

Un algorithme performant de calcul des erreurs de forme

J.F. DEBONGNIE*

*LTAS/Méthodes de Fabrication
Université de Liège – B52
1 Chemin des Chevreuils
4000 Liège (Belgique)
JF.Debongnie@ulg.ac.be

Introduction

La détermination des erreurs de forme revêt une grande importance dans le domaine industriel, car elle conditionne dans bien des cas la fonctionnalité des assemblages ou des mécanismes. Malheureusement, la mesure directe des défauts de forme est difficile [1]. Ainsi, le procédé classique de mesure de la planéité implique un dégauchissage *manuel*, ce qui constitue une opération délicate et difficilement reproductible. Ce manque d'objectivité ouvre la porte à toute espèce de contestation entre fournisseur et acheteur. Il semble donc indispensable de traiter le problème *par voie numérique*, de manière à s'affranchir de tout dégauchissage. La méthode consiste alors à enregistrer des mesures en coordonnées, puis à calculer l'erreur au moyen d'algorithmes adaptés permettant d'obtenir la *vraie valeur de l'erreur de forme*, au sens des normes ISO. La présente communication expose les fondements mathématiques du problème, qui se ramène à une méthode d'approximation en norme du maximum. Nous avons développé pour ce faire un algorithme original fondé sur les normes d'ordre p , qui s'est avéré à la fois très rapide et très stable.

1. Notion de fonction d'encadrement

Les tolérances de forme s'expriment toujours par un *encadrement* : deux droites extrêmes dans le cas de la rectitude, deux plans extrêmes dans le cas de la planéité, deux cercles concentriques extrêmes dans le cas de la circularité et deux cylindres coaxiaux dans le cas de la cylindricité. Mathématiquement, cela revient à définir une *fonction d'encadrement* $f(\mathbf{x}, \lambda)$ dépendant des coordonnées \mathbf{x} et d'un jeu de paramètres λ . Sa valeur $f(\mathbf{x}_i, \lambda) = f_i(\lambda)$ au point de mesure numéro i est appelée *hauteur* du point \mathbf{x}_i . Ainsi, en rectitude, la fonction d'encadrement est donnée par

$$f(x, y, \varphi) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$$

où $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. La hauteur du point i se mesure perpendiculairement à la droite de normale \mathbf{n} passant par l'origine des axes. En circularité, soient a et b les coordonnées d'un centre. La fonction d'encadrement vaut

$$f(x, y, a, b) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

et la hauteur du point i est la distance de ce point au centre (a, b) .

2. Valeur d'encadrement et défaut d'un compact K

Nous appellerons *valeur d'encadrement d'un compact K*, pour une valeur des paramètres λ , le nombre

$$enc(K, \lambda) = \sup_{x \in K} f(\mathbf{x}, \lambda) - \inf_{x \in K} f(\mathbf{x}, \lambda)$$

En rectitude, par exemple, elle mesure le parallélisme de la ligne mesurée par rapport à une droite perpendiculaire à la normale \mathbf{n} . Cela étant, le *défaut* du compact K est donné par la plus petite valeur d'encadrement, lorsque l'on varie les paramètres λ :

$$def(K) = \inf_{\lambda} enc(K, \lambda)$$

Le fait que cette borne inférieure est *atteinte* résulte des propriétés des ensembles compacts. La question de l'unicité de ce minimum par rapport aux paramètres λ est plus délicate. Sans entrer dans les détails, disons que l'unicité est assurée en circularité et en sphéricité moyennant des conditions raisonnables. Pour la rectitude, la planéité et la cylindricité, ce n'est pas le cas, car on peut trouver des contre-exemples, mais ceux-ci sont toujours fondés sur des symétries particulières que l'on ne rencontre guère en pratique. Notre expérience est que sur tous les problèmes *raisonnables*, l'unicité est réalisée.

3. Formulation en termes d'écarts

Le problème de la recherche des défauts admet une seconde formulation équivalente. Introduisons un paramètre supplémentaire ρ et définissons l'*écart* par

$$e(\mathbf{x}, \lambda, \rho) = f(\mathbf{x}, \lambda) - \rho$$

Appelons encore *écart maximal sur K* la grandeur

$$e_M(K, \lambda, \rho) = \sup_{x \in K} |e(\mathbf{x}, \lambda, \rho)|$$

Il est assez facile de montrer la relation

$$enc(K, \lambda) = 2 \inf_{\rho} e_M(K, \lambda, \rho)$$

Cette propriété permet de donner une nouvelle définition du défaut :

$$def(K) = 2 \inf_{\lambda, \rho} e_M(K, \lambda, \rho)$$

Sous cette forme, la recherche du défaut apparaît comme la recherche de la surface d'équation $f(\mathbf{x}, \lambda, \rho)$ dont l'écart maximal à un point de mesure est le plus faible. C'est un problème de *meilleure approximation uniforme*, s'apparentant à l'approximation des fonctions au sens de Chebyshev. Ainsi, pour fixer les idées, dans le cas de la circularité, la *surface de meilleure approximation* est un cercle de rayon ρ et d'équation

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \rho$$

dont il faut trouver les paramètres a, b et ρ de manière à obtenir le plus petit écart maximal.

4. Calcul approché des défauts par les moindres carrés

L'approximation uniforme étant difficile à traiter, nombreux sont ceux qui se contentent de la simplification qui consiste à minimiser la racine carrée de la somme des écarts

$$\|\mathbf{e}\|_2 = \sqrt{\sum_i e^2(\mathbf{x}_i, \lambda, \rho)}$$

ce qui permet de déterminer une valeur (λ_2, ρ_2) du jeu de paramètres, à partir de laquelle on peut obtenir une valeur approchée du défaut, à savoir

$$def(K) \approx def_2(K) = 2 \sup_{\mathbf{x} \in K} |e(\mathbf{x}, \lambda_2, \rho_2)|$$

Cette valeur est évidemment approchée *par excès*, puisque les valeurs des paramètres ne sont pas optimales. L'expérience montre que l'erreur ainsi commise peut être de plus de 16%, ce qui n'est pas négligeable. Par ailleurs, sur des pièces complexes, la valeur des paramètres λ est influencée par la répartition des points. Cette méthode *n'est donc pas satisfaisante*. Or c'est la méthode utilisée sur la plupart des appareils du commerce, dont les résultats sont donc sujets à caution.

5. La méthode des normes p

Fondamentalement, la recherche du défaut consiste à minimiser l'écart maximal. Malheureusement, c'est une fonction peu régulière, continue mais non continûment dérivable, présentant des thalwegs, et dont le minimum est en fait un creux de type conique. On est donc tenté de remplacer l'écart maximal par une fonction approchée plus régulière. La méthode des moindres carrés va d'ailleurs dans ce sens, puisqu'elle remplace e_M par $\|\mathbf{e}\|_2$. Le problème est ici que la fonction de remplacement est très différente de la fonction à minimiser. Mais on peut songer à utiliser les normes p définies par

$$\|\mathbf{e}\|_p = \sqrt[p]{\sum_i |e_i|^p}$$

qui ont la propriété fondamentale suivante :

$$e_M \leq \|\mathbf{e}\|_p \leq n^{1/p} e_M$$

où n est le nombre de points de mesure. Il en résulte que pour p tendant vers l'infini, la norme p des écarts tend vers l'écart maximal sur tout compact de l'ensemble des paramètres. Bien plus, on peut montrer que le minimum de la norme p tend vers le minimum de l'écart maximal, c'est-à-dire le demi défaut, et qu'il y a également convergence des paramètres λ et ρ vers la valeur correspondant au défaut. L'idée d'exploiter cette propriété avait déjà été émise par Goch [2], mais il se limitait à des valeurs de p de l'ordre de 50, vraisemblablement pour des raisons de stabilité numérique. Or il faut monter bien plus haut, ainsi que nous allons le montrer.

6. Valeur des puissances à utiliser

L'erreur liée au remplacement de l'écart maximal par la norme p est, en valeur relative, de l'ordre de

$$\varepsilon_p = n^{1/p} - 1$$

ce qui signifie que pour obtenir une précision ε_p , il faut que p vérifie

$$p \geq \frac{\ln(n)}{\ln(1 + \varepsilon_p)} \approx \frac{1}{\varepsilon_p} \ln(n)$$

En pratique, il n'est pas rare d'avoir 2000 points de mesure. Dans ce cas, pour une précision de 10^{-5} , il faut que p vérifie

$$p \geq 10^5 \ln(2000) = 7,601.10^5$$

Il s'agit donc de puissances *très élevées*. Le calcul de telles puissances conduit naturellement à de délicats problèmes de dépassement de capacité (*overflow*) que l'on peut éviter par un artifice de mise à échelle : en gros, on écrit

$$\|\mathbf{e}\|_p = e_M \sqrt[p]{\sum_i \left| \frac{e_i}{e_M} \right|^p} \quad \text{avec} \quad \bar{e}_i = \frac{e_i}{e_M}$$

si bien que toutes les mises à la puissance p concernent des nombres inférieurs ou égaux à l'unité. De cette façon, nous travaillons régulièrement avec des puissances allant de 10^6 à 10^9 .

7. Algorithme de minimisation

Notre idée de départ consistait à minimiser directement la norme p avec p suffisamment grand, par une méthode classique de Newton-Raphson. Malheureusement, plus p est grand, moins la norme p est régulière et par conséquent, plus le processus itératif a des chances d'échouer.

En fait, pour p donné, il faut partir d'une solution initiale d'autant meilleure que p est élevé. Ceci suggère le procédé suivant : on se donne une suite croissante $p_1=2 < p_2 < p_3$ et on minimise les normes correspondantes successivement, en prenant comme point de départ pour la norme p_i le point optimal pour la norme p_{i-1} . L'expérience nous a montré que l'on peut abrégé fortement cette procédure comme suit :

a) On recherche d'abord le minimum pour $p = 2$ (moindres carrés)

b) On fait croître p en progression géométrique de raison $\sqrt{2}$. Pour chaque valeur de p , on se limite à une seule itération de Newton-Raphson, pour autant que l'on ne constate pas d'amorce de divergence.

c) On contrôle la convergence en se fondant sur l'inégalité de Jensen [5] exprimant que pour un même jeu d'écart, si $p < q$, on a

$$\|e\|_p \geq \|e\|_q$$

Par conséquent, si le processus se passe bien, d'une itération à l'autre, on doit voir les normes p diminuer, d'une part parce que p augmente et d'autre part, parce que la solution est censée s'améliorer. On conserve donc la plus petite norme obtenue comme référence. Si à un moment donné, la nouvelle norme lui est supérieure, on bloque p jusqu'à obtenir une norme plus petite que la référence. Ceci permet de régler la plupart des cas de début de divergence. Le dernier recours, dans les très rares cas de divergence persistante, consiste à recommencer le calcul avec une progression géométrique de raison plus faible.

8. Discussion et conclusion

Il est bon de signaler que d'autres méthodes sont envisageables. Tout d'abord, en rectitude, planéité et circularité, il existe des méthodes directes de nature géométrique [4,6,7]. Mais pour un nombre de points n , ces méthodes sont de complexité $O(n^2)$ dans les deux premiers cas et $O(n^4)$ en circularité, ce qui mène à un coût de calcul important. Du reste, on ne connaît pas de méthode directe en cylindricité. Quand elles existent, ces méthodes directes peuvent servir de référence dans les cas-tests.

On peut également penser à la méthode du simplexe de Nelder et Mead [3,6,7], qui s'applique à des fonctions simplement C^0 . Mais l'expérience montre qu'elle est très sensible au point de départ et que dans certains cas, elle ne permet pas de trouver le vrai minimum. Bien que séduisante a priori, cette méthode n'est donc pas suffisamment fiable.

Au contraire, la méthode des normes p s'applique avec succès en rectitude, planéité, circularité, cylindricité, sphéricité et pour la recherche du plus petit cercle circonscrit. Notre algorithme ne nécessite en général qu'une quarantaine d'itérations de complexité $O(n)$ pour arriver à la puissance $p = 10^6$, ce qui en fait une méthode *très rapide*. De très nombreux essais, tant sur des figures définies

analytiquement, que sur des figures aléatoires ou réelles, ont été menés tant en notre laboratoire que chez un grand constructeur automobile. Dans tous les cas, la méthode des normes p s'est avérée à la fois plus rapide et plus fiable que toute autre méthode connue. Elle est actuellement intégrée à un logiciel de prévision des formes réelles des pièces commercialisé sous le nom de FEMS.

Références

[1] J.D Meadows, *Geometric Dimensioning and Tolerancing*, Marcel Dekker, New York, 1995

[2] G. Goch, Efficient multi-purpose algorithm for approximation and alignment problems in coordinate measurement techniques, *CIRP Annals*, vol. 40/1, pp. 491-494, 1991

[3] J.A Nelder, R. Mead, A simplex method for function minimization, *Computer Journal*, vol. 7, pp. 308-313, 1965

[4] P. Pauly, *Etablissement d'algorithmes d'erreurs de forme et de position*, mémoire de fin d'études, Université de Liège, 1996

[5] L.P. Lebedev, I.I. Vorovich, G.M.L. Gladwell, *Functional Analysis*, Kluwer, Dordrecht, 1996

[6] J.F Debongnie, L. Masset, Sur l'évaluation des défauts de forme à partir de mesures tridimensionnelles, *European Journal of Mechanical and Environmental Engineering*, vol. 43, n°1, pp. 13-21, 1998

[7] L. Masset, *Analyse des gammes d'usinage par la méthode des éléments finis*, Thèse de doctorat, Université de Liège, 2004