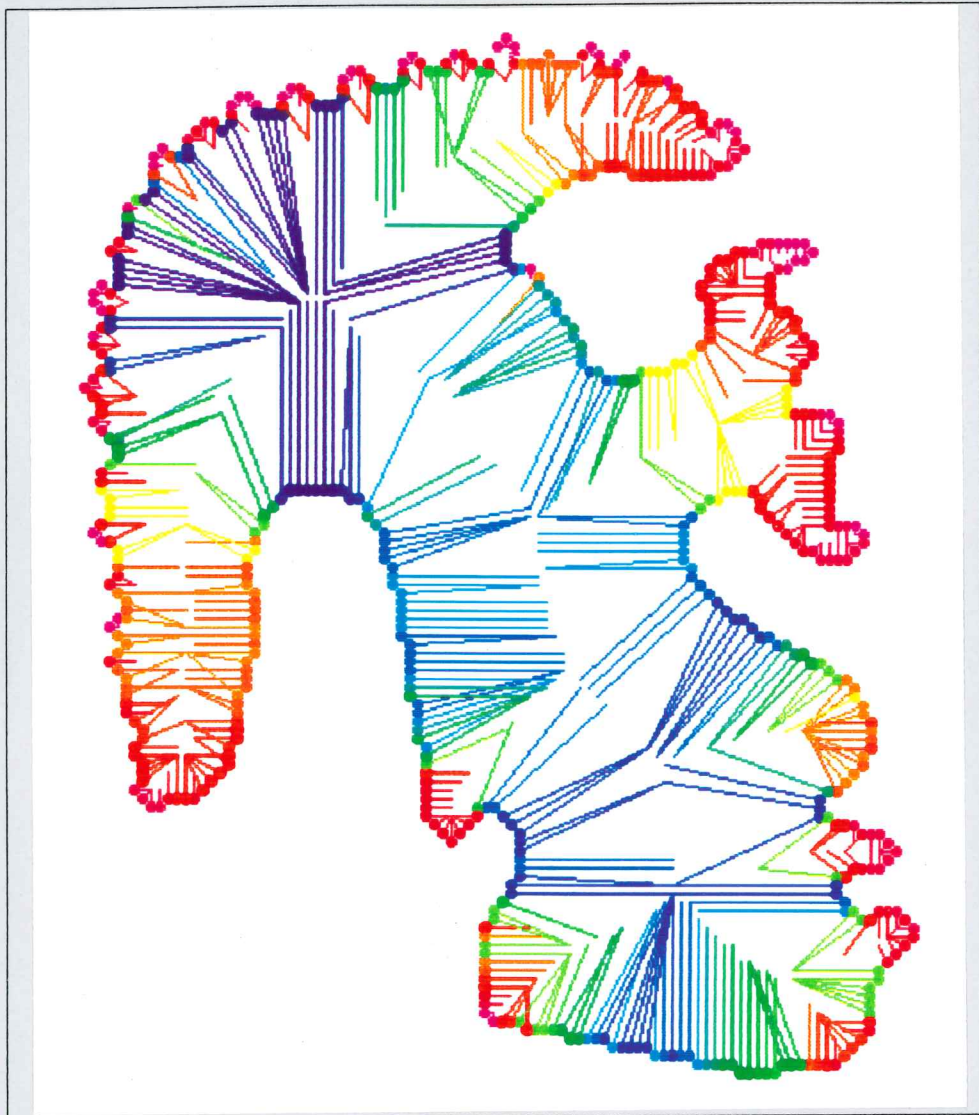


UNIVERSITE DE LIEGE
Faculté des Sciences Appliquées

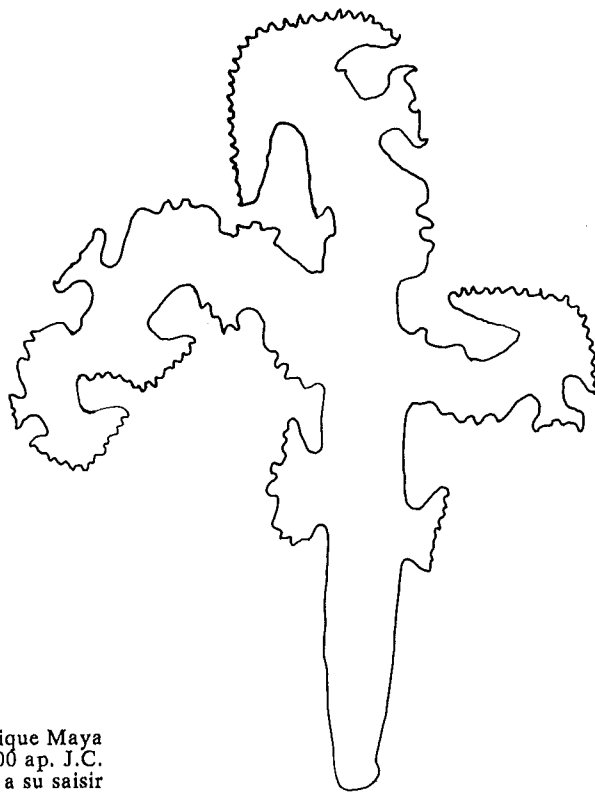
MORPHOMETRIE EUCLIDIENNE DES FIGURES PLANES

*Applications à l'Analyse
des Matériaux Granulaires*



Eric PIRARD

Thèse présentée
pour l'obtention du grade de
Docteur en Sciences Appliquées
Année Académique 1992-1993



Silex excentrique Maya
Peten, Guatemala, +600 à +800 ap. J.C.
L'artiste qui exécuta ce silex délicat a su saisir
à la fois le mouvement et la personnalité du sujet.
Se jouant des difficultés techniques, il a placé quatre
profils sur les bras et un autre dans le dos - tous ayant
le même profil et représentant donc la même personne.
(Trésors du Nouveau Monde, Bruxelles, 1992)

CALYPTRE SUR LE PROFIL PRINCIPAL

A Muriel,
Julie et Benjamin,
ce travail est le fruit
de leur patience et de leur amour.
Leur présence est mon bonheur le plus précieux.

REMERCIEMENTS

Ce travail totalement dédié à la morphologie d'un *grain de sable*. Pourrait symboliser le caractère à la fois dérisoire et trop académique de certaines recherches scientifiques. De mon point de vue, il s'agit heureusement du grain de sable qui cache la plage.

La diversité des expériences accumulées sur cette plage est pour une grande part dans la satisfaction que j'éprouve aujourd'hui, et il m'est particulièrement agréable d'exprimer ici ma gratitude à ceux qui m'ont accompagné et encouragé durant ces "quelques" années. Je n'ai eu que trop rarement l'occasion et le courage de leur dire merci!

Je voudrais tout d'abord remercier le Professeur **Dimanche** qui m'a accordé sa confiance en tant qu'assistant et m'a donné un grand espace de liberté dans son Château. J'associe à ces remerciements les Professeurs **Monjoie** et **Rigo**. Ils sont les moteurs d'une dynamique universitaire contagieuse *. Sans cette *transformation de voisinage* qui a donné naissance au M.I.C.A. (Cellule d'Analyse des Matériaux par l'Image) j'aurais épuisé mon énergie bien avant d'épuiser mes idées.

Je dois aux Professeurs **Cantraine** et **Destiné** de m'avoir appuyé dès le tout début en me confiant leurs étudiants pour des Travaux de Fin d'Etudes. Cette thèse est le résultat de la *convolution* de l'expérience du géologue et de celle de l'informaticien. Je suis heureux qu'en échange de ce qu'ils m'ont appris, plusieurs de ces jeunes ingénieurs aient pu valoriser professionnellement leurs acquis en analyse d'images.

Joëlle Riss et **Jean-Louis Chermant** sont beaucoup plus que les représentants de la vitalité *hexagonale* dans le domaine. Ils ont été pour moi, malgré les *distances*, des défenseurs exemplaires d'une approche pragmatique en analyse d'images. En ce sens, leur contribution à cette thèse est beaucoup plus importante qu'ils ne l'imaginent.

Je tiens à remercier aussi le Professeur **Schmets** qui me fait un grand honneur en acceptant de faire partie de mon jury. Qu'il se rassure, même si j'ai *exécuté* Euclide en *trame discrète*, il reste encore bien vivant!

J'ai eu la chance d'accompagner **Anne Darimont** d'inclusions fluides en ettringites secondaires. Je peux témoigner que rien pendant ces nombreuses années n'a *émoussé* son tempérament. Sans sa ténacité, ses encouragements et son écoute quotidienne ce travail n'aurait tout simplement jamais existé.

Etienne Burnotte a été mon premier compagnon de terrain à une époque où au lieu de chercher des *pixels* nous cherchions encore des *monazites grises*. Avec lui, j'ai appris toute la satisfaction d'une recherche menée avec rigueur et honnêteté. J'espère que ce travail reste fidèle à cet esprit.

Compagnons des premiers pas du M.I.C.A., **Alain Pierroux** et **Ginette Bastin** ont troqué leurs rêves de grands espaces contre des espaces microscopiques. J'ose croire que leur frustration a été effacée par la découverte d'un univers aux possibilités d'évasion infinies.

Lorsque les reliefs impressionnants de la *distance euclidienne* se sont dressés devant moi, j'ai été très heureux de trouver en **Jean-François Nivart** un fidèle compagnon de cordée. Ensemble, nous avons pu planter le drapeau au sommet de l'*érodé ultime*. Ce moment était pour moi la récompense suprême d'une longue expédition. Il était temps d'en rédiger les mémoires...

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mon estime la plus sincère à **Marcel Gaspar**. J'ai particulièrement apprécié de pouvoir travailler avec lui dans un climat de confiance réciproque.

*ils découvriront dans ce travail qu'un *moment d'inertie* peut aussi avoir des qualités insoupçonnées !

AVANT PROPOS

La formation d'ingénieur géologue possède à mon sens le privilège unique de se trouver à l'interface entre les sciences naturelles et les sciences exactes. Il s'agit d'un véritable défi à relever quotidiennement pour pouvoir aboutir à une réelle complémentarité des deux approches. Avec l'avènement de la micro-informatique, on aurait pu craindre que le fossé s'agrandisse entre les "naturalistes" et les "ingénieurs". Les uns se cramponnant à leur marteau, les autres se réfugiant dans l'exploration sans fin d'une terre simulée. Ce travail s'inscrit dans une tentative de conciliation entre ces deux extrêmes.

Mes premières activités de recherche scientifique ont été orientées vers la gîtologie et la microscopie des matières minérales et j'ai pu expérimenter dès le départ combien la difficulté peut être grande de traduire des observations visuelles complexes en informations utiles à un exploitant. En choisissant d'approfondir les problèmes de quantification des informations visuelles, je n'ai pas du tout oublié cette première expérience de "naturaliste". Au contraire, j'ai tenu à privilégier tout au long de ce travail une approche très intuitive des problèmes.

Cette thèse est ciblée sur le sujet très précis de la *morphométrie des particules*. Mais, au cours de mes recherches, j'ai eu la chance de pouvoir développer des applications de microscopie quantitative dans d'autres domaines. Le lecteur comprendra assez vite en parcourant les deux premiers chapitres qu'il m'est apparu essentiel de faire le point sur la philosophie générale de l'analyse d'images appliquée à la géologie.

Le troisième chapitre est entièrement dédié à un inventaire des lois physiques qui régissent le comportement des matériaux granulaires. Cet inventaire ne saurait être exhaustif, puisqu'il ne reprend que les études qui ont pu faire apparaître une corrélation entre la morphologie des particules et leurs propriétés. L'intention était surtout de mettre en évidence les *besoins spécifiques de l'analyse morphométrique* dans ce domaine. Les difficultés d'expérimentation et plus encore de quantification morphométrique auxquelles ont été confrontés les différents auteurs sont très révélatrices de la fragilité des théories proposées.

Le quatrième chapitre est une très brève introduction aux problèmes d'échantillonnage et de traitement de l'information rencontrés en analyse d'images.

Les deux derniers chapitres sont très précisément consacrés à l'analyse morphométrique. Les principales méthodes existantes y sont passées en revue et critiquées autant que possible à la lumière d'expérimentations pratiques. La mauvaise robustesse de certaines méthodes et plus encore le manque de systématique dans l'approche morphométrique ont conduit à la mise au point de nouveaux outils d'analyse inspirés des tout derniers développements en Morphologie Mathématique. Un nouveau descripteur d'images binaires est proposé qui facilite considérablement l'accès à une large gamme de paramètres morphométriques. L'adaptation de ces derniers aux besoins spécifiques inventoriés dans le chapitre trois est ensuite proposée.

La rédaction de cette thèse m'est apparue comme un périlleux exercice d'équilibriste. Mon souhait le plus sincère est qu'elle soit accessible tant au géologue qu'à l'informaticien et que chacun y trouve des idées sans se sentir frustré.

1 IMAGERIE

- 1.1 La civilisation de l'image.**
- 1.2 De la vision à la perception assistée par ordinateur.**
- 1.3 L'analyse d'images, une discipline parmi d'autres.**
- 1.4 La Morphologie Mathématique, une approche parmi d'autres.**
- 1.5 L'avenir de la perception visuelle assistée par ordinateur en géologie.**

2 PERCEPTION VISUELLE.

- 2.1 Les mécanismes de la perception visuelle.**
- 2.2 Perception visuelle et objets géologiques.**
- 2.3 Quantifier l'information visuelle.**
 - 2.3.1 Pourquoi quantifier ?**
 - 2.3.2 Que faut-il quantifier ?**
 - 2.3.3 Comment quantifier l'information structurale ?**
 - 2.3.3.1 Paramétrage et quantité d'information.**
 - 2.3.3.2 Approche systématique ou approche spécifique.**
 - 2.3.3.3 Analyse structurale et échelle d'investigation.**
 - 2.3.3.4 Une mise au point sur les termes structure et texture.**

3 L'ANALYSE DES MATERIAUX GRANULAIRES.

- 3.1 Introduction.**
- 3.2 Analyse morphométrique et techniques de production de particules.**
 - 3.2.1 Broyage / Granulation.**
 - 3.2.2 Usure de surfaces.**
- 3.3 Analyse morphométrique et techniques de séparation de particules.**
 - 3.3.1 Granulométrie (tamisage).**
 - 3.3.2 Méthodes gravimétriques.**
 - 3.3.2.1 Sédimentation.**
 - 3.3.2.2 Tablage.**
 - 3.3.3 Méthodes morphométriques.**

- 3.3.4 L'analyse d'images... Une méthode à sollicitation locale.
- 3.4 Analyse morphométrique et propriétés globales des matériaux granulaires.
 - 3.4.1 Morphométrie et surface spécifique, porosité ou compaction d'un matériau granulaire.
 - 3.4.2 Morphométrie et écoulement.
 - 3.4.3 Morphométrie et résistance au cisaillement.
 - 3.4.4 Morphométrie et abrasion.
 - 3.4.5 Morphométrie et érosion.
- 3.5 Morphométrie indirecte par des méthodes physiques.
- 3.6 Tableau récapitulatif.

4 ECHANTILLONNAGE ET TRANSFORMATIONS DANS UN ESPACE DISCRETISE.

- 4.1 Importance de l'échantillonnage.
 - 4.1.1 Nature de la mesure.
 - 4.1.2 Support de l'échantillon et trame d'échantillonnage.
 - 4.1.2.1 Trame carrée ou trame hexagonale.
- 4.2 Les outils de transformation des images digitalisées.
 - 4.2.1 Conventions de notation.
 - 4.2.2 Transformations d'images en niveaux de gris.
 - 4.2.3 Procédure générale pour l'analyse d'une image.
 - 4.2.4 Représentation d'une image binaire.

5 LES METHODES D'ANALYSE MORPHOMETRIQUE DES PARTICULES.

5.1 Les critères de qualité d'un descripteur morphologique.

5.1.1 Indépendance vis-à-vis des autres descripteurs.

5.1.2 Sensibilité.

5.1.3 Accessibilité.

5.1.4 Spécificité.

5.1.5 Additivité.

5.1.6 Robustesse vis-à-vis de la rotation.

5.1.7 Robustesse vis-à-vis de l'homothétie.

5.2 Mesure des grandeurs stéréologiques de base dans un espace discrétisé.

5.2.1 Les estimateurs de longueur dans un espace discrétisé.

5.2.1.1 Estimation de la distance.

5.2.1.2 Estimation du périmètre.

5.2.2 Estimation de l'aire.

5.3 Le Facteur de Forme des systèmes d'analyse d'images.

Une illustration des défauts de la morphométrie digitale.

5.4 Méthodes empiriques en morphométrie.

5.4.1 Paramètres tri-dimensionnels.

5.4.1.1 Paramètres dérivés des trois diamètres de Féret perpendiculaires.

5.4.1.2 Paramètres construits en référence à des formes géométriques simples.

5.4.2 Paramètres bi-dimensionnels.

5.4.2.1 Paramètres dérivés des diamètres de Féret.

5.4.2.2 Paramètres construits par référence à des formes géométriques simples.

5.4.2.3 Paramètres dérivés des rayons des disques maxima inscrits.

5.4.2.4 Analyse critique des méthodes empiriques bi-dimensionnelles.

5.4.2.4.1 Indépendance et spécificité.

5.4.2.4.2 Sensibilité et robustesse.

5.4.2.4.3 Traitement statistique.

5.4.2.4.4 Discrétisation et automatisation.

5.5 Méthodes mathématiques en morphométrie.

5.5.1 Méthodes paramétriques.

5.5.1.1 Méthodes basées sur les moments d'inertie

5.5.1.2 Méthodes basées sur l'enveloppe convexe et des grandeurs géodésiques.

5.5.1.3 Application de l'analyse paramétrique dans des problèmes de valorisation des matières minérales.

5.5.1.4 Analyse de 14 diamants.

5.5.2 Méthodes de reconnaissance de forme.

5.5.3 Transformées de Fourier.

5.5.3.1 Fondements théoriques.

5.5.3.2 Le développement du "signal contour".

5.5.3.3 Interprétation et analyse de la Transformée de Fourier.

5.5.3.4 Analyse critique de la Transformée de Fourier.

5.5.3.4.1 Indépendance.

5.5.3.4.2 Sensibilité.

5.5.3.4.3 Robustesse.

5.5.3.4.4 Accessibilité.

5.5.3.4.5 Spécificité.

5.5.4 Analyse fractale.

5.5.4.1 Méthodes de mesure d'une dimension non-entière.

5.5.4.2 Analyse critique des méthodes Fractales.

5.5.4.2.1 Indépendance.

5.5.4.2.2 Sensibilité.

5.5.4.2.3 Robustesse.

5.5.4.2.4 Automatisation.

5.5.4.2.5 Spécificité.

5.5.4.3 Analyse de 14 diamants.

5.6 Morphométrie et Morphologie Mathématique.

5.6.1 Principes de base.

5.6.2 Morphologie Mathématique Binaire.

5.6.2.1 La Fonction Distance en trame hexagonale.

5.6.2.2 Ouverture et Fermeture.

5.6.2.3 La Fonction Granulométrique.

5.6.3 Morphologie Mathématique et paramètres morphométriques dérivés.

5.6.4 Analyse critique des méthodes de morphologie mathématique.

5.6.4.1 Indépendance.

5.6.4.2 Sensibilité.

5.6.4.3 Robustesse.

5.6.4.4 Accessibilité.

5.6.4.5 Spécificité.

5.6.5 Application de l'analyse de la rugosité morphologique à la différenciation de deux concentrés.

5.6.6 Analyse de la carte de Krumbein et Sloss par la rugosité morphologique et les paramètres d'inertie.

6 SQUELETTES ET CALYPTRES.

- 6.1 Propositions pour une approche systématique de la notion de forme.
- 6.2 Un descripteur intéressant: le squelette.
 - 6.2.1 Algorithmes de squelettisation rapide.
 - 6.2.2 Les points remarquables du squelette.
 - 6.2.2.1 Les Erodes Ultimes (E).
 - 6.2.2.2 Les points à Amont Multiple (MU).
 - 6.2.2.3 Les extrémités (X).
 - 6.2.2.4 Les points à Aval Multiple (MD).
 - 6.2.3 Analyse critique de la squelettisation.
 - 6.2.3.1 Sensibilité.
 - 6.2.3.2 Robustesse.
 - 6.2.3.3 Accessibilité.
 - 6.2.3.4 Spécificité.
- 6.3 Utilisation de la fonction d'extinction et du squelette en analyse morphométrique.
 - 6.3.1 Analyse de la rugosité globale.
 - 6.3.2 Analyse de l'angularité des résidus.
 - 6.3.3 Application aux grains de diamant.
 - 6.3.4 Lecture de la fonction d'extinction sur les branches du squelette.
 - 6.3.5 Conclusions.
- 6.4 Vers une véritable morphométrie euclidienne.
 - 6.4.1 Les fonctions distance.
 - 6.4.1.1 Un algorithme rapide pour la fonction distance euclidienne.
 - 6.4.1.2 Les fonctions distances pondérées.
 - 6.4.1.3 Squelettisations sur la fonction distance euclidienne.
 - 6.4.1.4 Une fonction distance euclidienne sur 8 bits?
 - 6.4.2 Pourquoi le principe de Blum n'est pas digitalisable.
 - 6.4.3 La fonction distance holodisque.
 - 6.4.4 Squelettisation et fonction distance holodisque.
 - 6.4.5 Procédure de recherche des centres de MID par remontées à tout prix.
 - 6.4.5.1 Algorithme de remontée à tout prix.
 - 6.4.5.1.1 Pente régulière selon une direction carrée.
 - 6.4.5.1.2 Crête simple selon une direction carrée.
 - 6.4.5.1.3 Crête double selon une direction carrée.
 - 6.4.5.1.4 Pente régulière selon une direction octogonale.
 - 6.4.5.1.5 Crête simple selon une direction octogonale.
 - 6.4.5.1.6 Crête double selon une direction octogonale.
 - 6.4.6 Procédure de squelettisation par Tache d'Huile.

- 6.5 Un nouveau descripteur morphologique: le Calyptre.**
 - 6.5.1 La structure du calyptre.**
 - 6.5.2 Calyptre et transformations morphologiques de l'objet.**
 - 6.5.3 Calyptre et lissage du contour.**
 - 6.5.3.1 Suppression de centres de MID parasites.**
 - 6.5.3.2 Suppression des branches parasites.**
 - 6.5.3.3 Morphologie mathématique appliquée au calyptre.**
 - 6.5.4 Calyptre et points remarquables du squelette.**
 - 6.5.4.1 X et MU.**
 - 6.5.4.2 E et MD.**
- 6.6 Calyptre et morphométrie euclidienne.**
 - 6.6.1 Calcul de l'aire de l'objet.**
 - 6.6.2 Caractérisation de la rugosité globale.**
 - 6.6.3 Caractérisation de la rugosité morphologique.**
 - 6.6.3.1 Expression théorique de α en fonction de l'angle et de l'émoussé.**
 - 6.6.4 Indice d'émoussé et théorie de l'abrasion.**
 - 6.6.5 Mesures d'angles et calcul de l'angularité.**

7 CONCLUSIONS GENERALES.

1 Imagerie

1.1 La civilisation de l'image.

Pour beaucoup de philosophes et d'historiens la caractéristique majeure de notre civilisation est la prééminence de l'image sur l'écrit. Depuis l'invention de la photographie et plus encore avec le développement des moyens de télécommunications, l'image nous envahit. L'homme moderne a surdéveloppé sa perception visuelle aux dépens, bien souvent, des autres moyens sensoriels. Dans cet esprit, il était logique que la "cinquième génération d'ordinateurs", appelée à bénéficier de moyens sensoriels rudimentaires, soit équipée en premier lieu d'un *oeil* ... et même de plusieurs yeux, car comparativement à l'oeil humain, l'oeil électronique connaît peu de limites :

- il peut exploiter la totalité du spectre électromagnétique.
- il peut distinguer des atomes individuels tout autant que les galaxies aux confins de l'Univers.
- il permet de capter l'image de phénomènes qui se déroulent sur des intervalles de temps extrêmement brefs (10^{-6} sec).

Les performances de l'oeil électronique sont telles qu'il est impensable qu'une discipline scientifique se développe sans en exploiter toutes les ressources. En géologie particulièrement, la télédétection par satellite et le microscope électronique sont des techniques de première importance. Mais, qu'on ne se méprenne pas, l'oeil électronique n'est qu'un outil, une *prothèse visuelle* qui nous permet d'agrandir notre profondeur de champ spectrale, spatiale ou temporelle.

L'asservissement de notre perception visuelle à une technique nous a fait passer de la vision des choses à une visualisation. L'objet réel a disparu au profit d'une *visualisation en temps réel* de ce même objet, ce qui n'est pas sans poser de graves problèmes éthiques. Nous vivons quotidiennement dans un déchaînement d'images médiatiques qui ont perdu tout caractère d'objectivité (images de famines, images de guerre, ...) et pourtant nous n'avons d'autre choix que de faire confiance à la *télé-vision* des faits. En réalité ce n'est pas tant la technique d'acquisition des images qui est en cause dans la subjectivité des reportages, que l'usage que l'on en fait [Ferro, 1991].

Mais, les problèmes éthiques menacent tout autant le chercheur que le journaliste. P. Virilio [1988] grand spécialiste des questions éthiques relatives au marché de l'image, s'inquiète dans son livre "La machine de vision" de l'avènement de "*ces prothèses de perception automatique qui fonctionneront sans sorties graphiques ou vidéographiques comme une sorte d'imaginaire*

machinique dont nous serons cette fois totalement exclus". La caméra vidéo n'est qu'une prothèse visuelle, mais couplée à un ordinateur elle devient, qu'on le veuille ou non une prothèse de perception. On peut douter de la capacité d'intelligence des futurs ordinateurs, mais on ne peut nier qu'ils utilisent dès à présent le peu d'intelligence artificielle que nous leurs inculquons. C'est une évidence que de plus en plus de systèmes de vision sont et seront installés dans notre environnement quotidien : surveillance bancaire, contrôle de qualité industrielle, systèmes de reconnaissance des empreintes digitales ou du fond de l'oeil, etc... Ces systèmes sont dotés d'une possibilité de décision automatique, car leur but est précisément de pouvoir traiter l'information pour conduire à une action : ouvrir une porte, déclencher une sirène, agir sur un paramètre de fabrication, etc... Sans verser dans un alarmisme de mauvais aloi, nous devons cependant être conscients des répercussions qu'auront les modes d'analyse de l'information visuelle que nous inculquons à la machine !

1.2 De la vision à la perception assistée par ordinateur.

Le géologue qui pose un diagnostic après examen microscopique d'une matière minérale est certainement moins tarauté par des questions éthiques que son collègue biologiste. La non-détection d'un "cancer du béton" aura généralement moins de conséquences qu'un mauvais diagnostic sur un patient, mais dans les deux cas le problème nous renvoie aux mécanismes de la perception d'une image par le spécialiste. Si des *systèmes de vision* comme des analyseurs d'images sont susceptibles de venir épauler les spécialistes pour les aider à réduire les erreurs de diagnostic, cela suppose avant tout de bien comprendre les modes de perception de l'information par chacun de ces spécialistes. Cette remarque est triviale et figure en tête de tous les ouvrages de "perception visuelle automatique" ou de "psychologie de la vision". Elle est systématiquement réaffirmée en tête de tous les articles d'analyse d'images :

"La nature de l'information à extraire d'une image est essentiellement fonction de l'application envisagée"

Une abondante littérature continue à être produite qui semble nier ce principe. Dans un article féroce et introspectif, faisant le bilan d'une décennie d'errements dans le domaine de la *Vision Assistée par Ordinateur (V.A.O.)*, Jain & Binford [1991] dénoncent le manque de maturité de la discipline. Pour eux, elle souffre principalement :

- d'ignorance : les systèmes de vision sont basés avant tout sur des opérateurs aux performances mal établies plutôt que sur une *intelligence* utilisant les connaissances de différentes disciplines.
- de myopie : les techniques utilisées ont une validité locale ce qui fait perdre la perspective du problème.

de naïveté : beaucoup de chercheurs mettent au point des méthodes en oubliant de se préoccuper des fondements du problème qu'ils doivent résoudre. La V.A.O. souffre d'un manque d'expérimentation et d'évaluation comparative des techniques.

Le ton polémique de l'article a fait réagir la plupart des grands laboratoires actifs dans le domaine [Aloimonos & Rosenfeld,1991; Huang,1991], mais tous s'accordent sur ce dernier problème du manque d'expérimentation et d'évaluation critique des méthodes. Il est certain que la V.A.O. traverse les crises qui caractérisent l'émergence de nouvelles disciplines scientifiques, mais elle est victime plus que toute autre des deux syndromes dénoncés par Jain & Binford [1991] : le syndrome du "poivrot sous son lampadaire" et celui des "nouvelles fringues de l'empereur". La raison de ceci est vraisemblablement à rechercher dans l'extrême diversité des disciplines qui participent aux développements de la V.A.O.: psychologues, mathématiciens, ingénieurs en électronique ou en sciences des matériaux, médecins, ...!

Le syndrome du "poivrot sous son lampadaire" est caractérisé par le fait que souvent les chercheurs se choisissent une *technique fétiche* plutôt qu'un domaine d'application. Ils s'accrochent à cette technique... comme à un lampadaire... cherchant à tout crin des applications où l'utilisation de leur technique puisse être envisagée, sans se poser la question de la validité de leur démarche ou de l'intérêt d'autres techniques pour résoudre le dit problème. Le syndrome des "nouvelles fringues de l'empereur" est lié aux modes qui affectent les disciplines scientifiques. Lorsqu'une technique est très populaire, tout le monde veut en goûter et il y a très peu de scientifiques qui ont le courage de dénoncer les travers de la technique, voire son inadéquation totale aux problèmes posés. De tels syndromes sont bien entendu inévitables dans le développement d'une discipline, il importe cependant que des jeunes chercheurs arrivent à les identifier et à s'en affranchir si ils veulent apporter des idées nouvelles. L'omniprésence des fractales dans la littérature scientifique des années 1985-1990 illustre parfaitement ce propos. Il est indéniable que les contributions théoriques de Mandelbrot [1982] sont fondamentales, mais il est tout aussi indéniable que des méthodes d'analyse fractale ont fleuri à profusion dans à peu près tous les domaines scientifiques et en particulier ceux de la vision alors que d'autres théories étaient souvent plus pertinentes. La décennie précédente avait été marquée par un engouement pour les Transformées de Fourier. Aujourd'hui, la FFT reste une méthode fondamentale mais dont le champ d'application est clairement circonscrit.

1.3 L'analyse d'images, une discipline parmi d'autres.

L'analyse d'images est une discipline que l'on peut situer au sein de l'ensemble des techniques de traitement et d'analyse des données à références spatiales. Ces techniques ont en commun de s'appliquer à des données échantillonnées dans l'espace dans le but d'aboutir à une *perception* de l'information (Fig.1.1.). Ceci signifie que nous les différencierons des techniques de conception/modélisation par ordinateur qui elles partent d'une *connaissance* pour aboutir à une *visualisation* (Fig.1.2.). Il est clair que certaines techniques ne se classent pas aisément dans l'un ou l'autre domaine, car elles exploitent un aller-retour entre vision et perception. C'est le cas des techniques de simulation conditionnelle en géostatistique ou de modélisation par éléments finis qui se basent d'une part sur une information de terrain (une vision) et d'autre part font intervenir un modèle (une perception). L'intention ici (Fig.1.3.) n'est pas d'intégrer toutes les disciplines dans un seul schéma, mais de présenter les interrelations qui existent et ne sont pas toujours soupçonnées entre l'analyse d'une image vidéo par exemple et l'estimation des réserves d'un gisement. Les techniques de traitement du signal ne figurent pas dans les schémas ci-joints, et pourtant leurs affinités sont évidentes. Pour les faire apparaître, on peut imaginer un axe perpendiculaire matérialisant la dimension temporelle et on obtiendrait une autre rose avec des disciplines telles que la téléphonie ou la reconnaissance de la parole. La sphère complète des disciplines Acquisition -> Perception permettrait d'ajouter la télévision bien sûr ou encore l'analyse de séquences d'images (analyse du mouvement).

En regardant de plus près la rose des disciplines (Fig.1.3.) on peut tout d'abord la découper en deux suivant les finalités recherchées : soit une *communication* intégrale de l'information (image -> image), soit une *analyse* de la structure de l'information (image -> mesure). Parmi ces dernières, il peut paraître plus étonnant de distinguer la *reconnaissance de formes* et l'*analyse d'images*. En effet, la séquence des opérations est la même dans les deux disciplines, le point de départ est une information brute qui est filtrée, segmentée et quantifiée. Ce qui différencie fondamentalement c'est la finalité de l'analyse et dans une certaine mesure les outils utilisés. En reconnaissance de formes, il s'agira d'aboutir à une **perception** de l'information dont le résultat sera incorporé dans la construction d'une représentation mentale de la scène. En analyse d'images, il s'agira d'aboutir à une **mesure** qui puisse ensuite être intégrée dans un modèle physique. Pour ces raisons, la reconnaissance de formes utilisera préférentiellement une démarche APRIORISTE : les propriétés des objets sont prédéfinies et le but est de retrouver des régions ayant ces propriétés ou y ressemblant suffisamment. En revanche, l'analyse d'images privilégie des outils NON-APRIORISTES dans le sens où les objets présents dans l'image sont inconnus ou possèdent des propriétés trop complexes que pour être clairement structurées.

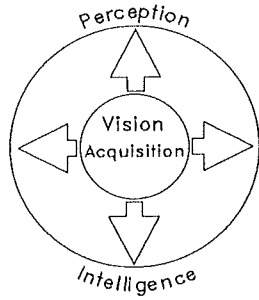


Fig.1.1. Vision Assistée par Ordinateur.

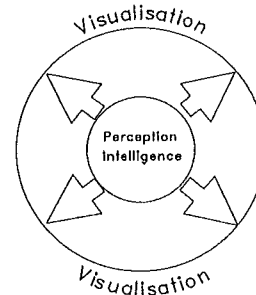


Fig.1.2. Conception Assistée par Ordinateur.

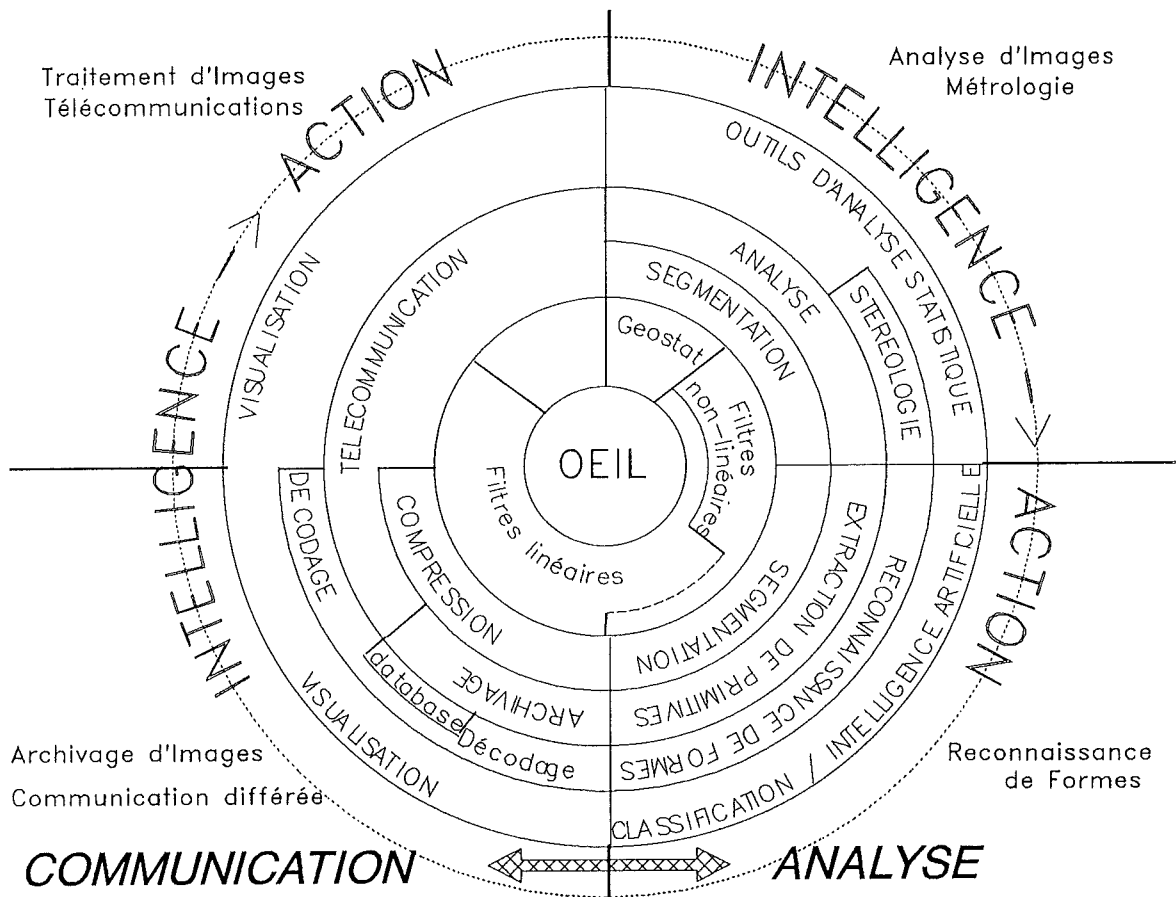


Fig.1.3. Rose des disciplines.

Serra[1983] explique très bien comment sous l'impulsion de la NASA les américains ont été les premiers à développer un large éventail de *filtres linéaires* et de techniques de *pattern recognition*, tandis que timidement en Europe une toute autre approche se développait dans des instituts confrontés à des problèmes de sciences naturelles. Il a fallu 20 ans à la Morphologie Mathématique pour traverser l'Atlantique !

1.4 La Morphologie Mathématique, une approche parmi d'autres.

Le fondement de la Morphologie Mathématique est de privilégier les opérations de SUP(maximum) et d'INF(minimum) par rapport aux opérations d'ADD(addition) et de SUB-(soustraction) qui constituent les outils de base du filtrage linéaire. Ce choix n'est pas un pur jeu de mathématiques, mais repose sur l'observation très précise que les signaux acoustiques se combinent en règle générale arithmétiquement tandis que les signaux visuels se masquent mutuellement. Ainsi, les différents instruments d'un orchestre nous sont perceptibles simultanément, tandis que le violoniste peut très bien être caché par le piano ! L'utilisation des opérateurs d'INF et de SUP est à la base de la *non-linéarité* des outils de Morphologie Mathématique. En effet, si on considère un ensemble d'observations et qu'on lui applique une opération SUP, il reste comme résultat une seule observation... et l'impossibilité de revenir aux caractéristiques de l'ensemble initial. En appliquant une opération d'ADD, on conserve une ensemble de données et on maintient les proportions relatives entre ces données. On conçoit aisément comme le souligne Serra[1987] dans un article très explicite que les techniques linéaires sont importantes pour la communication. Mais, ce qui fait le propre de l'analyse, c'est de dégrader sélectivement l'image : **"Reconnaître un objet, cela signifie que tout le reste a été éliminé de la scène. Cette opération est définitivement irréversible [Serra,1987]¹**. La grande difficulté de l'analyse d'images réside dans le fait qu'il faut pouvoir définir avec précision ce qu'on souhaite analyser et qu'il faut pouvoir traduire cela en termes d'une séquence d'opérations à faire subir à l'image.

La V.A.O. n'a pas attendu l'avènement de la Morphologie Mathématique pour utiliser des opérateurs non-linéaires. Les filtres de rang et en particulier le filtre médian étaient déjà largement utilisés auparavant, ce qui fait dire à certains que la Morphologie Mathématique (M.M.) a réinventé beaucoup de choses en se les appropriant. La vérité est que la M.M. constitue un fondement théorique solide [Serra,1982,1988]. Elle définit des primitives aux propriétés robustes, donne un cadre théorique aux règles de composition de ces primitives et intègre des outils existants dans un cadre plus large. La M.M. est un langage spécifiquement adapté au traitement des informations spatiales. Même si les apports les plus "visibles" de la

¹ La difficulté que l'on rencontre pour convaincre un néophyte qu'une opération d'anamorphose d'un histogramme, même si elle lui permet de mieux percevoir l'image à l'écran, n'a absolument rien changé à la scène du point de vue de l'ordinateur prouve à suffisance que cette remarque sur la non-linéarité n'est pas aussi triviale qu'elle ne paraît.

M.M. l'ont été dans le cadre de l'analyse d'images binaires, l'aisance avec laquelle la théorie a été généralisée aux traitements d'images en teintes de gris [Sternberg,1986], des images 3-D [Gratin,1992] et des graphes [Serra,1988] démontre toute sa puissance. La M.M. trouve ses fondements dans la géométrie stochastique. Puisque la scène à analyser possède une géométrie complexe qu'il n'est pas possible de référer à une géométrie connue, il est intéressant de dégrader l'information géométrique *à la lumière* d'un outil qui lui a des propriétés géométriques connues. Le mode de dégradation de la scène inconnue fournira indirectement des renseignements sur sa géométrie. C'est ce concept général qui est mis en oeuvre en M.M. par le biais d'un *élément structurant*. En conférant à cet élément structurant des caractéristiques de taille, de forme, d'orientation ou de dispersion il sera possible d'analyser ces mêmes propriétés dans l'image initiale ².

1.5 L'avenir de la perception visuelle assistée par ordinateur en géologie.

Le sentiment de désenchantement qui a suivi l'avènement des systèmes d'analyse d'images dans la plupart des laboratoires de recherche vers le milieu des années '80, s'explique en grande partie par la difficulté du dialogue entre le concepteur de la machine et son utilisateur. Cette incompréhension est plus importante que les limitations en puissance de calcul ou en capacité d'acquisition qui sont généralement incriminées. Dix ans plus tard, les progrès techniques sont énormes, mais beaucoup de difficultés subsistent au niveau du dialogue utilisateur / concepteur. Le géologue non formé aux techniques de traitement d'images comprend mal pourquoi une segmentation qui lui paraît simple (Fig.1.4.) peut constituer un problème insurmontable pour l'ordinateur et inversement, le concepteur ne perçoit pas qu'une analyse granulométrique ou morphométrique ne se conçoit pas de la même manière en biologie qu'en géologie. Pour pallier à ces problèmes il faut d'une part former les utilisateurs, c'est-à-dire les aider à maîtriser les outils "software" et "hardware", et d'autre part il faut que les concepteurs réduisent leurs ambitions à tout solutionner en cherchant au contraire à concevoir des systèmes de vision qui répondent à une tâche spécifique dans une discipline spécifique.

La place des systèmes de *perception visuelle assistée par ordinateur* sera sans cesse croissante dans les laboratoires de géologie. Leur fonction de vision est déjà pleinement exploitée, leur fonction de perception le sera de plus en plus. Il est peu concevable à l'heure actuelle de faire de la télédétection satellitaire sur base de documents photographiques. La

² Soulignons simplement qu'une telle démarche nous est très familière dans son principe, lorsqu'un carrier confronté avec un tas de graviers souhaite en connaître la granulométrie, il déstructure l'information contenue dans le tas à la lumière d'un tamis. Ce tamis n'est rien d'autre qu'un élément structurant, c'est lui qui possède les caractéristiques dimensionnelles contrôlées.

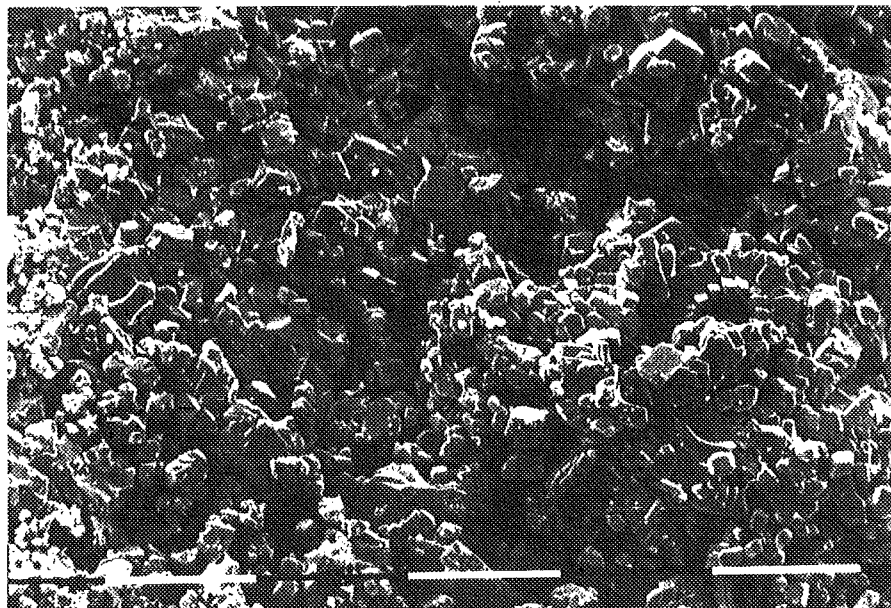


Fig.1.4. Image d'une craie au Microscope Electronique à Balayage. L'identification correcte des rosettes de coccolithes est une tâche impossible pour les systèmes de vision actuels.

digitalisation de l'image et quelques outils de traitement très simples permettent dès à présent au géologue de baser son interprétation non plus sur un document unique mais sur des images en composantes principales issues des différents canaux du spectre ou sur des combinaisons arithmétiques quelconques de ces mêmes images. De même le microscope électronique équipé d'un détecteur de RX et d'un système d'analyse en Energie Dispersive (EDS) fournit les images d'une même scène microscopique pour différents atomes. Une interprétation efficace de cette information passe notamment par la reconstitution (software) des phases minérales.

Progressivement, ces équipements de vision et de traitement / stockage de l'information visuelle deviendront des machines dotées de capacités d'analyse et de classification de l'information. L'interprétation restera pour longtemps encore l'apanage du géologue. Ainsi, des problèmes simples mais fondamentaux peuvent déjà être résolus de manière semi-automatique ou même automatique (granulométries des matériaux granulaires ou des matériaux cohérents, porosité, analyse modale,...), d'autres plus complexes font l'objet de recherches actives (analyse de la libération, classification de textures,...), d'autres enfin ne devraient même pas faire l'objet de tentatives de quantification tant les problèmes sont complexes et difficiles à définir selon un schéma logique (reconnaissance de formes en paléontologie, analyse comparative de lames minces,...)

2 Perception Visuelle.

2.1 Les mécanismes de la perception visuelle.

La compréhension même rudimentaire de la perception visuelle humaine permet de mieux appréhender les mécanismes de structuration de l'information qui conduisent à une intelligence de l'image. Beaucoup d'algorithmes utilisés en V.A.O. sont inspirés des résultats issus d'expérimentations psychophysiques et en échange, la V.A.O. permet parfois de fournir des informations sur les mécanismes non-conscients de la perception visuelle humaine [Marr,1982; Walters,1986].

Selon Ullman[1986], la reconnaissance d'une scène quelconque requiert au préalable l'identification dans l'image de *primitives de base* dont seul l'assemblage peut fournir des *objets* intelligibles. Selon la terminologie de Ullman, le terme de primitives de base (shape property) recouvre des notions telles que : orientation, taille,...tandis que les relations spatiales reprennent des aspects tels que : au-dessus, à l'intérieur de, plus long que,...La figure 2.1. illustre bien que les éléments primitifs ne véhiculent pas d'information mais que seules leurs relations spatiales expriment la nature de l'objet. Il est particulièrement frappant de constater que la différenciation entre A et B est immédiate pour un observateur humain, tandis qu'elle peut être fastidieuse pour une machine...

Typiquement, l'opération d'identification d'éléments primitifs abstraits est appelée *bottom-up* car elle se réalise au départ de la seule information présente dans l'image (extraction de lignes, de couleurs, d'éléments en mouvement,...). Au contraire, la perception des relations spatiales appartient à une opération de type *top-down*. Cette dernière sera fonction des buts poursuivis, c'est-à-dire des connaissances de l'opérateur. Beaucoup d'auteurs sont plus catégoriques que Ullman. En particulier, il y a les tenants d'une perception basée sur les connaissances (knowledge-mediated perception) et d'autre part ceux qui utilisent strictement l'information contenue dans l'image et sa capacité à s'auto-organiser. Les deux positions extrêmes se confrontent : une approche purement *bottom-up* ou purement *top-down*. Le débat d'idées est bien présenté dans Freuder[1986].

L'analyse d'une image par une approche de type *bottom-up*, suppose par exemple d'utiliser des outils adaptés à la détection de segments. Sachant que le segment n'a pas de signification en soi, un critère d'organisation spatiale de l'information devra être utilisé pour définir si oui ou non ce segment fait partie d'une organisation plus large, d'un objet. Les références aux travaux déjà anciens de la *Gestalt Psychology* sont innombrables dans la littérature pour essayer de déduire des lois permettant de mieux comprendre les modes d'assemblage perceptuels. Pourtant comme le souligne Pomerantz[1986] les principes émis dans le cadre de la Gestalt sont innombrables et souvent même contradictoires! Grosso modo

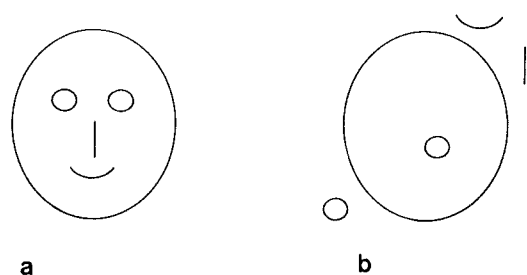


Fig.2.1. Les figures a et b sont constituées des mêmes éléments. C'est la reconnaissance du mode d'assemblage qui confère à a sa signification [Ullman,1986].

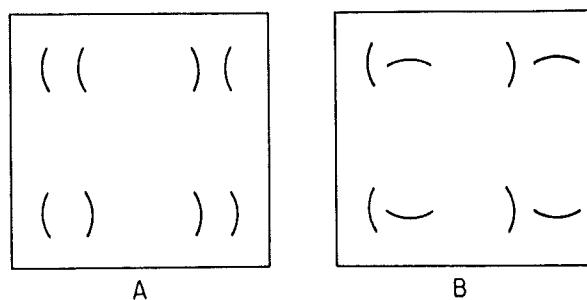


Fig.2.2. Stimuli utilisés par Pomerantz[1986] pour différencier des objets groupés (A) et non-groupés (B).

l'assemblage perceptuel semble influencé par des critères de similarité, proximité, prolongement et symétrie. Pour Pomerantz, deux éléments font partie d'un même groupe s'ils peuvent être perçus ensemble aussi rapidement et aussi précisément qu'ils le seraient individuellement (Fig.2.2.). Un tel critère, vérifié expérimentalement sur un grand nombre de sujets, semble difficile à traduire en un algorithme capable de grouper des éléments de base pour faire ressortir des objets.

Différentes approches algorithmiques ont été proposées pour rendre objectifs des critères de supériorité d'arrangements spatiaux. Walters[1986] en passe quelques-uns en revue et propose la notion de brillance (en cd/m^2) pour distinguer un objet d'ordre supérieur d'un assemblage insignifiant. La figure 2.3. illustre très bien le débat qui sévit entre partisans de l'approche *bottom-up* et de l'approche *top-down*. Les deux configurations peuvent se différencier par une mesure objective de brillance, mais il est probable qu'un observateur reconnaisse un objet en A plutôt qu'en B parce que cet objet lui est familier et fait référence à son univers de connaissances. L'âpreté du débat qui sévit entre les deux démarches se retrouve entre les chercheurs en sciences cognitives et ceux en intelligence artificielle. Ces derniers sont contraints d'exprimer les procédures en un ensemble d'opérations programmables. Les contraintes imposées par le hardware sont omniprésentes dans leurs démarches.

La simplicité graphique des images traitées, des dessins constitués d'un ensemble de traits, indique à quel point la V.A.O. en est encore à ces balbutiements. En considérant les dessins de la figure 2.4., toujours très sobres d'un point de vue graphique, on réalise qu'une forme n'est pas seulement délimitée par un trait de contour même incomplet, mais que des gradients de textures peuvent aussi définir un contour. Les figures 2.5. et 2.6. laissent clairement entrevoir que l'absence d'informations contextuelles ne permet pas d'aboutir à la reconnaissance complète d'une forme.

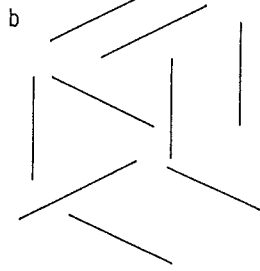
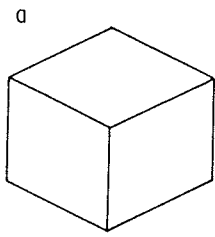


Fig.2.3. Objets différents en terme de brillance.[Walters,1986]

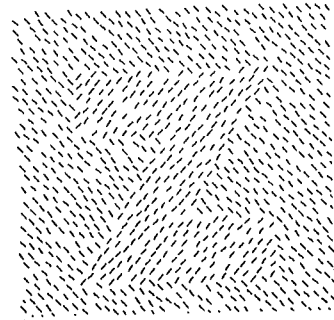


Fig.2.4. Frontières marquées par un gradient de texture.

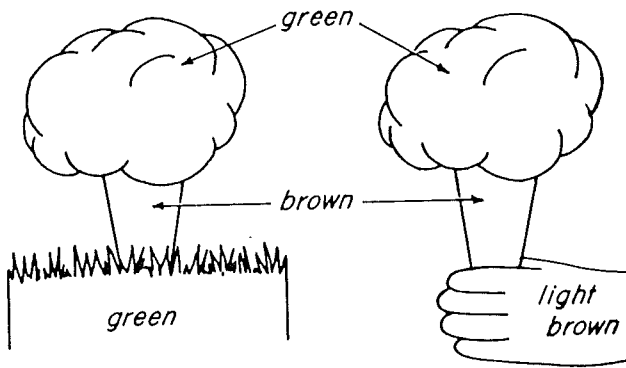


Fig.2.5. Arbre ou cornet de glace ?

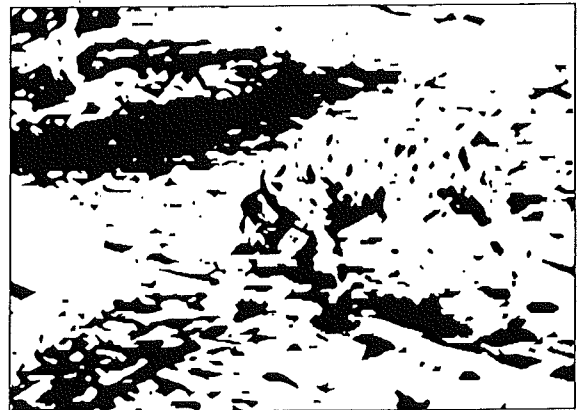


Fig.2.6. Un dalmatien fouillant dans les feuilles mortes.

2.2 Perception visuelle et objets géologiques.

Les psychologues et autres spécialistes en sciences cognitives ne semblent pas s'être intéressés de près aux sciences naturelles. Pourtant, la perception visuelle y tient une place de tout premier ordre, bien plus qu'en sciences appliquées. Les difficultés auxquelles se heurtent les géologues pour décrypter les objets géologiques et plus encore pour communiquer les résultats de leurs observations sont très symptomatiques des capacités et des limites de la perception visuelle humaine.

Il est instructif de constater qu'une personne très familière d'un matériau précis à l'échelle macroscopique (par exemple l'ingénieur des constructions et le béton) ne parvient pas à se repérer dans une image qui lui montre ce même matériau au microscope optique. Bien plus que de zoomer simplement le matériau, le microscope a introduit de nouveaux objets fait apparaître de nouvelles relations spatiales et modifié les conditions d'éclairage de la scène. L'apprentissage de la microscopie est avant tout une question de patience, puisqu'il faut se construire un nouvel univers de référence permettant de progresser dans l'interprétation des images. Il y a tout lieu de croire que la construction de se référentiel se fait au moyen des connaissances acquises à d'autres échelles et via d'autres techniques et qu'il ne s'agit donc pas d'une pure démarche *bottom-up* où l'image contiendrait intrinsèquement tous les éléments nécessaires à sa compréhension. Les illustrations fournies par Coster & Chermant [1985] sur la similitude entre des images biologiques, géologiques ou météorologiques sont éloquentes! Si les géologues s'accordent à penser que l'interprétation d'une image ne peut se faire sans référence à des connaissances, il est tout de même révélateur de constater qu'un débat resurgit régulièrement entre les partisans d'une *description objective* (géométrique) et les partisans d'une *description subjective* (génétique) des objets géologiques.

Une démarche scientifique rigoureuse suppose de faire état de résultats d'observation ou d'expérimentation en toute objectivité. Ce souci est à la base de nombreuses tentatives de descriptions purement géométriques de la perception visuelle. En microscopie des minerais et en pétrologie, le besoin d'une description systématique et rigoureuse des textures minérales s'est fait sentir dès le tout début. Plusieurs auteurs se sont attelés à répertorier la diversité des textures minérales naturelles et à les regrouper dans des classes ne comportant pas de connotation génétique. Il est permis d'affirmer sans crainte de se tromper qu'aucun n'est parvenu à ce jour à définir une classification idéale. Très souvent, une classification géométrique et une classification génétique sont proposées simultanément pour permettre d'englober la totalité des observations. Les travaux les plus intéressants sont ceux de Schwartz[1951], Schneiderhöhn[1952] et Ramdohr[1980]. Deux obstacles principaux se sont révélés insurmontables pour la réalisation d'une classification idéale :

- a) La complexité des arrangements spatiaux peut être telle que de très subtiles différences peuvent conduire à des interprétations génétiques radicalement différentes (Figs.2.7.)
- b) La terminologie descriptive utilisée prête toujours à confusion, soit qu'un terme possède une signification différente dans une autre langue, soit qu'un terme strictement descriptif à l'origine prenne à l'usage une connotation génétique.

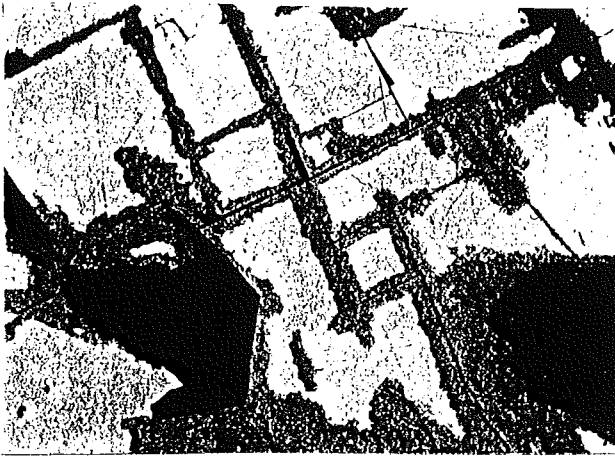


Fig.2.7.a. Produits d'oxydation dans les clivages d'une galène.

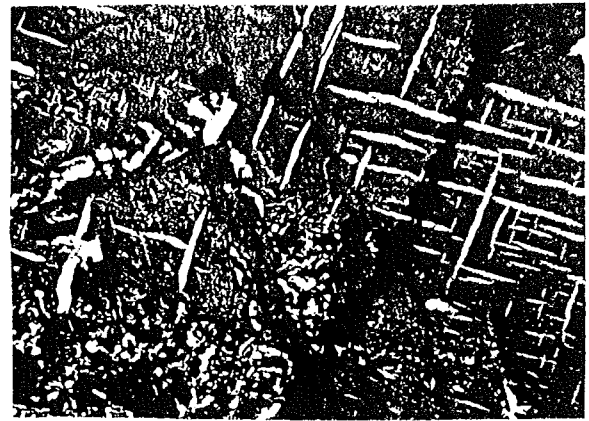


Fig.2.7.b. Exsolutions de chalcopyrite dans une bornite.

En toile de fond du débat géométrique/génétique se dessine la querelle entre les partisans du *bottom-up* et du *top-down*. Tout se passe comme si l'homme, tout en étant capable de comprendre des images extrêmement complexes était particulièrement inapte à quantifier des informations géométriques. Les systèmes d'analyse d'images, dans leur conception actuelle, sont au contraire des machines capables de calculer avec une grande précision des paramètres géométriques, mais incapables d'interpréter cette information. Pour reprendre une terminologie bien actuelle, nous parlerons de l'*analyse qualitative* (interprétation) qui fait la force de l'observateur par opposition à l'*analyse quantitative* (mesure) qui est assumée par la machine.

2.3 Quantifier l'information visuelle.

2.3.1 Pourquoi quantifier ?

Quatre raisons majeures peuvent être invoquées pour justifier de l'intérêt d'une quantification de l'information visuelle :

- SYNTHESE :** Pour rendre une information complexe manipulable, il est indispensable de la ramener à ces composantes principales en éliminant l'information superflue.
- OBJECTIVITE :** Il est intéressant, en complément d'une analyse qualitative éminemment subjective, de disposer d'un outil alliant rigueur et précision et permettant une reproductibilité parfaite de l'analyse.
- COMPARAISON :** Des mesures quantitatives reproductibles effectuées sur différentes scènes permettent d'utiliser des critères objectifs et précis pour la comparaison et le classement.
- CORRELATION :** La mesure objective des propriétés géométriques d'une même scène permet de mettre en évidence des lois qui unissent ces variables entre elles ou qui les unissent à d'autres propriétés non-géométriques¹.

2.3.2 Que faut-il quantifier ?

Dans un article remarquable qui fait la synthèse de trente années d'observations sur le terrain, le sédimentologue J.C.Griffiths[1988] a tenté de formuler une solution générale aux problèmes d'analyse quantitative des sédiments. Selon lui, toute propriété (T) d'un agrégat peut s'exprimer conceptuellement en fonction des caractéristiques fondamentales de ses constituants :

$$T = f(m_i, s_i, sh_i, o_i, p_i)$$

Les caractéristiques sont :

- m_i : la nature et la proportion de chacun des constituants.
 s_i : la taille (granulométrie) des éléments constitutifs.

¹ Cet aspect est fondamental en microscopie des matériaux où l'espoir est d'établir des corrélations entre les caractéristiques microscopiques et les comportements macroscopiques.

sh_i : la forme des éléments constitutifs.

o_i : l'orientation des éléments constitutifs.

p_i : l'empilement (dispersion) des éléments constitutifs.

Cette relation conceptuelle de Griffiths représente un effort louable pour expliciter les corrélations importantes existant entre les propriétés physico-chimiques d'un agrégat (par exemple sa porosité et sa résistance électrique). Elle attire l'attention sur le petit nombre de *variables réellement indépendantes* susceptibles de fournir la carte d'identité complète d'un sédiment. Mais, l'idée de Griffiths se heurte à deux obstacles de taille :

- 1) L'information indispensable à la mesure directe des variables mentionnées est souvent inaccessible.
- 2) si même l'information est accessible, la caractérisation paramétrique présente rarement une solution générale.

Pour progresser autant que possible dans l'analyse des caractéristiques fondamentales d'un matériau, l'analyse d'images est probablement la technique la plus prometteuse, car elle procède de la visualisation directe de la structure. L'analyse d'images en 2-D a déjà démontré qu'elle pouvait surpasser bon nombre de techniques physico-chimiques traditionnelles. L'avènement d'une imagerie 3-D réellement opérationnelle ne pourra que renforcer cet avantage. Il n'en reste pas moins que si le premier obstacle d'accessibilité de l'information peut-être levé, la question reste posée de savoir comment il faut quantifier l'information. Cette question n'est pour ainsi dire jamais évoquée dans les traités d'analyse d'images, elle est pourtant incontournable!

2.3.3 Comment quantifier l'information structurale ?

2.3.3.1 Paramétrage et quantité d'information.

Parmi les paramètres de base proposés par Griffiths[1988], seuls ceux relatifs à des mesures de taille (s_i) ou de proportions (m_i) peuvent être appréhendés de manière définitive et univoque. La mesure de la taille, présentée comme une mesure de Lebesgue (aire en 2-D, volume en 3-D) ne présente aucune difficulté. Les autres paramètres font l'objet d'une multitude de travaux s'attachant à quantifier tantôt l'un, tantôt l'autre aspect de la forme de l'orientation ou de la dispersion sans nécessairement respecter le clivage entre les trois (Stoyan & Benes[1991] par exemple, traitent simultanément de l'orientation des particules et de l'anisotropie de leur arrangement spatial).

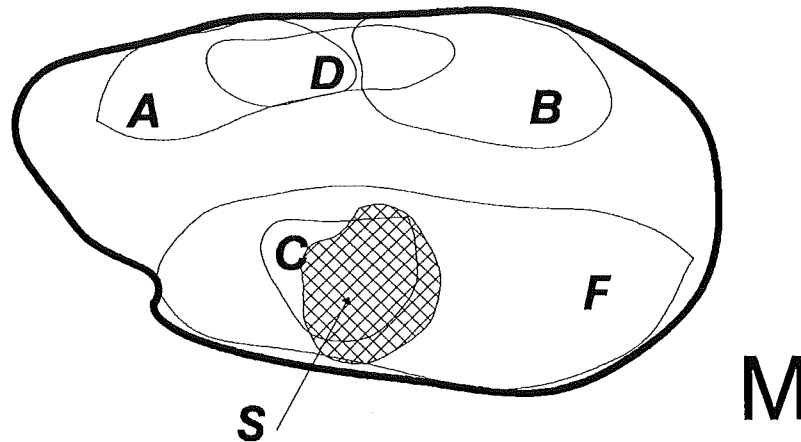


Fig.2.8. Chaque paramètre morphométrique (A,...,D) ne recouvre qu'une partie de l'information morphologique totale (M) et ne recoupe pas toujours l'information spécifique au problème considéré (S).

Tout se passe comme si chacune des caractéristiques géométriques de la structure était elle-même une quantité d'information qui ne peut être appréhendée par un paramètre global. Face à cette situation, deux attitudes sont possibles qui rappellent inmanquablement celles des partisans du *bottom-up* et du *top-down* : soit, il faut poursuivre dans le découpage le plus systématique possible de l'information; soit il faut définir, connaissances à l'appui, un *paramètre spécifique*. L'illustration de la quantité d'information par un diagramme de Venn permet de bien comprendre les deux démarches (Fig.2.8.). Dans l'esprit d'une approche systématique de la notion de forme, il est indispensable de choisir les paramètres de manière à couvrir au mieux le domaine M et à éviter la redondance. L'idée est de rechercher les *composantes principales* de l'information morphologique (dans l'illustration de la figure 2.8., le paramètre D est inutile). Cette démarche purement objective peut être remplacée par une démarche *top-down* dans le cas où le problème posé invite à ne prendre en considération qu'un sous-ensemble spécifique de l'information morphologique (S). Si ce sous-ensemble peut être précisé grâce à des lois physiques par exemple, il n'est nul besoin de procéder à l'évaluation des paramètres A,B ou D qui n'ont aucune intersection avec le domaine de S. C sera le paramètre le plus expressif.

L'analyse morphologique des produits d'une opération de tamisage constitue un bon exemple. Les lois physiques simples qui interviennent permettent de dire sans risque de se tromper que la rugosité des particules ne joue pas un rôle significatif, mais qu'en revanche le diamètre intermédiaire sera un paramètre critique.

2.3.3.2 Approche systématique ou approche spécifique.

En préambule à l'introduction de sa relation conceptuelle, Griffiths fait deux remarques apparemment anodines :

- 1) Toute recherche poursuit un but qui doit être clairement exprimé. En conséquence, le chercheur doit pouvoir définir les outils qui lui permettront d'accéder à la "vérité".
- 2) Certains problèmes sont insolubles dans le référentiel dans lequel ils sont exprimés !

Dans le contexte de l'analyse morphologique, ces remarques attirent l'attention sur le fait que l'analyse structurale *per se* n'a aucun sens, mais qu'elle se fait toujours dans un but précis. Autrement dit, il existe toujours un domaine S sous-ensemble du domaine M. Le risque encouru en choisissant un paramètre au hasard, est de se retrouver dans l'impossibilité de résoudre le problème posé. Soit qu'il n'y ait aucun recouvrement avec S, soit que la mesure de S soit diluée dans une mesure plus globale qui fluctue indûment (variable atypique) (paramètre E de la Fig.2.8.). Ces remarques sont dans la droite ligne de celles formulées par Jain & Binford [1991] qui dénonçaient des choix méthodologiques guidés par des modes plutôt que par des domaines d'application. L'intérêt éventuel d'une approche systématique de l'analyse morphologique réside dans le fait que lorsque le domaine S est inconnu, il est préférable de quantifier un maximum d'informations et d'utiliser des procédures statistiques pour identifier les paramètres les plus expressifs.

En conclusion, l'approche spécifique est à réserver pour des applications où l'information utile (S) à la prédiction d'une propriété (T) est clairement définie par une longue tradition expérimentale ou par l'existence de lois physiques simples.

2.3.3.3 Analyse structurale et échelle d'investigation.

Cela devient une évidence avec le développement des outils microscopiques qu'un matériau peut être observé à un très grand nombre d'échelles. Une analyse structurale rigoureuse suppose en toute logique de définir avec précision *l'échelle d'investigation*. Ceci est d'autant plus vrai que les structures d'un matériau peuvent varier très fortement avec le grossissement adopté. L'engouement actuel pour les fractales tendrait à faire croire que la nature a des propriétés autohomothétiques très puissantes et qu'en conséquence il n'est pas nécessaire de définir une échelle d'investigation. Mais jusqu'à preuve du contraire les travaux consacrés aux analyses fractales de tissus biologiques ou de matériaux ont montré qu'il était impossible d'y faire correspondre une dimension fractale unique et qu'au contraire il apparaissait une variation continue de dimensions fractales [Rigaut,1984; Blacher et al.,1991]. Ce qui a fait évoluer la théorie fractale vers une théorie multifractale !

Griffiths[1988] se plaint que les sédimentologues ne prennent pas assez le soin de définir quelle est la *population* qu'ils étudient. Selon la définition statistique, une population est l'ensemble de tous les échantillons possibles dans la masse de matière considérée (l'univers). Cela suppose par conséquent avant toute étude de définir quel est l'échantillon et quel est l'univers. En termes d'échelle, cela consiste à préciser le *seuil inférieur* (l'échantillon) et le *seuil supérieur* (l'univers).

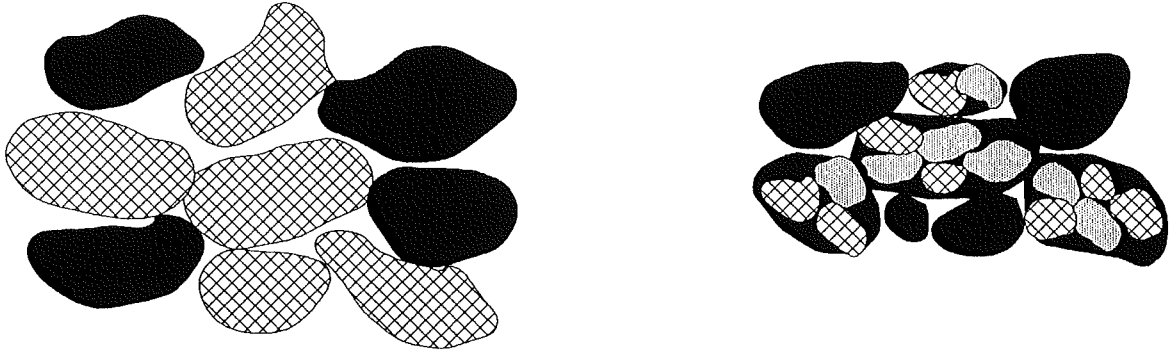


Fig.2.9. Dans un sédiment simple, l'échelle d'investigation (le grain) s'impose. Dans un sédiment fait par accumulation de débris d'anciens sédiments, il y a des échelles d'investigation imbriquées. L'échelle correcte ne pourra être définie que si les buts de la recherche sont précisés (source primaire ou secondaire ?)

Le géologue étudie un sédiment dans le but d'identifier les sources géologiques et les mécanismes de transport. C'est la nature de ce travail qui lui impose l'échantillon à adopter : le grain de sable. Logiquement, un grain forme une entité à l'intérieur de laquelle tout élément de matière provient de la même source et a subi le même transport. (Fig.2.9.)

Pour introduire un formalisme qui prend en considération l'échelle d'investigation dans la formule de Griffiths, nous sommes tentés d'écrire :

$$T = f(m_i, s_i, sh_i, o_i, p_i, t_i)$$

t_i : est la mesure de la propriété T sur chacun des éléments constitutifs.

L'image d'un mur offre une illustration explicite de ce formalisme. La résistance mécanique d'un mur est fonction (éventuellement) de la nature et de la proportion des différents constituants (briques et ciment), de leur taille(s_i), de leur forme(sh_i), de leur orientation(o_i) et de leur empilement(p_i)...mais aussi de la résistance mécanique individuelle de chaque brique et du ciment (t_i).

2.3.3.4 Une mise au point sur les termes structure et texture.

Depuis toujours, une confusion règne dans les sciences géologiques entre l'utilisation des termes de structure et de texture. Tous les auteurs dénoncent ce fait, ressentent intuitivement le besoin de distinguer les deux notions, mais ne proposent aucune définition précise. Ainsi, Schwartz[1951] écrit : "In describing ores, texture and structure have been used interchangeably and to some extent they are interchangeable. This is bound to be confusing!". Il ajoute "in the sense adopted in Russian and German, texture refers to features discerned by the unaided eye and structure to the internal fabric visible under the microscope." Le dictionnaire des termes miniers de l'U.S.B.M. [1968] fournit la précision suivante : "...there is a growing and commendable tendency to confine structure to the features that characterize the rock mass as a part of the earth crust and texture to those that characterize the particular specimen as a piece of rock." Barton[1991] ajoute qu'il ne perçoit aucune discontinuité entre les études de terrain, l'examen macroscopique et l'analyse microscopique. Selon lui, il suffit de définir un terme de texture qui se réfère à "the spatial relations *within* and *among* minerals and fluids, regardless of scale or origin."

En réalité, à la lumière de la relation conceptuelle développée ci-avant et des notions statistiques qui l'accompagnent, la distinction entre structure et texture peut être clairement précisée. Elle dépend de l'échelle d'investigation : la **structure est l'arrangement spatial entre les échantillons** tandis que la **texture est l'arrangement spatial au sein de l'échantillon**. Ainsi,

$$T = f(m_i, s_i, sh_i, o_i, p_i, t_i)$$

où m , s , sh , o et p sont les *paramètres structuraux*.

Et de même à l'échelle inférieure (celle où l'échantillon devient univers)

$$t = f(\mu_i, \sigma_i, \phi_i, \omega_i, \pi_i)$$

où μ , σ , ϕ , ω , π sont les *paramètres texturaux*.

Pour reprendre l'exemple utilisé ci-avant : la brique fait partie d'une structure (le mur) et elle possède une texture.

Il est normal que le géologue de terrain et le microscopiste ne puissent parvenir à un accord sur la terminologie de structure et texture, chacun privilégiant son propre **point de vue** !

3 L'ANALYSE DES MATERIAUX GRANULAIRES.

3.1 Introduction.

Selon une définition tout à fait générale inspirée de P.Gy [1975] nous considérerons un matériau granulaire comme étant : "un ensemble de fragments solides baignant dans un fluide interstitiel." Cette définition a l'avantage de ne comporter aucun caractère restrictif tant en ce qui concerne la nature des particules que leurs dimensions¹. A titre d'exemple, le fragment solide peut être tout aussi bien organique qu'inorganique, graine que minéral, fruit que roche. De même, le fluide peut être un gaz tout autant qu'un liquide. Ceci explique que les théories les plus générales sur la caractérisation ou l'analyse des matériaux granulaires ont une très large audience, que ce soit en minéralurgie, métallurgie, génie civil, pharmacie, agronomie ou dans l'industrie alimentaire,... En contrepartie, il faut regretter que le très grand nombre d'études expérimentales existantes est dispersé dans autant de revues scientifiques. Rares sont les revues multidisciplinaires (Powder Technology, Journal of Colloid and Interface Science,...).

Dans l'ensemble des techniques relatives au comportement des matériaux granulaires, ceux-ci peuvent intervenir soit comme alimentation (*INPUT*) soit comme produits (*OUTPUT*). Très schématiquement, nous distinguerons les procédés selon qu'ils interagissent avec des propriétés locales du système ou au contraire avec des propriétés globales (Fig.3.1.). Plus précisément, des techniques à *sollicitation locale* ont la capacité d'interagir avec les particules individuelles ce qui permet de séparer le matériau granulaire en une série de sous-ensembles, tandis que les techniques à *sollicitation globale* ne conduisent pas à une ségrégation de l'alimentation.

Tous les travaux relatifs aux matériaux granulaires essayent soit de mettre au point des techniques les plus sélectives possibles vis-à-vis des propriétés des particules, soit de mieux comprendre le comportement de ces systèmes en fonction de leurs propriétés intrinsèques. Les rôles de la densité (m_i) et de la granulométrie (s_i) ont été largement investigués. En revanche, le rôle de la morphologie des particules, s'il a fait couler beaucoup d'encre, s'est constamment heurté à deux problèmes majeurs :

1) Difficulté d'expérimentation.

Pour mettre en évidence l'influence de la morphologie sur une propriété physique quelconque, il faut pouvoir éliminer autant que possible l'influence des autres variables. Or, il n'existe aucune méthode permettant de générer des produits ne

¹ Etant donné les propriétés tout à fait particulières des colloïdes, notre propos sera implicitement restreint à des particules supérieures à 1 μ m et à des systèmes où les interactions électrochimiques sont négligeables.

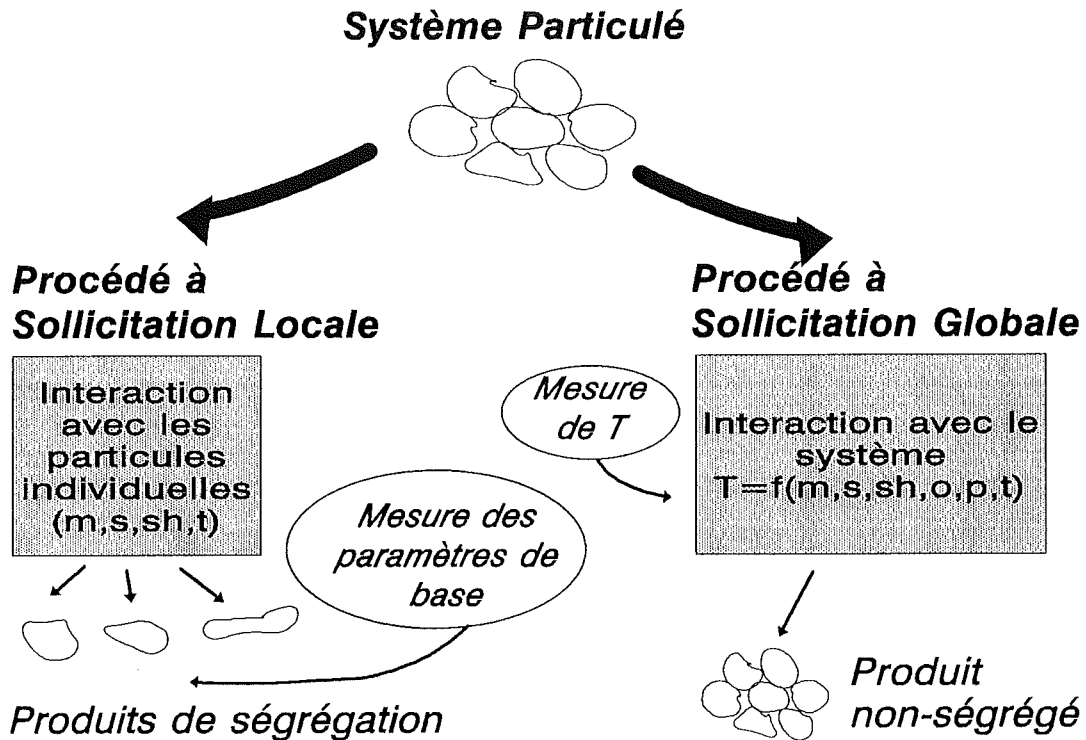


Fig.3.1. Les procédés de traitement des matériaux granulaires peuvent être distingués d'après le mode de sollicitation du matériau.

différant strictement que par leur morphologie. En conséquence, l'influence de la morphologie est fréquemment occultée par d'autres paramètres tels que la densité et la taille dont il est permis de penser, dans un système soumis aux lois de la gravité, que l'influence est prédominante.

2) **Difficulté de quantification.**

L'absence d'une théorie morphométrique systématique et l'utilisation aveugle de paramètres morphologiques ayant de mauvaises propriétés (en particulier le seul "facteur de forme" disponible sur les systèmes commerciaux d'analyse d'images ! cfr.§ 5.3.) n'ont pas permis à la plupart des auteurs d'établir des corrélations rigoureuses entre des grandeurs physiques et des caractéristiques morphologiques. Beaucoup de théories existantes ont une base largement empirique!

3.2 Analyse morphométrique et techniques de production de particules.

3.2.1 Broyage / Granulation.

De par leur énorme importance économique, les méthodes de broyage et de granulation ont fait l'objet d'innombrables études mettant en évidence le rôle des paramètres du procédé sur la granulométrie des particules produites. Il paraît évident aux yeux de tous les auteurs que la morphologie des particules puisse être différente d'un procédé à un autre, mais il ne s'agit-là bien souvent que de spéculations. Rares sont les études systématiques ayant recours à une description même qualitative de la forme pour étayer leur propos [Kahlhöfer et al.,1956]

Certaines techniques ont été conçues pour générer des particules selon une morphologie bien déterminée. C'est le cas bien évidemment des techniques de granulation ou d'agglomération qui privilégient une morphologie sphérique (billes de verre, pellets,...), c'est beaucoup plus rarement les cas des techniques de broyage, même si il existe des brevets pour la production de "fragments cubiques" [Grasse,1954]. Parmi les travaux plus récents en minéralurgie, il faut citer [Forssberg et al.,1988] et [Durney & Meloy,1986]. Les premiers ont étudié les différences morphologiques obtenues sur des minerais réels par un broyage autigène d'une part et un broyeur à boulets d'autre part. Les paramètres morphologiques (non explicités) qu'ils ont utilisés sont manifestement trop "flous" que pour cerner avec précision des différences (Fig.3.2.). Les auteurs en déduisent néanmoins que le broyage autigène produit des particules plus "prismatiques" plus "arrondies" et plus "lisses".

Property, mill type	Size fraction (μm):				
	212-150	150-106	106-75	53-38	<20
Compactness:					
autogenous	1.009	1.012	1.009	1.009	1.021
ball	1.027	1.030	1.028	1.021	1.053
Axial equality					
autogenous	0.85	0.84	0.86	0.85	0.79
ball	0.77	0.75	0.76	0.79	0.69
Surface properties:					
acuteness	0.983	0.983	0.981	0.988	0.969
roughness	1.024	1.073	1.045	1.117	0.899

Fig.3.2. Analyse morphométrique des produits d'un broyeur autigène [Forssberg et al.,1988]

Durney et Meloy [1986] sont les premiers à notre connaissance à utiliser une analyse morphologique rigoureuse à l'appui de leurs expérimentations. Celles-ci portent sur les produits de broyage de billes de verre calibrées, obtenus dans un broyeur à mâchoires pour deux vitesses d'alimentation différentes (open-flow : lente; choke-flow : rapide). Les auteurs ont utilisé les vingt premières harmoniques d'une analyse de Fourier du contour (cfr. § 5.5.3.) pour discriminer les particules produites. En résumé, ils en déduisent que les différences morphologiques les plus fortes se rencontrent pour les particules les plus grandes, que les morphologies sont plus complexes dans les tailles les plus fines et que l'alimentation forcée produit des particules de formes plus "blocky" et plus lisses (Figs.3.3. & 3.4.).

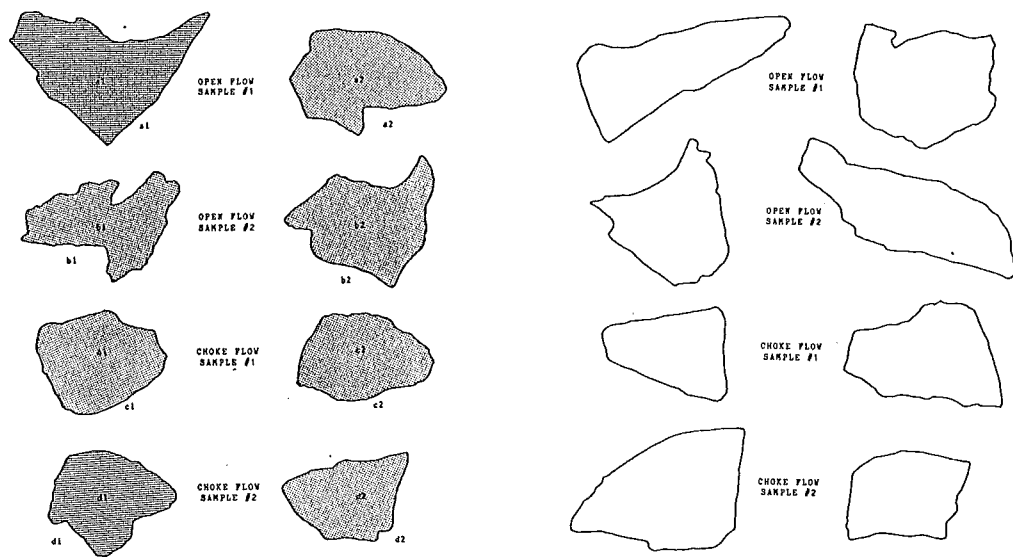


Fig.3.3. Quelques particules représentatives des fractions 20 mesh (à gauche) et 200 mesh (à droite) issues d'un broyage à alimentation lente (en haut) ou forcée (en bas) [Durney & Meloy,1986].

Signalons enfin que Preti et al.[1989] ont développé un modèle de libération des minerais prenant en considération les modifications morphologiques au cours du broyage.

Comparison	Harmonic																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
<i>Open vs choke 20 mesh</i>																				
open #1,20 mesh vs choke #1,20 mesh	6	16	24	26	16	26	20	17	18	19	18	16	9	15	8	5	8	9	7	8
open #2,20 mesh vs choke #2,20 mesh	16	8	17	7	10	12	6	6	11	9	15	5	14	6	15	10	17	11	11	8
<i>Open vs choke 200 mesh</i>																				
open #1,200 mesh vs choke #1,200 mesh	14	10	20	9	8	4	9	21	3	3	7	3	5	5	13	10	11	5	12	11
open #2,200 mesh vs choke #2,200 mesh	7	20	6	13	4	16	6	7	4	5	7	5	3	11	14	6	17	10	6	21
<i>20 mesh vs 200 mesh open flow</i>																				
open #1,20 mesh vs open #1,200 mesh	14	7	20	12	6	9	8	7	8	8	8	11	7	12	12	6	23	23	11	10
open #2,20 mesh vs open #2,200 mesh	10	12	19	14	13	14	10	8	7	5	5	9	4	5	9	8	17	5	12	12
<i>20 mesh vs 200 mesh choke flow</i>																				
choke #1,20 mesh vs choke #1,200 mesh	8	37	16	14	16	16	17	17	15	8	20	10	6	13	7	5	7	13	8	6
choke #2,20 mesh vs choke #2,200 mesh	11	7	19	7	13	9	4	6	8	8	7	7	23	8	8	16	19	19	9	22
<i>#1 vs #2 open flow</i>																				
open #1,20 mesh vs open #2,20 mesh	13	5	11	5	14	10	8	14	14	21	7	3	5	5	15	9	6	16	6	9
open #1,200 mesh vs open #2,200 mesh	14	10	6	6	4	15	12	6	12	3	11	15	8	17	9	9	8	10	16	14
<i>#1 vs #2 choke flow</i>																				
choke #1,20 mesh vs choke #2,20 mesh	16	4	4	8	11	12	10	8	14	6	5	10	4	13	6	16	9	19	6	15
choke #1,200 mesh vs choke #2,200 mesh	3	15	5	10	5	9	13	1	3	5	14	15	11	6	3	7	6	6	11	11

Fig.3.4. Tableau de contingence des χ^2 basé sur l'analyse des vingt premières harmoniques de Fourier [Durney & Meloy,1986]

3.2.2 Usure de surfaces.

Dans un tout autre ordre d'idées, il faut signaler la diversité des particules métalliques produites par le frottement de deux surfaces selon le mode d'usure qui prédomine. Les spécialistes en tribologie utilisent classiquement des *ferrogrammes* [Roylance & Pocock,1983] pour diagnostiquer la nature des phénomènes d'usure. Ces ferrogrammes sont des courbes granulométriques des particules métalliques recueillies dans les produits de lubrification. Thomas et al.[1991] ont mis l'accent sur l'intérêt d'une étude morphométrique de ces particules. Ils ont utilisé différents paramètres de forme ainsi qu'une analyse de courbure pour différencier les particules selon le mode d'usure [Fig.3.5.]

Source	Code name	Visual analysis	Area (pixels)	Aspect ratio	Roundness	Centre line average	Dispersion	Skewness	Kurtosis
Gear Box	XY1	Sliding	4916	1.98	2.43	32	44	-0.53	4.1
	XY2	Sliding and fatigue	29003	1.44	3.20	38	49	-0.58	3.8
	XY3	Fatigue	13896	2.08	3.37	43	55	-0.64	2.8
Taper roller bearing (1)	XY5	Sliding	10465	1.49	1.41	15	19	-0.23	7.8
	XY7	Sliding	15557	1.59	1.73	26	33	-0.08	4.4
	XY9	Chunky sliding	17589	1.52	1.59	19	27	-0.87	7.6
Taper roller bearing (2)	XY10	Fatigue and sliding	24986	1.45	2.24	33	45	-0.17	4.32
Ball bearing	XY15	Rubbing	4726	1.19	1.52	24	34	-0.56	7.8
Wear particle Atlas (ref. 1)	XY21	Rubbing	17354	1.12	1.37	17	21	0.72	6.3
	XY22	Cutting wear	2146	5.95	8.74	18	29	2.62	10.7
	XY23	Fatigue spall	16818	1.26	5.94	63	76	-0.12	2.2
	XY24	Severe sliding	7452	3.11	3.24	27	41	0.03	6.1
	XY25	Spherical	6948	1.01	1.27	6	7	0.08	3.4

*All particles examined at $\times 400$.

Fig.3.5. Analyse morphométrique de quelques particules "représentatives" de modes d'usure particuliers.

3.3 Analyse morphométrique et techniques de séparation de particules.

3.3.1 Granulométrie (tamisage).

La principale raison qui ait pu conduire des auteurs à s'intéresser à l'influence de la forme dans les opérations de tamisage est l'échantillonnage des matériaux granulaires. Dans un système simple de p boules noires et de $1-p$ boules blanches, l'estimation de la proportion au départ d'un échantillon de N boules se fait avec une précision :

$$s = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{N}}$$

En pratique lorsqu'il s'agit de systèmes plus complexes constitués de grains mixtes (multiphasés) et présentant une granulométrie étendue, la relation entre précision (s^2) et nombre de particules à prélever devient selon Gy[1967] :

$$s^2 = \frac{C_{Gy} \cdot d_{95}}{m_E}$$

avec d_{95} : tamis de maille carrée qui retiendrait 95% du minerai.
 C_{Gy} : constante de Gy pour le minerai :

$$C_{Gy} = \left(\frac{1 - \alpha_L}{\alpha_L} \right) ((1 - \alpha_L) \cdot \delta_A + \alpha_L \cdot \delta_G) \cdot l \cdot f_{Gy} \cdot g$$

où α_L : est la teneur globale du lot en la variable à analyser.
 δ_A : est la densité de la phase "métal".
 δ_G : est la densité moyenne de la gangue.
 l : est un paramètre de libération moyen.
 f_{Gy} : est un paramètre de forme moyen.
 g : est un paramètre de granulométrie moyen.

La théorie de Gy est particulièrement complexe mais prend toute sa signification dans le contrôle de qualité des matériaux granulaires pour autant que C_{Gy} ait pu être déterminé par la routine.

La nature du problème investigué par Gy, qui convertit un **nombre** de particules en une masse à échantillonner (m_E) justifie l'utilisation d'un *facteur de forme* :

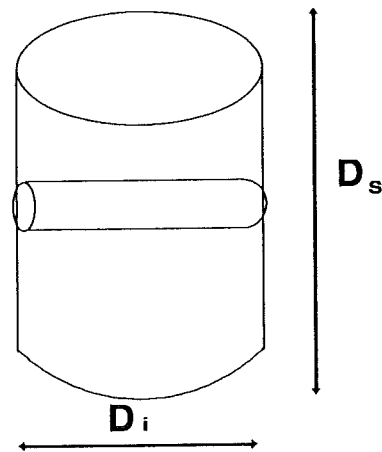
$$f_{Gy} = \frac{V}{D_i^3}$$

avec : V = volume de la particule

D_i = la maille carrée la plus petite susceptible de laisser passer la particule.

Les facteurs de forme individuels ne peuvent être obtenus (en raison des dimensions millimétriques généralement traitées), mais un facteur de forme moyen est calculé d'après une procédure minutieuse de double tamisage, volumétrie et comptage. Gy[1967], Prigogine[1961] et quelques autres auteurs ont réalisé des expérimentations sur des minerais classiques qui toutes confirment les résultats du tableau 3.6. et font dire à Gy que le paramètre f_{Gy} varie peu et à l'exclusion des minerais d'or peut être fixé à 0,5.

Minéral ou minéral pur	Paramètre de forme corrigé f
Minéral galène - quartz.....	0,474
Minéral magnétite - quartz.....	0,510
Minéral de fer calcaire.....	0,495
Minéral hématite - quartz.....	0,514
Galène pure.....	0,536
Blende pure.....	0,482
Pyrite pure.....	0,470
Fluorine pure.....	0,505
Barytine pure.....	0,522
Sidérose pure.....	0,465
Rutile pur.....	0,515
Cassitérite pure.....	0,530
Quartzite pur.....	0,490
Calcaire pur.....	0,497
Schistes de charbon (impurs).....	0,446
Charbon.....	0,485
Or natif en paillettes (environ 1 mm).....	0,208
Moyenne générale (or excepté).....	0,502



Tab 3.6. Valeurs de f_{Gy} pour quelques minerais et minéraux [Gy,1967].

Fig.3.7. Exemple extrême de deux particules susceptibles de se retrouver dans une même fraction [D_i, D_s].

Les remarques suivantes s'imposent :

- 1) La méthode utilisée est limitée en pratique à des fractions > 1 mm. Les résultats [Gy,1967. p.68] indiquent cependant que f_{Gy} diminue avec la dimension. Il est raisonnable d'imaginer que pour les dimensions les plus fines, le fractionnement des grains est directement influencé par la structure cristalline et induit par conséquent des morphologies différentes. Ce fait était déjà noté par Gaudin[1939] : "...the coarsest particles in comminuted products are frequently shaped somewhat differently than fine particles : their shape is more regular in the sense that their three dimensions of length, breadth and thickness are more nearly equal" Il a été étudié plus scientifiquement par Somasundaran[1984] ou Durney & Meloy[1986] (Fig.3.3.)
- 2) Des matières possédant des morphologies très prononcées telles que les kaolins, micas, disthènes,... n'ont pas été investiguées par les auteurs. C'est pourtant dans ces domaines que l'utilisation d'un facteur f_{Gy} de pondération de la masse à échantillonner sera la plus critique.

FORME	VOLUME	f_{Gy}
Sphère ($D = D_i$)	$\frac{\pi}{6} \cdot D_i^3$	0.524
Cylindre base: $D=D_i$ hauteur: H	$\frac{\pi}{4} D_i^3 \cdot \frac{H}{D_i}$	$0,785 \cdot \frac{H}{D_i}$
Cube (côté: $l=D_i$)	D_i^3	1.000
Plaque carrée (côté= l ; épaisseur= e) passage //	$D_i^2 \cdot e$	$0.5 \text{ à } 1.000 = e/l$
passage oblique $D_s > l > D_i$ et $l + e = D_s$	$l \cdot l \cdot e$	$0.386 (e/l = 0,3)$ $0.212 (e/l = 0,1)$ $0.122 (e/l = 0,05)$

Tab.3.8.a. Valeurs de f_{Gy} pour quelques formes simples susceptibles de passer au travers de D_s mais certainement retenues par D_i [d'après Gy,1967].

Pour permettre de comparer les valeurs expérimentales de f_{Gy} avec des valeurs obtenues pour des formes géométriques simples, Gy a calculé les valeurs théoriques du tableau 3.8.a. Il part du principe que la dimension conditionnant le passage du grain est égale à la

maille du tamis. Ce faisant, il met sur le même pied une sphère de diamètre D et un cube de côté D . Or, la première a une probabilité de passage de 100% dans une maille de dimension $D_T = D + \epsilon$ alors que le cube a une probabilité de passage tendant vers zéro!

FORME	VOLUME	f_{Gy}
Sphère ($D = D_s$)	$\frac{\pi}{6} \cdot D_s^3$	1.482
Cylindre ¹ $\frac{H}{D} > 1$ (hauteur: $H = D_i$)	$\frac{\pi}{4} D_i^3 \cdot \frac{1}{El^2}$	$0.785 \cdot \left(\frac{D}{H}\right)^2$
Disque ¹ $\frac{H}{D} < 1$ (base: $D = D_i$)	$\frac{\pi}{4} D_i^3 \cdot El$	$0,785 \cdot \frac{H}{D}$
Plaquette carrée	$D_i^2 \cdot e$	$0,05 \text{ à } 1,00 = \frac{e}{D_i}$
Ellipsoïde de révolution (gd axe = D_s ; petit = D) $El = \frac{D_s}{D}$	$\frac{\pi}{6} \cdot \sqrt{2} \cdot D_i \cdot D^2$	$\frac{1,481}{El^2}$

1 : le critère de passage sûr par D_s est : $\sqrt{D^2 + H^2} < D_s$. Soit, si $D = D_i$: $\frac{H}{D} < 1$ sinon, $H = D_i$ et $\frac{H}{D} > 1$.

Tab.3.8.b. Valeurs de f_{Gy} pour quelques formes simples certainement passées au travers de D_s mais susceptibles d'être retenues par D_i .

Dans la pratique du traitement des minerais, il est d'usage d'utiliser des colonnes de tamis en série de Tyler (progression géométrique selon $\sqrt{2}$). Aussi est-on susceptible de trouver dans une même fraction granulométrique ($D_i; D_s$) une grande disparité de volumes (Fig.3.7.). Pour compléter les valeurs de Gy qui sont relatives aux volumes *certainement retenus* par un tamis de maille D_i , nous avons calculé les volumes qui *passeront certainement* à travers $D_s = \sqrt{2} \cdot D_i$ (Tab.3.8.b.). Selon la pratique de Gy , les facteurs de forme ainsi calculés sont exprimés dans les deux cas relativement au tamis inférieur (D_i) de la fraction. Le tableau indique une forte disparité entre les facteurs de forme individuels au sein d'une même fraction granulométrique. L'utilisation d'un facteur de forme moyen aura pour effet de masquer cette disparité et de ramener toujours vers une tendance centrale quelque soit la morphologie des particules! Cela n'a pas de sens de calculer une moyenne arithmétique des

valeurs du tableau pour chaque morphologie, car la distribution de f_{Gy} n'est vraisemblablement pas symétrique. La distribution de f_{Gy} au sein d'une fraction ($D_i; D_s$) est inconnue pour une morphologie donnée, mais Endoh et al.[1984] ont montré que la probabilité de passage d'un cylindre au travers d'une maille carrée était proportionnelle au cube de son *élongation*. Autrement dit, pour une population (alimentation) de cylindres ayant tous la même *élongation* et occupant une distribution régulière de diamètres, une fraction donnée ($D_i; D_s$) contiendra beaucoup plus de petits volumes que de gros. La notion de probabilité de passage sera largement exploitée dans les méthodes morphométriques physiques. (cfr.3.5.)

Le fait que Gy utilise un tamisage très rapide (5 à 10 sec) suivi d'un retamissage (5 à 10 min) et d'une analyse du refus indique qu'il favorise très nettement les particules isométriques. Il y a dans sa procédure une ségrégation morphologique poussée qui explique la faible variance des valeurs expérimentales! Il apparaît dans tous les cas que la mesure de f_{Gy} par volumétrie de particules tamisées ne fournira jamais un outil très discriminant pour l'analyse morphométrique.

Une autre raison qui ait poussé certains auteurs à considérer l'interaction entre la morphologie et le tamisage est le souhait de pouvoir construire des courbes granulométriques par analyse d'images. Lorsqu'il s'agit de dimensions inférieures à 25 μm , de très petites quantités de particules ou de matériaux cohérents, l'analyse d'images offre des avantages très nets sur les techniques conventionnelles. Les développements stéréologiques les plus récents présentent un éventail de techniques pour aboutir à une information granulométrique fiable en 3-D. En permettant de visualiser chaque grain individuellement, l'analyse d'images autorise la mesure d'un grand nombre de paramètres (1-D ou 2-D) ce qui induit autant de formalismes granulométriques différents. Il convient de bien s'entendre sur la nature des mesures : volumes, mésodiamètres, intercepts,... et sur leur mode de présentation en nombre ou en mesure!

Historiquement, le problème stéréologique consistant à reconstruire une distribution de sphères au départ d'une coupe aléatoire a été résolu pour la première fois par Wicksell[1925]. Il a été ensuite redéveloppé indépendamment par plusieurs auteurs et en particulier par Saltykov[1958] qui en a proposé une version beaucoup plus praticable. Cette dernière théorie est la plus couramment utilisée dans les applications [Chermant,1977] où l'hypothèse d'une morphologie sphérique des particules et d'une équiprobabilité des hauteurs de coupe dans les sphères n'est pas excessive. Exner[1972] a donné une solution plus simple encore pour une discrétisation des classes selon une progression en $\sqrt{2}$. Malgré ces théories, il subsiste un grand nombre de problèmes pour lesquels soit les particules sont empilées, soit les particules sont non-sphériques. Dans le premier cas, l'équiprobabilité des hauteurs de coupe n'est plus respectée, Eckhoff & Enstad[1975] ont proposé un élargissement de la théorie pour prendre ce problème en considération.

Le problème de la granulométrie de particules quelconques n'a pas encore trouvé de solution permettant de reconstituer la distribution en volume au départ de la distribution en aire. En réalité, les théories stéréologiques qui utilisent l'aire comme mesure de base sont plus ardues que celles utilisant les intercepts. Cette observation va dans le sens de la remarque de Cruz-Orive[1987] concernant l'intérêt de la stéréologie pour un chercheur qui aurait à sa disposition une véritable technologie d'imagerie 3-D : "Unless he wanted 0-dimensional properties, such as number, connectivity,... a direct 3-D approach would be ineffective. Paradoxically enough as it seems, a reduction in dimensionality is actually compulsory in order to estimate surface area, particle size, etc... unbiasedly." Les méthodes proposées dans la littérature sont toutes basées sur la distribution statistique des *intercepts*. King[1984], en se basant sur les distributions d'intercepts obtenues pour une gamme de formes par Warren & Naumovitch [1977], propose une méthode de déconvolution applicable à des particules pour lesquelles le déficit isopérimétrique "F" (cfr. §5.3.) vaut en moyenne 0.6 à 0.66. Cette méthode fournit en théorie la distribution granulométrique en volume exprimée en diamètre de passage, ce qui est exactement le résultat d'un tamisage. Malgré le fait que des recherches systématiques soient entreprises pour connaître les distributions d'aires relatives à une large gamme de polyèdres [Wasen & Warren, 1990], il est peu probable que l'avenir soit à des méthodes reposant sur une hypothèse morphologique. Les applications de ces théories sont rares et peu convaincantes tant leur domaine de validité paraît restreint [Wasen & Warren, 1989].

Une approche extrêmement novatrice et strictement stéréologique dans le sens où elle s'affranchit du mode d'échantillonnage propre à l'imagerie électronique a été proposée par Gundersen & Jensen [1985, 1987], Gundersen[1986]. Sa force réside dans le fait que les calculs sont totalement indépendants de toute hypothèse préalable sur la morphologie de la particule analysée? L'équation de base qui régit les développements de Gundersen et al. est l'estimation du volume par des longueurs d'intercepts :

$$\bar{V}_v = \frac{4}{3} \Pi \bar{l}_n^3$$

où l_n : est la longueur d'intercept conformément au dessin de la figure 3.9.

Sa mise en oeuvre pratique repose sur la possibilité de pouvoir échantillonner l_n selon toutes les directions de l'espace par des coupes Aléatoires Uniformes Isotropes (IUR sections). Si ces coupes sont implantées selon des points au hasard (point sampled intercepts), l'échantillonnage est proportionnel au volume de la particule et le calcul fournit immédiatement \bar{V}_v . Ces contingences pratiques sont une limitation importante en sciences des matériaux ce qui explique le peu de tentatives d'application. Citons surtout [Howard et

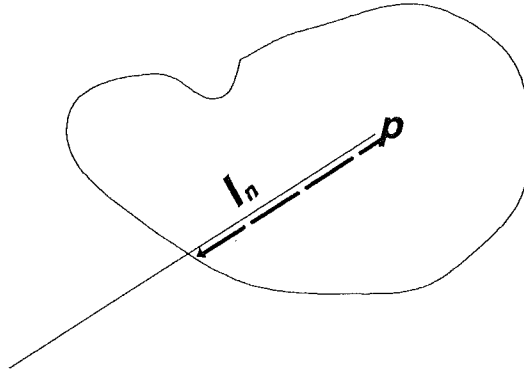


Fig.3.9. Mesure de l_n dans une direction aléatoire au départ d'un point p pris au hasard.

al.,199]) qui calculent le volume moyen des grains dans un réfractaire au départ d'une section polie. D'autre part, Benes et al.[1992] ont utilisé la méthode de la dissectrice [Sterio,1984] pour obtenir une granulométrie en nombre de volumes de bulles dans un émail.

A côté des travaux théoriques fondamentaux, certains auteurs ont cherché à utiliser l'analyse d'images d'une manière beaucoup plus empirique dans le but d'affiner les résultats d'une granulométrie par tamis. Cette démarche a une validité limitée et n'a d'intérêt que dans la mesure où le tamisage est effectivement utilisé au stade industriel. La méthode la plus simple pour corréler l'analyse microscopique au tamisage suppose de pouvoir photographier en projection des grains posés sur une surface plane [Delloye,1987]. Cette méthode est inévitablement limitée à un ensemble de particules de même densité et suppose de faire une hypothèse sur la troisième dimension (disques ou sphères?). Besançon et al. [1985,1988] ont étudié en détail les distributions statistiques des diamètres de Féret minima (qu'ils appellent mésodiamètres). Leur conversion d'une granulométrie en nombre à une granulométrie en masse suppose que les particules ont toutes un même indice de forme exprimé comme étant :

$$f_i = \frac{v_i}{(\bar{F}_{\min}^G)^3}$$

ou \bar{F}_{\min}^G est la moyenne géométrique des bornes de la classe granulométrique

Ces auteurs ne font cependant aucune référence à la probabilité de passage des particules au travers d'un tamis, or il est évident que l'analyse d'images idéalise le tamisage.

3.3.2 Méthodes gravimétriques.

3.3.2.1 Sédimentation.

Le comportement hydrodynamique des matériaux granulaires est d'une importance fondamentale dans un grand nombre de procédés industriels et naturels. Un nombre impressionnant de recherches a été consacré à ce sujet que ce soit par le biais de l'expérimentation plutôt privilégiée par les géologues ou par celui de la modélisation chère aux physiciens. Tous ces travaux se basent sur l'équation fondamentale de Stokes qui donne la vitesse limite de sédimentation d'une sphère dans un fluide de viscosité donnée :

$$V_{\text{lim}} = \frac{(\delta_p - \delta_f) D^2 g}{18\eta}$$

avec δ_p densité de la particule
 δ_f densité du fluide
 D diamètre de la particule
 g gravité
 η viscosité du fluide

Cette loi de Stokes a un champ de validité restreint aux conditions d'un écoulement laminaire. Un tel écoulement n'existant réellement que pour des particules correspondant à un nombre de Reynolds très faible :

$$Re = \frac{V_{\text{lim}} \delta_f D}{\eta} < 10^{-1}$$

La validité de l'équation de Stokes pour des particules uniques s'écartant de la sphère a été analysée quantitativement dès Wadell[1934]. Ce travail a été affiné par Pettyjohn & Christiansen [1948] qui ont proposé une modification de la loi de Stokes pour $Re < 0,05$:

$$V_{\text{lim}} = 0.843 \log\left(\frac{\Psi_s}{0.065}\right) \frac{(\delta_p - \delta_f) D_o^2 g}{18\eta}$$

avec D_o diamètre d'une sphère de volume équivalent

Dans cette dernière équation on voit apparaître le paramètre de forme tridimensionnel défini par Wadell[1932] comme étant la *sphéricité* :

$$\Psi_s = \frac{S_o}{S} = \frac{4.836}{S_V}$$

avec S : surface de la particule
 S_o : surface d'une sphère de même volume
 S_V : surface spécifique de la particule

Pour des nombres de Reynolds plus élevés ($2000 < Re < 17000$) Pettyjohn & Christiansen[1948] proposent l'équation :

$$V_{\text{lim}} = \frac{4(\delta_p - \delta_f)D_o g}{3 \delta_f C_D}$$

avec $C_D = 5.31 - 4.88\Psi_s$ qui est le coefficient de traînée de la particule.

Dans une série de publications successives, Concha & Barrientos[1986] ont affiné ces équations empiriques pour des particules équiaxes, mais fondamentalement le facteur déterminant reste le facteur de forme exprimé par un coefficient de traînée :

$$C_D = f\left(\frac{\delta_p}{\delta_f}, \Psi_s\right)$$

Les équations qu'ils proposent permettent la prédiction de la vitesse limite avec une erreur relative moyenne de 12% pour $10^{-1} < Re < 10^4$, $0.6 < \Psi_s < 1$ et $1 < \lambda < 11$. Le problème du comportement hydrodynamique d'un système de particules n'est pas résolu pour autant car les particules réelles ont des morphologies complexes, différentes d'une particule à l'autre et les interactions entre ces particules influencent considérablement les propriétés hydrodynamiques. Les travaux qui sont à la base des équations ci-dessus reposent tous sur des expérimentations faites avec des particules de géométrie simple pour lesquelles Ψ_s est mesurable. Pratiquement, la mesure de Ψ_s s'avère impossible sur des particules réelles ce qui explique le très grand nombre de paramètres morphologiques proposés jusqu'à présent pour tenter d'obtenir une corrélation avec les vitesses de sédimentation atteintes. Briggs et al.[1962] comparent les qualités de huit facteurs de forme préconisés et font ressortir que la meilleure corrélation est obtenue avec le facteur défini par Corey[1949] :

$$C_{SF} = \frac{c}{\sqrt{ab}}$$

ou a, b et c peuvent être considérés respectivement comme le grand le moyen et le petit axe d'une particule ellipsoïdale.

Ce paramètre tridimensionnel a été adopté par plusieurs auteurs dans leurs études expérimentales sur des placers aurifères [Tourtelot, 1973] ou sur la sédimentation de l'or fin en présence d'argile [Walsh & Rao, 1988]. Le tableau 3.10. indique très nettement qu'une particule discoïdale aplatie à 10% ($C_{SF} = 0.1$) possède des vitesses de sédimentation moitié moindres que la sphère de même masse.

Gold Mass	Nominal Gold Shape (CSF)	Number of Observations (n)	95% Confidence Interval* of mean Settling Velocity (cm/sec)
97.0mg (8 mesh sphere)	1.0	33	93.8 ± 1.2
	0.5	11	85.3 ± 2.5
	0.1	11	36.3 ± 0.8
	0.05	11	26.2 ± 0.5
23.6mg (14 mesh sphere)	1.0	33	76.4 ± 0.8
	0.5	11	65.2 ± 0.7
	0.1	11	26.7 ± 0.7
	0.05	11	21.0 ± 0.3
1.9mg (30 mesh sphere)	1.0	33	39.6 ± 0.2
	0.5	11	34.8 ± 0.3
	0.1	11	16.5 ± 0.2
	0.05	11	13.7 ± 0.2
0.3mg (50 mesh sphere)	1.0	33	20.5 ± 0.07
	0.5	11	19.3 ± 0.06
	0.1	11	10.8 ± 0.03
	0.05	11	8.7 ± 0.03
31.0µg (100 mesh sphere)	1.0	33	9.0 ± 0.02
	0.5	11	8.4 ± 0.27
	0.1	11	4.1 ± 0.07
	0.05	11	3.6 ± 0.08

Tab 3.10. Vitesses de sédimentation de particules d'or de même masse en fonction du paramètre C_{SF} [Walsh & Rao, 1988].

En dehors des études de sédimentologie au sens strict il n'existe à notre connaissance aucune recherche systématique exploitant des facteurs de forme tri- ou même bidimensionnels dans l'analyse des résultats de cyclonage ou de séparation en liqueur dense. Quelques travaux stigmatisant l'importance de la morphologie dans les techniques de concentration gravimétrique apparaissent épisodiquement comme celui de Gerth[1957] qui utilise un système de microrugosimétrie pour mettre en évidence les pertes en ferrosilicium des systèmes *Heavy Media Separation* en relation avec la rugosité des grains. Nous avons abordé ce même problème dans Noël[1991] en utilisant la notion d'enveloppe convexe.

3.3.2.2 Tablage.

Les méthodes de tablage recourent aux lois physiques de la sédimentation et du frottement. Ces lois sont notoirement influencées par la morphologie des particules, ce qui explique que tous les traités de minéralurgie citent le paramètre morphologique parmi ceux qui influencent significativement la récupération. Il n'existe pourtant à notre connaissance aucune étude quantitative rigoureuse qui vienne étayer une telle affirmation. Tout au plus suspecte-t-on la morphologie lorsque les autres variables (taille, densité) ne fournissent pas d'explication plausible. Ainsi, la récupération gravimétrique de l'or semblerait affectée par l'aplatissement des pépites lors du broyage [Ek et al.,1991; Baguette,1988]

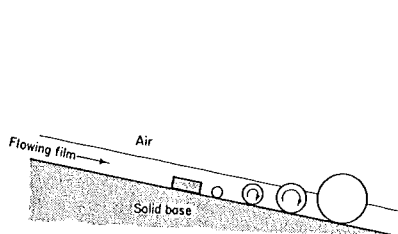


Fig.3.11. Différenciation morphologique sur une pente parcourue par un film d'eau. [Jones,1987]

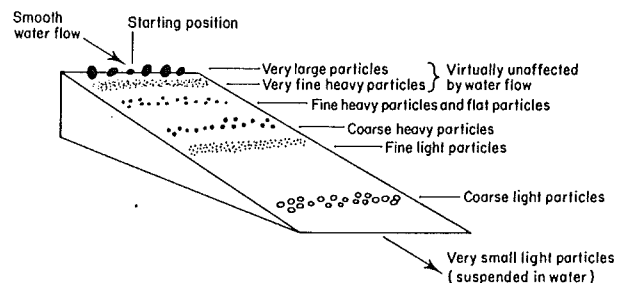


Fig.3.12. Séparation des particules dans un film d'eau, en fonction du volume, de la densité et de la forme. [Jones,1987]

Les schémas des figures 3.11. et 3.12. illustrent la répartition des particules sur un plan incliné parcouru par un film d'eau. Elles donnent une idée de la ségrégation théorique entre les particules inspirée par les modèles de Srivamohan & Forssberg[1985] qui fournissent les vitesses de glissement et de roulement de particules entraînées par un film de liquide d'épaisseur donnée :

$$V_{gliss} = \frac{D^2}{4\eta} g \sin \alpha \left(\frac{2(\delta_p - \delta_f)(1 - \mu \cotg \alpha)}{9K} - \frac{3}{4} \delta_f \right) + \frac{Dg x \delta_f}{2\eta} \sin \alpha$$

et

$$V_{roul} = \frac{D^2}{4\eta} g \sin \alpha \left(\frac{2(\delta_p - \delta_f)}{9K} - \frac{3}{4} \delta_f \right) + \frac{Dg x \delta_f}{2\eta} \sin \alpha$$

avec D : diamètre de la particule
 g : accélération gravitationnelle
 η : viscosité du fluide
 α : angle d'inclinaison de la table
 x : épaisseur du film fluide
 δ_p : densité de la particule
 δ_f : densité du fluide
 μ : coefficient de frottement dynamique
 K : facteur de forme.

Le caractère en apparence complexe de ces équations ne doit pas faire oublier qu'elles sont une image extrêmement réductrice du phénomène considéré. En particulier, il n'y a aucun terme prenant en considération l'interaction entre les particules. Quant à la forme, elle n'est décrite que très indirectement par un paramètre K qui renvoie à la loi de Stokes dans son acceptation la plus simple. Il est important de noter qu'il s'agit d'un paramètre dimensionnel, c'est-à-dire d'une fonction combinée de la taille et de la morphologie.

3.3.3 Méthodes morphométriques.

Face à l'impossibilité d'utiliser une différence de taille, de densité ou de comportement physico-chimique des particules, certains chercheurs ont dû se résoudre à imaginer des techniques de séparation morphométriques. Bien souvent, ces techniques ne sont rien d'autre que des techniques gravimétriques, densitométriques ou physico-chimiques qui ont été déréglées de telle manière que la *perturbation morphologique* soit optimisée et non minimisée comme d'habitude. Mais, l'intérêt des méthodes morphométriques ainsi développées ne réside pas tant dans leur capacité à séparer les particules que dans l'opportunité qu'elles offrent de fournir une courbe morphométrique relative à un lot de particules. Dans bon nombre de problèmes industriels, de telles méthodes pourraient trouver place à l'avenir à côté des traditionnelles analyses granulométriques. La méthode morphométrique la plus évidente et la plus simple consiste à déverser un lot de particules sur un plan incliné. Dans son utilisation la plus courante, cette méthode sert surtout à contrôler la sphéricité d'un produit granulé (p.e. les billes de verre utilisées dans les peintures routières). Le critère mis en jeu dans ce

type de méthode est l'aptitude d'une particule à rouler, ce qu'on pourrait appeler un *critère de pivotabilité*. Un tel critère a été proposé initialement dans des études sédimentologiques [Shepard & Young, 1961], mais c'est surtout Kuenen [1964] qui a développé autour de ce concept une méthode morphométrique. Le principe de son classificateur "rock and roll" est très simple (Fig.3.13.). Il s'agit d'un récipient semi-cylindrique incliné selon une pente de $1,5^\circ$ et oscillant autour de son grand axe. Le produit est alimenté en vrac à une extrémité et recueilli à l'autre extrémité en 12 fractions correspondant à autant de durées de "roulement" différentes. La difficulté d'opération de ce classificateur est lié au choix des 12 intervalles de temps. En effet, le temps d'écoulement dépend directement de la taille des grains ce qui impose de réduire l'intervalle d'échantillonnage avec une granulométrie croissante... et de traiter des produits issus d'une même fraction granulo-densitométrique! L'idée du classificateur de Kuenen a été reprise et développée par d'autres auteurs [Nakagawa et al. 1983]. Le classificateur de Kuenen n'a pas eu beaucoup de succès, y compris comme méthode de laboratoire. Mais d'autres systèmes dont le principe est analogue existent dans l'industrie. Ces derniers ont en plus l'avantage sur le classificateur de Kuenen d'être des méthodes fonctionnant en continu.

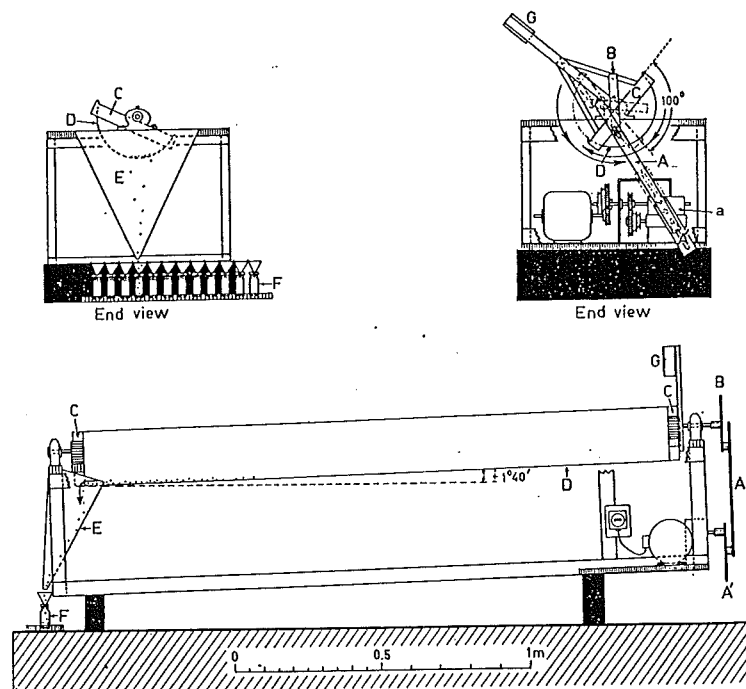


Fig.3.13. Schéma du classificateur morphologique par "Rock and roll" [Kuenen, 1964].

Les tables Delta utilisées dans l'industrie des abrasifs pour classer les grains en fractions morphométriques exploitent l'antinomie entre la tendance à rouler des grains isométriques et la tendance à la stabilité des grains plus aplatis. Il s'agit en réalité de tables inclinées animées de vibration perpendiculaires à la direction de plus grande pente [Abe & Hirosue, 1982]. Les particules qui ont tendance à rouler aisément sont insensibles aux vibrations tandis que les particules qui ne peuvent rouler sont entraînées dans la direction des vibrations. Tous les intermédiaires existent qui sont recueillis en autant de conduits séparant la zone de chute des particules les plus aplatis et les plus sphériques. Ici aussi, les paramètres de fonctionnement dépendent de la granulométrie de l'alimentation. Viswanathan et al. [1984] ont développé une méthode basée sur un disque gyrotaire incliné séparant particules sphériques et non-sphériques. Ce principe a l'avantage d'être plus insensible à la granulométrie que les précédents.

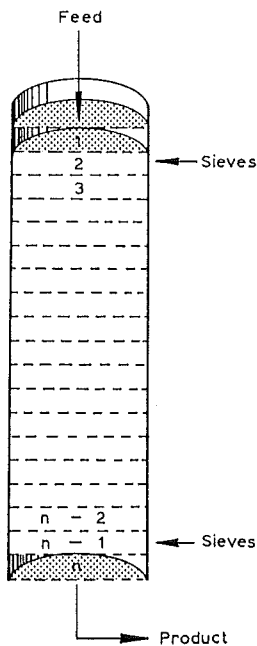


Fig. 3.14. Schéma de principe du cascadegraphe.

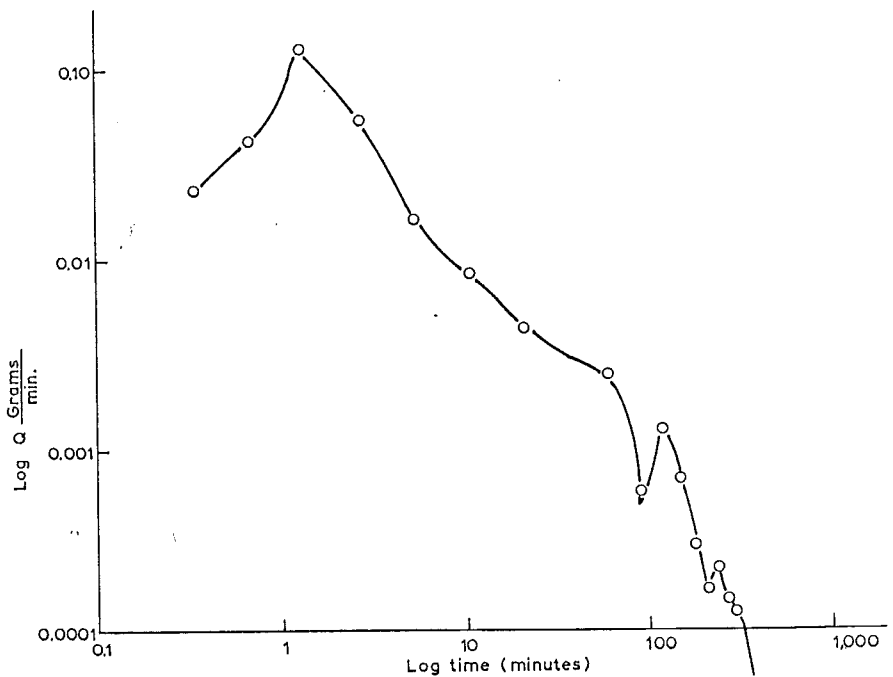
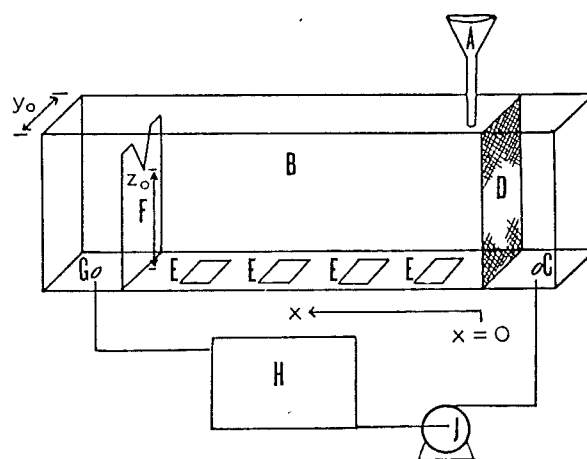


Fig. 3.15. Débit de matière en sortie en fonction du temps de résidence dans le cascadegraphe.

Les méthodes morphométriques qui précèdent sont toutes inspirées des méthodes gravimétriques. Il en existe d'autres dérivées des méthodes granulométriques comme le *cascadegraphe* de Meloy & Durney [1983] ou le *sédimenteur en continu* de Murali et al. [1986]. Le cascadegraphe exploite au maximum l'idée que la probabilité de passage d'un grain à travers un tamis est largement tributaire de sa morphologie [Roberts & Beddow, 1968, 1969]. Son principe est extrêmement simple. Une fraction granulométrique (quelques grammes !) est

prélevée par tamisage durant une heure avec une série de tamis en progression $\sqrt[4]{2}$. Cette fraction sert d'alimentation à une colonne de 20 tamis de dimensions identiques à la maille supérieure de la fraction (Fig.3.14.). Le débit en sortie (mg/min) de cette colonne de tamis est soigneusement enregistré (Fig.3.15.). La séparation morphologique qui résulte de cette opération est très spectaculaire (en termes d'élongation principalement!)... le temps nécessaire à cette opération l'est encore plus... de sept heures jusqu'à un maximum de vingt heures pour le dernier grain! Bien que Meloy & Durney suggèrent des améliorations à leur procédé pour le rendre plus "compétitif", il est difficile d'imaginer justifier l'usage industriel d'une procédure aussi lourde et discontinue, même pour des matériaux à très haute valeur ajoutée comme des abrasifs. A notre connaissance, seuls Clerici et al.[1988] ont utilisé une procédure de tamisage pour concentrer un minerai de talc en alternant des tamis à maille carrée et à maille rectangulaire. Leurs résultats sont intéressants mais peu rigoureux.(Tab.3.16.)

Screen aperture (mm)	Product		Recoveries (%)					
	N°	shape	Talc	Carbonates	Quartz			
20x300	1	cubic	0	8,8	26,0			
20x20	2	flat	26,0	8,8	2,4	4,6		
10x300	3	cubic	0,1	8,9	18,0			
10x10	4	flat	10,1	11,9	9,0	9,6		
5x300	5	cubic	0,1	12,1	8,0			
5x5	6	flat	13,3	9,0	6,8	6,8		
2,5x100	7	cubic	0,2	9,2	6,6			
2,5x2,5	8	flat	16,5	11,5	5,8	5,8		
1,2x25	9	cubic	0,2	4,6	2,6			
1,2x1,2	10	flat	18,0	8,8	4,4	4,4		
0,5x25	11	cubic	1,5	5,1	3,6			
0,5x0,5	12	flat	14,0	7,7	4,0	4,0		
Total			2,1	97,9	48,7	51,3	64,8	35,2



Tab. 3.16. Récupération sélective par tamisage cubique et rectangulaire alterné [Clerici et al.,1988]. Fig. 3.17. Schéma de principe du sédimenteur continu de Murali.

Le **sédimenteur continu** de Murali et al.[1986] a l'avantage d'être plus rapide bien que plus difficile à calibrer que le cascadographe. Il exploite l'idée que les techniques granulométriques par tamisage et sédimentation fournissent des résultats différents. Dans le sédimenteur continu, une fraction granulométrique tamisée est introduite dans un bac traversé par un débit d'eau précisément contrôlé (Fig. 3.17.). Les particules sont soumises à une double action d'entraînement par le flux d'eau et de sédimentation. Pour autant que les lois de sédimentation soient applicables, la vitesse limite de sédimentation dépend de leur coefficient de traînée C_D , elles se déposeront par conséquent à des distances croissantes de leur point d'alimentation suivant leur *écart hydraulique* à une sphère. Murali et al.[1986] ont appliqué le principe de cette analyse à un mélange de grains de moutarde et de silica-gel pour montrer l'influence des paramètres opératoires sur l'efficacité de la séparation.

3.3.4 L'analyse d'images... Une méthode à sollicitation locale.

En suivant la logique de la classification des techniques adoptée ici, il est normal de faire figurer l'analyse d'images parmi les méthodes morphométriques à connaissance locale. Par la voie optique, on a accès à l'analyse individuelle de chaque grain et par conséquent on peut construire des courbes morphométriques relatives au lot. Dans leur conception actuelle, les méthodes optiques ne sont pas des méthodes de séparation, mais il n'est pas interdit d'imaginer que tout comme pour la concentration industrielle du diamant, on puisse utiliser à l'avenir un système détecteur/éjecteur conduisant à une classification morphométrique. Toutes les méthodes de morphométrie optique seront largement développées dans le chapitre 5.

3.4 Analyse morphométrique et propriétés globales des matériaux granulaires.

Il serait fastidieux de faire le relevé de toute la littérature relative à l'influence de la morphologie des particules sur les propriétés physico-chimiques globales d'un système. Cette démarche apporterait peu d'éléments nouveaux, car rarissimes sont les études morphométriques sérieuses. La majorité des travaux étant basés sur des observations qualitatives ou des intuitions triviales! Nous nous contenterons de relever quelques jalons importants dans la littérature concernant le traitement des minerais, la métallurgie et le génie civil en tentant de faire apparaître à chaque fois la composante de forme qui paraît la plus expressive dans le contexte étudié.

3.4.1 Morphométrie et surface spécifique, porosité ou compaction d'un matériau granulaire.

Le problème de la porosité obtenue par empilement des particules est traité dans la littérature depuis plus d'un siècle tant sur le plan expérimental que sur celui de la modélisation? Rien que l'étude théorique de l'empilement de sphères équidimensionnelles laisse entrevoir la complexité du problème [Graton & Fraser,1935; Cundall,1988]. Elle rend immédiatement évidente l'existence de limites de *porosité minimale* (n_{\min}) et *porosité maximale* (n_{\max}). Ainsi, pour des empilements systématiques la porosité passe de $n_{\min}=25.95\%$ à $n_{\max}=47.64\%$. Sur le plan expérimental, les auteurs s'escriment depuis longtemps à définir des conditions d'essai permettant d'évaluer les limites de porosité. Celles-ci dépendent bien évidemment :

- du mode de compactage.
 - de l'énergie de compactage.
 - des dimensions du moule d'essai.
 - de la présence d'eau.
- etc....

Les méthodes les plus communément admises sont issues de Kolbuzewski[1948], un inventaire complet des méthodologies existantes est repris dans De Jaeger[1991]. Il apparaît que quelque soit le système étudié, les limites de porosité n_{\min} et n_{\max} sont étroitement liées. La différence entre les deux est généralement de l'ordre de 9,4%. Comme le prédit la théorie des empilements sphériques, les porosités atteintes sont indépendantes de la taille pour des systèmes de particules équidimensionnelles. En revanche, la dispersion de la distribution granulométrique a une influence considérable sur la compacité. Bien circonscrit par les travaux originaux de Féret[1892] sur des mélanges ternaires, ce phénomène est maintenant prédit très efficacement par la théorie [Stovall et al.1986] (Fig.3.18.).

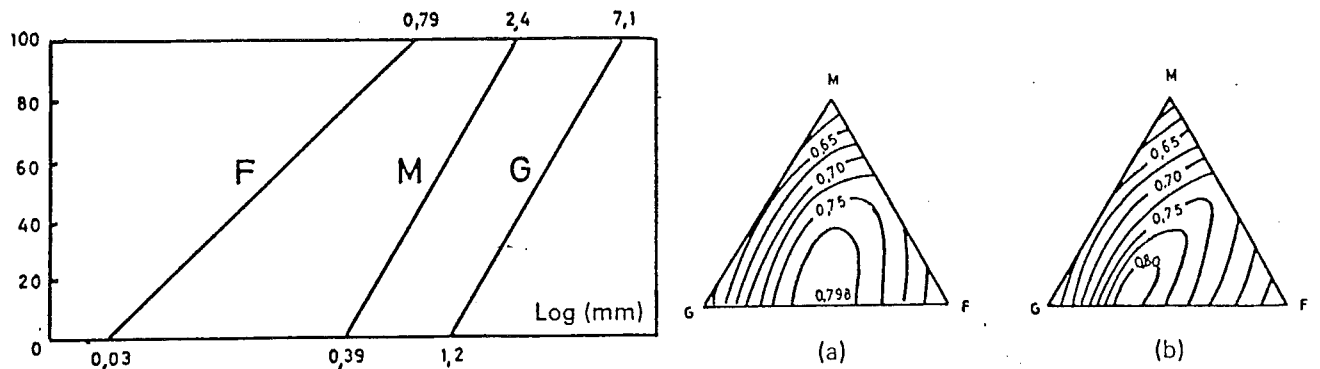


Fig. 3.18. Courbes granulométriques fictives prises en compte pour le modèle de compacité d'un mélange ternaire. Résultats expérimentaux (a), par modélisation (b) [Stovall et al., 1986].

Cette théorie permet de connaître les compacités maximales théoriques relatives à des distributions de sphères d'étendues quelconques. Elle confirme une relation empirique connue des fabricants de béton :

$$n_{\min} = 0.388 \left(\frac{D_0}{D_{100}} \right)^{0.39}$$

avec D_0 : diamètre de la plus petite sphère.

D_{100} : diamètre de la plus grande sphère.

En faisant l'hypothèse qu'un granulat est ellipsoïdal et qu'il se comporte du point de vue de la compacité comme un *ensemble de sphères* de diamètres compris entre le petit et le grand axe de l'ellipsoïde, De Larrard & Buil[1987] tentent d'élargir leur modèle aux particules non-sphériques.

Malgré la difficulté évidente de l'expérimentation, tous les auteurs sont unanimes quant à l'influence de la morphologie des grains sur la porosité de l'assemblage. Tickell & Hiatt[1938] ont été les premiers à utiliser les mesures quantitatives d'*émoussé* préconisées par Wadell[1932] (cfr. § 5.4.2.3.) pour établir une corrélation avec la porosité. Par la suite Kolbuszewski & Frederick[1963] ou Zelasko[1966] ont confirmé la décroissance de la porosité avec l'augmentation du facteur d'émoussé. Lees[1964] a également confirmé cette observation en utilisant un *facteur d'angularité* défini par ses soins (cfr. § 5.4.2.3.). Selon les conclusions de De Jaeger[1991], tant le caractère ellipsoïdal des grains que leur caractère rugueux vont permettre de stabiliser des assemblages dans lesquels les pores sont plus grands.

3.4.2 Morphométrie et écoulement.

Les premiers à étudier de manière systématique l'écoulement d'un sable à travers un entonnoir (sablier) ont été Rex & Peck[1956]. Ils ont défini les conditions d'essais pour une fraction granulométrique (série de Tyler) et mis en évidence la corrélation entre le temps d'écoulement et un écart à la sphéricité (matérialisée par un sable "standard"). King & Dickin [1972] ont étendu ce travail en utilisant le paramètre de **sphéricité** préconisé par Riley[1941] (cfr. § 5.4.2.2.) comme descripteur de forme. Ils ont obtenu une relation très systématique entre le temps d'écoulement (T_S), la classe granulométrique (D) et la sphéricité (Ψ_{Ril}) :

$$T_S = 196 \cdot D + 144 - \Psi_{Ril} (146 \cdot D + 112)$$

Ils ont également recherché une corrélation entre le temps d'écoulement et l'**émoussé** (ρ) défini selon la charte de Shepard & Young[1961] :

$$T_S = 85 \cdot D + 65 - \rho (35 \cdot D + 33)$$

Il convient cependant d'indiquer que leurs expérimentations n'ont pas porté sur des grains très anguleux comme ceux issus d'un concassage. De Jaeger[1991] qui a élargi l'expérimentation à ce type de matériau obtient une dispersion plus grande dans le diagramme "temps d'écoulement/sphéricité (Fig.3.19.) et observe en même temps que la corrélation temps d'écoulement / porosité maximale" est plus significative. Il en conclut que c'est la porosité qui est responsable de la variation du temps d'écoulement, la morphologie n'intervenant qu'indirectement par son influence sur les porosités limites.

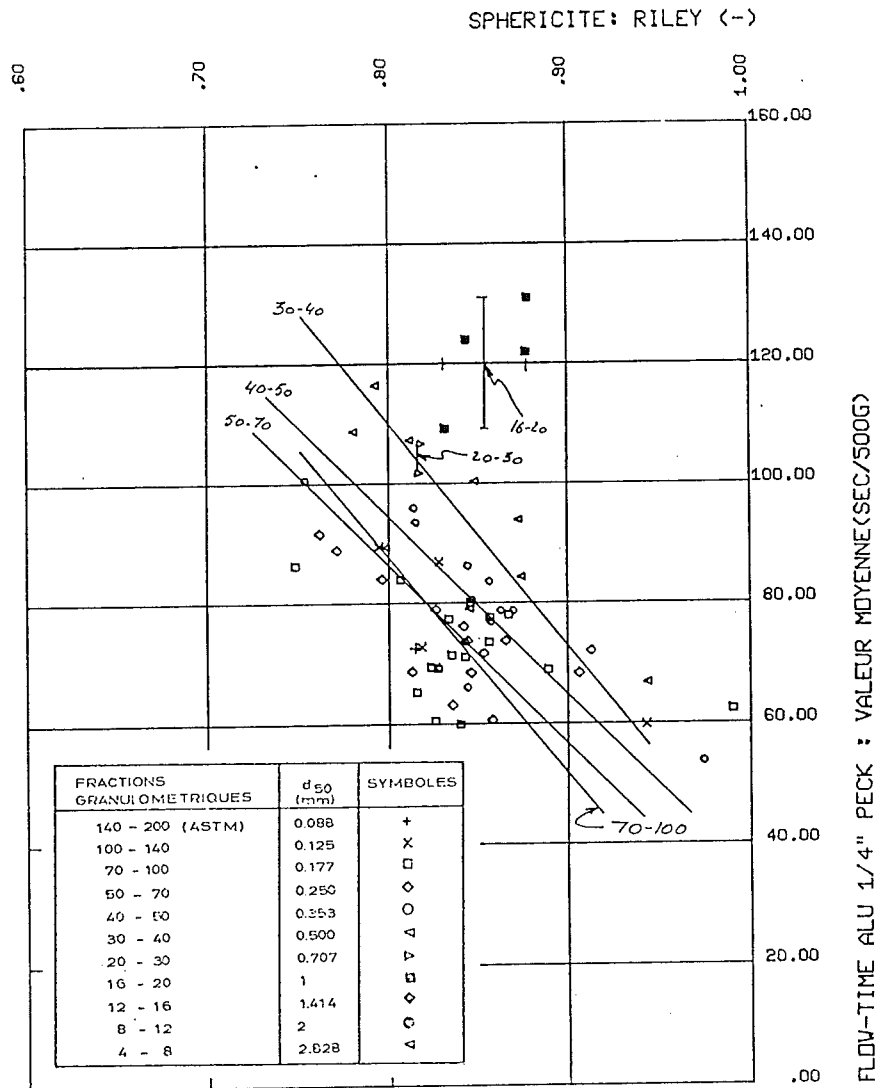


Fig.3.19. Corrélation entre temps d'écoulement et sphéricité de Riley. [De Jaeger,1991]

3.4.3 Morphométrie et résistance au cisaillement.

Le diagramme contrainte / déformations relatif à un matériau granulaire témoigne d'un ensemble de phénomènes complexes dont la cause est souvent difficile à déceler. Comme le souligne De Jaeger[1991], pendant longtemps les études de ce type ont été faites en négligeant l'importance de la compacité relative du matériau. Or, il est aisé d'imaginer que dans un sable lâche il y a sous contrainte un réarrangement important des contacts intergranulaires

tandis que pour un sable compact le réarrangement est très faible et il n'y aura de cisaillement que par rupture de frottement aux points de contact. Parmi les autres facteurs influençant le comportement mécanique, il faut citer :

- la distribution granulométrique.
- la morphologie des grains.
- le niveau de contrainte.
- l'humidité.
- la nature minéralogique.

La Fig.3.20. illustre l'influence probable de la morphologie des grains sur l'allure globale de la courbe de contrainte de cisaillement et de variation de volume. Les essais ont été menés pour une compacité relative de 100% (état dense) et sur des fractions granulométriques identiques. Les sables analysés correspondent à différentes valeurs d'émoussé selon la charte de Powers[1953]. Il apparaît que la rugosité des grains joue essentiellement sur la vitesse de variation du volume en fonction du déplacement.

Pour mieux interpréter les diagrammes de cisaillement, une correction est nécessaire qui retire la composante liée au travail externe dû à la variation de volume:

$$\operatorname{tg} \phi^* = \operatorname{tg} \phi - \frac{d(\Delta H)}{dx}$$

avec $\frac{d(\Delta H)}{dx}$: la dilatance

Mais, l'angle de frottement (ϕ^*) ainsi calculé ne peut encore être identifié à l'angle de frottement intergranulaire car comme le signalent Rowe et al.[1974] il reste à prendre en considération les composantes énergétiques dues aux frottements intergranulaires dans des plans différents, à l'élasticité des grains et à la rupture des grains! De Jaeger[1991] a proposé une théorie permettant de calculer l'épaisseur fictive de la zone cisailée. Il a pu montrer que cette épaisseur croît avec l'angularité des particules pour de faibles niveaux de contraintes, expliquant cela par le fait que dans ces conditions c'est le roulement des grains qui est responsable de la variation de volume. De plus hauts niveaux de contraintes gommant les effets morphologiques en raison des broyages intergranulaires. L'auteur obtient les meilleures corrélations en utilisant la porosité maximale comme *facteur de forme moyen*.

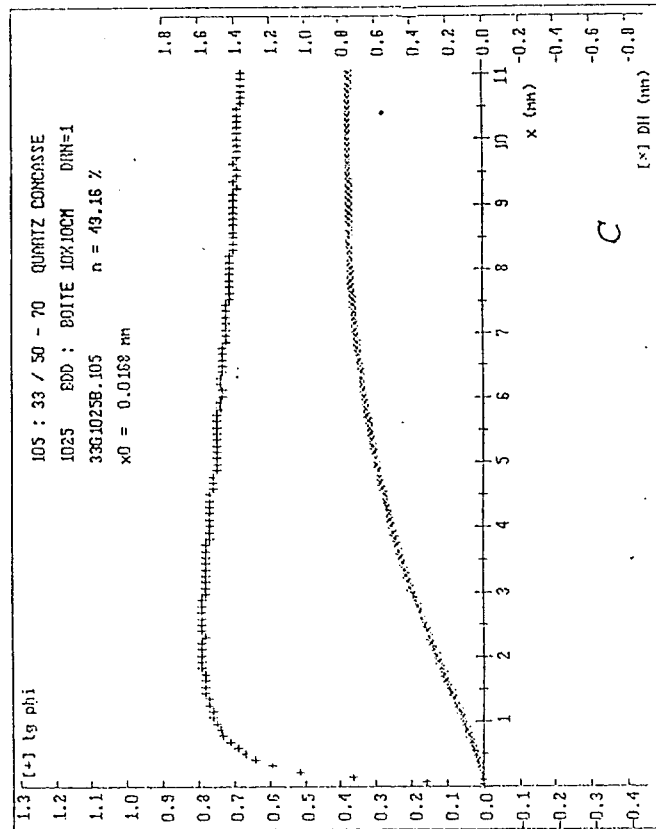
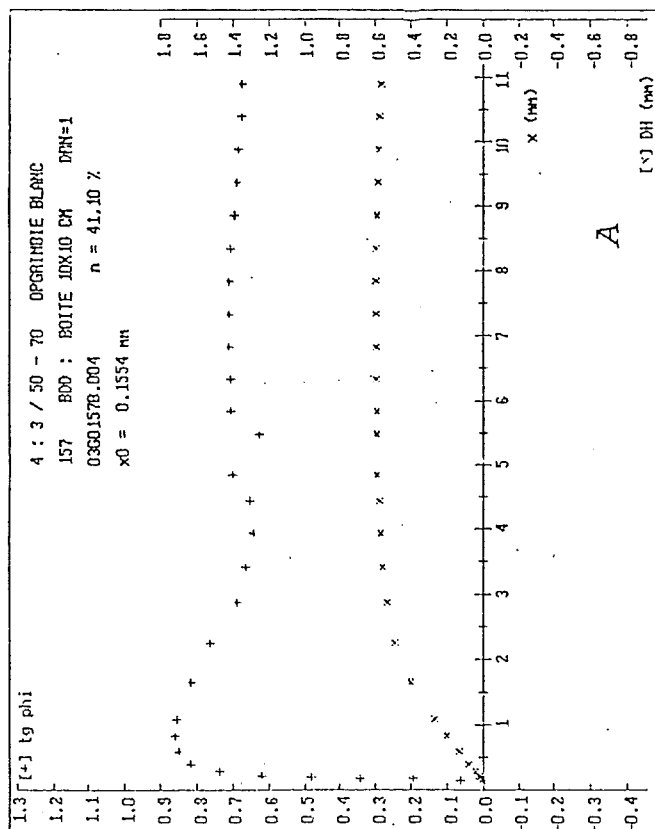
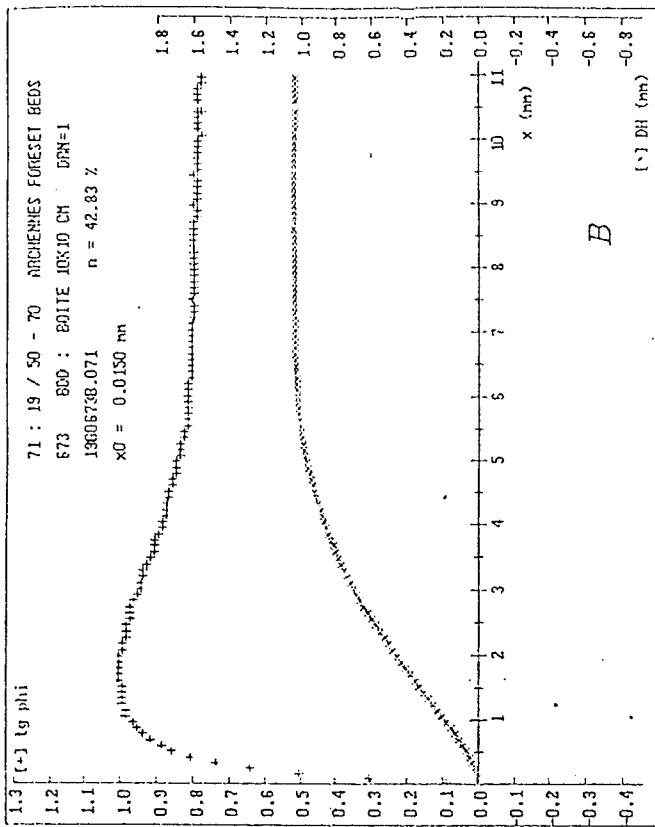


Fig.3.20. Allure globale de la courbe de contrainte de cisaillement (haut) et de variation de volume (bas) pour différents échantillons de sable en état de compacité maximale soit pour A:41,1% , B:42,83% et C:49,16%. Les émoussés selon Powers valent A:0,38 , B:0,39 et C:0,14 [De Jaeger,1991]

Pétrographie - Identification			Classe granulométrique mm		
Minéral	Forme	Matériau	2-1	1-0.5	0.5-0.25
Silice	arrondie	Leucate	○	○	○
	anguleuse	Vignats	□	□	□
Calcaire	arrondie	St-Florentin	●		
	arrondie	A.C.Y.		●	●
	anguleuse	C.C.M.	■	■	■

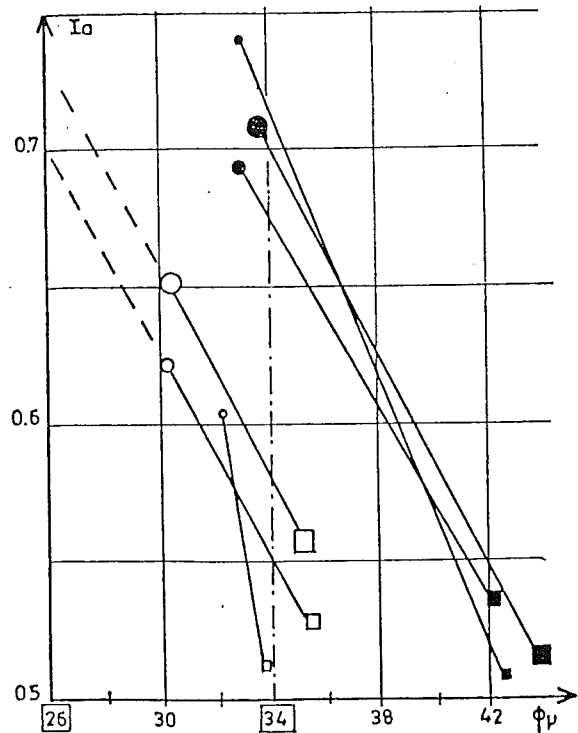


Fig. 3.21. Corrélation entre l'angle de frottement intergranulaire moyen et l'indice d'aspérité [Frossard,1978].

La corrélation entre l'angle de frottement intergranulaire et la morphologie des particules est négligeable en regard de la nature minéralogique. Frossard[1978] ne nie pas ce dernier point, mais en utilisant un facteur de forme issu de la morphologie mathématique (cfr.§ 5.6.3.) parvient à établir une augmentation du frottement avec un *indice d'aspérité* (I_a) (Fig.3.21.). La théorie de l'abrasion fournit la base d'une compréhension plus intime des mécanismes en jeu.

3.4.4 Morphométrie et abrasion.

L'usure abrasive est définie par l'O.C.D.E. comme étant le **déplacement de matière produit par des particules ou des protubérances dures**. La loi fondamentale communément admise pour décrire le phénomène d'abrasion est celle proposée par Archard[1953] :

$$W_{abr} = \frac{KPL}{3H}$$

avec W_{abr} : taux d'usure du matériau. (m^3)

P : résultante de la force normale appliquée. (N)

L : longueur de glissement. (m)

H : dureté du matériau abrasé. (N/m^2)

K : coefficient d'usure adhésive considéré comme une constante pour un couple de matériaux.

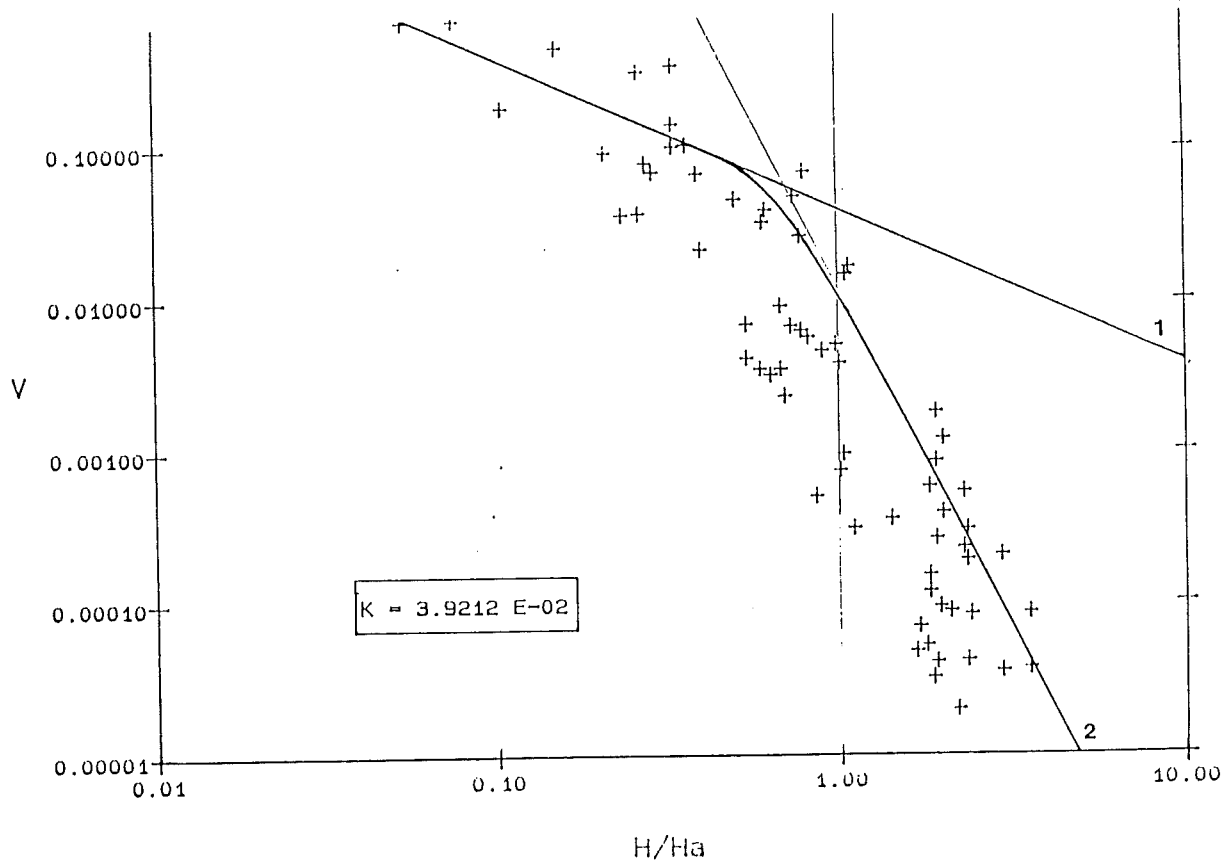


Fig. 3.22. Vérification expérimentale de la loi d'Archard (1) et du modèle proposé par Magnée (2). [Magnée,1991]

Cette loi ne fait appel qu'à des grandeurs physiques simples et aisément mesurables. Elle ignore totalement la microgéométrie du contact. Magnée[1991] a proposé une loi généralisée d'usure par abrasion dans laquelle le coefficient K devient :

$$K = K' \lambda \left(1 - e^{-\ln 2 \left(\frac{H_a}{mH} \right)^{(1+2m)}} \right)$$

avec H_a : dureté de l'abrasif.

H : dureté du matériau abrasé.

m : coefficient létal d'abrasion.

λ : facteur d'acuité de l'abrasif.

K' : coefficient d'écoulement du solide abrasé.

La Fig.3.22. montre la confirmation expérimentale de la loi proposée par Magnée[1991]. Le rôle du facteur d'acuité de l'abrasif apparaît immédiatement comme essentiel dans la formule. Ce paramètre est exprimé comme :

$$\lambda = \frac{\cotg \theta}{\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

où θ : demi-angle au sommet d'une aspérité assimilée à un cône. Fig.3.23.

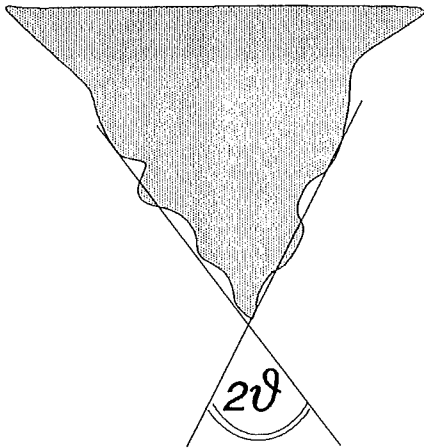


Fig. 3.23. Demi-angle au sommet d'une aspérité.

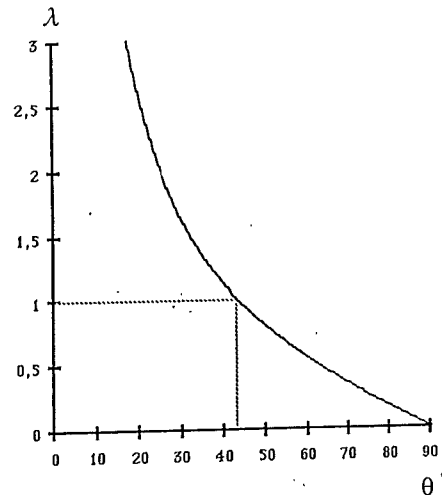


Fig. 3.24. Evolution du facteur d'acuité λ avec le demi-angle au sommet θ

La Fig.3.24. montre l'évolution de λ avec θ . Expérimentalement l'évolution de la pénétration dans un matériau plastique en fonction de θ a été montrée par Grunzweig et al.[1954] (Fig.3.25.). Pour un matériau élasto-fragile, Magnée[1991] fournit une relation pour l'indentation :

$$\delta = \sqrt{\frac{P}{\pi \cdot \text{tg}^2 \theta \cdot H}}$$

avec δ : profondeur d'indentation.

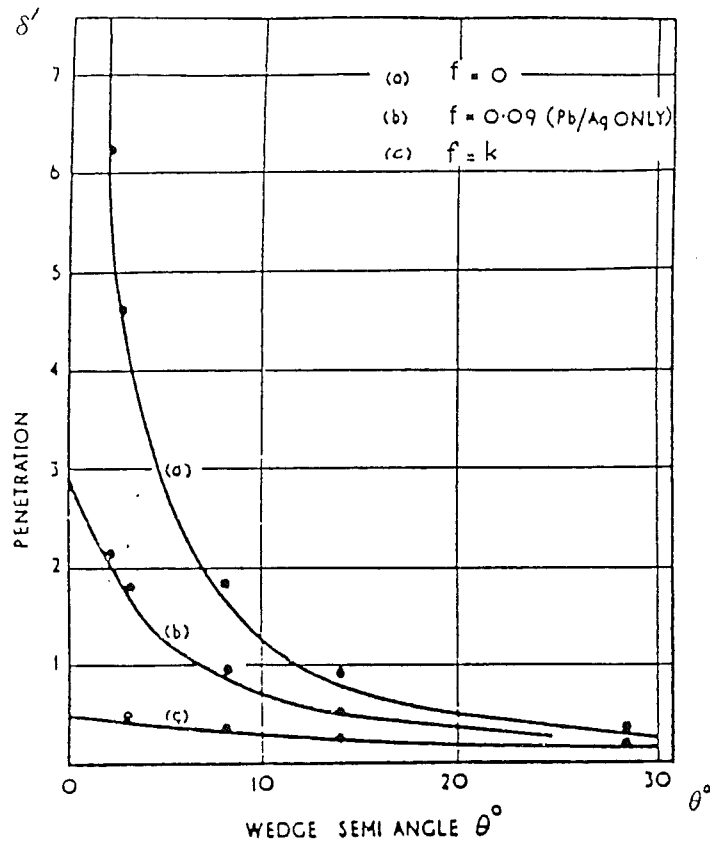


Fig. 3.25. Profondeur de pénétration dans le plomb en fonction du demi-angle du poinçon [Grunzweig et al.,1954]

3.4.5 Morphométrie et érosion.

L'usure érosive est définie par l'O.C.D.E. comme étant la **perte de matière solide due au contact avec un fluide en mouvement relatif contenant des particules solides**. Pour l'érosion par un flux de particules solides, l'équation fondamentale issue des travaux de Neilson & Gilchrist[1968] s'écrit :

$$W_{eros} = \frac{MV^2}{2} \left(\frac{1}{\phi} \left(\cos^2 \alpha - \left(\frac{V_r}{V} \right)^2 \right) + \frac{1}{\epsilon} \left(\sin \alpha - \frac{V_e}{V} \right)^2 \right)$$

avec W_{eros} : usure du matériau (m^3).

M : Masse totale de particules impactantes (Ns^2m^{-1}).

V : Vitesse d'impact (m/s).

V_r : Vitesse tangentielle résiduelle (m/s).

V_e : Vitesse d'impact élastique (m/s).

ϕ : Quantité d'énergie pour enlever une unité de volume par effet de coupe (J/m^3).

ϵ : Quantité d'énergie pour enlever une unité de volume par effet de déformation (J/m^3).

α : angle d'impact.

Cette équation ne fait pas apparaître explicitement un paramètre morphologique. Cependant, plusieurs auteurs ont pu mettre en évidence les caractéristiques des particules impactantes sur l'usure érosive. Goddwin et al.[1970] ont montré qu'il existe une taille critique de l'ordre de 100 μm en-deçà de laquelle l'usure par érosion décroît linéairement mais au-delà de laquelle elle apparaît constante. Hutchings[1979] a mis en évidence l'augmentation systématique du volume indenté par des particules **angulaires**. Head & Harr[1970] ont utilisé le paramètre d'*émoussé* défini par Wadell[1932] (cfr.§ 5.4.2.3.) pour caractériser leurs matériaux abrasifs (Tab. 3.26.).

Type de poussière	Emoussé
Farine de silice (SiO_2)	0.322
Crystolon (SiC)	0.489
Alundum (Al_2O_3)	0.476
Billes de verre	1.000
AC Coarse ¹	0.536

¹ : poussière mixte utilisée comme standard dans les tests d'érosion.

Tab. 3.26. Mesures de l'émoussé sur différentes poussières [d'après Head & Harr,1970].

Ils ont utilisé une analyse dimensionnelle sur leurs résultats pour en déduire un modèle où :

$$W_{eros} \sim \frac{1}{(\bar{W})^{2.83}}$$

avec \bar{W} : le paramètre d'émoussé de Wadell

Lors d'une étude postérieure, mais de même nature, le modèle établi [Jennings et al.,1976] devint :

$$W_{eros} \sim \frac{1}{(\bar{W})}$$

3.5 Morphométrie indirecte par des méthodes physiques.

La caractérisation géométrique d'une poudre est une tâche rébarbative qui peut devenir fastidieuse si on souhaite une mesure représentative prenant en compte chacune des morphologies individuelles. Pour beaucoup d'applications, un *paramètre morphologique global* indirectement corrélé à la géométrie réelle des particules constitue une approximation suffisante. Ceci a amené un grand nombre d'auteurs à utiliser les propriétés physico-chimiques des matériaux granulaires comme un moyen rapide de caractériser leur morphologie. Il convient d'être bien conscient que ces grandeurs physiques mesurées ne sont en corrélation avec la morphologie que dans la mesure où cela a pu être établi par une analyse morphométrique systématique, ce qui est très rarement le cas comme l'ont démontré les paragraphes précédents.

La mesure d'une propriété physique globale est d'autant plus intéressante que cette propriété a elle-même un rôle spécifique à jouer dans le procédé étudié. Lorsque De Jaeger[1991] obtient une meilleure corrélation du temps d'écoulement avec la porosité qu'avec la mesure de sphéricité, c'est d'une part que la compacité du sable joue un rôle prépondérant dans son aptitude à l'écoulement et d'autre part que la mesure de sphéricité qu'il a utilisée est peu sensible! A titre de contr'exemple, il n'y a aucune raison de penser que la porosité d'une poudre soit la méthode la plus efficace pour prédire son pouvoir abrasif!

Toutes les propriétés globales des matériaux granulaires décrites ci-avant ont fait l'objet d'une "inversion du problème" pour servir de méthodes de caractérisation morphologique. Les auteurs se sont attachés à définir des conditions expérimentales strictes permettant de rapprocher la mesure physique d'une mesure morphologique. Dans la majorité des cas, un *indice morphologique* est obtenu en comparant le comportement de particules sphériques ² et celui des particules à caractériser. La norme ASTM D3398-87 décrit la détermination d'un *index of particle shape and texture* basé sur des mesures de compactage par damage. L'index est de la forme :

$$I_a = 1,25V_{10} - 0,25V_{50} - 32,0$$

où V_{10} et V_{50} : correspondent respectivement au volume des vides après 10 et 50 coups du piston.

La méthode définie par Hughes & Bahramian[1966] est une méthode basée sur la porosité maximale de l'échantillon relativement à un lot de billes de même dimension. L'*indice d'angularité* défini est :

² les particules sphériques utilisées peuvent être des billes d'acier pour les grandes dimensions, mais sont plus généralement des billes de verre (qqs μm à 1mm). Leur sphéricité parfaite est une idéalisation qui n'est pas toujours confirmée par l'analyse microscopique.

$$A_a = \frac{1 - n_{\text{Max}}^{\text{sph}}}{1 - n_{\text{Max}}^{\text{ech}}}$$

avec $n_{\text{Max}}^{\text{sph}}$: la porosité maximale de l'assemblage de sphères.

$n_{\text{Max}}^{\text{ech}}$: la porosité maximale de l'échantillon.

Ces mêmes auteurs ont également défini un *indice d'angularité* rapporté au temps d'écoulement au sablier :

$$A' = \frac{t^{\text{ech}}}{t^{\text{sph}}}$$

avec t^{ech} : temps d'écoulement relatif à l'échantillon.

t^{sph} : temps d'écoulement relatif à des sphères de même dimension.

King & Dickin[1972] en étudiant de plus près la méthode proposée par Hughes & Barhamian[1966] proposent des équations permettant de remonter directement aux paramètres morphologiques plus classiques de Riley[1941] ou Shepard & Young[1961]. Dans l'étude de l'usure par érosion, Head & Harr[1970] suggèrent aussi l'inversion de leur modèle pour fournir une estimation de l'émoussé de Wadell.

Enfin, la mesure d'une grandeur physique est aussi un moyen de caractériser la morphologie des particules individuelles. L'exemple le plus connu est celui de Mc Culloch et al.[1962] qui ont défini un *Dynamic Shape Factor* pour la caractérisation du comportement hydraulique des particules :

$$D.S.F. = \left(\frac{V_{gr}}{V_{sph}} \right)^2$$

où V_{gr} : est la vitesse de sédimentation du grain.

V_{sph} : est la vitesse de sédimentation d'une sphère de même section hydraulique (section perpendiculaire au déplacement).

Concha & Christiansen[1986] ont choisi de définir une *effective hydrodynamic sphericity* comme étant la sphéricité Ψ d'une particule équiaxe ayant même traînée(volume) et même vitesse de sédimentation que la particule irrégulière étudiée.

3.6 Tableau récapitulatif.

PROPRIETE.	CARACTERISTIQUE MORPHOLOGIQUE.	METHODE QUANTITATIVE UTILISEE. ¹
Broyage	Aplatissement Elongation Rugosité	Feret Feret Fourier
Granulométrie	Aplatissement Elongation Mésodiamètre	Feret " "
Sédimentation	Sphéricité " Pivotabilité	Wadell Corey -
Porosité Ecoulement	Sphéricité Rugosité Angularité	Riley Wadell Lees
Cisaillement	Rugosité	Morpho. Math.
Abrasion Erosion	Rugosité Angularité	Wadell -

¹ : le cas échéant

Tab.3.27. Tableau récapitulatif reprenant les principales caractéristiques morphologiques mises en évidence dans l'étude expérimentale des matériaux granulaires avec la référence à la méthode morphométrique éventuellement utilisée.

4 Echantillonnage et transformations dans un espace discrétisé.

4.1 Importance de l'échantillonnage.

L'importance d'un échantillonnage soigné est régulièrement mise en exergue dans les ouvrages scientifiques dès lors que des mesures quantitatives doivent être acquises. Souvent, les auteurs se plaignent que dans la majorité des publications les conditions de l'échantillonnage ne sont pas suffisamment précisées. Ils expriment en cela l'opinion généralement admise que la qualité de l'échantillonnage conditionne fondamentalement la représentativité des résultats. On peut penser, qu'il n'y a pas de volonté systématique de taire les conditions de l'échantillonnage, mais plutôt que beaucoup de non-spécialistes sont désemparés face à l'absence d'une **théorie pratique de l'échantillonnage** et en sont réduits à procéder par *feeling* plus que par rigueur. A ce propos, on a rappelé la pertinence des théories de Gy[1975] pour l'échantillonnage équiprobable d'un système particulé homogène. Mais, qu'en est-il pour un sujet hétérogène et structuré dans l'espace comme une roche vue en lame-mince ou un gisement d'or ? Que faut-il faire lorsqu'on ne connaît à priori aucune caractéristique spatiale du sujet (anisotropie, dispersion,...) ?

En règle générale , définir un plan d'échantillonnage suppose de spécifier :

- *la nature de la mesure.*
- *le support de l'échantillon (volume).*
- *la trame d'échantillonnage.*

4.1.1 Nature de la mesure.

La nature de la mesure découle logiquement du problème qui est posé. Cette remarque peut paraître triviale, mais elle suppose qu'au préalable un problème soit défini en termes précis indiquant le but à atteindre. Elle suppose ensuite que tous les moyens puissent être mis en oeuvre pour obtenir la meilleure mesure possible de l'information recherchée. Nous sommes intimement convaincus que beaucoup d'échecs en analyse d'images sont à imputer à un mauvais choix de la *méthode d'imagerie* où à des mauvaises conditions d'acquisition. En *microscopie des matériaux* on peut attirer en particulier l'attention sur les points suivants :

- *la préparation de l'échantillon.*
- *la nature du signal émis (source).*
- *les réglages optiques (diaphragmes, lentilles, collimateurs,...).*
- *la nature du signal reçu (capteur).*
- *les paramètres de réglage du senseur.*
- *la discrétisation de l'intensité de la mesure.*

La théorie supposerait que l'on puisse développer un senseur pour chaque application de manière à obtenir une image parfaite et non bruitée. La réalité oblige à restreindre ses prétentions à l'obtention d'une image bien contrastée au départ des méthodes existantes. Ce dernier point est particulièrement lourd de signification lorsqu'on considère le coût relatif des techniques. Il est ainsi évident dans l'étude des matières minérales que l'imagerie par EDX (Energy Dispersive X-Ray) qui fournit une *cartographie atomique* est beaucoup plus discriminante que la microscopie optique [Petruk,1989]. Mais, le coût relatif des deux méthodes est de 40 pour 1! De même les caméras vidéo hors standard de télévision offrent des résolutions, des sensibilités où des vitesses d'obturation beaucoup plus grandes qu'une simple caméra de surveillance, mais leur prix est de 10 à 50 fois supérieur!

4.1.2 Support de l'échantillon et trame d'échantillonnage.

Toute opération d'échantillonnage ou autrement dit de discrétisation engendre une *perte d'information* irréversible. Choisir le support de l'échantillon (aire en 2-D, volume en 3-D) et définir sa trame, c'est par conséquent définir un *seuil de résolution*. En deçà de cette limite aucune information ne pourra être captée ¹. Dans le cas de la représentation fidèle d'une image comme en télécommunications, la trame d'échantillonnage peut être définie théoriquement par le théorème de Shannon 2-D en fonction de la transformée de Fourier 2-D de l'image [Acheroy,1990]. De manière similaire en géostatistique [Pirard,1991], une fois que le variogramme relatif à la structure étudiée est connu, la qualité (variance de krigeage) d'un plan d'échantillonnage quelconque pourra être calculée.

Malheureusement, dans la grande majorité des cas les caractéristiques structurales de l'information ne sont pas connues avant son échantillonnage! La règle générale dans ce cas est que la géométrie de l'échantillonnage (support et trame) doit être indépendante de la structure du sujet. D'où, le développement en stéréologie de protocoles d'échantillonnage qui sont isotropes, uniformes et aléatoires [Gundersen,1986]. Les procédures d'échantillonnage selon une *trame systématique* ne sont, en théorie, acceptables que pour des structures qui sont elles-mêmes isotropes, uniformes et aléatoires. Néanmoins, dans la pratique, les échantillonnages systématiques sont largement préférés. D'une part, parce qu'une métrique peut leur être associée ce qui ouvre la voie à des opérations logiques et arithmétiques et d'autre part parce que le *hardware* est adapté au traitement des données systématiques.

En imagerie, l'échantillonnage systématique est adopté depuis l'origine du compteur de points et est très largement favorisé par la technologie des senseurs. Dans les domaines où le temps d'acquisition est encore un facteur limitatif (EDX, rugosimètre mécanique...) et où les

¹ Une mesure dite "sub-pixel" n'a de sens que dans la mesure où l'hypothèse faite pour interpoler l'information entre deux pixels est réellement vérifiée.

senseurs sont *quasi-ponctuels*, les notions de support et de trame sont bien distinctes. En vidéo classique les senseurs CCD permettent un échantillonnage *quasi-exhaustif* de l'information ce qui conduit à une confusion entre les notions de trame et de support². Pour être précis, il faut souligner que lorsqu'on parle de l'échantillonnage d'une information optique, on fait plus souvent référence au débitage du signal vidéo analogique qu'à la géométrie réelle du capteur CCD.

4.1.2.1 Trame carrée ou trame hexagonale.

Un espace peut être discrétisé de manière systématique en disposant des points d'échantillonnage selon les sommets d'un triangle équilatéral ou d'un carré. Dans le premier cas, le *polygone d'influence* autour de chaque point sera un hexagone, dans le second cas il sera un carré. On définit ainsi, les *trames hexagonales et carrées* (Fig. 4.1.). Sur chacune de ces trames, on peut adopter des conventions différentes pour la connexité entre des pixels voisins. Ceci conduit à distinguer en pratique les *graphes carrés, octogonaux* d'une part, *hexagonaux, dodécagonaux* d'autre part (Fig.4.2.). Chacun de ces graphes possède des avantages différents, ce qui explique qu'il soit plus communément adopté dans certains types de problèmes que dans d'autres. En théorie, le graphe hexagonal est celui qui offre le plus de directions principales (3) pour une métrique isotrope (tous les voisins sont à la même distance). Il est le seul à permettre d'adopter la même convention de connexité pour l'objet et pour son complémentaire, ce qui a pour effet de faciliter l'écriture de certaines opérations de voisinage (cfr.la squelettisation chap.6.).

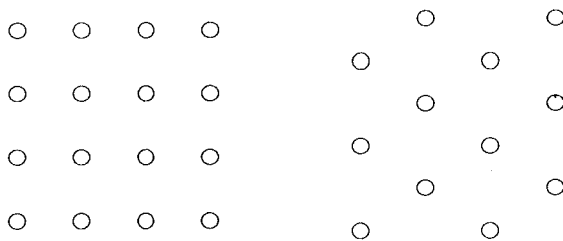


Fig.4.1. Trame d'échantillonnage carrée et hexagonale.

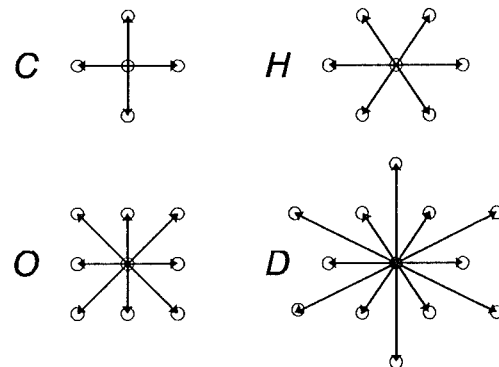


Fig.4.2. Graphes déterminés sur les trames carrées et hexagonales [C: carré; O: Octogonal; H: Hexagonal; D: Dodécagonal].

² Chacune des cellules photo-sensibles d'un CCD possède une dimension physique finie (support) qui est limitée par une zone non-sensible. Cette dernière est sauf exception négligeable vis-à-vis de la résolution exigée.

En pratique son intérêt est très fortement tempéré par l'omniprésence de la trame carrée dans l'industrie électronique et informatique (capteurs CCD, moniteurs TV, gestion de la mémoire,...), par l'adoption de systèmes d'axes orthogonaux dans tous les domaines scientifiques, et ... par l'incohérence des logiciels qui se piquent de travailler en trame hexagonale³! L'abandon progressif du graphe hexagonal est plus encore stimulé par l'apparition de véritables transformations de voisinage *euclidiennes* [Danielsson, 1980]. Le tableau 4.3. donne la métrique associée à chacun des graphes selon qu'il est défini sur une trame d'échantillonnage carrée, hexagonale ou rectangulaire. Cette dernière est le seul mode le plus communément accessible sur les cartes de digitalisation dont l'échantillonnage n'est pas programmable.

TRAME D'ECHANTILLONNAGE				
GRAPHE	Distance	Carrée	Rectangulaire	Hexagonale
Carré	l_{90}	1	(0.672) (1)	-
Octogonal	l_{45}	1.414	(1.205)	-
Hexagonal	l_{60}	1.118	(0.838) (2)	1
Dodécagonal	l_{30}	1.803	(1.644)	1.732
	l_{90}	2	(1.344)	1.732

(1) : cette valeur est la déformation "video". Elle peut dépendre d'une caméra à l'autre et doit être soigneusement étalonnée.

(2) : il s'agit d'un graphe pseudo-hexagonal, utilisé lorsque la carte de digitalisation ne permet pas d'autre acquisition que la trame rectangulaire.

Tab.4.3. Valeur des distances interpixels dans chaque direction α du graphe en fonction de l'intervalle d'échantillonnage à l'horizontale (l_0). (N.B. les angles α ne sont pas conservés sur toutes les trames et doivent le cas échéant être recalculés)

³ généralement seule une partie des procédures a été traduite en trame hexagonale. Les outils graphiques dessinent toujours en trame octogonale.

4.2 Les outils de transformation des images digitalisées.

4.2.1 Conventions de notation.

Selon une définition tout à fait générale, une image bi-dimensionnelle est une fonction réelle de deux variables spatiales réelles. Hormis les applications relatives à la topographie des surfaces pour lesquelles la fonction s'exprime dans une dimension homogène avec les variables spatiales, on a toujours un axe vertical dont la dimension est sans rapport avec celle des variables spatiales. Pour cette raison, on adoptera une notation:

$$p_{xy} = I(x, y)$$

où p_{xy} : est la valeur de la fonction Image au point de coordonnées (x, y) .

Selon la convention la plus répandue, on considèrera l'origine des axes comme étant le coin supérieur gauche de l'image, l'axe X étant horizontal et croissant vers la droite, l'axe Y étant vertical et croissant vers le bas (Fig.4.4.). Si on fait référence à plusieurs images décrites par les mêmes coordonnées (x, y) on utilisera la succession des lettres de l'alphabet p, q, r, s, \dots pour désigner les fonctions successives (images multivariées).

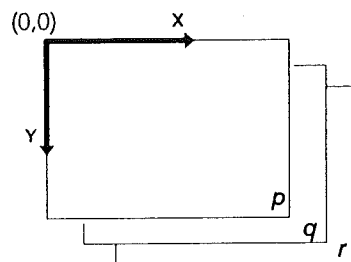


Fig.4.4. Conventions pour l'adressage d'une image.

La notation p_{xy} qui décrit la matrice des valeurs est d'usage général, mais elle peut devenir encombrante dans la description des transformations de voisinage, c'est pourquoi la plupart des auteurs utilisent une notation en indices relatifs. Malheureusement, il n'existe aucune harmonisation à ce niveau. Pour les voisinages octogonaux et hexagonaux, nous utiliserons les conventions suivantes :

P_4	P_3	P_2		P_3	P_2	
P_5	P_0	P_1		P_4	P_0	P_1
P_6	P_7	P_8		P_5	P_6	

4.2.2 Transformations d'images en niveaux de gris.

On peut distinguer la plupart des outils utilisés en imagerie par la nature des opérations qu'ils mettent en jeu (Tab.4.5.). Cette classification à l'avantage d'être objective et de ne pas spéculer sur la finalité de chaque outil : rehausseur de contraste, extracteur de contours,... Elle ne se veut pas exhaustive (p.e. les transformées dans le domaine fréquentiel n'y sont pas reprises). Les deux dernières familles d'outils méritent d'être présentés plus en détail, car elles caractérisent deux approches différentes dans le traitement des données, une approche linéaire et une approche résolument non-linéaire.

INPUT	OPERATEURS	OUTPUT	TYPE D'OUTILS	EXEMPLE
p	arith,logiq.	statistics	stat.univariée	<i>Histogramme</i>
p,q,..	" , "	matrice de "	stat.multivariée	<i>Bihistogramme</i>
p,q,..(c ^{te})	" , "	p*,q*,...	multivariée	<i>Comp.princip.</i>
p,c ^{te}	" , "	p*	arith./logiques	<i>Seuillage</i>
x,y	" , "	x*,y*	géométrique	<i>Rotation</i>
x,y,p,q	" , "	p*	image à image	<i>XOR</i>
x,y,p _i	arith	p*	convolution	<i>Laplacien</i>
x,y,p _i	arith,logiq.	p*	conv.morpho.	<i>Erosion</i>

Tab. 4.5. Tableau synoptique des principales transformations utilisées en imagerie. (p,q,... : mesures ; x,y,... : coordonnées ; p_i : pixels voisins)

Les outils de **convolution** sont très largement décrits dans les ouvrages généraux de traitement d'images [Rosenfeld & Kak,1982]. Leur principe est le suivant :

Etant donné une matrice m x n de coefficients appelée noyau de convolution (k) et une image (p). La convolution de p par k engendre une nouvelle image p, telle que*

$$P^*_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} \cdot P_{x-i, y-j}$$

En pratique, la convolution est limitée à des noyaux de dimensions raisonnables $m, n < 10$ et l'image résultat est normalisée pour rester dans l'intervalle utilisé $[0, 255]$. Pour un noyau 3×3 , une opération individuelle sur un pixel peut s'écrire en adoptant les indices relatifs :

$$p^*_{xy} = \frac{\sum_{i=0}^{i=8} k_i \cdot p_i}{\sum_{i=0}^{i=8} k_i}$$

La notion de **convolution morphologique** a été introduite par Sternberg[1978] et Serra [1982]. Elle diffère essentiellement par la nature des opérateurs impliqués. Ici aussi, on définit un noyau de convolution, appelé plus couramment *élément structurant* et on engendre une nouvelle image p^* en appliquant à chaque point la transformation :

$$p^*_{xy} = \text{Sup}(p_i + k_i) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$$

ou

$$p^*_{xy} = \text{Inf}(p_i - k_i) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$$

Comme l'a montré Mazille[1989] il existe évidemment des similitudes entre les deux types de convolutions dans le cas d'images binaires ($p_i \in \{0, 1\}$). Les convolutions morphologiques définies ci-dessus sont particulièrement brutales en raison des opérateurs soit Inf, soit Sup. Il est concevable d'imaginer des transformations du type :

$$p^*_{xy} = R_l(p_i + k_i)$$

avec R_l : opérateur de rang l .

Mais, les propriétés mathématiques de telles transformations sont beaucoup plus hasardeuses [Ronse, 1986]. On notera que le filtre médian est une opération de ce type pour :

$$l = \frac{i+1}{2} \quad \forall k_i = 0$$

L'évolution des technologies exerce une influence considérable sur le développement de ces méthodes. Il est courant actuellement de disposer d'un *convolveur* 3×3 (ou même 7×7) en temps réel sur une carte d'imagerie. En revanche, le développement d'un hardware spécifique pour la convolution morphologique reste coûteux et confidentiel.

4.2.3 Procédure générale pour l'analyse d'une image.

La philosophie à suivre pour analyser une image quelle qu'elle soit est, en principe, très simple. C'est son implémentation pratique qui peut s'avérer complexe ou même illusoire. Une image brute est tout d'abord **filtrée** avant d'être soumise à un critère de **segmentation** à l'issue duquel sera effectuée la **mesure** (Fig.4.6.). Idéalement, le filtrage ne devrait pas exister, mais l'acquisition d'une image non-bruitée, même si elle peut être approchée n'est jamais atteinte en pratique.

L'étape du filtrage comporte deux objectifs antagonistes: **lisser** les valeurs au coeur des objets et **renforcer les contrastes** sur les contours. Seules certaines opérations telles que le filtre médian ou mieux encore les *toggle mappings* [Serra,1988] peuvent dans une certaine mesure concilier les deux. Mais, plus généralement on appliquera un filtre de lissage pas trop agressif suivi d'un filtre d'extraction de contours en supposant que les contrastes laissés par le premier filtre restent suffisants.

L'étape de segmentation est la plus critique. Il s'agit de définir un critère qui permette d'extraire l'information de manière satisfaisante. Ce critère porte sur une propriété de brillance de taille ou de forme (et éventuellement de fréquence spatiale), voire sur une combinaison de ces propriétés. La grande majorité des applications utilise sur l'image proprement dite un unique critère de brillance (**seuillage**) et n'appliquent de critère de taille ou de forme qu'après obtention de la mesure. Mais, des outils plus complexes permettent la mise en oeuvre conjointe de la brillance de la taille et de la forme (**tophat, r-h maxima**,...).

Lorsque la propriété à analyser est la fonction image (p) elle-même, on peut utiliser les outils de caractérisation des statistiques univariées (moyenne, écart-type,...) ou des statistique spatiales (fonction covariance, variogramme,...). Plus généralement, la mesure souhaitée est de nature géométrique et il est indispensable de disposer d'une image binaire ou modale, c'est à dire d'une image dans laquelle chaque objet est identifié par une valeur propre ⁴. Notons qu'il existe dans la littérature des tentatives pour obtenir directement une information géométrique sur base d'une image en teintes de gris [Michelland-Abbe,1990; Chermant & Coster,1991].

⁴ On pense généralement aux images étiquetées dans lesquelles chaque groupe de pixels connexes est marqué d'une valeur spécifique. Mais, on peut tout aussi bien avoir des images multi-phasées pour lesquelles un pixel est marqué selon sa nature sans qu'il n'y ait forcément de critère de connexité.

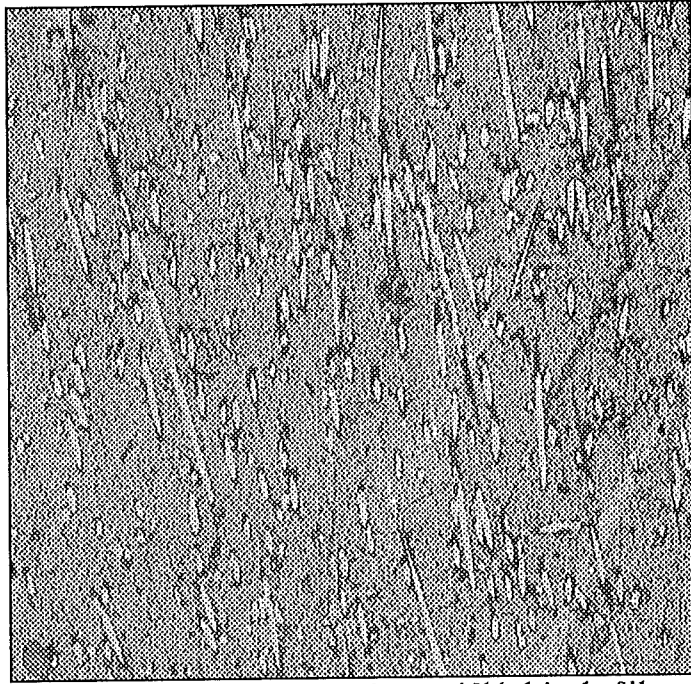
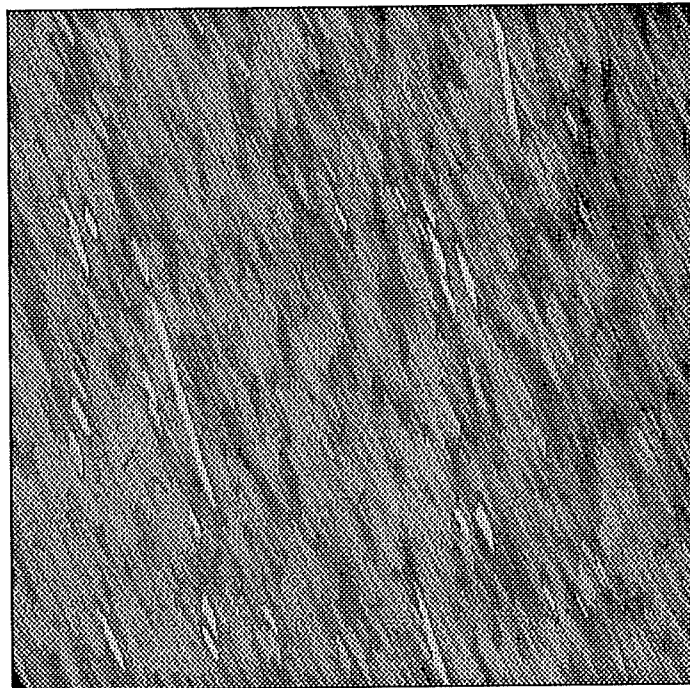
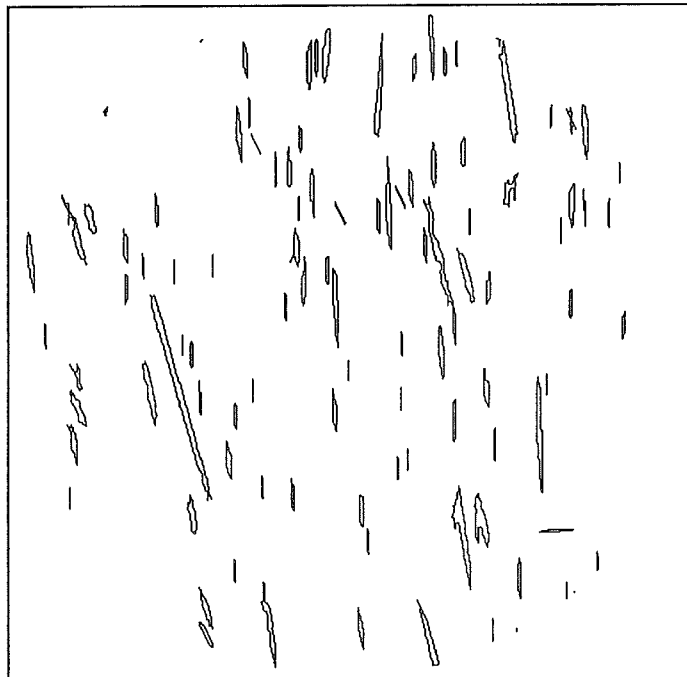


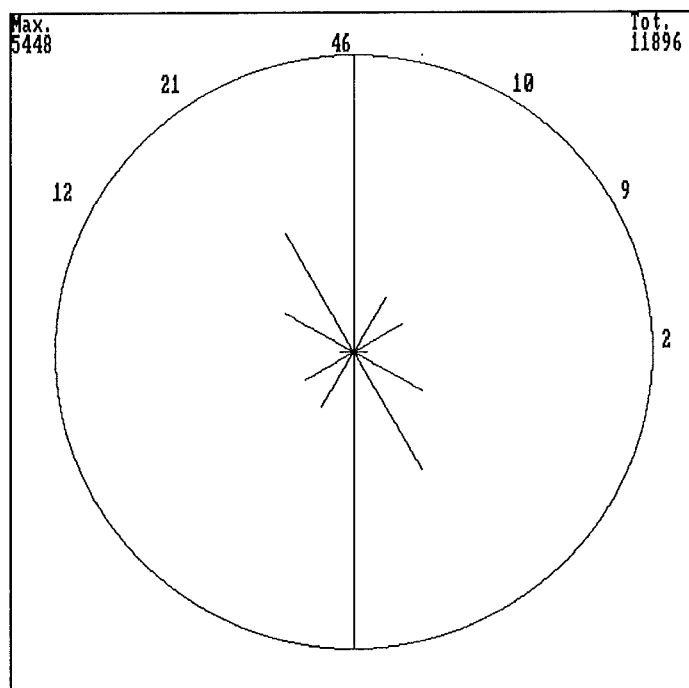
Image en microscopie optique réfléchie de fibres de verre dans un polyamide.



Filtrage par ouverture linéaire à 120° pour éliminer toute fibre qui ne fait pas 40 μm dans la direction considérée.



Extraction des contours de fibres résistant au filtrage dans 6 directions.



Rose des directions et fréquences associées.

Fig.4.6 Exemple d'un protocole d'analyse d'une image microscopique.

4.2.4 Représentation d'une image binaire.

Les outils de transformation des images digitalisées définis ci-avant s'appliquaient au traitement des images en teintes de gris. Pour de telles images, la représentation en mode matriciel (*raster* ou *bitmap*) est particulièrement adéquate car il est difficile de trouver des modes de représentation moins volumineux sans sacrifier l'information présente. En revanche, les outils d'analyse morphométrique qui vont être envisagés dans les prochains chapitres s'appliquent exclusivement à des images binaires. Dans ce cas, il est évident que la représentation matricielle est la moins adéquate et presque toujours la plus grosse consommatrice d'espace mémoire. En plus de permettre une sensible économie d'espace mémoire, les techniques de représentation d'objets binaires vont ouvrir la voie au développement d'outils plus performants. Ici encore, l'influence des contraintes technologiques sur l'adoption des méthodes sera déterminant!

La représentation binaire d'un objet fait clairement apparaître que la seule information strictement nécessaire à la *reconstruction complète* d'un objet est l'ensemble des coordonnées des points du contour. Une première méthode consiste donc à définir la séquence des coordonnées des points relativement à un point choisi comme origine. Cette origine est bien entendu arbitraire, mais dans la pratique on choisira le centre de gravité ou le coin supérieur gauche du rectangle défini par les projections horizontales et verticales de l'objet. On aura un descripteur de contour :

$$C(X) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$$

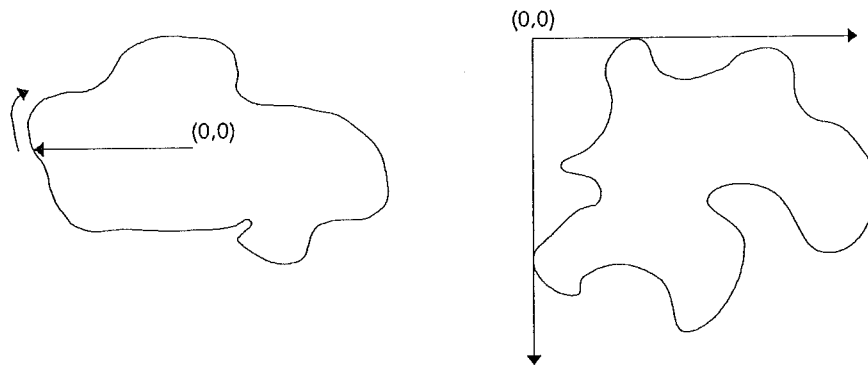


Fig.4.7. Choix de l'origine des coordonnées pour la description d'un contour quelconque.

Si on souhaite compresser encore cette séquence on peut imaginer regrouper dans une même structure les pixels qui ont même abscisse (ou même ordonnée). On aboutit ainsi à l'idée du *Run_Length_Coding* qui est particulièrement bien adaptée pour une implémentation hardware (Fig.4.8.). Le *Run_Legth_Coding* exploite le caractère séquentiel (ligne par

ligne) de l'information vidéo. Mais, il a comme inconvénient majeur de regrouper dans une même structure élémentaire (ligne) des points qui ont des relations peu intéressantes entre eux.

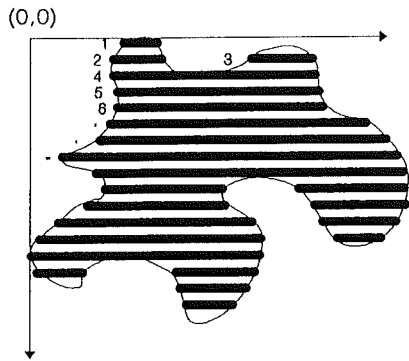


Fig.4.8. Découpage d'un objet quelconque en segments successifs (Run Length Coding).

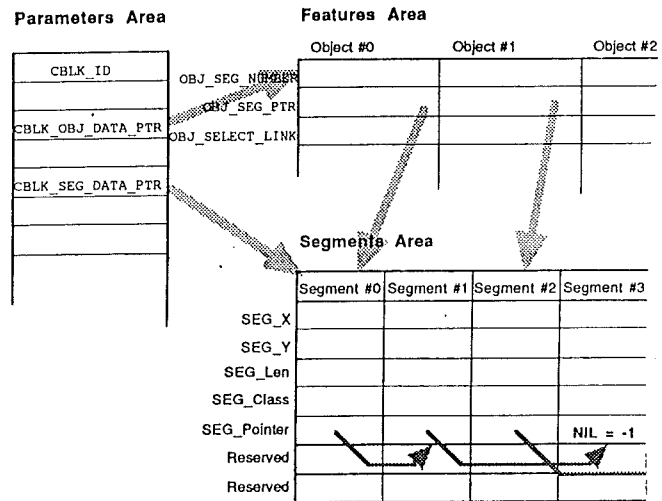


Fig.4.9. Schéma de la structure d'un descripteur d'image du type Run_Length_Coding (doc. Euresys)

Une alternative qui a pour avantage de préserver ces relations de voisinage est de décrire la séquence des pixels du contour (C) par une succession de pas élémentaires. Un contour est par définition un ensemble de pixels connexes, en adoptant un graphe octogonal et en parcourant le contour de manière à conserver l'objet à sa droite⁵ on est certain de ne rencontrer que des $\Delta x, \Delta y \in [-1, 1]$. En codant chacun de ces pas élémentaires, on transforme C en une chaîne de Freeman [Freeman,1961] ou lacet (chain_code). Une chaîne de Freeman peut s'obtenir au départ d'une information du type Run_Length_Coding ou au départ d'une image bitmap.

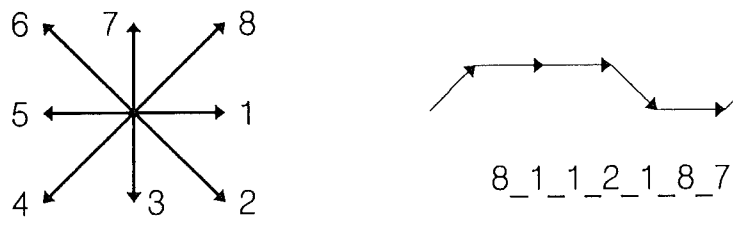


Fig.4.10. Convention pour la description d'un contour en 8_connexité par une chaîne de Freeman. Exemple .

⁵ l'idée de parcourir objet à droite plutôt que dans le sens horlogique se justifie par le fait que grâce à cette convention les contours intérieurs et extérieurs pourront être traités de manière identique dans les opérations morphologiques.

5 Les méthodes d'analyse morphométrique des particules.

Faire un relevé systématique de la littérature scientifique consacrée à l'analyse morphologique serait un travail fastidieux et, heureusement, inutile. La lecture d'une centaine d'articles sur le sujet donne immédiatement l'impression qu'il y a autant de méthodes que d'auteurs et qu'il existe peu de cohérence en ce domaine. Tout au plus y a-t'il des *écoles de pensées*. Périodiquement, apparaissent des *review* qui ont le mérite de faire le point sur les méthodes proposées jusqu'alors. Même si ces articles sont rarement critiques, ils aident à distinguer les méthodes prometteuses de celles qui ne sont que des jeux mathématiques [Flemming,1965; Barrett,1980; Clark,1980; Coster & Chermant,1985; Lord & Wilson,1986; Flook,1987; Russ,1990].

Les analyses comparatives systématiques entre diverses méthodes morphométriques sont extrêmement rares pour ne pas dire inexistantes. De plus un grand nombre d'entre elles, en particulier les plus récentes, n'ont pas encore été testées *en situation réelle*¹ ce qui leur confère une crédibilité limitée!

Le débat sur la perception visuelle (Chap.2) a mis en lumière la diversité des approches possibles et en particulier l'opposition entre les méthodes intégrant une connaissance et les méthodes privilégiant l'objectivité totale. On retrouve ces deux tendances au sein des méthodes morphométriques, en distinguant d'une part des démarches empiriques reposant sur des mathématiques simples, et d'autre part des méthodes caractérisées par un niveau d'abstraction élevé et des transformations mathématiques complexes.

L'histoire des théories morphométriques remonte au début de ce siècle, à l'époque où des sédimentologues confrontés à la diversité des formes produites dans la nature ont ressenti le besoin de quantifier leurs observations. Les méthodes qu'ils développèrent, en particulier celles de Wadell [1932,1933,1935], restent soixante ans plus tard d'une remarquable lucidité. Ce sont, de très loin, les méthodes qui ont le plus servi les besoins de l'expérimentation. Elles ont très largement débordé le cadre strict de la sédimentologie. Pendant les quarante années qui suivirent aucune proposition majeure n'a vu le jour en morphologie et il a fallu le développement des outils informatiques pour aboutir au foisonnement des techniques connues aujourd'hui [Ehrlich & Weinberg,1970; Kaye, 1978; Serra, 1982]. Ces dernières n'ont aucunement la maturité des premières, mais elles ouvrent de nouvelles perspectives.

REMARQUE : En raison de l'absence d'une théorie morphologique unifiée, il est inévitable de se retrouver confronté à une disparité totale dans la terminologie et dans les nota-

¹ Nous considérons comme applications réelles les problèmes mentionnés au chapitre III et non les cas d'école consistant à différencier des formes géométriques simples (triangle, disque,...) ou des formes synthétiques arbitrairement considérées comme représentatives par certains auteurs.

tions utilisées. Nous proposerons plus loin une systématisation du vocabulaire, mais dans l'analyse des méthodes qui suit, nous maintiendrons volontairement l'appellation originale préconisée par chaque auteur.

5.1 Les critères de qualité d'un descripteur morphologique.

C'est Exner[1987] qui a le plus clairement énoncé les critères élémentaires auxquels un descripteur de forme doit pouvoir répondre. Par souci de clarté, nous nous conformerons à son analyse. Certains des critères proposés sont dictés par des exigences propres à l'automatisation des mesures. Il est évident que l'analyseur d'images occupe actuellement une place centrale en morphométrie et qu'une nouvelle théorie ne peut négliger les aspects propres au traitement de données discrètes.

5.1.1 Indépendance vis-à-vis des autres descripteurs.

L'analyse optimale d'un matériau granulaire est faite en quantifiant indépendamment les grandeurs de l'équation de Griffiths. Toute autre mesure serait inévitablement redondante et ne permettrait plus d'optimiser l'effort d'analyse. Selon cette logique statistique, on a donc toutes les raisons d'exiger l'indépendance. Mais pratiquement, dans un contexte donné, il peut s'avérer utile d'analyser une grandeur qui soit $P = f(s_i, sh_i)$. Winkelmolen[1982] soutient fermement qu'un facteur de forme a la dimension d'une longueur:

$$Sh = \frac{V(m^3)}{S(m^2)}$$

Il justifie sa position par la nature des forces qui s'exercent sur une particule en sédimentation. Son raisonnement est correct dans ce contexte, mais le critère d'Exner a l'avantage d'être une règle générale.

5.1.2 Sensibilité.

Un descripteur morphologique doit permettre de discriminer entre les différentes morphologies rencontrées au sein d'une même application. En revanche, il ne doit pas être excessivement sensible au bruit (robustesse de la mesure). La discrétisation d'un objet introduit une sensibilisation très nette de certaines méthodes morphométriques qui pourraient sembler acceptables dans un espace euclidien. En accord avec Serra[1982], il convient de souligner que l'essentiel n'est pas tant de savoir si un ensemble de \mathcal{R}^2 est digitalisable ou non, mais plutôt si la transformation utilisée est digitalisable. Ainsi, une transformation est dite digitalisable :

si et seulement si le résultat digitalisé de cette transformation sur l'ensemble euclidien tend vers le résultat obtenu par la transformation de l'ensemble digitalisé pour un espacement de la trame tendant vers zéro.

5.1.3 Accessibilité.

Toutes les mesures géométriques ne pouvant être implémentées avec la même aisance sur des systèmes d'analyse d'images, il est utile de privilégier les paramètres dérivés de grandeurs faciles à mesurer. Ce critère est souvent exigé par certains auteurs sous le terme d'automatisabilité.

5.1.4 Spécificité.

Tous les chercheurs sont d'accord sur l'idée qu'il n'existe pas un descripteur de forme unique et définitif. Mieux encore, ils sont persuadés qu'il est illusoire et erroné de rechercher un tel paramètre [Ehrlich & Full, 1986]. L'idée de *niveaux de forme* (shape levels) est souvent avancée. Elle rejoint la notion de *quantité d'information* telle que nous l'avons présentée au chapitre II. La spécificité n'est rien d'autre que l'aptitude d'un descripteur morphologique à cerner la *forme effective*, elle suppose aussi que l'on puisse définir plusieurs aspects de la forme statistiquement indépendants et dont la signification physique soit précise.

5.1.5 Additivité.

Une mesure possède une propriété d'additivité si la moyenne de deux mesures conserve la même signification que celle des mesures originelles. Ce problème est réel lorsqu'on recherche des paramètres statistiques pour résumer la morphologie d'un lot de particules ou dès que l'on manipule arithmétiquement les mesures individuelles. Il n'y a pas de solution générale à ce problème, mais il faut être conscient de ces effets.

5.1.6 Robustesse vis-à-vis de la rotation.

Ce critère vise principalement les problèmes rencontrés dans un espace discrétisé. Le nombre de rotations invariantes étant fort limité sur des trames hexagonales (6) ou octogonales (4), cela exclut beaucoup de mesures trop sensibles au choix de la trame. En particulier toutes celles qui sont basées sur des mesures de périmètre ou de distances non-euclidiennes.

5.1.7 Robustesse vis-à-vis de l'homothétie.

L'indépendance du descripteur morphologique vis-à-vis de l'échelle est une notion incorrecte. Ce qui importe, c'est que ce descripteur soit invariant dans le *domaine de perception* relatif à l'application envisagée. Par l'échantillonnage de l'image, on a fixé le seuil de résolution en-dessous duquel toute information est sciemment perdue on a ainsi déterminé la taille (nombre de pixels) de la représentation discrète. Il est essentiel pour comparer la morphologie de différents objets que le descripteur ne soit pas excessivement sensible à cette taille. En pratique on peut comprendre que la morphologie de contours constitués d'une dizaine de pixels soit très imprécise, mais on doit pouvoir comparer valablement des objets ayant un contour d'une centaine de pixels avec d'autres ayant des dizaines de milliers de pixels de contour!

5.2 Mesure des grandeurs stéréologiques de base dans un espace discrétisé.

Les conditions d'Hadwiger [Coster & Chermant, 1985] nous enseignent qu'il n'existe que trois paramètres stéréologiques dans l'espace \mathbb{R}^2 : le nombre de connexité (N^2), le périmètre (U) et l'aire (A). Etant donné l'importance de ces grandeurs stéréologiques dans le calcul d'un certain nombre de paramètres de forme, il est utile de se pencher sur les méthodes d'estimation de ces paramètres dans un espace discrétisé.

5.2.1 Les estimateurs de longueur dans un espace discrétisé.

L'opération de digitalisation de l'image a engendré une perte d'information irréversible qui fait qu'une même ligne digitale peut provenir de la digitalisation de lignes sensiblement différentes (Fig.5.1.). De ce point de vue, il est impossible d'estimer la longueur de la ligne originelle sans faire une hypothèse sur sa géométrie réelle. Parmi les problèmes rencontrés en pratique, il y en a deux qui méritent un intérêt particulier : l'estimation de la longueur d'une droite et l'estimation du périmètre d'une courbe ayant une variation de courbure continue.

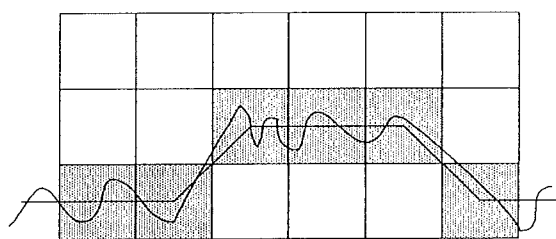


Fig.5.1. Une même représentation discrète peut provenir de lignes sensiblement différentes.

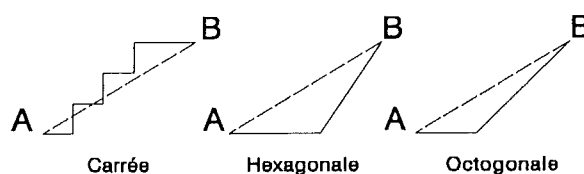


Fig.5.2. Distances discrètes entre A et B sur différents graphes. Erreurs maximales = (carré : 41%; hexagonal : 15,5%; octogonal : 8%)

5.2.1.1 Estimation de la distance.

La figure 5.2. illustre les erreurs maximales qui peuvent se produire dans la mesure d'une ligne droite lorsqu'on travaille sur des trames de différentes connexités. Etant donné l'importance pratique de la trame octogonale, il est intéressant de développer des estimateurs linéaires rapides basés sur le nombre de pas élémentaires dans les directions $k \cdot \frac{\pi}{2}$ (n^c) et dans les directions $k \cdot \frac{\pi}{4}$ (n^o). Dorst & Smeulders [1987] ont étudié un certain nombre d'estimateurs et proposé un *BLUEstimator* (Best Linear Unbiased Estimator) dont l'expression est cependant complexe. Pour une utilisation pratique, ils recommandent un estimateur du type *corner-count* :

$$L_c = 0,980 \cdot n^c + 1,406 \cdot n^o - 0,091 n^{oc/co}$$

où $n^{oc/co}$ représente le nombre de séquences du type carré-octogonal ou octogonal-carré.

	1	2	5	10	20	50	100	∞
$L_0(n)$	0.310	0.231	0.186	0.172	0.165	0.161	0.159	0.1581
$L_1(n)$	0.252	0.183	0.141	0.127	0.120	0.116	0.1143	0.1129
$L_G(n_e, n_o)$	0.217	0.141	0.103	0.091	0.085	0.082	0.0800	0.803
$L_F(n_e, n_o)$	0.223	0.117	0.0755	0.0682	0.0669	0.0664	0.0664	0.0664
$L_K(n_e, n_o)$	0.232	0.114	0.0534	0.0371	0.0307	0.0278	0.0270	0.0263
$L_C(n_e, n_o, n_c)$	0.228	0.103	0.0398	0.0208	0.0125	0.00879	0.00804	0.0077
$L_{MPO}(n_e, n_o)$	0.217	0.0937	0.0354	0.0172	0.00848	0.00337	0.00174	
$L_{BLUE}(n_e, n_o)$	0.223	0.0966	0.0356	0.0173	0.00849	0.00337	0.00170	
$L_{BLUE}(n_e, n_o, n_c)$	0.217	0.104	0.0329	0.0141	0.00644	0.00248	0.00124	
$L_{MPO}(n, q, p, s)$	0.217	0.103	0.0337	0.0127	0.00476	0.00127	0.00045	
$L_{BLUE}(n, q, p, s)$	0.196	0.0937	0.0291	0.0107	0.00379	0.00097	0.00034	

Note: The column marked ∞ contains predicted values. The values indicated are relative deviations (RDEV), compared to the continuous value.

Fig.5.3. Comparaison de différents estimateurs de longueur pour une ligne droite de n éléments. Les valeurs indiquent l'écart relatif à la distance euclidienne vraie. (L_0 : nombre de segments; L_F : distance octogonale; L_C : "corner count", autres estimateurs détaillés dans Dorst & Smeulders [1987]).

Le tableau 5.3. illustre bien que les estimateurs les plus rudimentaires n'augmentent pas en précision lorsque la résolution augmente! On remarquera l'amélioration obtenue avec L_C sur le simple dénombrement de segments L_0 ou sur la distance octogonale L_F .

5.2.1.2 Estimation du périmètre.

Si le périmètre d'un objet peut être considéré comme polygonal, ce qui n'est que très rarement le cas, le problème peut se ramener à une décomposition en un sous-ensemble de lignes droites estimées par les méthodes du paragraphe précédent. En règle générale, une hypothèse de courbure continue pour le périmètre sera plus satisfaisante, ce qui signifie que toute polygonation conduit à une sous-estimation importante. Dorst & Smeulders[1987] ont proposé une estimateur linéaire simple pour des arcs en trame octogonale :

$$LK = 0,948n^c + 1,343n^o$$

Celui-ci conduit à une erreur particulièrement faible lorsque le nombre de points de l'arc vaut 70% du rayon de courbure.

La formule de Crofton préconisée par Serra[1982] fournit une estimation asymptotiquement non-biaisée du périmètre réel sur base des nombres d'intercepts. Elle est la plus précise dans les cas où chaque direction de la trame est équitablement représentée. En trame octogonale elle s'écrit:

$$U_{\text{Croft}}^{\circ}(X) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(N_0 + N_{90} + \sqrt{\frac{2}{2}} (N_{45} + N_{135}) \right) \cdot l_0$$

avec U_{Croft}° : le périmètre de Crofton en trame octogonale.

N_{α} : le nombre d'intercept dans la direction α .

l_0 : le pas d'échantillonnage de l'image.

D'autres méthodes d'estimation basées sur des interpolations polynomiales (*splines*) existent, elles seront partiellement évoquées au paragraphe 5.5.2..

5.2.2 Estimation de l'aire.

L'estimation de l'aire ne pose pas de problème majeur. Un simple dénombrement de pixels auxquels est associée une aire élémentaire fournit déjà une méthode robuste d'estimation :

$$A = N^{\circ} \cdot (l_0)^2$$

avec N° : le nombre de pixels (nombre de connexité dans \mathbb{R}^0).

On peut montrer [Serra,1982] que cet estimateur est non-biaisé si le réseau d'échantillonnage est uniformément distribué sur l'objet à mesurer. Dans le cadre d'analyses fractales tri-dimensionnelles Aguilar et al.[1992] ont préféré calculer l'aire interne au périmètre octogonal. Il est évident qu'une hypothèse sur la conformation du contour permet de calculer l'aire interne, mais la précision ainsi gagnée est sauf exception illusoire.

5.3 Le FACTEUR DE FORME des systèmes d'analyse d'images. Une illustration des défauts de la morphométrie digitale.

Avant de passer en revue la littérature consacrée à l'analyse de formes, il est particulièrement instructif de s'attarder sur un paramètre universellement répandu:

$$F = \frac{4 \cdot \pi \cdot A}{U^2}$$

Ce paramètre diversement appelé compacité, circularité ou mieux déficit isopérimétrique [Coster & Chermant, 1985] est le plus souvent baptisé du nom indistinct de *facteur de forme* (que ce soit F, 1-F ou 1/F). Sa plus grande qualité, mais aussi la seule, est son accessibilité puisqu'il ne suppose aucun effort supplémentaire après l'estimation de A(X) et U(X). Ceci explique qu'il soit présent sur la totalité des systèmes commerciaux d'analyse d'images, plus préoccupés par la quantité que par la qualité des fonctions! Malheureusement, ceci explique aussi le très grand nombre d'études scientifiques qui envisagent ce paramètre F comme seule et unique méthode morphométrique... et ne parviennent pas à y voir clair.

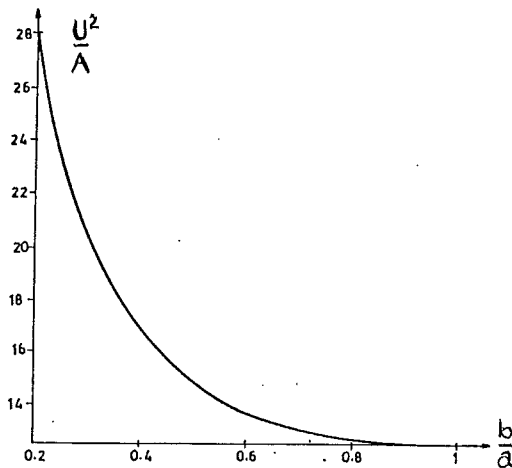


Fig.5.4. Variation du paramètre $\frac{U^2}{A}$ avec l'élongation (pour une ellipse). [Frossard,1978]

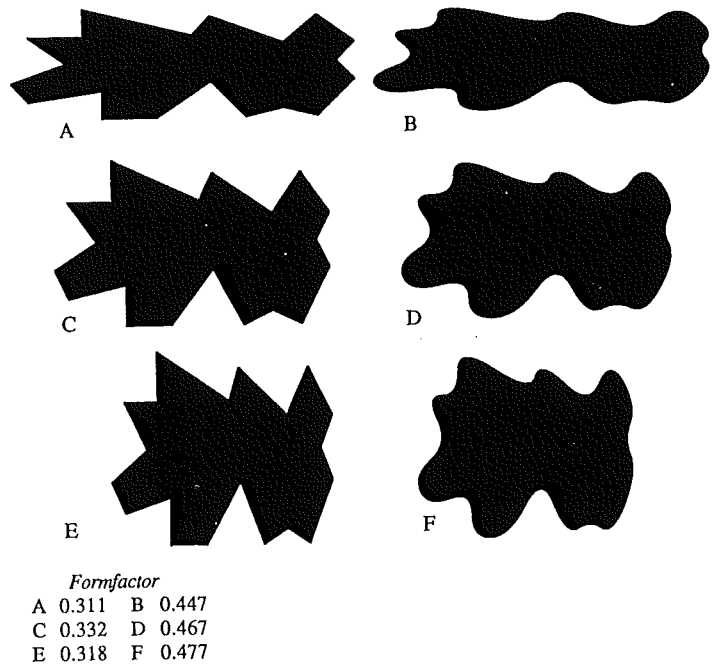


Fig.5.5. Variation de F avec la rugosité pour des formes synthétiques. [Russ,1990]

Le mauvais comportement de F est lié à deux causes distinctes : d'une part le caractère semi-continu d'une grandeur comme le périmètre et d'autre part, le problème d'estimation du périmètre au départ d'une représentation discrétisée (§ 5.2.1.2.). F est avant tout un paramètre non-spécifique qui englobe à la fois une notion d'élongation (Fig.5.4.) et des notions de rugosité (Fig.5.5.). Ceux qui ont cru différencier l'une ou l'autre de ces propriétés grâce à F devraient garder à l'esprit non seulement sa mauvaise spécificité, mais aussi sa sensibilité excessive au bruit comme l'illustre la figure 5.6.. Les problèmes critiques d'estimation de F au départ de la représentation discrétisée de la forme devraient inciter à l'**abandon définitif** de ce paramètre! Le tableau 5.7. illustre l'évolution de F avec l'homothétie pour une forme géométrique simple centrée sur la trame. L'estimation du périmètre est faite par polygonation (comptage des segments dans les directions principales de la trame). λ est le "rayon" de la forme en unités de trame.

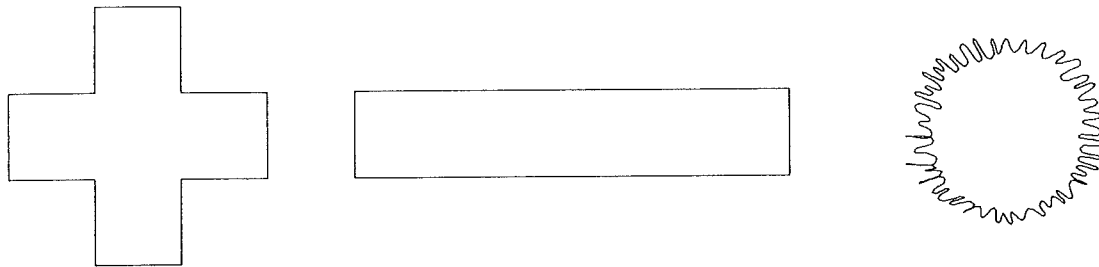


Fig.5.6. Trois figures simples correspondant à une même valeur de F .

TRAME HEXAGONALE
Hexagone centré

λ	$U^h(X)$	$A(X)$	F
1	6	7	2.443
5	30	91	1.271
10	60	331	1.155
25	150	1951	1.090
50	300	7651	1.068
100	600	30301	1.058
200	1200	120601	1.052

Valeur euclidienne = 0.907

TRAME OCTOGONALE
Carré centré

λ	$U^o(X)$	$A(X)$	F
1	8	9	1.767
5	40	121	0.950
10	80	441	0.866
25	200	2601	0.817
50	400	10201	0.801
100	800	40401	0.793
200	1600	160801	0.789

Valeur euclidienne = 0.785

Tab.5.7. Evolution de F avec l'homothétie pour des formes géométriques simples. La valeur euclidienne correspond est la limite théorique.

Dans ces cas simples, l'erreur est surtout attribuable à une erreur de discrétisation qui se répercute dans la surestimation de l'aire. Le calcul de l'aire interne eut donné de meilleurs résultats. Considérons maintenant le cas d'un disque centré discrétisé sur une trame octogonale :

TRAME OCTOGONALE
Disque centré

λ	$U^o(X)$	$A(X)$	F
1	4	5	3.297
5	28	81	1.298
10	56	317	1.27
25	140	1964	1.259

Dans ce dernier cas, l'adoption d'un estimateur du périmètre comme la formule de Crofton n'eut que légèrement amélioré les résultats. Lorsqu'on est confronté à des objets réels, l'estimation de F souffre non seulement du biais dans l'estimation de $A(X)$ et $U(X)$, mais aussi de l'apparition de détails supplémentaires le long du contour qui ont pour effet de faire augmenter $U(X)$ exponentiellement avec le grossissement (cfr. l'analyse fractale § 5.5.4.). L'image d'un grain d'or illustre ce problème (Fig.5.8. et Tab.5.8.).



Fig.5.8. Image d'un grain d'or utilisée à différents grossissements pour les mesures du Tab.5.8.

Gross.	1x	2x	4x	10x	Moyenne	C.V.(%)
A(X)	5654.9	5540.7	5396.4	5381.5	5493.4	2.36
U(X)	368.71	394.83	432.08	459.9	413.9	9.72
F	0.523	0.447	0.363	0.320	0.413	21.82

L'estimation du périmètre ($U(X)$) est faite par la formule de Crofton en trame hexagonale.

Tab.5.8. Variation de l'aire, du périmètre et de F avec l'homothétie.

Dans le cas de la rotation d'objets réels, c'est essentiellement l'estimation du périmètre qui affecte F. En adoptant la formule de Crofton, on constate en particulier que l'estimation sera très sensible à la présence de longs segments orientés selon une des directions principales de la trame (Fig.5.9.)

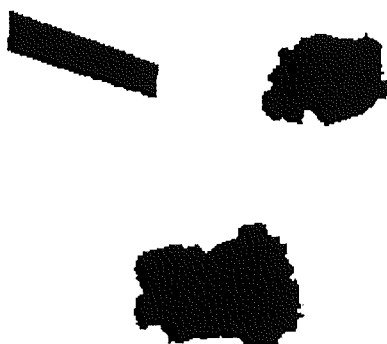


Fig.5.9. Images d'un grain de Mispickel, de Cuprite et d'Or utilisées selon différentes orientations pour les mesures du Tab. 5.9.

Figure A. Grain de Mispickel.

Rotation	0°	20°	40°	60°	90°	Moyenne	C.V (%)
A(X)	844778	847590	850755	852161	854857	849685	0.42
U(X)	4348	4685	4990	5327	5182	4865	7.73
F	0.562	0.485	0.429	0.377	0.400	0.451	16.47

Figure B. Paillette de cuprite.

Rotation	0°	20°	40°	60°	90°	Moyenne	C.V (%)
A(X)	569563	576155	569914	569358	569680	570215	0.33
U(X)	3930	4476	3955	4039	4148	4071	3.51
F	0.463	0.361	0.458	0.439	0.416	0.427	9.68

Figure C. Grain d'or.

Rotation	0°	20°	40°	60°	90°	Moyenne	C.V (%)
A(X)	1334674	1334439	1338307	1337604	1337369	1337217	0.17
U(X)	5689	5760	5920	5962	5945	5872	1.92
F	0.518	0.505	0.481	0.474	0.476	0.491	4.01

Tab.5.9. Variation de l'aire, du périmètre et de F avec l'orientation.

5.4 Méthodes empiriques en morphométrie.

La majorité des méthodes morphométriques existantes dans la littérature, ont été proposées de manière totalement empirique. Souvent ces méthodes font appel à des mesures simples combinées d'une manière ou d'une autre selon les intuitions de l'auteur. La littérature sédimentologique est particulièrement riche en théories de ce genre. Il est utile d'essayer d'en dégager les propositions essentielles sans s'encombrer des travaux d'importance secondaire. Des publications similaires existent dans d'autres disciplines, en particulier en métallurgie, en chimie et en génie civil. La majorité des paramètres empiriques ont été inventés et réinventés des dizaines de fois au cours des cinquante dernières années. Afin de clarifier la présentation les paramètres seront regroupés selon les grandeurs de base qu'ils utilisent.

5.4.1 Paramètres tri-dimensionnels.

5.4.1.1 Paramètres dérivés des trois diamètres de Féret perpendiculaires.

Un objet tri-dimensionnel peut être caractérisé par la longueur de sa projection sur l'ensemble des droites d'un espace 3-D (diamètres de Féret). En réalité, l'analyse globale de la forme se contentera surtout de trois projections mutuellement perpendiculaires. Selon la convention généralement admise, le diamètre de Féret maximum sera noté :

$$a = \text{Max}(F_{\theta, \phi})$$

avec θ et ϕ : définissant la position de la droite dans l'espace.

Le second axe noté b s'obtient en considérant le plan de la plus grande projection contenant a et en prenant la perpendiculaire à a dans ce plan. Enfin, c sera le diamètre de Féret maximum perpendiculaire au plan défini par a et b. (Fig.5.10.) La combinaison la plus élémentaire de ces trois mesures perpendiculaires est établie par les rapports appelés respectivement :

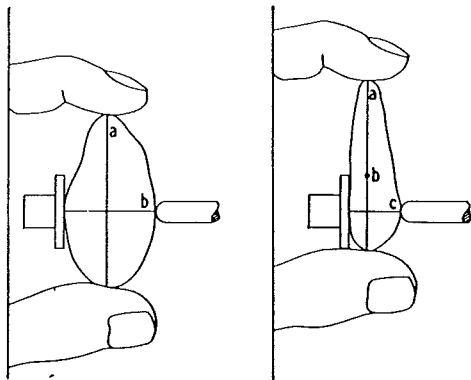


Fig.5.10. Principe de mesure des trois axes perpendiculaires sur un galet.

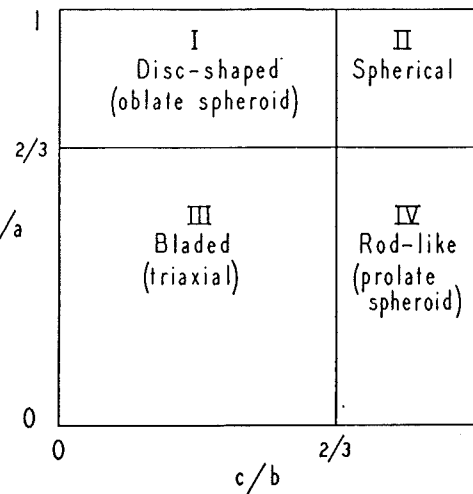


Fig.5.11. Classification de Zingg en fonction de $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{b}$.

Elongation ("):

$$El_F = \frac{b}{a}$$

Aplatissement (*Flatness*):

$$Ap_F = \frac{c}{b}$$

C'est Zingg[1935] qui a le plus méticuleusement étudié ces rapports en proposant la construction de graphiques (El_F, Ap_F) sur lesquels il délimitait quatre classes de formes (Fig.5.11.). La terminologie définie par Zingg a été souvent redéfinie ou critiquée [Sneed & Folk, 1958] ce qui n'apporte aucun élément neuf au problème de la quantification. Etant donné, le grand nombre de références au diagramme de Zingg, il est préférable de s'en tenir à ces conventions pour permettre des corrélations entre les travaux [cfr. Fleming, 1965 pour une bibliographie complète]. Les mesures de l'élongation ou de l'aplatissement sont purement géométriques et ne prennent pas en compte l'impact de certaines lois physiques. Ainsi, dans l'optique précise de prédire le comportement hydraulique d'une particule, d'autres paramètres ont pu être définis :

Wentworth[1922]	$\frac{a+b}{2.c}$
Wadell[1934]	$\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}$
Corey[1949]	$\frac{c}{\sqrt{ab}}$
Folk[1955]	$\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}}$

les deux derniers ont montré une meilleure corrélation avec le comportement expérimental des particules en sédimentation [Brigg et al.,1962;Sneed & Folk,1958].

5.4.1.2 Paramètres construits en référence à des formes géométriques simples.

Le besoin d'utiliser une forme de référence pour définir une morphologie complexe est apparu dès les premiers travaux. Presque toujours, c'est la sphère qui est adoptée en raison de la simplicité des calculs géométriques qui s'y rapportent et en raison de son isotropie parfaite. Etant donné que la majorité des modèles physiques connus (sédimentation, compaction,...) sont définis pour des morphologies strictement sphériques l'intérêt de paramétrer une morphologie quelconque en référence à la sphère s'en trouve renforcé. Cox[1927] a proposé d'utiliser le facteur F précité. Mais, c'est le travail de Wadell[1932] qui reste la référence. Grâce à une démarche rigoureuse et systématique, Wadell a défini comme paramètre fondamental un indice de *sphéricité idéale*:

$$\Psi_s = \frac{S_o}{S} = \frac{4,8359}{S_v}$$

Soit, le rapport de la surface d'une sphère de volume équivalent à la particule (S_o) à la surface de cette particule (S). La sphéricité est par conséquent inversement proportionnelle à la surface spécifique (S_v). Soucieux d'établir une corrélation entre la sphéricité de Wadell et le diagramme de Zingg, Krumbein[1941] proposera d'utiliser une approximation de la sphéricité par:

$$\Psi_K = \sqrt[3]{\frac{V}{V_{Circ}}}$$

où V : volume de la particule.
 V_{Circ} : volume de la sphère circonscrite.

ce qui donne

$$\Psi_K = \sqrt[3]{b \cdot \frac{c}{a^2}}$$

si on assimile la particule à un ellipsoïde s'appuyant sur a, b et c.

Aschenbrenner[1956] poussant le réalisme encore plus loin, proposera de revenir à la définition originale de Wadell en se basant sur un estimateur de la surface au départ des mesures a, b et c. En assimilant la particule à un tétrakaidécahédre, il aboutit à la relation :

$$\Psi_S \sim \frac{S_{oT}}{S_T} = \frac{13,4 \sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}}}{1 + \frac{c}{b} \left(1 + \frac{b}{a}\right) + 6 \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}}$$

où S_{oT} : est la surface d'un orthotétrakaidécahédre de volume équivalent au tétrakaidécahédre dont la surface est S_T .

5.4.2 Paramètres bi-dimensionnels.

En raison des difficultés évidentes pour obtenir des mesures dans trois dimensions perpendiculaires, si ce n'est pour des galets au moins centimétriques, les sédimentologues ont défini des paramètres analogues en deux dimensions. Pour que ces méthodes soient opérationnelles, l'hypothèse est souvent faite de manière implicite que le plan visualisé est le plan de la plus grande projection et dès lors que a et b sont mesurables.

5.4.2.1 Paramètres dérivés des diamètres de Féret.

Le calcul de l'ensemble des diamètres de Féret relatifs à un contour décrit par les coordonnées (x_i, y_j) de ses points, se détermine en calculant pour toute direction α (Fig.5.12.):

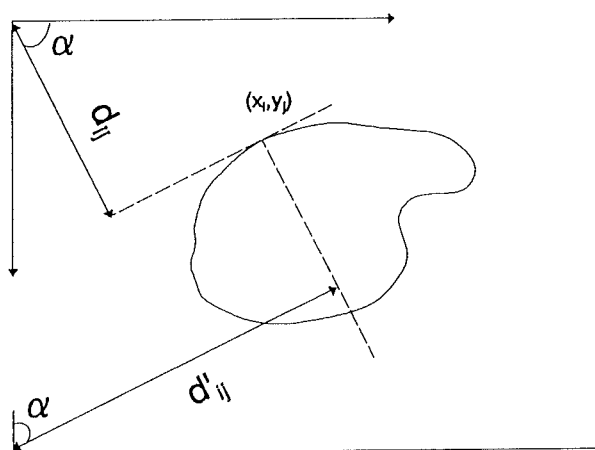


Fig.5.12. Principe de mesure du diamètre de Féret selon une direction quelconque α .

$$d_{ij} = x_i \cos \alpha + y_j \sin \alpha$$

et

$$d'_{ij} = x_i \sin \alpha + (n_l - y_j) \cos \alpha$$

Ainsi,

$$F_{\alpha} = \text{Max}_{(i,j)} (d_{ij}) - \text{min}_{(i,j)} (d_{ij})$$

et

$$F_{\alpha+90} = \text{Max}_{(i,j)} (d'_{ij}) - \text{min}_{(i,j)} (d'_{ij})$$

où n_l : est le nombre de lignes de l'image.

F_{α} : le diamètre de Féret selon α .

$F_{\alpha+90}$: le diamètre de Féret conjugué.

En calculant ces diamètres de Féret conjugués pour un suffisamment grand nombre de directions, on obtient le diamètre de Féret maximum :

$$F_{\theta} = \text{Max}_{\alpha} (F_{\alpha})$$

et son conjugué

$$F_{\theta+90} = \text{Max}_{\alpha} (F_{\alpha+90})$$

Certains auteurs définissent ainsi la longueur (F_{θ}) et la largeur ($F_{\theta+90}$) d'un objet quelconque Russ[1990]². Le premier paramètre qui peut être dérivé des diamètres de Féret est bien sûr l'élongation:

$$El_F = \frac{F_{\theta+90}}{F_{\theta}}$$

Ce paramètre a été proposé sous la forme (Sym=1-El_F) et baptisé symétrie par Exner & Hougardy[1988]. Hausner[1967] a aussi proposé de définir l'extension d'une forme en calculant le rapport de l'aire du rectangle décrit par F_{θ} et $F_{\theta+90}$ et l'aire de cette forme :

$$Ext = \frac{A}{F_{\theta} \cdot F_{\theta+90}}$$

Dans le même esprit Maisonneuve & Lantuejoul[1984] ont défini un paramètre de "shrinkage" comme étant:

$$Sh = \frac{\left(\frac{F_{\theta} + F_{\theta+90}}{2} \right)^2 \cdot \pi}{A}$$

Enfin, Russ[1990] propose comme facteur de *rondeur* de calculer:

$$R_R = \frac{4A}{\pi F_{\theta}^2}$$

Ce facteur exprime en réalité l'élongation d'une ellipse qui aurait comme diamètres F_{θ} et $F_{\theta+90}$. Dans ce cas, on aurait:

² la largeur est parfois définie comme $F_{\perp} = \min(F_{\alpha})$
ce qui fait qu'elle n'est pas nécessairement perpendiculaire à F_{α} .

$$A = \frac{\pi}{4} F_{\theta} F_{\theta+90} \Rightarrow \frac{F_{\theta+90}}{F_{\theta}} = \frac{4A}{\pi F_{\theta}^2}$$

5.4.2.2 Paramètres construits par référence à des formes géométriques simples.

Conscient du caractère impraticable de la définition tri-dimensionnelle de la sphéricité qu'il avait donnée, Wadell[1933,1935] proposa successivement des approximations bi-dimensionnelles par la *circularité*:

$$\Psi_U = \frac{U_o}{U}$$

avec U : périmètre de l'objet réel.
 U_o : périmètre du disque d'aire équivalente.

et enfin, par une *sphéricité en projection* :

$$\Psi_W = \frac{D_o}{D_{\text{Circ}}}$$

avec D_o : le diamètre du disque d'aire équivalente.
 D_{Circ} : le diamètre du disque circonscrit.

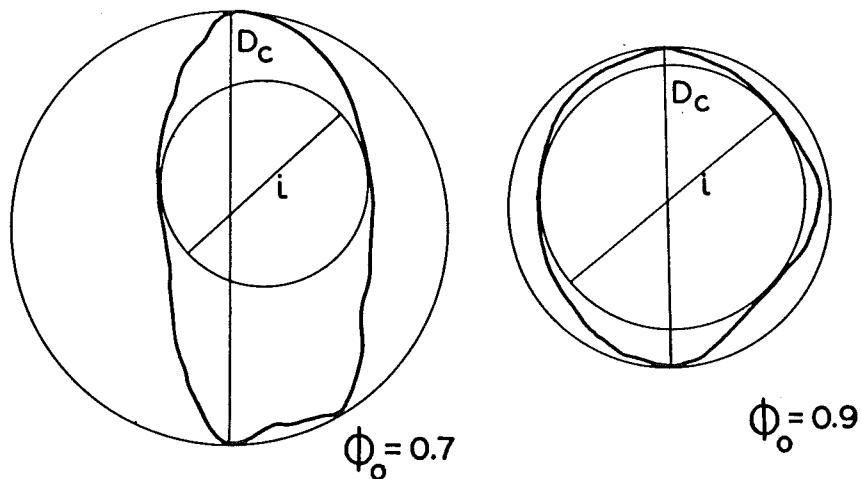


Fig.5.13. Principe de mesure de la sphéricité [Riley,1941].

Logiquement, Riley[1941] proposa par la suite d'estimer la sphéricité de projection par l'intermédiaire d'un estimateur plus rapide (Fig.5.13.): le diamètre du disque maxima inscrit (D_{in}):

$$\Psi_R = \sqrt{\frac{D_{in}}{D_{circ}}}$$

En réalité, pour les formes régulières cette relation équivaut à:

$$\Psi_R \sim \sqrt{\frac{F_{\theta+90}}{F_{\theta}}} = \sqrt{E l_F}$$

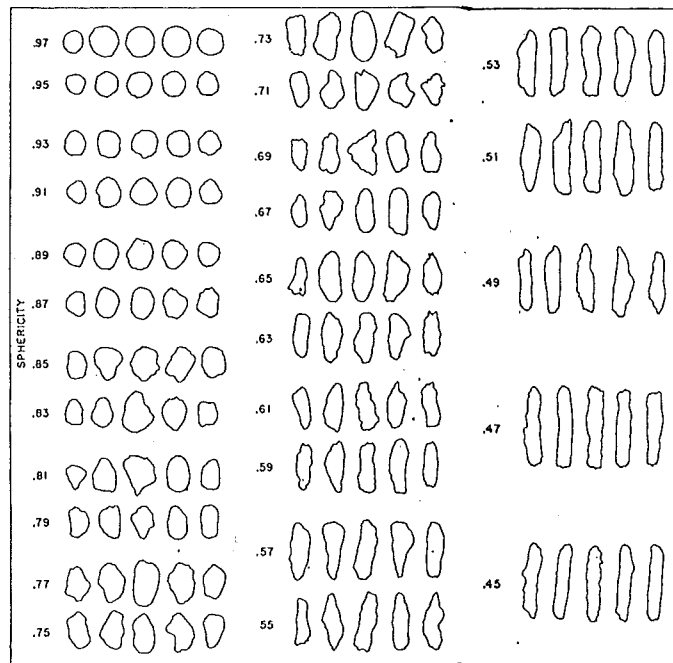


Fig.5.14. Charte de sphéricité de Rittenhouse [1943].

Rittenhouse[1943] suggéra l'utilisation d'une charte de sphéricité représentant 27 classes entre $\Psi_w = 0,45$ et $\Psi_w = 0,97$ (Fig.5.14.). Estimant le choix du disque peu heureux en raison de l'abondance des formes allongées dans les sédiments, Pye & Pye[1943] proposèrent de se référer à l'ellipse s'appuyant sur F_{θ} et $F_{\theta+90}$

$$\Psi_{PP} = \sqrt{\frac{F_{\theta}}{F_{\theta+90}}} = E l_F^2$$

La boucle était bouclée, la définition de la *sphéricité* renvoyait directement à la mesure de l'*élongation*!

5.4.2.3 Paramètres dérivés des rayons des disques maxima inscrits.

A condition que la courbure d'un objet soit définie en tout point du contour, il est possible de représenter une forme par un ensemble de disques maxima inscrits. Pour harmoniser les notations avec celles de la Morphologie Mathématique, on représentera les rayons de ces disques par λ_i . Ainsi, le diamètre du disque maxima inscrit dans le sens utilisé par Riley[1941] n'est autre que:

$$D_{in} = 2 \cdot \text{Max}_i (\lambda_i) = 2 \cdot \lambda_E$$

(l'utilisation de la lettre "E" se réfère à la notion d'érodé ultime qui sera introduite plus loin. (cfr. § 6.2.2.))

Etant donné qu'à chaque point du contour est associé un λ_i , il est possible de définir le long de ce contour un minimum absolu et des minima locaux. On adoptera la notation suivante:

$$\lambda_{X1} = \min_i (\lambda_i)$$

et pour les N minima locaux : λ_{Xn} avec $n=1, \dots, N$

(l'utilisation de la lettre X se réfère à la notion d'extrémité de branche de squelette, centre de courbure, qui sera introduite plus loin (cfr. § 6.2.2.))

En cherchant à quantifier l'évolution morphologique de cubes de calcaire soumis à l'usure dans un tambour, l'attention de Wentworth[1919] fut naturellement attirée par l'adoucissement des angles solides (Fig. 5.15.). Intuitivement, celui-ci proposa la définition d'un paramètre d'é moussé:

$$W_w = \frac{2 \cdot \lambda_{X1}}{D_{X1}}$$

avec D_{X1} : le plus grand diamètre passant par $X1$.

Manifestement, le paramètre ainsi défini par Wentworth convenait à ses cubes, mais l'adoption de D_{X1} était une idée malheureuse. Cailleux[1947] suggéra l'utilisation du diamètre de Féret et définit:

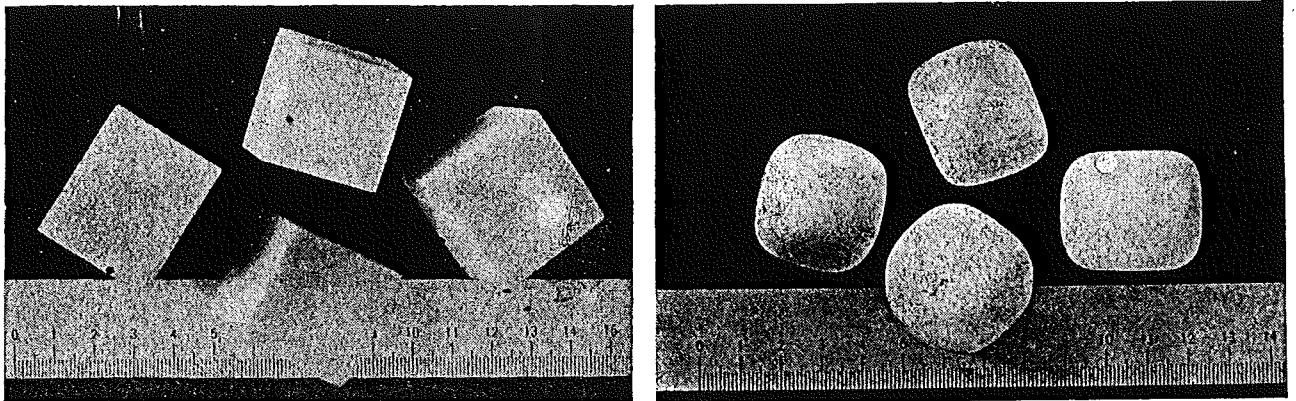


Fig. 5.15. Dés de marbre dans leur état original et après un parcours équivalent à 31,5 miles. [Wentworth,1919]

$$W_c = \frac{2 \cdot \lambda_{X1}}{F_\theta}$$

Kuenen[1956] insista sur le choix malheureux de F_θ et proposa plutôt d'utiliser $F_{\theta+90}$ soit:

$$W_K = \frac{2 \cdot \lambda_{X1}}{F_{\theta+90}}$$

Ce que Dobkins & Folk[1970] redéfiniront plus tard en utilisant ce qu'ils appellent l'émoissé de Wentworth modifié :

$$W_1 = \frac{\lambda_{X1}}{\lambda_E}$$

Cette idée était contenue dès l'origine dans les travaux de Wadell[1932] qui avait bien compris l'intérêt d'exprimer des courbures relatives et proposa de calculer la moyenne des rayons de courbures relatifs de chaque aspérité (Fig.5.16.):

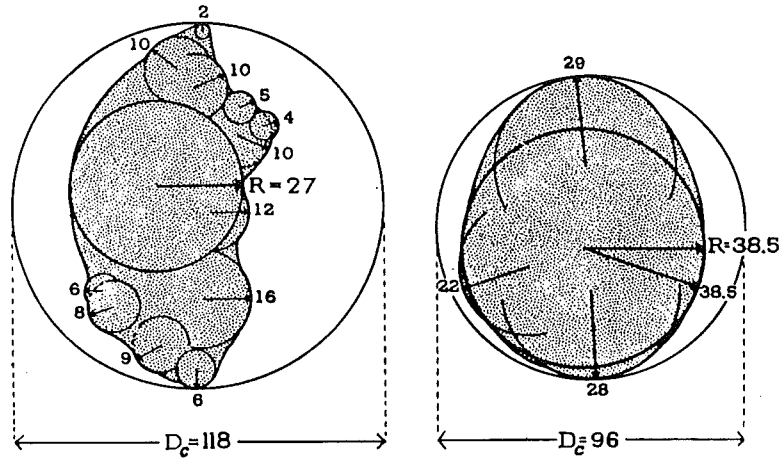


Fig. 5.16. Illustration par Wadell du principe de sa mesure d'émoissé.

$$\bar{W} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_{Xn}}{\lambda_E}$$

Partagés entre l'utilisation d'un paramètre relatif à la seule aspérité la plus forte (W_1) et un paramètre moyen (\bar{W}) voilant la diversité des courbures le long du contour, les sédimentologues essayent depuis lors différentes variantes telles que:

$$P = \frac{1}{\bar{W}}$$

Wadell[1935]

$$W_{12} = \frac{\lambda_{X1} + \lambda_{X2}}{2 \cdot \lambda_E}$$

Swan[1974]

En règle générale, c'est le paramètre \bar{W} qui emporte les suffrages. C'est en tout cas celui-là qui est à la base des chartes les plus universellement utilisées en morphométrie. L'idée de réaliser une charte s'imposait dès l'instant où la mesure des λ_i était un travail fastidieux et où la comparaison visuelle permettait d'obtenir des estimations plus rapides quoique subjectives [Folk,1955]. Krumbain[1941] a proposé une charte encore très répandue actuellement comportant 9 classes d'émoissés en progression arithmétique (Fig.5.17.). Par la suite, il publia [Krumbein & Sloss,1951] une charte combinant l'élongation et l'émoissé (Fig.5.95.). Cette dernière est particulièrement répandue dans le domaine de la construction et dans le secteur pétrolier. Pettijohn[1949] et ensuite Powers[1953] ont proposé des chartes pour lesquelles les centres de classe sont en progression géométrique. Ils

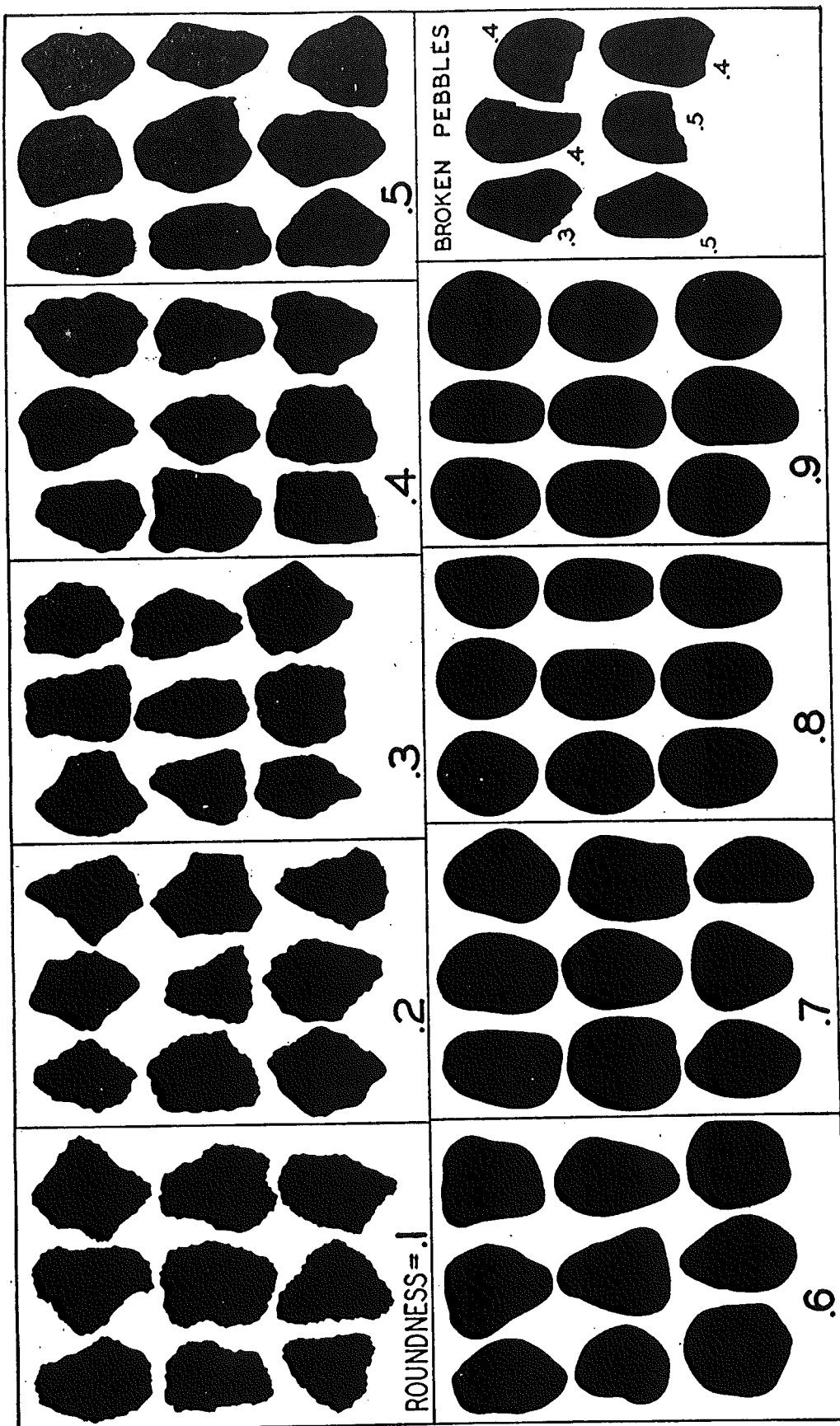


Fig.5.17. Charte d'émoussé proposée par Krumbein[1941] d'après la mesure définie par Wadell.

proposent aussi une terminologie équivalente à chaque classe (Fig.5.18.). Dans leur esprit, les classes les plus rugueuses (\bar{w} faibles) sont aussi les plus significatives et il convient de leur attribuer plus de poids.

Grade Terms	Class Intervals	Geometric Means
Very angular	0.12-0.17	.14
Angular	0.17-0.25	.21
Subangular	0.25-0.35	.30
Subrounded	0.35-0.49	.41
Rounded	0.49-0.70	.59
Well rounded	0.70-1.00	.84

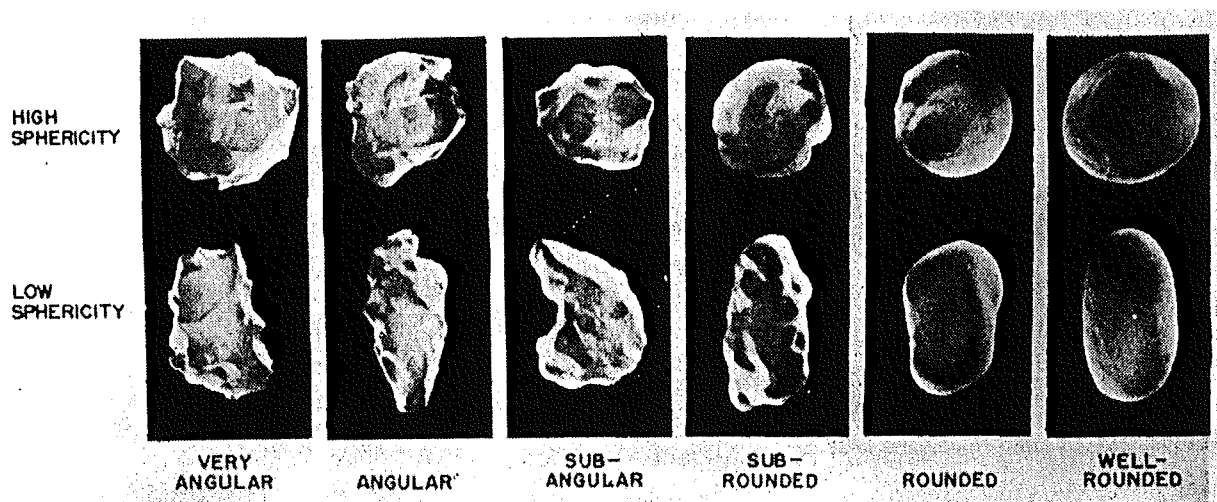
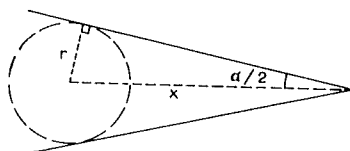


Fig. 5.18. Charte d'émoûsés de Powers[1953] et terminologie associée à chaque classe.

Confronté à l'examen de particules issues du concassage et présentant des arêtes vives [Lees,1964] a trouvé peu satisfaisante l'utilisation d'un indice d'émoûsé (\bar{w}) Il a développé une définition de l'angularité et proposé simultanément une charte visuelle (Fig.5.19.). A notre connaissance, sa méthode n'a jamais été diffusée par la suite, mais seulement commentée par Barrett[1980]. L'angularité bi-dimensionnelle de Lees s'obtient en calculant pour toute aspérité angulaire:



$$(180^\circ - \alpha) \cdot \frac{x}{r}$$

et en additionnant les contributions individuelles :

$$A_L = \sum_{\alpha} (180^\circ - \alpha) \cdot \frac{x}{r}$$

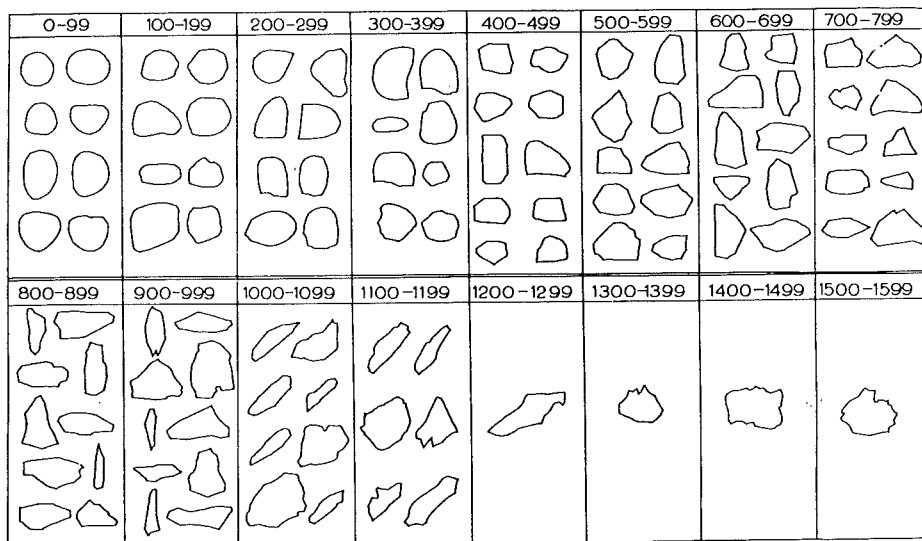


Fig. 5.19. Charte d'angularité de Lees[1964].

5.4.2.4 Analyse critique des méthodes empiriques bi-dimensionnelles.

Nous ne nous attarderons pas sur l'analyse des méthodes tri-dimensionnelles qui sont généralement hors de portée des systèmes d'analyse d'images. Elles ont été critiquées de manière fouillée par Barrett[1980] et Lees[1964]. La conclusion est qu'il est indispensable d'utiliser deux paramètres pour différencier les formes aplaties ("oblate") des formes allongées ("prolate"). L'idée de combiner un indice d'*élongation* et un indice d'*aplatissement* semble dans cet esprit plus simple et plus logique que la combinaison d'une *sphéricité* (Ψ_s) et de l'*aplatissement*.

L'historique du développement des facteurs de forme empiriques illustre bien les difficultés qu'ils soulèvent. Sans trop de craintes, nous osons dire que l'essentiel avait été dit par Wadell dès 1932 et que seul le travail isolé de Lees[1964] a apporté des notions réellement différentes.

5.4.2.4.1 Indépendance et spécificité.

Wadell[1932] a été conscient dès l'origine du besoin d'indépendance des paramètres de taille, de sphéricité et d'émoissé. Si cette indépendance est vraie en théorie, elle ne l'est plus en pratique étant donné que la mesure de taille stricte (volume) est souvent impossible et que la sphéricité tri-dimensionnelle théorique (Ψ_s) a été remplacée par une mesure plus praticable, très proche de l'idée d'élongation (Ψ_R, Ψ_{PP}) pour les formes quasi-convexes. Pour des particules d'allure ellipsoïdale, le passage à travers une maille de tamis, l'élongation et l'émoissé sont très fortement corrélées! L'égalité théorique qui existe entre W et El_F pour une ellipse est évidente. En effet:

$$\lambda_X = \frac{b^2}{2 \cdot a}$$

et

$$\lambda_E = \frac{b}{2}$$

d'où

$$W = \frac{\lambda_X}{\lambda_E} = \frac{2b^2}{2ab} = El_F$$

La décorrélation des mesures est d'une certaine manière un indice d'écart au modèle elliptique.

5.4.2.4.2 Sensibilité et robustesse.

Nous avons déjà rejeté le paramètre de forme F basé sur une grandeur semi-continue telle que le périmètre. Il est évident pour cette même raison que la circularité de Wadell(Ψ_U) est une très mauvaise approche. L'utilisation des diamètres de Féret est plus robuste, bien qu'une légère modification du contour peut dans certains cas affecter considérablement l'orientation Θ et dès lors, la mesure de $F_{\theta+90}$. Même si F_{θ} est stable, la mesure de $F_{\theta+90}$ peut ne fournir qu'une mauvaise idée de la forme (Fig.5.20.) et il serait souhaitable de mesurer la largeur réelle. Les sédimentologues exceptionnellement confrontés à des formes concaves ne se sont pas inquiétés de ces problèmes.



Fig. 5.20. Problème de la mesure de $F_{\theta+90}$ sur une forme concave.

La mesure de l'é moussé W ne permet pas de traiter les courbures infinies, mais cette remarque toute théorique ne possède pas d'existence réelle sur une trame discrète. En revanche, \bar{W} est sensible au bruit le long du contour et il convient que les auteurs s'accordent sur le caractère significatif d'une aspérité. Ce point n'a jamais été tranché, tout au plus certains auteurs s'inquiètent-ils [Dobkins & Folk, 1970] de la confusion possible entre une aspérité et ce qu'ils appellent une *texture de surface*. La mesure de l'angularité de Lees tient compte d'une *proéminence* des aspérités, mais la sensibilité de l'angularité pour des angles identiques d'é moussés différents est négligée par l'auteur.

5.4.2.4.3 Traitement statistique.

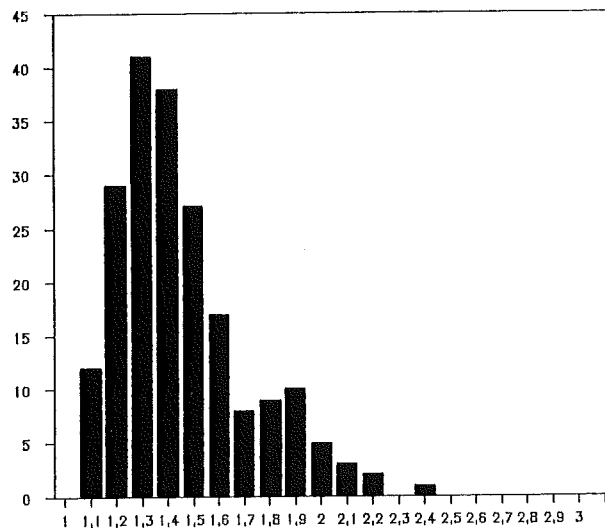


Fig. 5.21. Histogramme des élongations dans une poudre diamantée [30um-60um]. Noter le caractère légèrement asymétrique de la distribution.

Au sein d'une même classe granulométrique, la distribution des élongations correspond assez fréquemment à une distribution normale (Fig.5.21.). Barrett a montré qu'il en allait sensiblement de même pour tous les paramètres de sphéricité appliqués à des sédiments.

Le traitement statistique de la mesure d'é moussé (W) sur différentes aspérités d'un même grain pose manifestement problème à tous les auteurs. La proposition originelle de Wadell d'adopter une moyenne arithmétique a été contestée par certains qui ont proposé de manière totalement arbitraire de prendre W_{min} ou W_{12} ou une moyenne géométrique. Il est clair qu'il manque une argumentation physique se référant à la théorie de l'abrasion pour justifier le mode de calcul de l'é moussé. Ce point important sera rediscuté au chapitre 6.

5.4.2.4.4 Discrétisation et automatisation.

Le calcul des diamètres de Féret est une technique relativement lourde mais facilitée par la puissance accrue des systèmes actuellement disponibles. L'erreur de mesure sur F_{θ} dépend de la discrétisation angulaire adoptée lors du calcul. Pour un pas $d\alpha = 22,5^{\circ}$, on atteint déjà une précision de 2%. La mesure de $F_{\theta=90}$ posant toujours les problèmes illustr es ci-avant (Fig.5.20.)

Le calcul de W n'a jamais fait l'objet d'une tentative d'automatisation. A notre connaissance, seul Frossard[1978] a propos e d'automatiser la charte de Krumbein & Sloss en utilisant la morphologie mathématique. Mais la mesure qu'il effectue est d'une autre nature géométrique et ne présente qu'une corrélation partielle avec W (cfr § 5.6.3.). Ce problème sera réanalysé en détail au chapitre 6.

5.5 Méthodes mathématiques en morphométrie.

Les approches mathématiques ont l'avantage d'être généralement plus systématiques et plus robustes que les méthodes empiriques. Elles ont en principe l'ambition d'être plus générales et de s'adapter à l'analyse de formes irrégulières (concaves, tortueuses) autant que régulières. Ce dernier point s'obtient malheureusement aux dépens de leur spécificité.

5.5.1 Méthodes paramétriques.

La classification paramétrique des solides tri-dimensionnels au départ de grandeurs stéréologiques a été traitée par Blaschke[1955] qui propose la construction d'un diagramme (Fig.5.22.):

$$X = \frac{S}{\pi \cdot \bar{H}^2}$$

$$Y = \frac{6 \cdot V}{\pi \cdot \bar{H}^3}$$

avec \bar{H} : est la hauteur projetée moyenne.

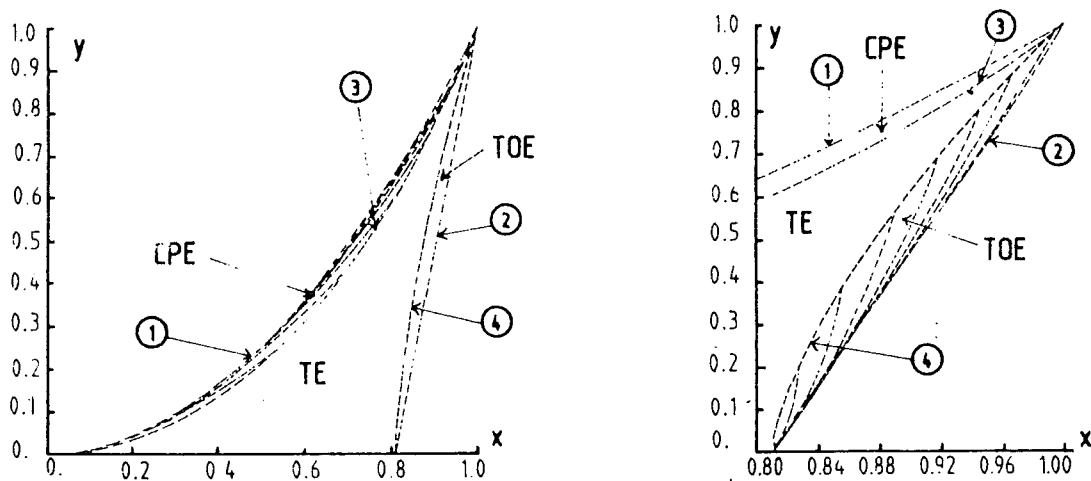


Fig. 5.22. Diagramme de Blaschke indiquant la position des Covered Prolate Ellipsoïds (CPE), Truncated Oblate Ellipsoïds (T.P.E.) et Triaxial Ellipsoïds (TE) [Riss,1987].

Riss[1987] a analysé cette méthode pour identifier une partition en formes canoniques des objets convexes qui rende le diagramme praticable. Malgré cela, elle recommande de tenter d'exploiter des méthodes comme celle proposée par Medalia[1970] en 2-D qui sont à la fois plus simples et plus intuitives.

5.5.1.1 Méthodes basées sur les moments d'inertie

Confronté à la caractérisation de floculats de carbone, c'est-à-dire de formes extrêmement irrégulières (Fig.5.23.), Medalia[1970] a été le premier à proposer de calculer l'élongation d'une ellipse d'inertie équivalente plutôt que l'élongation de l'objet lui-même. Ainsi,

$$El = \sqrt{\frac{I_a}{I_b}} = \frac{D_a}{D_b}$$

où $I_a \geq I_b$: sont les moments d'inertie principaux.

$D_a \geq D_b$: sont les diamètres de l'ellipse.

L'intérêt de la méthode de Medalia est énorme, car elle permet une mesure rapide et robuste de l'élongation. Cependant, comme l'indique la figure 5.23. les dimensions de l'ellipse surestiment souvent les dimensions correspondantes de l'objet réel. Nous avons proposé [Moitroux,1991] d'utiliser l'orientation θ de l'ellipse d'inertie pour recalculer les Féret F_θ et $F_{\theta+90}$ selon la formule du § 5.4.2.1.. Pour des objets quasi-convexes, cette méthode permet une estimation de l'élongation réelle en exploitant la robustesse et la rapidité de la méthode de Medalia. Une telle correction avait été proposée indépendamment par Exner & Hougardy[1988].

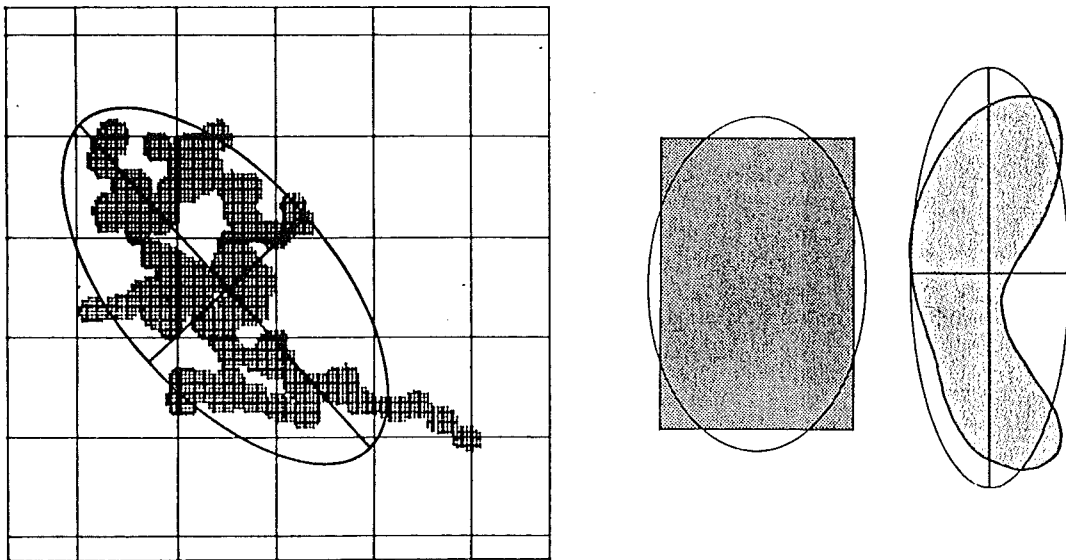


Fig. 5.23. Ellipse d'inertie équivalente sur un floculat de carbone, sur un rectangle et sur une forme légèrement concave. Noter la légère surestimation des dimensions. [Medalia,1970]

Les tableaux 5.24.a et b reprennent les paramètres de l'ellipse d'inertie équivalente obtenus sur les formes des figures 5.8. et 5.9.. La robustesse de la méthode vis-à-vis de la rotation et de l'homothétie est éloquent.

Gross.	1x	2x	4x	10x	Moyenne	C.V.(%)
D _a	113.3	112.9	112.6	112.1	112.7	0.45
D _b	70.0	69.4	69.0	67.9	69.1	1.29
El	1.62	1.63	1.63	1.65	1.63	0.86

Tab.5.24.a. Variation des paramètres d'inertie avec le grossissement.

Grain de Mispickel.

Rotation	0°	20°	40°	60°	90°	Moyenne	C.V.(%)
D _a	2174.2	2171.5	2160.7	2153.6	2145.9	2161.2	0.55
D _b	516.2	519.5	523.0	526.0	528.4	522.2	0.94
El	4.21	4.19	4.13	4.09	4.06	4.14	1.45

Grain de Cuprite.

Rotation	0°	20°	40°	60°	90°	Moyenne	C.V.(%)
D _a	1126.4	1182.0	1122.4	1117.9	1115.8	1125.3	1.64
D _b	678.8	682.2	681.7	683.9	685.6	683.4	0.33
El	1.66	1.73	1.65	1.63	1.63	1.65	1.76

Grain d'or.

Rotation	0°	20°	40°	60°	90°	Moyenne	C.V.(%)
D _a	1633.7	1627.4	1622.7	1613.5	1613.0	1621.1	0.50
D _b	1072.1	1075.8	1082.2	1087.2	1087.5	1082.2	0.62
El	1.52	1.51	1.50	1.48	1.48	1.50	1.12

Tab.5.24.b. Variation des paramètres d'inertie avec la rotation.

5.5.1.2 Méthodes basées sur l'enveloppe convexe et des grandeurs géodésiques.

Pour traiter le cas d'objets extrêmement concaves, certains auteurs ont développé des méthodes basées sur la comparaison entre l'objet et son enveloppe convexe. La faible signification physique de ces paramètres ³ ainsi que les problèmes d'automatisation rendent ces mesures peu attrayantes [Coster & Chermant,1985;Russ,1990]. L'utilisation de grandeurs géodésiques telles que la longueur géodésique ou le rayon géodésique [Lantuejoul & Maisonneuve,1984] sont une alternative intéressante dans certains problèmes précis [Chermant et al.,1987]. Les temps de calcul pour ces grandeurs sont un handicap majeur qui explique que plusieurs travaux ont développé des méthodes d'estimation soit au départ de mesures telles que $A(X)$ ou $U(X)$ [Russ,1990], soit de préférence au départ du squelette de la forme. Ceci renvoie à l'étude plus complète de la squelettisation qui sera développée au chapitre 6.

5.5.1.3 Application de l'analyse paramétrique dans des problèmes de valorisation des matières minérales.

Dans le but de tester la sensibilité des méthodes d'analyse paramétrique et en particulier des méthodes d'inertie en situation réelle, quelques expériences simples ont été tentées.

Le produit de base utilisé est un concentré de rutile extrêmement pur⁴. Les grains, posés sur une lame de verre, ont été visualisés en microscopie optique par transmission et l'image acquise digitalisée en 512*512 sur 8 bits. Pour limiter les effets d'échelle, le grossissement adopté pour les grains est toujours dans la fourchette 3000 à 5000 pixels (en moyenne 3500 pixels). L'analyse a porté sur une centaine de grains dans chaque produit. Une analyse statistique discriminante est effectuée sur les résultats de l'analyse morphométrique afin d'évaluer quantitativement la capacité des différents paramètres à expliciter les différenciations morphologiques dans les procédés considérés. Elle procède en deux étapes :

- Une analyse discriminante pas-à-pas⁵ pour identifier les variables contribuant le plus à la discrimination entre les produits considérés. Les seuils de signification pour entrer ou sortir de la sélection ont été fixés à 0,15.

³ excepté peut-être pour ce qui concerne l'étude du piégeage de matière dans des concavités [Noël,1991].

⁴ le caractère monominéralique de la matière était nécessaire pour éliminer autant que possible l'influence de la densité dans les procédés envisagés.

⁵ procédure STEPDISC du S.A.S.

- Une analyse discriminante au départ des variables sélectionnées à l'étape précédente. La procédure définit un modèle de discrimination sur base de la *distance généralisée* et génère un tableau de reclassification des observations. Une reclassification à 100 % exprimant la capacité des variables considérées à expliquer parfaitement la différenciation morphologique entre les produits.

Une remarque générale s'impose, l'analyse discriminante, comme toute analyse statistique peut mettre en évidence une corrélation dans les observations mais n'établit en aucun cas un lien de causalité ! C'est à l'opérateur de juger si il y a un lien de *cause à effet*.

DIFFERENCIATION MORPHOLOGIQUE AU COURS DU TAMISAGE.

Un tamisage rapide (10 min.) de la poudre de rutile a été opéré sur une colonne de tamis. Trois fractions ont été récupérées et analysées (Tab.5.25.). Le paramètre de taille D_o , diamètre du disque équivalent, permet une différenciation entre les fractions. Mais, il suggère que le tamisage est déjà optimal car les valeurs moyennes sont proches de la maille du tamis supérieur. L'analyse discriminante pas-à-pas retient comme significatifs D_o et les paramètres d'inertie...elle rejette le facteur de forme F dont la critique n'est plus à faire. Les taux de reclassification sont très satisfaisant (Tab.5.26.).

Fraction	105um - 125um		125um - 175um		> 175um	
	Moyenne	C.V.(%)	Moyenne	C.V.(%)	Moyenne	C.V.(%)
D_o	156.8	8.95	172.8	9.77	247.0	9.99
D_a	196.7	18.63	215.6	18.55	295.0	15.75
D_b	127.5	8.84	143.5	9.77	212.1	10.81
El	1.56	22.42	1.55	30.71	1.41	18.67
1/F	1.27	12.70	1.31	16.24	1.24	8.35

Tab. 5.25. Analyse morphologique sur des fractions après tamisage simple d'un concentré de rutile. (D_o : diamètre du disque équivalent; D_a, D_b et El paramètres d'inertie selon Medalia[1970]; F : déficit isopérimétrique)

La première opération de tamisage n'ayant manifestement pas eu le temps d'opérer une discrimination morphologique significative, une seconde opération fut relancée (10 min.) en prenant comme alimentation la fraction 125um - 175 um obtenue. A nouveau trois fractions furent soumises à l'analyse (Tab.5.27.). Ainsi, les grains qui se retrouvent dans la fraction 125um-175 um sont des grains qui la première fois ne sont pas passés par

VERS :	105-125	125-175	>175
DE :			
105-125	78.4 %	21.6 %	0.0 %
125-175	25.0 %	71.9 %	3.1 %
>175	0.0 %	3.8 %	96.2 %

Tab. 5.26. Résultats de l'analyse discriminante sur les trois fractions du tab.5.25. Taux de reclassification des grains d'après le paramètre D_o et les paramètres d'inertie.

la maille de 125 μm , mais ont pu passer à la seconde fois. La cause majeure de ce comportement est bien sûr à rechercher dans la morphologie des grains, ce dont attestent les observations. A ce stade, il est manifeste que le paramètre de taille n'est plus à même d'expliquer la séparation. La procédure discriminante identifie d'ailleurs l'élongation (El) et le mésodiamètre (D_b) comme étant les plus significatifs. Le modèle basé sur ces paramètres donne une reclassification encore satisfaisante (Tab.5.28.).

Fraction	< 125 μm		125 μm - 175 μm		> 175 μm	
Paramètre	Moyenne	C.V.(%)	Moyenne	C.V.(%)	Moyenne	C.V.(%)
D_o	183.1	9.47	178.9	22.25	206.0	13.81
D_a	246.2	20.68	215.0	25.15	241.0	16.58
D_b	140.2	6.53	151.4	22.69	180.5	14.52
El	1.77	24.02	1.45	18.79	1.35	14.43

Tab. 5.27. Analyse morphologique après re-tamissage de la fraction 125 μm -175 μm du tab 5.25.

VERS :	105-125	125-175	>175
DE :			
105-125	68.0 %	32.0 %	0.0 %
125-175	20.0 %	60.0 %	20.0 %
>175	6.1 %	30.3 %	63.6 %

Tab. 5.28. Résultats de l'analyse discriminante sur les trois fractions re-tamisées du tab.5.27.. Taux de reclassification des grains d'après le petit axe d'inertie (D_b) et l'élongation (El).

DIFFERENCIATION MORPHOLOGIQUE ET SEPARATION GRAVIMETRIQUE.

Les procédures de tablage sont des opérations extrêmement complexes qui font intervenir un grand nombre de paramètres. Il est peu probable qu'une différenciation morphologique puisse être analysée dans ce contexte. Le cas analysé ici concerne la différenciation sur un superpanner "à sec" et "sur film d'eau" d'un produit minéralogiquement pur et granulométriquement contrôlé. Les analyses morphométriques concernent un prélèvement de grains en tête et en queue du superpanner. Il ne s'agit donc que des classes extrêmes de la différenciation morphologique opérée.

La séparation "à sec" indique très clairement la prédominance du paramètre d'élongation. Elle montre aussi que tant la "queue" que la "tête" sont d'une granulométrie plus fine que l'alimentation. Physiquement cette différenciation s'explique par le rôle de la surface de frottement des grains sur la tôle. Ainsi, les grains les plus allongés ont une surface de contact importante et une capacité à rouler faible dans l'axe de leur élongation. Ils sont entraînés par le mouvement de la table plus que par la pente (Tab. 5.29. et 5.30.).

Au contraire, la séparation "en présence d'un film d'eau" indique que la résistance hydraulique (exprimée ici par le diamètre de la section transversale D_b) joue un rôle largement prépondérant sur l'élongation (la surface de frottement). Le modèle discriminant est efficace dans les deux cas pour reclassifier correctement les produits (Tab. 5.31. et 5.32.).

Fraction	TETE		QUEUE	
	Moyenne	C.V.(%)	Moyenne	C.V.(%)
D_o	170.3	9.56	153.3	9.14
D_a	250.0	18.59	188.8	15.33
D_b	120.2	9.56	127.5	9.18
El	2.11	24.24	1.49	17.66

Tab. 5.29. Analyse morphologique sur des fractions "tête" et "queue" d'une séparation au superpanner à sec. L'alimentation est la fraction <125 μ m du Tab.5.27.

DE :	VERS :	TETE	QUEUE
TETE		73.9 %	26.0 %
QUEUE		12.0 %	88.0 %

Tab. 5.30. Résultats de l'analyse discriminante sur les produits de superpannage à sec. Taux de reclassification d'après l'élongation (E1).

Fraction	TETE		QUEUE	
Paramètre	Moyenne	C.V.(%)	Moyenne	C.V.(%)
D _o	165.8	10.95	184.7	13.64
D _a	209.1	18.39	231.5	21.92
D _b	133.7	13.43	151.1	14.64
E1	1.59	23.26	1.55	23.32

Tab. 5.31. Analyse morphologique sur des fractions "tête" et "queue" d'une séparation au superpanner en présence d'eau. L'alimentation est la fraction 125um -175 um du Tab.5.25.

DE :	VERS :	TETE	QUEUE
TETE		67.9 %	32.1 %
QUEUE		36.4 %	63.6 %

Tab. 5.32. Résultats de l'analyse discriminante sur les produits de superpannage en présence d'eau. Taux de reclassification d'après le petit axe d'inertie (D_b).

En conclusion, il apparaît que des paramètres simples et robustes tels que les paramètres d'inertie sont bien adaptés à l'analyse de procédés réels. Les résultats enregistrés étant tout à fait conformes aux prédictions des lois élémentaires de la physique.

5.5.1.4 Analyse de 14 diamants.

Un sous-ensemble de 14 grains de diamants a été sélectionné dans une poudre de polissage de granulométrie 30 - 60 um (Fig.5.34.). Cette sélection s'est opérée sur une base purement subjective de manière à obtenir une diversité morphologique maximale dans un échantillon restreint. Cet ensemble de grains servira de test dans les prochains chapitres

pour différentes procédures d'analyse morphométrique. Le tableau 5.33 reprend les valeurs de l'analyse paramétrique sur les grains. Les figures 5.35 à 5.37, illustrent visuellement le classement opéré par chaque paramètre. La représentation digitale des grains est en moyenne de 4000 pixels.

N°	D_o	El	El_F	F
1	73.00	2.01	2.04	0.87
2	70.50	2.20	2.10	0.76
3	60.84	2.06	1.87	0.81
4	55.92	2.04	1.99	0.79
5	74.86	1.19	1.09	0.80
6	52.65	1.19	1.25	0.99
7	76.46	1.21	1.16	0.97
8	81.32	1.28	1.32	0.91
9	70.21	1.65	1.67	0.87
10	74.12	1.27	1.22	0.88
11	92.92	1.84	1.80	0.86
12	102.84	1.18	1.16	0.99
13	83.10	1.03	1.03	0.86
14	75.55	2.05	1.93	0.76

El_F : est l'élongation calculée sur base des diamètres de Féret selon l'orientation des axes principaux d'inertie.

Tab. 5.33. Résultats de l'analyse paramétrique sur les 14 grains de diamant de la figure 5.34.

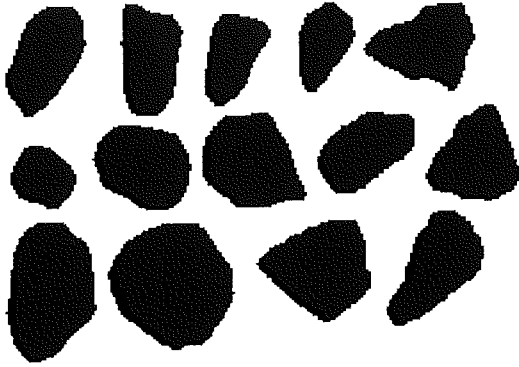


Fig.5.34. Grains de diamants issus d'une poudre 30um - 60um

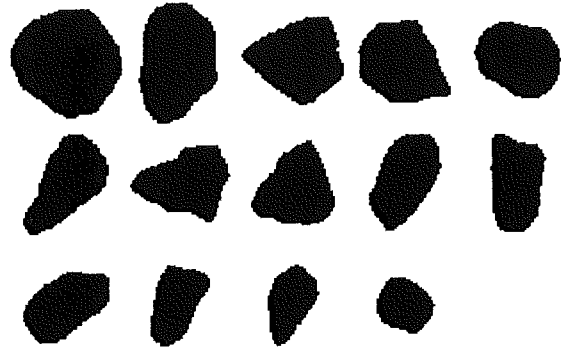


Fig.5.35. Classification des grains en fonction du diamètre du disque équivalent (D_0) décroissant.

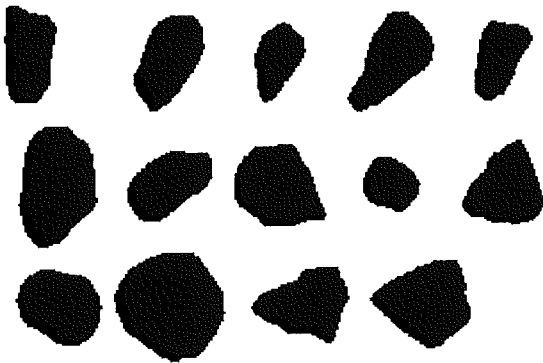


Fig.5.36. Classification des grains en fonction de l'élongation (El) décroissante.

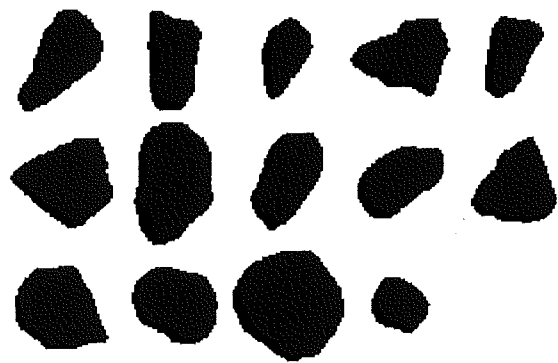


Fig.5.37. Classification des grains en fonction du déficit isopérimétrique (F) décroissant.

5.5.2 Méthodes de reconnaissance de forme.

Il peut paraître étonnant de citer les méthodes de *pattern recognition* dans le contexte de l'analyse morphométrique. Il est bien clair que ces méthodes ne sont pas orientées vers l'obtention d'une mesure mais plutôt vers la comparaison de descripteurs de formes. Dans certaines situations, les méthodes de *reconnaissance de formes* rejoignent les besoins de l'analyse morphométrique, soit qu'elles fournissent une équation descriptive de la forme, soit qu'elles identifient des points remarquables sur le contour. Réciproquement, la méthode que nous proposerons au chapitre 6 pour la morphométrie des particules complexes pourrait très bien engendrer un éventail d'applications en *reconnaissance de formes*.

La représentation du contour sous forme d'une chaîne de Freeman est un processus qui dépend directement du choix de la trame d'échantillonnage. Il est aisé d'imaginer que cette représentation n'est pas optimale pour un contour donné et que moyennant une hypothèse simple sur la géométrie d'un segment joignant deux points consécutifs il est possible de diminuer très fortement le nombre de points nécessaires. Les points conservés comme points de passage obligés du contour sont appelés *points de contrôle*. Pour des formes complexes, le codage du contour peut se faire avec un nombre de plus en plus restreint de points de contrôle, ce qui correspond à un lissage croissant de la forme. Typiquement, il est courant d'atteindre une représentation ne comportant plus que 20 % des points du contour original.

Dans l'optique de comparer des formes polygonales simples, la *reconnaissance de formes* se contente généralement de la simple chaîne de Freeman (Arkin et al.,1991), mais dès que les formes deviennent courbes et bruitées, la simplification du descripteur s'avère indispensable. Elle permet de prendre en considération une *tolérance de déformation* et elle diminue fortement le nombre de calculs. L'idée la plus simple pour décomposer une chaîne de Freeman est de sous-échantillonner **systématiquement** les pixels de la chaîne et de les rejoindre par des segments linéaires. Mais, la méthode de polygonation ainsi définie ne permet pas une réduction importante du nombre de pixels sans conduire à une dégradation catastrophique de la forme. Elle ne convient pas non plus à l'analyse, car elle ne conduit pas à une équation descriptive du contour. Ce dernier point, de même qu'une meilleure qualité de représentation est assuré par des techniques d'interpolation polynomiale " β -splines". Paglieroni & Jain[1988] ont montré que les représentations utilisant de tels polynômes, même de degré élevé, tout en s'appuyant sur des points de contrôles systématiques donnaient de piètres résultats en comparaison de celles obtenues avec des points de contrôle déterminés de manière heuristique (Fig.5.38.). La détection de ces derniers est l'objet d'une abondante littérature [West & Rosin,1991]. Nous pouvons distinguer les travaux selon que l'idée poursuivie est de découper un contour en un ensemble de segments de géométries définies ou au contraire d'identifier des points essentiels à la **visibilité** de l'objet. Le premier type de méthodes peut être qualifié de syntaxique, le second est délibérément asyntaxique.

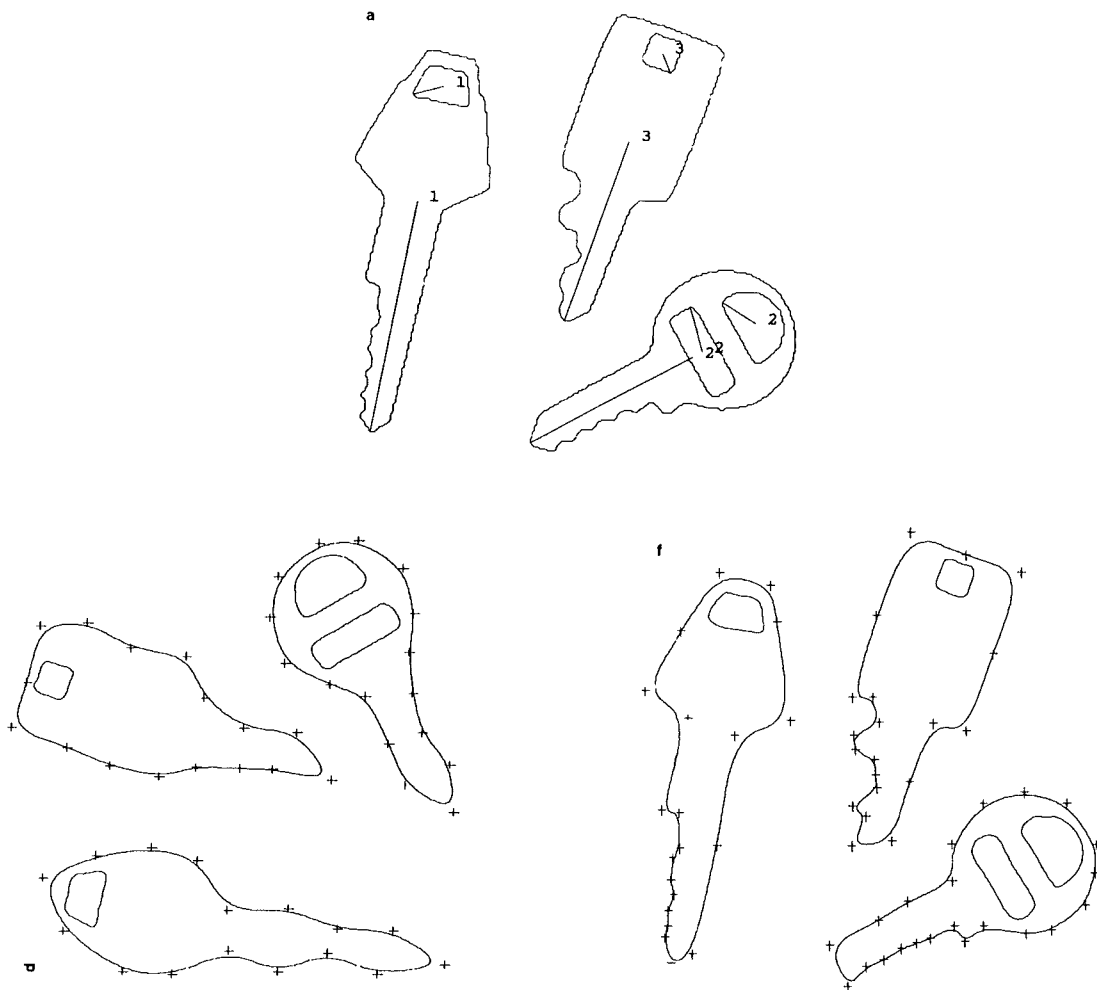


Fig. 5.38. a) Image originale de trois clés avec 512 points de contour. d) Représentation utilisant une interpolation polynomiale s'appuyant sur 16 points de contour prélevés systématiquement. f) Même interpolation s'appuyant sur des points de contrôle. [Paglieroni & Jain, 1988]

Les méthodes syntaxiques sont un prolongement de l'idée de polygonation. Dans une polygonation, la totalité des segments est linéaire et l'identification des points de contrôle peut s'imaginer selon une logique simple de distance maximale au segment défini (Fig.5.39.) [Pavlidis & Horowitz,1974]. Pour une partition plus réaliste du contour combinant des portions linéaires et des arcs de cercle, un critère de symétrie locale peut être utilisé pour segmenter une chaîne de Freeman initiale [Etemadi,1992].

Les méthodes asyntaxiques, au lieu de se concentrer sur un découpage du contour en primitives, sont basées sur l'identification de *points dominants*. Les publications en cette

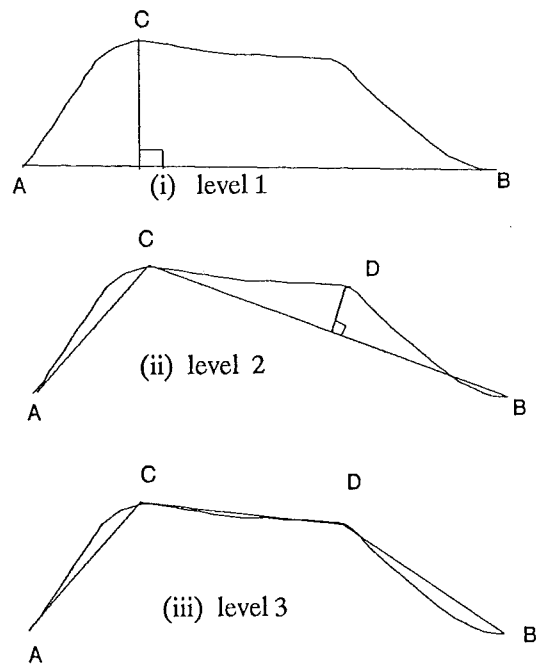


Fig. 5.39. Approche récursive dans la partition d'un contour basée sur la distance maximale au segment.

matière font systématiquement référence au travail psychophysique d'Attneave[1951] et définissent en conséquence les points dominants comme étant les points de courbures maximales (Fig.5.40.). La recherche de tels points rejoint directement les préoccupations de la morphométrie en matière d'analyse des aspérités.

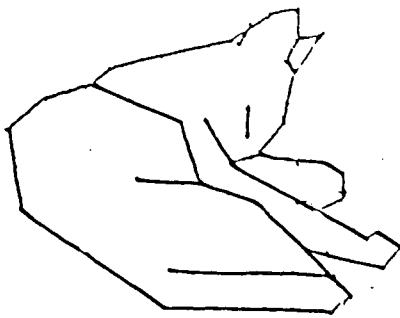


Fig. 5.40. Représentation du chat d'Attneave. Polygonation basée sur les points de courbure maximale.

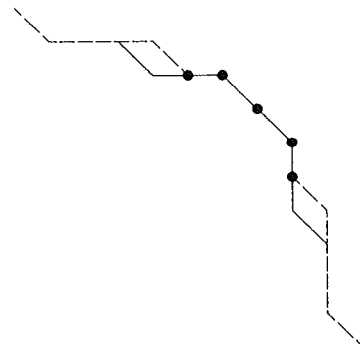


Fig. 5.41. Les représentations discrètes d'un arc de rayon 6 et de rayon 10 ont une séquence de 5 points en commun. Ce qui empêche une reconnaissance locale de la courbure.

La procédure générale de détection des points dominants consiste à **estimer** la courbure en tous points et à supprimer les points de courbure manifestement trop faibles ou de courbures non-localement maximales. Comme l'illustre la Fig. 5.41., la discrétisation du contour a fait perdre toute perception locale de la courbure. Alors que dans l'espace euclidien, il suffit de trois points pour déterminer de manière univoque un arc de cercle, dans l'espace discrétisé l'identification univoque d'une courbure requiert un nombre de points d'autant plus grand que la courbure est faible. Ceci explique que les procédures classiques de détection des points dominants [Rosenfeld & Johnston,1973; Freeman & Davis,1977] doivent se fixer un voisinage de dimension $2k$ -pixels pour l'estimation locale d'une courbure et par conséquent ignorer les courbures les plus fortes. La recherche des maxima locaux de la courbure se faisant ensuite sur un voisinage (support) de longueur $2l$. Le second problème auquel sont confrontés ces algorithmes est l'**estimation de la courbure**. Sur une chaîne de Freeman en 8-connexité, la définition mathématique de la courbure n'est plus acceptable et il faut imaginer un artifice! Rosenfeld & Johnston calculent le cosinus entre les deux vecteurs joignant le pixel c_i aux extrémités du voisinage de 2 pixels considéré (Fig.5.42.).

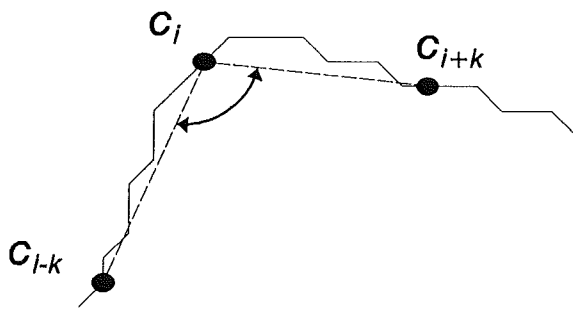


Fig.5.42. Mode d'estimation de la courbure d'un contour en 8_connexité selon Rosenfeld-Johnston.

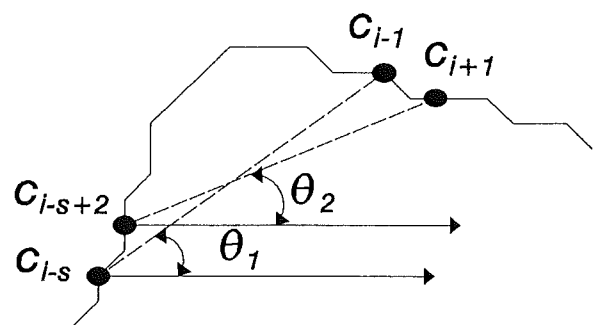


Fig.5.43. Mode d'estimation de la courbure en 8_connexité selon Freeman-Davis.

$$\vec{a}_i = \overline{c_{i-k}c_i}$$

$$\vec{b}_i = \overline{c_i c_{i+k}}$$

et

$$\cos_i = \frac{\vec{a}_i \cdot \vec{b}_i}{|\vec{a}_i| \cdot |\vec{b}_i|}$$

L'idée de Freeman & Davis[1977], dont il existe un grand nombre de variantes est d'accumuler sur s points consécutifs les différences angulaires entre les segments joignant $c_{i+1}c_{i-s+2}$ et $c_{i-1}c_{i-s}$ (Fig.5.43.)

Tous les travaux ultérieurs ont tenté de définir des procédures de détection des points dominants qui s'affranchissent de la définition arbitraire de supports pour le calcul de la courbure ou la recherche des extrema de cette courbure. Une procédure pour laquelle le support *s'adapterait* automatiquement à la variabilité du signal (contour) serait à la fois plus sensible et plus robuste.

Asada & Brady[1986] estiment la courbure selon une procédure similaire à celle de Freeman-Davis, mais effectuent une recherche des extrema à différentes échelles et ne retiennent comme significatifs que les points qui résistent aux changements d'échelles. Cette idée de travailler dans un *espace d'homothéties* (scale-space) apporte une solution au problème, mais le balayage systématique des échelles est une méthode très lourde. Teh & Chin[1989] ont adopté une approche dont la démarche s'apparente à l'idée de "scale-space", mais l'avantage de leur méthode est qu'elle aboutit à un auto-ajustement du support de calcul de la courbure. L'idée est qu'un point dominant a son propre angle de vision de la courbe qui est délimité par le support qui doit lui être associé. Teh & Chin[1989] ont traduit cela par le fait que le point dominant est situé à la plus grande distance du segment joignant les extrémités du support. Le calcul est par conséquent identique à celui de la Fig.5.39., mais il est fait pour un ensemble de supports de dimensions $2k$. A chaque pas, k est incrémenté d'une unité tant que les conditions suivantes ne sont pas satisfaites (Fig.5.44.) :

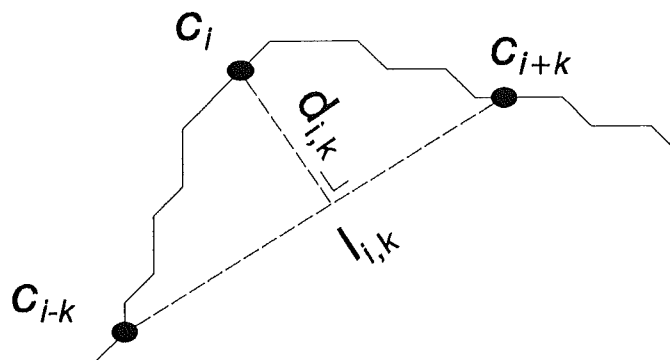


Fig.5.44. Principe d'identification des points dominants selon Teh-Chin[1989].

soit $l_{i,k} \geq l_{i,k+1}$

$$\frac{d_{i,k}}{l_{i,k}} \geq \frac{d_{i,k+1}}{l_{i,k+1}} \quad \text{pour } d_{i,k} > 0$$

$$\frac{d_{i,k}}{l_{i,k}} \leq \frac{d_{i,k+1}}{l_{i,k+1}} \quad \text{pour } d_{i,k} < 0$$

Une fois le support relatif à c_i fixé, l'estimation de la courbure et la recherche des maxima locaux est faite selon la méthode classique. La Fig.5.45. montre la détection de points dominants par différentes méthodes.

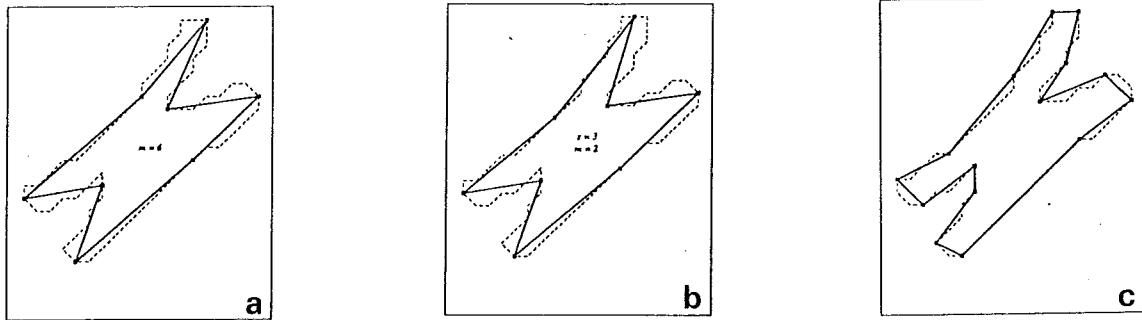


Fig.5.45. Comparaison de la détection des points dominants sur une forme simple selon les méthodes de Rosenfeld-Johnston (a), Freeman-Davis (b) et Teh-Chin (c).

5.5.3 Transformées de Fourier.

5.5.3.1 Fondements théoriques.

L'idée de décomposer un signal en une combinaison de segments de géométrie plus simple n'est pas propre aux techniques de reconnaissance de formes, elle se retrouve quoique sous une nature différente dans l'analyse spectrale d'un signal. Fourier a démontré que tout signal de nature périodique pouvait être décrit comme une combinaison linéaire d'un signal de fréquence fondamentale et de ses n harmoniques, ce qui s'écrit :

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \sin(n\pi x) + b_n \cos(n\pi x))$$

où a_n et b_n sont les coefficients de la $n^{\text{ème}}$ harmonique

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(n\pi x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(n\pi x) dx$$

En notations polaires, la transformée de Fourier peut encore s'écrire :

$$r(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos n\theta - \phi_n)$$

où A_n est l'amplitude de la $n^{\text{ème}}$ harmonique

ϕ_n est l'angle de phase " " "

$$A_0 = \alpha_0$$

$$A_n = \sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{\alpha_n}\right)$$

L'application de la transformée de Fourier à l'analyse d'un contour fermé est apparue à la fin des années soixante [Ehrlich & Weinberg, 1970] en utilisant l'astuce que tout signal qui se referme sur lui-même peut être considéré comme périodique en se répétant selon une période de 2π (Fig. 5.47.). Le déroulement correct du profil d'une forme nécessite cependant d'adopter des conventions.

5.5.3.2 Le développement du "signal contour".

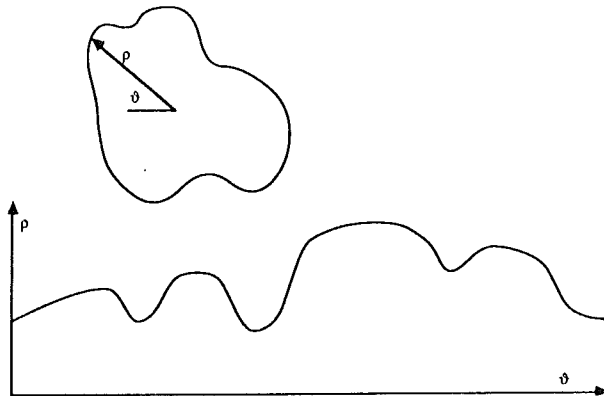


Fig. 5.46. Déroulement du contour en un signal $r(\theta)$.

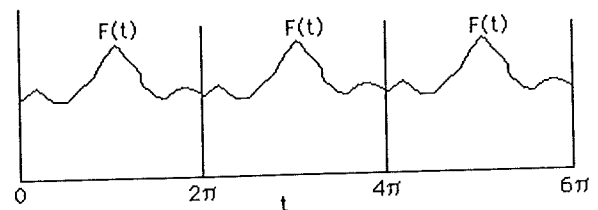


Fig. 5.47. Un contour fermé peut être considéré comme un signal de période 2π

La technique la plus naturelle pour obtenir une description fonctionnelle du contour est de le développer en coordonnées polaires. Il devient alors un signal $r(\theta)$ comme illustré à la figure 5.46. pour $\theta \in [0, 2\pi[$. Pour que le signal $r(\theta)$ soit identique aux rotations et translations près, il faudrait idéalement que l'origine des coordonnées ainsi que le point correspondant à $\theta = 0$ soient définis d'après une propriété inhérente à l'objet. La solution la plus fréquemment adoptée pour déterminer l'origine est d'utiliser le centre de gravité. De l'avis de la plupart des auteurs, cette solution a en outre l'avantage d'être *plaisante à l'esprit* [Clark, 1981]. Il n'y a pourtant aucune raison de penser que ce choix est plus judicieux qu'un autre, à moins d'utiliser une argumentation physique précise. Qu'à cela ne tienne le choix arbitraire d'une origine ne semble déranger personne!

En revanche, la nécessité de fixer $\theta = 0$ est souvent citée comme un des inconvénients majeurs de la méthode. Si $\theta = 0$ est fixé aléatoirement, les coefficients a_n et b_n seront différents pour deux contours identiques. Dans le cas du formalisme polaire de la transformée de Fourier, seuls les angles de phase ϕ_n seront tributaires de θ . La figure 5.48. illustre trois figures identiques du point de vue des amplitudes et ne différant que par les angles de phase. Beaucoup d'auteurs pour s'affranchir du problème lié à $\theta = 0$ se contentent des amplitudes des harmoniques [Meloy, 1977], d'autres ont tenté d'identifier le point du contour correspondant à $\theta = 0$ par des méthodes mathématiques [Lohmann, 1983; Full & Ehrlich, 1986], mais la robustesse de telles méthodes n'est pas vérifiée. Luerkens [1991] utilise l'orientation de l'axe principal d'inertie dans ses calculs de coefficients de symétrie.

Cette méthode, si elle paraît logique ne présente pas une robustesse absolue. Face à ce problème, Davies & Hawkins[1979] ont utilisé une méthode originale qui construit un nouveau coefficient $C_{m,n}$ exprimant l'orientation relative de deux harmoniques m et n :

$$C_{m,n} = \cos \left\{ \frac{m\phi_n - n\phi_m}{\text{PGCD}(m,n)} \right\}$$

PGCD : Plus Grand Commun Diviseur.

L'idée est certes intéressante, mais il est irréaliste de tenter de manipuler les $\frac{n(n-1)}{2}$ nouveaux coefficients ainsi obtenus alors que la seule gestion des amplitudes va déjà s'avérer rédhibitoire.

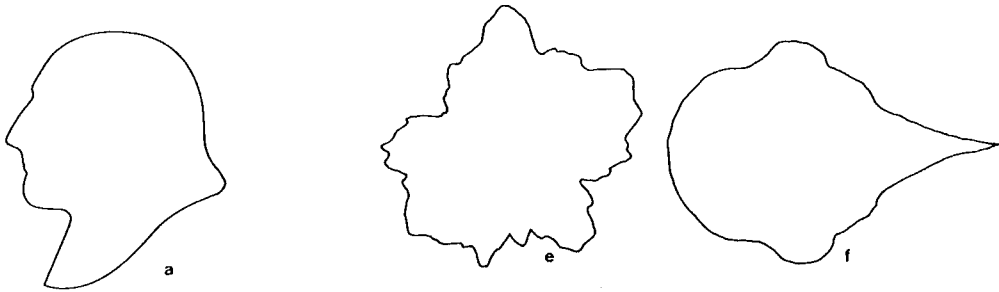


Fig. 5.48. a) Profil originel. e) Profil reconstruit avec des angles de phase aléatoires. f) id. en mettant tous les angles de phase à zero. [Flook,1987]

En plus d'être sensible à l'orientation et à l'origine des axes, le développement du signal en $r(\theta)$ d'une particule quelconque risque fréquemment de conduire à plusieurs valeurs de r pour une même valeur de θ . La figure 5.49. illustre le cas pour une particule présentant une concavité marquée. Plusieurs alternatives ont été imaginées :

Flook[1981] conserve la fonction $r(\theta)$ en ignorant les valeurs inférieures de r ou dans une autre variante en fixant un r intermédiaire. Il signale que si cela empêche une reconstruction correcte, cela n'affecte pas trop les coefficients de Fourier (N.B. le jugement est qualitatif d'après les figures reconstruites). Il est raisonnable de penser qu'une telle option n'est pas réaliste pour des particules trop tortueuses. Zahn & Roskies[1972] ont adopté une méthode fréquemment utilisée par la suite qui consiste à calculer la variation angulaire totale en fonction de la longueur d'arc parcourue sur le contour. Cela revient à représenter l'angle entre la tangente au point de contour choisi comme origine et la tangente au point considéré en fonction de la longueur parcourue en suivant le contour. La figure 5.50. représente la nouvelle fonction $\theta^*(s)$. L'idée de coordonnée curviligne peut aussi être

exploitée pour une représentation du type $r(s)$ ou du type $\kappa(s)$. Cette dernière reprend l'idée de Freeman & Davis[1977] d'estimer la courbure par la dérivée de la fonction $\theta^*(s)$. Il n'existe à notre connaissance pratiquement aucune étude comparative sur les analyses de Fourier appliquées à différents modes de développement du contour [Fong et al.1979].

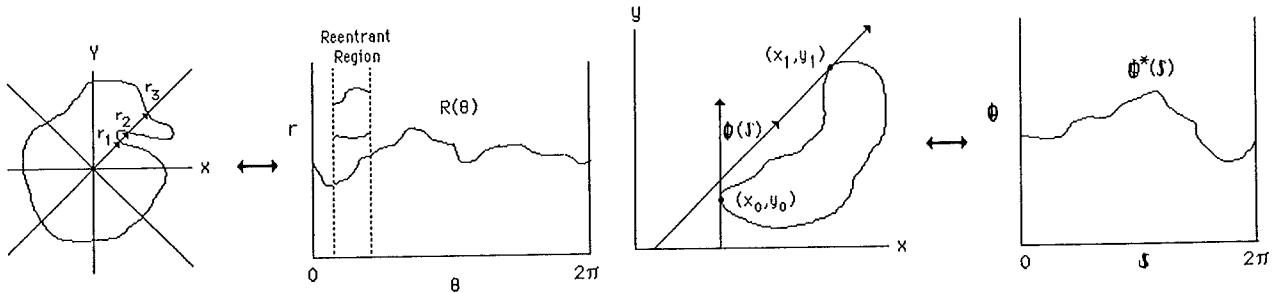


Fig.5.49. Illustration de la non singularité de $r(\theta)$ pour un contour rentrant.

Fig.5.50. Construction de la fonction $\theta^*(s)$

5.5.3.3 Interprétation et analyse de la Transformée de Fourier.

Nonobstant la discussion non close sur le choix de la méthode de développement du contour, beaucoup de publications sont consacrées à discuter la signification des différentes harmoniques et à construire des paramètres morphométriques dérivés. La figure 5.51. illustre l'allure des trois premières harmoniques. En couplant cette image avec la constatation que pour la majorité des formes naturelles A_n décroît avec n , il paraît assez évident que les harmoniques d'ordre le plus élevé sont reliées à une notion de *rugosité* tandis que celles d'ordre le plus faible (et d'amplitude la plus forte) sont liées à la morphologie globale. Pour conforter cette intuition pratiquement tous les auteurs se rassurent en montrant des formes régénérées pour un nombre d'harmoniques différentes (Fig.5.52.). Tous s'accordent à dire que le fait de *seuiller* les harmoniques inférieures revient à appliquer une "espèce de filtre" passe-bas. Mais, il n'est pas possible de mettre en équation l'effet local d'une telle opération.

Pour comparer les résultats d'une transformée de Fourier, il y a deux solutions, soit utiliser des procédures statistiques multivariées [Reti & Czinege,1989; Davies & Hawkins,1979] considérant les coefficients a_n et b_n de chaque objet comme autant de variables, soit construire des grandeurs dérivées de ces coefficients [Meloy,1977; Beddow et al.1977]. Dans les deux hypothèses, le problème se pose de savoir jusqu'à quelle valeur de n il faut prendre les coefficients en considération. Aucun auteur n'a discuté ce problème précis avec rigueur. Lorsqu'il y a une proposition, elle est faite de manière totalement subjective

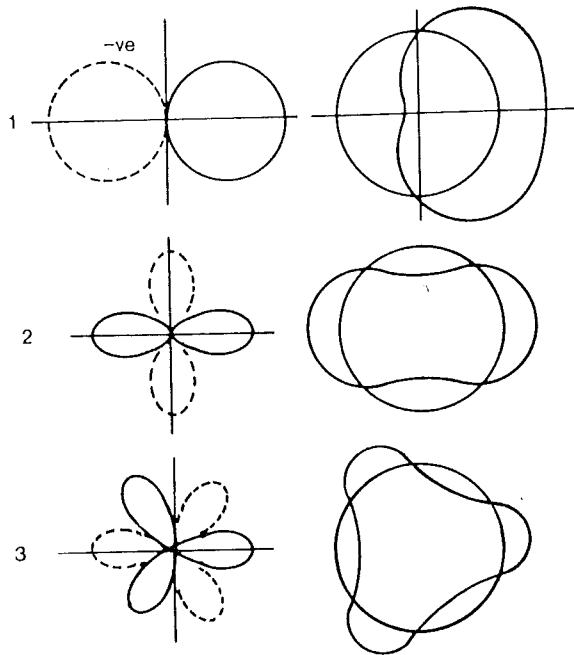


Fig.5.51. Illustration des 3 premières harmoniques de la série de Fourier, seules et avec le terme A_0 .

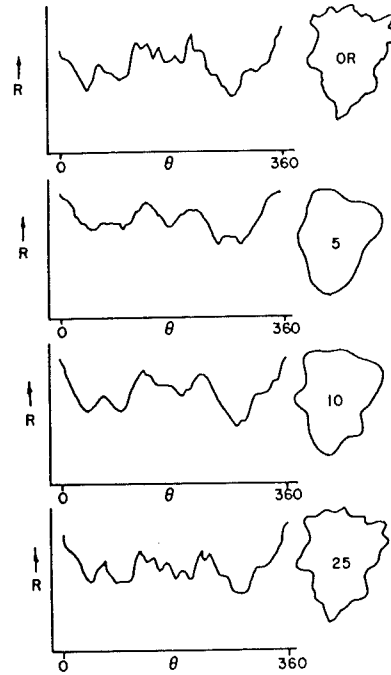


Fig.5.52. Contour original et contours reconstruits d'après les 5, 10 et 25 premières harmoniques.

et dans un contexte restreint qui empêche toute généralisation [Reti & Czinege,1989 limitent ainsi leurs calculs à $n=32$]. Ce qui est certain, c'est que n dépend du nombre de points discrétisés (généralement $2n$) et surtout de la morphologie. Toute aspérité angulaire provoque **en théorie** une non-convergence de la série de Fourier. Les procédures statistiques appliquées à des grains de sables font apparaître que la capacité de discrimination porte sur les harmoniques les plus faibles ($n \leq 10$) [Ehrlich & Weinberg,1970]. Les auteurs ne spécifient pas cependant le nombre de points du contour.

L'idée de dériver des paramètres significatifs au départ des coefficients de Fourier est apparue dès le départ [Ehrlich & Weinberg,1970] par l'utilisation de sommes partielles sur les amplitudes :

$$P_{jk} = \sqrt{\sum_{n=j}^k \frac{A_n}{2}}$$

Cette manière d'exprimer une rugosité a été utilisée par plusieurs auteurs en fixant arbitrairement j et k aux multiples de 10 [Sergeev et al.,1984]. Elle n'a pas fait l'objet à

notre connaissance d'une analyse critique! Beddow et al.[1977] définissent trois sommes partielles (sans en fixer les limites j et k!) en utilisant les termes de *lumpiness*, *roughness* et *texture*. Ils y ajoutent un terme d'*asymmetry*:

$$As = \sum_{n_i} |\phi_n|$$

où n_i : sont les harmoniques de grande(?) amplitude.

Ils ont aussi découvert une *élongation* identique à $\frac{F_\theta}{F_{\theta,90}}$ qui s'écrit :

$$El_{CAR} = \frac{2A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\frac{n}{2}} \alpha_{2n}}{2A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^n \cdot \alpha_{2n}}$$

Luerkens[1991] en développant sa "théorie de la morphologie" a cherché à définir des paramètres qui sont indépendants de la rotation. Il a recalculé le diamètre du disque équivalent :

$$D_o = 2 \cdot \sqrt{A_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}$$

et propose des facteurs de formes

$$L_{2,n} = 2 \frac{A_n}{D_o}$$

et

$$L_{3,n} = \phi_n - n\theta$$

où θ est l'orientation de l'axe principal d'inertie.

au départ desquels il calcule :

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_{2,n}^2$$

pour la forme globale (shape).

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot L_{2,n}^2$$

pour la rugosité.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot L_{2,n}^2$$

pour la microrugosité

il obtient même des indices de symétrie :

$$C_m = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} L_{2,m,n}^2}{\sum_{n=1}^{\infty} L_{2,n}^2}$$

pour la rotation.

$$\sigma_j = \frac{\sum L_{2,n}^2 \cdot \cos^2\left(L_{3,n} - n \cdot \frac{2\pi}{j}\right)}{\sum L_{2,n}^2}$$

pour la réflexion.

Ainsi, une valeur de $C_3=1$ indique que l'objet a une symétrie PARFAITE selon 3 axes (triangle). La méthode est illustrée sur des figures géométriques simples (Fig.5.53.).

Une proposition de caractérisation d'une toute autre nature avait été faite par Meloy[1977] qui, constatant la décroissance linéaire des logarithmes des amplitudes les plus significatives avait défini comme signature de la particule la droite de régression associée (Fig.5.54.):

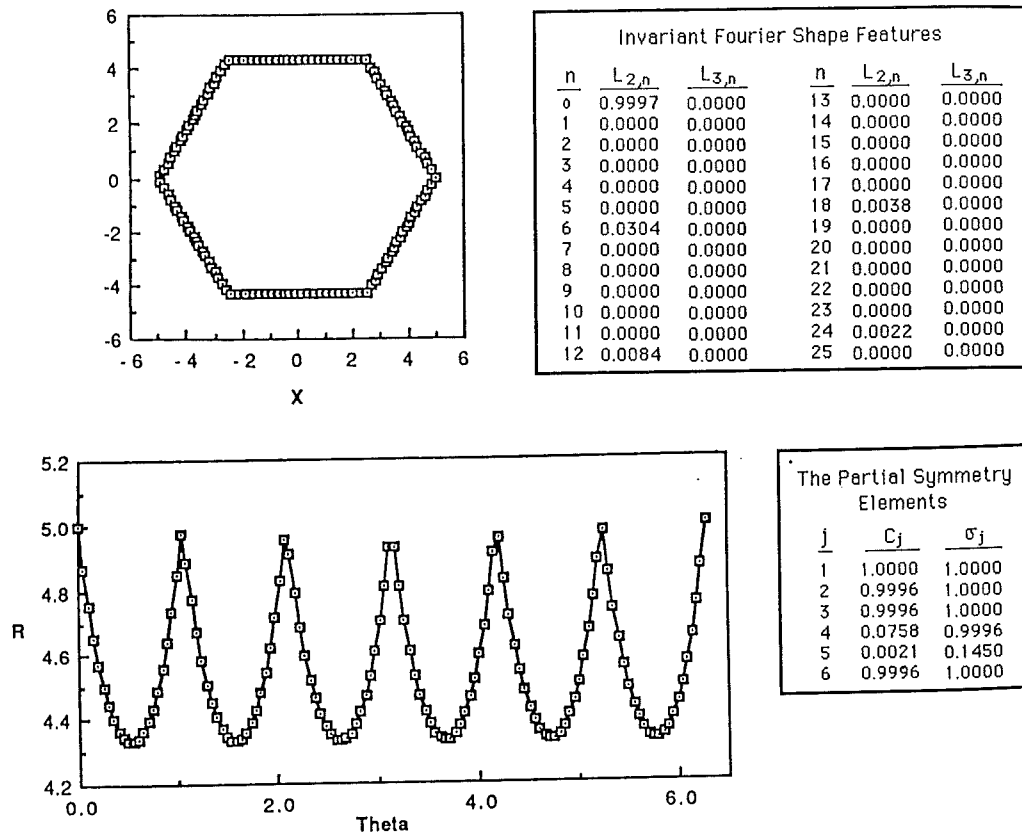


Fig. 5.53. Analyse de la symétrie d'un hexagone [Luerkens,1991]

$$A_n = A_y \left(\frac{1}{n} \right)^S$$

avec A_y : l'intercept de la régression.
 S : la pente de la régression.

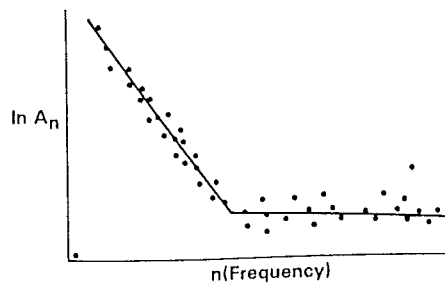


Fig.5.54. Diagramme semi-logarithmique représentant la décroissance des amplitudes de Fourier en fonction de la fréquence. La régression horizontale est associée au bruitage du contour.[Meloy,1977]

5.5.3.4 Analyse critique de la Transformée de Fourier.

Il y a incontestablement un malaise dans l'utilisation de la transformée de Fourier en analyse morphométrique. Nous pourrions en prendre pour preuve que les auteurs les plus confrontés à des applications concrètes ont cessé au début des années '80 d'approfondir la transformée de Fourier pour s'intéresser à d'autres méthodes [Flook,1978; Ehrlich et al.,1984]. Il est possible de comprendre les raisons de cette désaffection à la lumière des critères énoncés ci-avant.

5.5.3.4.1 Indépendance.

La transformée de Fourier assure la décomposition du signal en fonctions orthogonales. Elle fait clairement apparaître un premier coefficient A_0 qui est un paramètre de taille et isole n autres harmoniques qui expriment la morphologie de la particule. De ce point de vue, la décomposition spectrale du contour est une méthode idéale.

5.5.3.4.2 Sensibilité.

Un argument qui a souvent exercé sa fascination en faveur de la transformée de Fourier est la possibilité de reconstruction complète de la forme au départ des coefficients. La qualité de reconstruction d'un profil ou d'une image est un critère fondamental dans le contexte du codage de l'information, mais dans l'optique de l'analyse morphométrique, la reconstruction complète indique seulement que les coefficients de Fourier contiennent autant d'information que l'objet initial. Autrement dit la transformée de Fourier n'a pas opéré d'analyse et tout le travail morphométrique c'est-à-dire de perte sélective de l'information reste à faire. L'abandon des harmoniques d'ordre supérieur est en ce sens une technique simple pour fixer la sensibilité de l'analyse tout en s'affranchissant du bruit accumulé dans les hautes fréquences.

5.5.3.4.3 Robustesse.

Les techniques imaginées pour le développement du signal situent définitivement les limitations de l'analyse de Fourier appliquée à des contours fermés. Tout d'abord, il est permis de s'interroger sur la signification d'une fonction développée relativement à tel ou tel point pris comme origine des axes. Le choix du centre de gravité n'est jamais discuté par les auteurs, si ce n'est du point de vue de ses qualités strictement mathématiques. Mais, le problème majeur qui surgit quelque soit la méthode de développement utilisée est la dépendance vis-à-vis de la rotation. Pour repérer un point particulier du contour qui servira à initier le développement, il faut au préalable reconnaître la forme selon une procédure robuste! Un paradoxe surgit alors qui veut que l'analyse de Fourier soit précédée d'une autre procédure d'analyse de forme! Luerkens[1991] en considérant les axes principaux d'inertie a fait un choix simple mais pas nécessairement robuste. **Tous** les articles qui abordent l'analyse pratique des morphologies dans des matériaux granulaires réels, s'empressent d'oublier les angles de phase. Ce faisant, ils ignorent résolument des différences morphologiques extrêmement significatives pour les particules soumises à l'abrasion (Fig.5.55.).

Nous n'avons pas trouvé dans la littérature une étude systématique sur la dépendance de l'analyse de Fourier vis-à-vis de la rotation ou de l'homothétie. Très peu de choses ont été dites sur l'influence des méthodes de développement du contour.

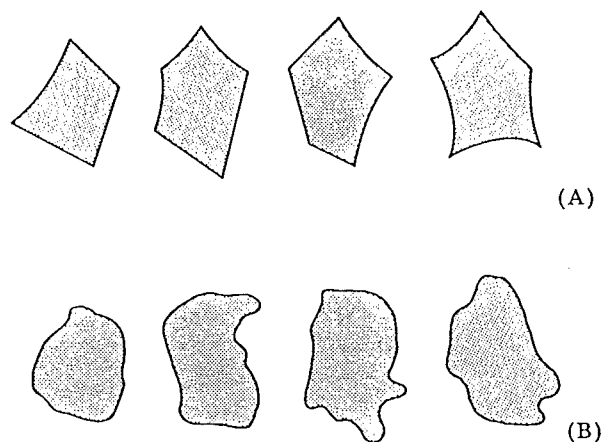


Fig.5.55. Deux familles de particules (A) et (B) ne différant que par les angles de phase [d'après Meloy,1977]. L'ignorance de cette information empêche toute considération sur l'angularité.

5.5.3.4.4 Accessibilité.

Le temps de calcul de la F.F.T. d'un signal de 500 points peut être considéré comme raisonnable, surtout si on limite n à quelques dizaines de coefficients. Théoriquement, la décomposition en sinus et cosinus n'est pas nécessairement optimale pour toute forme, il

est démontré qu'elle l'est pour les formes dites "stationnaires". Certains auteurs ont essayé des transformées de Walsh, indiquant qu'elles étaient plus rapides et plus aisées à interpréter [Meloy,1977], mais rien ne justifie réellement ce choix.

Plutôt que de parler du temps de calcul relatif à la F.F.T., il serait plus judicieux de considérer le temps nécessaire à l'analyse morphométrique complète ce qui inclut le temps nécessaire aux analyses statistiques multivariées pour grouper N grains de sable au départ de $2n$ variables...

5.5.3.4.5 Spécificité.

En faisant abstraction du problème de robustesse, il reste un problème majeur auquel est confronté l'analyse par série de Fourier, c'est la spécificité des paramètres qui peuvent en être dérivés. Mis à part A_0 qui exprime le rayon moyen, il est difficile de se faire une idée sur la signification associée aux différentes harmoniques. Bien sûr, n est directement relié à la présence de détails le long du contour, mais en l'absence d'informations sur l'angle de phase, cela a-t'il un sens de parler de rugosité. Les grains de la figure 5.55. ont-ils tous la même rugosité, la même angularité?

Les paramètres de symétrie développés par Luerkens[1991] sont assez théoriques et fastidieux. Ils sont certainement de peu d'utilité pratique sur l'analyse de morphologies "aléatoires" comme celles rencontrées dans les poudres. Les deux seules illustrations développées par Luerkens concernent la morphologie des états des Etats-Unis et celle des quatre principales îles du Japon. Cela a-t'il un sens?

Ceci nous amène à constater que les applications des transformées de Fourier sont en général peu convaincantes. Le plus souvent (Beddow et al.,1977; Luerkens,1991] les auteurs ont cherché à différencier des poudres atomisées et broyées, c'est-à-dire des particules très lisses et isotropes de particules rugueuses et plus irrégulières. Il est vraisemblable dans ces cas que des analyses plus simples auraient pu suffire. Les auteurs qui partent du principe que la signification physique intuitive des paramètres n'a pas d'importance ont utilisé des procédures statistiques multivariées sur les amplitudes pour classer des formes. La figure 5.57. montre le dendrogramme relatif à une trentaine de formes théoriques choisies arbitrairement par Reti & Czinege[1989] (Fig. 5.56.). Ces auteurs estiment que par le biais de leur méthode s'effectue un regroupement des objets *visuellement similaires*. Nous pensons sincèrement qu'en dehors de tout contexte cette notion de *similarité visuelle* n'a aucune base objective. En revanche, il est certain qu'il existe bon nombre de problèmes pour lesquels les formes n°14 et n°15 sont très semblables, or le dendrogramme les oppose nettement.

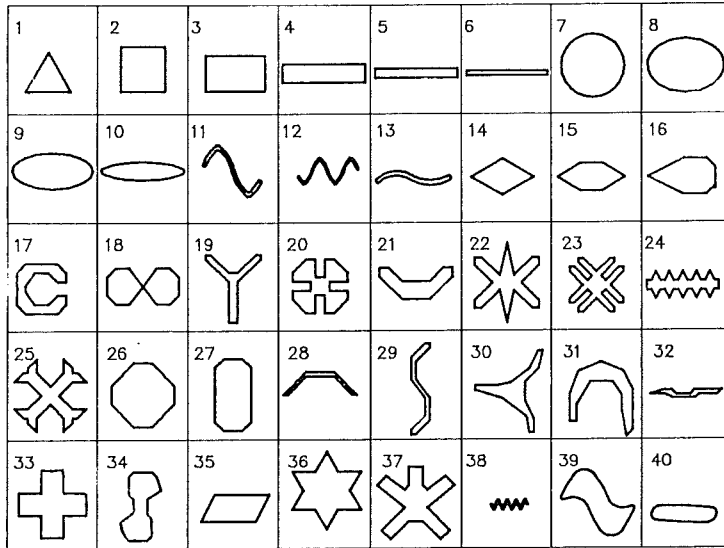


Fig.5.56. Ensemble d'objets choisis arbitrairement pour tester l'analyse par série de Fourier. [Reti & Czinege, 1989]

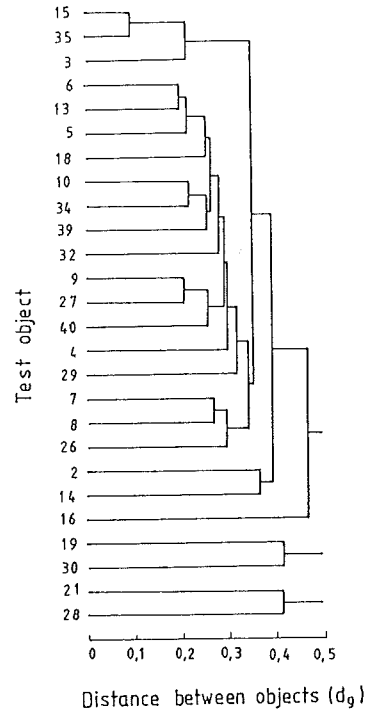


Fig.5.57. Dendrogramme construit au départ des 32 premiers coefficients de Fourier pour chaque forme de la fig.5.56. [Reti & Czinege, 1989].

5.5.4 Analyse fractale.

5.5.4.1 Méthodes de mesure d'une dimension non-entière.

Méconnue il y a une dizaine d'années, la théorie des fractales est actuellement fort en vogue. Elle a été développée sur le plan théorique par Mandelbrot[1982] et popularisée par beaucoup d'images fascinantes de paysages fractals. En réalité, son origine remonte à des travaux théoriques beaucoup plus anciens tels que les fameuses courbes de Von Koch[1904] ou la définition d'une dimension de recouvrement par Minkowski[1903]. Ces fondements historiques expliquent qu'il y a dans la notion de fractale deux notions bien distinctes qui sont trop souvent confondues : -d'une part l'idée d'**autohomothétie** et d'autre part celle de **dimension non-entière**. Il est important de concevoir qu'un ensemble peut être autohomothétique tout en ayant une dimension entière et surtout qu'il peut avoir une dimension non-entière sans être nécessairement autohomothétique.

La fascination qu'exercent les fractales dans le monde scientifique provient plus que probablement du fait que des images d'apparence très complexe sont générées par une loi géométrique extrêmement simple. Il est possible ainsi de concevoir un très grand nombre de modèles fractals autohomothétiques en utilisant des générateurs de tous types et en variant l'échelle (Fig.5.58.). Il découle assez naturellement de cette remarque que la caractérisation d'un objet autohomothétique est exprimée par la variation constante du périmètre le long de l'échelle d'homothétie. Cette variation est classiquement exprimée sous forme d'un paramètre appelé **dimension fractale** (comprise entre $n-1$ et n dans \mathbb{R}^n).

La dimension de Minkowski a été introduite pour caractériser des surfaces (périmètres) au départ de la seule mesure accessible de volume (aire) . Ainsi, il est possible de définir un périmètre inférieur U_i et un périmètre supérieur U_s :

$$U_i^{(X, B)} = \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{A(\delta X \oplus \lambda B)}{2\lambda}$$

$$\lambda \rightarrow 0^+$$

$$U_s^{(X, B)} = \limsup_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{A(\delta X \oplus \lambda B)}{2\lambda}$$

où $\delta X \oplus \lambda B$ est le ruban construit en plaçant un disque de rayon λ en tout point de la frontière δX .
 2λ est la largeur du ruban.

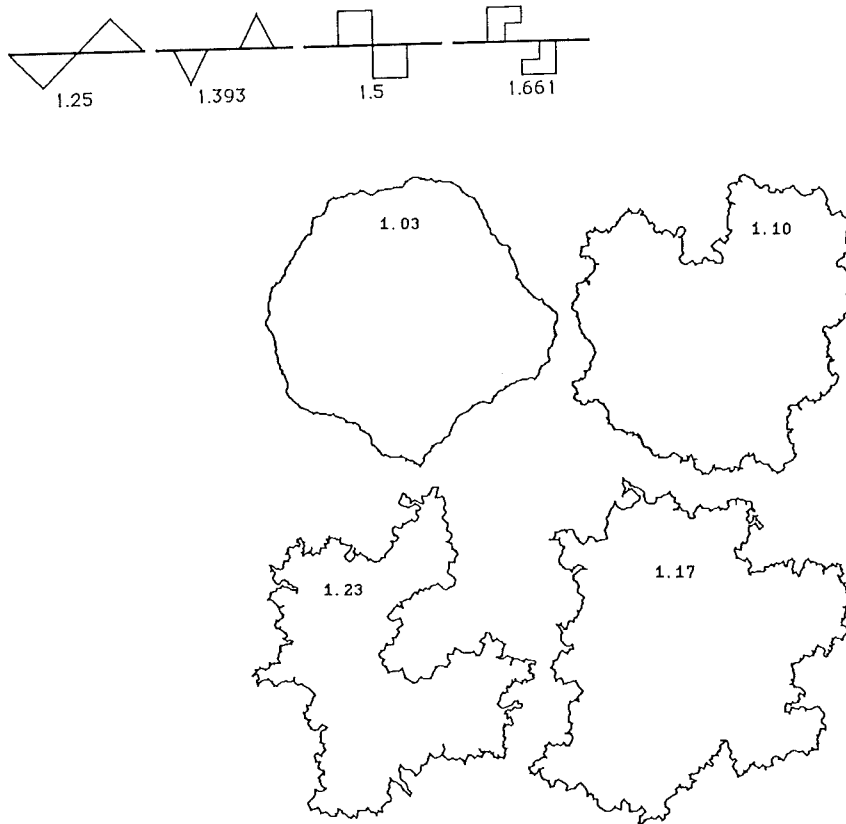


Fig. 5.58. Générateurs géométriques simples correspondant à différentes dimensions fractales. Modèles de grains de dimensions fractales 1,03 1,10 1,23 et 1,17 [Russ,1990].

Les deux périmètres coïncident le plus souvent, mais il se peut aussi qu'ils soient infinis. Dans un tel cas, Minkowski a défini une *dimension de recouvrement* qui se calcule en pratique par la relation :

$$\log\left(\frac{A(\delta X \oplus \lambda B)}{2\lambda}\right) \rightarrow (1 - \Delta_M) \log \lambda + K$$

avec K : constante.

Δ_M : dimension de recouvrement de Minkowski.

Pour des contours irréguliers Δ_M vaudra 1, tandis que pour des objets très irréguliers Δ_M correspondra à une dimension non-entière $1 < \Delta_M < 2$.

La mise en oeuvre du calcul d'une dimension fractale selon la méthode de Minkowski est immédiate sur un analyseur d'images [Flook,1978]. Les aires des rubans obtenus avec des λ croissants sont enregistrées et divisées par la largeur. Ces données sont reportées

sur un diagramme $\log(U) - \log(\lambda)$ pour obtenir la pente (β) de la droite de régression et en déduire $\Delta_M = 1 - \beta$. La figure 5.59. illustre les résultats obtenus sur un grain de rutile (placer) et sur un grain de magnétite (broyé). La figure 5.60. illustre une paillette d'oxyde de cuivre ($\Delta_M = 1,26$) et un grain d'or ($\Delta_M = 1,032$)

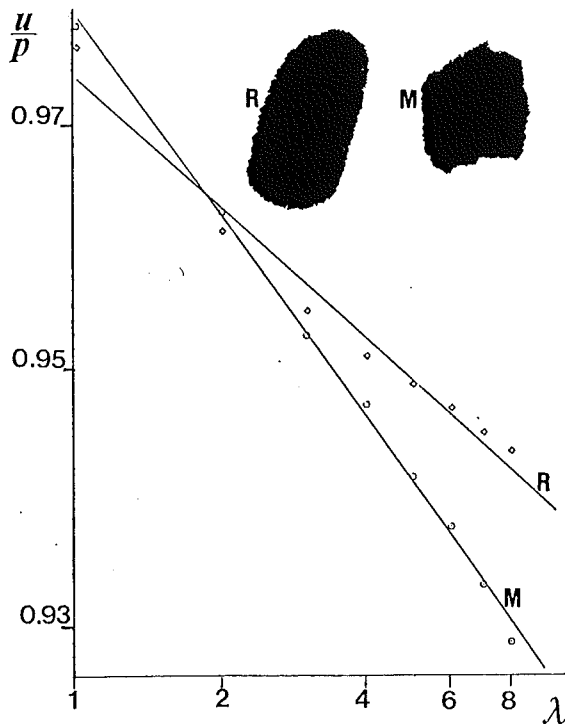


Fig.5.59. Analyse fractale par dilations successives du contour pour un grain de rutile (R) et de magnétite (M). Le diagramme est bi-logarithmique (le périmètre après dilatation (u) est donné représenté relativement au périmètre initial (p))

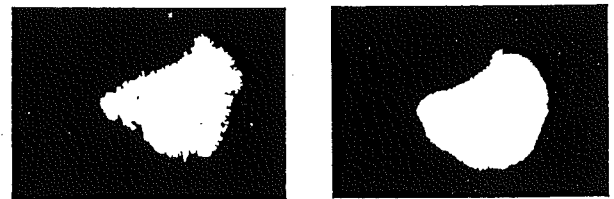
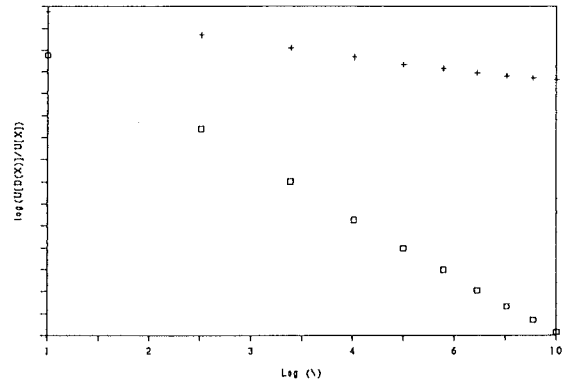


Fig.5.60. Analyse fractale d'une paillette de cuprite (carré) (artificielle) et d'un grain d'or (croix).

Une autre méthode couramment utilisée pour calculer une dimension fractale est celle proposée par Richardson[1961] dans sa célèbre étude des côtes anglaises. Elle consiste à réaliser une approximation polygonale du contour (Fig.5.61.) en prélevant des points situés à équidistance (λ). La dimension fractale de Richardson (pas nécessairement identique à Δ_M) s'obtient en reportant le périmètre des polygones successifs en fonction de la longueur de leurs côtés λ sur un diagramme log-log. La mise en oeuvre manuelle d'une telle méthode est immédiate, elle est beaucoup plus délicate sur un analyseur d'images où il n'est pas possible de définir des longueurs strictement constantes coïncidant avec des pixels de la trame. Rigaut[1984] utilise des pas moyens, tandis que Schwarz & Exner[1980] adoptent la convention très simplifiée de prélever un pixel sur λ le long du contour. Un

second problème qui surgit est lié au fait que pour des pas suffisamment grands, le contour polygonal ne se referme pas correctement ce qui conduit à une erreur d'estimation important sur le périmètre correspondant aux λ les plus élevés.

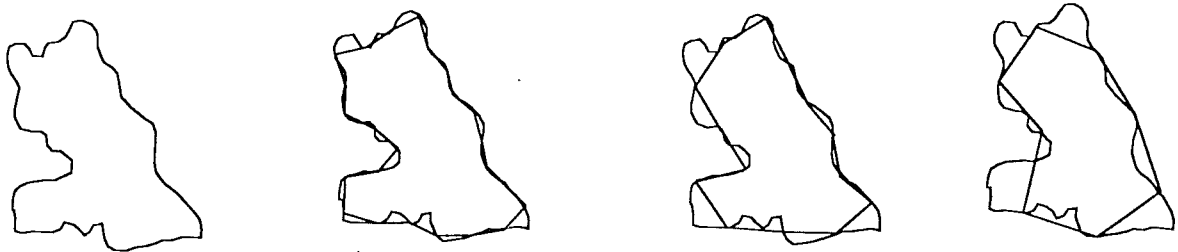


Fig.5.61. Méthode de Richardson pour le calcul du périmètre en analyse fractale.

Quelque soit la méthode d'analyse de la dimension non-entière utilisée, l'alignement des mesures sur le diagramme log-log n'est garanti que pour une fourchette de résolutions assez étroite. Ceci a amené l'idée de caractériser une *transition continue de dimensions fractales* [Rigaut,1984] ou au moins une succession de dimensions fractales. A notre connaissance, il n'existe pas de travaux qui ont réellement investigué l'influence des conditions de digitalisation sur le bon alignement des mesures. En particulier, le rôle de l'homothétie et de l'orientation. Or, il est évident que le calcul d'une dimension non-entière expérimentale est affecté tout autant par l'erreur d'échantillonnage que par le caractère intrinsèquement irrégulier du contour.

5.5.4.2 Analyse critique des méthodes Fractales.

Nous avons principalement utilisé l'analyse de la dimension de Minkowski comme méthode d'analyse fractale. L'analyse critique qui suit porte donc sur des résultats enregistrés avec cette méthode. Il apparaît qu'aucune autre méthode dite fractale n'est capable de remettre en cause les problèmes soulevés par la méthode de Minkowski. Le cas particulier des contours fermés engendre des problèmes spécifiques qui ne se retrouvent pas en fractographie/tribologie. Mais, que ce soit sur des profils [Dubuc et al.,1989] ou sur des surfaces [Aguilar et al.,1992] l'intérêt de la caractérisation par une dimension fractale reste encore tout théorique ! Il le restera tant que ne se développeront pas des études comparatives entre les méthodes de caractérisation.

5.5.4.2.1 Indépendance.

L'indépendance de la dimension fractale et de la taille est assurée par la théorie. Par définition, la méthode analyse l'évolution d'un périmètre pour une aire qui reste constante. L'irrégularité du contour d'un objet parfaitement autohomothétique est totalement indépendante de sa taille.

5.5.4.2.2 Sensibilité.

Une grande partie du bruitage du contour sur une trame discrète s'exprime à l'échelle du pixel. La première mesure de $U^{(X,B)}$ élimine cette information en passant immédiatement à un ruban de largeur 2λ . Même si il subsiste encore une influence du bruit à ce niveau, cela n'affectera qu'un seul point sur le diagramme log-log et l'impact sur la régression sera extrêmement réduit. Cette bonne résistance au bruit se traduit malheureusement par un manque de sensibilité dans un grand nombre d'applications. Au paragraphe 5.6.5. nous appliquerons l'analyse fractale à la différenciation de deux concentrés. La supériorité de la morphologie mathématique pour une même échelle de représentation apparaîtra alors de manière indiscutable. Ce manque de sensibilité de l'analyse fractale a été dénoncé par d'autres auteurs [Exner,1987; Flook,1987]. Ce dernier soulignant qu'il s'agit d'une méthode mieux adaptée à l'analyse de formes extrêmement tortueuses comme des flocculats de carbone. Pour les matériaux granulaires classiques (matières minérales broyées), la dimension de Minkowski dépasse rarement 1,2 ce qui compte tenu de l'erreur engendrée par les conditions de discrétisation ne permet de distinguer que **deux ou trois classes** d'objets!

5.5.4.2.3 Robustesse.

Les problèmes de sensibilité qui hypothèquent l'utilisation de l'analyse fractale sont directement tributaires du manque de robustesse des méthodes utilisées. La définition théorique de Minkowski suppose de calculer une limite pour des disques infinitésimaux ($\lambda \rightarrow 0$), or pratiquement nous sommes arrêtés par une valeur inférieure de λ qui est liée au pas d'échantillonnage de la trame. D'autre part, la procédure de Minkowski qui fournit un ruban n'a plus de sens dès lors que ce ruban se referme sur lui-même (Fig.5.62.) et il n'est pas étonnant dans ce cas que la régression sur le diagramme log-log s'écarte totalement du modèle linéaire. La fermeture du ruban est atteinte pour une valeur de λ qui dépend du grossissement adopté mais aussi de la morphologie globale de la particule. En pratique, et sans qu'il soit possible d'édicter une règle générale, il est prudent de limiter l'analyse bien en deçà du demi-rayon du disque maxima inscrit ($\lambda < \frac{\lambda_5}{2}$). Cela suppose d'adopter un grossissement suffisamment important pour obtenir assez de points pour la régression. En utilisant classiquement une aire de +/- 5.000 pixels par grain, la régression devra être faite sur base d'une dizaine de pas de dilatation.

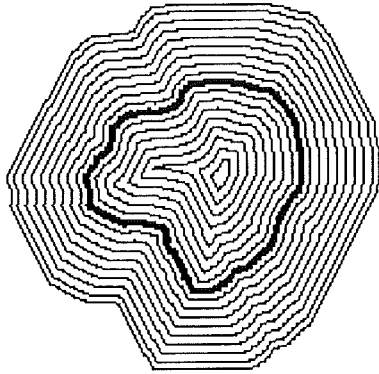


Fig.5.62. Dilatés successifs d'un contour jusqu'à sa fermeture complète.

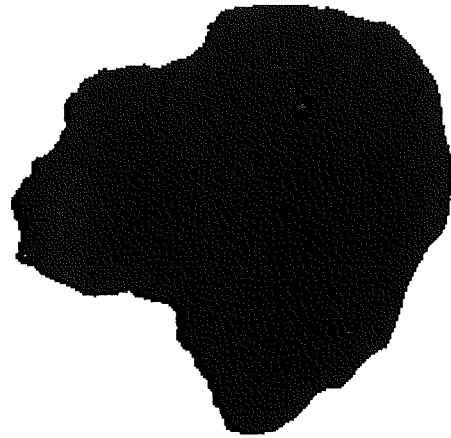


Fig.5.63. Forme test utilisée pour les analyses de rugosité en fonction de l'orientation et du grossissement.

La forme de la figure 5.63. a été digitalisée à cinq échelles différentes. Nous avons calculé sa dimension de Minkowski en pratiquant la régression sur les dix premiers points d'une part et sur la totalité des $\frac{\lambda}{2}$ points d'autre part. La variation de la mesure est inquiétante (Tab. 5.64.)! Elle montre la dégradation rapide liée à un grossissement insuffisant. Les mesures ont été faites sur une trame hexagonale, c'est-à-dire que la construction du ruban se fait en implantant des hexagones plutôt que des disques. Il est permis de penser que cette approximation engendre également des répercussions complexes au niveau du calcul de la dimension de Minkowski. Pour élucider un peu ce problème, le calcul de la dimension fractale de la figure 5.63. a été répété pour cinq orientations différentes de la trame relativement à l'objet ($A(X) = 68500$ pixels). Le tableau 5.65. montre les résultats du calcul de Δ_M par régression sur 10 pas ou sur 53 pas ($\frac{\lambda}{2}$). En considérant que seule la dimension obtenue sur les premiers pas peut avoir une signification et un pouvoir discriminant, il est inquiétant de constater un écart de 30% sur une même forme.

En conclusion, il apparaît que l'indépendance vis-à-vis de l'homothétie et de la rotation sont des vues théoriques qui ne sont pas transposables à l'image discretisée à moins d'utiliser un très fort grossissement (une particule par image 512×512 ne suffirait sans doute pas!) et des dilatations euclidiennes.

Aire	Δ_M Régression sur $\frac{\lambda_E}{2}$ points.	Δ_M Régression sur les dix premiers points
68329	1.079	1.159
17091	1.109	1.159
4278	1.151	1.170
1068	1.201	1.201 (7pts)
266	1.281	1.281 (3pts)

Tab.5.64. Estimation de Δ_M pour différentes échelles de représentation de l'objet de la fig.5.63.

Rotation	Δ_M Régression sur $\frac{\lambda_E}{2}$ points.	Δ_M Régression sur les dix premiers points
0°	1.079	1.159
12°	1.096	1.199
24°	1.082	1.165
37°	1.098	1.204
54°	1.080	1.165

Tab.5.65. Estimation de Δ_M pour différentes rotations de l'objet de la fig.5.63. relativement à la trame.

5.5.4.2.4 Automatisation.

La mise en oeuvre de l'analyse fractale sur un analyseur d'images pourrait se faire en théorie en utilisant des grossissements optiques croissants, mais la contrainte due aux objectifs disponibles ne permet pas d'obtenir suffisamment de mesures expérimentales. L'utilisation de l'opération de dilatation est par conséquent le choix le plus naturel, mais il apporte des problèmes spécifiques. En particulier, deux objets trop proches sur l'image risqueront de se fusionner par dilatation. Le seul remède consiste alors à travailler sur des images des objets isolés ou à adopter des transformations opérant sur des chaînes de Freeman de manière à s'affranchir du support image. Malgré leurs performances, ces dernières sont encore fort confidentielles [Vincent,1991]. La méthode de Richardson possède de ce point de vue un avantage très significatif.

5.5.4.2.5 Spécificité.

En admettant que des procédures robustes puissent être définies pour le calcul de la dimension non-entière d'un objet, il convient encore de s'interroger sur la pertinence d'une telle mesure. L'engouement pour l'analyse fractale est lié à l'obsession d'obtenir une description complète pour la morphologie et à la fascination engendrée par la disparition de la notion d'échelle d'analyse. Nous avons le sentiment très net que cela se fait aux dépens de la signification physique du paramètre obtenu et ce d'autant plus que les objets naturels ne sont pas des modèles fractals. Le paradoxe, en tout cas pour les contours fermés, est qu'il est impossible d'ignorer l'échelle à laquelle l'analyse fractale a été effectuée! La dimension fractale est d'autant plus élevée que le contour est rugueux. Mais, la mesure de Δ_M n'est vraiment pas intuitive en comparaison d'une mesure aussi simple que R_L en tribologie (rapport entre la longueur d'un profil et sa projection). La figure 5.58. illustre des modèles de grains idéalement fractals. Ne diffèrent-ils qu'en termes de rugosité? L'analyse fractale laisse entier le problème de l'analyse des morphologies régulières pourtant très importantes dans la nature.

5.5.4.3 Analyse de 14 diamants.

Les 14 grains de la poudre diamantée utilisés comme test ont été soumis à l'analyse fractale selon la méthode préconisée par Flook[1978]. La régression a porté sur les dix premiers points. Les résultats sont présentés au tableau 5.66. . La figure 5.67. permet une appréciation visuelle du classement obtenu par régression sur dix points. La signification du classement opéré laisse perplexe lorsqu'on compare les valeurs (de 1.158 à 1.209) aux variations obtenues sur une même forme.

n°	Δ_M Régression sur $\frac{\lambda_E}{2}$ points.	Δ_M Régression sur les dix premiers points.
1	1.129	1.160
2	1.129	1.164
3	1.145	1.168
4	1.155	1.174
5	1.132	1.163
6	1.133	1.159
7	1.138	1.194
8	1.152	1.209
9	1.145	1.201
10	1.153	1.209
11	1.141	1.200
12	1.144	1.205
13	1.126	1.158
14	1.141	1.161

Tab.5.66. Estimation de Δ_M pour les grains de diamant de la figure 5.67..

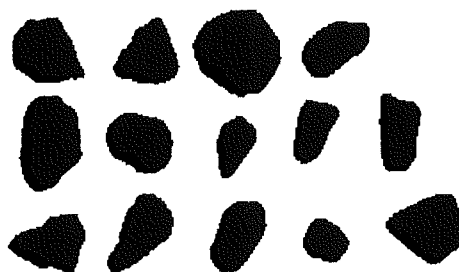


Fig. 5.67. Classement par ordre de dimension fractale Δ_M décroissante des grains de diamant (régression sur dix points).

5.6 Morphométrie et Morphologie Mathématique.

Nous avons déjà évoqué la philosophie générale de la morphologie mathématique (cfr. § 1.4.). Cette théorie développée voici plus de 25 ans [Serra,1969] mais dont les prémices remontent à Minkowski[1903] a pris un essor remarquable et a démontré sa capacité à s'adapter à la grande majorité des problèmes posés par l'analyse d'images. La morphologie mathématique, de binaire au départ, a évolué vers une théorie unificatrice pour un large éventail de problèmes que ce soit en teintes de gris, en couleurs, en 3-D, etc... Mais, il faut bien reconnaître que ces développements restent encore assez confidentiels (hors de France) et que la reconnaissance internationale de la morphologie mathématique repose surtout sur des opérations binaires. Par rapport aux autres méthodes mathématiques développées ci-avant, la morphologie mathématique est la seule qui, comme son nom l'indique, ait été imaginée spécifiquement dans l'optique de l'analyse morphologique. Mais, paradoxalement, elle est très peu utilisée dans ce but. Les "review" d'analyse morphologique l'ignorent totalement ou alors la citent parmi les méthodes qui ont encore tout à prouver.

5.6.1 Principes de base.

Au § 4.2.2. nous avons présenté les opérateurs morphologiques par le biais d'une *convolution morphologique*. Nous allons reprendre ce formalisme en commentant quelques noyaux de convolution appelés dans ce cadre **éléments structurants**. Dans l'ensemble de ce chapitre, nous considérerons la mise en oeuvre de la morphologie mathématique en trame hexagonale. Son extension à d'autres trames ne pose aucun problème et les remarques que nous pourrons faire ici seront pour l'essentiel valables sur toutes les trames.

Il existe deux types de convolutions:

l'une extensive :

$$p_{xy}^* = \text{Sup} \{ p_i + k_i \} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$$

[1]

l'autre anti-extensive :

$$p_{xy}^* = \text{Inf} \{ p_i - k_i \} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$$

[2]

L'ensemble de coefficients k_i fournit une description géométrique de l'élément structurant K . Les indices i sont des indices relatifs à la position d'un pixel (x,y) correspondant à $i=0$. L'illustration pour l'hexagone simple a été donnée au § 4.2.1.. Selon le formalisme ainsi

adopté, il est possible de déterminer une gamme d'éléments structurants convexes et symétriques par rapport au plan de l'image (OZ) en codant par k_i la cote verticale de l'enveloppe de K. Ainsi :

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$
 définit l'hexagone plan dans OZ.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$
 définit un losange perpendiculaire à OZ.

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$
 définit un rhombododécaèdre.

Les définitions très simples données en [1] et [2] sont l'expression la plus générale de la dilatation et de l'érosion d'une image quelconque par un élément structurant K. Pour bien se représenter le résultat d'une opération morphologique, envisageons tout d'abord le cas d'une image binaire et d'un élément structurant plan ($\forall k_i = 0$, Fig.5.68.). Le résultat de la dilatation d'un objet X par l'élément structurant K s'écrit:

$$D^K(X) = \{p_{xy} \in Z^2; K_p \cap X \neq \emptyset\}$$

avec K_p : l'élément structurant centré en p_{xy} .

c'est-à-dire que le dilaté $D^K(X)$ est l'ensemble des points obtenu en centrant K en tout point de l'image et en ne conservant que les centres conduisant à une intersection non nulle avec X.

De manière duale, nous aurons:

$$E^K(X) = \{p_{xy} \in Z^2; K_p \subseteq X\}$$

Les opérations morphologiques en teintes de gris peuvent s'imaginer en remplaçant la notion de fonction (image) par une notion d'ombre (topographie). La figure 5.69. illustre une coupe à travers une image représentant le profil originel et son dilaté par un élément structurant plan.

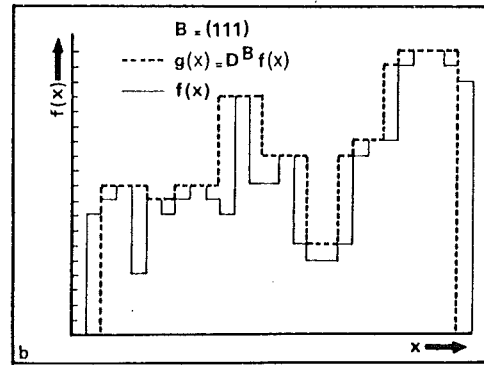
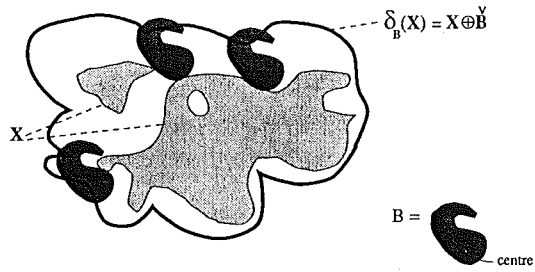


Fig.5.68. Résultat de la dilatation d'une image binaire par un élément structurant plan de géométrie quelconque.

Fig.5.69. Vue en coupe de la dilatation en teintes de gris par un élément structurant plan de diamètre 3 pixels.

5.6.2 Morphologie Mathématique Binaire.

Dans la perspective de l'analyse morphométrique bidimensionnelle, seuls les outils binaires de la morphologie mathématique présentent un intérêt réel. En théorie, une infinité de transformations correspondant à autant de géométries planes de K semblent possibles. Il existe d'ailleurs des algorithmes extrêmement puissants [Vincent,1991] pour effectuer les opérations morphologiques de base avec des éléments structurants tout à fait quelconques. Mais, à l'exception d'éventuelles applications du type "template matching" consistant à identifier des morphologies identiques à K dans une image quelconque, l'utilité d'éléments structurants complexes est peu convaincante. Il convient de rappeler ici que la morphologie mathématique a été conçue comme une technique permettant de caractériser une géométrie aléatoire à la lumière de ses transformations par une géométrie connue. En pratique, ceci restreint la classe des éléments structurants plans intéressants à sa plus simple expression :

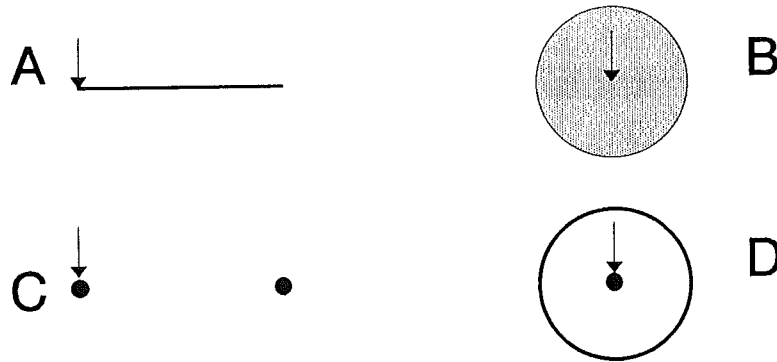


Fig.5.70. Les quatre principales familles d'éléments structurants en analyse d'images : A.(Anisotropie)B.(Boule)C.(Covariogramme)D.(Dispersion).

N'est-il pas symptomatique de retrouver dans ces quatre éléments structurants de base les paramètres de Griffiths caractérisés par la morphologie (B) l'anisotropie (A) la dispersion (D) et l'anisotropie de dispersion (C)! Par la suite, nous nous intéresserons exclusivement à l'élément structurant compact isotrope (B). Il est certain que les autres classes méritent autant d'efforts de recherche.

La notion de taille qui ne semble pas prise en compte par les quatre éléments structurants présentés est heureusement accessible grâce à la propriété suivante :

$$E^{\lambda B}(X) = \underbrace{E^B(E^B(E^B(\dots E^B(X))))}_{\lambda \text{ fois}}$$

où λB : est l'homothétie d'ordre λ de B .
 ...en pratique λB est une boule de rayon λ .

Toute la puissance de cette propriété apparaîtra dans la fonction distance qui grâce à une astuce algorithmique va permettre de calculer en une seule séquence l'ensemble des érodés élémentaires successifs d'un ensemble.

5.6.2.1 La Fonction Distance en trame hexagonale.

Imaginons l'opération d'érosion appliquée à un objet binaire avec un élément structurant :

$$\begin{array}{ccc} & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ & -1 & -1 \end{array}$$

Celle-ci aurait pour effet de transformer l'image de telle manière que l'érodé de l'objet soit représenté à la valeur 2 tandis que les pixels éliminés par l'érosion restent à la valeur 1. Si cette opération est répétée ou mieux encore si elle est implémentée sous forme séquentielle l'image résultante sera l'ensemble des érodés successifs codés par des valeurs croissantes (Fig.5.71.). Cette transformation porte le nom générique de **fonction distance**, car elle confère à tout pixel de l'objet la valeur de sa distance au bord (selon une métrique donnée par l'élément structurant). L'algorithme séquentiel en hexagonal s'écrit :

$$p_{xy} \in X = \text{Max_value}$$

$$p_{xy}^* = \inf(p_0, p_2^* - k_2, p_3^* - k_3, p_4^* - k_4)$$

pour le balayage dans le sens vidéo, et

$$p_{xy}^* = \inf(p_0, p_1^* - k_1, p_5^* - k_5, p_6^* - k_6)$$

pour le balayage dans le sens anti-vidéo.

Il s'agit réellement d'une fonction distance au bord dans le sens où les coefficients k_i ne sont rien d'autre que l'expression de la distance élémentaire séparant p_i de p_0 . Dans l'élément structurant ci-dessus tous les voisins sont à une distance 1 sauf le pixel central ... qui est à une distance nulle de lui-même. En ajustant les valeurs des coefficients k_i relatifs à chacune des directions de la trame, il est possible de conférer à la fonction distance un caractère anisotrope plus ou moins prononcé. Cela permet aussi de générer des simulations géométriques intéressantes quoique de validité limitée à 2-D [Collinet,1989; Pirard, 1991; Pirard & Bastin,1992] (Fig.5.73. et Fig.5.74.). Mais, l'attrait majeur de la fonction distance réside surtout dans les particularités topographiques générées sur l'objet.

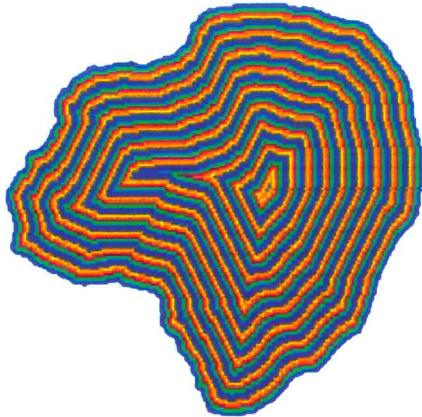


Fig.5.71. Image résultant de l'application de la fonction distance hexagonale à un objet quelconque.

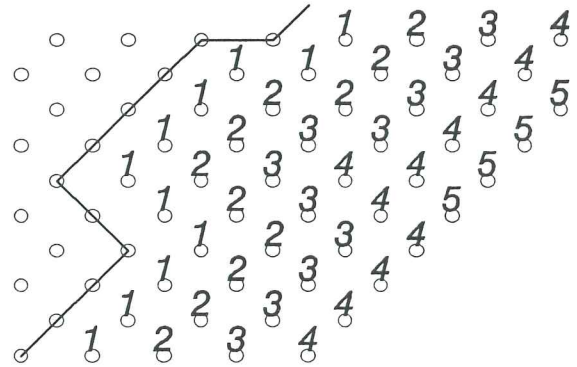


Fig.5.72. Valeurs de distance au bord externe attribuées par la fonction distance hexagonale.

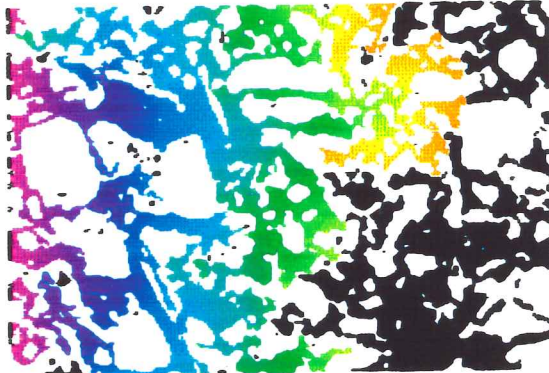


Fig.5.73. Propagation d'une fonction distance géodésique au départ du bord gauche. L'image initiale est celle de la porosité d'une craie (réservoir pétrolier) obtenue en électrons rétrodiffusés [Pirard,1991].

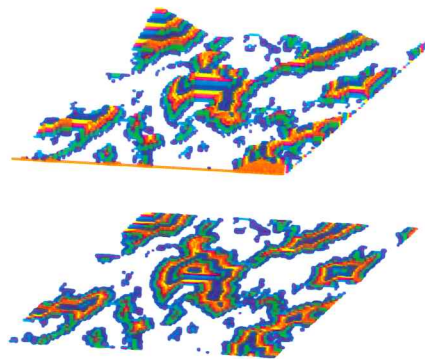


Fig.5.74. Application d'une fonction distance sur l'image (en réflexion) des bulles d'air dans un pare-brise. La volumétrie de la fonction fournit une estimation grossière du volume d'air piégé [Pirard & Bastin,1992].

5.6.2.2 Ouverture et Fermeture.

L'enchaînement d'une opération d'érosion et d'une opération de dilatation s'appelle une **ouverture** :

$$O^K(X) = D^K(E^K(X))$$

et par dualité une **fermeture** sera définie par :

$$F^K(X) = E^K(D^K(X))$$

Ces deux opérations possèdent des propriétés mathématiques remarquables et en particulier la propriété d'idempotence qui s'écrit pour l'ouverture :

$$O^K(X) = O^K(O^K(O^K(\dots O^K(X)))) \dots$$

Cette idempotence signifie pratiquement que la fonction, pour un K donné, possède une capacité limitée de dégradation de l'information. Ce qui rend ces outils particulièrement efficaces dans l'optique du filtrage des images en niveaux de gris [Serra,1988]. La figure 5.75. illustre le résultat de l'ouverture par un disque d'un ensemble binaire. Cette opération a pour effet de ne conserver que les points qui sont inclus dans des disques identiques à B et totalement inscrits dans l'objet. En d'autres termes, l'ouverture arase les aspérités d'un objet. De la même manière, la fermeture aura pour effet de combler les concavités de l'objet (c'est-à-dire d'araser les aspérités de son complémentaire !). L'intérêt de telles transformations dans l'optique d'une analyse morphométrique est évident. La vitesse de dégradation d'un objet soumis à des ouvertures de tailles croissantes renseignera, à l'image de la distribution des coefficients de la transformée de Fourier, sur l'abondance et la taille des aspérités.

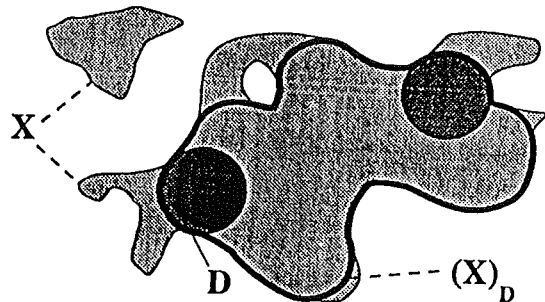


Fig.5.75. Résultat de l'ouverture d'un ensemble binaire par un disque.

Tout comme la fonction distance permet de générer l'ensemble des érosions homothétiques d'un objet, il existe une manière astucieuse d'obtenir l'ensemble des ouvertures ... en trame hexagonale.

5.6.2.3 La Fonction Granulométrique.

En prenant comme point de départ la fonction distance en trame hexagonale, Lay[1987] a développé un algorithme qui permet d'attribuer à chaque pixel la valeur du plus grand hexagone maxima inscrit qui le contient ¹ (Fig.5.76.). Ainsi, par un simple seuillage $[\lambda + 1, 255]$ s'obtient l'image de $O^{\lambda H}(X)$ (où λH est l'hexagone de côté λ) (Fig.5.77.). L'algorithme est basé sur l'idée de décomposer toute opération morphologique par un élément structurant symétrique en une succession d'opérations sur des éléments linéaires. Ainsi, toute transformation par une hexagone peut se décomposer en trois opérations par un segment selon les directions principales de la trame. C'est ce principe que nous avons adopté pour l'implémentation d'une Morphologie Mathématique en teintes de gris rapide dans le logiciel Esope [Birtles,1991].

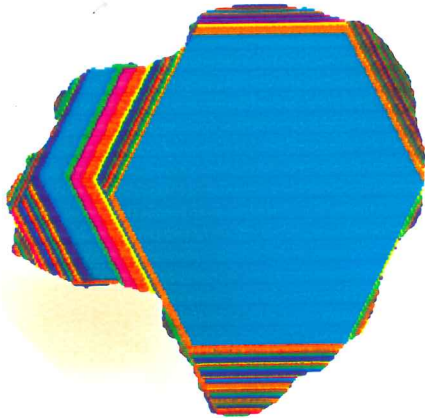


Fig.5.76. Fonction granulométrie en trame hexagonale appliquée à un objet binaire.

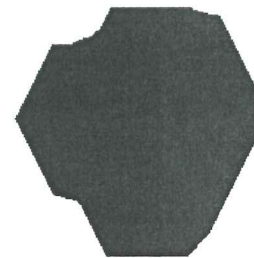


Fig.5.77. Ouverture obtenue par simple seuillage [51, 255] sur la fig.5.76.

Le principe de l'algorithme pour l'obtention de la fonction granulométrie est d'appliquer selon chaque balayage ($0^\circ, 240^\circ$ et 60°) les règles suivantes :

- 1) Chaque valeur p est propagée sur les $p-1$ pixels suivants.
- 2) Chaque pixel conserve comme résultat p^* la plus grande valeur susceptible de l'atteindre.

La propagation ne doit être envisagée que dans les pentes négatives de la fonction distance ce qui accélère le calcul.

¹ Lay mentionne cet algorithme, mais n'en fournit pas le détail. A notre connaissance, cette fonction n'est disponible que dans le module "morphologie avancée" de Visilog (...avec un bug dans les versions 3._). La version que nous en donnons est celle que nous avons redéveloppée indépendamment.

5.6.3 Morphologie Mathématique et paramètres morphométriques dérivés.

Ce n'est pas un hasard si la fonction représentant l'ensemble de tous les ouverts d'un ensemble est appelée fonction granulométrique. En effet, l'opération d'ouverture correspond exactement aux axiomes de base de l'analyse granulométrique tels qu'ils furent définis par Matheron[1975] et elle peut être utilisée pour fournir une décomposition granulométrique d'une phase complexe totalement connexe [Pirard,1992]. La fonction de densité qui enregistre la fraction d'aire comprise entre deux ouverts successifs s'écrit:

$$g(\lambda) = \frac{A(O^{\lambda-1}(X)) - A(O^\lambda(X))}{A(X)}$$

Remarque : par simplicité d'écriture, lorsque l'élément structurant n'est pas indiqué il est supposé être la représentation de B sur la trame adoptée (λ est ici l'hexagone de côté λ)

Dans l'exposé initial de sa théorie, Serra[1982] propose le calcul de deux paramètres morphométriques dérivés de cette fonction $g(\lambda)$:

$$\beta_s = g(\lambda_E + 1)$$

où λ_E : est le rayon du disque maxima inscrit, l'indice E fait référence à la notion d'érodé ultime.

Ce facteur de *circularité* n'est autre que le rapport entre l'aire de l'ouvert ultime et l'aire de l'objet entier. Serra[1982,p338] en propose une définition équivalente :

$$\beta_s = \frac{\pi \cdot \lambda_E^2}{A}(X)$$

qui est le rapport de l'aire du disque maxima inscrit à l'aire de l'objet. Etant donné que l'ouvert ultime peut être différent d'un disque simple (Fig.5.78.) l'équivalence n'est pas correcte!

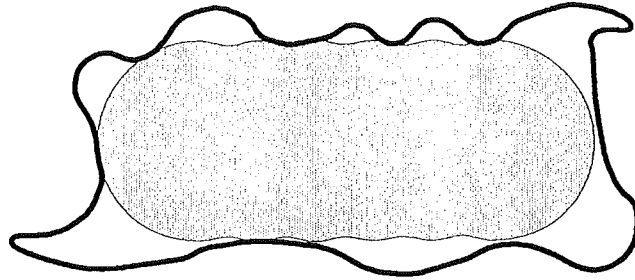


Fig.5.78. Dans un très grand nombre de cas, l'ouvert ultime sera une union de disques plutôt que le simple disque maxima inscrit.

Le second facteur proposé par Serra est :

$$\alpha_S = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\lambda_{\varepsilon}+1} \frac{g(\lambda)}{\lambda}$$

Il appelle α_S facteur d'arrondi, mais nous préférons l'appeler *coefficient de rugosité morphologique* étant donné que sa valeur sera d'autant plus élevée que l'objet est rugueux.

Le premier à avoir utilisé l'analyse morphologique préconisée par Serra est Frossard[1978] dont l'intention n'était autre que de pouvoir automatiser la charte de Krumbein & Sloss[1951] qui présente un classement selon les paramètres de sphéricité et d'émousé définis par Wadell (Fig.5.79.). La rugosité morphologique α_S est utilisée dans le cadre de l'étude de sables réels pour estimer l'émousé de Wadell. Frossard a calculé en réalité ce qu'il appelle un *indice d'aspérité* :

$$I_a = \frac{1}{1 + 50\alpha_{FR}}$$

avec

$$\alpha_{FR} = \sum_{\lambda=\frac{\lambda_{\varepsilon}}{10}}^{\lambda=\frac{\lambda_{\varepsilon}}{2}} \frac{g(\lambda)}{\lambda}$$

Les résultats obtenus sur les 20 grains de la charte sont montrés à la figure 5.79.. Les calculs de Frossard sont faits sur des grains qui font entre 300 et 600 pixels de surface. Cette précision était indispensable puisque α_{FR} n'est pas adimensionnel.

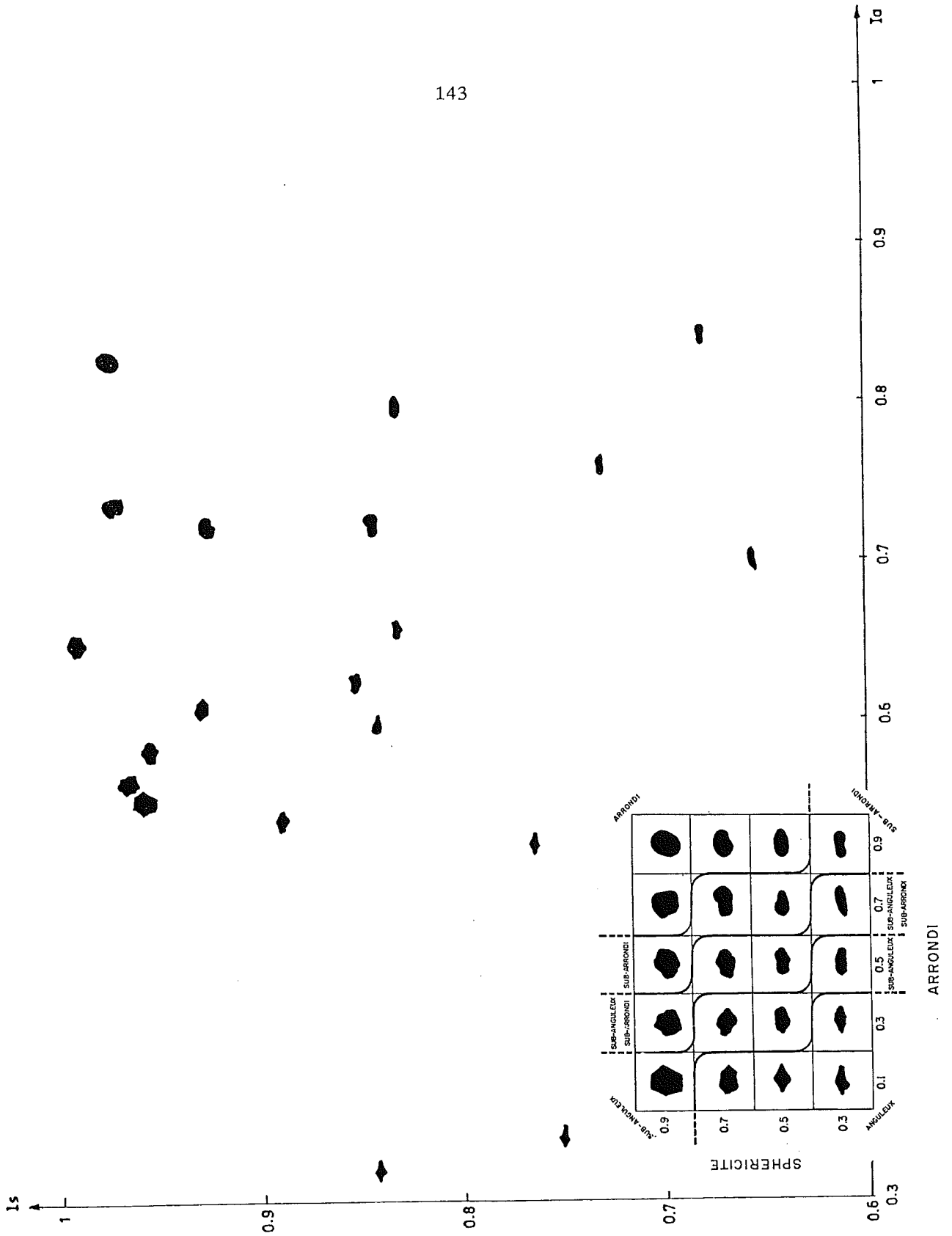


Fig.5.79. Classification des grains de la charte de Krumbein & Sloss[1951] (en encadré) obtenue par Frossard en combinant un indice de Sphéricité et un indice d'Aspérité.

Dans un article qui a éveillé l'intérêt des "morphomètres" pour la morphologie mathématique, Chermant et al.[1987] ont utilisé les moments réduits de la fonction de densité par ouverture :

$$E_{red}^k = \frac{\left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\lambda_E+1} \lambda^k \cdot g(\lambda) \right)}{(taille)^k}$$

Pour le moment négatif du premier ordre (k=1) et en utilisant le diamètre du disque maxima inscrit (λ_E) comme paramètre de taille, cela donne :

$$\alpha_{CH} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\lambda_E+1} g\left(\frac{\lambda}{\lambda_E}\right) \cdot \lambda_E$$

Pour être tout à fait correct, il faut préciser que Chermant et al.[1987] utilisent en fait comme référence l'enveloppe faiblement convexe de l'objet et qu'ils construisent les moments de la fonction par ouverture ($\lambda > 0$) mais aussi par fermeture ($\lambda < 0$). Ce même raisonnement est étendu à d'autres fonctions morphologiques, telles que la dérivée de la fonction d'extinction (proportion en nombre des disques maxima inscrits appartenant à une classe $[\lambda, \lambda + d\lambda]$) ou encore la fonction de propagation géodésique. Etant donné que nous ne serons pas confrontés à des formes très concaves, les propriétés de cette dernière fonction ne seront pas analysées ici. Chermant et al.[1987] signalent qu'un travail plus complet utilisant des procédures statistiques discriminantes serait utile, mais à notre connaissance les méthodes qu'ils proposent n'ont pas été approfondies dans des travaux ultérieurs. La même équipe Michelland-Abbé[1990] Chermant & Coster[1991] a défini deux autres paramètres de forme basés sur des enveloppes faiblement convexes. La procédure d'obtention est longue et implique la séquence d'opérations suivantes :

I_0	Image initiale.
I_1	Enveloppe faiblement convexe (par fermeture).
$I_2 = F^{\frac{\lambda_E}{2}}(I_1 - I_0)$	
$I_3 = I_2 \cap I_0$	Marquage des convexités.
$I_4 = F^{\frac{\lambda_E}{2}}(I_0)$	
$I_5 = I_4 - I_0$	Marquage des concavités.
$I_{finale} = I_3 \cup I_5$	

Les facteurs de forme sont, la proportion en aire occupée par les concavités et convexités :

$$F_1 = \frac{A(I_F)}{A(I_0)}$$

(Macrorugosité)

et,

$$F_2 = \frac{F_1}{N(Asp)}$$

(microrugosité)

avec $N(Asp)$: nombre d'aspérités.

La signification réelle de ces paramètres et leur sensibilité semblent difficile à déterminer. A notre connaissance, ils n'ont pas plus que les précédents été adoptés dans des travaux ultérieurs. Enfin, signalons que Ehrlich[1984;1991], un des pionniers de l'analyse par transformée de Fourier, utilise depuis quelques années la morphologie mathématique pour caractériser la porosité dans les réservoirs pétroliers par le spectre de la fonction de granulométrie par ouverture

5.6.4 Analyse critique des méthodes de morphologie mathématique.

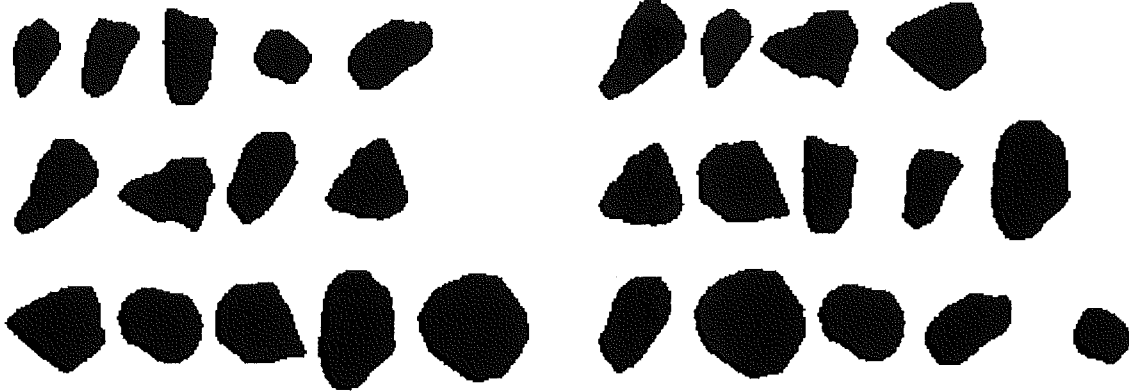
Il est manifeste que la morphologie mathématique offre un éventail d'outils très intéressants pour la morphométrie. Pourtant les succès de la méthode dans ce domaine sont encore mitigés et confidentiels. Il est symptomatique de constater que Frossard[1979] en proposant une méthode automatisable mais mathématiquement différente des paramètres classiquement utilisés s'est fait rejeter par les spécialistes de la mécanique des sables! [cfr.de Jaeger, 1991, p.VII-13]. Il est vrai que (α_S) qui est le paramètre le plus couramment adopté n'a pas fait l'objet d'une analyse critique rigoureuse.

5.6.4.1 Indépendance.

Par définition l'ouverture est une fonction granulométrique et le paramètre α_S dépend de la taille de l'objet. Il est indispensable d'adopter un moment réduit ($\alpha_{CH} = \alpha_S \cdot \lambda_E$) pour s'affranchir de ce problème. Le tableau 5.80. et les figure 5.80.a et 5.80.b. illustrent le classement obtenu sur les 14 grains de diamant en fonction soit de α_S , soit de α_{CH} . L'amélioration du classement du grain n°6 est très nette!

n°	α_S *10 ³	α_{CH}	α_{FR} *10 ³
1	40.52	1.094	2.15
2	47.65	1.144	3.84
3	51.49	1.133	3.09
4	54.70	1.203	6.83
5	42.27	1.184	5.82
6	46.73	1.075	1.84
7	33.64	1.084	1.52
8	32.88	1.151	4.81
9	43.02	1.076	1.81
10	37.22	1.154	4.16
11	32.2	1.095	1.33
12	23.57	1.084	1.32
13	34.55	1.175	4.01
14	43.02	1.236	5.10

Tab.5.80. Analyse de la rugosité morphologique sur 14 grains de diamants.

Fig.5.80.a. Classification visuelle des grains selon α_s Fig.5.80.b. Classification visuelle des grains α_{cH}

5.6.4.2 Sensibilité.

En raison de la pondération par $\frac{1}{\lambda}$, le paramètre α_{cH} est excessivement sensible aux valeurs de $g(1)$. La pratique montre que ces valeurs proviennent presque exclusivement du bruit le long du contour et qu'il est indispensable de procéder à un lissage avant toute analyse. Très simplement, ce lissage revient à faire une ouverture sur l'objet ou ...plus simplement encore à réaliser une somme partielle en tronquant les termes inférieurs de $g(\lambda)$. Cette observation a poussé Frossard[1978] à utiliser comme seuil inférieur $\frac{\lambda_E}{10}$. Nous sommes plutôt d'avis que ce seuil doit être fixé de manière absolue en fonction de l'application envisagée :

"...le problème posé m'oblige à envisager des aspérités ayant un rayon de courbure au minimum égal à $x \mu m$, je fixe par conséquent le seuil inférieur à $\lambda_i = x \mu m$.

Le grossissement étant par définition adapté à l'application, cela revient souvent en pratique à commencer la somme partielle à $\lambda = 2 \cdot l_0 m$ (l_0 : espacement unitaire de la trame). La figure 5.81. illustre la fonction de densité par ouverture de deux grains et l'importance du bruit en $g(1)$.

L'adoption d'une borne supérieure est une précaution tout aussi indispensable car les valeurs de $g(\lambda)$ pour $\lambda \rightarrow \lambda_E + 1$ peuvent être très élevées tout en n'ayant plus rien à voir avec la notion de rugosité. En particulier, $g(\lambda_E + 1)$ qui est l'aire de l'ouvert ultime

exprime plus la forme globale (cfr. β_S) que l'abondance des aspérités. La borne supérieure pourrait être fixée de manière absolue tout comme la borne inférieure. Il peut s'avérer plus robuste de lui donner une valeur relative à la taille du grain. L'adoption de $\frac{\lambda_f}{2}$ par Frossard[1978] est arbitraire mais convient en pratique. Ce problème sera rediscuté au chapitre 6.

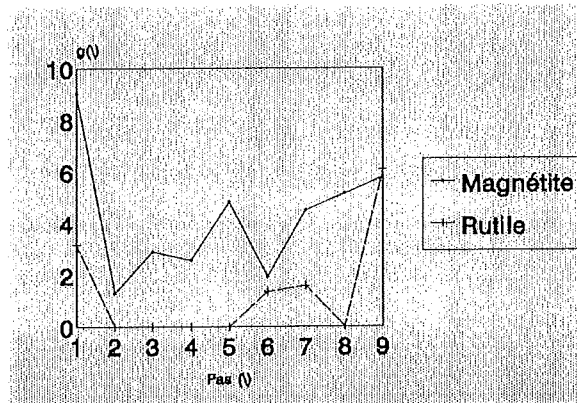


Fig.5.81. Allure de la fonction $g(\lambda)$ pour deux grains de rugosités différentes sans filtrage du contour.

5.6.4.3 Robustesse.

Toutes les analyses de rugosité morphologique citées jusqu'ici ont été effectuées en trame hexagonale. Il est inévitable dès lors que l'orientation de la trame influence la qualité des mesures. Remarquons en particulier qu'un disque est rugueux tandis qu'un hexagone sera considéré comme la *référence lisse* ($\alpha = 0$). En revanche, ce même hexagone tourné de 30° devient lui aussi rugueux! Expérimentalement, nous avons testé la variation de α_{FR} et α_S sur la forme présentée à la figure 5.63. pour chacune des cinq orientations différentes. Le tableau 5.83. reprend les résultats.

La robustesse paraît satisfaisante, mais il ne faut pas perdre de vue qu'en raison de la répartition homogène des aspérités le long du contour, les erreurs commises se compensent largement. Pour analyser plus précisément la sensibilité à la rotation, nous avons utilisé un objet triangulaire simple (Fig.5.83.) et nous avons isolé à chaque rotation les aspérités selon l'exemple de la figure 5.84..

Rotation	α_s *10 ³	α_{FR} *10 ³
0°	11.28	1.54
12°	11.54	1.28
24°	11.58	1.34
37°	11.36	1.46
54°	11.71	1.49
$\bar{\alpha}$	11.49	1.42
C.V.(%)	1.35	6.81

Tab. 5.82. Variation des paramètres de rugosité morphologique α_s et α_{FR} avec l'orientation (Fig.5.63.)

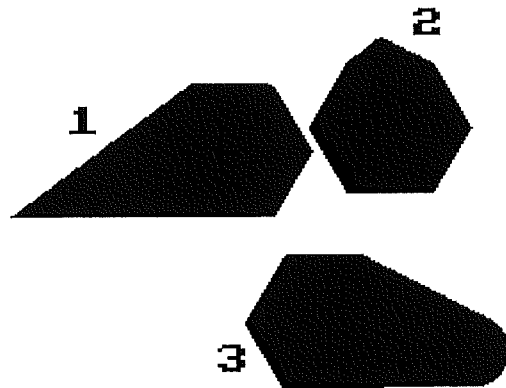
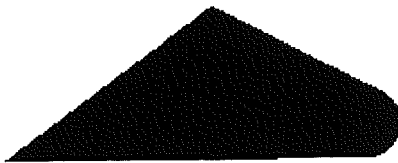


Fig.5.83. Forme test pour l'analyse de la rugosité et de l'angularité.

Fig.5.84. Isolement des trois aspérités pour la direction 0°.

Les résultats mesurés par α_{FR} sont présentés au tableau 5.85. pour chaque aspérité individuelle et pour la forme totale.

Les résultats confirment très logiquement que ce sont les aspérités formées par des angles obtus ou fortement émoussés qui sont les plus sensibles à la rotation.

La sensibilité à l'homothétie est bien prise en considération par le moment réduit, mais elle n'est pas pour autant négligeable comme l'illustre le tableau 5.86..

Rotation	AIRE			RUGOSITE			
	A[1]	A[2]	A[3]	α_{FR}^1 *10 ³	α_{FR}^2 *10 ³	α_{FR}^3 *10 ³	α_{FR}^{tot} *10 ³
0°	2044	185	2282	119.11	2.42	16.91	295.46
7,5°	2092	209	2452	138.27	2.95	20.29	311.85
15°	2166	153	2494	149.36	1.93	29.99	335.61
22,5°	2213	117	2552	156.60	1.25	21.23	320.76
30°	2231	79	2476	146.63	0.42	16.48	297.50
$\bar{\alpha}$				141.99	1.79	20.98	312.24
C.V.(%)				9.05	49.40	23.20	4.79

Tab. 5.85. Rugosité morphologique et aire en fonction de la rotation pour les trois aspérités de la figure 5.84..

Grossissement	α_s *10 ³	α_{CH}
68329	11.28	1.354
17091	22.62	1.357
4278	46.64	1.399
1068	91.15	1.367
266	169.02	1.352

Tab. 5.86. Variation des paramètres de rugosité morphologique α_s et α_{CH} avec l'homothétie (Fig.5.63.)

5.6.4.4 Accessibilité.

L'algorithme de Lay[1987] permet d'accéder immédiatement à tous les moments de la fonction granulométrique. Il suffit de dénombrer le nombre de pixels associés à chaque grain [A(X)] ainsi que la fraction des pixels qui valent λ [N(λ)]. Il vient :

$$g(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{A(X)}$$

Il convient tout de même de remarquer que dans le cas où le système n'autorise qu'un accès séquentiel à la mémoire, l'algorithme de Lay peut s'avérer catastrophique puisqu'il balaye l'image selon 240° et 60°! Dans le cas d'un accès aléatoire, l'algorithme reste lent comparé aux performances des nouveaux algorithmes en lacets pour l'érosion et

la dilatation [Vincent,1991]. Les méthodes d'analyses basées sur des longueurs géodésiques [Chermant et al.,1987] ou sur des successions d'ouvertures, de fermetures et d'opérations logiques [Michelland-Abbé, 1990] sont de ce point de vue exagérément lentes!

5.6.4.5 Spécificité.

Exception faite des problèmes liés à l'implémentation digitale, il est clair que $\alpha = \alpha_{FR} \cdot \lambda_E$ caractérise la rugosité de l'objet et qu'il le fait d'une manière très contrôlable dès lors que les bornes de la somme partielle peuvent être fixées librement. En réalité, des reproches du même ordre que ceux adressés à la transformée de Fourier sont valables ici:

- Le nombre d'aspérités qui contribuent à la valeur de α est inconnu. Ainsi les objets de la figure 5.87. peuvent présenter la même rugosité morphologique.
- Il n'est pas possible de différencier des objets sur base de la répartition spatiale de leurs aspérités (Fig.5.88.).
- L'ouverture peut provoquer des ruptures homotopiques dans des objets qui présentent un étranglement (Fig.5.89.). α risque dans ces cas de prendre en compte des pertes en aire qui ne sont pas physiquement représentatives de rugosités.

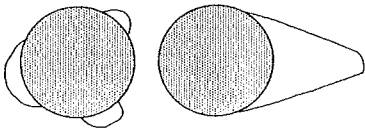


Fig.5.87 Rugosité identique, nombre d'aspérités différents.

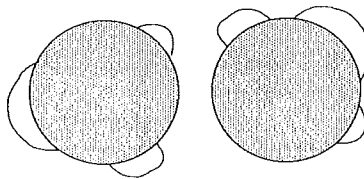


Fig.5.88. Rugosité identique, dispersion des aspérités différente.

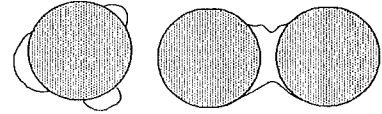


Fig.5.89. Pseudo-rugosité générée par des étranglements.

5.6.5 Application de l'analyse de la rugosité morphologique à la différenciation de deux concentrés.

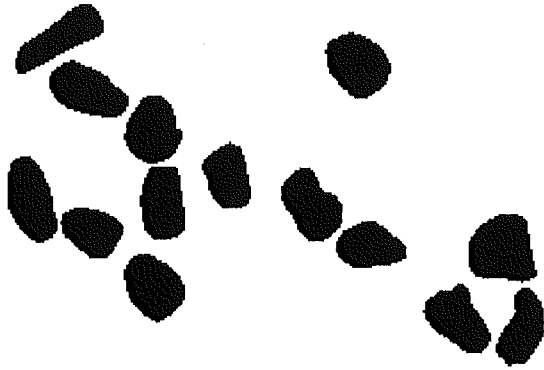


Fig.5.90. Vue partielle du concentré de rutile.



Fig.5.91. Vue partielle du concentré de magnétite.

Deux concentrés morphologiquement différents ont été utilisés pour tester la sensibilité de l'analyse fractale et de la rugosité morphologique et accessoirement du déficit isopérimétrique (F) en situation réelle. Les grains analysés ont été prélevés dans la fraction 125um - 175 um et digitalisé en adoptant un grossissement assez faible (3000 pixels/objet). Il s'agit d'une part d'un concentré de rutile issu d'un placer (grains lisses) (Fig.5.90) et d'un concentré de magnétite obtenu par broyage (grains rugueux) (Fig.5.91). Les résultats sont présentés au tableau 5.92.. Les analyses discriminantes réalisées font très nettement apparaître la supériorité de la méthode de morphologie mathématique (Tab.5.93.). En injectant dans l'analyse multivariée non plus E_l et α_{FR} mais les valeurs de $g(\lambda)$ ($\lambda = 2^{\alpha 9}$) nous obtenons un reclassement tout aussi convaincant (Tab.5.94.).

	RUTILE		MAGNETITE	
	Moyenne	C.V.(%)	Moyenne	C.V.(%)
D_o	172.8	9.77	136.6	22.66
El	1.555	30.71	1.448	22.17
D_a	215.6	18.55	165.6	24.92
D_b	143.5	15.77	116.7	24.92
F	1.31	16.24	1.34	8.21
Δ_M	1.021	0.64	1.03	0.97
α_{FR}	1.996	69.81	9.014	58.80

Tab. 5.92. Analyse morphologique des deux concentrés.

Vers:	Rutile	Magnétite
De :		
Rutile	66.7 %	33.3 %
Magnétite	0.0 %	100 %

Tab.5.93. Analyse discriminante basée sur El et α_{FR}

Vers:	Rutile	Magnétite
De :		
Rutile	70.0 %	30.0 %
Magnétite	3.1 %	96.7 %

Tab. 5.94. Analyse discriminante basée sur les valeurs individuelles de $g(\lambda)$.

5.6.6 Analyse de la charte de Krumbein et Sloss par la rugosité morphologique et les paramètres d'inertie.

Afin de situer les performances des mesures les plus convaincantes présentées jusqu'à présent. Nous avons procédé à l'analyse de la charte de Krumbein & Sloss[1951] déjà testée par Frossard[1978] (Fig.5.79.) . Les deux paramètres exploités sont d'une part l'élongation (El) et d'autre part la rugosité morphologique réduite ($\alpha = \alpha_{FR} * \lambda_E$).

Charte de Krumbein & Sloss

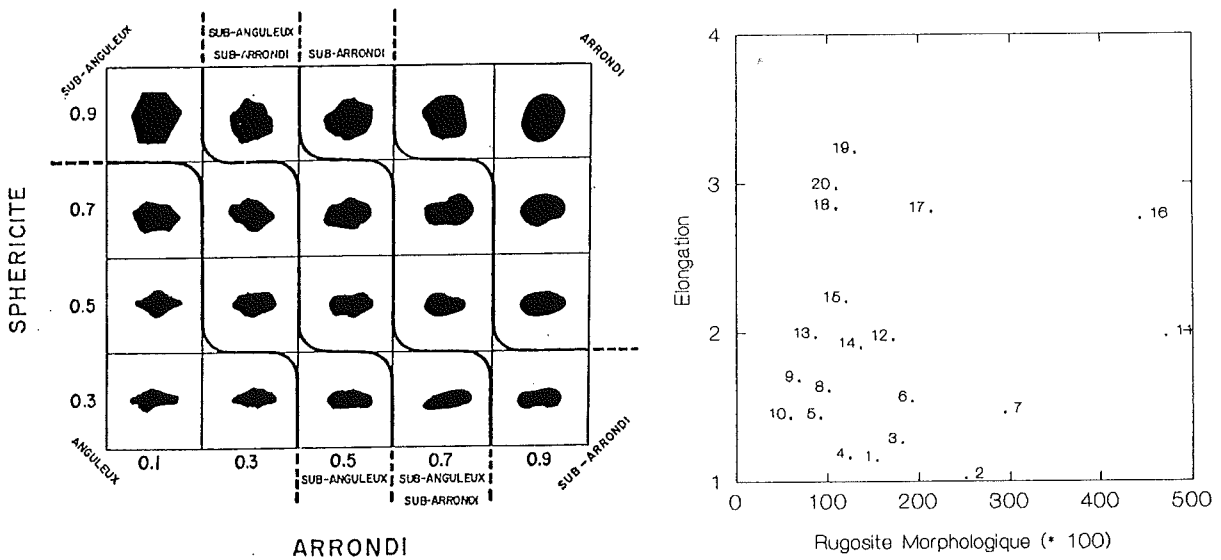


Fig.5.95. Charte morphoscopique de Krumbein & Sloss. Fig.5.96. Analyse quantitative des 20 grains de la charte.

La première réflexion qui vient à l'esprit au vu des résultats est que la classification en termes d'élongation (El) est tout à fait cohérente, mais que la mesure de la rugosité manque de discrimination dans les classes d'émoissé (arrondi) intermédiaire. Seuls les grains n°11 et n°16 sont clairement isolés. Ils correspondent respectivement à la classe [0.1,0.5] et [0.1,0.3] de la charte. Le biais caractéristique de la trame hexagonale se marque pour le grain n°1 qui a une allure quasi-hexagonale et est bien aligné sur la trame ce qui engendre une rugosité faible (1.54).

Remarquons pour être honnête que notre perception visuelle n'est pas plus à même de différencier avec certitude des nuances dans les émoissés des grains des classes 0.3 et 0.5 ! La qualité de ces chartes sera d'ailleurs remise en cause au chapitre 6, lorsque nous accéderons à la mesure euclidienne de l'émoissé de Wadell.

6 Squelettes et Calyptres.

6.1 Propositions pour une approche systématique de la notion de forme.

Le chapitre précédent a montré à l'évidence que les progrès en morphométrie se sont faits de manière très désordonnée. Les méthodes automatiques, pourtant soutenues par des progrès fulgurants en informatique s'avèrent toujours incapables d'accéder aux notions empiriques définies par les sédimentologues des années trente! Cette situation est pour le moins étonnante dès lors que l'on mesure l'importance des chartes morphologiques dans différentes disciplines et que l'on sait aussi combien ce type d'analyses reste fastidieux et subjectif.

Dans ce chapitre et les suivants, nous allons tenter de développer l'analyse morphométrique en partant de concepts géométriquement très simples et en allant chercher les outils nécessaires dans la théorie de la morphologie mathématique. Notre motivation première n'est donc pas d'automatiser les chartes existantes mais bien de décomposer une analyse morphométrique en une succession de paramètres indépendants (ce qui rappelle la notion de "*shape level*") qui chacun conservent une signification physique très claire. Le fait que nous parviendrons in fine à l'automatisation de tous les facteurs de forme définis empiriquement confortera la théorie et permettra de réconcilier, définitivement espérons-le, l'analyse d'images et les sciences qui traitent de l'analyse des matériaux granulaires.

Le premier critère exigé par Exner[1987] et aussi celui qui est le plus précieux pour toute approche quantitative est celui d'indépendance. Rigoureusement, pour qu'un facteur de forme soit indépendant de la taille, il faut adopter pour la taille une mesure de Lebesgue (Aire en 2-D) et conserver dans le facteur de forme des notions relatives à la répartition spatiale de l'aire. Les figures 6.1.A et 6.1.B représentent deux objets qui ont même aire et qui ne diffèrent que par une propriété qui peut être synthétisée en un seul paramètre, l'ELONGATION.

Les figures 6.1.C et 6.1.D illustrent deux objets qui ont même aire et même élongation, mais qui peuvent être différenciés par un paramètre de RUGOSITE GLOBALE. Le concept de rugosité globale est très simple à concevoir en analyse tribologique où les signaux sont des profils ouverts. Il exprime la quantité de matière à enlever pour obtenir un profil idéalement lisse (Fig.6.2.). Autrement dit, avant de pouvoir définir ce qui est *rugueux*, il faut pouvoir définir ce qui est *lisse* (comme l'aurait dit Lapalisse). Pour l'instant, nous considérerons simplement que la *référence lisse* d'une particule (contour fermé) est son disque maxima inscrit. La rugosité globale sera alors la fraction d'aire résiduelle obtenue par soustraction de ce disque. Nous appellerons *résidu* tout ensemble de pixels connexes obtenu par soustraction de la référence lisse.

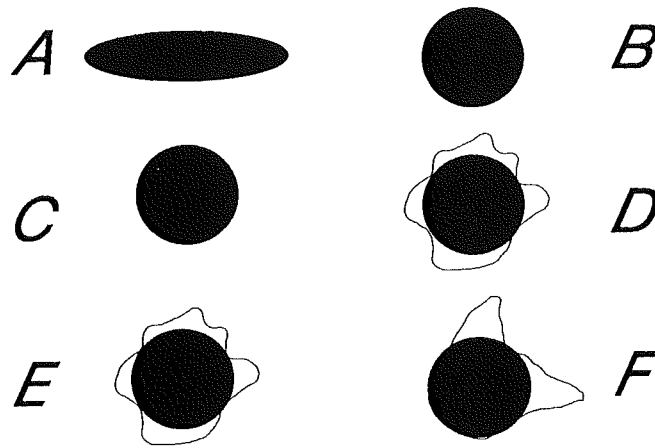


Fig. 6.1. Principe de décomposition d'une morphologie aléatoire en "niveaux" indépendants (élongation, rugosité, angularité, ...)

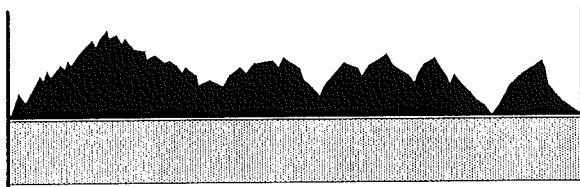


Fig.6.2. Dans l'analyse de profils ouverts, la référence lisse est la ligne droite.

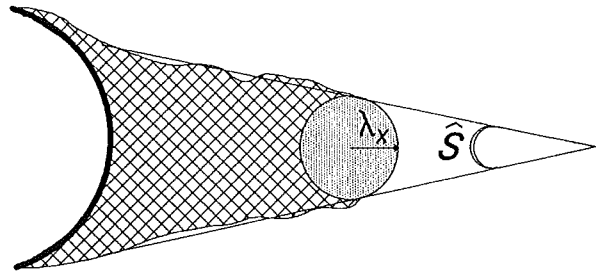


Fig.6.3. Les aspérités angulaires peuvent être définies par l'angle au sommet \hat{S} et le rayon de courbure λ_x .

Les figures 6.1.E et 6.1.F illustrent deux objets qui ont même aire, même élongation, même rugosité globale mais diffèrent par le nombre, la taille, la morphologie, la dispersion et l'orientation des résidus. Par soustraction de la référence lisse il est aisé de compter les résidus et de mesurer leurs aires individuelles. Exception faite des problèmes soulevés par des particules excessivement irrégulières, les résidus auront une forme angulaire qui peut être caractérisée en première approximation par l'ANGLE AU SOMMET (\hat{S}) et le RAYON DE COURBURE de la pointe (λ_x) (Fig.6.3.). La dispersion des résidus pourrait être quantifiée par la séparation angulaire entre les droites joignant le centre de l'objet et la base de chaque aspérité angulaire. Enfin, l'orientation de la bissectrice de tous les angles relativement aux droites tracées précédemment pourrait être exploitée, etc... Un troisième niveau de forme représenté par des aspérités secondaires greffées sur les premières pourrait être abordé de manière analogue (soustraction d'un "résidu lisse") etc...

La complexité du problème morphométrique apparaît vite effrayante, mais rares sont les applications qui pourraient nécessiter d'aller véritablement aussi loin. Nous avons vu que la mesure de l'élongation est un problème correctement résolu par les méthodes d'inertie [Medalia,1970] éventuellement accompagnées d'une correction par la mesure du Féret. En revanche, il est évident que les méthodes automatiques sont incapables de différencier correctement les figures 6.1.E et 6.1.F et encore moins de fournir une quantification de la morphologie des résidus conforme aux exigences des lois d'abrasion [cfr.§ 3.4.4.]. Nous allons tenter d'atteindre modestement ce but en utilisant tout d'abord des concepts existants en morphologie mathématique et en développant ensuite nos propres outils en métrique euclidienne.

6.2 Un descripteur intéressant: le squelette.

L'intérêt de représenter des objets binaires sous une forme autre que l'image (bitmap) est évident que ce soit du point de vue de la compression ou même de l'analyse. Dans ce dernier cas, il est essentiel que le descripteur utilisé préserve autant que possible les propriétés initiales de l'objet et qu'il permette d'accéder aisément à tout type d'information géométrique. Ainsi, une chaîne de Freeman possède la propriété intéressante de conserver la perception locale du contour (les relations entre un pixel et ses voisins immédiats), mais elle ne permet pas de percevoir ce qui se passe *en face* dans le cas de contours fermés. A quelle distance est le contour qui fait face? Quelle est sa morphologie? etc...

Blum[1962] a popularisé un descripteur morphologique appelé *Medial Axis* qui répond de façon élégante à ce problème. Le concept qu'il développe avait été étudié dès Motzkin[1935] et l'étude théorique a été reprise ensuite par Calabi[1965] et Matheron[1978,1988] sous le terme plus général de *squelette*.

La définition du squelette peut être donnée de deux manières quasi-équivalentes :

- 1) le squelette est le lieu des centres des disques maxima inscriptibles.
- 2) le squelette est le lieu des centres des disques qui touchent le contour en deux ou plusieurs endroits.

Ainsi défini, ce squelette possède deux propriétés fort intéressantes sur le plan morphologique:

- a. Il est *homotopique* c'est-à-dire qu'il a la même connexité que l'objet associé.
- b. Il permet la régénération complète de l'objet si à chacun de ses points est associé la valeur de sa distance au bord.

De la définition donnée en 1) il paraît évident que le squelette possède de fortes affinités avec les transformations de morphologie mathématique et en particulier l'ouverture par des disques (B). C'est Lantuejoul[1977] qui en a proposé l'écriture suivante :

$$S(X) = \bigcup_{\lambda > 0} \bigcap_{\mu > 0} [E^{\lambda B}(X) / O^{\mu B}(E^{\lambda B}(X))]$$

où $S(X)$: désigne l'ensemble des points du squelette.
/ : est l'opération de soustraction ensembliste.

Malheureusement, l'implémentation pratique d'un tel algorithme fournit un squelette totalement déconnecté et ce quelque soit la qualité de l'élément structurant utilisé pour approximer le disque (hexagone, octogone, ...). Le problème majeur est tout simplement que **la squelettisation est une opération non-digitalisable**. La figure 6.4. en fournit l'illustration.

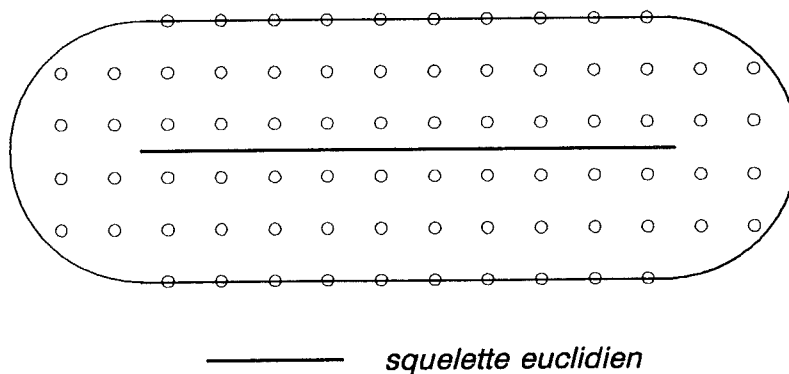


Fig.6.4. La définition euclidienne du squelette n'est pas transposable sur la trame discrète.

Face à ce problème se sont développés un très grand nombre d'algorithmes pour construire des squelettes sur une trame digitalisée en maintenant autant que possible l'homotopie. Ces algorithmes s'inspirent d'une façon ou d'une autre de la notion d'*amincissement* qui est une extension de la notion d'érosion permettant de traiter une image en termes de configuration de voisinage. Ainsi, l'amincissement d'une image par une configuration du type :

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 1 & \\
 & 1 & \\
 0 & 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & 1 & \\
 1 & 1 & 0 \\
 1 & &
 \end{array}$$

(L) (M)

où \cdot signifie indifféremment 1 ou 0

consiste à retirer de l'image tous les pixels dont le voisinage élémentaire correspond à une configuration de ce type.

Ce sont précisément ces deux types de voisinages, notés L et M dans l'alphabet de Golay, qui ont permis d'obtenir par itération répétée de chacune des 6 orientations possibles des squelettes homotopiques [Coster & Chermant, 1985].

Il convient bien de dire des squelettes homotopiques, car:

1. Le résultat dépend de la configuration utilisée (Fig.6.5.a.).

2. Il dépend aussi de l'ordre dans lequel les rotations se succèdent (Fig.6.5.b.).

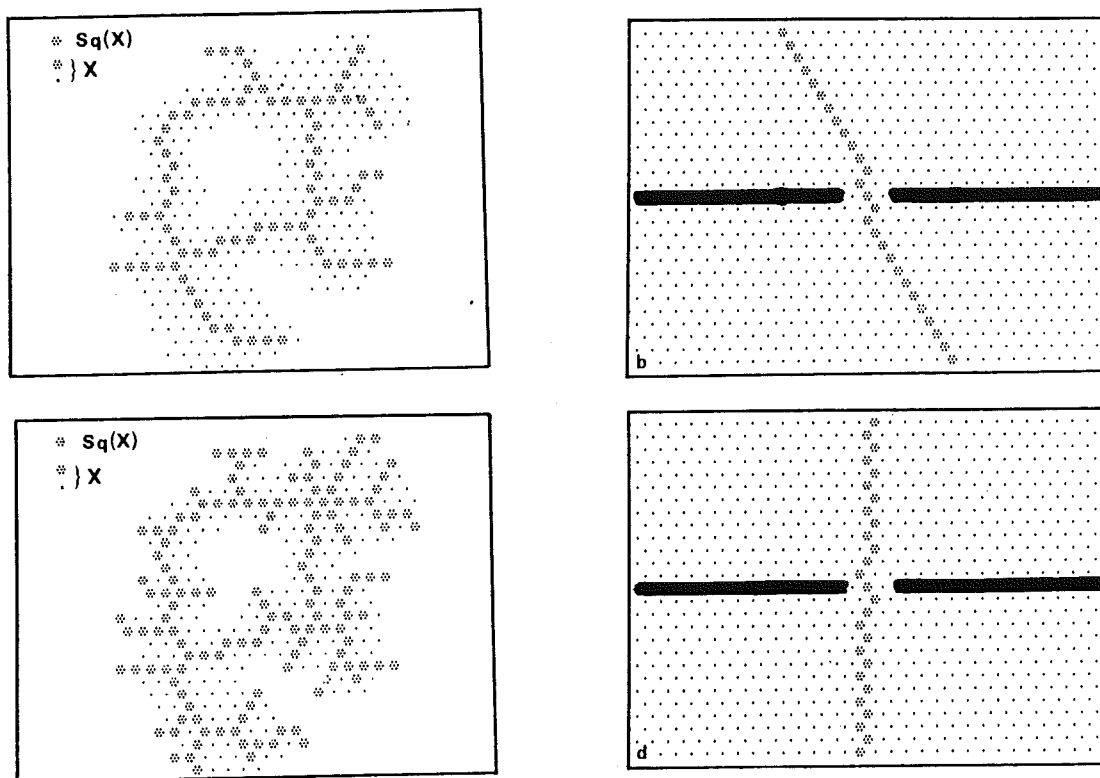


Fig. 6.5.a. Squelettisations par amincissement obtenues avec L_6 (haut) et M_6 (bas). [Coster & Chermant, 1985]

Fig. 6.5.b. Squelettisations par amincissement obtenues avec L_6 avec des séquences d'orientations différentes. Les traits noirs représentent X^c . [Coster & Chermant, 1985]

Les squelettisations par amincissements exigent au demeurant des durées de traitement insoutenables car proportionnelles à l'épaisseur des objets! A ce stade de la réflexion, il paraît utile de citer deux avis divergents sur les squelettes homotopiques. Ils sont issus de la même école à sept ans d'intervalle :

"The history of connectivity criteria has, for the last twenty years, seen involvement with the homotopically suspicious and non-digitalizable Euclidean notion of the skeleton. Dissatisfaction with its performance has led to short cuts and variants resulting in the homotopic thinnings, the conditional bisector, ... They are the positive results of this evolution of ideas " [Serra, 1982]

"...Affirmer que le squelette par amincissements homotopiques est apparenté au squelette par ouverture (boules maxima inscrites) procède plus de l'acte de foi que de la démonstration mathématique. Le crédit que l'on accorde à ce squelette est tellement faible que la seule propriété du squelette par amincissements réellement

utilisée est la propriété d'homotopie. Personne ne songerait sérieusement à utiliser certains points caractéristiques du squelette connexe comme descripteurs de forme de l'ensemble initial!..." [Beucher,1989]

Dans le travail précité, Beucher a cherché à mieux comprendre les relations entre le squelette par ouverture et les amincissements. Il en déduit la possibilité de construire des *squelettes lisses*, c'est-à-dire peu sensibles au bruit, en utilisant l'amincissement d'un ensemble X par l'union (et non la succession) des diverses rotations et symétries d'un élément structurant noté :

$$\begin{array}{ccc} \varnothing & & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{array}$$

où 0 : désigne un pixel de X^c .
 1 : désigne un pixel de X .
 \varnothing : désigne un pixel de $[X / OH(X)]^c$

Comme l'illustre la figure 6.6, ce squelette est stable et lisse si l'ensemble de départ est déjà un ouvert $OH(X)$! Mais, paradoxalement ce squelette ne passe pas par les centres des hexagones maxima inscrits et reste excessivement lent sur un processeur unique.

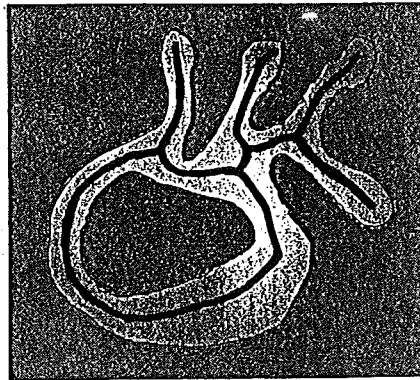


Fig.6.6 Squelette lisse par amincissement [Beucher,1989]

6.2.1 Algorithmes de squelettisation rapide.

En considérant que la meilleure image possible du squelette sur une trame discrétisée est constituée par l'ensemble des centres de Disques Maxima Incrits (**MID**) reliés en une

configuration homotopique de l'objet, il est logique d'abandonner le principe des amincissements successifs pour rechercher un moyen d'identifier les centres de ces MID. A cet égard, la fonction distance discrète possède une propriété remarquable puisque les maxima locaux de cette fonction ne sont autre que les centres recherchés. Ainsi, en trame hexagonale :

$$S^H(X) = \{p \in X : \forall p_i \in V^H(p), d_p^H \geq d_{p_i}^H\}$$

avec $S^H(X)$: l'ensemble des centres d'hexagones maxima inscrits.
 $V^H(p)$: le voisinage hexagonal élémentaire du point p .
 d_p^H : distance hexagonale de p au contour de l'objet $C(X)$.

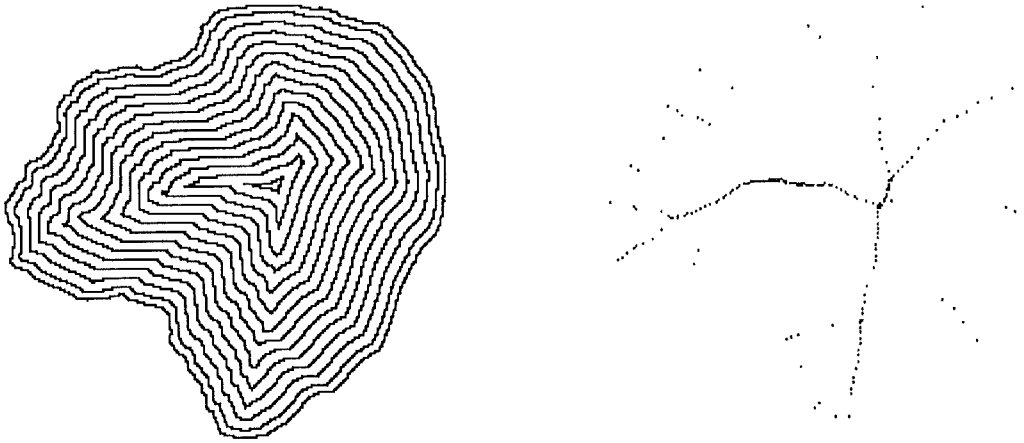


Fig. 6.7. Maxima locaux de la fonction distance hexagonale.

La figure 6.7. illustre l'obtention de $S^H(X)$ par recherche des maxima locaux. Cette propriété a été exploitée en trame octogonale par Arcelli et al.[1981], elle est aussi présente dans les algorithmes de Meyer[1988;1989] et Vincent[1991]. Ce dernier exploite très astucieusement la logique de l'amincissement homotopique par (L) pour rejoindre les maxima locaux qu'il considère comme des *points d'ancrage* ou points de passage obligé du squelette (Fig.6.8.). Les performances de l'algorithme sont spectaculairement améliorées par un traitement de type FIFO, tandis que la méthode ouvre la porte au calcul d'une variété de squelettes à points d'ancrages différents.

Les résultats présentés ci-après ont été obtenus par le biais de squelettisations réalisées selon la méthode proposée par Meyer[1989]. L'idée de base est toujours de détecter sur la fonction distance des configurations qui appartiennent sûrement au squelette et ensuite de les

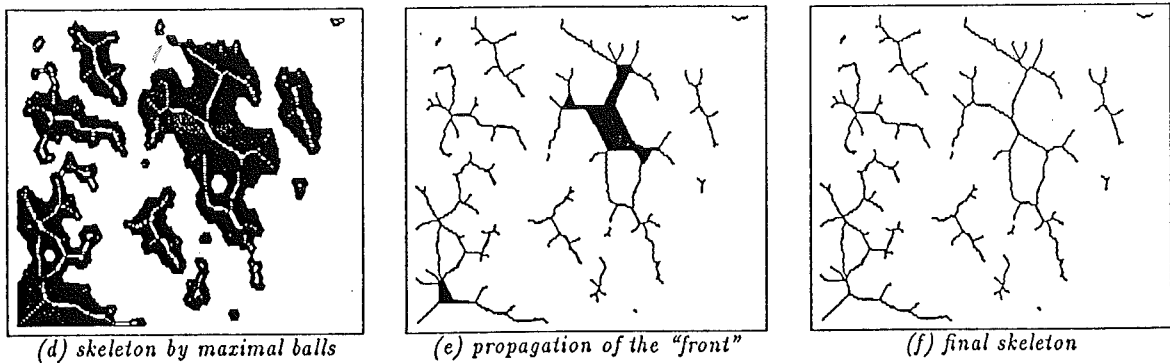


Fig.6.8. Squelettisation par amincissement et points d'ancrage [Vincent,1991]

rejoindre. Les premiers points détectés sont un sous-ensemble dense des points du squelette appelés *points crêtes* en raison de l'analogie entre le squelette et la ligne de crête du relief engendré par la fonction distance. Il existe dans ces points crêtes deux types de points :

- les maxima locaux (c-à-d $S^H(X)$) qui seront appelés dans ce contexte points **sans amont trivial**. (Figure 6.9.)
- les **paires/points localement séparables**, c-à-d tout point ou paire de points situés au même niveau et dont l'aval est constitué de deux composantes disjointes. (Figure 6.9.)

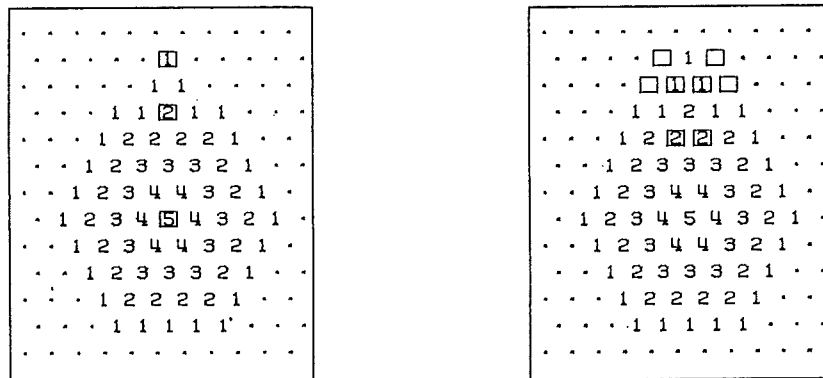


Fig. 6.9. Identification des maxima locaux et des paires localement séparables sur une fonction distance hexagonale [Meyer,1988]

Ces points crêtes sont aisément identifiés sur une fonction distance en recherchant les configurations (aux rotations près) :

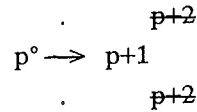
$$\begin{array}{ccccccc}
 & < & < & & \cdot & & \leq & & \cdot & & p+1^\circ \\
 < & & p^\circ & < & \text{et} & \cdot & & p^\circ & & p^\circ & \text{et} & \cdot & & p^\circ & & p^\circ \\
 & < & & < & & \cdot & & \leq & & \cdot & & & & p+1^\circ & & p+1^\circ
 \end{array}$$

et en ne conservant que les pixels marqués °.

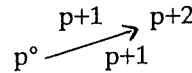
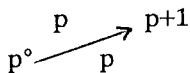
avec $<$: pixel de valeur inférieure à p
 \cdot : pixel de valeur indifférente.

La figure 6.10. illustre l'obtention des points crêtes sur une fonction distance. Sauf quelques exceptions, ces points constituent un sous-ensemble dense mais déconnecté du squelette recherché. Pour rejoindre ces points, l'idée est simplement de partir de chacun de ceux-ci et de chercher à monter le plus vite possible sur le relief de la fonction. Ceci oblige à regarder des voisinages dodécagonaux et à identifier les configurations suivantes :

Dans les directions $k \cdot \frac{\pi}{3}$



Dans les directions $\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}$



avec \cdot : pixel de valeur indifférente.
 $p+2$: pixel de valeur différente de $p+2$.

La figure 6.11. illustre le squelette complet ainsi obtenu.

Signalons que Meyer[1989] a étendu cet algorithme à toute fonction par le biais de la réalisation d'une fonction complète et la caractérisation des points non-crête. Le squelette ainsi obtenu possède les avantages suivants :

- Il est rigoureusement homotopique.
- Il passe par les centres des hexagones maxima inscrits.



Fig.6.10. Points crêtes sur la fonction distance de la Fig.6.7.

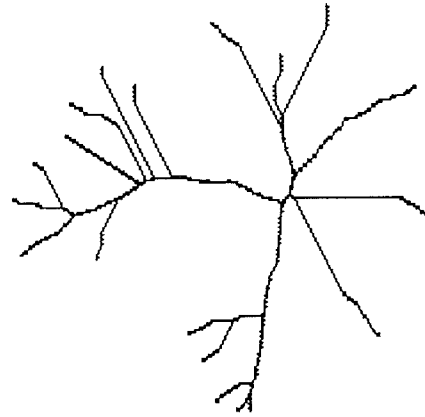


Fig.6.11. Squelette homotopique par remontée au départ de la fig.6.10.

- Il est unique pour une fonction distance donnée ¹.

6.2.2 Les points remarquables du squelette.

Quittons un instant le cadre strict du squelette obtenu sur une métrique hexagonale, pour examiner les caractéristiques générales d'un squelette marqué par les valeurs de la distance au contour (ce que nous appellerons la *fonction d'extinction*). La figure 6.12. illustre quelques géométries très simples avec le squelette euclidien associé et la fonction d'extinction correspondante.

6.2.2.1 Les Erodes Ultimes (E).

Un point de type E est un maximum régional de la fonction distance, c'est par définition également un maximum régional de la fonction d'extinction. En l'exprimant différemment, nous pouvons dire que E est un **point sans amont**, dans le sens où il n'est pas possible de rejoindre un point de plus haute altitude ($d_I > d_E$) sans obligatoirement transiter par une altitude inférieure ($d_I < d_E$). E peut être un point unique (Fig.6.12.A) ou un ensemble de points connexes (Fig.6.12.B). Fréquemment il existe plusieurs érodés ultimes discontinués (Fig.6.12.C).

¹ Ce qui n'implique pas nécessairement sa robustesse vis-à-vis de la rotation et de l'homothétie.

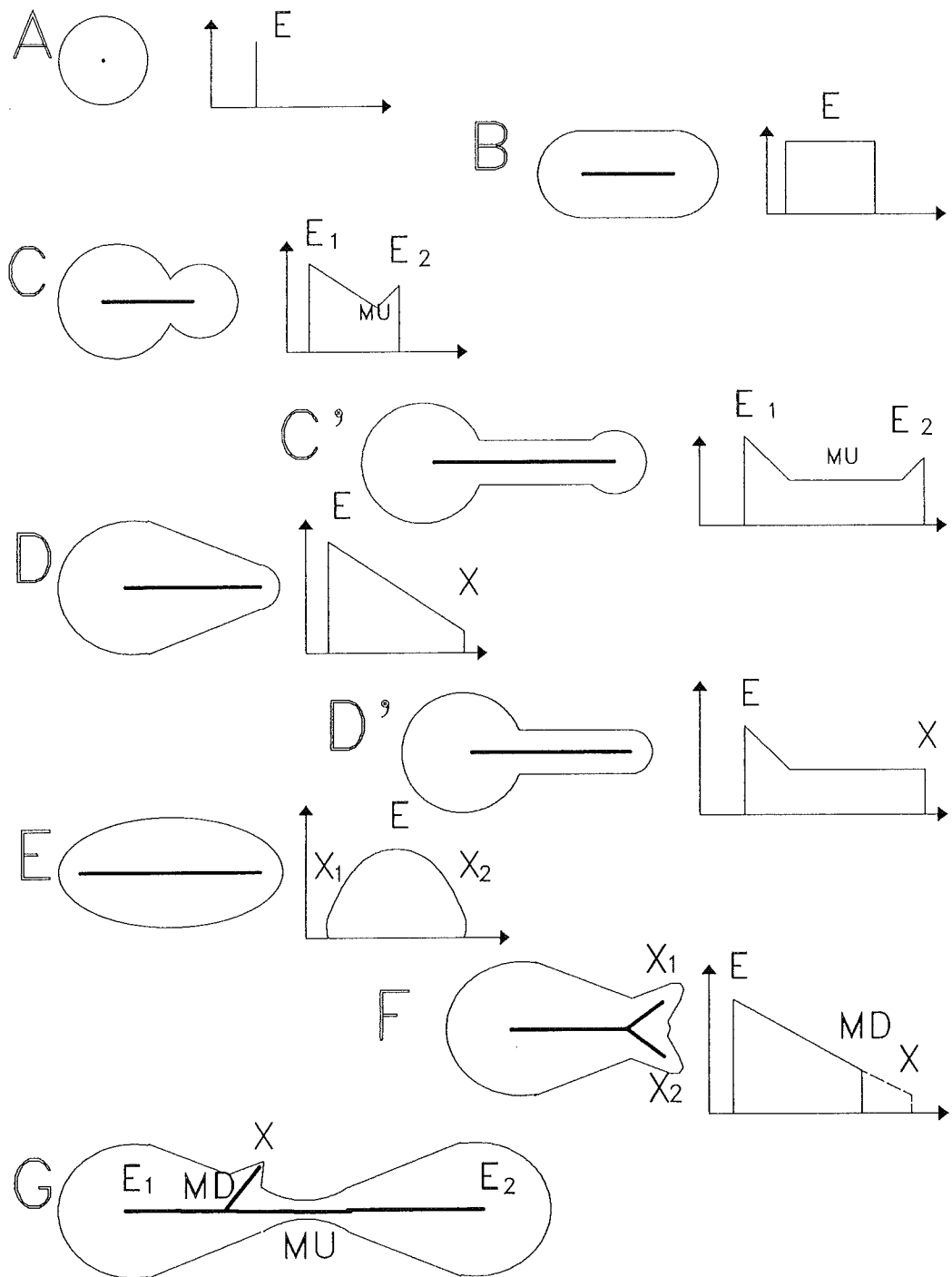


Fig.6.12. Squelette euclidien, fonction d'extinction et points remarquables du squelette pour quelques formes caractéristiques.

6.2.2.2 Les points à Amont Multiple (MU).

Dans le cas où il existe deux érodés ultimes, le chemin de plus haute altitude rejoignant E_1 à E_2 passe obligatoirement par un minimum (MU) (Fig.6.12.C,C',G). Il est aisé de montrer que ce chemin n'est autre que le squelette et que les MU sont les **points possédant deux amonts** de la fonction d'extinction (MU= Multiple Upstream). En termes topographiques un MU est en réalité un col sur une fonction distance, c'est-à-dire un point (ou groupe de points) possédant deux amonts déconnectés par deux avals. Le nombre de zones connexes de MU est égal au nombre d'érodés ultimes moins un.

6.2.2.3 Les extrémités (X).

La figure 6.12.D introduit un troisième type de point caractéristique que nous appellerons point extrémité (X). Il s'agit d'un minimum local de la fonction d'extinction, mais qui n'est pas situé entre deux E contrairement aux MU. Un X est un **point possédant exclusivement un amont** sur la fonction d'extinction. La figure 6.12.D' indique que la fonction d'extinction peut présenter un minimum en plateau. Dans ce cas, le seul point possédant exclusivement un amont est bien le point situé à l'extrémité du plateau. Remarquons dès à présent que le repérage d'un tel point directement au départ de la fonction distance n'est généralement pas possible. Propriété intéressante, il y aura autant de points X sur un squelette qu'il y a d'aspérités sur le contour d'une forme.

6.2.2.4 Les points à Aval Multiple (MD).

La figure 6.12.F introduit un dernier type de point remarquable : le **point à aval multiple** sur la fonction d'extinction (MD= Multiple Downstream). Un tel point généralement appelé *noeud* est toujours situé en amont d'au moins deux minima du squelette (soit X_1, X_2 (Fig.6.12.F), soit X, MU (Fig.6.12.G)). Ce point fait partie des points crêtes identifiés sur la fonction distance hexagonale.

6.2.3 Analyse critique de la squelettisation.

En dépit de la remarque faite par Beucher, il est très (trop?) courant de voir que la squelettisation d'une forme est proposée en classification / reconnaissance de formes. En analysant la question de plus près, il est pourtant manifeste que le squelette possède d'assez mauvaises propriétés et que son utilité est très limitée en morphométrie.

6.2.3.1 Sensibilité.

Même en considérant le cas idéalisé du squelette euclidien, la sensibilité de la géométrie du squelette au bruitage du contour est excessive ainsi que l'illustre la figure 6.13.. Pour cette raison, toute mesure basée sur un dénombrement de branches ou une longueur du squelette est à prendre avec suspicion. Surtout si l'objet de référence est épais!

Dans son implémentation discrète, cette sensibilité du squelette est encore accrue puisque tout contour lisse devient par discrétisation un contour polygonal. Paradoxalement, un objet lisse tel qu'un disque aura après discrétisation un squelette très long puisque constitué d'un grand nombre de barbules.

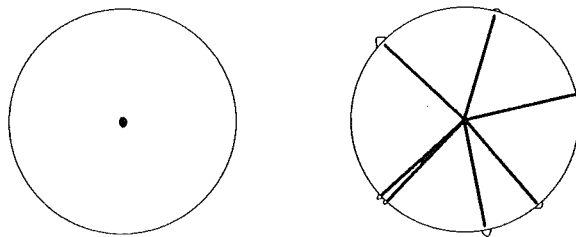


Fig.6.13. Squelettes euclidiens. La moindre aspérité sur le contour provoque l'apparition d'une branche.

6.2.3.2 Robustesse.

Pour la même raison que ci-dessus, la robustesse à l'homothétie et à la rotation est mauvaise. Cette dernière est particulièrement sensible lorsque l'opération est effectuée sur une métrique non-euclidienne. Cas extrême en trame hexagonale, le squelette d'un hexagone peut se résumer à un point ou au contraire éclater en 6 branches dès qu'une rotation de quelques degrés est appliquée (Fig.6.15.). Les versions dérivées du *squelette lisse* de Beucher[1989], *squelette d'ordre M* de Vincent[1991] ou même du *squelette minimal* de Meyer[1989] sont des implémentations plus robustes.

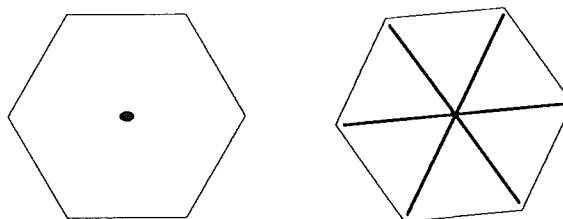


Fig.6.15. Squelette d'un hexagone coïncidant exactement avec les axes principaux de la trame. Squelette du même hexagone après une légère rotation.

6.2.3.3 Accessibilité.

Les procédures de squelettisation ont progressé de façon remarquable ces toutes dernières années. L'image d'un squelette connexe et relativement robuste peut être obtenue en quelques secondes. Mais, il faut bien comprendre que du point de vue de l'analyse morphométrique, l'image du squelette n'est qu'une étape transitoire et que toute l'analyse reste à faire. Plusieurs balayages d'images seront souvent nécessaires pour dénombrer des points caractéristiques, identifier des branches, les mesurer, etc... sans parler de la difficulté de gérer une information structurée de manière arborescente.

6.2.3.4 Spécificité.

Le squelette exprime géométriquement la présence de symétries locales sur le contour d'un objet. Il n'est pas un outil de différenciation morphologique très performant. En pratique, la spécificité la plus intéressante du squelette est de réduire une forme à *un assemblage de traits d'épaisseur élémentaire*. Si par squelettisation la morphologie de l'objet est sensiblement préservée (ce qui est le cas pour les caractères de l'alphabet p.ex.) alors l'analyse du squelette peut s'avérer plus simple à réaliser. Ainsi, le repérage d'une fourche sur la figure 6.16. est plus aisé par squelettisation et recherche d'un point triple (MD) que par la recherche d'inflexions le long du contour. Rares sont les objets dont l'analyse morphologique est réellement facilitée par une squelettisation. Bien souvent, la squelettisation ne fait que reporter le problème de l'analyse morphométrique de l'objet vers le squelette et ne résoud rien (Fig.6.17.).

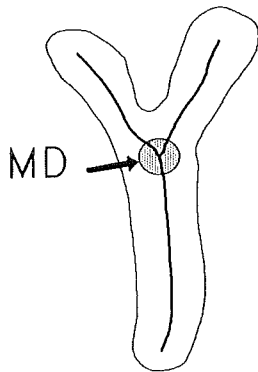


Fig.6.16. Identification aisée d'un embranchement par recherche de point-triple.

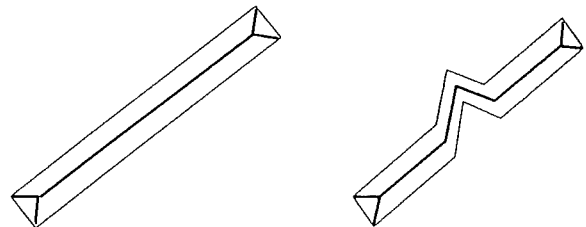


Fig.6.17. Le problème de l'analyse morphométrique est reporté de l'objet sur le squelette.

6.3 Utilisation de la fonction d'extinction et du squelette en analyse morphométrique.

Pour la grande majorité des formes que nous considérons, qui sont quasi-isométriques et peu concaves, le squelette binaire est une image très pauvre de la morphologie, nous pouvons même dire sans intérêt. Il est indubitable que l'information la plus intéressante réside dans la fonction d'extinction. Celle-ci ouvre la voie à l'analyse de caractéristiques difficilement accessibles autrement et va permettre de réduire l'impact de la mauvaise robustesse du squelette.

6.3.1 Analyse de la rugosité globale.

En début de chapitre nous avons souligné cette évidence que pour pouvoir parler de rugosités il faut au préalable pouvoir définir ce qui est lisse. Ce problème est moins trivial qu'il n'y paraît à première vue. Par analogie avec l'analyse des profils ouverts, nous serions tentés de prendre comme référence lisse le simple **Disque Maxima Inscrit**. Nous avons vu à la figure 6.12.B que cette notion n'est pas totalement correcte puisque l'érodé ultime peut être un ensemble de points connexes plutôt qu'un point unique. En conséquence, il convient d'étendre la notion de référence lisse à la notion d'**Ouvert Ultime** $O^{\lambda_\epsilon}(X)$. Malheureusement, la notion d'**Ouvert Ultime** est une notion géométriquement très instable. Comme l'illustre la figure 6.18. un rétrécissement infinitésimal restreint l'érodé ultime à un seul point au lieu d'une droite !... ce qui a un effet catastrophique sur l'aire de l'**Ouvert Ultime**. Pour traiter correctement le problème, il faut manifestement adopter une tolérance ($\gamma \in [0, 1]$) et considérer comme référence lisse un **Ouvert Ultime Modéré** ($O^{\lambda_M}(X)$ avec $\lambda_M = \gamma \lambda_\epsilon$). A ce niveau, il n'est pas possible de fixer γ de manière définitive et il est clair que cela dépendra de l'application envisagée (Fig.6.19.). Une proposition pratique que nous ferons plus loin sera de le fixer en référence à l'élongation. Dans une grande majorité de cas il est judicieux d'adopter au moins $\gamma = 0,8$.

Un dernier problème qui peut paraître plus académique mais mérite d'être pris en considération est celui de la connexité de la référence lisse. Il suffit en effet d'une très petite concavité sur le contour pour provoquer une rupture homotopique par érosion, c'est-à-dire l'existence de deux ou plusieurs érodés ultimes déconnectés. En règle générale, l'**Ouvert Ultime Modéré** construit sur ces E_i sera homotopique de l'objet initial, mais des concavités plus marquées peuvent générer une rupture homotopique par ouverture de taille λ_M . Dans ce dernier cas, il apparaît intuitivement évident que l'aire comprise entre les deux composantes de $O^{\lambda_M}(X)$ ne peut être comptabilisée comme de la rugosité. Nous considérerons dès lors que la référence lisse d'un objet quelconque doit être déterminée par un ouvert ultime qui a la même connexité. Remarquons de suite que l'ouvert recherché n'est pas l'ouvert de plus petite taille ($\lambda_i \leq \lambda_M$) qui préserve l'homotopie, sinon cela reviendrait à imposer une contrainte

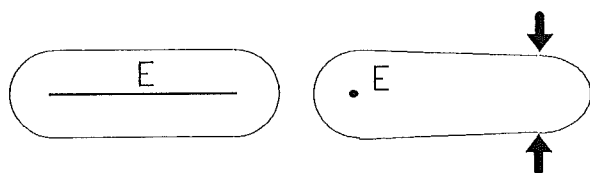


Fig.6.18. Instabilité de l'érodé ultime.

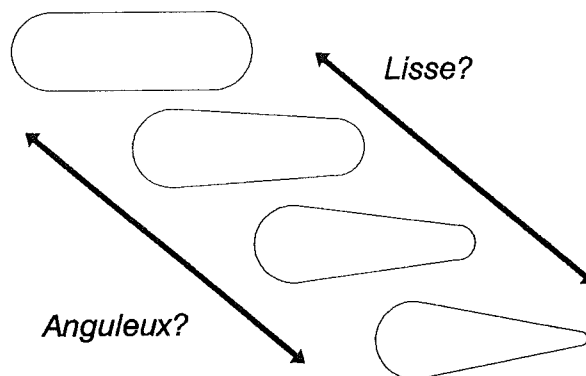


Fig.6.19. La limite entre le caractère lisse et le caractère anguleux dépend de l'application. C'est elle qui fixe la définition de l'Ouvert Ultime Modéré.

incohérente sur λ_M (Fig.6.20.). Remarquons aussi que le double critère homotopie et λ_M n'est pas correct non plus (Fig.6.21.), mais qu'il faut adopter une notion différente incluant des disques maxima inscrits de rayon $< \lambda_M$.

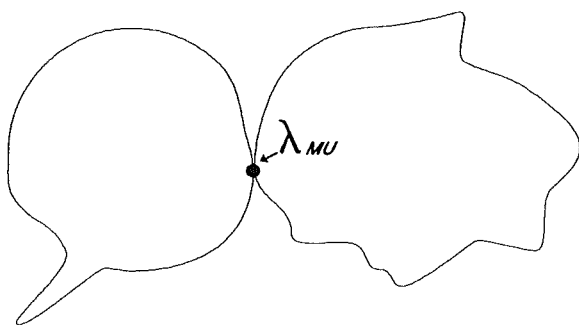


Fig.6.20. La rupture homotopique peut survenir pour une ouverture de très petite taille (λ_M) qui en d'autres points de l'objet correspond très nettement à de la rugosité.

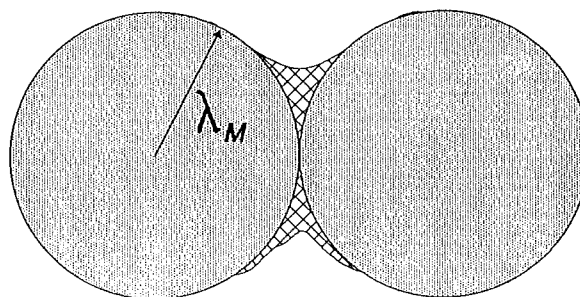


Fig.6.21. Considérant qu'un tel objet est-lisse, il n'est pas satisfaisant d'adopter comme "référence lisse" l'Ouvert Homotopique de taille λ_M (grisé). Sinon, la zone hachurée sera comptabilisée dans la rugosité globale.

Ainsi :

La référence lisse d'un objet quelconque sera déterminée par l'Ouvert Ultime Homotopique Modéré (MUHO(X)), c'est-à-dire l'ensemble des disques de rayon supérieur ou égal à λ_M augmenté des disques supportés par le squelette minimal.

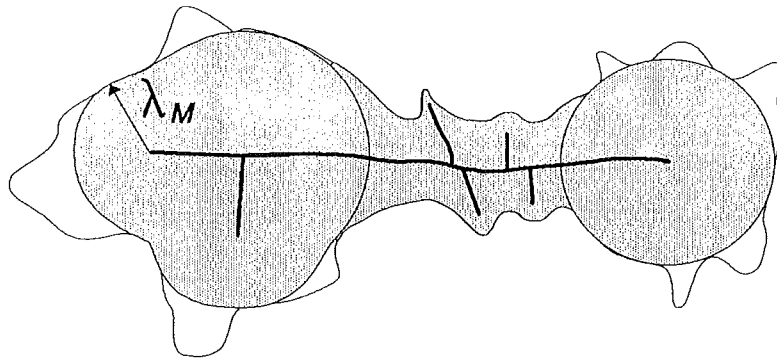


Fig.6.22. Illustration du MUHO(X) (référence lisse) sur un objet complexe.

La notion de squelette minimal a été introduite par Meyer[1989] comme étant le plus court squelette contenant les E_i et possédant la même homotopie que l'ensemble initial. Selon la terminologie que nous avons introduite pour les points caractéristiques, c'est l'ensemble des chemins joignant les MU_i aux E_i correspondants. La procédure recommandée par Meyer[1989] pour l'obtention du squelette minimal est complexe, elle implique de propager sur tout *plateau* de la fonction distance primaire une fonction distance secondaire exprimant la distance au bord amont du plateau et ensuite de relancer l'algorithme de squelettisation présenté au § 6.2.1.

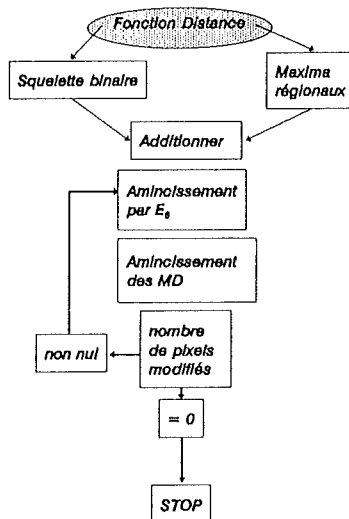
Nous avons utilisé une autre technique plus simple, mais moins élégante qui s'apparente dans son principe à celle que Vincent[1991] devait développer par la suite. Par recherche des maxima régionaux, nous identifions les érodés ultimes (E_i). Ceux-ci sont reportés sur l'image binaire où il sont codés à la valeur "2". Ainsi codés, ils vont représenter des points inamovibles pour une opération d'ébarbulation. Remarquons cependant que le simple ébarbulation par les rotations de :

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \end{array} \quad (\text{E de l'alphabet de Golay})$$

est insuffisant car il peut exister dans le squelette de Meyer des MD (points triples) qui ont une configuration du type :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \end{array}$$

Il convient de rajouter une clause permettant l'élimination de ces derniers dans le cas où il ne sont pas situés sur le squelette minimal. La procédure correcte devient :



Une fois le squelette minimal obtenu (fig.6.23.) , il est possible avec les valeurs de la fonction squelette de régénérer l'objet supporté par le squelette minimal. En trame hexagonale cela revient à appliquer l'algorithme de la fonction granulométrie.



Fig.6.23. Le squelette minimal (gras) en trame hexagonale et les résidus obtenus par soustraction du MUHO(X). La rugosité globale est la proportion en aire occupée par ces résidus.

Le calcul de la **Rugosité Globale** telle que nous l'avons défini est alors immédiat :

$$R_G = \frac{A(X) - A(MUHO(X))}{A(X)}$$

6.3.2 Analyse de l'angularité des résidus.

La soustraction de la référence lisse (MUHO(X)) fait apparaître les aspérités de la forme que nous avons désignées par le terme général de résidus. Dans le cas des poudres cristallines l'allure des résidus est toujours subangulaire. Cela revient à dire que le résidu est sous-tendu par une unique branche de squelette d'allure raisonnablement rectiligne.

La caractérisation morphologique d'un résidu angulaire peut se faire en première approximation par la mesure de l'angle d'ouverture (\hat{S}) et du rayon de courbure au sommet (λ_x) Cette façon de faire à l'avantage d'être cohérente avec la description des poinçons synthétiques utilisés dans les tests d'abrasion.

Considérons la figure 6.24. qui illustre un résidu *idéal* et son squelette euclidien. L'angle \hat{S} peut se calculer facilement au départ de la fonction d'extinction. En effet,

$$\frac{d_{XS}}{d_{UX} + d_{XS}} = \frac{\lambda_x}{\lambda_U}$$

d'où

$$d_{XS} = \frac{\lambda_x}{\lambda_U} \cdot d_{UX} + \frac{\lambda_x}{\lambda_U} \cdot d_{XS}$$

et

$$d_{XS} = \frac{\lambda_x}{\lambda_U - \lambda_x} \cdot d_{UX}$$

Or,

$$\hat{S} = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{\lambda_x}{d_{XS}}\right)$$

Soit

$$\hat{S} = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{\lambda_U - \lambda_x}{d_{UX}}\right)$$

où d_{XS} : est la distance euclidienne de X à S.

Ce calcul n'est pas transférable tel quel à la fonction squelette obtenue en trame hexagonale. Mais heureusement, nous pouvons démontrer qu'il est possible d'obtenir l'estimation non-biaisée des angles en trame hexagonale à condition qu'ils fassent moins de 120°. Cette dernière restriction n'est pas trop gênante en pratique car des aspérités présentant une ouverture supérieure à 120° sont souvent insignifiantes.

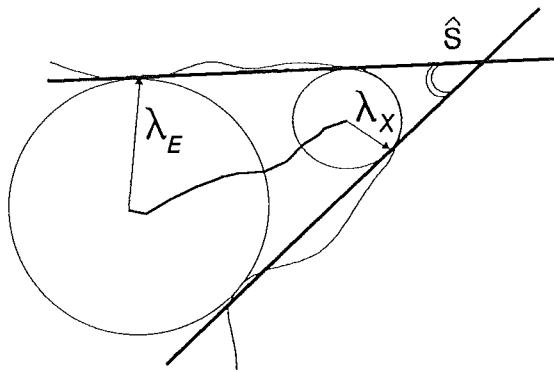


Fig. 6.24. Caractérisation d'un résidu en métrique euclidienne.

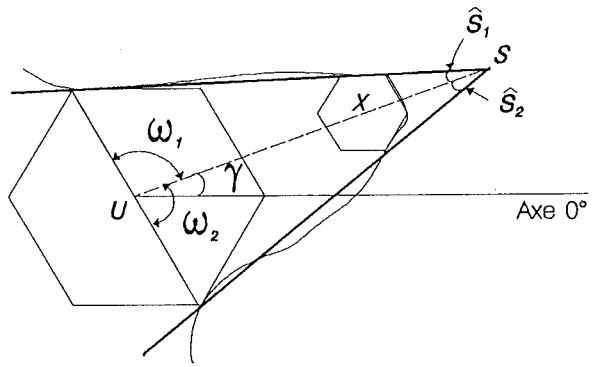


Fig. 6.25. Caractérisation d'un résidu sur une trame hexagonale.

La figure 6.25. illustre la description d'un résidu angulaire sur une trame hexagonale. Dans ce cas, le calcul repose sur la taille des deux hexagones inscrits λ_U^H et λ_X^H . Le calcul correct de \hat{S} doit être effectué en deux parties $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$ car le squelette n'est pas la bissectrice de l'angle. Plus exactement, le squelette ne correspond à la bissectrice de l'angle que dans les seuls cas où il est orienté selon une des directions principales de la trame ($\gamma = k \cdot \frac{\pi}{3}$).

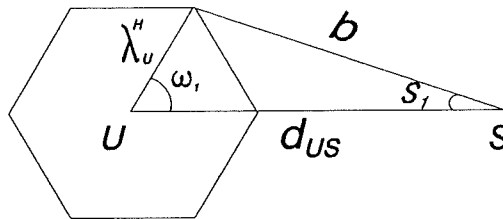


Fig. 6.26. Construction géométrique pour le calcul de \hat{S} .

La construction géométrique de la figure 6.26. fournit les relations suivantes par le théorème du sinus :

$$\sin \hat{S}_1 = \frac{\lambda_U^H \cdot \sin \hat{\omega}_1}{b}$$

or

$$b^2 = (\lambda_U^H \cdot \sin \hat{\omega}_1)^2 + (d_{US} - \lambda_U^H \cos \hat{\omega}_1)^2$$

d'où

$$\sin \hat{S}_1 = \frac{\lambda_U^H \cdot \sin \hat{\omega}_1}{\sqrt{(\lambda_U^H)^2 + d_{US}^2 - 2 \cdot \lambda_U^H \cdot d_{US} \cdot \cos \hat{\omega}_1}}$$

et

$$\sin \hat{S}_2 = \frac{\lambda_U^H \cdot \sin \hat{\omega}_2}{\sqrt{(\lambda_U^H)^2 + d_{US}^2 - 2 \cdot \lambda_U^H \cdot d_{US} \cdot \cos \hat{\omega}_2}}$$

La fonction d'extinction nous donne la valeur de λ_U^H et permet simplement de calculer:

$$d_{US} = \frac{\lambda_U^H \cdot d_{UX}}{(\lambda_U^H - \lambda_X^H)}$$

Il suffit dès lors de connaître les valeurs de $\hat{\omega}_1$ et $\hat{\omega}_2$ pour pouvoir calculer exactement l'angle au sommet (\hat{S}). Or, $\hat{\omega}_1$ et $\hat{\omega}_2$ dépendent d'une part de l'orientation du squelette relativement à un des axes principaux de la trame (en hexagonal $\gamma \in [0^\circ, 30^\circ]$) et d'autre part du *mode de tangence* des côtés de l'angle aux hexagones inscrits. La valeur de γ se déduit aisément des coordonnées des points U et X fournis par le squelette.

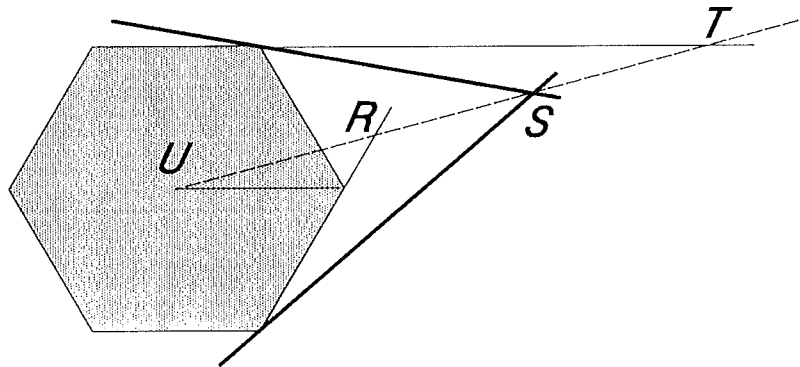


Fig.6.27. Construction géométrique pour déterminer le mode de tangence aux hexagones maxima inscrits.

Pour connaître le *mode de tangence*, il faut différencier trois situations possibles qui sont illustrées à la figure 6.27.. Soient R et T les points d'intersection entre l'axe du squelette et la prolongation des côtés de l'hexagone, soit S le sommet de l'angle enveloppe. La fonction d'extinction combinée au squelette fournit :

$$d_{UR} = \lambda_U^H \cdot \frac{\sin 120}{\sin(60 - \gamma)} \quad \text{et} \quad d_{UT} = \lambda_U^H \cdot \frac{\sin 120}{\sin \gamma}$$

1) $d_{US} \leq d_{UR}$

cela signifie que l'angle s'appuie sur deux sommets consécutifs de l'hexagone (tangence à 60°) dans ce cas,

$$\hat{\omega}_1 = 60 - \gamma$$

$$\hat{\omega}_2 = \gamma$$

$$2) d_{UR} < d_{US} \leq d_T$$

cela signifie que l'angle s'appuie sur deux sommets alternés de l'hexagone (tangence à 120°) dans ce cas,

$$\hat{\omega}_1 = 60 - \gamma$$

$$\hat{\omega}_2 = 60 + \gamma$$

$$3) d_{UT} < d_{US}$$

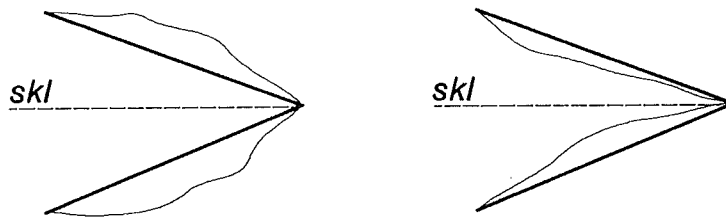
cela signifie que l'angle s'appuie sur deux sommets opposés de l'hexagone (tangence à 180°) dans ce cas,

$$\hat{\omega}_1 = 120 - \gamma$$

$$\hat{\omega}_2 = 60 + \gamma$$

Les considérations théoriques développées dans les paragraphes qui précèdent ont montré qu'il est possible d'estimer sans biais des angles inférieurs à 120° . En pratique, pour qu'une telle estimation soit possible il ne faut pas perdre de vue les aspects suivants :

- l'angle calculé est un angle qui s'appuie sur les points extrêmes du squelette associé au résidu. Par conséquent, le résidu est assimilé à un angle formé par deux segments rectilignes.



- le point U ne correspond pas à un point caractéristique du squelette, il doit être identifié par une construction géométrique distincte.

- le squelette du résidu est lui aussi assimilé à un segment raisonnablement rectiligne.

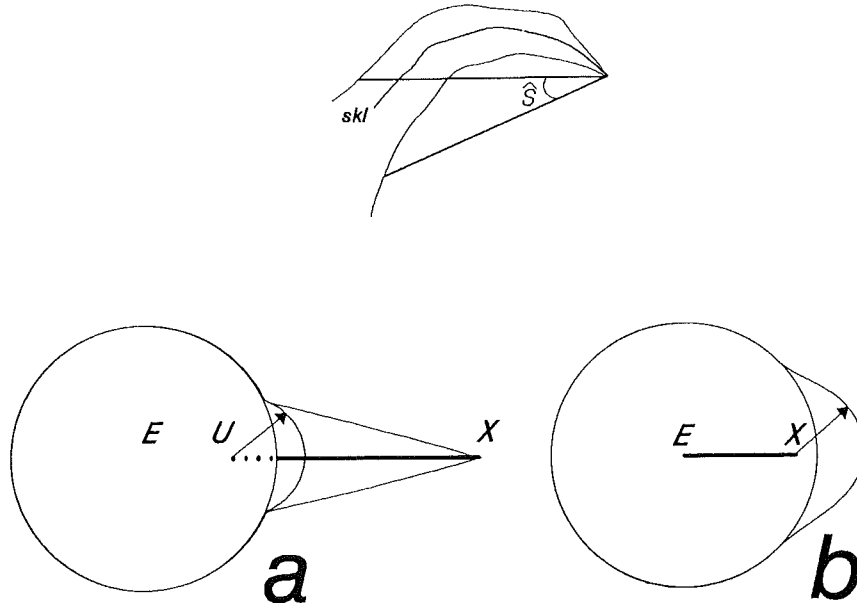


Fig.6.28. a) Le point le plus amont du squelette du résidu (U) n'est pas inclus dans le résidu. Son obtention nécessite une construction distincte. b) Lorsque le point extrémité (X) n'est pas inclus dans le résidu, l'aspérité n'est pas prise en compte dans l'analyse.

La figure 6.28. illustre bien que le squelette associé à un résidu ne correspond pas simplement à la partie du squelette original incluse dans le résidu, mais que le véritable point U se trouve plus en amont. Nous savons par construction que U sera un maximum régional de la fonction distance (un point sans amont trivial). Ainsi, la construction correcte du squelette associé à un résidu s'obtient comme suit :

- 1) Masquer le squelette original par le résidu considéré.
- 2) Ajouter les points sans amont trivial.
- 3) Effectuer la remontée selon les règles du § 6.2.1.
- 4) Conserver l'ensemble des points connexes de 1).

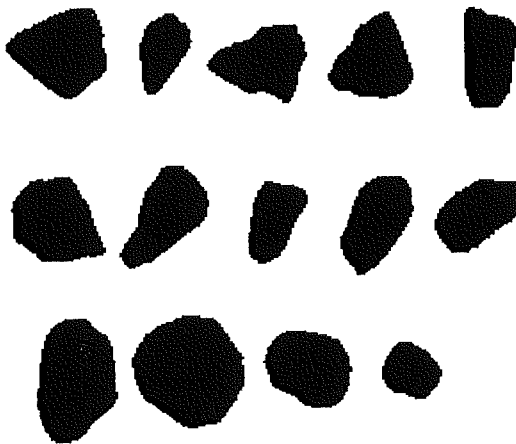
Notons que pour des résidus très émoussés et/ou peu proéminents, l'intersection du squelette avec le résidu (1) donnera l'ensemble vide (Fig.6.28.cas b) . Il n'y aura pas de squelette associé et en conséquence pas de calcul de l'angularité. Par définition, il s'agit-là d'aspérités peu significatives. Le fait de les négliger améliore sensiblement la robustesse de la méthode morphométrique.

6.3.3 Application aux grains de diamant.

La méthode d'analyse morphométrique des résidus a été appliquée aux 14 grains de diamants de la figure 5.34.. Etant donné que la majorité des grains comportent plusieurs aspérités significatives, il convient de trouver un moyen pour résumer l'information morphométrique. Les outils statistiques classiques sont peu efficaces sur les données angulaires et la signification de la moyenne des angles de plusieurs résidus laisse perplexe. Le choix qui a été fait dans le cas présent est de classer les grains en fonction de l'angle *le plus aigu*. Cinq classes ont été définies arbitrairement : A) $\hat{S} < 70$; B) $70 < \hat{S} < 80$; C) $80 < \hat{S} < 90$; D) $\hat{S} > 90$ et enfin, E) aucune aspérité significative. Au sein d'une même classe les grains sont classés par ordre d'émousé $\left(\frac{\lambda^H}{\lambda^H}\right)$ croissant. Une telle classification a été imaginée pour correspondre aux

besoins du contrôle qualité des poudres abrasives, il est évident que de tout autres critères auraient pu être envisagés. La figure 6.29. permet une évaluation visuelle des résultats obtenus et synthétisés dans le tableau 6.29..

n°	Angularité	Emousé
1	B	0.33
2	A	0.29
3	A	0.54
4	A	0.24
5	A	0.26
6	E	-
7	E	-
8	A	0.29
9	B	0.35
10	A	0.27
11	C	0.65
12	D	0.20
13	A	0.21
14	A	0.47



Tab.6.29. Analyse de l'angularité et de l'émousé sur les grains de la fig.5.34.

Fig.6.29. Classification des grains en fonction des aspérités les plus aiguës et les plus acérées. (Tab.6.29.)

6.3.4 Lecture de la fonction d'extinction sur les branches du squelette.

Les paragraphes précédents ont démontré qu'il est possible d'exploiter les données de la fonction d'extinction pour répondre aux besoins de l'analyse morphométrique. Les procédures proposées s'avèrent déjà très lourdes et pourtant ce n'est qu'une très petite partie de l'information contenue dans la fonction d'extinction qui a été exploitée. Deux points (X et U) ont pour l'instant suffi à caractériser une aspérité.

Dans le but d'affiner les performances de la méthode et surtout d'éviter la procédure de construction graphique du squelette du résidu, il paraît intéressant de tenter de relever l'entièreté de la fonction d'extinction. La manière la plus logique de structurer l'information consiste à la considérer branche par branche, c'est-à-dire à identifier les extrémités et à progresser au départ de chacune de celles-ci en *pistant* le squelette. Nous avons proposé une procédure de pistage pour le squelette en trame hexagonale qui est largement détaillée dans Moitroux[1991] et dont nous ne donnerons ici qu'un bref aperçu sous une forme remaniée et plus concise.

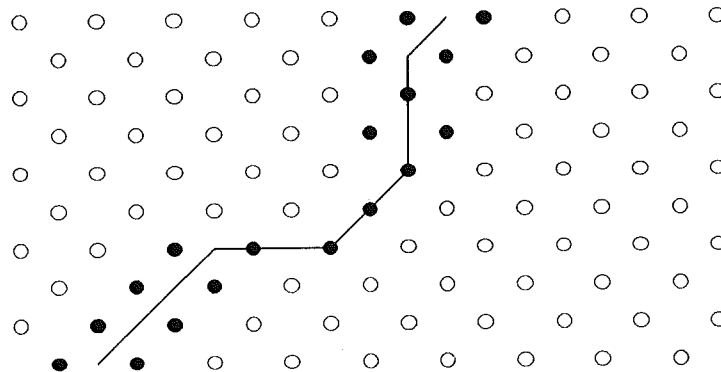


Fig. 6.30. Squelette de Meyer en trame hexagonale. Noter l'épaisseur double ou simple.

Le squelette hexagonal obtenu selon l'algorithme de Meyer[1989] possède soit une épaisseur simple, soit une épaisseur double selon que le squelette correspond exactement à un point de la trame ou passe entre deux pixels voisins (Fig.6.30.). Un premier balayage de l'image permet d'identifier les points caractéristiques (X et MD) du squelette et de les marquer.

Chaque X sert alors d'origine à une procédure de remontée qui se déroule comme suit en marquant au fur et à mesure les pixels parcourus :

- 1) Rechercher dans le voisinage du X les pixels qui sont non-nuls et ne sont pas également extrémités :

$$\begin{array}{ccc} & \cdot & \cdot \\ 0 & X & 0 \\ & 0 & 0 \end{array}$$

A

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \cdot \\ 0 & X & 0 \\ & 0 & 0 \end{array}$$

B

$$\begin{array}{cccc} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & X & X & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

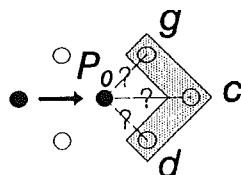
C

$$\begin{array}{cccc} & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & X & X & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

D

aux rotations près (et à la symétrie centrale près pour D).

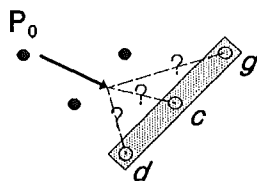
- 2) Si la branche passe sur un pixel unique (cas B et C) il convient de regarder à l'étape suivante un front de trois pixels :



Type A

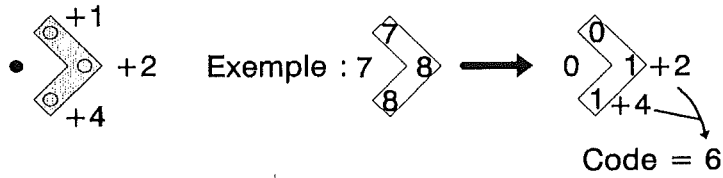
- 3) Si la branche du squelette passe entre deux pixels (cas A et D), il convient de regarder le front de trois pixels parallèle.

g, c et d désignent les pixels situés à gauche, au centre ou à droite relativement à la direction de propagation.



Type B

En codant dans ces deux types de front le caractère $\geq P_0$ du maximum du front, nous obtenons une configuration qui peut être codée selon la logique suivante.



Dans le front de type A, les codes suivants peuvent se présenter :

<u>VALEUR DU CODE.</u>	<u>ACTION A PRENDRE.</u>	<u>FRONT SUIVANT.</u>
code = 0	Stop !	---
code = 1 ou 2 ou 4	progresser vers le <u>seul</u> pixel en amont (g,c ou d).	type A
code = 3 ou 6	progresser entre les <u>deux</u> pixels en amont (gc ou cd).	type B
code = 5 ou 7	Stop !	----

Dans le front de type B, les codes suivants peuvent se présenter :

<u>VALEUR DU CODE.</u>	<u>PROGRESSER VERS :</u>	<u>FRONT SUIVANT.</u>
code = 0	Stop !	---
code = 1	--> g	+60°
code = 2	--> c	+0°
code = 3 et $g \geq c$	--> g	+60°
code = 3 et $g < c$	--> c	+0°
code = 4	--> d	-60°
code = 5	Impossible !	---
code = 6 et $d \geq c$	--> d	-60°
code = 6 et $d < c$	--> c	+0°
code = 7 et $g = d$	Stop !	---
code = 7 et $g > d$	--> g	+60°
code = 7 et $g < d$	--> d	-60°

Si un seul des trois pixels g,c ou d est déjà marqué par une autre remontée, la progression est arrêtée !

avec --> g; +60° : signifiant qu'il faut progresser au pas suivant vers le pixel "g" et considérer un nouveau front tourné de 60° dans le sens trigonométrique relativement au précédent.

--> d; -60° : signifiant qu'il faut progresser au pas suivant vers le pixel "d" et considérer un nouveau front tourné de 60° dans le sens horlogique relativement au précédent.

--> c; 0° : signifiant qu'il faut progresser au pas suivant vers le pixel "c" et considérer un nouveau front soit de type (2) soit de type (3) selon que le squelette est double ou simple.

Une progression caractéristique le long d'une branche double est illustrée à la figure 6.31. avec ses fronts successifs.

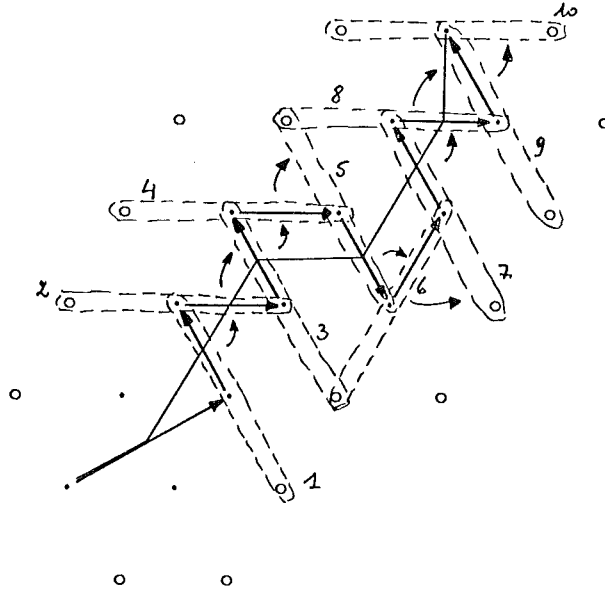


Fig.6.31. Progression sur le squelette de Meyer pour la lecture de la fonction d'extinction.

La procédure décrite ci-dessus n'est pas complète car elle n'envisage pas les problèmes spécifiques du squelette minimal (cfr. la procédure similaire de descente in Moitroux[1991]), elle peut néanmoins être utilisée pour un relevé détaillé de la fonction d'extinction relative à un résidu. Elle permet aussi de connaître la longueur géodésique exacte du squelette.

6.3.5 Conclusions.

L'utilisation du squelette en trame hexagonale et de la fonction d'extinction associée a permis de calculer des grandeurs (émoussé, angularité) correspondant aux notions présentes dans les chartes morphologiques traditionnelles. Il apparaît clairement que l'idée de décomposer une forme quelconque en un ensemble de disques maxima inscrits est un concept très puissant et il n'est guère étonnant que ce concept sous-tende toute la théorie de la Morphologie Mathématique. En revanche, les méthodes que nous venons de développer souffrent de plusieurs handicaps majeurs dont le moindre n'est pas la lenteur de la procédure! En admettant d'utiliser les algorithmes rapides de Vincent[1991] pour obtenir tant l'image du squelette complet que celle du squelette minimal, il n'en reste pas moins que la reconstruction du MUHO(X), la squelettisation des résidus et éventuellement la lecture complète de la fonction d'extinction sont des procédures titanesques en regard du résultat atteint. Sans compter que tous les calculs sont effectués sur une métrique hexagonale qui empêche toute estimation d'angles supérieurs à 120° . La complexité de gestion de la fonction d'extinction arborescente nous interdit d'espérer pouvoir aller beaucoup plus loin dans l'analyse morphométrique.

Le prochain chapitre qui traite d'une implémentation **euclidienne** paraissait il y a quelques mois encore pure folie, tant nous étions sûrs que les problèmes rencontrés en trame hexagonale risquaient très vite de s'avérer insurmontables dans leur version euclidienne. Heureusement, l'acharnement à trouver des solutions euclidiennes à nos problèmes allait permettre grâce à quelques astuces de simplifier considérablement la gestion de la fonction d'extinction...

6.4 Vers une véritable morphométrie euclidienne.

6.4.1 Les fonctions distance.

Au § 5.6.2.1. la notion de *fonction distance* a été présentée en trame hexagonale. Mais, de manière tout à fait générale, une fonction distance est une fonction qui attribue à tout point d'un objet binaire la valeur de sa plus courte distance au bord. Transposée sur une image discrétisée, une telle définition soulève plus de problèmes qu'il n'y paraît car tant la notion de **distance** que la notion de **bord** sont susceptibles de correspondre à plusieurs définitions. En règle générale, la notion de distance au bord est remplacée par une notion de distance à l'objet complémentaire (X^c) tandis que la distance proprement dite entre deux points p_1 et p_2 correspond au nombre de segments élémentaires de la trame qu'il faut emprunter pour rejoindre p_1 à p_2 . Cette notion de distance dépend par définition du graphe choisi ainsi que l'illustre la figure 6.32.. Elle possède le grand avantage sur le plan algorithmique de pouvoir se propager localement, c'est-à-dire sur base du seul voisinage élémentaire d'un pixel (cfr. la convolution morphologique en deux balayages § 5.6.2.1.).

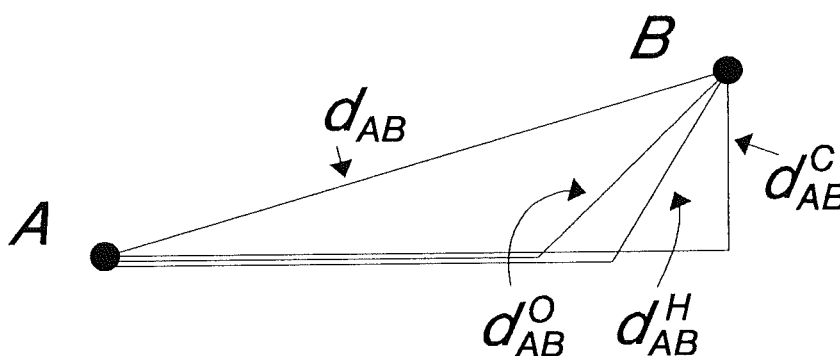


Fig.6.32. La distance entre deux points d_{AB}^n est fonction du graphe choisi. (c:carré;h:hexagonal;o:octogonal)

La définition mathématique de la distance euclidienne entre deux points p_1, p_2 repérés dans un système d'axes orthogonaux par leurs coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) s'écrit classiquement :

$$d_{p_1 p_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Il est évident qu'une telle opération est digitalisable et que le calcul de la distance euclidienne est accessible sur toute trame discrète.

Plutôt que de calculer successivement les distances entre chaque point de l'objet et l'ensemble des points du contour, Danielsson[1980] a proposé un algorithme séquentiel réalisant en quatre balayages le calcul souhaité de la distance euclidienne minimale en tout point d'un objet. Cet algorithme a l'avantage de se réaliser sous forme d'une **propagation de vecteurs** au sein d'un voisinage en 4-connexité. Il peut paraître étonnant que la distance de Danielsson n'aie pas engendré plus d'applications en plus de douze ans d'existence. Les raisons de cette désaffection sont simples à comprendre en comparaison des possibilités offertes par les fonctions distances "discrètes" :

- 1) la distance de Danielsson nécessite quatre balayages au lieu de deux et son implémentation est plus complexe.
- 2) Le gain de précision par rapport aux distances discrètes (erreur maximale de 15% en distance hexagonale) ne justifie généralement pas le surcroît de calcul. Ceci est encore plus vrai si nous considérons les précisions atteintes par les fonctions *distances pondérées* (cfr. ci-dessous).
- 3) Le "relief" généré par la fonction distance de Danielsson est très complexe et n'est plus maîtrisable comme il l'était pour la définition des points crêtes sur une fonction distance hexagonale. En conséquence, il n'existe pas de fonctions complexes (squelettisations, granulométrie, ...) spécifiquement destinées à être appliquées à la distance euclidienne de Danielsson.
- 4) la distance de Danielsson travaille avec des carrés ce qui oblige immédiatement à travailler sur 16 bits.

Examinons chacune de ces remarques point par point :

6.4.1.1 Un algorithme rapide pour la fonction distance euclidienne.

Vincent[1991b] a attiré l'attention sur le fait qu'il n'était pas possible de calculer une fonction distance euclidienne vraie au départ d'un voisinage discret quel qu'il soit et qu'il était indispensable de travailler sur une base non-locale. Sa remarque s'applique à la situation de la figure 6.33.. Dans un tel cas, la zone d'influence du point le plus proche (b) est trop *fine* que pour posséder la connexité-4 utilisée dans l'algorithme de Danielsson. La remarque de Vincent paraîtrait assez anodine en pratique, si elle n'était accompagnée par une proposition de calcul d'une distance euclidienne vraie au moyen d'un algorithme en chaîne extrêmement performant¹.

¹ le temps d'exécution est moitié moindre que les 4 balayages de Danielsson.

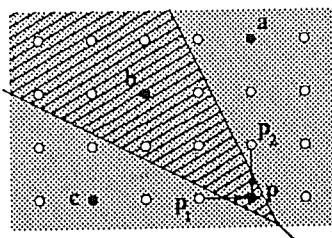


Fig.6.33. La fonction distance aux points a, b et c ne peut être construite directement sur base d'une propagation strictement locale.

6.4.1.2 Les fonctions distances pondérées.

Au § 6.5.2.1. nous avons présenté la fonction distance comme une convolution morphologique en conférant à chaque pixel du noyau une valeur égale à sa distance au pixel central. Ainsi, la fonction distance octogonale s'obtiendrait par convolution morphologique avec un noyau :

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \end{array}$$

Ce noyau a l'inconvénient d'introduire des coefficients non-entiers tout en n'améliorant pas sensiblement la précision d'estimation (erreur maximale de 11%). Borgfors[1986] a analysé plus généralement le calcul d'une distance quasi-euclidienne au départ de noyaux de dimensions restreintes. Pratiquement, elle a proposé les noyaux 3*3 et 5*5 (Figure 6.34.) fournissant les meilleures approximations. En utilisant des coefficients entiers, il s'agit de :

+c	+c								
+c	+b	+a	+b	+c					
	+a	+0	+a						
+c	+b	+a	+b	+c					
	+c		+c						

	4	3	4	
	3	0	3	
	4	3	4	
		et		
	11		11	
11	7	5	7	11
	5	0	5	
11	7	5	7	11
	11		11	

Fig.6.34. Masques de convolution pour la distance de Borgfors en 3*3 et 5*5.

En recherchant les coefficients rationnels optimaux elle a proposé [Borgefors,1991] :

en (3*3)	a=0,95509	b=1,36930	
en (5*5)	a=0,98587	b=[1,40018;1,42178]	c=2,20780

Avec le noyau entier de 3*3 utilisé couramment, l'erreur maximale sur la distance euclidienne vraie n'est plus que de 6,8%, elle tombe à 1,9% avec le noyau entier de 5*5. La distance de Borgefors est un compromis qui permet une bonne estimation de la distance euclidienne tout en maintenant un algorithme simple de convolution morphologique.

Rares sont les auteurs qui se sont aventurés sur le relief d'une telle fonction pour essayer d'y repérer des points caractéristiques. A notre connaissance, seuls Arcelli & Sanniti di Baja[1988] ont proposé une méthode de recherche des maxima locaux sur la distance de Borgefors [a=3;b=4]. Ces derniers sont bien sûrs non-connexes et ... de peu d'intérêt en pratique.

6.4.1.3 Squelettisations sur la fonction distance euclidienne.

Le relief engendré par la distance de Danielsson est tel qu'il n'existe pas d'outils de squelettisations spécifiquement définis sur cette fonction. L'algorithme proposé par Meyer[1989] permettant la squelettisation de toute fonction (après une opération visant à la rendre complète) est applicable par définition à la distance de Danielsson. Il engendre des squelettes par nature plus robustes vis-à-vis de la rotation mais qui ne sont pas aussi lisses que ceux obtenus dans l'espace euclidien. Wright[1992] propose une squelettisation de la fonction distance euclidienne en utilisant des filtres d'extraction de contour. Même si le résultat illustré est intéressant, il n'existe aucune garantie dans ce cas d'obtenir un squelette connexe et d'épaisseur minimale. Il est encore moins évident que les filtres proposés parviennent à extraire un squelette correspondant à des contours irréguliers.

6.4.1.4 Une fonction distance euclidienne sur 8 bits?

Les fonctions distances proposées par Danielsson ou Vincent nécessitent un espace mémoire de plus de 8 bits de profondeur (dès que la largeur d'un objet dépasse 22 pixels en diagonale ou 32 pixels à l'horizontale). Même la distance de Borgefors nécessite assez rapidement de dépasser 8 bits (128 pixels de large en diagonale ou 170 pixels de large à l'horizontale). Nous proposerons au § 6.4.3. une nouvelle fonction distance qui tout en **conservant une exactitude comparable** à celle de la fonction de Danielsson permet d'opérer sur 8 bits (avec des objets atteignant 362 pixels de large en diagonale ou 512 pixels à l'horizontale).

6.4.2 Pourquoi le principe de Blum n'est pas digitalisable.

Blum[1962] a défini le squelette comme le lieu des centres des disques qui touchent le contour en deux ou plusieurs endroits. Nous avons vu qu'une telle définition est purement euclidienne et ne se laisse pas transposer sur les trames discrètes. Il est intéressant de regarder de plus près ce qu'elle devient sur une trame discrète équipée de la métrique euclidienne de Danielsson.

La définition donnée par Blum attire avant tout l'attention sur la dualité existant entre le squelette $S(X)$ et le contour $C(X)$ de tout objet. En réalité, nous pouvons réécrire la définition de Blum en se plaçant du point de vue du contour et en disant : "*le squelette est défini par le lieu de rencontre des zones d'influence (Z.I.) issues de points non-connexes*". Une telle définition est d'ailleurs celle utilisée dans l'implémentation des outils de segmentation : SKIZ² et Ligne de Partage des Eaux. L'algorithme classique de SKIZ part d'une image d'objets (ou de points) étiquetés et propage les *labels* en parallèle avec la valeur de la distance, les fronts de rencontre de labels différents forment le SKIZ. Une telle méthode ne pose pas de problèmes majeurs dans un espace discret car les zones d'influence autour d'un point ou d'un objet sont des ensembles très épais et par conséquent bien discrétisables. Si on veut être puriste, il faut tout de même attirer l'attention sur l'existence de quelques situations telles que celles de la figure 6.33. et adopter dès lors le SKIZ euclidien de Vincent[1991b].

Malheureusement, dans le cas du squelette (interne) de l'objet, le problème de déconnexion des zones d'influence (Z.I.) est omniprésent. Il suffit pour s'en persuader d'imaginer un disque et de considérer que toutes les zones d'influence partant des points du contour doivent converger vers le centre du disque. La discrétisation de telles Z.I. qui deviennent infiniment minces est bien sûr impossible. Considérons le cas d'un disque de rayon $\lambda = 6$ et les valeurs de la distance de Danielsson au contour interne. Examinons l'allure des Z.I. obtenues au départ de chaque point (Fig.6.35.).

Remarque : la définition de la Z.I. associée à un point reste valable sur une trame discrète, il s'agit de *l'ensemble des points plus proches du point considéré que de n'importe quel autre*.

Les Z.I. obtenues sont connexes (d'un seul tenant), mais elles n'ont pas manifestement pas grand chose à voir avec l'image discrète des Z.I. euclidiennes (figure 6.35.). La définition

² le SKIZ (Squelette par Zones d'Influence) n'est rien d'autre que la frontière entre les polygones de Voronoï.

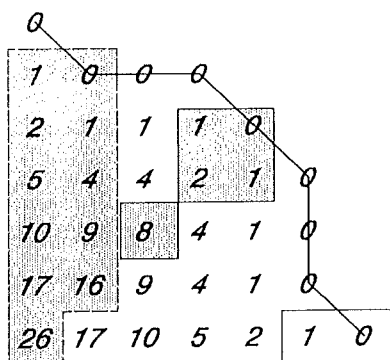


Fig.6.35. Quelques zones d'influence sur la distance de Danielsson au bord externe d'un disque de rayon 5

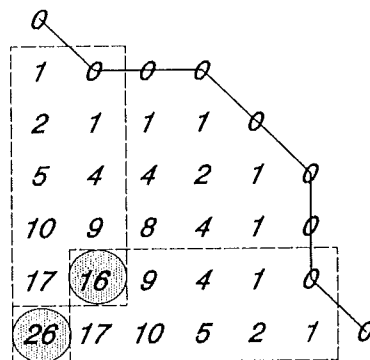


Fig.6.36. Points d'intersection des Z.I. non-connexes sur la fig.6.35.

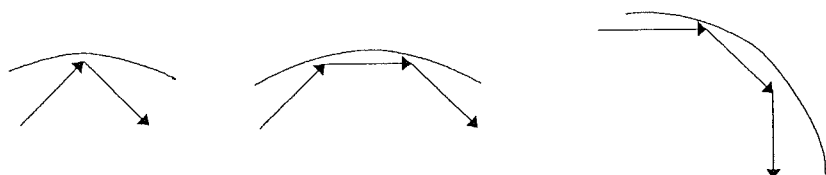
de Blum qui aurait dû nous fournir le seul point central n'est pas transposable. Comme alternative, nous pouvons imaginer de prendre en considération les points d'intersection des Z.I. émanant de points non-connexes du contour (figure 6.36.), mais ces ensembles de point n'ont pas de bonnes propriétés :

- Ils ne sont pas connexes.
- Ils ne permettent pas la reconstruction correcte de la forme.
- Ils ne sont pas caractéristiques de la morphologie.

En conclusion, la squelettisation sur une métrique euclidienne pose deux problèmes importants :

- *d'une part, les concepts de la squelettisation euclidienne ne sont pas transférables aux trames discrètes. Les Z.I. obtenues ne sont pas l'image des Z.I. euclidiennes et les frontières entre Z.I. ne coïncident pas avec la trame.*
- *d'autre part, le squelette obtenu par la méthode de Meyer est le squelette relatif au contour discrétisé de l'objet et non la discrétisation exacte du squelette euclidien.*

Ce dernier point est dû au fait que les objets, une fois discrétisés possèdent un contour en 8-connexité qui présente beaucoup d'aspérités artificielles génératrices d'autant de branches de squelette :



6.4.3 La fonction distance holodisque.

Considérons plus attentivement l'image de la fonction distance euclidienne au complémentaire pour le disque de la figure 6.35.. En raison de la discrétisation, le contour de lisse qu'il était au départ est devenu très polygonal en 8-connexité. Très simplement, ceci explique que les points du contour sont situés à des distances différentes du centre du disque! (Fig.6.37.) Pour le disque de $\lambda = 6$ la différence maximale atteint $\frac{\sqrt{36}-\sqrt{28}}{\sqrt{36}} = 15,0\%$ elle peut atteindre 29,5% pour un disque de $\lambda = 2$ et diminuera bien entendu pour des rayons plus grands. Que nous considérons une distance au contour externe ou au contour interne, le problème reste le même : *la discrétisation a engendré une perte d'information irréversible.*

Il existe dans les procédures graphiques beaucoup de méthodes qui permettent le lissage d'un contour lorsque son allure discrétisée devient gênante (en particulier après un *zoom*). Utiliser de telles méthodes pour estimer la position du contour lissé et calculer ensuite une meilleure estimation de la distance euclidienne au contour serait fastidieux et sans grand intérêt dans notre cas alors que le lissage peut être incorporé dans la fonction distance elle-même comme nous allons le voir.

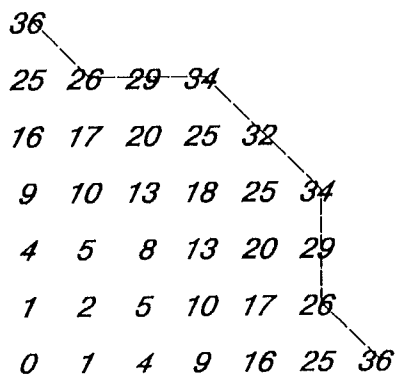


Fig.6.37. Inversion de la distance de Danielsson. Les points du contour d'un disque sont à des distances différentes du centre.

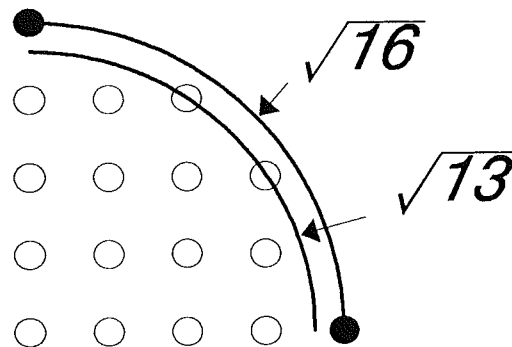


Fig.6.38. Différence entre deux disques successifs.

Imaginons que notre propos soit de retrouver dans une image une configuration de pixels ayant pu être engendrée par un disque. Par définition, le contour d'un disque présente une symétrie centrale. Mais, il est facile de démontrer que cette symétrie centrale ne sera préservée sur la trame discrète qu'à condition que le disque soit centré sur un des pixels de la trame. Dans ce dernier cas, le nombre de disques qui pourront être différenciés en métrique euclidienne est assez limité puisque les points d'une trame discrète sont situés à des distances soit entières, soit racine de la somme des carrés de deux entiers. Ainsi, seuls les

disques centrés de rayons (au carré) : 1,2,4,5,8,9,10,13,16,17,18,20,25,26,... génèrent une configuration de pixels différentiables. A titre d'exemple, les disques centrés de rayon (au carré) 13 et 16 ne diffèrent dans leur représentation discrète que par 4 pixels (Fig.6.38.).

D'une manière générale, la différence entre deux disques successifs fournit un ensemble de points totalement déconnectés et il faut considérer l'ensemble des disques de rayon entiers pour que les différences entre des disques successifs soient TOUJOURS AU MOINS en 8-connexité.

Cette remarque sur la connexité des différences de disque peut paraître anodine, mais elle va s'avérer fondamentale pour le développement d'algorithmes opérant sur une base locale (le voisinage élémentaire du pixel). Fondamentalement, nous rejoignons ici la remarque de Vincent[1991b] qui affirme avec raison qu'une distance euclidienne correcte ne saurait être propagée sur une base locale comme le fait Danielsson[1980]. Simplement, nous suggérons que *la propagation locale est correcte à condition de limiter l'ensemble des distances euclidiennes discrètes de la trame aux seules distances euclidiennes entières*. Selon cette logique, une distance sera codée en fonction de la "différence de disque entiers" à laquelle elle appartient. Ainsi :

la distance de Danielsson vaut $d_{ab}^2 = 25 + 9 = 34$ tandis que la distance par différence de disques entiers vaut $d_{ab}^\lambda = 6$.

Nous définissons la *fonction distance HOLODISQUE* ($\sigma\lambda\sigma$: entier et $\delta\iota\sigma\chi\omega$: disque) comme étant l'entier dont le carré est immédiatement supérieur au carré de la distance euclidienne stricte :

$$(d^\lambda)^2 \geq (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 > (d^\lambda - 1)^2$$

$$(d^\lambda)^2 \geq d^2 > (d^\lambda - 1)^2$$

avec d^λ : la distance holodisque.

d^2 : la distance de Danielsson.

Le résultat de la propagation de la distance holodisque autour d'un point est illustré à la figure 6.39.. Nous constatons que par définition la distance holodisque est identique sur tous les points appartenant au contour interne 8-connexité (ou externe 8-connexité) d'un disque euclidien de rayon entier. Sur le plan pratique, la distance holodisque possède l'avantage par rapport à la distance euclidienne de ne travailler qu'avec des entiers, c'est-à-dire

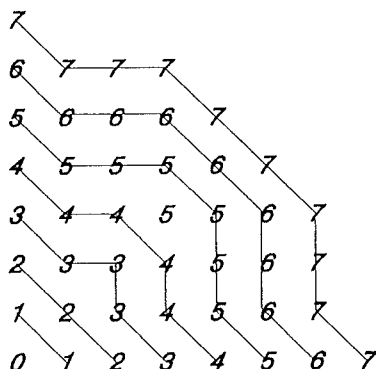


Fig.6.39. Propagation de la distance holodisque au départ d'un point et contours des disques entiers successifs.

que contrairement aux algorithmes de Danielsson-Vincent, il n'est pas indispensable de mémoriser des carrés qui sont gros consommateurs de mémoire. Dans le cas de la distance holodisque, une distance euclidienne vraie de 256 peut toujours être représentée sur 8 bits!

Comme toutes les fonctions distances, la distance holodisque peut s'appliquer à un objet (Fig.6.40.). Il suffit pour cela d'utiliser tel quel l'algorithme de Danielsson (ou Vincent) en écrivant le résultat final sous forme "arrondie" en d^λ au lieu de d^2 . Pour bien comprendre la signification de cette transformation nous dirons que :

la fonction distance holodisque représente la distance euclidienne vraie au contour, pour tout objet qui dans l'espace euclidien est constitué d'un assemblage de disques entiers centrés sur les points de la trame carrée.

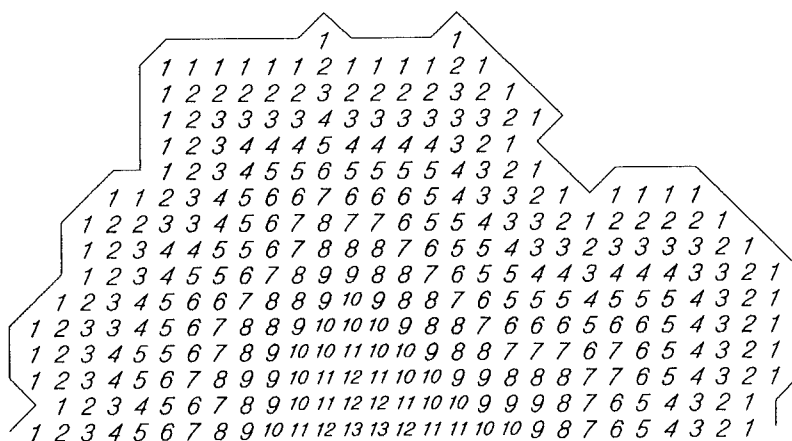


Fig.6.40. Propagation de la fonction distance holodisque sur un demi-objet.

Pratiquement, nous ne connaissons un objet réel que par son image discrète. En appliquant la fonction distance holodisque nous faisons l'hypothèse implicite que le contour vrai de l'objet est lisse et peut être représenté par un assemblage de disques entiers centrés sur des points de la trame. Il faut bien comprendre qu'une telle hypothèse est beaucoup plus réaliste que celle qui considère le contour vrai comme une interpolation linéaire du contour discret.

En conclusion, par la fonction distance holodisque, nous sommes parvenus à rendre compatibles les exigences d'une métrique euclidienne vraie et du lissage du contour. Nous allons découvrir que cette transformation réserve encore bien d'autres avantages...

6.4.4 Squelettisation et fonction distance holodisque.

En considérant que le contour vrai d'un objet est généré par l'assemblage de disques entiers centrés sur la trame il est probable que nous ayons fait un pas dans le sens d'une discrétisation plus aisée du squelette. Examinons ce qu'il en est sur le disque de rayon ($\lambda = 6$). A première vue les résultats sont peu encourageants car les Z.I. qui étaient malgré tout connexes sur la distance de Danielsson sont pratiquement toutes non-connexes (Fig.6.41.). De plus la notion d'intersection de Z.I. associées à des points non-connexes du contour génère un grand nombre de points qui n'appartiennent même pas au squelette euclidien. Le seul résultat positif, mais il est de taille est que *le centre du disque appartient à toutes les Z.I. des points de son contour*. Considérons un autre disque de $\lambda = 9$ (Fig.6.42.).

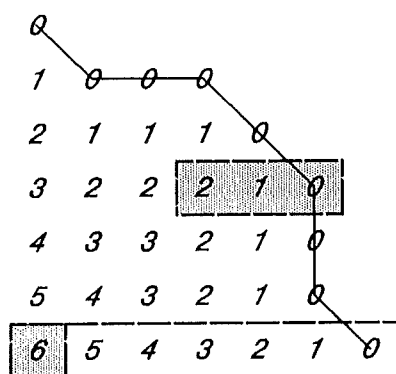


Fig.6.41. Distance holodisque au contour interne d'un disque de rayon 6. Les deux Z.I. contiennent le centre du disque (6).

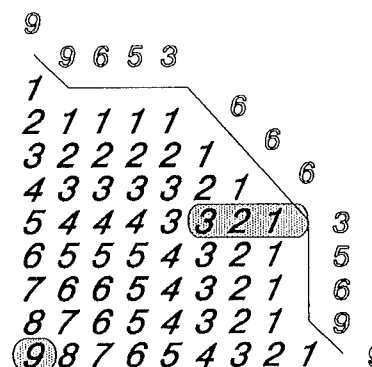


Fig.6.42. Distance holodisque sur un disque de rayon 9. Indication des valeurs maximales atteintes par une remontée confinée dans la Z.I.

Si nous partons de chaque point du contour et que nous essayons de *remonter* le plus haut possible tout en restant à l'intérieur de la Z.I. et en respectant un chemin en 8-connexité, nous obtenons des résultats très variables selon les points considérés...certains remontent jusqu'au sommet de leur Z.I. (centre du disque), d'autres s'arrêtent au niveau 3 car la Z.I. est non-connexe. Les figures 6.42. et 6.43. permettent de constater que la déconnexion d'une Z.I. peut être extrêmement importante et que l'adoption de chemins de connexité plus élevée (16 ou 24,...) pour atteindre le sommet de la Z.I. n'est pas une solution réaliste. La déconnexion d'une Z.I. peut être arbitrairement élevée.

En conclusion, le centre du Disque Maxima Inscrit (MID) correspondant à un point du contour est TOUJOURS contenu dans la Zone d'Influence (Z.I.) de ce point, mais la connexité de la Z.I. est inconnue.

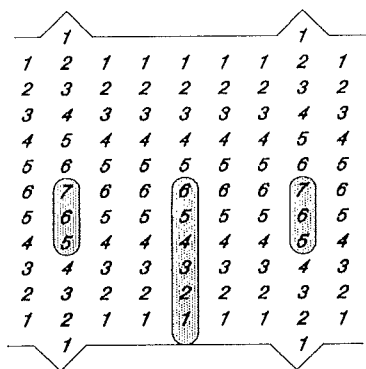


Fig.6.43. Z.I. générée par la juxtaposition de deux disques de rayon 7.

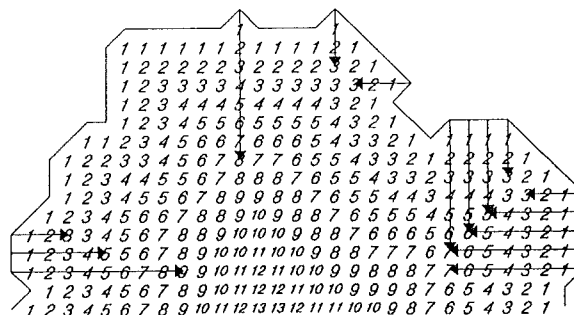
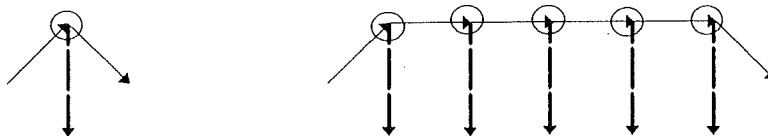


Fig.6.44. Sur tout objet, il existe toujours des points qui ont une Z.I. d'un seul tenant. La remontée dans ces cas (flèches) atteint directement le centre du Disque Maxima Inscrit.

Un examen attentif d'un grand nombre de figures (6.44.) attire l'attention sur le fait qu'il existe sur toute figure des Z.I. connexes. Plus précisément pour certaines configurations particulières du contour les Z.I. sont toujours connexes. Ainsi les configurations suivantes en 8-connexité (aux rotations $k \cdot \frac{\pi}{2}$ près) :



permettent toujours d'identifier le centre du MID correspondant aux points cerclés. Mieux encore, l'unique remontée possible se fait en ligne droite, perpendiculairement au contour (flèches en trait interrompu). Pour cette raison nous avons baptisé ces points *points de Remontée Triviale (R.T.)*.

En réalité il existe un point de RT correspondant à tout point de tangence horizontale ou verticale au contour et par conséquent tout objet possède au minimum quatre points de RT (Nord, Est, Sud et Ouest). La connexité de la zone d'influence aux points de RT est due au fait que pour ces points, la Z.I. est un secteur (rayon épais) discrétisable tout en conservant la 4-connexité (cfr. la Zone d'Influence non-grisée de la Fig.6.41.) car elle a un axe de symétrie coïncidant parfaitement avec une des directions principales de la trame.

Définissons le *Squelette par Disques Entiers (SKID)* comme étant constitué des centres de disques maxima inscrits (MID) et des chemins de crête en 8-connexité rejoignant ces centres.

Grâce aux points de RT, nous sommes sûrs d'avoir identifié des points appartenant au **SKID**, malheureusement il ne s'agit que d'un sous-ensemble peu dense de ce squelette qui ne contient pas nécessairement l'érodé ultime ni même la totalité des extrémités. Pour identifier la totalité du **SKID** sur la fonction distance holodisque deux stratégies semblent alors possibles :

Soit, s'appuyer sur les centres de **MID** identifiés par RT.
PROCEDURE PAR TACHE D'HUILE

Soit, ignorer l'information des RT et essayer de remonter indépendamment au départ de tout point jusqu'au centre de **MID** en forçant éventuellement la déconnexion de la Z.I.
PROCEDURE DE REMONTEE A TOUT PRIX

L'historique de nos recherches a commencé avec la première procédure qui semble la plus logique, mais les difficultés rencontrées nous ont amené de toute manière à concevoir une procédure de remontée à tout prix. La seconde méthode est par conséquent la première à avoir débouché sur un algorithme pratique. Pour cette raison, nous l'exposerons en premier lieu et ensuite nous commenterons les perspectives fournies par une combinaison éventuelle des RT et de la remontée à tout prix.

6.4.5 Procédure de recherche des centres de MID par remontées à tout prix.

L'application d'une fonction distance à un objet binaire revient dans l'espace euclidien à transformer cet objet en un relief dont les lignes de plus grande pente ont toutes 45° . Autrement dit, pour rejoindre la ligne de crête au départ de tout point du contour, il faut et il suffit de grimper sur le relief en respectant la pente à 45° . Une telle définition ne se laisse pas aisément transposer en trame discrète et ainsi que nous l'avons vu à la figure 6.41. (6.42.) elle ne permet pas de rejoindre le centre du MID. La déconnexion des Z.I. illustre le fait que la ligne de plus grande pente, même si elle fournit une pente totale de 45° peut localement passer par une pente moins forte.

Examinons ce que donnerait la règle de progression suivante : "A chaque pas, choisir parmi les voisins en 8-connexité celui qui est extrémité du vecteur de plus grande pente". Ce faisant, nous remplaçons simplement la pente strictement à 45° par une notion plus souple de *plus grande pente*.

Introduisons les notations suivantes :

soit, $c \in C(X)$: le point du contour considéré.

soit, $p_i (\forall i = 0, \dots, 8)$: les pixels du voisinage octogonal.

soit, $r_j (\forall j = 0, \dots, n)$: les n pixels de la ligne de plus grande pente (remontée).

Le principe de la remontée au $j^{\text{ème}}$ pas de progression est :

$$r_j \in V^o(r_{j-1}) : \frac{d^\lambda(r_j)}{d_{c r_j}^\lambda} = \text{Max} \left\{ \frac{d^\lambda(p_i)}{d_{c p_i}^\lambda} \right\}$$

$$\forall p_i \in V^o(r_{j-1}), p_i \neq r_{j-2}$$

où $V^o(r_{j-1})$: désigne le voisinage octogonal de r_{j-1} .

$d^\lambda(p_i)$: est la valeur de la fonction distance holodisque au point p_i .

$d_{c p_i}^\lambda$: est la distance holodisque entre c et p_i .

En reprenant la remontée amorcée sur le disque de rayon $\lambda = 9$ (Fig.6.42.), nous pouvons progresser du 3 vers le 4 :



Image de $d^\lambda(p_i)$

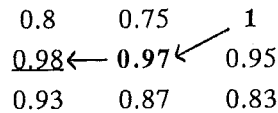
Image des pentes $\frac{d^\lambda(p_i)}{d_{\epsilon p_i}^\lambda}$

Mais, au pas suivant :



Nous constatons qu'il peut y avoir deux pentes identiques dans le voisinage du pixel considéré. Le choix d'un point plutôt que de l'autre suppose d'introduire un critère supplémentaire. L'idée qui vient spontanément à l'esprit est de choisir celui des points qui engendre le vecteur le plus court en métrique euclidienne, ce qui revient à utiliser comme critère une pente corrigée :

$$\frac{d^\lambda(p_i)}{d_{\epsilon p_i}^\lambda}$$



Ce critère permet de résoudre les remontées sur le disque de $\lambda = 9$ (Fig.6.45.), mais il n'est pas difficile, en raison des surépaisseurs locales de la fonction distance holodisque de trouver des configurations avec des pentes corrigées identiques. Sur la configuration de la Fig.6.46. au départ du 2 la remontée bute sur un *triplet* de 3 dont les deux extérieurs génèrent la même pente corrigée...dans ce cas précis, la solution réside manifestement dans l'examen d'un voisinage plus large que V^0 .

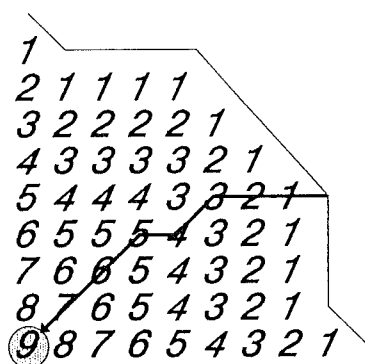


Fig. 6.45. Remontée jusqu'au centre du disque par un critère de plus forte pente.

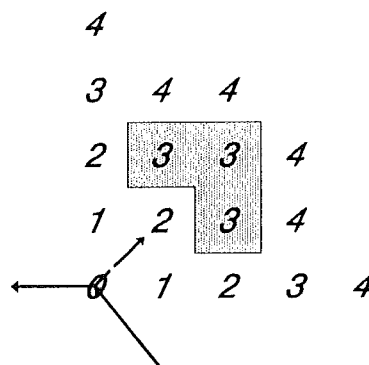
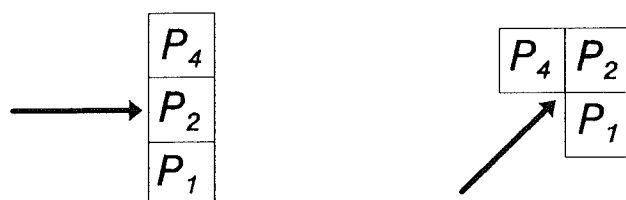


Fig. 6.46. Le critère de plus forte pente dans le voisinage octogonal (V_0) ne permet pas de poursuivre la remontée.

A ce stade de la réflexion, il est décevant de constater que la remontée selon la ligne de plus grande pente implique le calcul de sept distances euclidiennes à chaque pas et qu'elle utilise un critère mélangeant deux concepts de distance différents. Ceci nous a amenés à examiner dans quelle mesure la progression selon la ligne de plus grande pente pouvait se réaliser sur une *base entièrement locale*, c'est-à-dire sans référer au point du contour (c). Une première constatation qui s'impose est qu'il n'est pas indispensable d'examiner tout le V^0 mais que le front de 3 pixels situé dans le prolongement de la direction de propagation suffit généralement à l'analyse. Ainsi, selon que la direction de progression est carrée ($k \cdot \frac{\pi}{2}$) ou octogonale ($(2k+1) \cdot \frac{\pi}{4}$) le front à considérer est ³



Les remontées illustrées sur la figure 6.45. nous indiquent que la progression s'est faite simplement vers le point du front qui est à la plus haute altitude et que lorsqu'il y a deux points à cette plus haute altitude c'est celui en 4-connexité qui est préféré. Autrement dit, dans les cas où il n'y a qu'un ou deux voisins à la plus haute altitude la règle est que :

la ligne de plus grande pente (totale) est constituée par un assemblage de segments de plus grande pente locale.

³ Le choix des indices est justifié par la possibilité de coder de manière unique le voisinage binaire.

L'algorithme qui suit a été obtenu après de très nombreux essais et ajustements en observant le comportement des remontées et en détectant des configurations problématiques. Il s'inspire des observations suivantes :

- Une remontée s'amorce perpendiculairement au contour.
- Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la remontée emprunte le segment qui a la plus forte pente locale (voisin en 4-connexité)
- Il existe sur une fonction distance holodisque des surépaisseurs obligeant à analyser des pixels au-delà du simple front triple.
- Lorsqu'une remontée bute sur une ligne de crête, elle n'a pas nécessairement atteint le centre du **MID**. Si le front est constitué d'un segment de crête d'altitude uniforme il faudra prolonger la recherche du **MID** en scindant la remontée en deux parties.

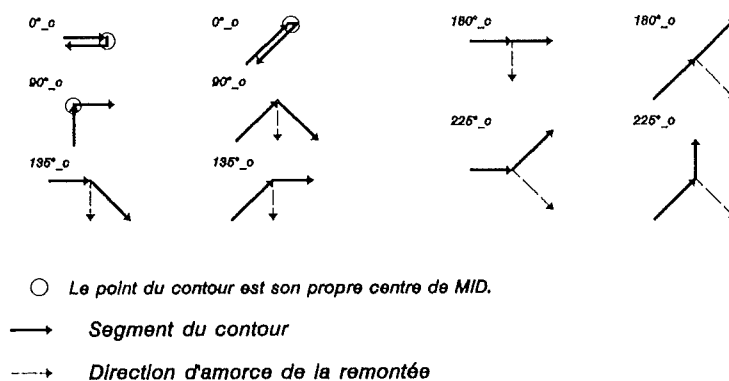
6.4.5.1 Algorithme de remontée à tout prix.

DIRECTION D'AMORCE DE LA REMONTEE :

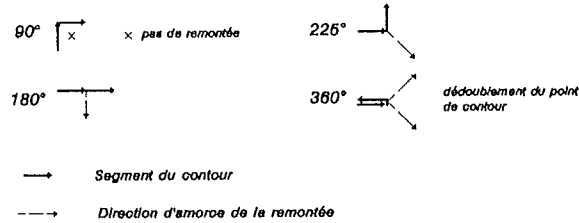
Pour définir la direction d'amorce de la remontée au départ d'un point quelconque du contour, il faut et il suffit de connaître les codes de Freeman des deux segments associés à ce point. Cette constatation est valable que ce soit sur le contour interne en 8-connexité ou sur le contour externe en 4-connexité. La direction d'amorce est la *traduction discrète* de la notion de **normale au contour**.

Considérant que le contour est parcouru *objet à droite* il convient d'envisager :

Pour le contour interne en 8-connexité.



Pour le contour externe en 4-connexité.



LOGIQUE DE PROGRESSION PAS A PAS :

Pour différencier les situations possibles à chaque pas de propagation, nous allons tout d'abord coder les fronts selon la logique suivante :

$$M = \text{Max}\{d^\lambda(p_i)\} \quad \forall i = 0, 1, 2, 4$$

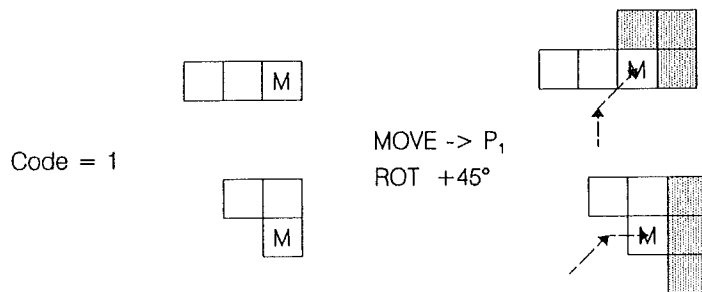
$$\text{code} = \sum(i) \quad \forall p_i = M$$

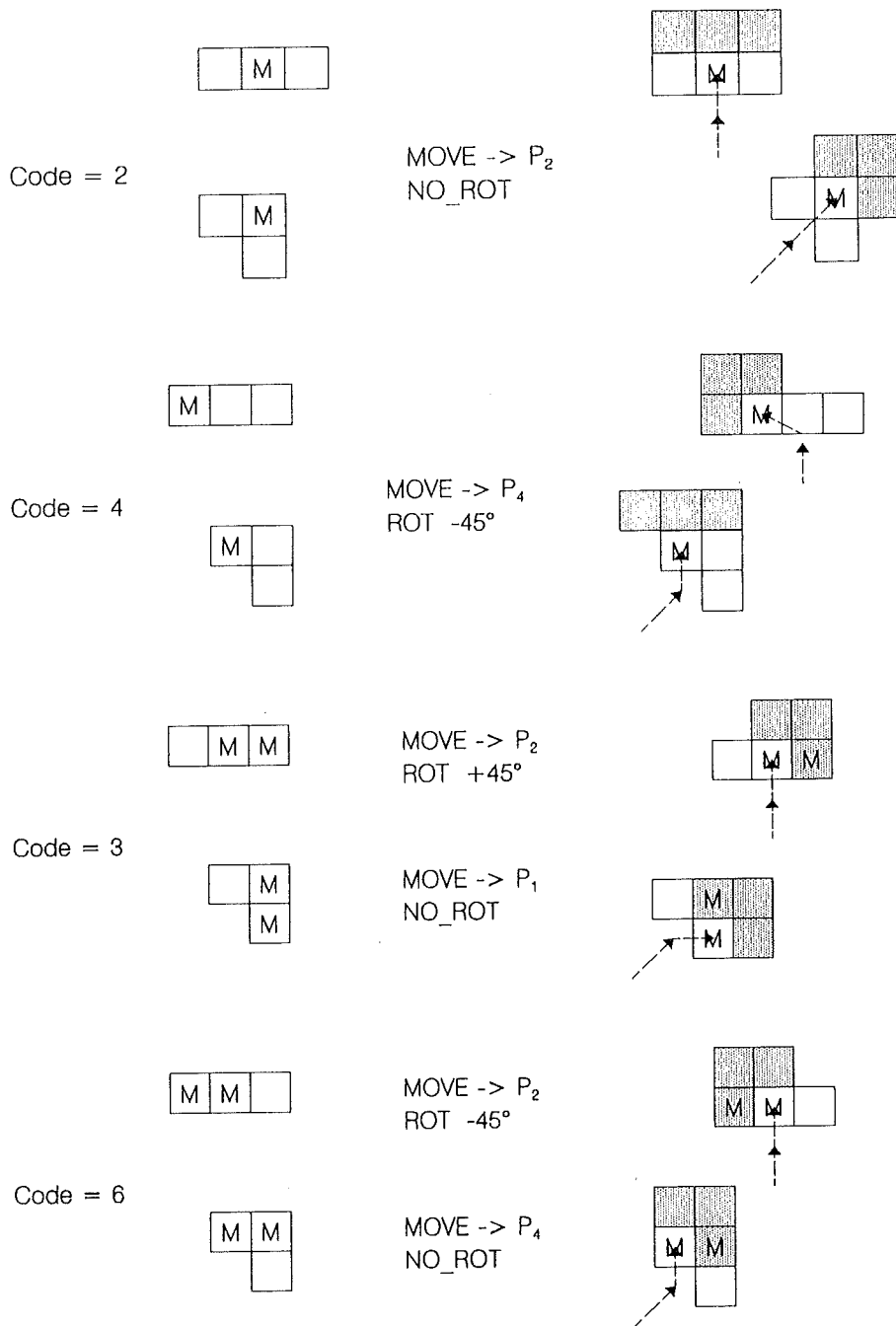
Les actions à entreprendre à chaque pas seront décrites par :

<i>MOVE</i> → p_i	progresser vers le voisin p_i
<i>ROT</i> + 45°	tourner la direction de propagation de 45° dans le sens horlogique.

Pour plus de clarté, nous présentons à coté des chaque cas, la juxtaposition des fronts de propagation à l'étape n (en blanc) et à l'étape $n+1$ (en grisé).

Considérons tout d'abord les cas simples correspondant à la remarque b), c'est-à-dire ceux où le maximum est soit simple, soit double:

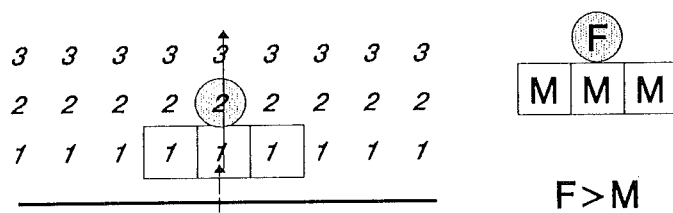




Les deux derniers cas attirent l'attention sur le fait qu'une direction de propagation octogonale sera **plus rigide** qu'une direction carrée. Les codes 3 et 6 ne suffisent pas à la dévier.

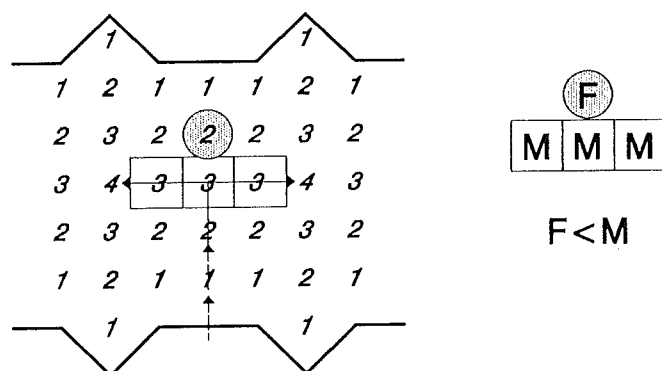
Avant de considérer les solutions adaptées aux codes 0,5 et 7, examinons quelques configurations de reliefs engendrées par la fonction distance holodisque dans des situations fréquentes en pratique.

6.4.5.1.1 Pente régulière selon une direction carrée.



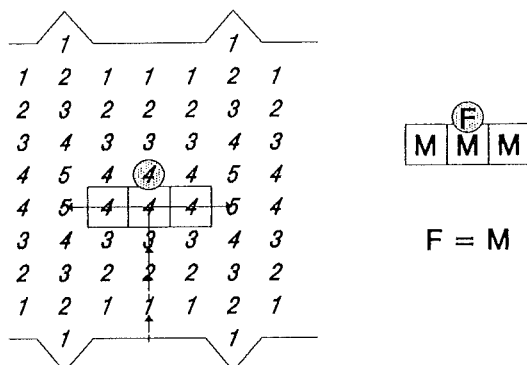
A chaque pas la remontée bute sur un front triple (code 7). Manifestement c'est la propagation vers p_2 qui est à privilégier, mais il faut tester au moins un pixel en avant du front (F) pour différencier ce cas de la situation :

6.4.5.1.2 Crête simple selon une direction carrée.



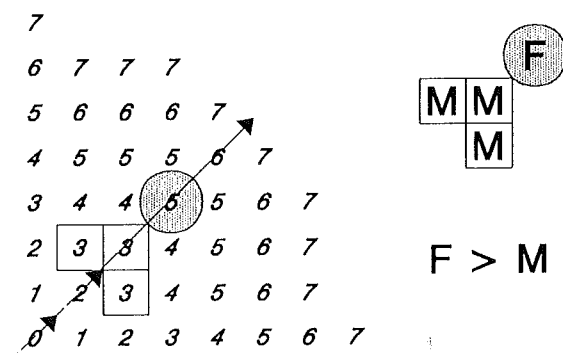
Ici, le code 7 correspondant à une ligne de crête oblige à scinder la remontée en deux chemins divergents qui chacun monteront jusqu'aux 4 qui sont les centres des MID corrects.

6.4.5.1.3 Crête double selon une direction carrée.



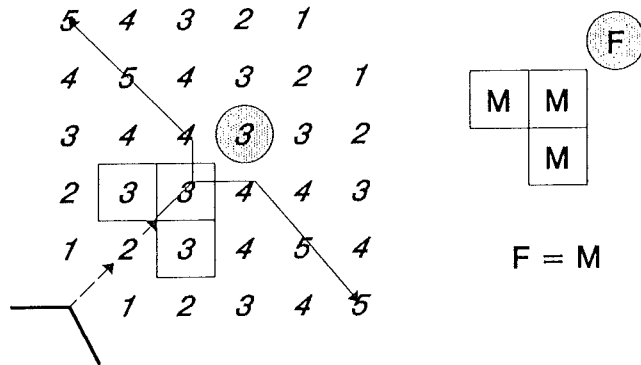
La situation est similaire à la précédente. Pour identifier les centres de **MID** à 5, il faut scinder la remontée en deux chemins divergents.

6.4.5.1.4 Pente régulière selon une direction octogonale.

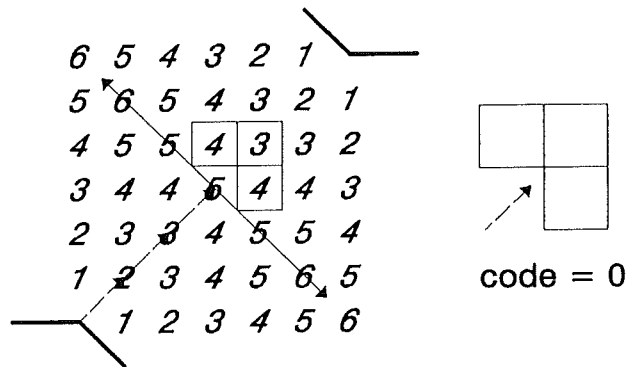


Le code 7 se présente en configuration octogonale. Ici encore, c'est le test du pixel (F) en avant du front qui décide de la progression vers p_2 et permet de distinguer du cas suivant.

6.4.5.1.5 Crête simple selon une direction octogonale.

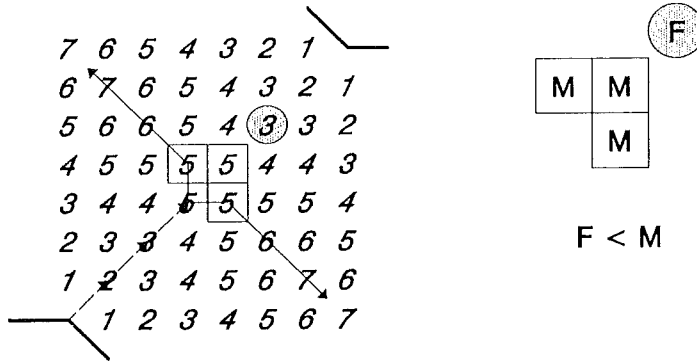


Dans le cas de la crête octogonale, il faut manifestement scinder la remontée. Mais la scission devra se réaliser au niveau du p_2 . En pratique, cette scission peut être gérée au pas qui suit le code 7. Si la remontée progresse sur p_2 elle rencontre un front de code 5 qui oblige de toute manière à faire diverger les chemins! Une autre situation provoquant la présence d'une crête octogonale simple est:



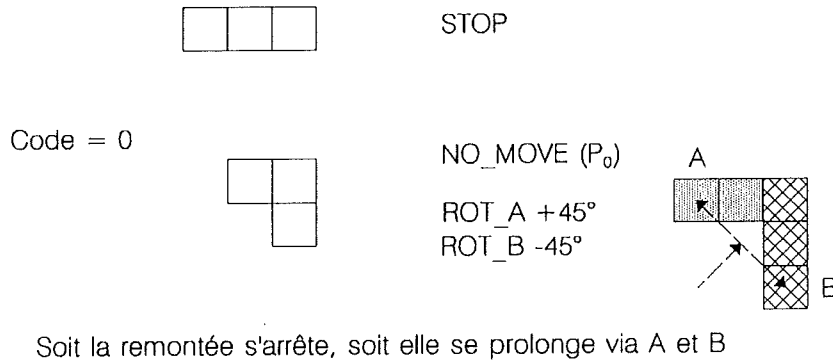
La remontée bute sur la crête et rencontre un front d'altitude inférieure (code 0). Il faut scinder la remontée en deux au départ de p_0 pour identifier les centres de MID à la valeur 6.

6.4.5.1.6 Crête double selon une direction octogonale.

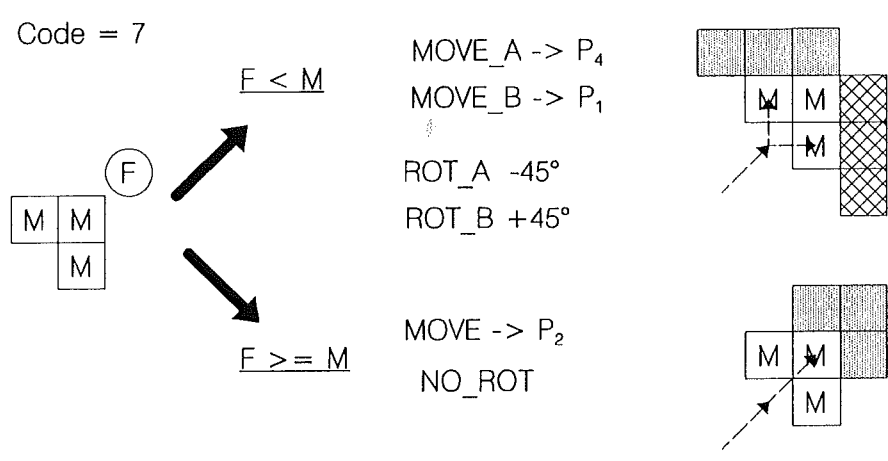
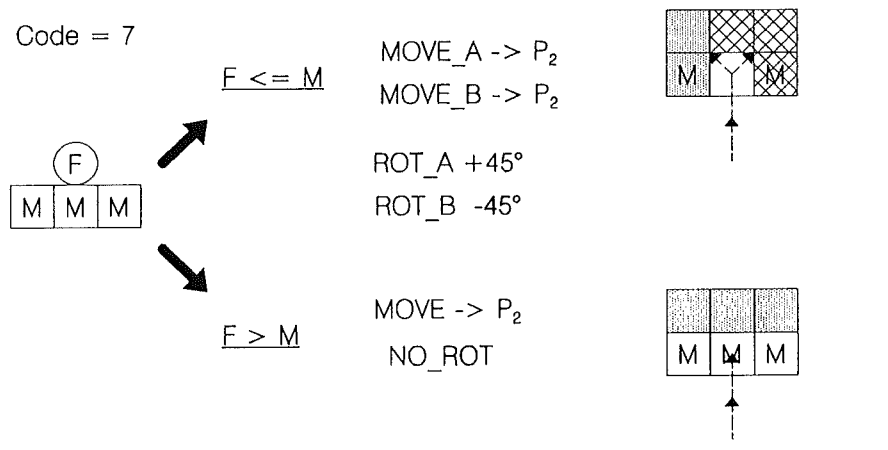
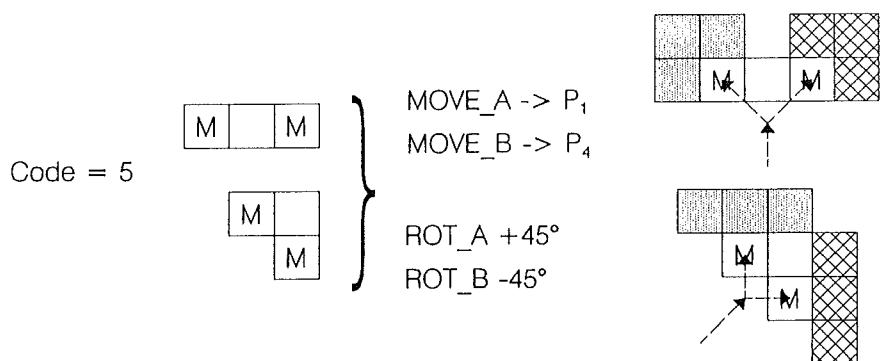


Ici encore, une scission de la remontée est indispensable lorsqu'elle bute sur le code 7 avec $F < M$. Les chemins vont diverger en empruntant les deux voisins en 4-connexité : p_1 et p_4 .

Sans être exhaustifs, les exemples qui précèdent ont éclairé quelque peu la complexité du problème lié aux codes 0,5 et 7. Les règles de propagation se résument comme suit :



Soit la remontée s'arrête, soit elle se prolonge via A et B



Sachant que le centre du Disque Maximum Inscrit appartient d'office à la Z.I. émanant du point du contour. Il convient lors de chaque pas de propagation de tester l'appartenance du point nouveau point atteint (r_j) à cette Z.I.

Ce qui s'écrit :

$$\frac{d^\lambda(r_j)}{d_{cr_j}^\lambda} = 1 \quad r_j \in Z.I.(c)$$

où c est le point du contour, origine de la remontée
 r_j le point atteint par la remontée au $j^{\text{ème}}$ pas.

si la condition est vérifiée, r_j est mémorisé comme nouveau centre de **MID** provisoire.

Sans pouvoir le justifier rigoureusement, nous avons constaté que $d_{cr_j}^\lambda - d^\lambda(r_j) \leq 3$ sur le tronçon de la remontée compris entre c et s (centre du **MID**). Ce critère peut donc être utilisé dans l'algorithme pour arrêter des remontées et éviter de remonter inutilement au-delà de s .

6.4.6 Procédure de squelettisation par Tache d'Huile.

Plutôt que de définir une procédure rigoureuse dont l'algorithme reste encore à écrire, nous allons consigner dans ce paragraphe un certain nombre d'observations qui devraient permettre de trouver des implémentations plus rapides pour l'identification du SKID. En observant les remontées à tout prix sur la fonction distance holodisque, il apparaît assez vite que pour des points de contour voisins, les remontées empruntent souvent des tronçons similaires. Plus particulièrement, nous pouvons constater que les remontées rejoignent la branche du squelette la plus proche pour ensuite cheminer exactement sur le tracé du squelette. Il est manifeste qu'à ce niveau il y a une grosse perte d'énergie de l'algorithme qui passe et repasse par les mêmes endroits de la fonction distance.

Il résulte de ce qui précède que le relief de la fonction distance holodisque possède une propriété très intéressante :

Connaissant les seuls points extrémités, il est possible par remontée à tout prix d'obtenir l'ensemble du squelette (SKID).

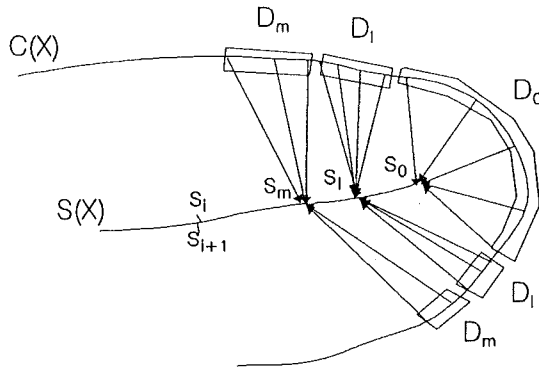
Rappelons que sur les autres types de fonctions distance, il faut connaître un ensemble très dense de points du squelette (les points crête) pour pouvoir obtenir un squelette connexe par simple *upstream* [Meyer,1989]. Imaginons qu'il existe un moyen permettant d'identifier les points extrémités⁴ sur la fonction et examinons les possibilités que cela offrirait pour construire non plus le SKID mais bien l'ensemble des vecteurs pointant du contour vers les centres de MID sur le SKID. L'idée que nous allons exploiter est inspirée de la propriété suivante vérifiée pour un squelette euclidien :

Deux points voisins sur le contour ont des Z.I. possédant une frontière commune qui aboutit sur le squelette. Ainsi, toute Z.I. associée à un point du contour possède une frontière gauche et une frontière droite (souvent confondues) qui sont reliées par une ligne de fond (éventuellement un point) coïncidant exactement avec le squelette.

Sur la fonction distance holodisque, la notion de frontière commune entre les Z.I. peut paraître surprenante en raison de l'enchevêtrement apparent des Z.I. dû à la discrétisation, mais la propriété reste vérifiée.

⁴ Nous n'avons pas recherché l'existence de configurations de voisinage particulières en ces points, mais l'idée n'est pas impossible.

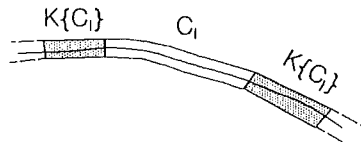
Adoptons les conventions de notation suivantes :



- Soit, $C(X)$ l'ensemble des points du contour de X .
 $S(X)$ l'ensemble des points du **SKID** de X .
 avec s_0 : le point extrémité de la branche du **SKID** considérée.
 s_i : le $i^{\text{ème}}$ point le long de la branche du **SKID**.

$$d_{s_0}^\lambda \leq d_{s_1}^\lambda \dots \dots \leq d_{s_n}^\lambda$$

- Soit, $C_i = \{c \in C(X) : d^\lambda(s_i) = d_{cs_i}^\lambda$
 cela revient à dire que le disque centré en s_i est "tangent" au contour aux points de C_i , ou encore que les c_i *accrochent* s_i ce que nous écrirons en abrégé $c_i \rightarrow s_i$
 Soit, $K\{C_i\}$: un ensemble de points du contour connexe de C_i .



- Soit, D_i : l'ensemble des pixels du contour qui ont le disque centré en s_i comme disque maxima inscrit (**MID**).

L'algorithme suivant peut être proposé, qui au départ de l'extrémité d'une branche progresse systématiquement sur le squelette tout en vérifiant l'*accrochage* de nouveaux points du contour connexes des précédents.

- Soit, C_i

Existe-t'il des points connexes de C_i accrochant le point s_{i+1} (amont de s_i)

Si **OUI**,

$$\exists c \in K\{C_i\} \rightarrow s_{i+1}$$

$$\Rightarrow C_{i+1} = \{c \in K\{C_i\} \rightarrow s_{i+1}; c \in C_i \rightarrow s_{i+1}\}$$

$$\Rightarrow D_i = \{c \in C_i \not\rightarrow s_{i+1}\}$$

Si **NON**,

$$\nexists c \in K\{C_i\} \rightarrow s_{i+1}$$

$$\Rightarrow C_{i+1} = C_i$$

Un tel algorithme illustre l'idée qu'en démarrant de l'extrémité d'une branche la remontée à *tout prix* passera obligatoirement par les centres des **MID** successifs. L'écriture d'un tel algorithme est certainement délicate...et reste vaine tant qu'il n'existe pas de moyen d'identifier avec certitude les extrémités de branches (s_0). Dans cette optique, il est intéressant de considérer plus attentivement les RT. Par définition, une RT est engendrée par toute tangence verticale ou horizontale à un disque (Fig.6.47.).

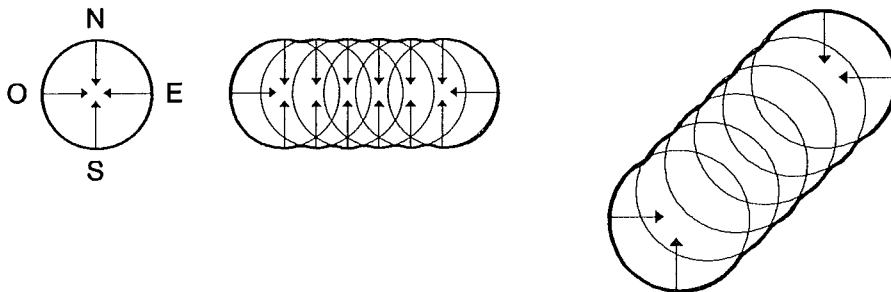


Fig.6.47. Les RT correspondent à tous les points de tangence horizontale et verticale (N,E,S,O). Elles sont toujours au minimum de quatre et plus abondantes aux extrémités des figures.

En raison du chevauchement important entre les disques maxima inscrits successifs, il peut être peu fréquent que les points cardinaux d'un disque coïncident avec un point de contour de l'objet. En revanche, les disques des extrémités seront toujours beaucoup plus *exposés* et donc plus susceptibles d'engendrer des RT. Pour cette raison, les RT permettent de détecter un ensemble **très dense** des extrémités. Seules quelques configurations du type de celles de la figure 6.49. génèrent des extrémités de branche qui échapperont à une RT.

La procédure suivante pourrait être exploitée :

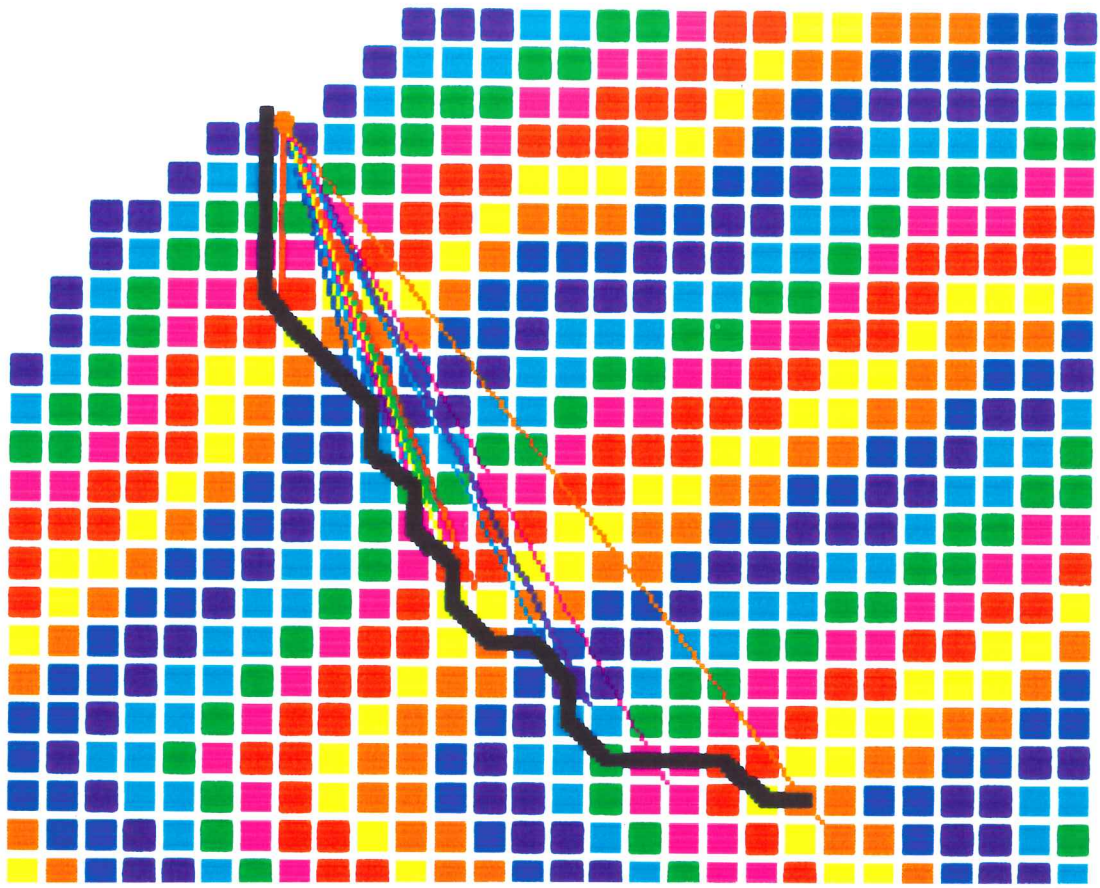


Fig.6.50. Remontée à tout prix complète sur la distance holodisque (en fausses couleurs). Les vecteurs indiquent les différents points appartenant à la Z.I. par lesquels passe la remontée.

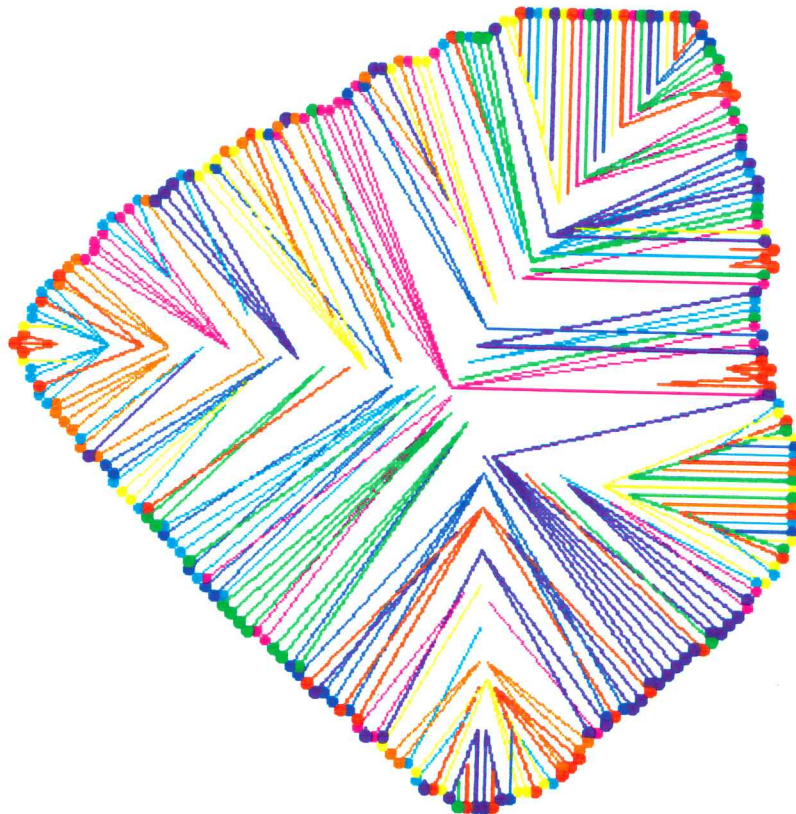


Fig.6.50. Résultat final de toutes les remontées sur le diamant n° 13. La couleur code la longueur du vecteur.

6.5 Un nouveau descripteur morphologique: le Calypstre.

6.5.1 La structure du calypstre.

Les procédures de remontée présentées dans les paragraphes précédents ont permis d'identifier tous les centres de MID d'une forme. Ce résultat serait d'une assez piètre utilité en pratique si contrairement à toutes les procédures de squelettisation connues, nous n'avions obtenu dans le cas présent l'ensemble des vecteurs joignant les points du contour aux points correspondant du squelette. La non-connexité des centres de MID qui est à la base de tous les problèmes de squelettisation dans un espace discret est ici tout naturellement assurée par la connexité des points du contour. Pour préserver l'information relative aux vecteurs identifiés, un nouveau descripteur a été créé dont la structure se présente comme suit :

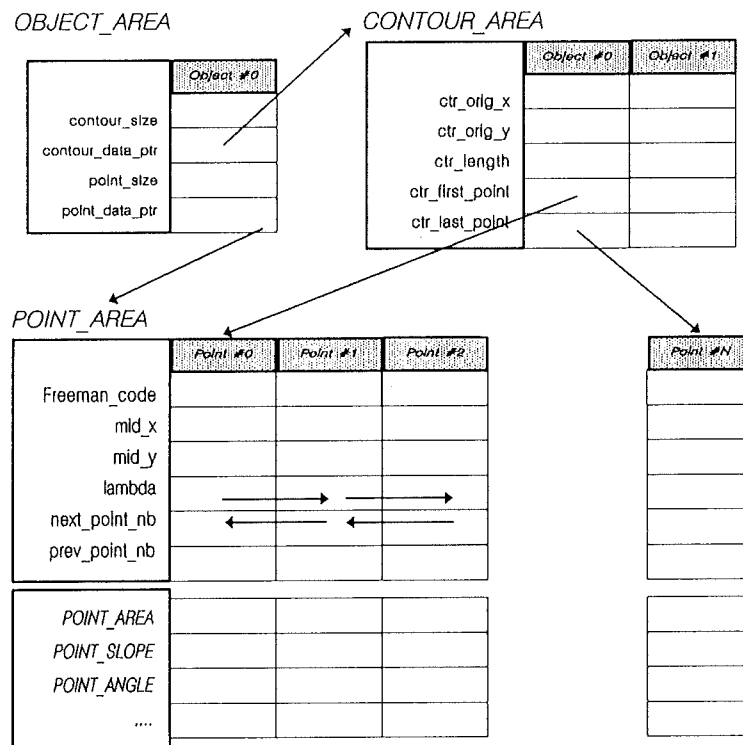


Fig.6.52. Structure du nouveau descripteur.

Cette structure est tout à fait générale et prévoit même qu'un **OBJET** puisse présenter plusieurs contours (si il y a des trous). Chaque contour est identifié par un numéro d'ordre qui le situe précisément dans l'espace mémoire réservé aux **CONTOURS**. Les informations relatives aux coordonnées de son origine, à sa longueur et surtout au numéro d'ordre des premier et dernier points le constituant y sont également mémorisées. Connaissant le premier

point de chaque contour, il est possible d'adresser l'espace mémoire réservé aux **POINTS** et de connaître pour chaque point du contour : le code de Freeman vers le point suivant, les coordonnées *mid_x* et *mid_y* du centre du disque maxima inscrit, le rayon λ de ce disque et le numéro d'ordre du point suivant.

Pour plus de facilité dans la programmation des outils d'analyse qui supposent idéalement de pouvoir parcourir le contour dans un sens comme dans l'autre, le numéro d'ordre du point précédent est également mémorisé. Enfin, un espace mémoire est réservé à la mémorisation de certaines mesures qui seront détaillées dans les prochains paragraphes (Point_Area, Point_Slope, Point_Angle,...). Le nouveau descripteur qui est proposé constitue la synthèse de trois types d'informations morphologiques essentielles :

- la **chaîne de Freeman**.
- le **squelette** par disques entiers maxima inscrits (SKID).
- la **fonction d'extinction**.

Nous verrons qu'il permet d'accéder avec une facilité inégalée à une très large gamme d'outils de traitement et surtout d'*analyse* morphométrique. le temps nécessaire à la construction de ce descripteur au départ de l'image *bitmap*¹ étant largement compensé par la rapidité de calcul des paramètres morphométriques les plus complexes.

Etant donné que le descripteur morphologique proposé ne correspond à rien de connu dans la littérature, nous suggérons d'utiliser dès à présent le terme de **CALYPTRE** pour le désigner. Etymologiquement, calyptre provient de *καλυπτρα* (*voile, enveloppe*). Le terme fait ainsi référence à la perception de l'objet au départ de son *contour lissé*. Le mot calyptre est aussi très proche d'une autre racine *qâlib* (en arabe, forme) qui a donné naissance au mot calibre, lequel désigne le diamètre du disque inscrit...!

1 Dans son implémentation "non-optimisée" sur un processeur On_Board, la construction du calyptre d'une forme de 300 points de contour prend de 1 à 5 secondes. Toute comparaison en ce domaine a peu de signification, mais signalons que Teh & Chin en 1989 étaient très fiers d'annoncer la détection des points dominants sur un contour de 100 points en 10 secondes !

6.5.2 Calypstre et transformations morphologiques de l'objet.

Le calypstre contient toute l'information nécessaire à la reconstruction exacte de l'objet. En réalité, cette information est même doublement présente puisque la reconstruction peut être envisagée au moyen des seuls codes de Freeman (ce qui sera très rapide) ou au départ des paramètres des disques inscrits (mid_x , mid_y et λ). Dans cette dernière hypothèse le travail de reconstruction sera beaucoup plus lent car il fait appel à une procédure graphique de dessin exact d'un disque qui est très lourde. Il convient en effet de remarquer que les algorithmes rapides les plus répandus ne dessinent qu'un disque approché. L'intérêt de la reconstruction par disques réside surtout dans le fait que moyennant une opération arithmétique simple, il est possible de reconstruire l'objet après une *transformation morphologique euclidienne*. Ainsi,

CALYPSTRE	IMAGE RECONSTRUITE
Ajouter une constante à λ	Dilaté euclidien
Soustraire une constante à λ	Erodé euclidien

Ces opérations extrêmement simples permettent d'obtenir l'image de l'objet mais pas le calypstre exact de l'objet transformé dans le sens où la chaîne de Freeman résultante n'est pas recalculée. Pour ces raisons, il n'est pas possible d'accéder immédiatement au résultat d'opérations multiples telles que la *fermeture euclidienne*. Pour réaliser cette fermeture il conviendrait de dilater (ajouter une constante), de construire le calypstre sur l'image du dilaté et ensuite seulement d'éroder (soustraire la constante) (Fig.6.53.).

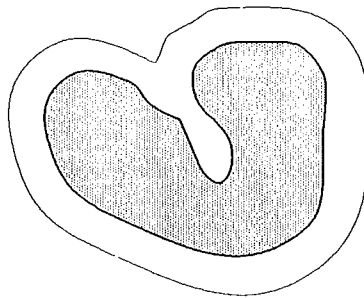


Fig.6.53. Le calypstre du dilaté n'a plus aucun rapport avec le calypstre originel. Pour obtenir la fermeture euclidienne d'un objet, il faut nécessairement passer par le recalcul du calypstre après la dilatation.

Heureusement, l'opération d'*ouverture euclidienne* est immédiatement accessible puisque par définition le calypstre joue un rôle équivalent à celui de la *fonction granulométrie* en trame hexagonale. Ainsi,

Seuiller sur λ

Ouvert euclidien

En conclusion, il s'avère que la morphologie mathématique euclidienne est extrêmement simple au départ d'un descripteur tel que le calypstre. Mais pour que de telles transformations prennent tout leur intérêt, il faudrait développer des algorithmes qui partant du calypstre initial fournissent le calypstre modifié sans passer par le support image. De telles transformations seraient l'équivalent euclidien de la morphologie mathématique sur les chaînes développée par Schmitt[1989] et Vincent[1991]. Le passage par un résultat de type "image" n'a de sens, rappelons-le, que si l'opérateur souhaite *visualiser* la transformation ce qui n'est pas du tout indispensable dans l'optique de l'analyse.

6.5.3 Calyptre et lissage du contour.

Nous avons déjà évoqué au § 6.2.3.1 la très mauvaise robustesse du squelette due au fait que chaque aspérité, même ponctuelle, génère une branche. Pour cette raison, il est toujours préférable de lisser l'objet avant d'appliquer une squelettisation. Une autre approche fréquente en morphologie mathématique consiste à *ébarbuler* le squelette c'est-à-dire en quelque sorte à élaguer les branches au niveau des noeuds. Une telle opération peut détériorer très fortement le squelette tout en étant incapable de différencier les branches les plus significatives des autres. Il est également possible d'envisager un *ébarbulage conditionnel* prenant en compte la valeur de la fonction d'extinction en un point avant de l'éliminer, mais cela adoucit l'ébarbulage sans pour autant préserver les branches significatives.

Le squelette minimal [Meyer,1989] est dans l'optique que nous avons envisagée le squelette lissé à l'extrême. Peut-on définir des squelette lisses qui soient intermédiaires entre le squelette minimal et le SKID intégral tout en préservant le plus longtemps possible les caractéristiques de la forme?

Grâce au calyptre, nous allons voir qu'il est possible d'introduire des critères quantitatifs simples pour justifier de l'élagage d'une branche ou de la suppression de certains centres de MID.

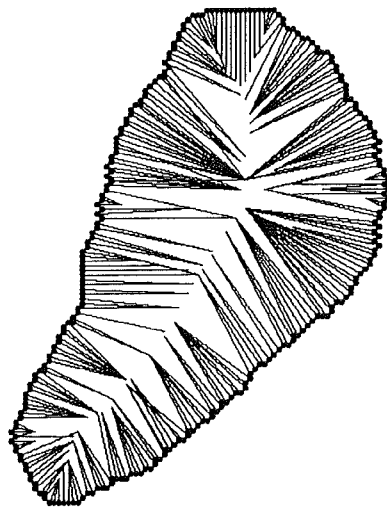


Fig.6.54. Visualisation du calyptre "brut" d'un grain.

6.5.3.1 Suppression de centres de MID parasites.

Examinons la visualisation du calyptre sur la figure 6.54. Il apparaît nettement que certains disques sont plus justifiés que d'autres dans la mesure où un plus grand nombre de vecteurs pointent vers leur centre. Il est particulièrement intéressant de noter que certains de ces disques ne sont *justifiés que par un seul vecteur*. Cette situation est contraire à la définition de Blum mais est inévitablement introduite par la discrétisation de l'image comme l'illustre la figure 6.55.. Les vecteurs justifiés par un seul point du contour sont particulièrement abondants dans le cas d'angles obtus. La figure 6.56. illustre le cas d'un angle à 135° pour lequel le calyptre fournit la séquence de disques suivants: 14,13,10,8,5,3,13,14. Sur cette même figure, l'angle à 90° engendre des vecteurs parfaitement symétriques.

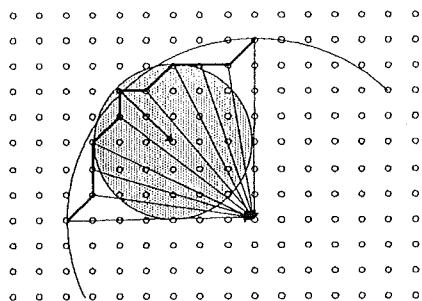


Fig.6.55. La discrétisation explique l'existence de vecteurs uniques. Dans le cas ci-dessus, un disque de taille 7 ne suffit pas à justifier tous les points du contour. Il faut ajouter un disque de taille 3 (en grisé) pour un seul et unique point de contour.

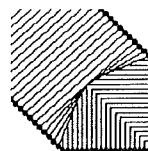


Fig.6.56. Calyptre relatif à un angle de 135° . Noter le grand nombre de vecteurs uniques.

Si notre propos est de coder la forme en un nombre de disques minimum sans en altérer significativement le contour, alors les MID pointés par un vecteur unique peuvent être supprimés du calyptre sans hésitation.

6.5.3.2 Suppression des branches parasites.

Par analogie avec ce qui vient d'être dit pour les disques, il apparaît que les branches les moins significatives d'un squelette sont celles qui sont pointées par le plus petit nombre de vecteurs, c'est-à-dire celles qui ne justifient qu'un petit nombre de points du contour. La figure 6.57. illustre le cas d'une branche significative et d'une moins significative qui ont même longueur.

Il ne serait pas difficile d'imaginer des algorithmes simples permettant de supprimer certains MID ou certaines branches du calyptre, mais nous pouvons aussi introduire des opérations plus générales de morphologie mathématique sur le contour qui vont ouvrir la voie à de nouveaux outils de filtrage.



Fig. 6.57. Les squelettes de ces objets sont identiques (une droite). C'est le nombre de vecteurs du calyptre qui permet de différencier une branche significative d'une moins significative.

6.5.3.3 Morphologie mathématique appliquée au calyptre.

Le calyptre possède l'avantage sur le squelette d'être une structure simple et cyclique (non-arborescente). En réalité, le calyptre est une technique de *développement du contour en un signal*. Tout comme les signaux du § 5.5.3.2. (Fourier) le calyptre, restreint aux longueurs (λ) des vecteurs en chaque point du contour (Fig.6.58.) peut être traité par des méthodes de traitement du signal. Restant fidèle aux principes de la Morphologie Mathématique nous allons envisager les possibilités offertes par la dilatation et l'érosion de ce calyptre.

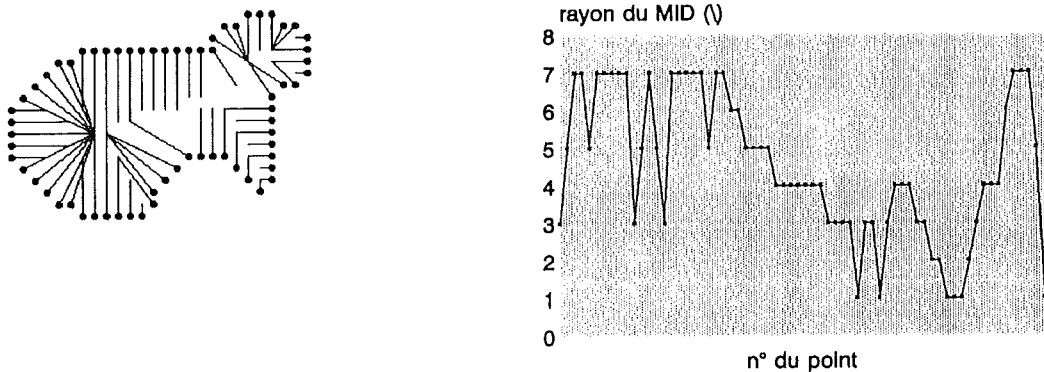


Fig.6.58. Calyptre d'un objet simple et signal des rayons ($\lambda(X)$) correspondant.

La dilatation sur un signal est l'équivalent 1-D de la transformation présentée au § 5.6.1.. Simplement, elle revient à remplacer tout point du signal par le maximum sur le voisinage considéré :

Soit, $\Lambda(X)$: le signal des λ issu du calyptre de X .

$\lambda_i \in \Lambda(X)$: le rayon du MID correspondant au $i^{\text{ème}}$ point du contour.

La dilatation élémentaire s'écrit :

$$D[\Lambda(X)] = \{\lambda_i^* : \lambda_i^* = \text{Sup}\{\lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_{i+1}\}\}$$

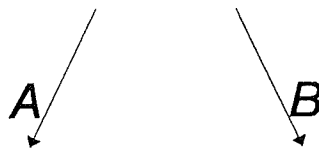
L'opération duale d'érosion élémentaire s'écrit :

$$E[\Lambda(X)] = \{\lambda_i^* : \lambda_i^* = \text{Inf}\{\lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_{i+1}\}\}$$

L'effet de ces opérations sur le signal est simple à interpréter (la dilatation amincit les pics et élargit les vallées), mais la signification réelle sur le contour est un peu plus complexe. En particulier, il n'est pas possible de dilater les λ en ignorant les coordonnées des centres de MID.

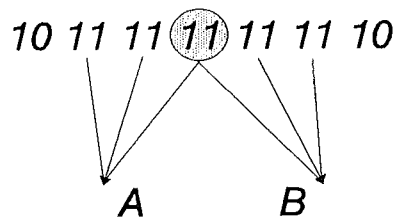
Imaginons le signal suivant :

8 9 10 11 10 11 10 9 8



(les deux MID de $\lambda = 11$ ont des centres A et B distincts)

Après une dilatation élémentaire ce signal devient :



ce qui oblige à dédoubler le pixel central en un vecteur vers A et un autre vers B. Nous n'allons pas approfondir ce problème purement algorithmique. En revanche, la possibilité de filtrer le contour par une opération de fermeture du signal $E[D[\Lambda(X)]]$ s'avère extrêmement puissante et surtout très simple.

Pratiquement, appliquer une fermeture sur le signal $\wedge(X)$ revient à opérer une opération d'ouverture sur l'objet. Mais, plutôt que d'être conditionnée par le seul rayon de courbure, la disparition d'une aspérité est aussi conditionnée par le nombre de points qui forment son contour. Considérons les deux pics de la figure 6.59.. Pour une ouverture morphologique classique, ces deux pics disparaîtraient simultanément puisqu'ils ont le même disque maxima inscrit à la base. Au contraire, par fermeture sur $\wedge(X)$ le pic en A résistera beaucoup plus longtemps car il est constitué d'un plus grand nombre de points de contour.

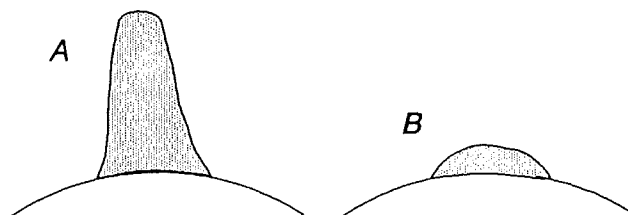


Fig.6.59. Ces deux pics seront arasés simultanément par une ouverture classique. En opérant par fermeture sur $\wedge(X)$, le premier résistera plus longtemps.

A première vue la morphologie mathématique sur $\wedge(X)$ se rapproche des méthodes de lissage du contour évoquées au § (polygonations, splines, ...). La question mériterait en tout cas d'être approfondie sur le plan théorique. Nous pensons que la méthode proposée ici permet en tout cas :

- une implémentation extrêmement rapide.
- de conserver un lissage idéal du contour par des disques.
- de lisser sélectivement les concavités et les convexités.

Dans les applications que nous avons pu traiter, il est apparu que le filtrage par fermeture sur $\wedge(X)$ était indispensable, en particulier pour l'analyse de l'angularité. La méthode de fermeture sur $\wedge(X)$, quoiqu'elle n'ait pas la même fonction que le principe d'élimination des "MID parasites" remplace avantageusement ce dernier dans toutes les applications morphométriques.

La figure 6.60. illustre le calyptre d'une forme après des pas de fermeture de 3, 9 et 21. Remarquons que puisqu'il n'y a pas eu de recalcul du code Freeman correct, le dessin du contour reste tel quel. Seul le regroupement des vecteurs illustre le lissage.

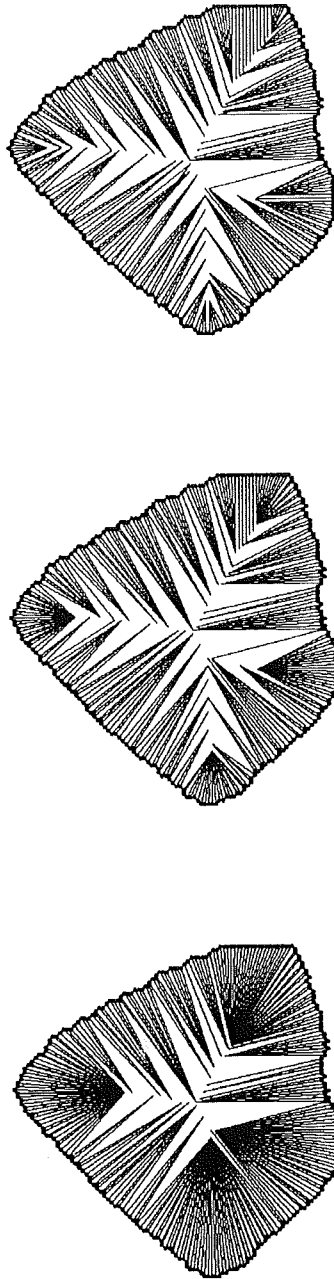


Fig.6.60. Lissage progressif du calyptre de la fig.6.51. pour des pas de fermetures de 3, 9 et 21.

6.5.4 Calypstre et points remarquables du squelette.

Il apparaît bien vite que la détection des points remarquables, l'identification des branches, la lecture de la fonction d'extinction le long de celles-ci, etc... sont des opérations grandement facilitées par la structure du calypstre. Parmi les points remarquables signalés au § 6.2.2., nous pouvons distinguer X et MU qui correspondent à des minima locaux sur $\Lambda(X)$ et E et MD qui correspondent à des maxima locaux sur $\Lambda(X)$.

La première procédure à appliquer au calypstre est par conséquent l'analyse de la pente. Pratiquement, l'algorithme procède par le calcul du gradient sur $\Lambda(X)$:

$$\delta = (\lambda_i - \lambda_{i-1})$$

A chaque pas, ce gradient est comparé avec le signe de la pente en cours. Si il y a changement de signe, le point précédent est soit un minimum, soit un maximum local. Il convient cependant de tenir compte d'un grand nombre de gradients nuls qui obligent à réserver l'attribution de la pente jusqu'au premier gradient non-nul rencontré. La figure 6.61. illustre la procédure.

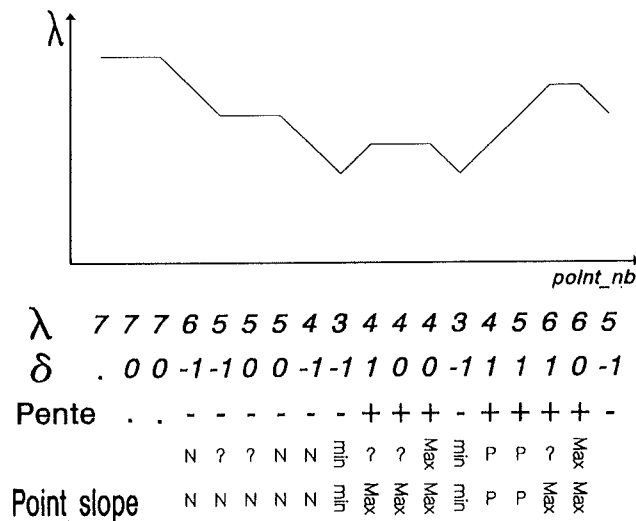


Fig.6.61. Procédure de recherche des extrema locaux sur $\Lambda(X)$. La valeur de POINT_SLOPE est inscrite dans le calypstre ce qui facilitera tous les calculs ultérieurs (N : pente négative; min : minimum; Max : Maximum; P : pente positive).

Après cette procédure qui a permis d'identifier les extrema de la fonction $\Lambda(X)$, il reste encore à différencier les X des éventuels MU présents dans le calypstre ainsi que les E des MD.

6.5.4.1 X et MU.

Les points MU sont par définition des points qui possèdent deux remontées contrairement aux X qui sont les minima d'une branche unique. En conséquence, il convient de tester les vecteurs qui précèdent et suivent les minima pour voir si ils pointent vers la même branche (le même centre de MID si le calyptre a été correctement filtré) ou si ils divergent (Fig.6.62.). Ainsi que l'indiquent les deux schémas, un minimum local sur $\Lambda(X)$ concerne généralement un groupe de points et non un point unique. Pour être rigoureux, il faut rechercher dans ce groupe de points celui qui correspond géométriquement à X ou MU (Fig. 6.63.).

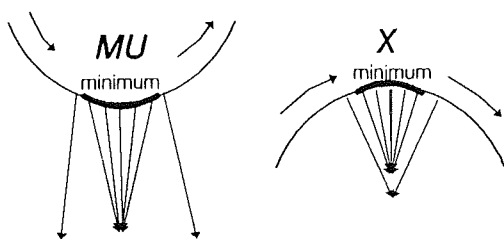


Fig.6.62. Différenciation des extrémités de branches (X) et des minima du squelette minimal (MU).

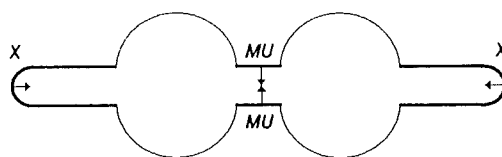


Fig.6.63. L'identification rigoureuse de X et MU suppose de ne prendre en considération que les points qui sont au centre de séquences de minima locaux de $\Lambda(X)$ (en gras).

La facilité avec laquelle les MU sont identifiés sur le calyptre est très intéressante et ouvre la voie à des outils de segmentation très performants. MU n'est autre que le point de passage obligé de la *Ligne de Partage des Eaux*. Il serait vraiment aisé d'envisager une segmentation de la forme conditionnée par la valeur de λ_{MU} .

6.5.4.2 E et MD.

L'érodé ultime (E) n'est autre que le maximum absolu de $\Lambda(X)$. Mais, si un MU a été identifié, cela suppose nécessairement qu'il y a deux érodés ultimes (E_1 et E_2). En conséquence, il faut rechercher les *maxima régionaux* sur chacune des deux parties du calyptre délimitées par MU (Fig.6.64.). Les MD seront tous les autres *maxima locaux* de $\Lambda(X)$ qui ne sont pas E_i . Leur identification est incomparablement plus simple sur le calyptre que sur un squelette. Cette facilité est à la base de l'aisance de calcul d'un grand nombre de paramètres morphologiques.

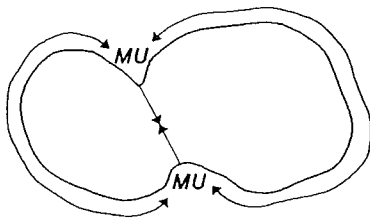
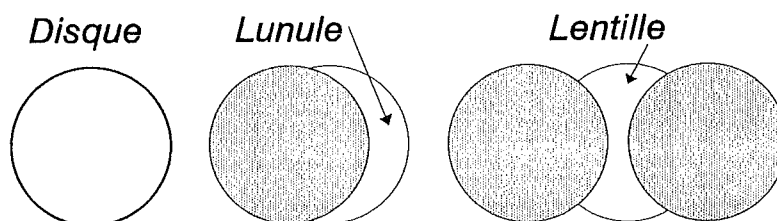


Fig.6.64. Les E_j sont les maxima régionaux sur la portion du calypstre délimitée par les minima de type MU.

6.6 Calypstre et morphométrie euclidienne.

6.6.1 Calcul de l'aire de l'objet.

La décomposition d'un objet binaire en un ensemble de disques maxima inscrits telle que la réalise le calypstre engendre une *décomposition* de l'aire totale d'un objet en une somme d'aires individuelles qui géométriquement sont soit des disques, soit des lunules, soit des "lentilles concaves" :



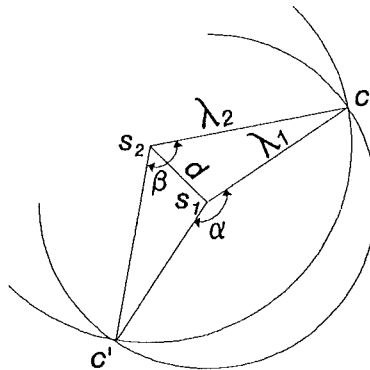
Le **disque** sera l'aire élémentaire associée à un érodé ultime, la "**lentille concave**" l'aire élémentaire associée au MU et la **lunule** l'aire élémentaire associée à tout autre point. Pratiquement, nous avons réservé dans la structure du calypstre un emplacement de mémoire réservé à l'aire élémentaire (POINT_AREA fig. 6.52.). Ceci est justifié par le fait que cette aire servira encore aux calculs des paramètres de rugosité. L'algorithme de calcul de l'aire d'un objet X qui ne présente pas de MU se présente comme suit² :

- 1) Commencer le calcul sur un érodé ultime et calculer l'aire du disque maxima inscrit associé: $\pi \cdot \lambda_f^2$
- 2) Parcourir le calypstre et calculer pour tout point l'aire de la demi-lunule associée. Trois situations peuvent se présenter :
 - Si la pente est NEGATIVE ou que le point est un MINIMUM, calculer la demi-lunule relativement au disque qui précède.
 - Si la pente est POSITIVE ou que le point est un MAXIMUM, calculer la demi-lunule relativement au disque suivant.

² le calcul de l'aire d'un objet avec un ou plusieurs MU se déduit sans problème de la méthode présentée ici. Il suffit d'introduire le calcul de la "lentille concave".

- Si le point est un E, il faut vérifier si son vecteur pointe vers le centre du disque déjà calculé en 1) et seulement dans le cas contraire calculer la demi-lunule.

L'idée de calculer une **demi-lunule** plutôt qu'une lunule entière permet de traiter le cas de disques qui ne sont identifiés que par des vecteurs situés *soit* sur la pente négative, *soit* sur la pente positive d'une même branche. La formule de calcul de l'aire d'une demi-lunule se déduit de la construction géométrique suivante :



L'aire de la lunule est égale à l'aire du secteur soustendu par l'angle α sur le disque λ_1 plus l'aire du polygone $c c' s_1 s_2$ moins l'aire du secteur soustendu par β sur le disque λ_2 . Avec $\lambda_2 \geq \lambda_1$!

Soit :

$$A_1 = \frac{\alpha}{2} \cdot \lambda_1^2 + d \cdot \lambda_2 \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) - \frac{\beta}{2} \cdot \lambda_2^2$$

avec

$$\frac{\beta}{2} = \arccos\left(\frac{d^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2}{2d\lambda_2}\right)$$

et

$$\frac{\alpha}{2} = \pi - \arccos\left(\frac{d^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2d\lambda_1}\right)$$

6.6.2 Caractérisation de la rugosité globale.

Dès l'instant où l'aire élémentaire associée à tout point du calypstre a été calculée, il suffit pour connaître la rugosité globale d'effectuer des sommes conditionnelles.

Rappelons que nous avons défini :

$$R_G = \frac{A(X) - A(MUHO(X))}{A(X)}$$

Très simplement, $A(MUHO(X))$ est la somme des contributions d'aires associées aux points du calypstre pour lesquels $\lambda_i \geq \lambda_M (= \gamma \cdot \lambda_E)$ ou pour lesquels le centre de MID appartient au squelette minimal. La vérification de ces conditions sur le calypstre est immédiate et en l'occurrence le calcul de R_G ne pose aucun problème.

Ceci constitue un progrès important par rapport à la méthode en trame hexagonale qui supposait de passer par l'intermédiaire de la reconstruction graphique de $MUHO(X)$ et d'une soustraction ensembliste.

Le problème majeur posé par un paramètre tel que R_G est bien sûr de fixer γ de manière rigoureuse. Pour les ensembles quasi-convexes, le choix le plus simple et aussi le plus attrayant est de définir γ en référence à l'élongation de l'objet. Considérons l'ellipse de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$. Le rayon de courbure minimum sur cette ellipse est :

$$\lambda_X = \frac{b^2}{a}$$

Le rayon du disque maxima inscrit est par définition : $\lambda_E = b$

Dès lors, si on considère qu'une ellipse est un objet lisse, il faut que :

$$\gamma \geq \frac{\lambda_X}{\lambda_E} = \frac{b^2}{a \cdot b} = \frac{b}{a}$$

$$\gamma \geq El_F$$

En pratique, pour des formes équidimensionnelles ($El_F=1$) il s'avère plus robuste d'adopter une valeur maximale de γ de 80%.

Pour pouvoir comparer la rugosité indépendamment de l'élongation, il est aussi plus correct de calculer :

$$R_{G'} = \frac{A(X) - A(MUHO(X))}{(\lambda_E)^2}$$

Le tableau 6.65. montre les mesures de R_G^y et R_G^y , réalisées sur les grains de la charte de Powers (Fig.5.18.) où figurent des grains d'élongation 1 (n° 1 à 6) et 0,5 (n° 7 à 12). Insistons sur le fait que la charte de Powers est une charte d'émoissés et non réellement de rugosité globale !

n°	El _F	R_G^{50}	R_G^{80}	R_G^{El}	R_G^{El}
1	1.00	5.01	10.31	10.31	40.76
2	1.00	3.12	15.41	15.41	76.62
3	1.00	2.61	7.27	7.27	30.13
4	1.00	0.41	4.59	4.59	17.79
5	1.00	0.29	3.19	3.19	13.50
6	1.00	0.25	1.05	1.05	4.25
7	0.5	3.93	7.51	3.93	24.66
8	0.5	2.92	20.54	2.92	23.88
9	0.5	2.19	17.90	2.19	14.76
10	0.5	1.12	6.27	1.12	8.95
11	0.5	0.29	3.83	0.29	1.83
12	0.5	0.07	1.67	0.07	0.57

Tab. 6.65. Analyse de la rugosité globale (R_G) et de la rugosité globale corrigée ($R_{G'}$) pour les grains de la charte de Powers. γ est fixé soit de manière absolue (0,5 et 0,8) soit de manière relative (El).

6.6.3 Caractérisation de la rugosité morphologique.

Le paramètre de *rugosité morphologique* a été amplement discuté au § 5.6.3.. Il y est apparu préférable de calculer le moment négatif réduit du premier ordre de la fonction granulométrique en limitant la somme des termes. En utilisant la même borne supérieure λ_M qu'au paragraphe précédent pour définir le caractère rugueux, le calcul de α est immédiat :

$$\alpha = \frac{\lambda_E}{A(X)} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \frac{A_{\lambda_i}(X)}{\lambda_i} \right) \quad (\forall \lambda_i < \lambda_M)$$

(pour tout point du calyptre dont le vecteur ne pointe pas vers le squelette minimal)

avec $A_{\lambda_i}(X)$

désignant l'aire de la demi-lunule associée à λ_i .

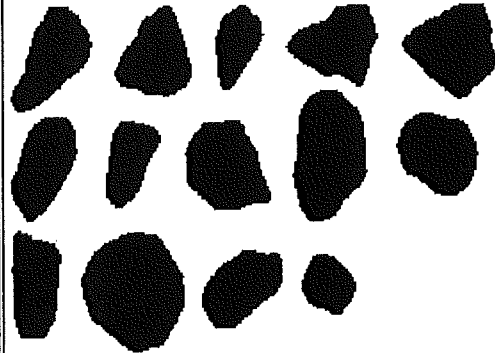
Le tableau 6.66. montre les résultats de la mesure de α sur la charte de Powers en prenant $\lambda_M = 0.5\lambda_E$ et $\lambda_M = 0.8\lambda_E$.

n°	α^{50}	α^{80}
1	1.76	2.58
2	1.03	2.92
3	0.73	1.45
4	0.11	0.73
5	0.08	0.56
6	0.08	0.20
7	1.32	1.86
8	0.78	3.57
9	0.57	2.99
10	0.28	1.06
11	0.08	0.58
12	0.02	0.24

Tab.6.66. Charte de Powers. Calcul de la rugosité morphologique réduite.

Le tableau 6.67. fournit les résultats de l'analyse conjointe de la rugosité globale et de la rugosité morphologique sur les grains de diamants. On remarquera la forte corrélation entre les deux mesures.

n°	R_G^{80}	α
1	8.80	1.47
2	5.02	0.94
3	7.63	1.21
4	15.42	2.72
5	13.52	2.71
6	4.42	0.77
7	5.86	0.97
8	7.40	1.76
9	4.93	0.91
10	19.99	3.29
11	7.28	1.22
12	5.01	0.96
13	12.09	2.33
14	24.60	4.15

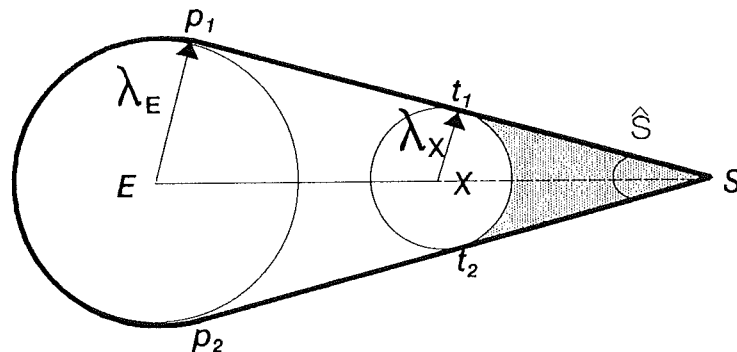


Tab.6.67. Analyse de la rugosité globale et de la rugosité morphologique sur les 14 grains de diamant. Classification visuelle selon les valeurs de R_G décroissantes.

6.6.3.1 Expression théorique de α en fonction de l'angle et de l'émousié.

Le paramètre de rugosité morphologique a été proposé par Serra[1982] pour exploiter les données de la fonction granulométrique par ouverture. La relation exacte entre α et la morphologie d'une aspérité n'est pas clairement établie. Pour essayer de mieux cerner la variation de α avec deux paramètres spécifiques de l'aspérité qui sont d'une part l'angle au sommet (\hat{S}) et d'autre part l'émousié (W), nous avons calculé l'expression théorique de la rugosité morphologique d'une forme simple.

Considérons, la forme ci-après :



Exprimons la surface qui est supprimée de la pointe par une ouverture de taille λ_x (aire hachurée) :

l'aire du polygone $[x, t_1, s, t_2]$ vaut :

$$A_{x t_1 s t_2} = 2 \cdot \left(\frac{d_{x s} \cos\left(\frac{\hat{S}}{2}\right) - \lambda_x}{2} \right)$$

sachant que :

$$\lambda_x = d_{x s} \sin\left(\frac{\hat{S}}{2}\right)$$

il vient :

$$A_{x t_1 s t_2} = \lambda_x^2 \cdot \cotg\left(\frac{\hat{S}}{2}\right)$$

d'autre part, l'aire du secteur vaut :

$$A_{x t_1 t_2} = \lambda_x^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{S}}{2} \right)$$

Par conséquent, l'aire soustraite d'une pointe par une ouverture de taille λ vaut :

$$A(X) - A(O^\lambda(X)) = \lambda^2 \cdot \left(\cotg\left(\frac{\hat{S}}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{S}}{2} \right) \right)$$

L'aire totale de l'objet représenté, d'angularité \hat{S} et d'émousé W peut s'écrire comme la somme des aires des trapèzes EXt_1p_1 et EXt_2p_2 et des secteurs Ep_1p_2 et Xt_1t_2 . Soit,

$$A(X) = (\lambda_E^2 - \lambda_X^2) \cotg\left(\frac{\hat{S}}{2}\right) + \lambda_E^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\hat{S}}{2} \right) + \lambda_X^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{S}}{2} \right)$$

$$A(X) = \lambda_E^2 \cdot \left(\cotg\left(\frac{\hat{S}}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\hat{S}}{2} \right) \right) - \lambda_X^2 \cdot \left(\cotg\left(\frac{\hat{S}}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{S}}{2} \right) \right)$$

Considérons deux ouvertures successives de l'objet de tailles :

$$\lambda_n = (w + n \cdot dw) \cdot \lambda_E$$

et

$$\lambda_{n-1} = (w + (n-1) \cdot dw) \cdot \lambda_E$$

$$w \text{ étant l'échoué : } \frac{\lambda_X}{\lambda_E}$$

dw exprimant par conséquent la discrétisation des pas d'ouvertures relativement à λ_E .

La différence entre les deux ouvertures successives s'écrit :

$$\begin{aligned} & A(O^{\lambda_n}(X)) - A(O^{\lambda_{n-1}}(X)) \\ &= ((w + n \cdot dw)^2 \cdot \lambda_E^2 - (w + (n-1) \cdot dw)^2 \cdot \lambda_E^2) \cdot \left(\cotg\left(\frac{\hat{S}}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{S}}{2}\right) \right) \\ &= \lambda_E^2 \cdot dw \cdot (2w + 2n - dw) \cdot \left(\cotg\left(\frac{\hat{S}}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{S}}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

La fonction $g(\lambda)$ n'est autre que cette différence de deux ouvertures successives exprimée relativement à l'aire totale de l'objet :

En posant :

$$G = \cotg\left(\frac{\hat{S}}{2}\right) + \left(\frac{\hat{S}}{2}\right)$$

L'expression de $g(\lambda)$ devient :

$$g(\lambda) = \frac{dw \cdot (2w + 2n - dw) \cdot \left(G - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(G + \frac{\pi}{2} - w^2 \left(G - \frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

La rugosité morphologique réduite et tronquée telle que nous l'avons adoptée précédemment s'écrit dès lors:

$$\alpha = \lambda_E \cdot \sum_{n_{\text{inf}}}^{n_{\text{sup}}} \frac{g(\lambda)}{\lambda}$$

avec

$$n_{\text{inf}} = \frac{0.1 - w}{dw} \quad \text{si } w < 0.1 \text{ [3], sinon } n_{\text{inf}} = 1$$

et

$$n_{\text{sup}} = \frac{\gamma - w}{dw} \quad \text{si } w < \gamma, \text{ sinon } n_{\text{sup}} = 0$$

Ainsi,

$$\alpha = \lambda_E \cdot \sum_{n_{\text{inf}}}^{n_{\text{sup}}} \frac{g(\lambda)}{(w + n \cdot dw) \cdot \lambda_E}$$

Soit encore,

$$\alpha = \frac{dw \cdot \left(G - \frac{\pi}{2}\right)}{G + \frac{\pi}{2} - w^2 \cdot \left(G - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \sum_{n_{\text{inf}}}^{n_{\text{sup}}} \left(\frac{2w + 2n - dw}{w + n \cdot dw} \right)$$

Cette dernière équation exprime comment la rugosité morphologique α est une fonction complexe de l'angle au sommet \hat{S} et de l'émoissé W d'une aspérité. Il convient d'insister sur le fait que cette équation n'est valable que pour l'objet représenté et qu'il n'est pas possible de calculer avec précision le α correspondant à un objet quelconque présentant plusieurs aspérités angulaires de \hat{S} et W connues. L'intérêt majeur de l'équation est de fournir une idée de la spécificité et de la sensibilité de α .

Le tableau 6.68. reprend les valeurs calculées de α pour différentes valeurs de W et de \hat{S} , en considérant des bornes pour la somme partielle correspondant à $0.1\lambda_E$ et $0.5\lambda_E$. La discrétisation adoptée est de $dw=0.05$ ce qui correspond à un objet de $\lambda_E = 20$ unités de trame. La figure 6.68. donne la représentation graphique du tableau. Il apparaît très clairement que α regroupe dans une même classe des angles aigus très émoissés et des angles obtus acérés. Il est clair aussi que α est très peu discriminant dans le domaine des angles obtus, tandis qu'il est extrêmement sensible aux angles aigus acérés.

3 cette valeur de 10 % a été adoptée comme borne inférieure par Frossard. Elle s'avère justifiée en pratique par le fait qu'après un lissage indispensable de la forme il ne subsiste pas d'aspérités plus acérées que 10 %.

W	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
S _W								
5°	9.23	7.66	6.33	5.15	4.07	3.05	2.06	1.05
10°	8.04	6.66	5.49	4.46	3.51	2.62	1.76	0.89
15°	7.00	5.79	4.76	3.86	3.03	2.25	1.50	0.76
20°	6.09	5.03	4.13	3.34	2.62	1.94	1.29	0.65
25°	5.29	4.37	3.58	2.89	2.26	1.67	1.11	0.55
30°	4.59	3.79	3.10	2.50	1.95	1.44	0.95	0.47
35°	3.98	3.28	2.69	2.16	1.68	1.24	0.82	0.41
40°	3.44	2.84	2.32	1.86	1.45	1.07	0.70	0.35
45°	2.97	2.45	2.00	1.61	1.25	0.92	0.60	0.30
50°	2.56	2.11	1.72	1.38	1.07	0.78	0.51	0.25
55°	2.20	1.81	1.48	1.18	0.92	0.67	0.44	0.22
60°	1.88	1.55	1.26	1.01	0.78	0.57	0.37	0.18
65°	1.61	1.32	1.08	0.86	0.67	0.49	0.32	0.16
70°	1.36	1.12	0.91	0.73	0.57	0.41	0.27	0.13
75°	1.15	0.95	0.77	0.62	0.48	0.35	0.23	0.11
80°	0.97	0.80	0.65	0.52	0.40	0.29	0.19	0.09
85°	0.81	0.66	0.54	0.43	0.33	0.24	0.16	0.08
90°	0.67	0.55	0.45	0.36	0.28	0.20	0.13	0.06
95°	0.55	0.45	0.37	0.29	0.23	0.17	0.11	0.05
100°	0.45	0.37	0.30	0.24	0.19	0.14	0.09	0.04
105°	0.36	0.30	0.24	0.19	0.15	0.11	0.07	0.03
110°	0.29	0.24	0.19	0.15	0.12	0.09	0.06	0.03
115°	0.23	0.19	0.15	0.12	0.09	0.07	0.04	0.02
120°	0.18	0.14	0.12	0.09	0.07	0.05	0.03	0.02
125°	0.13	0.11	0.09	0.07	0.06	0.04	0.03	0.01
130°	0.10	0.08	0.07	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01
135°	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.01
140°	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00

Tab.6.68. Variation de la rugosité morphologique en fonction de l'angle au sommet et de l'éroussé (W).

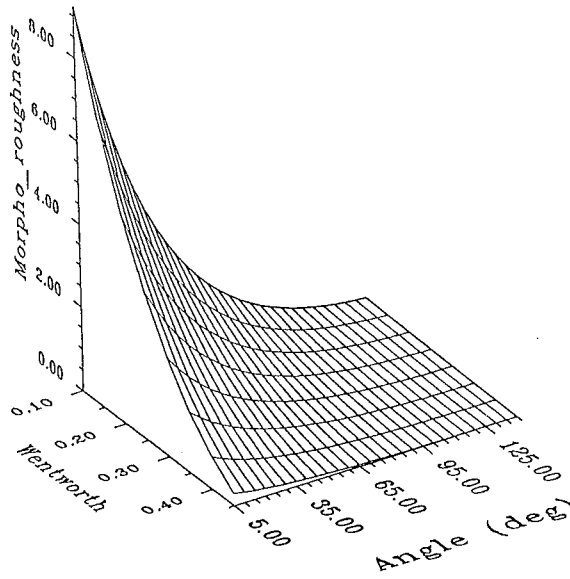


Fig.6.68. Variation de la rugosité morphologique en fonction de l'angle au sommet et de l'émousé (W).

A titre de vérification expérimentale, nous avons analysé la rugosité morphologique au départ du calyptre pour un angle de $\hat{S} = 58$ et un émousé de $W = 10$ % (après fermeture simple sur $\wedge(X)$) et de $W = 14$ % (après fermeture double sur $\wedge(X)$)⁴. Les valeurs théoriques et mesurées sont les suivantes :

VALEURS THEORIQUES			VALEURS MESUREES		
\hat{S}	W	α	\hat{S}	W	α
55°	10	2.20	58°	10	1.86
60°	10	1.88			
55°	15	1.81	58°	14	1.73
60°	15	1.55			

⁴ il s'agissait d'un dessin assez approximatif par ordinateur et non de la discrétisation exacte de la forme !

6.6.4 Indice d'émoussé et théorie de l'abrasion.

Grâce à la structure du calyptre, nous connaissons la valeur de λ_i en tout point ainsi que λ_E . Il est par conséquent immédiat de calculer $W_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_E}$. Nous avons vu au § 5.4.2.3. que l'émoussé W est à la base de plusieurs paramètres fondamentaux en morphométrie:

Indice de Wentworth

$$W_1 = \frac{\lambda_{X1}}{\lambda_E}$$

et

Indice de Wadell

$$\bar{W} = \frac{\sum_{i=1}^{N_X} W_i}{N_X}$$

où X_i : désigne les minima locaux de $\Lambda(X)$ rangés en termes de λ croissants :

$$\lambda_{X1} \leq \lambda_{X2} \leq \lambda_{X3} \dots \leq \lambda_{XN}$$

et où N_X : est le nombre de minima locaux de $\Lambda(X)$
(soit, le nombre d'aspérités sur le contour)

La préférence pour l'un ou l'autre indice dépend d'un auteur à l'autre. Il s'agit d'un problème classique en statistique (extréma ou moyenne d'une distribution) qui dans le cas présent n'a jamais été discuté que de manière éminemment subjective par les spécialistes... avec la circonstance aggravante qu'en l'absence de méthodes quantitatives automatisables la subjectivité de la perception visuelle jouait un grand rôle. Nous allons examiner comment, dès lors que nous avons réalisé l'automatisation de la mesure, il est possible de conférer une signification physique plus précise au paramètre d'émoussé.

Bloore[1977] a analysé sur un plan théorique l'évolution de la morphologie des galets soumis à érosion. Il a montré que la *fonction d'attrition* pouvait s'écrire sous la forme :

$$\frac{ds}{dt} = v \cdot (1 + \epsilon \cdot \rho_1) (1 + \epsilon \cdot \rho_2)$$

avec $\frac{ds}{dt}$: vitesse d'érosion perpendiculaire à la surface.

ρ_1, ρ_2 : les courbures principales au point considéré.

ϵ : le rayon des particules impactantes.

v : vitesse d'érosion d'une surface plane, considérée comme une constante pour des particules de même nature dans un même processus d'érosion.

Cette expression théorique n'est valable que pour des particules à symétrie sphérique constituées d'un matériau mécaniquement isotrope et soumises à un bombardement isotrope de grains sphériques de rayon ϵ . Elle suppose aussi la conservation de la taille moyenne des particules impactantes. Bloore a ainsi pu généraliser la loi de conservation de la morphologie ellipsoïdale par érosion [Rayleigh, 1942] en démontrant qu'elle est fonction de la morphologie initiale et de la taille des particules impactantes. En particulier, des ellipsoïdes de grande de taille relativement aux particules impactantes s'éroderont en évoluant vers une morphologie encore plus ellipsoïdale avant de converger vers la morphologie sphérique en dessous d'une taille critique.

A la lumière de l'équation de Bloore, il est possible d'imaginer un paramètre de caractérisation de la *maturité* d'un grain érodé à condition de connaître ϵ, ρ_1, ρ_2 . Si nous restreignons la discussion au cas de sédiments de granulométrie homogène, nous pouvons considérer que la taille des particules impactantes est la taille du grain lui-même, en l'occurrence $\epsilon = \lambda_E$. Puisque nous travaillons en 2-D, nous ferons aussi l'hypothèse que $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\lambda_i}$ en tout point.

Ceci nous permet d'estimer la *vitesse d'attrition* en tout point du contour par :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_i = v \cdot \left(1 + \frac{\lambda_E}{\lambda_i}\right)^2$$

Dans le cas où nous comparons des particules de même nature dans un même processus d'érosion v est constant! En conséquence, il est aussi possible de calculer une vitesse moyenne d'érosion sur le contour :

$$\bar{V} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} \left(1 + \frac{\lambda_E}{\lambda_i}\right)^2$$

Il peut éventuellement s'avérer préférable pour caractériser la maturité d'un grain, de calculer les vitesses maximales, c'est-à-dire celles relatives aux points de plus forte courbure. Pour cette raison nous proposons le calcul d'un *indice d'érosion* \bar{B} :

$$\bar{B} = \frac{1}{N_X} \cdot \sum_{i=1}^{N_X} \left(1 + \frac{\lambda_E}{\lambda_{\Xi}}\right)^2 = \frac{1}{N_X} \cdot \sum_{i=1}^{N_X} \left(1 + \frac{1}{W_i}\right)^2$$

ce qui peut donner lieu à l'écriture d'un *indice d'émoissé équivalent* W_B :

$$W_B = \frac{1}{\sqrt{\bar{B}} - 1}$$

et de manière identique W_V :

$$W_V = \frac{1}{\sqrt{\bar{V}} - 1}$$

Les indices d'émoissés équivalents W_B et W_V possèdent l'avantage sur l'indice de Wentworth modifié (W_1) d'être beaucoup plus robustes au bruitage du contour. En donnant un poids plus important aux aspérités très acérées ($W \ll$), les indices d'émoissés équivalents W_B et W_V offrent une méthode de caractérisation du contour plus représentative du phénomène d'érosion étudié. Powers[1953] en établissant une charte(Fig.5.18.) sensée représenter des grains en fonction de \bar{w} selon une échelle géométrique avait déjà pressenti de manière intuitive la signification primordiale des aspérités les plus acérées. Le calcul de W_B ou W_V nous paraît offrir un bon compromis entre les indices W_1 et \bar{w} tout en conférant une signification physique accrue à la mesure.

n°	$W_1(\%)$	$\bar{w}(\%)$	$W_B(\%)$	$W_V(\%)$
1	7	30	17	25
2	11	33	23	37
3	14	37	29	42
4	21	43	36	56
5	16	45	35	60
6	18	44	33	60
7	10	30	22	33
8	28	45	36	48
9	10	33	24	43
10	17	45	34	58
11	25	47	38	65
12	26	54	47	75

Fig.6.69 Mesures d'émoissés et d'émoissés équivalents sur la charte de Powers.

Le tableau 6.69. montre les valeurs de W_1 , \bar{w} , W_B et W_V mesurées sur la charte de Powers. La première réflexion qui puisse être faite est que les grains ne se classent pas parfaitement dans l'échelle \bar{w} de Wadell qui a inspiré la charte!. Deux remarques s'imposent :

- 1) La charte de Powers est constituée de photographies de boules d'argile moulées à la main. Powers à sans doute fait des mesures sur les objets à l'échelle réelle et en 3-D. Par projection en 2-D et réduction à 1 - 1,5 cm de diamètre la représentativité des modèles de particules a perdu beaucoup de sa valeur.⁴
- 2) Il est manifeste que nous sommes confrontés à la subjectivité d'une mesure de \bar{w} par un opérateur humain. Aucun critère n'est donné pour fixer le *caractère significatif* d'une aspérité. Jamais aucun auteur de charte n'a spécifié le nombre d'aspérités sur lequel il a effectué ses calculs!
 Dans la mesure présentée ici, toute aspérité qui n'appartient pas à MUHO(X) a été prise en compte, quelque soit sa prééminence.

Les mêmes problèmes émergent à l'analyse de la charte de Krumbein (Fig.5.17.). Cette charte, la plus universellement reconnue a l'avantage d'améliorer très sensiblement les conditions de représentation puisqu'il s'agit d'ombres de grains représentés à 2 - 3 cm de diamètre. Comme l'indique le tableau 6.70. qui reprend les mesures sur un grain de chaque classe, nous ne retrouvons nullement des mesures comparables dans l'absolu à celles indiquées par Krumbein, mais la classification des grains est dans l'ensemble correcte. C'est manifestement l'indice d'émoissé équivalent W_V qui fournit les résultats les plus convaincants. Ce dernier paramètre possède sur tous les autres un avantage déterminant : il se calcule au départ de **TOUS LES POINTS DU CONTOUR**. Ce qui est probablement la meilleure manière de régler la discussion sur le caractère significatif ou non d'une aspérité.

ROBUSTESSE DES MESURES D'EMOUSSÉS SUR LE CALYPTRE.

Dans le but de tester la robustesse des mesures d'émoissé et de rugosité. Nous avons utilisé le *triangle* de la Fig.5.83. dont les diverses rotations avaient déjà été exploitées en trame hexagonale (Tab.6.29.c). Les résultats de ces mesures sont présentés au tableau 6.71.. La forme a subi des rotations selon un pas de 7,5° et on a appliqué au calyptre une fermeture de taille 3. La valeur de γ est fixée à 80%.

⁴ En raison de la mauvaise qualité du contraste dans la publication de Powers, nous avons du redessiner manuellement les grains. Leur discrétisation s'est faite sur plus ou moins 600 points de contour soit environ 15 000 pixels!

classe d'éroussé selon Krumbein	$W_1(\%)$	$\bar{w}(\%)$	$W_V(\%)$
10	9	22	28
20	10	29	33
30	13	29	38
40	15	32	45
50	18	49	59
60	22	43	63
70	21	57	73
80	21	48	70
90	30	58	82

Tab.6.70. Mesures d'éroussés et d'éroussés équivalents sur quelques grains de la charte de Krumbein.

Rotation	W_1	\bar{w}	W_V	R_G	α
0°	5	27	28	29,92%	5,82
7,5°	3	29	20	29,22%	5,78
15°	5	25	26	27,63%	5,51
22,5°	5	27	27	28,24%	5,49
30°	5	27	25	30,12%	5,83

Tab.6.70. Analyse de l'éroussé et de la rugosité pour le triangle de la figure 5.83.

La stabilité des mesures est tout naturellement supérieure pour les paramètres basés sur des mesures d'aire (R_G) ou sur des moyennes (\bar{w} , α). Elle est moins bonne pour W_1 et W_V qui en donnant plus de poids aux aspérités acérées sont d'autant plus sensibles au lissage et aux conditions d'acquisition.

6.6.5 Mesures d'angles et calcul de l'angularité.

Dés que les points remarquables ont été identifiés sur le calyptre, le calcul de angles au sommet de chaque aspérité détectée est immédiat selon la formule (cfr. § 6.3.2.) :

$$\hat{S} = 2 \cdot \text{Arcsin} \left(\frac{\lambda_U - \lambda_X}{d_{UX}} \right)$$

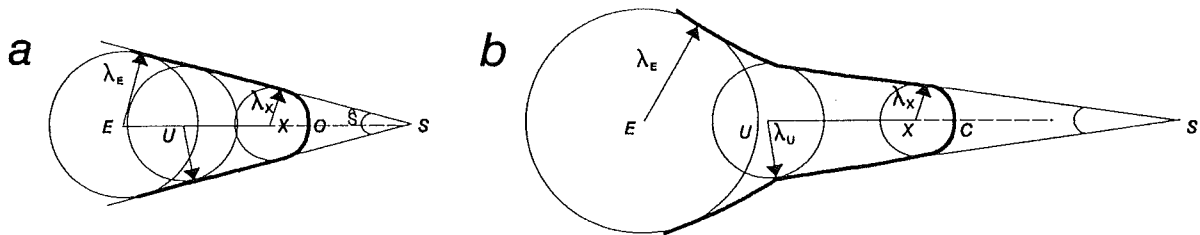


Fig.6.72. L'angularité peut se calculer soit relativement au rayon d'appui de l'aspérité (λ_U) soit relativement au premier rayon maximum rencontré (ici λ_E). Pour des formes régulières (a), le résultat sera le même.

On adoptera comme valeur de λ_U le premier maximum local (MD) rencontré ou à défaut le premier point du MUHO rencontré ($\lambda_i \geq \lambda_M (= \gamma \cdot \lambda_E)$). Dans ce dernier cas, on peut par exemple calculer l'angle réel d'une aspérité comme celle de la figure 6.72.b. plutôt que son angle enveloppe qui s'appuie sur λ_E ... mais ce genre de nuances est de peu d'importance dans l'analyse de matériaux granulaires. Ce qui reste le plus problématique pour l'analyse des particules réelles, c'est de trouver un *critère* simple pour résumer en un paramètre la notion d'ANGULARITE.

Nous avons présenté au § 5.4.2.3. la mesure de l'angularité proposée par Lees[1964] pour faire face à la déficience de l'indice d'émoissé dans l'analyse des grains issus du broyage et par conséquent fortement anguleux. La proposition de Lees est une tentative de résumer en un seul paramètre les informations angulaires d'un contour... mais malheureusement sa méthode ne résiste pas à l'analyse.

Non content d'être confronté au problème de grains quasi-convexes, Lees a voulu résoudre le problème de manière plus large en tentant de définir une mesure unique pour différencier des formes comme celles de la figure 6.73..

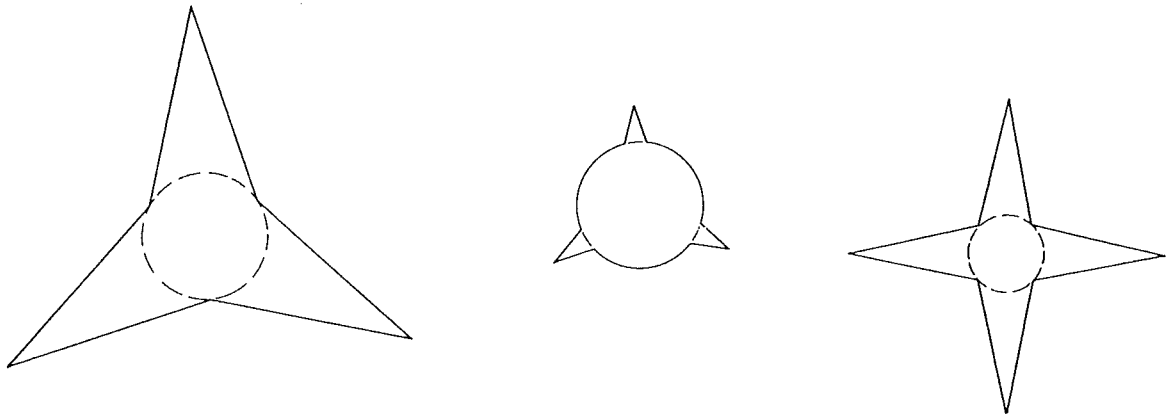


Fig.6.73. Formes géométriques caractérisées par des angularités différentes selon la conception de Lees[1964].

Il prend en considération trois aspects :

- 1) l'acuité de l'angle au sommet.
- 2) la proéminence de cet angle.
- 3) le nombre d'aspérités angulaires présentes sur une forme.

Sa proposition empirique est (en fonction des notations de la Fig.6.72.) :

$$A_L = \sum_i^{N_X} (180^\circ - \hat{S}_i) \cdot \frac{d_{EC}}{\lambda_E}$$

avec N_X : nombre d'aspérités.
 d_{EC} : la distance entre l'érodé ultime (E) et le sommet de l'aspérité.
 \hat{S}_i : les angles au sommet de chaque aspérité.

Les critiques suivantes sont immédiates. :

- 1) L'idée de sommer des contributions angulaires individuelles rend le paramètre peu robuste et lui retire toute signification. La valeur la plus élevée sur la charte dressée par Lees (Fig.5.19.) est atteinte pour un grain que l'on qualifierait plutôt de rugueux que d'anguleux. La somme d'une multitude de petites contributions insignifiantes équivaut dans ce cas à la contribution unique d'une aspérité très aiguë et acérée.
- 2) La proéminence de l'aspérité mesurée par $\frac{d_{EC}}{\lambda_E}$ n'est pas indépendante de l'angle !
 Pour la plupart des angles cette mesure est très faible (entre 1 et 3) et elle ne

peut être que très exceptionnellement supérieure à 10. Cette remarque vaut pour des formes théoriques, il est évident que sur des matériaux naturels $\frac{d_{EC}}{\lambda_E}$ reste très faible.

- 3) Les formes étudiées par Lees sont toutes parfaitement acérées ($W \rightarrow 0$) ce qui signifie pour toutes les formes régulières (Fig.6.72.a. c'est-à-dire tous les cas pratiques!) que :

$$(180^\circ - \hat{S}) \cdot \frac{d_{EC}}{\lambda_E} = (180^\circ - \hat{S}) \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\hat{S}}{2}\right)}$$

C'est là le seul mystère de la formule de Lees, transformer une échelle linéaire des angles en une échelle fortement non-linéaire. Il est dommage que cette transformation ne repose sur aucune argumentation physique précise.

La valeur de A_L telle qu'elle est définie est pour une aspérité régulière (Fig.6.72.a.) fonction à la fois de \hat{S} et de W . En réalité :

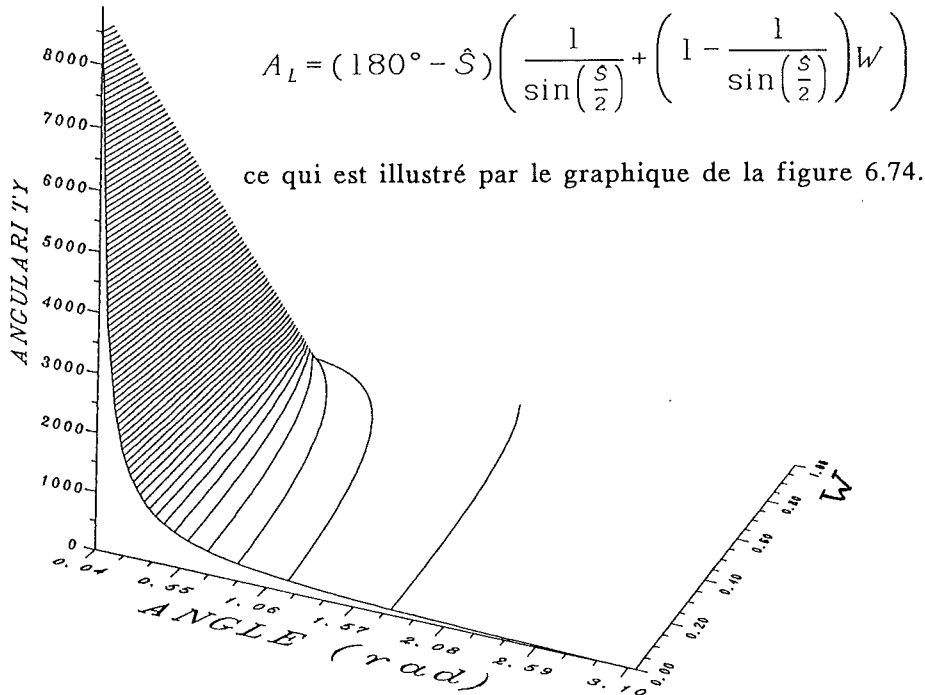


Fig.6.74. Variation du facteur d'angularité de Lees en fonction de l'angle au sommet et de l'émoissé (W).

En conclusion, il n'y a pas de réponse définitive au problème soulevé par Lees. Il faut surtout en retenir que \hat{S} est une mesure complémentaire des mesures de rugosité et d'émoussé et qu'il n'y a pas intérêt à tout fusionner dans un paramètre unique et confus!

En pratique, l'analyse de tous les résidus d'un grain non préalablement lissé génère plusieurs dizaines de mesures d'angles. Une première précaution pratique consiste à lisser le calyptre par fermeture de $\Lambda(X)$ de telle manière que seules les aspérités les plus significatives persistent. Une autre manière de faire consiste à adopter un critère géométrique de signification. Pour l'analyse des 14 grains de diamants (Tab.6.75.), nous avons adopté la même idée que celle déjà exploitée en trame hexagonale en ne prenant pas en considération les aspérités dont le centre de courbure maximale était inclus dans la référence lisse (c'est-à-dire dont l'extrémité de la branche du squelette tombe dans l'ouvert MUHO(X)). Ce faisant, on élimine les angles très obtus et les angles aigus mais très acérés.

Pour la classification des grains, nous n'avons retenu qu'un seul couple de valeurs (\hat{S}, W) en considérant l'aspérité ayant l'angle le plus aigu et un émoussé inférieur à 33%. Cette classification n'est nullement générale. Elle répond aux besoins de l'analyse des poudres abrasives en s'inspirant des modèles fournis par les *lois d'abrasion* qui ont mis en évidence une profondeur de pénétration directement proportionnelle à $\cotg\left(\frac{\hat{S}}{2}\right)$ (cfr. § 3.4.4.)

n°	\hat{S}	W
1	84°	19
2	90°	30
3	70°	24
4	44°	24
5	77°	17
6	-	-
7	-	-
8	60°	14
9	90°	31
10	77°	16
11	-	-
12	-	-
13	94°	14
14	96°	18

Tab.6.75. Analyse des angles les plus aigus et acérés sur les grains de diamant. (- signifie qu'il n'y a pas d'aspérité assez significative)

ROBUSTESSE DE LA MESURE ANGULAIRE SUR LE CALYPTRE.

Dans le but de tester la robustesse des mesures d'angularité. Nous avons procédé à l'analyse sur le *triangle* de la Fig.5.83. pour diverses rotations. Les résultats sont présentés au tableau 6.76.. Rappelons que cette forme présente des angles de 37°, 115° et 28° et que l'angle le plus aigu est associé à un émoussé de 50%.

Rotation	\hat{S}_1	W_1	\hat{S}_2	W_2	\hat{S}_3	W_3
0°	37°	5	113°	22	27°	54
7,5°	35°	3	114°	35	29°	51
15°	37°	5	115°	24	28°	51
22,5°	37°	5	116°	27	28°	51
30°	37°	5	119°	27	29°	51
Angle Moyen	37°		115°		28°	

Tab.6.76. Analyse des angles en chaque sommet du triangle de la figure 5.83.

Il est important de remarquer que le calyptre n'a pas été filtré avant l'analyse et que les valeurs des angles sont des valeurs tronquées. Les fluctuations de la mesure peuvent paraître étonnantes, mais elles sont inhérentes à la discrétisation de la forme et sont d'autant plus notables que le contour n'a pas été filtré. La légère instabilité des mesures est une conséquence normale du phénomène illustré à la figure 6.55. qui témoigne qu'un seul point de contour peut changer totalement le disque maxima inscriptible.

7 CONCLUSIONS GENERALES

Les matériaux granulaires constituent des milieux extrêmement complexes dont les lois de comportement sont encore fort mal définies. Cette constatation est évidente si on prend pour point de comparaison les lois de comportement des fluides. Une des raisons majeures de cette fragilité des lois physiques proposées est la difficulté d'expérimentation et de caractérisation des propriétés fondamentales du matériau granulaire.

Les théories les mieux établies intègrent principalement les caractéristiques granulométriques et densitométriques des matériaux. Ces caractéristiques sont non seulement les plus accessibles à une mesure quantitative, mais elles sont aussi les seules qui peuvent être raisonnablement contrôlées dans le procédé de production. Ceci explique que tout écart entre le modèle physique et le comportement réel est souvent mis sur le compte des paramètres peu accessibles à la mesure quantitative tels que la morphologie, l'orientation et l'agencement spatial. Il en résulte une littérature scientifique excessivement abondante qui sans beaucoup de rigueur contribue à conférer à ces paramètres "mystérieux" une importance qu'ils ne méritent peut-être pas.

Dans le but d'affiner les modèles de comportement des matériaux granulaires, il est indéniable qu'il faut développer des méthodes de caractérisation plus poussées et des techniques de production plus raffinées. L'un ne va pas sans l'autre, il est sans doute de peu d'utilité pratique de pouvoir caractériser l'empilement des particules si on ne dispose pas d'autre part d'une technique efficace pour induire un mode d'empilement particulier et par ce biais générer des matériaux aux propriétés différentes.

Des paramètres qui échappent à la mesure quantitative, la morphologie est depuis longtemps apparue comme le plus accessible. Il y a plus d'un siècle que les premières tentatives de caractérisation morphométrique des sédiments ont été introduites et force est de constater que fort peu de progrès ont été faits en la matière. L'appréciation visuelle reste la méthode la plus généralement utilisée dans les expérimentations. Une analyse détaillée de la littérature indique pourtant que ce ne sont pas les propositions qui manquent en matière de morphométrie. Il existe à peu près autant de méthodes qu'il y a d'approches mathématiques possibles. Deux raisons principales expliquent la désaffection bien réelle vis-à-vis de ces méthodes : d'une part, toutes les méthodes récentes qui font appel à l'outil informatique n'ont pas été diffusées dans les systèmes commerciaux et sont ignorées de la majorité des utilisateurs potentiels; mais d'autre part, il faut aussi reconnaître que beaucoup de méthodes proposées se sont avérées peu convaincantes et bien incapables de supplanter l'appréciation visuelle au moyen de chartes.

Dans ce travail, nous avons tout d'abord essayé de faire la part des choses, en faisant apparaître qu'une approche systématique de la forme pouvait se concevoir par une succession de paramètres de complexité croissante. Il nous est apparu comme fondamental de ne pas rechercher la synthèse définitive (très hypothétique!) de toute l'information morphologique en un paramètre unique. L'abondante littérature sur le comportement physique des matériaux granulaires révèle d'ailleurs fort bien que suivant les domaines d'application c'est une des facettes de l'information morphologique plutôt qu'une autre qui est recherchée (cfr § 3.6. Tableau Récapitulatif). Les principaux niveaux d'information morphologique qui sont proposés sont l'Elongation, la Rugosité Globale, l'Emoussé et l'Angularité. En adoptant cette systématique, nous avons intégré dans une même démarche logique les paramètres morphométriques les plus répandus et en particulier les notions d'élongation et d'émoussé qui sont à la base de la plupart des chartes de morphoscopie. Restait à automatiser les mesures ainsi préconisées.

La morphologie mathématique qui a connu un essor remarquable sur les dix dernières années est bien vite apparue comme la méthode la mieux indiquée pour aborder ces problèmes. L'affinité de la morphologie mathématique avec les notions d'émoussés très empiriquement définies par Wadell dès 1933 était évidente et pourtant inexploitée à ce jour. Ce sont les progrès algorithmiques de ces quatre dernières années qui allaient ouvrir la voie à une véritable méthode morphométrique. Le problème d'instabilité et de bruitage excessif des squelettes par amincissement est résolu par Meyer en 1989, d'autres algorithmes de squelettisation rapide vont suivre en 1991 et 1992 y compris sur la fonction distance euclidienne [Vincent]. L'exploitation de cette métrique euclidienne sur la trame discrète, grandement favorisée par la puissance accrue des systèmes informatiques, permet enfin d'envisager l'utilisation d'éléments structuraux parfaitement isotropes. Grâce à cela, les méthodes morphométriques qui peuvent être développées acquièrent la robustesse indispensable et rejoignent très précisément les propositions morphométriques de Wadell (et de tous les auteurs qui ont développé des méthodes sans penser aux contraintes spécifiques de l'espace discret).

L'originalité de ce travail réside dans la mise au point d'un nouveau descripteur morphologique beaucoup plus maniable que le squelette. En intégrant dans un même descripteur les informations relatives au contour, au squelette et à sa fonction d'extinction nous avons pu démontrer que non seulement les opérations de morphologie euclidienne pouvaient être envisagées sur toute figure plane mais encore que toutes les mesures morphométriques que nous avions définies étaient automatisables. En permettant de se passer totalement du support image, le calypstre condense très fortement les informations à manipuler et réduit d'autant les temps de calcul.

Les contributions scientifiques les plus convaincantes sont celles qui débouchent sur un large éventail de perspectives, sur ce plan nous ne pouvons évidemment augurer des développements futurs, mais nous pouvons quand même suggérer des voies de recherche qui à notre sens mériteraient d'être poursuivies. Il n'y a tout d'abord aucune raison pour que l'utilisation du calypstre reste cantonnée à des applications morphométriques. Différents domaines sont concernés :

en algorithmique :

il y a certainement moyen d'optimiser très sensiblement les performances de la remontée à tout prix en exploitant le fait que plusieurs remontées empruntent des chemins identiques.

en Morphologie Mathématique :

le développement des transformations morphologiques euclidiennes doit être poursuivi. En particulier, il faudrait pouvoir déduire la chaîne de Freeman résultant de la transformation au départ des informations contenues dans le calypstre de la forme originelle.

Une autre application qui mériterait d'être envisagée est la mise au point de critères de segmentation conditionnelle (ligne de partage des eaux conditionnelle). Son implémentation sur le calypstre devrait être extrêmement rapide et efficace.

en compression d'images :

bien que ce ne soit pas sa vocation originelle, le calypstre a des qualités spécifiques pour le codage d'une figure plane. Comme le squelette associé à sa fonction d'extinction il condense toute l'information nécessaire à la reconstruction exacte de la forme. Mais, surtout il permet de définir des critères très simples pour ne retenir que les Disques Maxima Inscrits les plus significatifs. Il ne faut donc pas chercher à utiliser le calypstre dans les techniques où le taux de compression est prépondérant, mais bien dans celles où le rapport qualité de représentation/ compression est primordial.

en reconnaissance de formes :

le calypstre peut présenter de nets avantages sur la chaîne de Freeman en reconnaissance de formes complexes. Il substitue à la perception locale du contour une véritable perception globale de l'objet. Il supplanterait avantageusement le squelette dans toutes les applications où se dernier est utilisé. Ici encore, il convient d'envisager un critère

vitesse de reconnaissance / qualité de reconnaissance. Le calypstre se situant du côté de la qualité de reconnaissance, la chaîne de Freeman et certains squelettes grossiers ayant pour eux l'avantage de la vitesse.

en morphométrie :

à la suite des propositions que nous venons de faire pour l'analyse morphométrique des particules, il nous semblerait particulièrement intéressant d'approfondir par l'expérimentation l'analyse de la robustesse des paramètres. En particulier la robustesse au filtrage du calypstre. Il est clair qu'un filtrage léger est toujours nécessaire, mais un filtrage trop poussé peut affecter les mesures (en particulier d'émoussé!). Peut-on définir des règles de bonne pratique dans ce domaine ?

Le caractère "significatif" des aspérités angulaires devrait aussi être approfondi.

Enfin, et c'est peut-être là notre souhait le plus cher, il convient de promouvoir l'usage des méthodes d'analyse morphométrique dans la caractérisation des matériaux granulaires, de façon à discerner ceux qui sont les mieux corrélés avec des propriétés physiques précises. Il est en tout cas temps d'abandonner les chartes morphoscopiques pour éliminer définitivement le facteur subjectif qui à trop longtemps prédominé dans l'analyse du comportement des matériaux granulaires.

ABE, E. and HIROSUE, H.

1982. Continuous separation of particles according to shape on an inclined vibrating plate. *J. Chem. Eng. Jpn.* 15: 323-326.

ACHEROY, M.

1990. De l'échantillonnage à l'interprétation. *Journal des Ingénieurs.* 37: 14-23.

AGUILAR, M., ANGUIANO, E., VAZQUEZ, F., and PANCORBO, M.

1992. Study of fractal character of surfaces by scanning tunnelling microscopy: errors and limitations. *Journal of Microscopy.* 167: 2, 197-213.

ALOIMONOS, Y. and ROSENFELD, A.

1991. Reply. A response to "Ignorance, Myopia, and Naivete in Computer Vision Systems" by R.C Jain and T.O. Binford. *CVGIP: Image Understanding.* 53: 1, Jan. 120-124.

ANSARI, N. and DELP, E.J.

1990. Partial shape recognition : A landmark-based approach. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence.* 12: 5, 470-483.

ARBIB, M.A.

1986. Schemas and Perception: Perspectives from brain theory and artificial intelligence. In: *Pattern Recognition by Humans and Machines* . 2, *Visual Perception*; SCHWAB, E,C and NUSBAUM, H.C. (Eds).

ARCELLI, C., CORDELLA, L.P. and LEVIALDI, S.

1981. From local maxima to connected skeletons. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence.* PAMI-3: 2, 134-143.

ARCELLI, C. and SANNITI DI BAJA, G.

1988. Finding local maxima in a Pseudo-Euclidean distance transform. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing.* 43. 361-367.

ARCHARD, J.F.

1953. Contact and rubbing of flat surfaces. *Journ. of appl. Phys.*, 24: 981-988.

ARKIN, E.M., CHEW, L.P., HUTTENLOCHER, D.P. and MITCHELL, J.S.B.

1991. An efficiently computable metric for comparing polygonal shapes. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence.* 13: 3, 209-215.

ASADA, H. and BRADY, M.

1986. The curvature primal sketch. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence.* 18: 1, 1-13.

ASCHENBRENNER, B.C.

1956. A new method of expressing particle sphericity. *Journal of Sedimentary Petrology.*, 26: 1, 15-31.

ATTNEAVE, F.

1954. Some informational aspects of visual perception. *Psychol. Rev.* 61: 3, 183-193.

BAGUETTE, L.

1988. Comparaison des methodes d'extraction de l'or d'un minerais riche. *U.Lg.Fac. Sciences Appliquées. Travail de fin d'études.*

BARRETT, P.J.

1980. The shape of rock particles, a critical review. *Sedimentology.*, 27, 291-303.

BARTON, P.B.Jr.

1991. Ore textures: Problems and Opportunities. *in. magazine. 55: 3.*

BEDDOW, J.K., PHILIP, G.C., and VETTER, A.F.

1977. On relating some particle profile characteristics to profil Fourier coefficients. *Powder Technology. 18: 19-25.*

BENES, V., STARKA, P., SUCHANEK, V., SLAMOVA, M., VOLENICK, K. and BOUSE, V.

1992. Quantitative analysis of bubble structure of enamel coatings. *Acta Stereol. 11 / Suppl I. Proc 81CS IRVINE, CA. 689-694.*

BESANCON, P., FRIGOT, P., LAFAYE, P., LAFAYE, J-M.

1985. Comparaison des mesures granulométriques par tamisage et microscopie optique: Statistique des Mésodiamètres. *Sci. Techn. pharm., 1: 6, 508-515.*

BESANCON, P., FOSSE-LEMARCHAND, B. et LAFAYE, A.

1988. Granulométrie par croisement de la microscopie et du tamisage. *Bull. liaison Labo. P. et Ch. 157: 47-55.*

BEUCHER, S.

1989. Squelettes connexes et non connexes. *Ecole Nat. Sup. des Mines de Paris. Centre de morphologie mathématique. n-7 / 89 / MN.*

BIRTLES, I.

1990-1991. Implémentation efficace d'algorithmes de morphologies mathématique. *U.Lg., Sc. Appl., Travail de fin d'études.*

BLANC, R. et GUYON, E.

1991. La physique de la sédimentation. *La Recherche, juillet / août, 22: 866-873.*

BLACHER, S., BROUERS, F., and ANANTHAKRISHNA, G.

1992. Multifractal analysis of real heterogenous materials. *Acta Stereol. 11 / Suppl I. Proc. 81CS IRVINE, CA. 327-333.*

BLASCHKE., W.

1955. In : Altes und Neues Über konvexe Körper. *HADWIGER, H. (Ed.), Birkhauser, Basel and Stuttgart.*

BLOORE, F.J.

1977. The shape of Pebbles. *Math. Geol. 9: 2, 113-122.*

BLUM, H.

1962. "An associative machine for dealing with the visual field and some of its biological implications". *Biological prototypes and synthetic systems. 1. Proc. 2nd Annual Bionics Symp. Cornell Univ. E.E Bernard and M.R. Kare eds, Plenum Press, New York. 244-260.*

BORGEFORS, G.

1986. Distance transformations in digital images. *CVGIP. 34: 344-371.*

BORGEFORS, G.

1991. Another Comment on "A Note on Distance Transformations in Digital Images". *CVGIP: Image Understanding. 54: 2, 301-306.*

BRIGGS, L.I., McCULLOCH, D.S. and MOSER, F.

1962. The hydraulic shape of sand particles. *Journal of Sedimentary Petrology., 32: n° 4, 645-656.*

BUREAU OF MINES.

1968. A dictionary of mining, mineral, and related terms. *U.S. Department of the Interior.*

- BURNOTTE, E., PIRARD, E. and MICHEL, G.**
1989. Genesis of grey monazites : Evidence from the Paleozoic of Belgium. *Econ. Geol.*, V.84, 1417-1429.
- CAILLEUX, A.**
1947. L'indice d'émoussé. *Compte rendu sommaire des séances de la Société Géologique de France.* 250-251.
- CALABI, L.**
1965. A study of the skeleton of plane figures. *Parke Mathematical Labs., Carlisle, Rep. SR-60429.*
- CHERMANT, J.L., COSTER, M. and GOUGEON, G.**
1987. Shape analysis in R^2 space using mathematical morphology. *Journal of Microscopy*, 145: 2, 143-157.
- CHERMANT, J.L. and COSTER, M.**
1977 a. *Pract. Met.* 14, 522.
- CHERMANT, J.L.**
1989. Analyse quantitative des morphologies et des textures. *Industrie Minérale - Mines et Carrières - Les Techniques.* Nov.-Déc. 38-44.
- CHERMANT, J.L. et COSTER, M.**
1992. Analyse de la forme. *Laboratoire d'Etudes et de Recherches sur les Matériaux. URA n° 1317. LERMAT.*
- CLARK, M.W.**
1981. Quantitative shape analysis: a review. *Mathematical Geology.* 13: 4, 303-319.
- CLERICI, C., MORANDINI, A.F., OCCELLA, E.**
1988. Beneficiation of talc ores by elastic and morphometric properties and by flotation. in *XVI Int. Miner. Processing Congress, E. Forssberg. (Ed.) Elsevier . Amsterdam.*
- COLINET, D.**
1988-1989. Analyse morphologique appliquée à la lixiviation des minerais. *U.Lg., Sc. Appl. Travail de fin d'études.*
- CONCHA, F. and BARRIENTOS, A.**
1986. Settling velocities of particulate systems, 4. Settling of nonspherical isometric particles. *Int. J. of Miner. Process.*, 18: 297-308.
- CONCHA, F. and CHRISTIANSEN, A.**
1986. Settling velocities of particulate systems, 5. Settling velocities of suspensions of particles of arbitrary shape. *Int. J. of Miner. Process.*, 18: 309-322.
- COREY, A.T.**
1949. Influence of shape on the fall velocity of sand grains. *M. Sc. Thesis, Colorado Agricultural and Mechanical College.*
- COSTER, M. et CHERMANT, J.L.**
1985. Précis d'analyse d'images. *Editions du Centre National de la Recherche Scientifique. Paris.*

COX, E.

1927. A method of assigning numerical and percentage values to the degree of roundness. *J. Paleontology*. 1: 179-183.

CRUZ-ORIVE, L.M.

1987. Stereology: Recent solutions to old problems and glimpse into the future. *Acta Stereol* 1987; 6/III: 3-18, *Proc.ICS. VII Caen*.

CUNDALL, P.A.

1988. Computer simulations of dense sphere assemblies.in *Micromechanics of granular materials*, M. Satake & J.T. Jenkins(eds) 113-123. Elsevier Amsterdam.

DANIELSON, P.E.

1980. Euclidean Distance Mapping. *CGIP*. 14: 227-248.

DAVIS, K.W. and HAWKINS, A.E.

1979. Harmonic description of particle shape: their rôle in discrimination. *Proc. of PARTECH Symposium, Nuremberg*. 582-590.

DE JAEGER, J.

1991. Influence de la morphologie des sables sur leur comportement mécanique. *Thèse de Doctorat. Faculté des Sciences Appliquées. Univ. Cath. Louvain*.

DE LARRARD, F. et BUIL, M.

1987. Granularité et compacité dans les matériaux de génie civil. *Materials and Structures / Matériaux et Construction*., 20: 117-126.

DELOYE, F.X.

1987. Réflexion sur la granulométrie photographique. *Bull. liaison Labo P. et Ch.* 152: 98-103.

DOBKINS,Jr. J.E. and FOLK R.L.

1970. Shape development on Tahiti-Nui. *Journal of Sedimentary Petrology* ., 40: 4, 1167-1203.

DORST, L. and SMEULDERS, A.W.

1987. Length estimators for digitized contours. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*. 40: 311-333.

DUBUC, B., TRICOT, C. QUINIOU, J.F., ROQUES-CARMES, C. and ZUCKER, S.W.

1989. Evaluating the fractal dimension of profiles. *Physical Review A*. 39: 3.

DURNEY, T.E. and MELOY, T.P.

1986. Particle shape effects due to crushing method and size. *Int. J. Miner. Process.*, 16: 109-123.

DURNEY, T.E. and MELOY, T.P.

1986. Particle shape effects due to crushing method and size. *Int. Journal of Mineral Processing*. 16: 109-123.

ECKHOFF, R.K. and ENSTAD, G.

1975. Derivation of particles size distributions from measurements on plane sections through particle beds. *Effect of regularity of particle packing*. *Powder Technology*, 11: 1-10.

EHRlich, R. and WEINBERG, B.

1970. An exact method for characterization of grain shape. *Journal od Sedimentary Petrology*, 40: 1, 205-212.

EHRlich, R., CRABTREE, S.J. and KENNEDY, S.K.

1984. Direct estimation of flow properties from petrographic thin section image analysis. In: *Applied Mineralogy. Park, Hausen, Hagni, Eds.*, 205-221.

EHRlich, R. and FULL, W.E.

1986. Comments on "Relationships among eigenshape analysis, Fourier analysis, and analysis of coordinates" by F. James Rohlf. *Mathematical Geology*. 18: 8, 855-857.

EHRlich, R., CRABTREE, S.J., HORKOWITZ, K.O. and HORKOWITZ, J.P.

1991. Petrography and reservoir physics I: Objective classification of reservoir porosity. *The American Ass. of Petroleum Geologists Bull.* 75: 10, 1547-1562.

EK, E., PIRARD, E. et BAGUETTE, L.

1991. Structure and Beneficiation of a Rich Gold Ore. *Atb. Metallurgie*. 32-36.

ELS, B.G.

1988. Pebble morphology of an ancient conglomerate: The middelvlei gold placer, Witwatersrand, South Africa. *Journal of Sedimentary Petrology.*, 58: 5, 894-901.

ENDO, S., KOGA, J. and YAMAGUCHI, K.

1984. The sieving rate of cylinder particles. *KONA Powder Sci. Technol. Jpn.* 2: 7-15.

ETEMADI, A.

1992. Robust segmentation of edge data. *Int. Conf. on Image Processing and its Applications. Conf. Publ. n° 354.* 311-314.

EXNER, H.E.

1972. Analysis of grain and particle-size distributions in metallic materials. *Int. Metal. Rev.* 17: 25-42.

EXNER, H.E.

1987. A key problem in quantifying microstructures. *Acta Stereol. 6 / III: Proc ICS VII Caen.* 1023-1028.

EXNER, H.E. and HOUGARDY, H.P.

1988. Quantitative Image Analysis of Microstructures. *DGM Informationsgesellschaft mbH., Oberursel, Germany.*

FERET, M.

1892. Compacité des mortiers hydrauliques. *Ann. Ponts Chaussées.* 7 IV. 5-162.

FERRO, M.

1991. L'information en uniforme. *Ramsay. Paris.*

FLEMMING, N.C.

1965. Form and function of sedimentary particles. *Journal of Sedimentary Petrology.*, 35: 2, 381-390.

FLOOK, A.

1987. The quantitative measurement of particle shape. *Acta Stereol. 6 / III: PROC ICS VII Caen.* 1009-1021.

FLOOK, A.G.

1978. The use of dilatation logic on the Quantimet to achieve fractal dimension characterisation of textured and structured profiles. *Powder Technology.* 21: 295-298.

FLOOK, A.G.

1981. Fourier analysis of particle shape. *In: Stanley-Wood NG and Allen T, eds. Particle Size Analysis. Wiley Heyden Ltd. 255-262.*

FOLK, R.L.

1955. Student operator error in determination of roundness sphericity, and grain size. *J. Sedim. Petrol. 42: 973-974.*

FONG, S.T., BEDDOW, J.K. and VETTER, A.F.

1979. A refined method of particle shape representation. *Powder Technology. 34: 93-94.*

FORSSBERG, E., SUNDBERG, S. and HONGXIN, Z.

1988. Influence of different grinding methods on flotability. *Int. Journal of Min. Processing. 22: 183-192.*

FORSSBERG, K.S.E. and HONGXIN, Z.

1985. Shape and surface properties of particles liberated by autogenous grinding. *Scand. J. Metall. 14: 1, 25-32.*

FREEMAN, H. and DAVIS, L.S.

1977. A corner-finding algorithm for chaincoded curves. *IEEE Trans. Comput. C-26. 297-303.*

FREEMAN, H.

1961. On the encoding of arbitrary geometric configuration. *IEEE Trans. Elec. Comp. EC 10. 260-268.*

FREUDER, E.C.

1986. Knowledge-mediated perception. *In: Pattern Recognition by Humans and Machines. SCHWAB and NUSBAUM. Academic Press.*

FROSSARD, E.

1978. Caractérisation pétrographique et propriétés mécaniques des sables. *THESE - Université Pierre et Marie Curie - Paris VI et à l'Ecole Nationale Sup. des Mines de Paris.*

FULL, W. and EHRLICH, R.

1986. Fundamental problems associated with "eigenshape analysis" and similar "factor" analysis procedures. *Math. Geol., 18: 5, 451-463.*

GALE, S.J.

1990. The shape of beach gravels. *Journal of Sedimentary Petrology., 60: 5, 787-789.*

GAUDIN, A.M.

1939. Principles of mineral dressing. *McGraw-Hill, New York, N.Y.*

GERTH, G.

1957. The influence of surface properties, grain shape and grain size of the medium on adhesion losses in sink-float separation. *International mineral dressing congress Stockholm 1957.*

GOODWIN, J.E., SAGE, W. and TILLY, G.P.

1970. Study of erosion by solid particles. *The Inst. of Mech. Eng. 184: 1, 15, 279-292.*

GRASSE, A.M.

1954. Roll crusher for producing cubital shaped fragments. *U.S. Patent 2696949. 14.*

GRATIN, C. and MEYER, F.

1992. Mathematical morphology in three dimensions. *Acta Stereol. 11/Suppl I. Proc. 81CS IRVINE, CA. 551-558.*

GRATON, L.C., FRASER, H.J.

1935. Systematic packing of spheres with particular relations to porosity and permeability. *J. Geol.*, 43: 8, part 1, 785-909.

GRAZZINI, H. and LEVAILLANT, C.

1987. Porosity and powder grain morphological evolution during forging. *Acta Stereol.* 6 / III. Proc ICS VII Caen. 1059-1064.

GRIFFITHS, J.C.

1988. Measurement, Sampling and Interpretation. in *Quantitative Analysis of Mineral and Energy Resources*. C.F. Chung et al.(eds), 37-56.

GRUNZWEIG, J., LONGMAN, I.M., PETCH, N.J.

1954. Calculations and measurements on wedge-indentation. *Journal of Mech. and Phys. of Sol.*, 2: 81-86.

GUNDERSEN, H.J.G.

1987. Unbiased estimators of number, volume and surface area of arbitrary particles, a review of very recent developments. *Acta Stereol.* 6 / III: 173-177. Proc ICS VII Caen.

GUNDERSEN, H.J.G.

1986. Stereology of arbitrary particles. *J. of Microscopy.* 143: 1, 3-45.

GUNDERSEN, H.J.G. and JENSEN, E.B.

1985. Stereological estimation of the volume-weighted mean volume of arbitrary particles observed on random sections. *J. Microscopy.* 138: 127-142.

GY, P.

1967. L'échantillonnage des minerais en vrac. Tome 1. *Mémoires du B.R.G.M* n°56.

GY, P.

1975. Théorie et pratique de l'échantillonnage des matières morcelées. *Edition P.G Cannes.*

HAUSNER, H.H.

1967. In: Particle size analysis. *Soc. for Analytical Chemistry. London.* 20.

HOWARD, V.

1991, *J. Microsc.*, V.

KAYE, B.H.

1978. Specification on the ruggedness and/or texture of fine particle profile by its fractal dimension. *Powder Technol.* 21: 1-16.

HEAD, W.J. and HARR, M.E.

1970. The development of a model to predict the erosion of materials by natural contaminants. *Wear*, 15: 1-46

HUANG, T.S.

1991. Reply. Computer Vision Needs More Experiments and Applications. *CVGIP: Image Understanding.* 53: 1, 125-126.

HUGHES, B.P., BAHRAMIAN, B.

1966. A laboratory test for determining the angularity of aggregate. *Magazine of Concrete Research.* 18: 56, 147-152.

HUTCHINGS, J.M. and WINTER, R.E.

1974. Solid particle erosion studies using single angular particles. *Wear.* 29: 181-194.

JAIN, R.C., BINFORD T.O.

1991. Dialogue. Ignorance, Myopia, and Naivete in Computer Vision Systems. *CVGIP : Image Understanding* . 53: 1, Jan, 112-117.

JARVIS, L.R.

1988. Microcomputer video image analysis. *Journal of Microscopy.*, 150: 2, 83-97.

JENNINGS, W.H., HEAD, W.J. and MANNING, Jr, C.R.

1976. A mechanistic model for the prediction of ductile erosion. *Wear.*, 40: 93-112.

JONES, D.J.

1953. Tetrahedroid pebbles. *Journal of Sedimentary Petrology.*, 23: 3, 196-201.

JONES, M.P.

1987. Applied mineralogy - A quantitative approach. *Graham and Trotman Ltd. London.*

KAHLHOFER, H., SEND, A. und KAISER, H.

1956. Kornformbeurteilung von aufbereiteten Hochofenschlacken-Splitten unter besonderer Berücksichtigung der Brecher. *Stahl u. Eisen* 76 Nr.15 26.

KING, G.J.W. and DICKIN, E.A.

1972. The evaluation of grain shapes in silica sands from a simple flow test. *RILEM, Matériaux et Constructions.*, 5 : 26, 85-92.

KING, R.P.

1984. Measurement of particle size distribution by image analyser. *Powder Technology*, 39: 279-289.

KOCH, von, H.

1904. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv für Matematik, Astronomie och Fysik.* 1: 681.

KOLBUSZEWSKI, J.J.

1948. General investigation of the fundamental factors controlling loose packings of sands. *Proc. 2 nd Int. Conf. Soil Mech. Found Engng.* 7: 47-49.

KOLBUSZEWSKI, J.J., FREDERICK, M.R.

1963. A contribution towards an universal specification of the limiting porosities of granular materials. *Proc. Eur. Conf. Soil Mech. Found. Engng, Wiesbaden.* 1: 265-271.

KRUMBEIN, W.C.

1941. Measurement and geological significance of shape and roundness of sedimentary particles. *Journal of Sedimentary Petrology.*, 11: 2, 64-72.

KRUMBEIN, W.C.

1941. The effects of abrasion on the size, shape and roundness of rock fragments. *J. Geol.*, 49: 482-519.

KUENEN, Ph.H.

1956. Experimental abrasion of pebbles. 2. Rolling by current. *J. Geol.*, 64: 336-368.

KUENEN, Ph.H.

1964. Pivotability studies of sand by a shape-sorter. In *Van Straaten L.M.(Ed.). Developments in sedimentology. Vol.1. 208-215.(Elsevier).*

KURDY, M.B.

1990. Thèse de Doctorat en Morphologie Mathématique. *Ecole des Mines de Paris.*

- LANTUEJOUL, C.**
1978. Thèse de Docteur Ingénieur. *Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.*
- LANTUEJOUL, C. and MAISONNEUVE, F.**
1984. Geodesic methods in image analysis. *Pattern Recogn. 17: 117-187.*
- LAY, B.**
1987. Recursive algorithms in mathematical morphology. *Proc. 7th Internat. Congress for Stereology, Caen, France. Acta Stereol. 6/III, 691-696.*
- LEES, G.**
1964. A new method for determining the angularity of particles. *Sedimentology, 3: 2-21.*
- LOHMANN, G.P.**
1983. Eigenshape analysis of microfossils: A general morphometric procedure for describing changes in shape. *Math. Geol., 15: 6, 659-675.*
- LORD, E.A. and WILSON, C.B.**
1986. The mathematical description of shape and form. *Ellis Horwood Limited, England.*
- LUERKENS, D.W.**
1991. Morphological Analysis. Fine particles and surfaces. *CRC PRESS.*
- MAGNEE, A.**
1991. *Thèse de Doctorat, Un. Liège, Fac. Sc. Appl.*
- MAISONNEUVE, F. and LANTUEJOUL, C.**
1984. Geodesic convexity. *Acta Stereol. 169-174.*
- MANDELBROT, B.B.**
1982. The Fractal Geometry of Nature. *W.H. Freeman, San Francisco.*
- MARR, D.**
1982. Vision: A computational investigation into the human representation and processing of visual information. *San Francisco. Freeman.*
- MATHERON, G.**
1975. Random Sets and Integral Geometry. *Wiley, NY.*
- MATERON, G.**
1988. Examples of topological properties of skeletons. *In: Image Analysis and Mathematical Morphology .2. by J. SERRA.*
- MAZILLE, J.E.**
1988. Mathematical morphology and convolutions. *Journal of Microscopy, 156: 1, 3-33.*
- Mc CULLOCH, DAVID, MOSER, FRANCK, BRIGGS, LOUIS.**
1960. Hydraulic shape of mineral grains. *Geol. Soc. America Bull., 71: 1925.*
- MEDALIA, A.I.**
1970. Dynamic shape factors of particles. *Powder Technol., 4 : 117-138.*
- MELOY, T.P.**
1977. A hypothesis for morphological characterization of particle shape and physiochemical properties. *Powder Technology. 16: 233-253.*

MELOY, T.P.

1984. Particulate characterization: Future approaches. In: M.E. FAYED and L. OTTEN (Eds), *Handbook of Powder Science and Technology*. Otten, Nostrand-Reinhold, New York. 69-98.

MELOY, T.P. and DURNEY, T.E.

1983. Particle shape chromatography - The sieve cascadograph. *Int. J. Miner. Processing*, 11: 101-113.

MEYER, F.

1989. Skeletons and perceptual graphs. *Signal Processing* 16: 335-363.

MICHELLAND-ABBE, S.

1990. Morphologie et comportement mécanique d'aciers microcristallins extrudés. *Thèse de Doctorat. Université de Caen*.

MILLS, H.H.

1979. Downstream rounding of pebbles - A quantitative review. *Journal of Sedimentary Petrology*, 49: 1, 295-302.

MOITROUX, C.

1991. Application de la morphologie mathématique à l'analyse des poudres. *U.Lg. Sciences Appliquées. Travail de fin d'études*.

MOTZKIN, Th.

1935. Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes. *Atti. Acad. Naz. Lincei*. 21: 773-779.

MURALI, C., PITCHUMANI, B. and CLARK, N.N.

1986. A settler for continuous particle shape separation. *Int. J. of Mineral Processing*, 18: 237-249. Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam.

NAKAGAWA, M., FURUUCHI, M., YAMAHATA, M. and GOTOH, K.

1983. Shape classification of granular materials by rotating cylinder with blades. *13 th Annual Fine Particle Soc.Meeting, Hawaii*.

NEILSON, J.H., and GILCHRIST, A.

1968. Erosion by a stream of solid particles. *Wear*. 11: 111-122.

NOEL, C.

1991. Géologie de la fluorine du Burg et enrichissement par liqueur dense. *U.Lg. Faculté des Sciences Appliquées. Travail de fin d'études*.

PAGLIERONI, D.W. and JAIN, A.K.

1988. Control point transforms for shape representation and measurement. *CVGIP*. 42: 87-111.

PAVLIDIS, T.

1981. Shape description. in *Digital Image Processing*. Simon and Haralick (eds) 289-310.

PAVLIDIS, T. and HOROWITZ, S.L.

1974. Segmentation of plane curves, *IEEE Trans. Computers*, C-23,8.

PETTIJOHN, F.J.

1949. *Sedimentary rocks*. Harper and Brothers, New-York, 2nd edit, 1957.

PETTIJOHN. POTTER. SIEVER.

1972. Sand and Sandstones. *Springer-Verlag*. Berlin.

PETTYJOHN, E.S. and CHRISTIANSEN, E.B.

1948. Effet of particle shape on free settling rates of isometric particles. *Chem. Eng. Progr.* 44: 2, 157-172.

PETRUK, W.

1989. Short Course on Image Analysis Applied to Mineral and Earth Sciences. *Mineralogical Association of Canada. Ottawa.*

PIRARD, E.

1990, Applications of shape analysis in ore beneficiation, in *Process Mineralogy IX*, Petruk, Hagni, Pignolet-Brandom, Hausen (Eds.), *The Minerals, Metals and Materials Society, N.Y.*

PIRARD, E.

1991, Notes de cours de Géostatistique, *U.Lg., Fac.Sc.Appl.*

PIRARD, E.

1991, Quantitative mineralogical analysis of Co and Cu distribution in historical slags from Küre (Turkey), *Canadian Inst. Mineral. Bulletin*, V.84, 946

PIRARD, E.

1991, Analyse directionnelle de fibres de verre dans des sections polies de polyamide, *Rapport MICA, U.Lg.*

PIRARD, E. et BASTIN, G.

1992, Etude par analyse d'images du volume d'air piégé entre une plaque de verre et un film PVB, *Rapport MICA, U.Lg.*

PIRARD, E. et PIERROUX, A.

1992, Microporosimétrie quantitative de roches et matériaux par analyse d'images, *Ann. Soc. Geol. Belg.*, T.115 (1), 245-252.

PIRARD, E.

1992, Roughness analysis on powders using mathematical morphology. *Acta Stereol. 11/ Suppl. 1:533-538. Proc 81CS IRVINE, CA.*

PIRARD, E., PIERROUX, A. and DARIMONT, A.

1993, Quantitative analysis of the porous structure of a petroleum reservoir, *J.Microsc.Research and Techniques, J.Wiley & sons.*

POMERANTZ, J.R.

1986. Visual form perception: An overview., In : "Pat. Recog. by humans and machines", SCHWAB and NUSBAUM (Eds.), *Academic Press.*

POWERS, M.C.

1953. A new roundness scale for sedimentary particles. *Journal of Sedimentary Petrology.*, 23: 2, 117-119.

PRETI, U., FERRARA, G. and MELOY, T.P.

1989. Influence of particle shape on liberation. *Int. J. Miner. Process.*, 25: 17-28.

PRIGOGINE, A.

1961. Echantillonnage et analyse des minerais hétérogènes à faible teneur. *Acad. Roy. Sc. Outremer.* 15.

PYE, W.D. and PYE, M.H.

1943. Sphericity determinations of pebbles and sand grains. *Journal of Sedimentary Petrology.*, 13: 1, 28-34.

RAMDOHR, P.

1980. The ores minerals and their intergrowths. 2. *Pergamon Press*.

RAYLEIGH, L.

1942. The ultimate shape of pebbles, natural and artificial. *Proc. Roy. Soc. Lond. A.181. 107-118.*

RETI, T. and CZINEGE, I.

1989. Shape characterisation of particles via generalized Fourier analysis. *Journal of Microscopy. 156: 1, 15-32.*

REX, H.M., PECK, R.A.

1956. A laboratory test to evaluate the shape and surface texture of fine aggregate of fine aggregate particles. *Journal of Public Roads, 29: 5, 118-120.*

RICHARDSON, L.F.

1961. In: *General Systems Yearbook. 6: 139-187.*

RIGAUT, J.P.

1984. An empirical formulation relating boundary lengths to resolution in specimens showing "non-ideally fractal" dimensions. *Journal of Microscopy. 133: 1, 41-54.*

RILEY, N.A.

1941. Projection sphericity. *Journal of Sedimentary Petrology., 11: 2, 94-97.*

RISS, J.

1987. Average equivalent shape: classification of convex bodies. *Acta Stereol; 6/III. Proc ICS VII Caen. 1035-1040.*

RITTENHOUSE, G.

1943. A visual method of estimating two-dimensional sphericity. *Journal of Sedimentary Petrology., 13: 2, 79-81.*

RONSE, C.

1986. Erosion of narrow image features by combining local low rank and max filters. *Proc. 2nd Int. Conf. on Image Processing and its Applications, London. 77-81.*

ROSENFELD, A. and JOHNSTON, E.

1973. Angle detection on digital curves. *IEEE Trans. Comput. C-22, 875-878.*

ROSENFELD, A.

1987. An overview of image processing and analysis. *Acta Stereol; 6/III: Proc ICS VII Caen. 939-944.*

ROSENFELD, A. and KAK, A.C.

1982. Digital Picture Processing. *New York: Academic. 2nd ed.*

ROWE, P.W.

1974. Notes on stress-strain relationship for particulate materials. *Conference given at the University of Liege (Belgique) 25: 4.11*

ROYLANCE, B. and POCOCK, G.

1983. Wear studies through particle size distribution. *Wear. 90: 113-136.*

RUSS, J.C.

1990. Computer-Assisted Microscopy. The measurement and analysis of images. *Plenum Press, New York.*

SALTYKOV, S.A.

1958. Stereometric Metallography. *Metallurgizdat, Moscow.*

SCHMITT, M.

1989. Des algorithmes morphologiques à l'intelligence artificielle. *PhD Thesis, Ecole des Mines, Paris.*

SCHNEIDERHOHN, H.

1952. Erzmikroskopisches Praktikum. *Stuttgart, 274.*

SCHWARTZ, G.M.

1951. Classification and definitions of textures and mineral structures in ores. *Econ. Geol. 46: 578-591.*

SCHWARZ, H.P. and EXNER, H.E.

1980. *Powder Tech. 207-213.*

SERGEEV, Y.M., SPIVAK, G.V., SASOV, A.Y., OSIPOV, V.I., SOKOLOV, V.N. and RAU, E.I.

1984. Quantitative morphological analysis in a SEM-microcomputer system - Quantitative shape analysis of single objects. *Journal of Microscopy. 135: 1, 1-12.*

SERRA, J.

1969. Introduction à la morphologie mathématique. *Cahiers du CMM, Ecoles des Mines, Paris.*

SERRA, J.

1982. Image Analysis and Mathematical Morphology. *Academic Press.*

SERRA, J.

1983. Images et morphologie mathématique. *La Recherche. 144: 722-734.*

SERRA, J.

1987. Morphological optics. *J. of Microscopy. 145: 1, 1-22.*

SERRA, J.

1988. Image analysis and mathematical morphology. 2. *Academic Press.*

SERRA, J.

1988. Principles of Mathematical Morphology. in *Quantitative Analysis of Mineral and Energy Resources. C.F. Chung et al. (eds) 237-254.*

SHEPARD, F.P. and YOUNG, R.

1961. Distinguishing between beach and dune sands. *Journal of Sedimentary Petrology., 31: 2, 196-214.*

SNEED, E.D. and FOLK, R.L.

1958. Pebbles in lower Colorado River, Texas, a study in particle morphogenesis. *J. Geol. 66: 114-150.*

SOMASUNDARAN, P.

1984. Role of surface phenomena in the beneficiation of fine particles. *Mining Engineering. August: 1177-1186.*

SRIVAMOHAN, P. and FORSSBERG, E.

Mineral Processing, *Elsevier Amsterdam*

STERIO, D.C.

1984. The unbiased estimation of number and sizes of arbitrary particles using the disector. *J. Microscopy 134: 127.*

STERNBERG, S.R.

1986. Morphology for grey tone functions. *CVGIP*. 35.

STOVALL, T., DE LARRARD, F. and BUIL, M.

1986. Linear packing density model of grain mixtures. *Powder Technology*, 48: 1-12.

STOYAN, D. and BENES, V.

1991. Anisotropy analysis for particle systems. *Journal of Microscopy*. 164: 2, 159-168.

SWAN, B.

1974. Measures of particle roundness: a note. *J. Sedim. Petrol.* 572-752.

TEH, C-H., and CHIN, R.T.

1989. On the detection of dominant points on digital curves. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*. 11: 8, 859-872.

THOMAS, A.D.H., DAVIES, T. and LUXMOORE, A.R.

1991. Computer image analysis for identification of wear particles. *Wear*, 142: 213-226.

TICKELL, F.G., HIATT, W.N.

1938. Effect of angularity of grain on porosity and permeability of unconsolidated sands. *Am. Assoc. Petroleum Geologists Bull.*, 22: 1272-1274.

TOURTELOT, H. and RILEY, L.B.

1973. Size and shape of Gold and Platinum grains. In: *Ores in Sediments*. (Eds: Amstutz, G.C. and Bernard, A.J.) *Int. Union of Geological Sci.*, A, 3.

TWENHOFEL, W.H.

1945. The rounding of sand grains. *Journal of Sedimentary Petrology*, 15: 2, 59-71.

ULLMAN, S.

1986. Visual routines: Where bottom-up and top-down processing meet, In : "Pat. Recog. by humans and machines", SCHWAB and NUSBAUM (Eds.), Academic Press.

VINCENT, L.

1990. Algorithmes morphologiques à base de files d'attente et de lacets; Extension des graphes. *PhD Thesis, Ecole des Mines, Paris*.

VINCENT, L.

1991. Exact Euclidean Distance Function by Chain Propagations. *Proc. IEEE "Computer Vision and Pattern Recognition"*. Hawaiï, 3-6.

VINCENT, L.

1991. Morphological transformations of binary images with arbitrary structuring elements. *Signal Processing* 22: 3-23.

VINCENT, L.

1991. Efficient computation of various types of skeletons. *Proc. SPIE s 1445 Medical Imaging V San Jose, CA*.

VIRILIO, P.

1988. La machine de vision. *Editions Galilée, Paris*.

VISWANATHAN, K., ARAVAMUDHAN, S. and PITCHUMANI, B.

1984. Separation based on shape. *Powder Technol.* 39: 83-91.

WADELL, H.A.

1932. Volume, shape and roundness of rock particles. *Am. J. Geol.*, 40: 443-451.

WADELL, H.A.

1933. Sphericity and roundness of rock particles. *J.Geol.*, 41: 310-331.

WADELL, H.A.

1935. Volume, shape, and roundness of quartz particles. *J.Geol.*, 43: 251-280.

WADELL, J.

1934. The coefficient of resistance as a fonction of Reynolds Number for solids of various shape. *J. Franklin Inst.* 217: 459-490.

WALSH, D.E. and RAO, P.D.

1988. A study of factors suspected of influencing the settling velocity of fine gold particles. in *XVI International Mineral Processing Congress, E. Forsberg (Ed) .Elsevier.*

WALTERS, D.K.W.

1986. A computer vision model based on psychophysical experiments. In: *Pattern Recognition by Humans and Machines. SCHWAB and NUSBAUM. Academic Press.*

WARREN, R. and NAUMOVICH, N.V.

1977. Relatives frequenties of random intercepts through convex bodies. *J. Microscopy.* 20: 113-120.

WASEN, J., and WARREN, R.

1989. The true grain size distribution of a WC-Co alloy. *Master Sci. Tech.* 5: 222-226.

WASEN, J., and WARREN, R.

1990. A catalogue of stereological characteristics of selected solid bodies. 1. *Polyhedrons. Göteborg: Department of Engineering Metals publications.*

WENTWORTH, C.K.

1919. A laboratory and field study of cobble abrasion. *Am. J. Geol.*, 27: 507-521.

WENTWORTH, C.K.

1922. The shape of pebbles. *U.S. Geol. Survey Bull.* 730-C. 91-114.

WENTWORTH, C.K.

1933. The shapes of rock particles : a discussion. *J. Geol.*, 41: 306-309.

WEST, G.A.W., and ROSIN, P.L.

1991. Techniques for segmenting image curves into meaningful descriptions. *Pattern Recognition.* 24: 7, 643-652.

WICKSELL, S.D.

1925. The Corpuscule Problem. *Biometrika* 17: 81, 18: 152.

WINKELMOLEN, A.M.

1982. Critical remarks on grain parameters, with special emphasis on shape. *Sedimentology.*, 29: 255-265.

WRIGHT, M.W.

1992. Skeletonisation as model based feature detection. *Int. Conf. on Image Processing and its Applications. Conf. Publ. n° 354.* 254-257.

ZAHN, C.T. and ROSKIES, R.Z.

1972. Fourier descriptors for plane closed curves. *IEEE Trans. Comput.*, C-21. 269-281.

ZELASKO, J.S.

1966. An investigation of the influences of particle size, size gradation and shape on the shear strength and packing behavior of quartziferous sands. *Ph. D. Thesis, Northwestern University, Evanston, 11.*

ZINGG, T.

1935. Beiträge zur Schotteranalyse. *Schweiz. miner. Petrog. Mitt. 15: 38-140.*

PRINCIPAUX SYMBOLES ET ABBREVIATIONS.

a	: plus grand diamètre d'une particule.
a_n	: coefficient de la $n^{\text{ème}}$ harmonique de la série de Fourier.
$A(X)$: Aire de l'ensemble X .
A_j	: Aire de la lunule.
A_L	: Angularité de Lees.
A_n	: Amplitude de la $n^{\text{ème}}$ harmonique de la série de Fourier.
b	: mésodiamètre d'une particule.
b_n	: coefficient de la $n^{\text{ème}}$ harmonique de la série de Fourier.
\bar{B}	: indice d'érosion.
c	: plus petit diamètre d'une particule dans le plan perpendiculaire à a et b .
c_i	: $i^{\text{ème}}$ point du contour.
$C(X)$: ensemble des points du contour de X .
C_i	: sous-ensemble des points de $C(X)$ qui appartiennent au contour d'un disque centré en s_j .
d_{AB}	: distance euclidienne entre deux points A et B de la trame.
d_{AB}^λ	: distance holodisque entre A et B .
d_{AB}^m	: distance entre A et B en métrique m (exple: $m=H$: métrique hexagonale)
d_p^m	: distance en métrique m du point $p \in X$ au contour de X .
$d^m(p)$: valeur de la fonction distance en métrique m au point $p \in X$.
D_A	: grand axe de l'ellipse d'inertie.
D_B	: petit axe de l'ellipse d'inertie.
D_{in}	: diamètre du disque maxima inscrit ($= 2 \cdot \lambda_E$).
D_{Circ}	: diamètre du disque circonscrit.
D_o	: diamètre du disque d'aire équivalente.
D_i	: sous-ensemble de points de $C(X)$ qui appartiennent au contour du disque (MID) centré en s_i .
$D^\lambda(X)$: Dilaté de l'ensemble X par un disque de rayon λ (ou l'équivalent du disque sur trame discrète)
E	: Erodé Ultime
$E^\lambda(X)$: Erodé de l'ensemble X par un disque de rayon λ .

El	: Elongation de l'ellipse d'inertie.
El_F	: Elongation par la mesure des Feret.
F	: Déficit isopérimétrique ("Facteur de Forme").
F_α	: Diamètre de Feret selon la direction α .
F_θ	: Diamètre de Feret selon la direction de l'axe principal d'inertie.
$F_{\theta+90}$: Diamètre de Feret selon la direction perpendiculaire à l'axe principal d'inertie.
$F^\lambda(X)$: Fermeture de l'ensemble X par un disque de rayon λ .
$g(\lambda)$: fonction granulométrique par ouverture.
$I(x,y)$: fonction Image.
$K\{C_i\}$: sous-ensemble de points de $C(X)$ connexes de C_i .
l_α	: pas d'échantillonnage de l'image dans la direction α .
MID	: Disque Maxima Inscrit.
MD	: Point du squelette à <i>aval multiple</i> (Point triple).
MU	: Point du squelette à <i>amont multiple</i> .
$MUHO(X)$: Ouvert Ultime Homotopique Modéré de X : "référence lisse".
N_X	: Nombre de points extrémités du squelette = Nombre d'aspérités.
N^n	: Nombre de connexité dans \mathbb{R}^n .
N_α	: Nombre d'intercepts dans la direction α .
$O^\lambda(X)$: Ouverture de l'ensemble X par un disque de rayon λ .
p_i	: pixel d'indice relatif i dans le voisinage de p .
p_{xy}	: pixel de coordonnées (x,y) .
r_j	: $j^{\text{ème}}$ pixel d'un chemin de remontée à tout prix.
R_G	: Rugosité Globale.
$R_{G'}$: Rugosité Globale Corrigée.
\hat{S}	: angle au sommet d'une aspérité.
S	: sommet de l'angle \hat{S} .
$S(X)$: ensemble des points du squelette euclidien de X .
$S^m(X)$: maxima locaux de la fonction distance en métrique m .
s_i	: pixel du squelette (cfr. C_i).
$SKID$: Squelette par Disques Entiers.
$U(X)$: Périmètre euclidien de X .
$U^m(X)$: Périmètre de X en métrique m .
$U_{Croft}^m(X)$: Estimation du périmètre par la formule de Crofton en métrique m .
$UHO(X)$: Ouvert Ultime Homotopique de X .
U	: Point <i>amont</i> du squelette d'une aspérité. Centre du disque d'appui de l'aspérité.
$V^m(p)$: Voisinage élémentaire en connexité m du pixel p .
W_1	: Indice d'émoissé de Wentworth (modifié).
W_{12}	: Indice d'émoissé de Swan.
\bar{W}	: Indice d'émoissé de Wadell.
W_B, W_V	: Indices d'émoissé équivalent.
X	: Extrémité d'une branche du squelette.
α	: rugosité morphologique réduite et tronquée.

α_S	: rugosité morphologique selon Serra[1982].
α_{CH}	: rugosité morphologique selon Chermant et al.[1987].
α_{FR}	: rugosité morphologique selon Frossard[1978].
β_S	: circularité selon Serra[1982].
γ	: facteur de modération de la référence lisse [MUHO(X)].
δ	: gradient sur le signal $\Lambda(X)$.
Δ_M	: Dimension non-entière de Minkowski.
Θ	: orientation de l'axe principal d'inertie.
λ	: rayon (taille) de l'élément structurant isotrope.
λ^m	: rayon (taille) de l'élément structurant isotrope en métrique m.
λ_E	: rayon du disque maxima inscrit (cfr. D_{in})
λ_{X1}	: plus petit rayon de courbure d'un contour.
λ_X	: rayon de courbure d'une aspérité.
λ_U	: rayon du disque d'appui d'une aspérité.
λ_i	: valeur de la fonction d'extinction.
$\Lambda(X)$: signal des λ_i sur le calyptre (fonction d'extinction).
ϕ_n	: angle de phase de la n ^{ème} harmonique de la série de Fourier.
Ψ_S	: Sphéricité de Wadell.