \{\{x,y,z,t\}\}.$$

On construit alors les quotients $\langle X/R,\Gamma\rangle$ et $\langle X/R,\Delta\rangle$ de $\underset{\sim}{X}$ en définissant Γ et Δ par

$$r_m^{\langle X/R,\Gamma\rangle} = \pi_R(r_m^{\underset{\sim}{X}}) \cup \{\pi_R(x),\pi_R(z)\} \quad \forall\, m \in \mathrm{div}(n),$$

et

$$r_m^{\langle X/S,\Delta\rangle} = \pi_S(r_m^{\underset{\sim}{X}}) \cup \{\pi_S(x)\} \quad \forall\, m \in \mathrm{div}(n).$$

Ainsi, la structure $\langle X/S,\Delta\rangle$ couvre $\langle X/R,\Gamma\rangle$. On définit enfin la relation T sur X par

$$T = \{u \mid u \in X \setminus \{x,y,z,t\}\} \cup \{\{x,z\},\{y,t\}\}$$

et la structure quotient $\langle X/T,\Upsilon\rangle$ par

$$r_m^{\langle X/T,\Upsilon\rangle} = \pi_T(r_m^{\underset{\sim}{X}}) \cup \{\pi_T(x),\pi_T(y)\} \quad \forall\ m \in \mathrm{div}(n).$$

Il est alors facile de montrer que $\langle X/S,\Delta\rangle \wedge \langle X/T,\Upsilon\rangle = \langle X/T,\Upsilon\rangle$ et que dès lors

$$\langle X/R,\Gamma\rangle \wedge \langle X/T,\Upsilon\rangle \not\preceq \langle X/S,\Delta\rangle \wedge \langle X/T,\Upsilon\rangle$$

ce qui prouve que $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ n'est pas dualement semimodulaire.

$\diamondsuit$

Lemme 4.2. *Si on peut trouver dans* $\underset{\sim}{X}$ *deux éléments* x *et* y *tels que* $x \in s_{m_x}^{\underset{\sim}{X}}$ *et* $y \in s_{m_y}^{\underset{\sim}{X}}$ *avec* $\mathrm{pgcd}(m_x,m_y) \neq 1$*, alors* $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ *n'est pas dualement semimodulaire.*

Preuve. Considérons la structure $\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle$ où R est l'équivalence de BOOLE définie sur X par

$$R = \{\{u\} \mid u \in X \setminus \{x,y\}\} \cup \{\{x,y\}\}.$$

Pour construire une structure $\langle X/R,\Delta\rangle$ couvrant $\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle$, considérons un facteur premier p de $m = \mathrm{pgcd}(m_x,m_y)$ et définissons Δ par

$$r_k^{\langle X/R,\Delta\rangle} = \begin{cases} r_k^{\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle} & \text{si } \frac{m}{p} \notin \mathrm{div}(k), \\ r_k^{\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle} \cup \{\pi_R(x)\} & \text{si } \frac{m}{p} \in \mathrm{div}(k). \end{cases}$$

Cela étant, on considère également la structure $\langle X,\Upsilon\rangle$ définie par

$$r_k^{\langle X,\Upsilon\rangle} = \begin{cases} r_k^{\langle \underset{\sim}{X}\rangle} & \text{if } \frac{m}{p} \notin \mathrm{div}(k), \\ r_k^{\langle \underset{\sim}{X}\rangle} \cup \{x,y\} & \text{if } \frac{m}{p} \in \mathrm{div}(k). \end{cases}$$

Ainsi, la structure $\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle \wedge \langle X,\Upsilon\rangle$ est la structure définie sur X par

$$r_k^{\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle\wedge\langle X,\Upsilon\rangle} = \begin{cases} r_k^{\underset{\sim}{X}} & \text{if } m \notin \mathrm{div}(k), \\ r_k^{\underset{\sim}{X}} \cup \{x,y\} & \text{if } m \in \mathrm{div}(k). \end{cases}$$

Quant à la structure $\langle X/R,\Delta\rangle \wedge \langle X,\Upsilon\rangle$, elle est égale à $\langle X,\Upsilon\rangle$. On constate donc que ces deux structures diffèrent et ne se couvrent pas l'une l'autre. $\diamondsuit$

Il se trouve que les contraintes imposées par les deux lemmes précédents sont les conditions nécessaires et suffisantes à imposer à $\underset{\sim}{X}$ pour que son treillis des quotients soit dualement semimodulaire.

Proposition 4.3. *Le treillis* $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ *est dualement semimodulaire si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaites:*

(1) $|\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})| = 1$*;*

(2) $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X}) = \{x,y\}$ *et* $x \in s_{m_x}^{\underset{\sim}{X}}$*,* $y \in s_{m_y}^{\underset{\sim}{X}}$ *avec* $\mathrm{pgcd}(m_x,m_y) = 1$*;*

(3) $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X}) = \{x,y,z\}$ *et* $x \in s_{m_x}^{\underset{\sim}{X}}$*,* $y \in s_{m_y}^{\underset{\sim}{X}}$*,* $z \in s_{m_z}^{\underset{\sim}{X}}$ *avec* m_x,m_y *et* m_z *deux à deux premiers entre eux.*

Preuve. Il nous suffit de montrer la suffisance de chaque condition.

Si $|\underset{\sim}{X}| = 1$, alors $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ est isomorphe au treillis des diviseurs d'un entier $m \in \mathrm{div}(n)$ et est donc dualement semimodulaire.

Si $\underset{\sim}{X} = \{x,y\}$ avec $x \in s_{m_x}^{\underset{\sim}{X}}$ et $y \in s_{m_y}^{\underset{\sim}{X}}$ où $\mathrm{pgcd}\{m_x,m_y\} = 1$, alors $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ est isomorphe au treillis $\mathsf{div}(m_x) \times \mathsf{div}(m_y) \cup \{T\}$ où T est défini comme une borne supérieure. Or, il est direct de vérifier que ce treillis est dualement semimodulaire (en se rappelant que le produit de deux treillis semimodulaires est semimodulaire).

Enfin, si $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X}) = \{x,y,z\}$ et $x \in s_{m_x}^{\underset{\sim}{X}}$, $y \in s_{m_y}^{\underset{\sim}{X}}$, $z \in s_{m_z}^{\underset{\sim}{X}}$ avec m_x,m_y et m_z deux à deux premiers entre eux, alors on prouve en procédant au cas par cas par une énumération fastidieuse que $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ est dualement semimodulaire. ♢

Nous pouvons donc caractériser les algèbres $\underline{A}$ dont le treillis des sous-algèbres est semimodulaire.

Proposition 4.4. *Si $\underline{A}$ est une algèbre de $\mathcal{A}$ alors le treillis $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ est semimodulaire si et seulement si $\underline{A}$ est isomorphe à l'une des algèbres suivantes:*

- $\underline{Ł}_m$ *où m est un diviseur n;*
- $\underline{Ł}_m \times \underline{Ł}_{m'}$ *où m et m' sont des diviseurs de n premiers entre eux;*
- $\underline{Ł}_m \times \underline{Ł}_{m'} \times \underline{Ł}_{m''}$ *où m, m' et m'' sont des diviseurs de n deux à deux premiers entre eux.* ■

Exemples 4.5. La structure de l'exemple 1.5 ne satisfait pas à l'une des conditions de la propriété 4.3 et ne donne pas lieu à un treillis des quotients dualement semimodulaire. Ainsi, l'élément (1) couvre (2), mais $(1,1) \wedge (2) = (2,2)$ et $(1,1) \wedge (1) = (1,1)$.

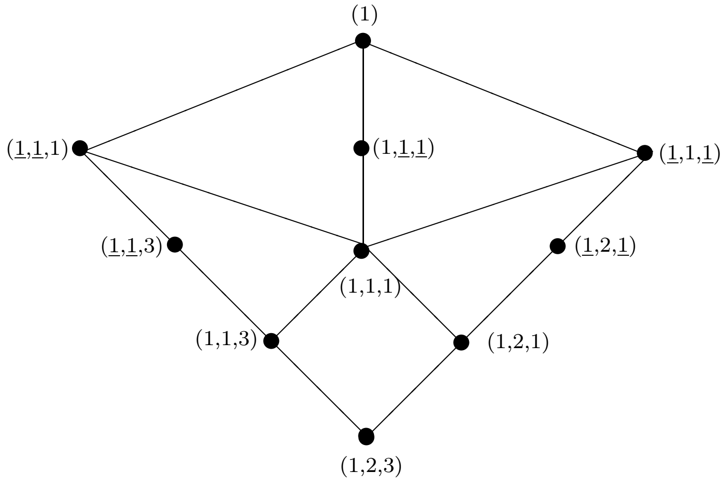
Par contre, la structure $\underset{\sim}{Y} = \{x,y,z\}$, où

$$x \in s_1^{\underset{\sim}{Y}}, \quad y \in s_2^{\underset{\sim}{Y}} \quad \text{et } z \in s_3^{\underset{\sim}{Y}},$$

possède un treillis des quotients semimodulaire. Pour en représenter son diagramme de Haase, nous adoptons les conventions suivantes (elles étendent les conventions de l'exemple 1.2):

- nous représentons tout quotient $\langle Y,\Gamma\rangle$ de $\underset{\sim}{Y}$ construit sur $\{x,y,z\}$ par un triplet d'entiers (m_x,m_y,m_z) où $x \in s_{m_x}^{\langle Y,\Gamma\rangle}$, $y \in s_{m_y}^{\langle X,\Gamma\rangle}$ et $z \in s_{m_z}^{\langle Y,\Gamma\rangle}$;
- les structures quotients $\langle Y/R,\Gamma\rangle$ de $\underset{\sim}{Y}$ où R est une équivalence minimale sont représentées par un triplet d'entiers en convenant que deux entiers soulignés définissent *une* classe (la valeur commune de ces entiers définit alors le sous-ensemble $s_m^{\langle Y/R,\Gamma\rangle}$ dans lequel se trouve cette classe);
- les structures quotients $\langle Y/R,\Gamma\rangle$ de $\underset{\sim}{Y}$ où $R = \{Y\}$ sont quant à elles représentées par un entier (m_Y) défini par $Y \in s_{m_Y}^{\langle Y/R,\Gamma\rangle}$.

Avec ces conventions, on obtient le diagramme suivant:



À ce stade de nos développements, on peut se demander si le caractère fini que possèdent les algèbres de $\mathcal{A}$ qui donnent lieu à un treillis de sous-algèbres semimodulaire est propre aux variétés finiment engendrées de MV-algèbres, ou si les variétés non finiment engendrées possèdent aussi cette particularité. Autrement dit, est-il possible de trouver dans certaines sous-variétés de $\mathcal{MV}$ une algèbre *non finie* dont le treillis des sous-algèbre est semimodulaire?

La réponse est positive pour *toutes* les sous-variétés non finiment engendrées. En effet, dans l'exemple suivant, nous allons montrer que l'algèbre $\mathcal{C}$ de Chang, qui est une algèbre infinie qui se trouve dans toute sous-variété non finiment engendrée de $\mathcal{MV}$, admet un treillis de sous-algèbres semimodulaire.

Exemple 4.6. Rappelons que la MV-algèbre $\mathcal{C} = \langle C, \oplus\, , \odot\, ,\neg,(0{,}0),(1{,}1)\rangle$ de Chang est définie sur

$$C = \{(0{,}a) \mid a \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{(1{,}b) \mid b \in \mathbb{Z}^-\},$$

par

$$(i{,}x) \oplus (j{,}y) = \begin{cases} (0{,}x+y) & \text{si } i+j=0, \\ (1, \min(0{,}x+y)) & \text{si } i+j=1, \\ (1{,}0) & \text{if } i+j=2; \end{cases}$$

et par

$$\neg(i{,}x) = \begin{cases} (0,-x) & \text{if } (i=1), \\ (1,-x) & \text{if } (i=0). \end{cases}$$

On se convainc facilement que tout élément de $\mathsf{Sub}(\mathcal{C})$ est isomorphe à $\mathcal{C}$ et que $\mathsf{Sub}(\mathcal{C})$ est anti-isomorphe au treillis $\mathsf{div}(\mathbb{N}_0)$ des naturels non nuls ordonnés par division.

En effet, l'application

$$\phi : \mathsf{Sub}(\mathcal{C}) \to \mathsf{div}(\mathbb{N}_0) : \underline{B} \mapsto \inf\{z \mid (0{,}z) \in \underline{B} \;\&\; z \neq 0\},$$

est un anti-isomorphisme. Pour le prouver, on procède de manière classique.

Montrons d'abord que toute sous-algèbre $\underline{B}$ de $\mathcal{C}$ est engendrée par $(0{,}\phi(\underline{B}))$. De fait, si x est un élément de $\underline{B} \setminus \langle(0{,}\phi(\underline{B}))\rangle$, on peut supposer, quitte à considérer $\neg x$, qu'il existe un $b > \phi(\underline{B})$ tel que $x = (0{,}b)$. Il existe alors des naturels q et r tels que

$$b = q.\phi(\underline{B}) + r$$

avec $0 < r < \phi(\underline{B})$ (sinon $x \in \langle(0,\phi(\underline{B}))\rangle$). Ainsi, l'élément

$$(1,-b) \oplus (0,q.\phi(\underline{B})) = (1,q.\phi(\underline{B})-b) = (1,-r)$$

appartient à $\underline{B}$, et il en est donc de même pour $(0,r)$. Cela est absurde vu la définition de $\phi(\underline{B})$.

La bijectivité de ϕ étant acquise, il nous reste à prouver que ϕ et ϕ^{-1} sont antitones, ce qui est évident.

On en déduit donc que $\mathsf{Sub}(\mathcal{C})$ est semimodulaire.

5. Modularité de $\mathsf{Sub}(\underline{A})$

5.1. Semimodularité duale de $\mathsf{Sub}(\underline{A})$. Nous allons maintenant déterminer quelles sont les algèbres $\underline{A}$ de $\mathcal{A}$ dont le treillis des sous-algèbres est dualement semimodulaire. Il est donc équivalent de chercher les structures $\underset{\sim}{X}$ de $\mathcal{X}_n$ qui possèdent un treillis des quotients semimodulaire.

Cette propriété est plus universelle que la précédente.

Proposition 5.1. *Si $\underset{\sim}{X}$ est un membre de $\mathcal{X}_n$, alors $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ est semimodulaire. De manière équivalente, le treillis $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ des sous-algèbres d'un membre $\underline{A}$ de $\mathcal{A}$ est dualement semimodulaire.*

Preuve. Supposons d'abord que $\langle X/R,\Gamma\rangle$ et $\langle X/R,\Gamma'\rangle$ soient deux quotients de $\underset{\sim}{X}$ tels qu'on obtient Γ' en « transportant » un élément x de $s_m^{\langle X/R,\Gamma\rangle}$ dans $s_{\frac{m}{p}}^{\langle X/R,\Gamma'\rangle}$ où p est un diviseur premier de m:

$$r_k^{\langle X/R,\Gamma'\rangle} = \begin{cases} r_k^{\langle X/R,\Gamma\rangle} & \text{if } \frac{m}{p} \notin \operatorname{div}(k), \\ r_k^{\langle X/R,\Gamma\rangle} \cup \{x\} & \text{if } \frac{m}{p} \in \operatorname{div}(k). \end{cases}$$

Ainsi, $\langle X/R,\Gamma'\rangle$ couvre $\langle X/R,\Gamma\rangle$.

Cela étant, si $\langle X/S,\Delta\rangle$ appartient à $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$, on définit les structures $\langle X/R,\Gamma\rangle \vee \langle X/S,\Delta\rangle$ et $\langle X/R,\Gamma'\rangle \vee \langle X/S,\Delta\rangle$ sur $X/(R \vee S)$.

De plus, si $x \notin \widetilde{\pi}_{R\vee S,\,R}^{-1}(y)$, il vient alors

$$y \in s_m^{\langle X/R,\Gamma\rangle\vee\langle X/S,\Delta\rangle} \quad\Leftrightarrow\quad y \in s_m^{\langle X/R,\Gamma'\rangle\vee\langle X/S,\Delta\rangle}.$$

Mais, si y est l'élément de $X/(R \vee S)$ vérifiant $\widetilde{\pi}_{R\vee S,\,R}(x) = y$, alors

$$y \in s_m^{\langle X/R,\Gamma\rangle\vee\langle X/S,\Delta\rangle}$$

et

$$y \in s_m^{\langle X/R,\Gamma'\rangle\vee\langle X/S,\Delta\rangle} \quad \text{ou} \quad y \in s_{\frac{m}{p}}^{\langle X/R,\Gamma'\rangle\vee\langle X/S,\Delta\rangle}.$$

En conséquence,

$$\langle X/R,\Gamma\rangle \vee \langle X/S,\Delta\rangle = \langle X/R,\Gamma'\rangle \vee \langle X/S,\Delta\rangle$$

ou

$$\langle X/R,\Gamma\rangle \vee \langle X/S,\Delta\rangle \prec \langle X/R,\Gamma'\rangle \vee \langle X/S,\Delta\rangle.$$

Considérons alors les deux quotients $\langle X/R,\Gamma\rangle \prec \langle X/R',\Gamma'\rangle$ pour lesquels il existe un diviseur m de n et deux éléments $x,y \in s_m^{\langle X/R,\Gamma\rangle}$ tels que

$$R' = \{z^R \mid z \notin \pi_R^{-1}(x) \cup \pi_R^{-1}(y)\} \cup \{\pi_R^{-1}(x) \cup \pi_R^{-1}(y)\},$$

l'ensemble Γ' étant défini pour assurer que $\langle X/R,\Gamma'\rangle$ couvre $\langle X/R,\Gamma\rangle$.

Si $\langle X/S,\Delta\rangle$ est un troisième quotient de $\underset{\sim}{X}$, nous montrons d'abord que les équivalences de BOOLE $R' \vee S$ et $R \vee S$ sont égales ou que l'une couvre l'autre (*i.e.* nous prouvons que le treillis des équivalences de BOOLE est semimodulaire). En effet, si x_1 est un élément de $\pi_R^{-1}(x)$ et si y_1 est un élément de $\pi_R^{-1}(y)$, il vient

$$R \vee S = R' \vee S \quad \Rightarrow \quad (x_1,y_1) \in R \vee S.$$

Sinon

$$R' \vee S = \{z^{R\vee S} \mid z \notin \pi_R^{-1}(x) \cup \pi_R^{-1}(y)\} \cup \{x_1^{R\vee S} \cup y_1^{R\vee S}\},$$

et donc $R \vee S \prec R' \vee S$.

Cela étant, si $R \vee S = R' \vee S$, alors on montre facilement que

$$\langle X/R,\Gamma\rangle \vee \langle X/S,\Delta\rangle = \langle X/R',\Gamma'\rangle \vee \langle X/S,\Delta\rangle$$

Si $R \vee S \prec R' \vee S$, on a plutôt

$$\langle X/R,\Gamma\rangle \vee \langle X/S,\Delta\rangle \prec \langle X/R',\Gamma'\rangle \vee \langle X/S,\Delta\rangle,$$

ce qui boucle la preuve. ♢

5.2. Modularité de $\mathsf{Sub}(\underline{A})$. Étant donné qu'un treillis fini est modulaire si et seulement s'il est *à la fois* semimodulaire *et* dualement semimodulaire (cf. la proposition 1.5), les propositions 4.4 et 5.1 se synthétisent de la manière suivante.

Proposition 5.2. *Si $\underline{A}$ est une algèbre de $\mathcal{A}$, alors le treillis $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ de ses sous-algèbres est modulaire si et seulement si $\underline{A}$ est isomorphe à l'une des algèbres suivantes:*

- *$\underline{Ł}_m$ où m est un diviseur n;*
- *$\underline{Ł}_m \times \underline{Ł}_{m'}$ où m et m' sont des diviseurs de n premiers entre eux;*
- *$\underline{Ł}_m \times \underline{Ł}_{m'} \times \underline{Ł}_{m''}$ où m, m' et m'' sont des diviseurs de n deux à deux premiers entre eux.* ■

6. Distributivité de $\mathsf{Sub}(\underline{A})$

Nous allons rechercher les algèbres $\underline{A}$ dont le treillis des sous-algèbres est distributif, en se rappelant que l'ensemble des treillis distributifs forme une sous-variété de la variété des treillis modulaires.

Proposition 6.1. *Si $\underline{A}$ est une algèbre de $\mathcal{A}$, alors le treillis $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ de ses sous-algèbres est distributif si et seulement si $\underline{A}$ est isomorphe à l'une des algèbres suivantes:*

- *$\underline{Ł}_m$ où m est un diviseur n;*
- *$\underline{Ł}_m \times \underline{Ł}_{m'}$ où m et m' sont des diviseurs de n premiers entre eux;*

Preuve. Si $\underline{A}$ est isomorphe à $\underline{Ł}_m$ (resp. $\underline{Ł}_m \times \underline{Ł}'_m \cup \{T\}$) où m est un diviseur de n (resp. où m et m' sont des diviseurs de n premiers entre eux), alors son treillis de sous-algèbres est isomorphe au treillis $\mathsf{div}(m)$ (resp. $\mathsf{div}(m) \times \mathsf{div}(m')$) et est par conséquent distributif.

Si $\underline{A}$ est isomorphe à $\underline{Ł}_m \times \underline{Ł}_{m'} \times \underline{Ł}_{m''}$ où m, m' et m'' sont des diviseurs de n deux à deux premiers entre eux, nous allons montrer qu'il existe dans $\mathsf{Quot}(\mathsf{D}_n(\underline{A}))$ (donc dans $\mathsf{Sub}(\underline{A})$) un sous-treillis isomorphe au diamant. En effet, supposons que $\mathsf{D}_n(\underline{A}) = \{x,y,z\}$, où

$$x \in s_m^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}, \quad y \in s_{m'}^{\mathsf{D}_n(\underline{A})} \quad \text{et} \quad z \in s_{m''}^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}.$$

Considérons alors les relations R, S et T définies par

$$R = \{\{x,y\},\{z\}\}, \quad S = \{\{y,z\},\{x\}\} \quad \text{et} \quad T = \{\{x,z\},\{y\}\},$$

et construisons les quotients $\langle X/R,\Gamma^{(R)}\rangle$, $\langle X/S,\Gamma^{(S)}\rangle$ et $\langle X/T,\Gamma^{(T)}\rangle$ de $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ en posant

$$s_1^{\langle X/R,\Gamma^{(R)}\rangle} = X/R, \quad s_1^{\langle X/S,\Gamma^{(S)}\rangle} = X/S \quad \text{et} \quad s_1^{\langle X/T,\Gamma^{(T)}\rangle} = X/T.$$

On vérifie alors directement que le sous-treillis de $\mathsf{Quot}(\mathsf{D}_n(\underline{A}))$ engendré par ces trois éléments est isomorphe au diamant. ♢

Ainsi, c'est le caractère non distributif du treillis des sous-algèbres d'une algèbre de Boole à plus de trois éléments qui restreint la distributivité du treillis des sous-algèbres des MV-algèbres dans les variétés finiment engendrées.

Notons enfin que si le treillis des sous-algèbres d'une MV-algèbre d'une variété *non* finiment engendrée est distributif, cela n'implique pas nécessairement que cette algèbre est finie, à l'opposé du cas qui nous occupe.

7. Quelques questions ouvertes

Les travaux que nous avons exposés et qui concernent le treillis des sous-algèbres dans les variétés $\mathcal{MV}_n$ sont loin d'être exhaustifs à ce sujet. De nombreuses questions restent en effet ouvertes.

Parmi elles, nous avons déjà souligné le problème de pouvoir estimer précisément le cardinal de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ lorsque cette structure est finie. Ce problème de combinatoire pourrait trouver une solution dans la théorie des *multi-ensembles finis*, qui sont des ensembles finis à chaque élément desquels on associe un poids (c'est-à-dire un entier naturel non nul). Les morphismes entre multi-ensembles finis X et Y sont alors les applications $f : X \to Y$ qui sont telles que le poids associé à $f(x)$ est un diviseur du poids associé à x pour tout x dans X.

Un autre problème intéressant consiste à essayer de caractériser les treillis (d'abord dans la cas fini) qui sont isomorphes à un treillis de sous-algèbres d'une MV-algèbre $\underline{A}$ de $\mathcal{MV}_n$. Nous avons par exemple essayé, sans succès pour le moment, d'obtenir un procédé de construction dans le cas simple du treillis des sous-algèbres d'une algèbre du type $\underline{Ł}_{m_1} \times \cdots \times \underline{Ł}_{m_r}$ où les m_i ($i \in \{1,\ldots,r\}$) sont deux à deux premiers entre eux. En fait, c'est l'abondance et la « densité » des idempotents dans cette algèbre qui constitue l'obstacle majeur à l'obtention d'une telle construction lorsque r est supérieur à 3.

La caractérisation des structures $\underset{\sim}{X}$ qui sont telles que $\{\langle X/R,\Gamma_{\mathsf{Min}}\rangle \mid R \in \mathfrak{B}(X)\}$ est un sous-treillis de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ est un autre problème auquel on pourrait s'attaquer.

Par ailleurs, il serait intéresssant d'essayer d'étendre nos développements à des sous-variétés non finiment engendrées de MV-algèbres. On pourrait au départ s'appuyer sur d'autres dualités—comme celle développée par P. Niederkorn dans sa thèse ([**24**]) et qui concerne la classe des MV-algèbres archimédiennes rationnelles, ou encore la dualité récemment découverte par Cignoli, Dubuc and D. Mundici dans **[7]** pour les MV-algèbres localement finies. Il faudrait ensuite tenter de s'affranchir de l'outil (puissant mais aliénant) des dualités pour étendre les résultats à des classes de MV-algèbres pour lesquelles aucune dualité n'est connue. Une piste à suivre serait peut-être de s'attaquer à la classe des MV-algèbres archimédiennes, car nous avons vu que la description des éléments maximaux dans $\mathsf{Sub}(\underline{A})$ faisait intervenir cette classe de manière naturelle.

Pour terminer, mentionnons un problème classique associé au treillis des sous-algèbres: étudier la complémentation et la pseudo-complémentation de ces treillis (cf. **[1]** pour le cas des algèbres de Boole).

L'existence de compléments dans les treillis $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ est loin d'être une propriété universelle. Le premier résultat à ce sujet restreint la forme des compléments. Pour l'énoncer, nous allons étendre les notations du début de la section 3 et convenir que pour tous quotients $\langle X/R,\Gamma\rangle$ et $\langle X/R',\Gamma'\rangle$ de $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$, on désignera par $\mathrm{pgcd}(\langle X/R,\Gamma\rangle,\langle X/R',\Gamma'\rangle)$ l'entier

$$\mathrm{pgcd}(\langle X/R,\Gamma\rangle,\langle X/R',\Gamma'\rangle) = \mathrm{pgcd}(\{l \in \mathrm{div}(n) \mid r_l^{\langle X/R,\Gamma\rangle} \cup r_l^{\langle X/R',\Gamma'\rangle} \neq \emptyset\}.$$

Lemme 7.1. *Le quotient $\langle X/R,\Gamma\rangle$ admet $\langle X/R',\Gamma'\rangle$ comme complément dans $\mathsf{Quot}(\underset{\sim}{X})$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites:*

- *l'équivalence R' est un complément de R dans $\mathfrak{B}(X)$;*
- *pour tout élément x de $\underset{\sim}{X}$, il vient*

$$\left.\begin{array}{l}\pi_R(x) \in s_{m_R}^{\langle X/R,\Gamma\rangle}\\ \pi_{R'}(x) \in s_{m_{R'}}^{\langle X/R',\Gamma'\rangle}\end{array}\right\} \Rightarrow x \in s_{\mathrm{ppcm}(m_R,m_{R'})}^{\underset{\sim}{X}};$$

- *on a* $\mathrm{pgcd}(\langle X/R,\Gamma\rangle,\langle X/R',\Gamma'\rangle) = 1.$ ∎

CHAPITRE 4

Dualité pour les MV-algèbres à opérateurs

La théorie des algèbres de BOOLE à opérateurs fut introduite par JÓNSSON et TARSKI en 1951 (cf. [**16**] et [**17**]). Entre autres applications, ces algèbres servirent de modèle à la logique modale. En 1983, G. HANSOUL développa dans [**14**] une dualité catégorique pour la classe des algèbres de BOOLE à opérateurs. Ce sont ces derniers résultats que nous essayons de généraliser aux MV-algèbres.

Nous nous proposons donc de présenter ici une définition de MV-algèbre avec opérateurs étendant naturellement la définition booléenne, ainsi qu'une dualité pour la classe des MV-algèbres de $\mathbb{HSP}(\underline{Ł}_n)$ munies d'un opérateur unaire.

1. MV-algèbres à opérateurs

La notion d'opérateur que nous allons introduire sur les MV-algèbres étend naturellement aux MV-algèbres la définition bien connue d'un opérateur sur une algèbre de BOOLE. L'axiomatisation présentée, bien que naturelle, est le fruit de plusieurs tentatives qui se sont révellées stériles.

Définitions 1.1. Soit k un naturel non nul. Un *opérateur k-aire* sur la MV-algèbre $\underline{A}$ est une application

$$f : \underline{A}^k \to \underline{A}$$

vérifiant les trois conditions suivantes:

(MVO1) l'application f est *conormale*: pour tous l dans $\{1,\ldots,k\}$ et $a_1,\ldots,a_{l-1},a_{l+1},\ldots,a_k$ dans $\underline{A}^k$

$$f(a_1,\ldots,a_{l-1},1,a_{l+1},\ldots,a_k) = 1;$$

(MVO2) l'axiome (K) est satisfait sur chaque argument de f: pour tout l dans $\{1,\ldots,k\}$ l'équation

$$f(a_1,\ldots,a_{l-1},x \to y,a_{l+1},\ldots,a_k) \to (f(a_1,\ldots,a_{l-1},x,a_{l+1},\ldots,a_k) \to f(a_1,\ldots,a_{l-1},y,a_{l+1},\ldots,a_k)) = 1$$

est satisfaite sur $\underline{A}$ pour tous $a_1,\ldots,a_{l-1},a_{l+1},\ldots,a_k$ dans $\underline{A}$;

(MVO3) l'application f respecte les $\mathcal{L}_{\mathrm{MV}}$-termes croissants unaires: si τ est un terme croissant unaire construit sur $\mathcal{L}_{\mathrm{MV}}$ et si $a_1,\ldots,a_k$ sont des éléments de $\underline{A}$, alors

$$\tau(f(a_1,\ldots,a_k)) = f(\tau(a_1),\ldots,\tau(a_k)).$$

Lorsque $k = 1$, l'opérateur sera appelé *opérateur modal* et sera souvent noté $\Box$.

Une *MV-algèbre à opérateurs* est une algèbre $\langle \underline{A}, \oplus, \odot, \neg, 0, 1, (f_i)_{I\in I}\rangle$ où $\langle \underline{A}, \oplus, \odot, \neg, 0, 1\rangle$ est une MV-algèbre et où f_i est un opérateur k_i-aire sur $\underline{A}$ pour tout indice i de l'ensemble I.

Une *MV-algèbre modale* est une MV-algèbre sur laquelle on a défini un unique opérateur modal.

Dans ce qui suit, nous abuserons des raccourcis d'écriture habituels qui nous autoriseront à désigner par $\langle \underline{A},(f_i)_{i\in I}\rangle$ la MV-algèbre à opérateurs $\langle \underline{A}, \oplus, \odot, \neg, 0, 1, (f_i)_{i\in I}\rangle$. Par ailleurs, nous noterons $\underline{A}$ la MV-algèbre sous-jacente à la MV-algèbre à opérateurs $\langle \underline{A},(f_i)_{i\in I}\rangle$ (i.e. la réduction de $\langle \underline{A},(f_i)_{i\in I}\rangle$ au langage $\mathcal{L}_{\mathrm{MV}}$.) Enfin, pour faciliter l'écriture de nos résultats, nous allons fixer pour le reste du chapitre un ensemble d'indices I et un symbole fonctionnel f_i d'arité k_i pour tout $i \in I$. Ainsi, toutes nos MV-algèbres à opérateurs seront construites sur le langage $\{\oplus, \odot, \neg, 0, 1\} \cup \{f_i \mid i \in I\}$. Nous noterons $\mathcal{MVO}$ la classe formée par ces algèbres.

La moindre des propriétés que l'on puisse espérer d'un opérateur sur la MV-algèbre $\underline{A}$ est que celui-ci se révèle être un opérateur d'algèbre de Boole lorsqu'on le restreint à l'ensemble $\mathfrak{B}(\underline{A})$ des idempotents de $\underline{A}$.

Lemme 1.2. *L'axiome* MVO2 *est équivalent à*

$$f(a_1,\dots,a_{l-1},x \to y,a_{l+1},\dots,a_k) \\ \leq f(a_1,\dots,a_{l-1},x,a_{l+1},\dots,a_k) \to f(a_1,\dots,a_{l-1},y,a_{l+1},\dots,a_k)$$

pour tout $1 \leq l \leq k$ *et tous* $a_1,\dots,a_{l-1},a_{l+1},\dots,a_k$ *dans* $\underline{A}$*. De plus, il implique la monotonie de* f *en chacun de ses arguments.*

Preuve. La démonstration est une conséquence directe de la définition de l'ordre sur une MV-algèbre. ♢

Proposition 1.3. *Si* $\langle \underline{A},(f_i)_{i\in I}\rangle$ *est une MV-algèbre à opérateurs, alors*

$$\langle \mathfrak{B}(\underline{A}),(f_i|_{\mathfrak{B}(\underline{A})^{k_i}})_{i\in I}\rangle$$

est une algèbre de Boole *à opérateurs.*

Preuve. Soient i un indice de I et $a_1,\dots,a_{k_i}$ des éléments de $\mathfrak{B}(\underline{A})$. Comme le terme $\tau(x) = x \oplus x$ est un terme croissant unaire de $\mathcal{L}_{\mathrm{MV}}$, il vient

$$\tau(f_i(a_1,\dots,a_{k_i})) = f_i(\tau(a_1),\dots,\tau(a_{k_i})) = f_i(a_1,\dots,a_{k_i}),$$

ce qui prouve que l'application $f_i|_{\mathfrak{B}(\underline{A})^{k_i}}$ est à valeurs dans $\mathfrak{B}(\underline{A})$.

Par ailleurs, si l est un élément de $\{1,\dots,k_i\}$ et si b_l est un idempotent de $\underline{A}$, alors la monotonie de f_i en son l^{e} argument implique que

$$f_i(a_1,\dots,a_{l-1},a_l \wedge b_l,a_{l+1},\dots,a_{k_i}) \\ \leq f_i(a_1,\dots,a_{l-1},a_l,a_{l+1},\dots,a_{k_i}) \wedge f_i(a_1,\dots,a_{l-1},b_l,a_{l+1},\dots,a_{k_i}).$$

Enfin, montrons qu'on a l'inégalité inverse. En effet, puisque $\mathfrak{B}(\underline{A})$ est une algèbre de Boole, il vient $a_l \to (b_l \to (a_l \wedge b_l)) = 1$, donc

$$f_i(a_1,\dots,a_{l-1},a_l,a_{l+1},\dots,a_{k_i}) \leq f_i(a_1,\dots,a_{l-1},b_l \to (a_l \wedge b_l),a_{l+1},\dots,a_{k_i}),$$

puis

$$f_i(a_1,\ldots,a_{l-1},a_l,a_{l+1},\ldots,a_{ki})$$
$$\leq f_i(a_1,\ldots,a_{l-1},b_l,a_{l+1},\ldots,a_{k_i}) \to f_i(a_1,\ldots,a_{l-1},a_l \wedge b_l,a_{l+1},\ldots,a_{k_i}).$$

Pour finir, en conclut en exploitant la monotonie de f_i en son l^e argument que

$$f_i(a_1,\ldots,a_{l-1},a_l,a_{l+1},\ldots,a_{k_i}) \wedge f_i(a_1,\ldots,a_{l-1},b_l,a_{l+1},\ldots,a_{k_i})$$
$$\leq f_i(a_1,\ldots,a_{l-1},a_l \wedge b_l,a_{l+1},\ldots,a_{k_i}),$$

ce qui suffit pour conclure la preuve. $\diamondsuit$

Exemples 1.4. Donnons maintenant quelques exemples simples d'opérateurs sur des MV-algèbres. Soit $\underline{A}$ une MV-algèbre.

(1) Il est clair que l'identité est un opérateur unaire sur $\underline{A}$.
(2) L'application $\mathbf{1} : \underline{A} \to \underline{A} : a \mapsto 1$ est un opérateur modal sur $\underline{A}$.
(3) Si $\underline{A}$ est totalement ordonné et si k est un naturel non nul alors l'application

$$f : \underline{A}^k \to \underline{A}^k : (a_1,\ldots,a_k) \mapsto (\min(a_1,\ldots,a_k),\ldots,\min(a_1,\ldots,a_k))$$

est un opérateur unaire sur $\underline{A}^k$ (qui coïncide avec l'identité si $k = 1$). En effet, il est trivial que $f(1,\ldots,1) = (1,\ldots,1)$. Par ailleurs, si τ est un $\mathcal{L}_{\mathrm{MV}}$-terme croissant unaire et si $(a_1,\ldots,a_k)$ est un k-uplet d'éléments de $\underline{A}$, il vient successivement

$$\begin{aligned}\tau(f(a_1,\ldots,a_k)) &= (\tau(\min(a_1,\ldots,a_k)),\ldots,\tau(\min(a_1,\ldots,a_k)))\\ &= (\min(\tau(a_1),\ldots,\tau(a_k)),\ldots,\min(\tau(a_1),\ldots,\tau(a_k))\\ &= f(\tau(a_1),\ldots,\tau(a_k))\end{aligned}$$

puisque τ est croissant.

Vérifions enfin que l'application f vérifie l'axiome (MVO2). Soient $(a_1,\ldots,a_k)$ et $(b_1,\ldots,b_k)$ deux k-uplets d'éléments de $\underline{A}$. Par définition de f, l'inéquation

$$f((a_1,\ldots,a_k) \to (b_1,\ldots,b_k)) \leq f(a_1,\ldots,a_k) \to f(b_1,\ldots,b_k)$$

est équivalente à

$$\min(a_1 \to b_1,\ldots,a_k \to b_k) \leq \min(a_1,\ldots,a_k) \to \min(b_1,\ldots,b_k),$$

c'est-à-dire à

$$\bigwedge_{i\leq k}(b_i \oplus \neg a_i) \leq (\bigwedge_{i\leq k} b_i) \oplus \neg(\bigwedge_{i\leq k} a_i)$$

ou encore à

$$\bigwedge_{i\leq k}(b_i \oplus \neg a_i) \leq \bigwedge_{i\leq k}(b_i \oplus \neg(\bigwedge_{i\leq k} a_i)),$$

vu la distributivité de $\oplus$ sur $\bigwedge$. On conclut alors en notant que, puisque $\bigwedge_{i\leq k} a_i \leq a_i$ pour tout $i \leq k$, on a

$$b_i \oplus \neg a_i \leq b_i \oplus \neg \bigwedge_{i\leq k} a_i$$

pour tout i dans $\{1,\ldots,k\}$.

La proposition suivante permet de relier la notion d'opérateur à celle d'homomorphisme.

Proposition 1.5. *Soit f un opérateur k-aire sur la MV-algèbre $\underline{A}$. Si l est un naturel de $\{1,\ldots,k\}$, si $a_1,\ldots,a_{l-1},a_{l+1},\ldots,a_k$ sont des éléments de $\underline{A}$ et si f_l désigne l'application*

$$f_l : \underline{A} \to \underline{A} : a \mapsto f(a_1,\ldots,a_{l-1},a,a_{l+1},\ldots,a_k),$$

alors f_l est un homomorphisme si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- *f est* normal*: $f(a_1,\ldots,a_{l-1},0,a_{l+1},\ldots,a_k) = 0$;*
- *f respecte $\oplus$ sur son l^{e}-argument:*

$$f(a_1,\ldots,a_{l-1},a\oplus b,a_{l+1},\ldots,a_k) = f(a_1,\ldots,a_{l-1},a,a_{l+1},\ldots,a_k) \oplus f(a_1,\ldots,a_{l-1},b,a_{l+1},\ldots,a_k)$$

pour tous a et b dans $\underline{A}$.

Preuve. La proposition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Par hypothèse, on sait que $f_l(a\oplus b) = f_l(a)\oplus f_l(b)$ pour tous a et b dans $\underline{A}$. Il nous reste à prouver que $f_l(\neg a) = \neg f_l(a)$ pour tout a dans $\underline{A}$. Or, puisque f est un opérateur, il vient

$$\begin{aligned} &f(a_1,\ldots,a_{l-1},a \to 0,a_{l+1},\ldots,a_k)\\ &\qquad\qquad \to f((a_1,\ldots,a_{l-1},a,a_{l+1},\ldots,a_k) \to f(a_1,\ldots,a_{l-1},0,a_{l+1},\ldots,a_k)) = 1\end{aligned}$$

ou encore

$$f(a_1,\ldots,a_{l-1},\neg a,a_{l+1},\ldots,a_k) \leq \neg f(a_1,\ldots,a_{l-1},a,a_{l+1},\ldots,a_k),$$

puisque $f(a_1,\ldots,a_{l-1},0,a_{l+1},\ldots,a_k) = 0$.

Par ailleurs, il vient successivement

$$\begin{aligned} & \neg f(a_1,\ldots,a_{l-1},a,a_{l+1},\ldots,a_k) \leq f(a_1,\ldots,a_{l-1},\neg a,a_{l+1},\ldots,a_k)\\ \Leftrightarrow\ & \neg f(a_1,\ldots,a_{l-1},a,a_{l+1},\ldots,a_k) \to f(a_1,\ldots,a_{l-1},\neg a,a_{l+1},\ldots,a_k) = 1\\ \Leftrightarrow\ & f(a_1,\ldots,a_{l-1},\neg a,a_{l+1},\ldots,a_k) \oplus f(a_1,\ldots,a_{l-1},a,a_{l+1},\ldots,a_k) = 1\\ \Leftrightarrow\ & f(a_1,\ldots,a_{l-1},a\oplus\neg a,a_{l+1},\ldots,a_k) = 1,\end{aligned}$$

puisque f est un opérateur qui respecte $\oplus$ sur son l^{e} argument. Comme f est conormal, on obtient bien que f_l respecte $\neg$, ce qui conclut la preuve. ♢

Pour terminer cette petite introduction, déterminons l'effet de l'image inverse d'un opérateur sur un filtre.

Proposition 1.6. *Soit f un opérateur k-aire sur la MV-algèbre $\underline{A}$. Si F est un filtre de $\underline{A}$ et si $l \in \{1,\ldots,k\}$ alors*

$$f^{-1}(a_1,\ldots,a_{l-1},F,a_{l+1},\ldots,a_k) := \{x \in \underline{A} \mid f(a_1,\ldots,a_{l-1},x,a_{l+1},\ldots,a_k) \in F\}$$

est un filtre de $\underline{A}$ pour tous $a_1,\ldots,a_{l-1},a_{l+1},\ldots,a_k$ dans $\underline{A}$.

Preuve. Soient $a_1,\ldots,a_{l-1},a_{l+1},\ldots,a_k$ des éléments de $\underline{A}$ et f_l l'application

$$f_l : \underline{A} \to \underline{A} : x \mapsto f(a_1,\ldots,a_{l-1},x,a_{l+1},\ldots,a_k).$$

Si x et $x \to y$ sont deux éléments de $f_l^{-1}(F)$, c'est-à-dire si $f_l(x\to y)$ et $f_l(x)$ appartiennent à F, il vient, puisque f_l satisfait à l'axiome (K),

$$f_l(x \to y) \to (f_l(x) \to f_l(y)) = 1,$$

donc $(f_l(x) \to f_l(y)) \in F$ puis $f_l(y) \in F$ puisque F est un filtre. ♢

2. Dualité pour les MV-algèbres à opérateurs dans $\mathbb{HSP}(\underline{\mathbf{Ł}}_n)$

Dans cette section, nous allons construire une dualité pour la catégorie dont les objets sont les MMV-algèbres (c'est-à-dire les MV-algèbres modales) construites sur les MV-algèbres de la variété $\mathbb{HSP}(\underline{Ł}_n)$. Pour ce faire, nous allons mimer la technique classique qui consiste à traduire l'opérateur en une relation binaire sur la structure duale.

Par ailleurs, la dualité que nous allons développer peut naturellement s'étendre à la classe des $\mathcal{MV}_n$-algèbres à opérateurs, comme dans le cas des algèbres de Boole. Si nous nous sommes restreints à la classe des $\mathcal{MV}_n$-algèbres modales, c'est pour éviter une trop grande lourdeur dans la formalisation de cette dualité (dont les développements que nous proposons ne sont qu'une première approche).

La catégorie que nous allons dualiser est la suivante.

Définitions 2.1. La catégorie $\mathcal{MMV}_n$ est la catégorie

- dont les objets sont les MV-algèbres à opérateur unaire $\langle A, \oplus\,, \odot\,,\neg,0,1,\Box\rangle$ construites sur les MV-algèbres $\underline{A}$ de $\mathbb{HSP}(\underline{Ł}_n)$;
- dont les morphismes sont les homomorphismes de MV-algèbre $f : \underline{A} \to \underline{B}$ vérifiant
$$f(\Box_A(a)) = \Box_B(f(a))$$
pour tout a dans $\underline{A}$.

Bien sûr, comme il en est d'usage, si $\langle \underline{A},\Box_{\underline{A}}\rangle$ et $\langle \underline{B},\Box_{\underline{B}}\rangle$ sont deux $\mathcal{MMV}_n$-algèbres, nous réserverons la notation $\mathcal{MMV}_n(\langle \underline{A},\Box_{\underline{A}}\rangle,\langle \underline{B},\Box_{\underline{B}}\rangle)$ pour désigner l'ensemble des $\mathcal{MMV}_n$-morphismes de $\langle \underline{A},\Box_{\underline{A}}\rangle$ dans $\langle \underline{B},\Box_{\underline{B}}\rangle$.

Pour construire le dual d'un objet de cette catégorie, l'idée, similairement à ce qui se passe pour les algèbres de Boole, est d'essayer de dualiser l'opérateur $\Box$ en une relation binaire sur le dual de la MV-algèbre sous-jacente à l'objet dont il est question. Les lecteurs familiers avec la dualité pour les algèbres de Boole à opérateurs (dont les grands principes sont rappelés dans les prolégomènes) ne seront donc pas étonnés par la définition suivante:

Définition 2.2. Si $\langle \underline{A},\Box\rangle$ est un objet de $\mathcal{MMV}_n$, on définit sur $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ la relation binaire $R_\Box^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ par
$$(u,v) \in R_\Box^{\mathsf{D}_n(\underline{A})} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \underline{A}\ (u(\Box x) = 1 \Rightarrow v(x) = 1).$$

Bien entendu, lorsqu'aucune confusion ne sera possible, nous préférerons noter $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ la relation $R_\Box^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$. Comme d'habitude, nous adopterons également les notations suivantes: si X est un sous-ensemble de $\mathsf{D}_n(\underline{A})$, nous noterons $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}(X)$ l'ensemble
$$R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}(X) = \{v \in \mathsf{D}_n(\underline{A}) \mid\ \exists\, u \in X \text{ t.q. } uR^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}v\},$$
et nous réserverons la notation $(R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})})^{-1}(X)$ pour désigner l'ensemble
$$(R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})})^{-1}(X) = \{u \in \mathsf{D}_n(\underline{A}) \mid\ \exists\, v \in X \text{ t.q. } uR^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}v\}.$$

Évidemment, pour ne pas alourdir les notations, si u est un élément de $\mathsf{D}_n(\underline{A})$, nous préférerons les notations $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}u$ ou $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}(u)$ à $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}(\{u\})$ et $(R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})})^{-1}(u)$ à $(R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})})^{-1}(\{u\})$.

Le premier pas dans le processus de dualisation est de vérifier qu'il est possible, étant donné un objet $\langle \underline{A},\Box\rangle$ de $\mathcal{MMV}_n$, de redéfinir sur la MV-algèbre sous-jacente à cet objet (ou, de manière équivalente, sur son bidual $\mathsf{ED}(\underline{A})$) l'opérateur $\Box$ sur base de l'unique connaissance de relation $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ sur le dual $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ de cette algèbre. C'est le but de la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Si $\langle \underline{A}, \Box \rangle$ est une $\mathcal{MMV}_n$-algèbre, alors*

$$e_{\underline{A}}(\Box x)(u) = \bigwedge_{v \in R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}u} v(x)$$

pour tout x dans $\underline{A}$ et pour tout u dans $\mathsf{D}_n(\underline{A})$.

Preuve. Soit u un élément de $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ et x un élément de $\underline{A}$. Montrons tout d'abord que

$$u(\Box x) \leq \bigwedge_{v \in R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}u} v(x).$$

Pour cela, il nous suffit de prouver que $u(\Box x) \leq v(x)$ pour tout v dans $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}u$. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe un v dans $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}u$ et un $\frac{i}{n}$ dans $\underline{Ł}_n$ tels que $v(x) < \frac{i}{n} \leq u(\Box x)$. On considère alors le terme croissant τ_i de $\mathcal{L}_{\mathrm{MV}}$ défini dans la sous-section 1.3.2 du premier chapitre.

Il vient donc

$$v(\tau_i(x)) = \tau_i(v(x)) = 0$$

puisque v est un homomorphisme de MV-algèbre et τ_i est un terme de $\mathcal{L}_{\mathrm{MV}}$. D'autre part,

$$u(\Box \tau_i(x)) = u(\tau_i(\Box x)) = \tau_i(u(\Box x)) = 1$$

vu la croissance de τ_i. Or, puisque $uR^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}v$, cette dernière identité implique que $v(\tau_i(x)) = 1$, ce qui est absurde.

Complétons la preuve en montrant qu'on ne peut pas avoir

$$u(\Box x) < \bigwedge_{v \in R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}u} v(x).$$

Sinon, il existe un $\frac{j}{n}$ dans $\underline{Ł}_n$ tel que

$$u(\Box x) < \frac{j}{n} \leq \bigwedge_{v \in R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}u} v(x).$$

On obtient donc

$$u(\Box \tau_j(x)) = 0 \quad \text{et} \quad v(\tau_j(x)) = 1$$

pour tout v dans $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}u$.

Cela étant, comme $\Box^{-1}(u^{-1}(1))$ est un filtre, l'algèbre $\underline{A}/\Box^{-1}(u^{-1}(1))$ est un membre de la variété $\mathbb{HSP}(\underline{Ł}_n)$ et est par conséquent une sous-algèbre d'une puissance de $\underline{Ł}_n$. De plus, si π désigne l'application de passage au quotient $\pi : \underline{A} \to \underline{A}/\Box^{-1}(u^{-1}(1))$, il vient $\pi(\tau_j(x)) \neq 1$ et il existe donc un homomorphisme $w' : \underline{A}/\Box^{-1}(u^{-1}(1)) \to \underline{Ł}_n$ tel que $w'(\pi(\tau_s(x))) \neq 1$. Dès lors, l'application $w = w' \circ \pi$ est un élément de $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ tel que $uR^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}w$ alors que $w(\tau_s(x)) \neq 1$, ce qui est absurde. $\diamondsuit$

Ainsi, le processus de dualisation semble bien entamé: il est possible, en connaissant la relation $R_{\Box}^{\mathsf{D}_n\underline{A}}$ sur le dual de l'algèbre $\underline{A}$, de récupérer l'opérateur $\Box$ sur $\underline{A}$ à l'aide des ensembles $R_{\Box}^{\mathsf{D}_n\underline{A}}(u)$ $(u \in \mathsf{D}_n(\underline{A}))$.

Examinons maintenant les propriétés de la relation $R^{\mathsf{D}(\underline{A})}$.

Proposition 2.4. *Si $\langle \underline{A},\Box\rangle$ est une $\mathcal{MMV}_n$-algèbre, alors la relation $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ possède les propriétés suivantes:*

- *Si x est un élément de $\underline{A}$ et si i appartient à $\{1,\ldots,n\}$, on a*
$$(R^{\mathsf{D}(\underline{A})})^{-1}([x:\frac{i}{n}]) = [\Box(\neg\tau_i(x)\oplus\tau_{i+1}(x)):0],$$
si on convient que $\tau_{i+1}=0$ lorsque $i=n$;
- *le graphe de la relation $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ est un fermé de $\mathsf{D}_n(\underline{A})\times\mathsf{D}_n(\underline{A})$;*
- *pour tout i dans $\{1,\ldots,n\}$ et pour tout x dans $\underline{A}$, on a*
$$(\bigcup_{\{m\in\mathrm{div}(n)\mid\frac{i}{n}\notin\underline{Ł}_m\}} r_m^{\mathsf{D}_n(\underline{A})})\cap(R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})})^{-1}([\tau_{i+1}(x):0])\cap X\setminus(R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})})^{-1}([\tau_i(x):0])=\emptyset$$
où on convient que $[\tau_{i+1}(x):0]=\mathsf{D}_n(\underline{A})$ si $i=n$ (auquel cas le terme τ_{i+1} n'est pas correctement défini).

Preuve. Si b est un idempotent de $\mathfrak{B}(\underline{A})$, alors, en appliquant la proposition 2.3, on obtient que $(R^{\mathsf{D}(\underline{A})})^{-1}([b:0])=[\Box b:0]$. Dés lors, comme $[x:\frac{i}{n}]=[\tau_{i+1}(x)\oplus\neg\tau_i(x):0]$ (avec notre convention sur τ_{i+1}), il vient
$$(R^{\mathsf{D}(\underline{A})})^{-1}([x:\frac{i}{n}])=[\Box(\neg\tau_i(x)\oplus\tau_{i+1}(x)):0]$$
Par ailleurs, si $(u,v)\notin R^{\mathsf{D}(\underline{A})}$, on peut trouver un élément x de $\underline{A}$ et un j dans $\{0,\ldots,n-1\}$ tels que $u(\Box x)=1$ et $v(x)=\frac{j}{n}$. Alors, le couple (u,v) appartient à l'ouvert-fermé $[\Box x:0]\times[x:\frac{j}{n}]$ qui est une partie de $\mathsf{D}(\underline{A})\times\mathsf{D}(\underline{A})\setminus R^{\mathsf{D}(\underline{A})}$, ce qui démontre la deuxième propriété.

Pour démontrer le troisième résultat, procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe un x dans $\underline{A}$, un i dans $\{1,\ldots,n\}$ et un u dans $r_m^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ avec $\frac{i}{n}\notin\underline{Ł}_m$ tels qu'on peut trouver un v dans $R^{\mathsf{D}(\underline{A})}(u)$ avec $v(x)=\frac{i}{n}$ et qu'aucun w dans $R^{\mathsf{D}(\underline{A})}(u)$ ne vérifie $w(x)<\frac{i}{n}$. Alors, selon la proposition 2.3, il vient $u(\Box x)=\frac{i}{n}$ alors que $\frac{i}{n}\notin\underline{Ł}_m$. $\diamondsuit$

Remarques 2.5. Remarquons que si $1\leq i\leq n-1$, le terme $\tau_{i+1}(x)\oplus\neg\tau_i(x)$ n'est pas croissant (en effet $\tau_{i+1}(x)\oplus\neg\tau_i(x)\not\leq\tau_{i+1}(\frac{i}{n})\oplus\neg\tau_i(\frac{i}{n})$ si $x<\frac{i}{n}$). Ainsi, on ne peut pas conclure (heureusement) à l'égalité entre $[\Box(\tau_{i+1}(x)\oplus\neg\tau_i(x)):0]$ et $[\tau_{i+1}(\Box x)\oplus\neg\tau_i(\Box x):0]$.

Par ailleurs, il est clair, vu la proposition 2.3 que
$$(R^{\mathsf{D}(\underline{A})})^{-1}[\tau_1(x)\oplus\neg\tau_0(x)=0]=[\Box x:0].$$
Enfin, il découle de nos conventions sur τ_{n+1} que
$$(R^{\mathsf{D}(\underline{A})})^{-1}[\tau_{n+1}(x)\oplus\neg\tau_n(x)=0]=\emptyset.$$
si $x\neq 1$.

Notons aussi que si $\Box$ est un opérateur sur $\underline{A}$ et si x est un élément de $\underline{A}$, il vient
$$u(\Box x)=\frac{i}{n}\Leftrightarrow u\in(R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})})^{-1}([\tau_{i+1}(x):0])\cap X\setminus(R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})})^{-1}([\tau_i(x):0]),$$
où on convient que $[\tau_{i+1}(x):0]=\mathsf{D}_n(\underline{A})$ si $i=n$.

Le temps est maintenant venu de vérifier si les trois conditions de la proposition 2.4 sont des conditions suffisantes à imposer à une relation définie sur le dual $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ d'une $\mathcal{MMV}_n$-algèbre $\underline{A}$ pour que l'application définie dans la proposition 2.3 se révèle être un opérateur modal. C'est l'objet de notre prochain résultat, pour lequel nous allons poser la définition suivante.

Définition 2.6. Une relation binaire $R^{\underset{\sim}{X}}$ (bien souvent, nous oublierons délibérément de rappeler la dépendance en $\underset{\sim}{X}$) définie sur une structure $\underset{\sim}{X}$ de $\mathcal{X}_n$ est appelée *relation modale* si elle satisfait aux trois conditions suivantes:

(R1) $(R^{\underset{\sim}{X}})^{-1}(\omega)$ est un ouvert-fermé pour tout ouvert-fermé ω de l'espace topologique X sous-jacent à $\underset{\sim}{X}$.

(R2) le graphe de la relation $R^{\underset{\sim}{X}}$ est un fermé de $\mathsf{D}_n(\underline{A}) \times \mathsf{D}_n(\underline{A})$;

(R3) pour tout i dans $\{0,\ldots,n\}$ et pour tout α dans $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$, on a

$$(R^{\underset{\sim}{X}})^{-1}((\tau_{i+1}(\alpha))^{-1}(0)) \cap X \setminus (R^{\underset{\sim}{X}})^{-1}((\tau_i(\alpha))^{-1}(0)) \cap \bigcup_{\{m \mid \frac{i}{n} \notin \text{Ł}_m\}} r_m^{\underset{\sim}{X}} = \emptyset.$$

Il est clair que si R est une relation binaire sur $\underset{\sim}{X}$ qui vérifie $R(r_m^{\underset{\sim}{X}}) \subseteq r_m^{\underset{\sim}{X}}$, alors R satisfait à la troisième condition de la définition précédente. Une des questions qui restent ouvertes est de déterminer si cette condition est nécessaire.

Remarque 2.7. Si R est une relation modale sur $\underset{\sim}{X}$, alors le sous-espace Ru est un fermé de X pour tout u dans $\underset{\sim}{X}$. En effet, si u et v sont des éléments de X tels que v n'appartient pas à Ru, alors le couple (u,v) n'est pas un élément de R et il existe des ouverts-fermés ω_x et ω_y de X tels que $\omega_u \times \omega_v$ contient (u,v) et soit une partie de $X \times X \setminus R$. On en déduit que ω_v contient v mais aucun élément de Ru, ce qui conclut la preuve.

Proposition 2.8. *Si $\underset{\sim}{X}$ est une structure de $\mathcal{X}_n$ et si R est une relation modale sur $\underset{\sim}{X}$, alors l'application $\Box_R$ définie sur $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$ par*

$$(\Box_R\alpha)(u) = \bigwedge_{v \in Ru} \alpha(v)$$

est un opérateur modal sur $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$.

Preuve. Tout d'abord, notons que si u est un élément de $\underset{\sim}{X}$ et si i est dans $\{0,\ldots,n\}$, il vient

$$(\Box_R\alpha)(u) = \tfrac{i}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u \in R^{-1}((\tau_{i+1}(\alpha))^{-1}(0)) \cap X \setminus R^{-1}((\tau_i(\alpha))^{-1}(0)) & \text{si } i < n, \\ u \in X \setminus R^{-1}((\tau_i(\alpha))^{-1}(0)) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

En effet, l'élément u est dans $R^{-1}((\tau_{i+1}(\alpha))^{-1}(0))$ si et seulement s'il existe un v dans Ru tel que $\alpha(v) \leq \frac{i}{n}$. Par ailleurs, u appartient à $X \setminus R^{-1}((\tau_i(\alpha))^{-1}(0))$ si et seulement si $\alpha(v') \not< \frac{i}{n}$ pour tout v' dans Ru.

Cela étant, la continuité de l'application $\Box_R\alpha$ découle du fait que l'image inverse par R d'un ouvert-fermé reste un ouvert-fermé. Par ailleurs, la troisième condition de la définition 2.6 nous assure que $\Box_R\alpha$ respecte les relations r_m $(m \in \operatorname{div}(n))$. Au total, l'application $\Box_R\alpha$ est un élément de $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$ pour tout α dans $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$.

Il nous reste à prouver que $\Box_R$ est effectivement un opérateur modal sur $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$. Il est d'abord évident que $\Box_R 1 = 1$. Par ailleurs, si τ est un terme croissant unaire sur $\mathcal{L}_{\mathrm{MV}}$ et si α est un élément de $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$, il vient

$$\tau(\Box_R\alpha) = \Box_R\tau(\alpha)$$

si et seulement si

$$\tau(\bigwedge_{v\in Ru}\alpha(v)) = \bigwedge_{v\in Ru}\tau(\alpha)(v)$$

pour tout u dans $\underset{\sim}{X}$. Or, si u est un élément de $\underset{\sim}{X}$, on déduit de la croissance de τ que

$$\tau(\bigwedge_{v\in Ru}\alpha(v)) \leq \bigwedge_{v\in Ru}\tau(\alpha)(v).$$

Par ailleurs, l'*infemum* des $\alpha(v)$ pour v parcourant Ru étant réalisé en un certain $\alpha(v_0)$ ($v_0 \in Ru$), il vient également

$$\tau(\bigwedge_{v\in Ru}\alpha(v)) = \tau(\alpha(v_0)) \geq \bigwedge_{v\in Ru}\tau(\alpha)(v).$$

Pour conclure, il nous suffit maintenant de prouver que l'application $\Box_R$ satisfait à l'axiome (K) sur $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$, c'est-à-dire que

$$(\Box_R(\alpha\to\beta)\to(\Box_R\alpha\to\Box_R\beta))(u) = 1$$

pour tous α et β dans $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$ et tout u dans $\underset{\sim}{X}$. Or, si α et β sont des éléments du dual de $\underset{\sim}{X}$, et u est un élément de $\underset{\sim}{X}$, il vient successivement

$$\begin{array}{cl} & (\Box_R(\alpha\to\beta)\to(\Box_R\alpha\to\Box_R\beta))(u) = 1 \\ \Leftrightarrow & (\Box_R(\alpha\to\beta)(u)) \leq (\Box_R\alpha)(u)\to(\Box_R\beta)(u) \\ \Leftrightarrow & \bigwedge_{v\in Ru}(\beta(v)\oplus\neg\alpha(v)) \leq (\bigwedge_{v\in Ru}\beta(v))\oplus\neg(\bigwedge_{v'\in Ru}\alpha(v')) \\ \Leftrightarrow & \bigwedge_{v\in Ru}(\beta(v)\oplus\neg\alpha(v)) \leq \bigwedge_{v\in Ru}(\beta(v)\oplus\neg\bigwedge_{v'\in Ru}\alpha(v')). \end{array}$$

Or, si uRv, il vient $\bigwedge_{v'\in Ru}\alpha(v') \leq \alpha(v)$, donc

$$\neg\alpha(v) \leq \neg\bigwedge_{v'\in Ru}\alpha(v')$$

et ainsi

$$\beta(v)\oplus\neg\alpha(v) \leq \beta(v)\oplus\neg\bigwedge_{v'\in Ru}\alpha(v'),$$

ce qui conclut la preuve. $\diamondsuit$

Résumons notre parcours dans le processus de dualisation des objets de la catégorie $\mathcal{MMV}_n$: nous avons défini la notion de *relation modale* sur un objet de $\mathcal{X}_n$ et nous savons que tout opérateur modal sur une algèbre $\underline{A}$ de $\mathcal{MV}_n$ se traduit (de manière canonique) en une relation modale sur son dual $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ et inversement (*idem*). Par ailleurs, nous savons que les techniques que nous avons développées assurent que si l'on traduit un opérateur $\Box$ sur $\underline{A}$ en une relation modale $R_\Box$ sur $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ (selon la définition 2.6), puis que nous traduisons, suivant la proposition 2.8, cette relation modale $R_\Box$ en un opérateur $\Box_{R_\Box}$ sur $\mathsf{ED}(\underline{A})$, alors l'opérateur obtenu est, à isomorphisme près, identique à l'opérateur $\Box$ de départ. C'était en effet l'objet de la proposition 2.3.

Pour conclure le processus la dualisation des objets de $\mathcal{MMV}_n$, il nous suffit donc maintenant de prouver que la traduction successive d'une relation modale R sur la structure $\underset{\sim}{X}$ de $\mathcal{X}$ en un opérateur $\Box_R$ sur $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$, puis de cet opérateur en une relation $R_{\Box_R}$ sur $\mathsf{DE}(\underset{\sim}{X})$ aboutit au final (à isomorphisme près) à la relation modale R de départ. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.9. *Si $\underset{\sim}{X}$ est une structure de $\mathcal{X}_n$, si R est une relation modale sur $\underset{\sim}{X}$, si $\Box_R$ est l'opérateur modal (défini sur $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$) associé à R selon la proposition 2.8 et si $R_{\Box_R}$ est la relation modale (définie sur $\mathsf{DE}(\underset{\sim}{X})$) associée à $\Box_R$, alors, à isomorphisme près, les relations R et $R_{\Box_R}$ coïncident.*

Preuve. Premièrement, montrons que si u et v sont des éléments de $\underset{\sim}{X}$ tels que uRv alors $\epsilon_{\underset{\sim}{X}}(u)R_{\Box_R}\epsilon_{\underset{\sim}{X}}(v)$. En effet, puisque uRv, il vient, par définition de $\Box_R$,

$$\Box_R(\alpha)(u) \leq \alpha(v)$$

pour tout α dans $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$. On en déduit que $\epsilon_{\underset{\sim}{X}}(u)R_{\Box_R}\epsilon_{\underset{\sim}{X}}(v)$ par définition de $R_{\Box_R}$.

Inversement, supposons que $\epsilon_{\underset{\sim}{X}}(u)R_{\Box_R}\epsilon_{\underset{\sim}{X}}(v)$, c'est-à-dire que

$$\forall\ \alpha \in \mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})\ (\epsilon_{\underset{\sim}{X}}(u)(\Box_R\alpha) = 1 \Rightarrow \epsilon_{\underset{\sim}{X}}(v)(\alpha) = 1),$$

ou encore

$$\forall\ \alpha \in \mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})\ ((\Box_R\alpha)(u) = 1 \Rightarrow \alpha(v) = 1),$$

ou enfin

$$\forall\ \alpha \in \mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})\ (Ru \subseteq \alpha^{-1}(1) \Leftrightarrow v \in \alpha^{-1}(1))$$

vu la définition de $\Box_R$.

On en déduit que uRv. Sinon, il existe un ouvert-fermé ω de $X \times X$ tel que

$$(u,v) \in \omega \subseteq X \times X \setminus R.$$

De manière équivalente, puisque X est un espace de BOOLE dont le dual (sous la dualité de STONE) est isomorphe à l'ensemble des idempotents de $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$, il existe deux éléments α et β de $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$, à valeurs dans $\{0,1\}$, tels que

$$(u,v) \in \alpha^{-1}(0) \times \beta^{-1}(0) \subseteq X \times X \setminus R.$$

Ainsi, il vient

$$Ru \subseteq X \setminus \beta^{-1}(0) = \beta^{-1}(1)$$

donc $\beta(v) = 1$, ce qui est absurde. $\diamondsuit$

Il est maintenant temps de s'occuper de la dualisation des morphismes de $\mathcal{MMV}_n$.

Proposition 2.10. *Soient $\langle \underline{A},\Box\rangle$ et $\langle \underline{B},\Box\rangle$ deux $\mathcal{MMV}_n$-algèbres. Si $f : \underline{A} \to \underline{B}$ est un homomorphisme de $\mathcal{MMV}_n$-algèbre, alors l'application $\mathsf{D}_n(f)$ est un morphisme de $\mathcal{X}_n$ entre $\mathsf{D}_n(\underline{B})$ et $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ tel que*

$$\mathsf{D}_n(f) \circ R = R \circ \mathsf{D}_n(f).$$

Preuve. Soit u un élément de $\mathsf{D}_n(\underline{B})$. Montrons d'abord que

$$\mathsf{D}_n(f)(Ru) \subseteq R(\mathsf{D}_n(f)(u)).$$

Pour cela, il nous suffit de montrer que si v appartient à Ru et si x est un élément de $\underline{A}$ tel que $(\mathsf{D}_n(f)(u))(\Box x) = 1$, alors $(\mathsf{D}_n(f)(v))(x) = 1$. Or, puisque l'application f respecte l'opérateur $\Box$, on a $u(f(\Box x)) = 1$ si et seulement si $u(\Box f(x)) = 1$, cette dernière identité entraînant $v(f(x)) = 1$ puisque uRv.

Montrons ensuite que

$$R(\mathsf{D}_n(f)(u)) \subseteq \mathsf{D}_n(f)(Ru).$$

Soit v' un élément de $R(\mathsf{D}_n(f)(u))$. Par définition, on a donc

$$u(\Box f(x)) = 1 \Rightarrow v'(x) = 1$$

pour tout x dans $\underline{A}$.

Cela étant, l'ensemble $\mathsf{D}_n(f)(Ru)$ est l'image par une application continue d'un espace compact (Ru est un fermé de l'espace compact $\mathsf{D}_n(\underline{B})$) et est par conséquent un compact. Comme c'est un sous-espace d'un espace séparé, il s'agit donc d'un fermé de $\mathsf{D}_n(\underline{A})$. Ainsi, pour montrer que v' appartient à $\mathsf{D}_n(f)(Ru)$, il suffit de prouver que tout voisinage de v' rencontre $\mathsf{D}_n(f)(Ru)$.

Soit donc b un idempotent de $\underline{A}$ et $[b:0]$ un ouvert-fermé de base de $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ contenant v'. Nous allons construire un élément de $[b:0] \cap \mathsf{D}_n(f)(Ru)$, c'est-à-dire un homomorphisme v appartenant à Ru tel que $v(f(b)) = 0$. Pour cela, notons que $\Box^{-1}(u^{-1}(1))$ est un filtre qui ne contient pas $f(b)$ (si c'était le cas, l'image de v' en $f(b)$ serait égale à 1). Il existe donc un filtre premier F contenant $\Box^{-1}(u^{-1}(1))$ mais pas $f(b)$. Dès lors, si π désigne la projection de $\underline{A}$ dans $\underline{A}/F$, on obtient $\pi(f(b)) \neq 1$. On conclut alors, similairement à la preuve 2.3, à l'existence d'un v de Ru tel que $v(f(b)) = 0$ (puisque $f(b)$ est un idempotent de $\underline{A}$). $\diamondsuit$

Le dual de cette proposition prend la forme suivante.

Proposition 2.11. *Soient $\underset{\sim}{X}$ et $\underset{\sim}{Y}$ deux structures de $\mathcal{X}_n$ et $R_{\underset{\sim}{X}}$ (resp. $R_{\underset{\sim}{Y}}$) une relation modale sur $\underset{\sim}{X}$ (resp. sur $\underset{\sim}{Y}$). Si $\psi : \underset{\sim}{X} \to \underset{\sim}{Y}$ est un $\mathcal{X}_n$-morphisme vérifiant*

$$\psi \circ R_{\underset{\sim}{X}} = R_{\underset{\sim}{Y}} \circ \psi,$$

alors $\mathsf{E}_n(\psi)$ est un homomorphisme de $\mathcal{MMV}_n$-algèbre de $\langle \mathsf{E}_n(\underset{\sim}{Y}), \Box_{R_{\underset{\sim}{Y}}} \rangle$ dans $\langle \mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X}), \Box_{R_{\underset{\sim}{X}}} \rangle$.

Preuve. Il nous suffit de montrer que si α appartient à $\mathsf{E}_n(\psi)$, alors

$$\mathsf{E}_n(\psi)(\Box_{R_{\underset{\sim}{Y}}} \alpha) = \Box_{R_{\underset{\sim}{X}}}(\mathsf{E}_n(\psi)(\alpha)).$$

Cela revient à prouver que

$$\Box_{R_{\underset{\sim}{Y}}} \alpha(\psi(u)) = \Box_{R_{\underset{\sim}{X}}}(\alpha \circ \psi)(u)$$

pour tout u dans $\underset{\sim}{X}$. Or, si u est un élément de $\underset{\sim}{X}$, l'équation précédente est équivalente à

$$\bigwedge_{v \in R_{\underset{\sim}{Y}}(\psi(u))} \alpha(v) = \bigwedge_{v' \in R_{\underset{\sim}{X}}(u)} \alpha(\psi(v')),$$

par définition de $\Box_{R_{\underset{\sim}{X}}}$ et $\Box_{R_{\underset{\sim}{Y}}}$. On conclut alors en utilisant le fait que $\psi(R_{\underset{\sim}{X}}(u)) = R_{\underset{\sim}{Y}}(\psi(u))$ pour tout u dans $\underset{\sim}{X}$. $\diamondsuit$

Nous pouvons donc maintenant définir ce qui se révélera être la catégorie duale à $\mathcal{MMV}_n$.

Définitions 2.12. La catégorie $\mathcal{MX}_n$ est la catégorie

- dont les objets sont les *$\mathcal{X}_n$-structures modales*, c'est-à-dire les structures topologiques $\langle \underset{\sim}{X}, R_{\underset{\sim}{X}} \rangle$ où
  - $\underset{\sim}{X}$ est un objet de $\mathcal{X}_n$,
  - $R_{\underset{\sim}{X}}$ est une relation modale sur $\underset{\sim}{X}$;
- dont les morphismes sont les applications $\psi : \langle \underset{\sim}{X}, R_{\underset{\sim}{X}} \rangle \to \langle \underset{\sim}{Y}, R_{\underset{\sim}{Y}} \rangle$ telles que
  - ψ est un $\mathcal{X}_n$-morphisme,

- $\psi \circ R_{\underset{\sim}{X}} = R_{\underset{\sim}{Y}} \circ \psi$.

Cela étant, si $\langle \underset{\sim}{X}, R_{\underset{\sim}{X}} \rangle$ et $\langle \underset{\sim}{Y}, R_{\underset{\sim}{Y}} \rangle$ sont deux objets de $\mathcal{MX}_n$, nous désignerons, suivant l'habitude, par $\mathcal{MX}_n(\langle \underset{\sim}{X}, R_{\underset{\sim}{X}} \rangle, \langle \underset{\sim}{Y}, R_{\underset{\sim}{Y}} \rangle)$ l'ensemble des $\mathcal{MX}_n$-morphismes de $\langle \underset{\sim}{X}, R_{\underset{\sim}{X}} \rangle$ dans $\langle \underset{\sim}{Y}, R_{\underset{\sim}{Y}} \rangle$.

Nos précédents développements se synthétisent maintenant de la façon suivante.

Théorème 2.13. *Soit $\mathsf{D}_n^* : \mathcal{MMV}_n \to \mathcal{MX}_n$ le foncteur défini par*

$$\mathsf{D}_n^* : \begin{cases} \langle \underline{A}, \Box_{\underline{A}} \rangle \mapsto \langle \mathsf{D}_n(\underline{A}), R_{\Box_{\underline{A}}}^{\mathsf{D}_n(\underline{A})} \rangle \\ f \in \mathcal{MMV}_n(\langle \underline{A}, \Box_{\underline{A}} \rangle, \langle \underline{B}, \Box_{\underline{B}} \rangle) \mapsto \mathsf{D}_n(f) \in \mathcal{MX}_n(\mathsf{D}_n^*(\langle \underline{B}, \Box_{\underline{B}} \rangle), \mathsf{D}_n^*(\langle \underline{A}, \Box_{\underline{A}} \rangle)) \end{cases}$$

où $R_{\Box_{\underline{A}}}^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ est la relation associée à $\Box_{\underline{A}}$ de la définition 2.2.

Soit également $\mathsf{E}_n^* : \mathcal{MX}_n \to \mathcal{MMV}_n$ le foncteur défini par

$$\mathsf{E}_n^* : \begin{cases} \langle \underset{\sim}{X}, R_{\underset{\sim}{X}} \rangle \mapsto \langle \mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X}), \Box_{R_{\underset{\sim}{X}}} \rangle \\ \psi \in \mathcal{MX}_n(\langle \underset{\sim}{X}, R_{\underset{\sim}{X}} \rangle, \langle \underset{\sim}{Y}, R_{\underset{\sim}{Y}} \rangle) \mapsto \mathsf{E}_n(\psi) \in \mathcal{MMV}_n(\mathsf{E}_n^*(\langle \underset{\sim}{Y}, R_{\underset{\sim}{Y}} \rangle), \mathsf{E}_n^*(\langle \underset{\sim}{X}, R_{\underset{\sim}{X}} \rangle)) \end{cases}$$

où $\Box_{R_{\underset{\sim}{X}}}$ est l'opérateur associé à $R_{\underset{\sim}{X}}$ suivant la proposition 2.8.

Alors les catégories $\mathcal{MMV}_n$ et $\mathcal{MX}_n$ sont dualement équivalentes par les foncteurs D_n^* et E_n^*.

Preuve. C'est une synthèse des propositions 2.3, 2.8, 2.9, 2.10 et 2.11. ♢

Exemples 2.14. Voici quelques illustrations directes de cette dualité.

(1) Si $\underset{\sim}{X}$ est une $\mathcal{X}_n$-structure et si R est la relation modale définie sur $\underset{\sim}{X}$ par $Ru = \emptyset$ pour tout u dans $\underset{\sim}{X}$, alors l'opérateur $\Box_R$ est l'opérateur défini sur $\mathsf{E}(\underset{\sim}{X})$ par $(\Box_R \alpha)(u) = 1$ pour tout u dans $\underset{\sim}{X}$.

(2) Si $\underset{\sim}{X}$ est une $\mathcal{X}_n$-structure et si R est la relation modale définie sur $\underset{\sim}{X}$ par $Ru = u$ pour tout u dans $\underset{\sim}{X}$, alors l'opérateur $\Box_R$ coïncide avec l'identité.

(3) Si $\Box_k$ est l'opérateur définit sur $\underline{\text{Ł}}_n^k$ dans le troisième exemple de 1.4, alors $R_{\Box_k}$ est la relation modale définie sur $\mathsf{D}_n(\underline{\text{Ł}}_n^k)$ par $Ru = \mathsf{D}_n(\underline{\text{Ł}}_n^k)$ pour tout u dans $\mathsf{D}_n(\underline{\text{Ł}}_n^k)$.

3. Quelques exemples

Une des questions fréquemment étudiée lorsqu'on développe une théorie de dualité pour des opérateurs consiste à déterminer quelles sont les propriétés des opérateurs qui admettent une traduction lors du processus de dualisation. Étudions quelques cas classiques.

3.1. Dualité pour les opérateurs additifs et normaux. Vu la proposition 1.5, un opérateur $\Box$ additif (i.e. $\Box(x \oplus y) = \Box x \oplus \Box y$) et normal (i.e. $\Box 0 = 0$) sur la MV-algèbre $\underline{A}$ est un homomorphisme de MV-algèbre de $\underline{A}$ dans lui-même. La proposition suivante ne doit donc pas étonner le lecteur attentif.

Proposition 3.1. *Si $\langle \underline{A}, \Box \rangle$ est une $\mathcal{MMV}_n$-algèbre telle que $\Box$ est additif et normal, alors $R_{\Box}^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ est un $\mathcal{X}_n$-morphisme de $\mathsf{D}_n(\underline{A})$ dans lui-même.*

Inversement, si $\langle \underset{\sim}{X}, R \rangle$ est une $\mathcal{MX}_n$-structure telle que la relation R est un $\mathcal{X}_n$-morphisme, alors $\Box_R$ est un endomorphisme de $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$.

Preuve. Soit $u \in \mathsf{D}_n(\underline{A})$. Nous allons prouver que

$$R_{\Box}^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}(u) = \{\mathsf{D}_n(\Box)(u)\},$$

ce qui suffira puisque $\Box$ est un homomorphisme de MV-algèbre. Évidemment, $\mathsf{D}_n(\Box)(u)$ appartient à $R_{\Box}^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}(u)$. Par ailleurs, si v est un élément de $R_{\Box}^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}(u)$, alors $\Box^{-1}(u^{-1}(1))$ est un filtre maximal inclus dans $v^{-1}(1)$, alors que $v^{-1}(1)$ est un filtre propre.

Inversement, si R est un $\mathcal{X}_n$-morphisme sur $\underset{\sim}{X}$ et si α est un élément de $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$, nous allons montrer que

$$\Box_R(\alpha) = \mathsf{E}_n(R)(\alpha).$$

En effet, si u appartient à $\underset{\sim}{X}$, il vient

$$(\Box_R\alpha)(u) = \bigwedge_{v\in R(u)} \alpha(v)) = \alpha(R(u)) = (\mathsf{E}_n(R)(\alpha))(u),$$

ce qui conclut la preuve. $\diamondsuit$

3.2. Dualisation de l'équation $\Box x \to \Box\Box x = 1$. Nous allons maintenant dualiser les opérateurs qui satisfont à l'équation $\Box x \to \Box\Box x = 1$, c'est-à-dire qui vérifient $\Box x \leq \Box\Box x$. Les lecteurs familiers avec le cas correspondant pour les algèbres de Boole ne devraient pas être désorientés.

Proposition 3.2. *Si $\langle \underline{A},\Box\rangle$ est une $\mathcal{MMV}_n$-algèbre qui satisfait à l'équation $\Box x \to \Box\Box x = 1$, alors la relation $R_{\Box}^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ est transitive.*

Inversement, si $\langle \underset{\sim}{X},R\rangle$ est une $\mathcal{MX}_n$-structure telle que R est transitif, alors $\Box_R\alpha \to \Box_R\Box_R\alpha = 1$ pour tout α dans $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$.

Preuve. Supposons que $uR^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}v$ et $vR^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}w$. Si x est un élément de $\underline{A}$ tel que $u(\Box x) = 1$, alors $u(\Box\Box x) = 1$, donc $v(\Box x) = 1$ puisque $uR^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}v$ et enfin $w(x) = 1$ puisque $vR^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}w$.

Inversement, si $\langle \underset{\sim}{X},R\rangle$ est une $\mathcal{MX}_n$-structure transitive, nous devons montrer que pour tout α dans $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$ et tout u dans $\underset{\sim}{X}$ l'inégalité

$$(\Box_R\alpha)(u) \leq (\Box_R\Box_R\alpha)(u)$$

équivalente à

$$\bigwedge_{v\in Ru} \alpha(v) \leq \bigwedge_{v\in Ru} (\Box\alpha)(v)$$

est satisfaite. On conclut donc en notant que le deuxième membre de cette inégalité est égal à $\bigwedge_{v\in Ru}\bigwedge_{v'\in Rv}\alpha(v')$, et en exploitant la transitivité de R. $\diamondsuit$

3.3. Dualité pour les opérateurs d'intérieurs. Un opérateur d'intérieur sur la MV-algèbre $\underline{A}$ est un opérateur $\Box$ qui satisfait aux deux équations $\Box\Box x = \Box x$ et $\Box x \to x = 1$.

De nouveau, nous constatons que ces opérateurs se dualisent de manière classique.

Proposition 3.3. *Si $\Box$ est un opérateur d'intérieur sur la $\mathcal{MMV}_n$-algèbre $\underline{A}$, alors $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ est un préordre sur $\mathsf{D}_n(\underline{A})$.*

Inversement, si $\langle \underset{\sim}{X},R\rangle$ est une $\mathcal{MX}_n$-structure telle que R est un préordre, alors l'opérateur $\Box_R$ est un opérateur d'intérieur sur $\mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X})$

Preuve. Puisque $\Box\Box x = \Box x$, on sait déjà que $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ est transitif. La réflexivité de $R^{\mathsf{D}_n(\underline{A})}$ découle quant à elle du fait que $\Box x \leq x$ pour tout x dans $\underline{A}$.

Inversement, si R est un préorde, il est transitif et $\langle \mathsf{E}_n(\underset{\sim}{X}), \Box_R \rangle$ satisfait à l'équation $\Box x \to \Box\Box x = 1$ sur $\mathsf{E}(\underset{\sim}{X})$. Montrons maintenant que l'équation $\Box x \to x = 1$ (donc $\Box\Box x \to \Box x = 1$) est également satisfaite. Comme

$$(\Box_R \alpha)(u) = \bigwedge_{v \in Ru} \alpha(v)$$

et que $u \in Ru$, il est évident que $(\Box_R \alpha)(u) \leq \alpha(u)$ pour tout u dans $\underset{\sim}{X}$, ce qui suffit. $\Diamond$

4. Quelques questions ouvertes

Le présent travail ne doit être vu que comme une introduction à la théorie des MV-algèbres à opérateurs. Néanmoins, la dualité topologique que nous avons développée pour la classe $\mathcal{MMV}_n$ pourrait se révéler être un outil puissant pour une étude plus approfondie de ces algèbres. Ainsi, les résultats des sections précédentes font place à de multiples questions concernant la dualité développée et son champs d'application.

Il serait tout d'abord intéressant de déterminer si la condition de saturation $R(r_m^{\underset{\sim}{X}}) \subseteq r_m^{\underset{\sim}{X}}$ où R est une relation modale est une condition nécessaire. Si ce n'est pas le cas, les relations modales qui vérifient cette condition définissent une classe d'opérateurs modaux dont il serait utile d'obtenir l'axiomatisation.

Par ailleurs, nous avons montré qu'un opérateur modal sur une MV-algèbre $\underline{A}$ définit un opérateur d'algèbre de BOOLE sur $\mathfrak{B}(\underline{A})$. Inversement, il n'est pas vrai que tout opérateur d'algèbre de BOOLE sur $\mathfrak{B}(\underline{A})$ s'étend en un opérateur sur $\underline{A}$. En effet, cela signifierait que toute relation booléenne définie sur l'espace topologique sous-jacent à une structure $\underset{\sim}{X}$ de $\mathcal{X}_n$ est une relation modale sur $\underset{\sim}{X}$ (propriété pour laquelle il est très facile d'obtenir un contre-exemple dans les structures finies). Ainsi, on pourrait essayer de déterminer la classe des opérateurs sur $\mathfrak{B}(\underline{A})$ qui s'étendent en un opérateur sur $\underline{A}$.

Ensuite, nous pourrions tenter de construire les produits et les coproduits dans la catégorie $\mathcal{MX}_n$ et déterminer si la dualité développée fait correspondre les produits aux coproduits et inversement. Ce travail constitue une piste sérieuse pour l'obtention des algèbres libres dans la classe $\mathcal{MMV}_n$, résultat essentiel pour l'étude d'une logique modale multivaluée.

Index des notations

Index

Bibliographie

[1] R. Bonnet. « *Handbook of boolean algebras* », Chapitre 10. North-Holland, 1989.

[2] L. Borkowski. *Jan Łukasiewicz selected works*. North Holland, 1970.

[3] S. Burris et H.P. Sankappanavar. *A course in Universal Algebra*, volume 78 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1981.

[4] C.C. Chang. « Algebraic analysis of many-valued logics ». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:467–490, 1958.

[5] C.C. Chang. « A new proof of the completness theorem of the Łukasiewicz axioms ». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93, 1959.

[6] R. Cicnoli, I.M.L. D'Ottaviano et D. Mundici. *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, volume 7 de *Trends in Logic—Studia Logica Library*. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[7] R. Cignoli, E. J. Dubuc et D. Mundici. « Extending Stone duality to multisets and locally finite MV-algebras ». *J. Pure Appl. Algebra*, 189:37–59, 2004.

[8] R. Cignoli et A. Torrens. « Boolean Products of MV-algebras: Hypernormal MV-algebras ». *J. Math. Anal. Appl.*, 199:637–653, 1996.

[9] D.M. Clark et B.A. Davey. *Natural Dualities for the Working Algebraist*. Cambridge University Press, 1998.

[10] D.M. Clark et P.H. Krauss. « Topological quasi-varieties ». *Acta Sci. Math.*, 47:3–39, 1984.

[11] G. Grätzer. *Universal Algebra*. Springer–Verlag, second édition, 1979.

[12] G. Grätzer. *General Lattice Theory*. Birkäuser, second édition, 1998.

[13] G. Grätzer, K.M. Koh et M. Makkai. « On the lattice of subalgebras of a Boolean algebra ». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 36(1):87–92, 1972.

[14] G. Hansoul. « A duality for boolean algebras with operators ». *Algebra Universalis*, 17:34–49, 1983.

[15] G. Hansoul. « Priestley Duality for Some Subalgebra Lattices ». *Studia Logica*, 56:133–149, 1996.

[16] B. Jónsson et A. Tarski. « Boolean algebras with operators. I ». *Amer. J. Math.*, 73:891–939, 1951.

[17] B. Jónsson et A. Tarski. « Boolean algebras with operators. II ». *Amer. J. Math.*, 74:127–162, 1952.

[18] Y. Komori. « Completness of two theories on ordered abelian groups and embedding relations ». *Nagoya Math. J.*, 77:33–39, 1980.

[19] Y. Komori. « Super-Łukasiewicz propositional logics ». *Nagoya Math. J.*, 84:119–133, 1980.

[20] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician*, volume 5 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1971.

[21] P. Mathonet, P. Niederkorn et B. Teheux. « Natural dualities for the finitely generated varieties of MV-algebras ». Rapport Technique Prépublication 04-003, ULg, 2004.

[22] R. McNaughton. « A theorem about infinite-valued sentential logic ». *J. Symb. Log.*, 16:1–13, 1951.

[23] P. Niederkorn. « Natural Dualities for Varieties of MV-algebras, I ». *J. Math. Anal. Appl.*, 255:58–73, 2001.

[24] P. Niederkorn. « *Algebraic aspects of Fuzzy Logic: BL-algebras and their hoop subreducts* ». PhD thesis, ULg, 2002.

[25] L.S. Pontryagin. « Sur les groupes abéliens continus ». *C.R. Acad. Sc. Paris*, 198:238–240, 1934.

[26] L.S. Pontryagin. « The theory of topological commutative groups ». *Ann. Math.*, 35:361–388, 1934.

[27] H.A. Priestley. « Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces ». *Bull. London Math. Soc.*, 2:186–190, 1970.

[28] H.A. Priestley. « Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices ». *Proc. London Math. Soc.*, 24:507–530, 1972.

[29] D. Sachs. « The lattice of subalgebras of a Boolean algebra ». *Canad. J. Math.*, 14, 1962.

[30] M.H. Stone. « The Theory of representations for Boolean Algebras ». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40:37–111, 1936.

[31] J. Łukasiewicz. « O lgice trójwartośiowej ». *Ruch Filo.*, 5:170–171, 1920.

[32] J. Łukasiewicz et A. Tarski. « Untersuchungen über den Aussagenkalkül ». *C.R. Séances Soc. Sci. Lett. Varsovie Cl. III*, 23:30–50, 1930.

[33] L. Vrancken-Mawet. « The lattice of R-subalgebras of a bounded distributive lattice ». *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 25:1–17, 1984.