

UNIVERSITE DE LIÈGE  
MÉHODES DE FABRICATION  
Rapport LMF/D52

## Pseudo-articulations à col parabolique

J.F. Debongnie

25 juin 2012

### 1 Introduction

Le Laboratoire de Méthodes de Fabrication de l'Université de Liège s'était déjà consacré dans le passé à l'étude des pseudo-articulations à col *circulaire* (Merken et Debongnie, [4, 3]). Ces travaux ont été étendus récemment par l'auteur au cas du col *elliptique* [1].

La démarche suivie dans ces travaux a consisté à calculer par la résistance des matériaux la solution exacte pour les différentes sollicitations de base. Comme ces solutions sont souvent des expressions algébriques compliquées, nous avons systématiquement suivi la voie suivante :

- Tout d'abord, on calcule la solution exacte.
- On dégage de celle-ci la solution asymptotique pour de très faibles épaisseurs de col.
- On présente alors la solution générale sous forme d'une correction de la solution asymptotique par un facteur dépendant de l'épaisseur relative du col.
- On dégage, par une analyse numérique, une approximation simple du facteur correctif.

Cette démarche originale fournit des solutions très bien approchées et beaucoup plus simples à utiliser que celles de la littérature [6, 5, 2], ce qui constitue un argument appréciable au niveau de la conception.

Nous avons conservé ce schéma général dans le présent travail, qui est consacré à la théorie du col *parabolique*. Les calculs sont présentés dans leur détail.

### 2 Géométrie

Nous nous proposons dans ce qui suit d'étudier le comportement élastique de cols paraboliques tels que celui de la figure 1. le col a une épaisseur minimale  $h_0$ . Pour l'obtenir, on a découpé d'un bloc rectangulaire, symétriquement de

chaque côté, des paraboles de profondeur  $a$  et de longueur  $2\ell$ . Il est supposé que le rapport  $h_0/a$  est relativement petit et, en tout cas, que  $h_0/a \leq 0,5$ , ce qui suffit à tous les besoins pratiques. Nous utiliserons la coordonnée  $x$  prise suivant l'axe moyen de la pseudo-articulation, avec comme origine le point le plus étroit du col. Cette coordonnée varie donc entre  $-\ell$  et  $\ell$ . L'épaisseur du col perpendiculairement au dessin est notée  $b$ . Comme le montre la figure 1,

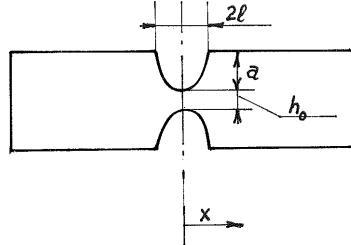


FIGURE 1 – Col parabolique

l'épaisseur du col dans le plan du dessin a la forme générale

$$h = h_0 + \alpha x^2$$

À l'extrémité du col, en  $x = \ell$ , l'épaisseur vaut  $h = h_0 + 2a$ , ce qui donne

$$h_0 + \alpha \ell^2 = h_0 + 2a$$

soit

$$\alpha = \frac{2a}{\ell^2}$$

Ainsi,

$$h = h_0 + 2a \frac{x^2}{\ell^2} = h_0 \left( 1 + \frac{2a}{h_0} \frac{x^2}{\ell^2} \right) \quad (1)$$

En utilisant la variable réduite

$$\xi = \sqrt{\frac{2a}{h_0}} \frac{x}{\ell} \quad (2)$$

relation qui s'inverse en

$$x = \sqrt{\frac{h_0}{2a}} \ell \xi \quad (3)$$

on obtient

$$h = h_0(1 + \xi^2) \quad (4)$$

### 3 Flexion pure dans le plan du dessin

#### 3.1 Forme générale

Sous l'effet d'un moment uniforme  $M_f$ , la rotation  $\alpha_f$  est régie par l'équation

$$\frac{d\alpha_f}{dx} = \frac{12M_f}{Ebh^3}$$

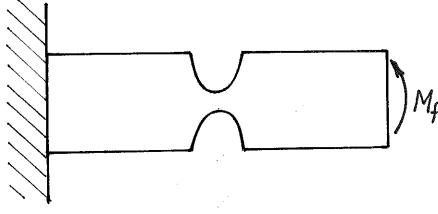


FIGURE 2 – Moment constant dans le plan du dessin

où  $b$  est l'épaisseur du col. La rotation d'extrémité vaut donc

$$\alpha_f(\ell) = \frac{12M_f}{Eb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h^3} = \frac{M_f}{Eb} \mathcal{I}_1 \quad (5)$$

### 3.2 Calcul de l'intégrale $\mathcal{I}_1$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= 12 \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h^3} \\ &= 24 \int_0^{\ell} \frac{dx}{h^3} \\ &= \frac{24}{h_0^3} \sqrt{\frac{h_0}{2a}} \ell \int_0^{\xi^*} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^3} \\ &= \frac{\ell}{2a} \frac{\sqrt{2a}}{h_0^{5/2}} \mathcal{J}_1 \end{aligned} \quad (6)$$

avec

$$\xi^* = \sqrt{\frac{2a}{h_0}}$$

Posons

$$\xi = \operatorname{tg} \varphi$$

ce qui donne

$$d\xi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi, \quad 1 + \xi^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

Il vient, en notant  $\phi^* = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a}{h_0}}$ ,

$$\frac{1}{24} \mathcal{J}_1 = \int_0^{\xi^*} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^3} = \int_0^{\varphi^*} \cos^4 \varphi d\varphi$$

Or,

$$\begin{aligned} \cos^4 \varphi &= \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi = \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2\varphi)^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) = \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2\varphi) + \frac{1}{8} (1 + \cos 4\varphi) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{24}\mathcal{J}_1 = \frac{3}{8}\varphi^* + \frac{1}{4}\sin 2\varphi^* + \frac{1}{32}\sin 4\varphi^*$$

Comme

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi^* &= 2\sin \varphi^* \cos \varphi^* = 2\tg \varphi^* \cos^2 \varphi^* = \frac{2\tg \varphi^*}{1+\tg^2 \varphi^*} \\ &= \frac{2\sqrt{\frac{2a}{h_0}}}{1+\frac{2a}{h_0}} = \frac{2\sqrt{\frac{h_0}{2a}}}{1+\frac{h_0}{2a}} \\ \cos 2\varphi^* &= \cos^2 \varphi^* - \sin^2 \varphi^* = \cos^2 \varphi^*(1-\tg^2 \varphi^*) = \frac{1-\tg^2 \varphi^*}{1+\tg^2 \varphi^*} \\ &= \frac{1-\frac{2a}{h_0}}{1+\frac{2a}{h_0}} = \frac{-1+\frac{h_0}{2a}}{1+\frac{h_0}{2a}} \\ \sin 4\varphi^* &= 2\sin 2\varphi^* \cos 2\varphi^* = -4\frac{\sqrt{\frac{h_0}{2a}}(1-\frac{h_0}{2a})}{(1+\frac{h_0}{2a})^2} \end{aligned}$$

on obtient

$$\frac{1}{24}\mathcal{J}_1 = \frac{3}{8}\arctg \sqrt{\frac{2a}{h_0}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{h_0}{2a}}}{1+\frac{h_0}{2a}} - \frac{1}{8}\frac{\sqrt{\frac{h_0}{2a}}(1-\frac{h_0}{2a})}{(1+\frac{h_0}{2a})^2}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= 9\arctg \sqrt{\frac{2a}{h_0}} + 12\frac{\sqrt{\frac{h_0}{2a}}}{1+\frac{h_0}{2a}} - 3\frac{\sqrt{\frac{h_0}{2a}}(1-\frac{h_0}{2a})}{(1+\frac{h_0}{2a})^2} \\ &= 9\arctg \sqrt{\frac{2a}{h_0}} + 12\frac{\sqrt{\frac{h_0}{2a}}}{1+\frac{h_0}{2a}} \left(1 - \frac{1}{4}\frac{1-\frac{h_0}{2a}}{1+\frac{h_0}{2a}}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

### 3.3 Valeur asymptotique pour $h_0/a \rightarrow 0$

Pour les très faibles valeurs du rapport  $h_0/a$ , on obtient

$$\mathcal{J}_1 \approx \mathcal{J}_{1,as} = \frac{9\pi}{2}$$

ce qui donne

$$\alpha_f(\ell)_{as} = \frac{9\pi}{2} \frac{\ell}{2a} \frac{\sqrt{2a}}{h_0^{5/2}} \frac{M_f}{Eb} \quad (8)$$

### 3.4 Coefficient correcteur

Pour des valeurs usuelles de  $h_0/a$ , c'est-à-dire allant jusqu'à  $h_0/a = 1/2$ , proposons-nous d'écrire la solution sous la forme

$$\alpha_f(\ell) = \alpha_f(\ell)_{as} \cdot \frac{1}{K_1(h_0/a)}$$

ce qui revient à dire

$$K_1 = \frac{9\pi}{2\mathcal{J}_1} \quad (9)$$

Un ajustement numérique donne l'expression approchée suivante de  $K_1$  :

$$K_1 \approx K_{1,app} = 1 + 0,0264 \left( \frac{h_0}{a} \right)^2 \quad (10)$$

avec une erreur inférieure à 0,018% pour  $h_0/a \leq 0,5$ , comme le montre le tableau suivant :

$h_0/a$	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5
$\mathcal{J}_1$	1,413716	1,413712	1,413672	1,413475	1,412480	1,404434
$\mathcal{J}_{1,app}$	1,413713	1,413702	1,413623	1,413344	1,412225	1,404447
$\Delta\%$	-0,0002	-0,0007	-0,003	-0,009	-0,018	+0,001

Le calcul peut donc se faire simplement par la formule

$$\alpha_f(\ell)_{app} = \frac{9\pi}{2} \frac{\ell}{2a} \frac{\sqrt{2a}}{h_0^{5/2}} \frac{M_f}{Eb} \cdot \frac{1}{K_{1,app}} \quad (11)$$

On notera que le déplacement de flexion en  $x = \ell$  est donné par

$$v_f(\ell) = \ell \alpha_f(\ell) \quad (12)$$

## 4 Raideur en torsion

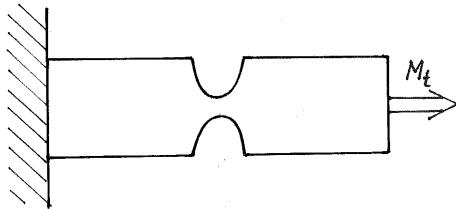


FIGURE 3 – Torsion

Pour un moment de torsion  $M_t$  appliqué à l'extrémité du col, la rotation de torsion  $\psi$  vérifie l'équation

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{M_t}{\frac{1}{3}Gbh^3}$$

Intégrant, on obtient

$$\psi(\ell) = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{3M_t}{Gbh^3} dx = \frac{3M_t}{Gb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h^3} = \frac{1}{4} \frac{M_t}{Gb} \mathcal{I}_1$$

On retrouve la même intégrale qu'en flexion pure, ce qui permet d'écrire immédiatement

$$\psi(\ell) = \frac{9\pi}{8} \frac{\ell}{2a} \frac{\sqrt{2a}}{h_0^{5/2}} \frac{M_t}{Gb} \cdot \frac{1}{K_1} \quad (13)$$

avec le même  $K_1$  que ci-dessus.

## 5 Raideur en extension

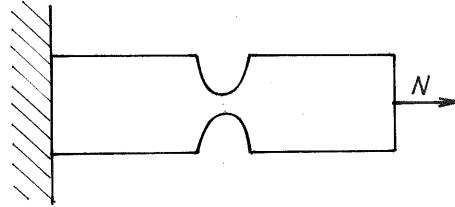


FIGURE 4 – Extension

### 5.1 Expression générale

Sous l'effet d'un effort normal  $N$ , le déplacement  $u$  est régi par l'équation

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{Ebh}$$

si bien que

$$u(\ell) = \frac{N}{Eb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h} = \frac{N}{Eb} \mathcal{I}_2 \quad (14)$$

### 5.2 Calcul de l'intégrale $\mathcal{I}_2$

On obtient aisément

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h} = 2 \int_0^{\ell} \frac{dx}{h} = 2 \sqrt{\frac{h_0}{2a}} \ell \frac{1}{h_0} \int_0^{\xi^*} \frac{du}{1+u^2} = 2 \frac{\ell}{2a} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} \int_0^{\xi^*} \frac{du}{1+u^2} \\ &= 2 \frac{\ell}{2a} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} \end{aligned} \quad (15)$$

### 5.3 Valeur asymptotique

Pour les faibles valeurs de  $h_0/a$ , la valeur asymptotique de  $\mathcal{I}_2$  est

$$\mathcal{I}_{2,as} = \pi \frac{\ell}{2a} \sqrt{\frac{2a}{h_0}}$$

ce qui donne

$$u(\ell)_{as} = \frac{N}{Eb} \pi \frac{\ell}{2a} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} \quad (16)$$

### 5.4 Coefficient correcteur

A nouveau, nous écrirons

$$u(\ell) = u(\ell)_{as} \cdot \frac{1}{K_2}$$

ce qui revient à dire

$$K_2 = \frac{\pi \frac{\ell}{2a} \sqrt{\frac{2a}{h_0}}}{I_2} = \frac{\pi}{2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a}{h_0}}} \quad (17)$$

Cette expression est utilisable en pratique. On peut également l'approcher comme suit :

$$K_2 \approx K_{2,app} = 1 + 0,56 \sqrt{\frac{h_0}{a}} \quad (18)$$

ce qui donne, pour  $h_0/a \leq 0,5$ , une erreur relative inférieure à 1,61%, comme le montre le tableau suivant :

$h_0/a$	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5
$K_2$	1,047046	1,067750	1,110904	1,162857	1,242209	1,418776
$K_{2,app}$	1,056000	1,079196	1,125220	1,177088	1,250440	1,395980
$\Delta\%$	0,85	1,07	1,28	1,22	0,66	-1,61

## 6 Raideur en flexion pure dans le plan transverse

La rotation  $\beta$  due à un moment uniforme dans le plan perpendiculaire à celui du dessin est donnée par

$$\beta(\ell) = \frac{12M_{fT}}{Eb^3} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h} = \frac{12M_{fT}}{Eb^3} I_2 \quad (19)$$

Il s'agit de la même intégrale qu'en extension, ce qui nous permet d'écrire directement

$$\beta(\ell)_{as} = \frac{12M_{fT}}{Eb^3} \pi \frac{\ell}{2a} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} \quad (20)$$

et

$$\beta(\ell) = \beta(\ell)_{as} \cdot \frac{1}{K_2} \quad (21)$$

avec le même  $K_2$  que ci-dessus.

## 7 Raideur en translation latérale pure dans le plan

On peut obtenir une translation d'une extrémité sans rotation parasite en appliquant une charge latérale  $Q$  au droit du col, ce qui se réalise par l'artifice illustré en figure 5. Le moment de flexion a alors pour expression  $M_f = -Qx$ . La déformée inclut un terme de flexion et un terme de cisaillement :  $v = v_f + v_c$ .

### 7.1 Contribution de la flexion

#### 7.1.1 Expression générale

L'équation régissant la rotation de flexion  $\alpha_f$  est

$$\frac{d\alpha_f}{dx} = \frac{12M_f}{Ebh^3} = -\frac{12Q_x}{Ebh^3} \quad (22)$$

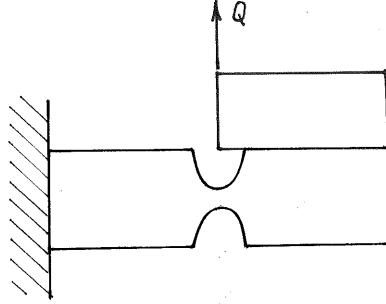


FIGURE 5 – Obtention d'une translation latérale pure d'une extrémité dans le plan

On en déduit

$$v_f(\ell) = \int_{-\ell}^{\ell} \alpha_f dx = [x\alpha_f]_{-\ell}^{\ell} - \int_{-\ell}^{\ell} x \frac{d\alpha_f}{dx} dx$$

Le second membre de (22) étant impair, on se ramène à

$$v_f = - \int_{-\ell}^{\ell} x \frac{d\alpha_f}{dx} dx = \frac{12Q}{Eb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{x^2}{h^3} dx = \frac{Q}{Eb} \cdot 24 \int_0^{\ell} \frac{x^2}{h^3} dx = \frac{Q}{Eb} \mathcal{I}_3 \quad (23)$$

### 7.1.2 Calcul de l'intégrale $\mathcal{I}_3$

On a

$$\mathcal{I}_3 = 24 \int_0^{\ell} \frac{x^2}{h^3} dx = 24 \cdot \frac{1}{h_0^3} \left( \frac{h_0}{2a} \right)^{3/2} \ell^3 \int_0^{\xi^*} \frac{\xi^2 d\xi}{(1 + \xi^2)^3} \quad (24)$$

$$= 24 \left( \frac{\ell}{2a} \right)^3 \cdot \left( \frac{2a}{h_0} \right)^{3/2} \mathcal{J}_3 \quad (25)$$

avec

$$\mathcal{J}_3 = \int_0^{\xi^*} \frac{\xi^2 d\xi}{(1 + \xi^2)^3} \quad (26)$$

Posant encore une fois  $\xi = \operatorname{tg} \varphi$ , on obtient

$$\frac{\xi^2 d\xi}{(1 + \xi^2)^3} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi}{\frac{1}{\cos^6 \varphi}} = \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi = \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi d\varphi$$

si bien que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 &= \frac{1}{4} \int_0^{\varphi^*} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{8} \int_0^{\varphi^*} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{1}{8} \varphi^* - \frac{1}{32} \sin 4\varphi^* \\ &= \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} + \frac{1}{8} \frac{\sqrt{\frac{h_0}{2a}} (1 - \frac{h_0}{2a})}{\left(1 + \frac{h_0}{2a}\right)^2} \end{aligned}$$

Au total,

$$\mathcal{I}_3 = 3 \left( \frac{\ell}{2a} \right)^3 \cdot \left( \frac{2a}{h_0} \right)^{3/2} \left[ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} + \frac{\sqrt{\frac{h_0}{2a}} (1 - \frac{h_0}{2a})}{\left(1 + \frac{h_0}{2a}\right)^2} \right] \quad (27)$$

### 7.1.3 Forme asymptotique

Pour les très faibles valeurs de  $h_0/a$ , on obtient la valeur asymptotique suivante de  $\mathcal{I}_3$  :

$$\mathcal{I}_{3,as} = \frac{3\pi}{2} \left( \frac{\ell}{2a} \right)^3 \cdot \left( \frac{2a}{h_0} \right)^{3/2} \quad (28)$$

soit

$$v_f(\ell)_{as} = \frac{Q}{Eb} \cdot \frac{3\pi}{2} \left( \frac{\ell}{2a} \right)^3 \cdot \left( \frac{2a}{h_0} \right)^{3/2} \quad (29)$$

### 7.1.4 Coefficient correcteur

Suivant toujours la même démarche, nous écrirons dans le cas général

$$v_f(\ell) = v_f(\ell)_{as} \cdot \frac{1}{K_3} \quad (30)$$

$K_3$  étant défini par

$$K_3 = \frac{\frac{3\pi}{2}}{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} + \frac{\sqrt{\frac{h_0}{2a}} (1 - \frac{h_0}{2a})}{(1 + \frac{h_0}{2a})^2}} \quad (31)$$

On peut approcher ce coefficient par l'expression simple

$$K_{3,app} = 1 + 0,455 \left( \frac{h_0}{a} \right)^{1,44} \quad (32)$$

avec une erreur inférieure à 0,25% pour  $h_0/a \leq 0,5$ , comme le montre le tableau suivant :

$h_0/a$	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5
$K_3$	1,000595	1,001670	1,006461	1,017694	1,047386	1,166016
$K_{3,app}$	1,000600	1,001627	1,006089	1,016520	1,044822	1,16769
$\Delta\%$	0,00046	-0,0043	-0,037	-0,12	-0,25	0,14

## 7.2 Contribution du cisaillement

### 7.2.1 Expression générale

L'équation est ici

$$\frac{dv_c}{dx} = \frac{Q}{\frac{5}{6}Gbh}$$

ce qui donne, à l'extrémité,

$$v_c(\ell) = \frac{6Q}{Gb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h} = \frac{6Q}{5Gb} \mathcal{I}_2 \quad (33)$$

On retrouve encore la même intégrale qu'en extension, ce qui permet d'écrire directement

$$v_c(\ell) = \frac{6Q}{5Gb} \pi \frac{\ell}{a} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} \cdot \frac{1}{K_2} \quad (34)$$

Cette contribution est en général négligeable devant celle de flexion.

## 8 Raideur en translation latérale pure hors plan

Il s'agit du même type de sollicitation que ci-dessus, mais dans la direction transversale au plan du dessin. La charge appliquée sera ici notée  $R$ , et le déplacement correspondant  $w$  se décomposer encore en un terme de flexion  $w_f$  et un terme de cisaillement  $w_c$ . La rotation sera notée  $\beta$ .

### 8.1 Contribution de la flexion

#### 8.1.1 Expression générale

Partant de la relation de base donnant la rotation

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{12M_{fT}}{dx} = -12 \frac{Rx}{Eb^3h} \quad (35)$$

on a

$$w_f(\ell) = \int_{-\ell}^{\ell} \beta dx = [x\beta]_{-\ell}^{\ell} - \int_{-\ell}^{\ell} x \frac{d\beta}{dx} dx$$

soit

$$w_f(\ell) = \frac{12R}{Eb^3} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{x^2 dx}{h} = \frac{R}{b^3} \cdot 24 \int_0^{\ell} \frac{x^2 dx}{h} = \frac{R}{b^3} \mathcal{I}_4 \quad (36)$$

#### 8.1.2 Calcul de l'intégrale $\mathcal{I}_4$

On a

$$\frac{\mathcal{I}_4}{24} = \int_0^{\ell} \frac{x^2 dx}{h} = \left( \frac{h_0}{2a} \right)^{3/2} \frac{\ell^3}{h_0} \int_0^{\xi^*} \frac{\xi^2 d\xi}{1 + \xi^2} = \frac{\ell^3 \sqrt{h_0}}{(2a)^{3/2}} \mathcal{J}_4 = \frac{\ell^3}{2a} \sqrt{\frac{h_0}{2a}} \mathcal{J}_4$$

avec

$$\mathcal{J}_4 = \int_0^{\xi^*} \frac{\xi^2 d\xi}{1 + \xi^2} = \int_0^{\xi^*} \frac{1 + \xi^2 - 1}{1 + \xi^2} d\xi = \xi^* - \operatorname{arctg} \xi^* = \sqrt{\frac{2a}{h_0}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a}{h_0}}$$

donc

$$w_f(\ell) = \frac{12R\ell^3}{Eb^3a} \left( 1 - \sqrt{\frac{h_0}{2a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} \right) \quad (37)$$

#### 8.1.3 Valeur asymptotique

Pour les très faible valeurs de  $h_0/a$ , on obtient l'expression asymptotique suivante :

$$w_f(\ell)_{as} = 12 \frac{R\ell^2}{Eb^3} \cdot \frac{\ell}{a} \quad (38)$$

#### 8.1.4 Coefficient correcteur

Dans le cas général, on peut écrire

$$w_f(\ell) = w_f(\ell)_{as} \cdot \frac{1}{K_4} \quad (39)$$

où  $K_4$  est défini par

$$K_4 = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{h_0}{2a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a}{h_0}}} \quad (40)$$

Ce coefficient peut être approché par l'expression suivante :

$$\frac{1}{K_{4,app}} = 1 - 1,111\sqrt{\frac{h_0}{a}} + 0,470\frac{h_0}{a} \quad (41)$$

à vrai dire pas tellement plus simple et conduisant, pour  $h_0/a \leq 0,5$  à une erreur relative inférieure à 0,7%, comme le montre le tableau suivant :

$h_0/a$	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5
$1/K_4$	0,893920	0,852587	0,776430	0,697950	0,600124	0,0446426
$1/K_{4,app}$	0,893600	0,852281	0,775073	0,695671	0,597146	0,449404
$\Delta\%$	-0,036	-0,071	-0,17	-0,33	-0,50	0,67

## 8.2 Contribution du cisaillement

Le déplacement dû à la déformation de cisaillement vaut

$$w_c(\ell) = \frac{6R}{5Gb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h} = \frac{6R}{5Gb} \mathcal{I}_2 \quad (42)$$

où l'on retrouve encore l'intégrale  $\mathcal{I}_2$  que nous avons rencontrée en extension. On a donc immédiatement

$$w_c(\ell) = \frac{6R}{5Gb} \pi \frac{\ell}{2a} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} \cdot \frac{1}{K_2} \quad (43)$$

Il faut noter que cette contribution n'est en général pas négligeable devant celle de flexion.

## Références

- [1] J. F. DEBONGNIE – « Comportement des articulations flexibles à col elliptique », *VII èmes journées d'études techniques 2012, Marrakech*, mai 2012.
- [2] N. LOBUNIU – *Compliant mechanisms - design of flexure hinges*, CRC press, Boca Raton, Florida, 2002.
- [3] P. MERKEN – « La fonction guidage en micromécanique », Thèse de D.E.A., Université de Liège, 2006.
- [4] P. MERKEN et J. F. DEBONGNIE – « Le col circulaire comme articulation flexible », *6ème congrès national de mécanique théorique et appliquée, Gent*, mai 2003.
- [5] J. M. PAROS et L. WEISBORD – « How to design flexure hinges », *Machine Design* **25** (1965), p. 151–156.
- [6] S.HENEIN – *Conception des guidages flexibles*, Presses polytechniques et universitaires romandes, collection META, Lausanne, 2001.