



UNIVERSITÉ DE LIÈGE

Modélisation des tensions circonférentielles en simulation méridienne d'écoulements en turbomachines

Travail présenté en vue de l'obtention du titre de
Docteur en Sciences de l'Ingénieur

par

Jean-Philippe THOMAS
Ingénieur civil électricien-mécanicien

Février 2012



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES



UNIVERSITÉ DE LIÈGE

Modélisation des tensions circonférentielles en simulation méridienne d'écoulements en turbomachines

Travail présenté en vue de l'obtention du titre de
Docteur en Sciences de l'Ingénieur

par

Jean-Philippe THOMAS
Ingénieur civil électricien-mécanicien

Février 2012



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

Thèse défendue avec succès, le 24 mai 2012, pour l'obtention du grade de Docteur en Sciences de l'Ingénieur de l'Université de Liège, devant un jury composé de

Eric	DELHEZ	Professeur à l'ULg, président
Olivier	LEONARD	Professeur à l'ULg, promoteur
Jean-André	ESSERS	Professeur à l'ULg
Gérard	DEGREZ	Professeur à l'ULB
Francis	LEBOEUF	Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon
Florent	MARGNAT	Maître de conférence à l'ENSA Paris

Résumé

Le recours systématique à des simulations fluides tridimensionnelles Navier-Stokes étant trop exigeant en phase de conception de turbomachines, la simulation méridienne, bidimensionnelle, plus simple et plus rapide, est utilisée de manière intensive à l'échelle industrielle. Cependant, sa limitation réside dans son besoin en information empirique pour reproduire l'action des aubes et l'effet des composantes tridimensionnelles de l'écoulement, des éléments d'ordre supérieur au méridien classique. Nous proposons de diriger le méridien vers une diminution d'empirisme en obtenant cette information de manière autonome.

L'obtention d'information d'ordre circonférentiel peut être envisagée en résolvant toutes les composantes de l'écoulement avec un code purement tridimensionnel ou en s'accommodeant d'une solution approchée avec un coût numérique moindre, optique choisie dans cette contribution. Pour ce faire, nous proposons d'étendre au cas circonférentiel la "méthode harmonique non-linéaire" de He, éprouvée dans le cas de la reproduction approchée des instationnarités.

L'adaptation de cette technique au modèle méridien passe par une reformulation de la présence des aubages. En effet, l'usage de séries de Fourier nécessite une évolution circonférentielle continue de l'écoulement, interdisant l'existence des conditions numériques locales d'imperméabilité. Pour contourner cette particularité du cas circonférentiel, l'effet des aubes est traduit par un champ de force suffisamment continu et formalisé par la "méthode de frontière immergée" de Peskin.

La validation de la nouvelle technique, issue de la combinaison novatrice des méthodes harmonique et de frontière immergée au sein d'un code méridien, est réalisée sur le cas de l'écoulement non-visqueux autour d'un cylindre. Elle illustre les capacités du méridien harmonique à accéder à des informations d'ordre supérieur, qui permettent d'enrichir l'écoulement moyen mais aussi de mettre à disposition les évolutions circonférentielles issues des modes de Fourier résolus.

Enfin, le méridien harmonique est appliqué à un profil d'aube statorique puis à un compresseur mono-étage. Il y est montré qu'après adaptation de la modélisation des parois aux particularités géométriques de profils minces, il est possible d'accéder à l'information d'ordre élevé. En particulier, le modèle développé permet de capturer les caractéristiques potentielles des non-uniformités circonférentielles sur l'entièreté de la veine et visqueuses aux abords des parois méridiennes.

Remerciements

Je tiens à remercier Olivier, promoteur de ce travail, pour m'avoir offert l'opportunité d'entreprendre une thèse de doctorat, pour la confiance et la liberté accordées mais aussi pour ses conseils toujours avisés.

Je suis reconnaissant envers mes collègues pour le soutien apporté et pour la bonne ambiance de travail. Je pense en particulier à Sébastien avec qui j'ai partagé un bureau dans lequel le ton était léger et dynamique. Je n'oublie pas mes collègues du service de Turbomachines, Vincent, Martin, Pierre et Wenhai ni du service d'Aérodynamique, Didier, Geoffrey et Marcus.

Je remercie également ma famille et mes amis, dont la présence a permis de me sortir la tête des bouquins.

Pour terminer, je tiens à remercier tout particulièrement Anne, mon épouse, pour son soutien indéfectible et ses encouragements tout au long de ce travail ainsi que pour m'avoir assuré un quotidien favorable à de parfois longues journées de travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Origine et effet des tensions circonférentielles	5
1.1 La cascade d'Adamczyk	6
1.1.1 La moyenne circonférentielle	9
1.2 Physique liée aux tensions circonférentielles	12
1.2.1 Mécanismes de création des tensions circonférentielles	12
1.2.2 Fermetures empiriques	14
1.3 Le méridien d'ordre élevé	15
1.3.1 Présentation du cas test	16
1.3.2 L'écoulement moyené	18
1.3.3 Simulation mérienne	22
2 Modélisation harmonique des tensions circonférentielles	29
2.1 Analyse spectrale locale	30
2.2 Reconstruction harmonique	33
2.3 Fermeture harmonique du méridien	38
3 Vers une modélisation harmonique non-linéaire	43
3.1 La méthode harmonique non-linéaire	44
3.2 Applicabilité au modèle mérien	49

3.2.1	Les conditions limites déterministes	49
3.2.2	Les conditions limites circonférentielles	51
4	La méthode de frontière immergée	55
4.1	Principe de la méthode	56
4.2	Approche discrète	57
4.3	Approche continue	58
4.3.1	Frontières élastiques	58
4.3.2	Frontières rigides	61
4.3.3	Méthode de pénalisation	61
4.3.4	Méthode de “feed-back”	62
4.3.5	Méthode de forçage direct	63
4.4	Synthèse de la méthode de frontière immergée	64
5	Dérivation du méridien harmonique	67
5.1	Le système d'équations de Navier-Stokes tridimensionnelles périodiques de passage en passage	68
5.2	Les systèmes moyen et auxiliaire	69
5.3	Le système auxiliaire harmonique	73
5.3.1	Développement en série	73
5.3.2	Force des aubes	74
5.3.3	Termes non-linéaires	74
5.3.4	Termes visqueux	76
5.3.5	Système harmonique	77
6	Implémentation du méridien harmonique	81
6.1	Code méridien initial	82
6.1.1	Méthode des volumes finis	82
6.1.2	Discrétisation spatiale	83

6.1.3	Intégration temporelle	86
6.1.4	Conditions limites	88
6.2	Fonctionnalité harmonique	89
6.2.1	Calcul des flux	89
6.2.2	Intégration temporelle	91
6.2.3	Conditions limites	93
6.3	Recours à la formulation de frontière immergée	95
6.3.1	Choix de la méthode	95
6.3.2	Discrétisation spatiale	96
6.3.3	Du maillage lagrangien vers le maillage cartésien	99
6.3.4	Du maillage cartésien vers le maillage lagrangien	103
6.3.5	Phénomène de Gibbs	104
6.3.6	Intégration de l'équation de force	105
7	Validation du méridien harmonique	109
7.1	Présentation du cas test	110
7.2	Caractérisation de la fonction de distribution	112
7.3	Structure de l'écoulement autour d'un corps immergé	118
7.4	Comportement modal du méridien harmonique	122
7.4.1	Fidélité spectrale de la fonction de distribution	122
7.4.2	Largeur du support	125
7.4.3	Fidélité fréquentielle de l'écoulement	129
7.5	Décalage du champ de force	131
7.6	Influence des tensions circonférentielles	137
7.7	Stabilité du processus itératif	143
7.7.1	Paramètres du contrôleur	144
7.7.2	Décalage du champ de force	146

7.7.3	Largeur du support	147
7.7.4	Comparaison avec le méridien classique	149
7.8	Ecoulement visqueux autour d'un cylindre	149
7.9	Synthèse de la méthode harmonique	152
8	Application du méridien harmonique	153
8.1	Particularités de l'application aux profils (minces)	154
8.1.1	Bords minces	154
8.1.2	Influence des parois	156
8.2	Le stator du CME2	159
8.3	Le CME2 complet	165
Conclusions		175
Bibliographie		181
A Formulation des termes additionnels		193
B Le système méridien auxiliaire		195
C Le système méridien auxiliaire harmonique		201
D Expression des flux axisymétriques de Roe		205
E Schéma de reconstruction MUSCL		207
F Interpolation dans le cadre du schéma en diamant		209
G Calcul des tensions circonférentielles		211

Introduction

La conception aérodynamique de composants de turbomachines est aujourd’hui principalement basée sur l’usage de la CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Grâce à l’augmentation constante de la puissance de calcul ainsi qu’à l’amélioration des techniques de résolution (robustesse, rapidité, précision), une procédure de design basée sur la simulation numérique est devenue nettement moins coûteuse que des campagnes expérimentales systématiques. Il est aujourd’hui possible de résoudre des écoulements instationnaires tridimensionnels en turbomachines multi-étages. Toutefois, l’innovation technologique des conceptions aérodynamiques (traitement des écoulements secondaires, quantification de la marge au pompage, optimisation des conceptions, interactions fluide-structure) et la complexité des problèmes numériques associés (précision recherchée, taille des problèmes, simulation multi-étages, recours à la simulation instationnaire) nécessitent encore aujourd’hui des temps de restitution trop importants pour un usage intensif de codes tridimensionnels instationnaires, ou même stationnaires, en phase de conception. L’usage de codes de calcul simplifiés plus rapides, résolvant un écoulement moyen, est dès lors nécessaire pour les premières étapes de la conception d’un composant. Ces outils requièrent néanmoins des informations d’ordre empirique, lesquelles peuvent être fournies par une campagne d’essais qui permet de valider les codes de calcul. Parmi ceux-ci, le code méridien (ou *throughflow*) occupe une place importante.

Le méridien classique

La simulation méridienne consiste en la résolution dans un plan (le plan méridien), d’un écoulement moyenné selon la circonférence de la machine. Son utilisation première se situe dans une chaîne de conception, où il permet un accès rapide aux caractéristiques principales de l’écoulement, aidant ainsi le concepteur à faire des choix quant à la géométrie de la machine, sur base de performances souhaitées. D’autres applications peuvent aussi lui être attribuées : l’exploitation de résultats expérimentaux, la création d’un environnement multi-étage pour une simulation tridimensionnelle d’une roue particulière ou encore une estimation des conditions de pompage.

Néanmoins, le prix à payer pour bénéficier d’un temps de calcul réduit par rapport à une simulation tridimensionnelle est de recourir à un certain nombre d’informations empiriques,

au travers de corrélations de pertes, obtenues sur base de résultats de campagnes d'essais sur différentes géométries. Le problème majeur de cette formulation est son manque de généralité. En effet, si ces corrélations sont acceptables pour des géométries bien connues et des conditions de fonctionnement déterminées, le besoin d'une modélisation plus générale apparaît en cas de géométrie innovante ou de fonctionnement particulier (hors fonctionnement nominal par exemple). C'est dans cette optique que Adamczyk [1, 2] a développé une cascade de moyennes qui mènent au modèle le plus général en turbomachines.

La cascade d'Adamczyk

Dans un esprit de formalisation des différents niveaux de modélisation en CFD et de caractérisation de l'empirisme associé à chacun, Adamczyk a dérivé de manière rigoureuse un système d'équations obtenu par une cascade de trois moyennes : la moyenne d'ensemble appliquée aux équations de Navier-Stokes tridimensionnelles turbulentes instationnaires, la moyenne temporelle appliquée aux équations RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) et la moyenne apériodique appliquée aux équations stationnaires pour finalement obtenir le système d'équations du canal moyen (SECM). Ce dernier lie l'écoulement instationnaire et turbulent d'un ensemble de roues aubées à un écoulement stationnaire dans un canal inter-aubes. Ce modèle représente une unification et une généralisation de tous les modèles existant précédemment, chacun d'entre eux étant un cas particulier du SECM, par la suite d'hypothèses diverses. Du fait de la non-linéarité des équations, le processus de moyenne fait apparaître, à chaque étape de la cascade, des termes supplémentaires qu'il faut modéliser, ce qui consiste à résoudre le problème de la fermeture du système. La première moyenne amène les tensions de Reynolds, la deuxième les tensions dites déterministes et la dernière les tensions apériodiques. Ces termes supplémentaires témoignent respectivement de l'effet moyen de la turbulence, de l'instationnarité (interactions entre roues mobiles l'une par rapport à l'autre) et de l'apériodicité entre canaux inter-aubes (interactions entre roues immobiles l'une par rapport à l'autre mais possédant un nombre d'aubes différent) sur le SECM.

A ces moyennes, on peut ajouter une quatrième : la moyenne circonférentielle. Cette dernière mène au système d'équations méridien. De manière identique, des termes supplémentaires apparaissent : les tensions circonférentielles. Celles-ci représentent l'effet moyen sur le modèle méridien des non-uniformités azimutales. A ces tensions s'ajoutent des termes reprenant les effets moyens des aubes. Tous ces termes additionnels requièrent une modélisation externe.

Le concept de simulation d'ordre élevé

Par cet ensemble de moyennes, et par la hiérarchisation correspondante des niveaux de modélisation, Adamczyk dresse un état des besoins en apports externes d'information de chaque niveau de la cascade pour capturer un effet moyen des phénomènes qui ne sont

réellement simulables que par le niveau supérieur. Par exemple, pour qu'un modèle méridien soit capable de reproduire l'effet moyen des non-uniformités circonférentielles qui apparaissent naturellement dans un modèle tridimensionnel stationnaire, plusieurs auteurs (dont Sehra [131], Jennions [74], Simon [136]) ont montré qu'il est nécessaire de lui adjoindre les tensions circonférentielles, lesquelles traduisent notamment des effets physiques tels que le mélange radial ou les tourbillons de bout d'aube. Ces apports externes d'information peuvent être d'ordre empirique ou, dans un objectif de généralité, provenir d'une modélisation nouvelle capable de fournir une information d'un ordre supérieur correspondant à la machine et aux conditions de fonctionnement étudiées. C'est dans cette optique que le travail présenté ici s'inscrit.

Ce problème de fermeture (i.e. de modélisation des termes d'ordre élevé), se pose également en simulation tridimensionnelle stationnaire pour obtenir une image moyenne des instationnarités, autrement dit des interactions rotor-stator. Ceci a fait l'objet de nombreuses recherches ces dernières années. Parmi tous les modèles, la fermeture dite "harmonique" de He et Ning [61] s'est révélée supérieure. Cette méthode consiste en la résolution, dans le domaine fréquentiel, d'un système d'équations linéarisées aux perturbations. Sa capacité à reconstruire les tensions déterministes, et même une partie de l'écoulement instationnaire, a été illustrée par plusieurs auteurs (Chen [23], Stridh [143], Vilmin [164]). Dans la même lignée, Hall [60] a développé une technique qu'il nomme "l'équilibre harmonique" (ou *harmonic balance technique*), qui consiste à résoudre les équations RANS non-linéaires dans le domaine fréquentiel.

Notre travail

Nous proposons dans cette contribution d'analyser et de développer la possibilité d'affranchir la simulation méridienne d'une part de l'empirisme qui lui est associé au travers de l'obtention autonome des tensions circonférentielles, termes d'ordre supérieur, par l'extension d'une méthode de résolution harmonique, ayant prouvé son efficacité dans le cas tridimensionnel stationnaire, au cas spatial circonférentiel. A cette fin, le travail sera organisé de la manière suivante.

Dans le premier chapitre, nous détaillerons la cascade d'Adamczyk et la physique liée aux termes supplémentaires apparaissant en son sein. Nous exprimerons le point de vue de plusieurs auteurs quant à l'intérêt de ces termes supplémentaires et illustrerons ces dires dans le cas du CME2, un compresseur mono-étage basse vitesse, cas qui nous suivra tout au long de cette contribution.

Le deuxième chapitre, avec en ligne de mire l'utilisation d'une méthode spectrale pour reconstruire les tensions circonférentielles, aura pour but de prouver qu'une reconstruction harmonique est adaptée à la modélisation des non-uniformités considérées. L'étude des caractéristiques fréquentielles du CME2 permettra d'établir de premières différences entre les cas circonférentiel et déterministe.

Le troisième chapitre sera consacré à la description de la méthode harmonique non-linéaire de He et Ning [61], qui a prouvé son efficacité à reproduire une information d'ordre supérieur au sein d'un code tridimensionnel stationnaire. Nous y envisagerons la possibilité d'appliquer celle-ci au cas du modèle méridien et soulignerons la différence fondamentale entre les cas circonférentiel et déterministe : la présence de conditions limites d'ordre supérieur au sein du domaine de calcul.

Le quatrième chapitre apportera une solution à la problématique des conditions limites témoignant de la présence de l'obstacle solide dans le domaine de résolution. Cette solution est le recours à la méthode de frontière immergée ("Immersed Boundary Method"), qui reformule la présence d'un solide dans un écoulement. Nous présenterons cette méthode de manière historique et générique en soulignant les différentes formes résultant d'évolutions proposées par plusieurs auteurs.

Le cinquième chapitre sera consacré à l'application mathématique de la philosophie de He au cas circonférentiel. Nous y détaillerons la dérivation des systèmes moyen et auxiliaire. Le premier sera établi sous forme non-linéaire tandis que le deuxième sera présenté dans un formalisme linéarisé permettant sa résolution dans le domaine fréquentiel. Les différentes approximations relatives à l'approche harmonique seront soulignées.

Le sixième chapitre détaillera les aspects numériques de l'implémentation de la méthode harmonique développée. Nous y présenterons d'abord le formalisme du code volumes-finis initial. Nous aborderons ensuite les différents aspects numériques de la fonctionnalité harmonique ajoutée. Nous terminerons en exposant les caractéristiques numériques de la méthode de frontière immergée dans un contexte volumes-finis harmonique.

Le septième chapitre constituera l'étape de validation du méridien harmonique et relatera l'étude de ses différentes propriétés au travers du cas de l'écoulement non-visqueux autour d'une cascade de cylindres. Nous y critiquerons l'utilisation de la méthode de frontière immergée dans un contexte fréquentiel et établirons les conditions idéales d'utilisation de la méthode développée. Nous montrerons la capacité du code implémenté à fournir les termes d'ordre supérieur et l'utilité de ceux-ci dans le cas test pré-cité.

Le dernier chapitre sera dédié à l'application du méridien harmonique au cas du compresseur CME2. Nous y montrerons que ce genre de configuration aérodynamique constitue un domaine délicat d'utilisation de la méthode développée, ne satisfaisant pas aux conditions idéales présentées. Nous apporterons deux modifications en vue de permettre l'usage de la méthode pour ce genre d'application. Nous illustrerons ensuite, sur un cas d'écoulement non-visqueux autour d'un profil d'aube statorique puis sur l'étage de compresseur complet, que le méridien harmonique fournit une image réaliste de l'écoulement et donne accès aux termes d'ordre supérieur.

Enfin, nous conclurons le travail en synthétisant les points marquants et discuterons la méthode développée dans cette contribution.

Chapitre 1

Origine et effet des tensions circonférentielles

Sommaire

1.1	La cascade d'Adamczyk	6
1.1.1	La moyenne circonférentielle	9
1.2	Physique liée aux tensions circonférentielles	12
1.2.1	Mécanismes de création des tensions circonférentielles	12
1.2.2	Fermitures empiriques	14
1.3	Le méridien d'ordre élevé	15
1.3.1	Présentation du cas test	16
1.3.2	L'écoulement moyen	18
1.3.3	Simulation méridienne	22

Une procédure de conception aérodynamique d'un composant de turbomachine est aujourd'hui principalement basée sur l'outil numérique. En effet, grâce à l'augmentation constante de la puissance de calcul ainsi qu'au développement des techniques de résolution numérique, le recours à la CFD (*Computational Fluid Dynamics*) est devenu, d'une part, moins coûteux en temps que les tests en soufflerie et, d'autre part, d'une qualité de description de l'écoulement suffisante pour permettre l'innovation technologique. Ainsi, une chaîne d'outils numériques met à disposition du concepteur des codes de calculs allant du plus simple et rapide au plus complet. Une simulation unidimensionnelle permet par exemple, en des temps de calcul très faibles (quelques secondes), de déterminer une évolution moyenne de la veine (i.e. du chemin d'écoulement du fluide). Il est ainsi possible de fixer le nombre d'étages nécessaire au composant pour se conformer aux performances requises, c'est-à-dire de faire des choix rapides dans une phase précoce du projet. Les outils de simulation bidimensionnels arrivent ensuite. Ils donnent accès aux évolutions transversales de l'écoulement et permettent une analyse plus fine, avec un temps de restitution raisonnable pour une utilisation intensive (quelques secondes à quelques minutes). Ces outils permettent au concepteur d'aller plus avant dans la compréhension et le design du composant, en modifiant la géométrie des pales par exemple. Les étapes suivantes consistent à recourir aux

simulations tridimensionnelles stationnaires, voire instationnaires. Ces outils étant caractérisés par des temps de restitution plus importants (quelques heures à quelques jours), ils sont utilisés en fin de chaîne, pour analyser des phénomènes locaux comme les écoulements en bout d'aube, vérifier la conception ou quantifier les marges de stabilité notamment.

Chacun de ces outils de simulation est donc caractérisé par un temps de restitution et un niveau de description de l'écoulement. L'empirisme est présent dans chacun d'eux, dans des mesures différentes. Des modèles résultant de l'expérience et de l'observation sont ajoutés dans ces codes de calcul pour en améliorer le niveau de conformation à la physique, en minimisant l'impact sur le temps de calcul. Il est cependant très important, pour l'utilisateur ou le développeur, de savoir quelles hypothèses peuvent être faites pour aboutir à l'outil. C'est dans cette optique de caractérisation du niveau d'empirisme et de liaison entre les modèles et la physique que Adamczyk [1] a développé le Système d'Equations du Canal Moyenné (SECM), résultant d'une suite de moyennes. Ces différentes moyennes, dont résultent notamment les tensions circonférentielles, composent la cascade dite d'Adamczyk, que nous allons présenter dans la section suivante.

Nous dédierons la suite du chapitre aux tensions circonférentielles. Dans un premier temps, nous présenterons la physique associée à celles-ci par des conclusions et résultats tirés de la littérature. Dans un deuxième temps, nous introduirons le cas test utilisé pour illustrer les affirmations précédentes ; un compresseur basse vitesse mono-étage. Il sera aussi repris dans le chapitre suivant pour investiguer la nature harmonique des tensions circonférentielles.

1.1 La cascade d'Adamczyk

La cascade d'Adamczyk est représentée à la figure 1.1.

Au sommet de cette cascade se trouve le système d'équations tridimensionnelles instationnaires et turbulentes de Navier-Stokes. Il s'agit de la description la plus précise du comportement d'un fluide, au sein d'une turbomachine notamment, et aussi la plus complexe. Ce système est impossible à solutionner en écoulements internes tant les gammes d'échelles de longueurs et de temps sont larges. Pour les résoudre entièrement, il faudrait une densité de maillage par unité de volume proportionnelle au nombre de Reynolds élevé à la puissance 9/4 [86]. Or un nombre de Reynolds caractéristique d'un écoulement en turbomachine est de l'ordre d'un million. Ceci justifie l'utilisation de modèles simplifiés résultant de moyennes. De ce fait, le besoin en puissance de calcul diminue tandis que le besoin en modélisation augmente, comme nous allons le voir.

Ainsi, le modèle suivant est le système d'équations de Navier-Stokes auquel une moyenne de Reynolds a été appliquée¹. Elle consiste en une moyenne statistique, sur un nombre

1. Nous ne reproduisons pas ici les développements mathématiques, ils peuvent être trouvés dans le document original d'Adamczyk [2].

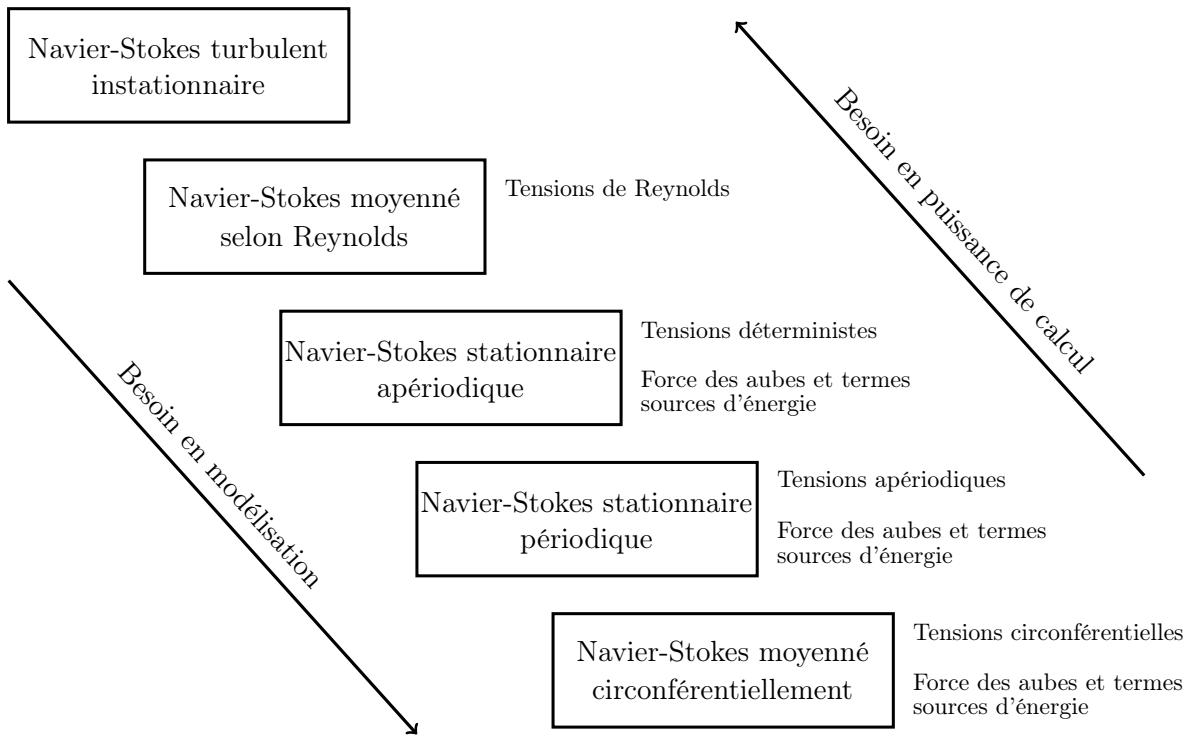


FIGURE 1.1 – Cascade d'Adamczyk [2]

important d'échantillons, c'est-à-dire sur de multiples révolutions pour une machine tournante. Son implication est le filtrage des phénomènes non déterministes, comme la turbulence. On obtient ainsi un système d'équations tridimensionnelles instationnaires (les phénomènes déterministes sont toujours présents) augmenté de certains termes supplémentaires, les tensions de Reynolds, dont la signification physique est l'influence moyenne de la turbulence. Ces tensions résultent de la moyenne opérée sur des termes non-linéaires.

En effet, si l'on définit, de manière générale, la moyenne² d'une variable ϕ sur un intervalle Ω par l'expression (1.1)

$$\bar{\phi} = \frac{\int_{\Omega} \phi \, d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \quad (1.1)$$

et si l'on définit la moyenne de Favre d'une variable ϕ comme une moyenne pondérée par la masse volumique ρ par l'expression (1.2)

2. Les expressions (1.1) et (1.2) utilisent l'intégration dans un souci de généralité. Dans le cas de la moyenne de Reynolds toutefois, l'opération est discrète et utilise donc une sommation.

$$\tilde{\phi} = \frac{\int_{\Omega} \rho \phi \, d\Omega}{\int_{\Omega} \rho \, d\Omega} \quad (1.2)$$

et les perturbations correspondantes

$$\phi' = \phi - \bar{\phi} \quad \phi'' = \phi - \tilde{\phi} \quad (1.3)$$

alors la moyenne d'un triple produit incluant la masse volumique, comme en comprennent les équations de Navier-Stokes, fait apparaître, outre les composantes moyennes, des termes supplémentaires.

$$\overline{\rho \phi \psi} = \underbrace{\bar{\rho} \tilde{\phi} \tilde{\psi}}_{\text{termes moyens}} + \underbrace{\overline{\rho \phi'' \psi''}}_{\text{termes additionnels}} \quad (1.4)$$

Si les termes moyens peuvent être calculés explicitement par la résolution du système moyen, leurs homologues additionnels, constituant une information d'un ordre supérieur, sont inaccessibles et doivent être modélisés. C'est à ce niveau qu'intervient l'empirisme. Ainsi, dans le cas d'une moyenne de Reynolds, ces termes portent le nom de tensions de Reynolds et traduisent l'influence moyenne de la turbulence. Ils sont introduits dans une simulation instationnaire déterministe par la résolution d'un modèle de turbulence.

Le niveau suivant repris à la figure 1.1 est un système d'équations tridimensionnelles stationnaires, résultant d'une moyenne temporelle. Celle-ci est équivalente à un filtrage des roues aubées mobiles par rapport à la roue d'intérêt, à l'origine des instationnarités. Par le même mécanisme, certains termes additionnels apparaissent. Parmi ceux-ci figurent les tensions déterministes qui traduisent l'influence moyenne de l'instationnarité sur un écoulement stationnaire. D'autres termes, qui traduisent l'effet moyen des roues filtrées, découlent de la moyenne. Il s'agit de la force des aubes composant la roue mobile et des termes d'énergie. Ils proviennent, physiquement, de l'action de la pression, des tensions de cisaillement et des flux de chaleur sur les aubes des roues mobiles.

Le modèle obtenu décrit un écoulement tridimensionnel apériodique de canaux inter-aubes en canaux inter-aubes. Pour obtenir un écoulement périodique, une troisième moyenne est opérée. Elle consiste à filtrer les roues immobiles autres que la roue considérée. Comme précédemment, des termes supplémentaires apparaissent : les tensions apériodiques, la force des aubes et des termes sources d'énergie résultant de l'influence moyenne des roues immobiles.

Le modèle ainsi obtenu relie l'écoulement instationnaire et turbulent dans une machine multi-étages à l'écoulement stationnaire au sein d'un canal inter-aubes, il s'agit du SECM (Système d'Equations du Canal Moyenné). Il existe autant de systèmes que de roues. Pour chacune d'elles, un seul canal doit être explicitement calculé, l'influence des autres roues apparaissant au travers des termes additionnels apparus au cours des différentes moyennes.

Enfin, on peut ajouter une quatrième opération de moyenne : la moyenne circonférentielle. Celle-ci mène au système d'équation méridien, qui décrit un écoulement stationnaire axisymétrique et qui constitue notre domaine d'intérêt. Pour cette raison, nous allons décrire de manière plus complète ce dernier opérateur de moyenne.

1.1.1 La moyenne circonférentielle

La dernière moyenne consiste en un filtrage des non-uniformités azimutales dues à la roue considérée elle-même, génératrice de ces non-uniformités. La moyenne circonférentielle consiste en une intégration de l'écoulement de l'intrados d'une aube à l'extrados de l'aube suivante, comme représenté à la figure 1.2, où x est la direction axiale de la machine et θ la direction azimutale.

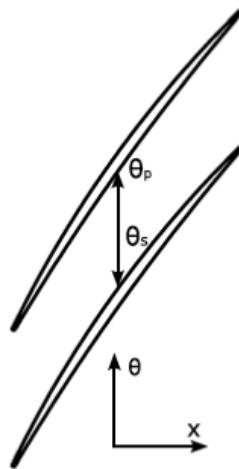


FIGURE 1.2 – Domaine circonférentiel [136]

La moyenne d'une variable ϕ est définie par l'expression (1.5), où $\Delta\theta$ représente la portion de la circonference d'un passage inter-aubes.

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta\theta} \int_p^s \phi \, d\theta \quad (1.5)$$

Définissant ensuite le facteur de blocage b comme le rapport de la portion de circonference occupée par le fluide à la circonference totale, la relation (1.6) est obtenue.

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \int_p^s \phi \, d\theta \quad (1.6)$$

Selon cette définition et utilisant la règle de Leibnitz, la relation (1.7), exprimant la moyenne de la dérivée d'une certaine variable ϕ de l'écoulement par rapport à une variable spatiale s , est obtenue.

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial s}} = \frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\phi}}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \left[\phi \frac{\partial \theta}{\partial s} \right]_p^s \quad (1.7)$$

Comme précédemment, la moyenne de Favre est introduite

$$\tilde{\phi} = \frac{\int_p^s \rho \phi \, d\theta}{\int_p^s \rho \, d\theta} = \frac{\overline{\rho \phi}}{\overline{\rho}} \quad (1.8)$$

Utilisant ces relations, le système d'équations méridien est finalement obtenu et décrit par les équations de conservation de la masse (1.9), de la quantité de mouvement (1.10) et de l'énergie (1.11), où les indices i et j reprennent les composantes et directions axiale, azimutale et radiale. Ces équations mettent également en jeu les composantes de vitesse V_i , la pression statique p , les tensions visqueuses τ_{ij} , l'enthalpie totale H et les flux de chaleur q_i .

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\rho} \widetilde{V}_x}{\partial x} + \frac{1}{rb} \frac{\partial r b \bar{\rho} \widetilde{V}_r}{\partial r} &= 0 \quad (1.9) \\ \frac{1}{b} \frac{\partial b \left(\bar{\rho} \widetilde{V}_i \widetilde{V}_x + \bar{p} \delta_{xi} \right)}{\partial x} + \frac{1}{rb} \frac{\partial r b \left(\bar{\rho} \widetilde{V}_i \widetilde{V}_r + \bar{p} \delta_{ri} \right)}{\partial r} &= \frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\tau}_{ix}}{\partial x} + \frac{1}{rb} \frac{\partial r b \bar{\tau}_{ir}}{\partial r} \\ &+ \frac{\bar{\tau}_{\theta r} - \bar{\rho} \widetilde{V}_\theta \widetilde{V}_r}{r} \delta_{\theta i} + \frac{\bar{\rho} \widetilde{V}_\theta \widetilde{V}_\theta + p - \bar{\tau}_{\theta \theta}}{r} \delta_{ri} \\ &- \underbrace{\frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\rho} V''_i V''_x}{\partial x} - \frac{1}{rb} \frac{\partial r b \bar{\rho} V''_i V''_r}{\partial r}}_{\text{perturbations}} \\ &- \underbrace{\frac{\bar{\rho} V''_\theta V''_r}{r} \delta_{\theta i} + \frac{\bar{\rho} V''_\theta V''_\theta}{r} \delta_{ri}}_{\text{perturbations}} \\ &+ \underbrace{\frac{f_{bi}}{\text{non-visqueux}} + \frac{f_{vi}}{\text{visqueux}}}_{\text{force des aubes}} \quad (1.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\rho} \widetilde{V}_x \widetilde{H}}{\partial x} + \frac{1}{rb} \frac{\partial r b \bar{\rho} \widetilde{V}_r \widetilde{H}}{\partial r} &= \frac{1}{b} \frac{\partial b (\bar{\tau}_{xj} \widetilde{V}_j - \bar{q}_x)}{\partial x} + \frac{1}{rb} \frac{\partial r b (\bar{\tau}_{rj} \widetilde{V}_j - \bar{q}_r)}{\partial r} \\
&- \underbrace{\frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\rho} \widetilde{V}_x'' \widetilde{H}''}{\partial x} + \frac{1}{rb} \frac{\partial r b \bar{\rho} \widetilde{V}_r'' \widetilde{H}''}{\partial r}}_{\text{perturbations}} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\tau}'_{xj} \widetilde{V}_j''}{\partial x} - \frac{1}{rb} \frac{\partial r b \bar{\tau}'_{rj} \widetilde{V}_j''}{\partial r}}_{\text{perturbations}} \\
&+ \underbrace{\underbrace{e_b}_{\substack{\text{non-visqueux}}} + \underbrace{e_v}_{\substack{\text{visqueux}}}}_{\text{termes sources d'énergie}}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

où δ_{ij} est la fonction delta de Kronecker et où les indices i et j représentent les 3 composantes spatiales (r, θ, x).

Les termes additionnels sont, cette fois, les tensions circonférentielles qui traduisent l'effet moyen des non-uniformités azimutales sur l'écoulement moyen, la force des aubes (parties visqueuse et non-visqueuse) et les termes sources d'énergie (parties visqueuse et non-visqueuse) associés à la roue considérée elle-même. Ainsi, dans le système méridien, toutes les roues aubées de la machine multi-étages apparaissent sous forme d'un effet moyen, elles sont assimilées à des roues dites fantômes et sont donc toutes équivalentes d'un point de vue mathématique. De ce fait, il n'existe qu'un système d'équations méridiennes, le même pour toutes les roues, contrairement au SECM.

Les termes de perturbations présents dans les équations (1.10) et (1.11) peuvent être vus comme très génériques. Même s'ils ont été obtenus ici par l'application d'une moyenne circonférentielle et témoignent donc des effets non-uniformes azimutalement, ils ont cependant la même forme que les termes de perturbations apparus au cours des moyennes précédentes de la cascade d'Adamczyk. Ainsi, on peut assimiler ces termes à l'influence moyenne de la turbulence, des roues mobiles, des roues statiques et de la roue considérée sur un écoulement stationnaire axisymétrique. Il en est de même pour la force des aubes et les termes source d'énergie.

S'il est vu de cette manière, ce système est d'une généralité et d'une rigueur totales. En effet, aucune hypothèse n'a été faite. Ce système ne contient cependant pas suffisamment d'information pour être résolu de manière autonome, il s'agit d'un système ouvert. Le problème de la fermeture consiste à apporter de l'information supplémentaire, de quelle que manière que ce soit, afin d'obtenir une solution. Pour ce faire, il est d'usage de poser des hypothèses simplificatrices. C'est par ces hypothèses, qui peuvent être de natures très différentes, que des modèles différents vont apparaître. Néanmoins, dans tous les cas, ils découlent de la cascade d'Adamczyk, qui constitue le modèle le plus général dans le domaine des turbomachines.

Dans la suite, nous concentrerons notre exposé sur le modèle méridien et l'influence des non-uniformités circonférentielles uniquement. Ainsi, nous omettrons tout effet turbulent³, instationnaire ou apériodique. Cela revient à dire que nous ne considérons que les deux derniers étages de la figure 1.1.

1.2 Physique liée aux tensions circonférentielles

Les tensions circonférentielles résultent, comme nous l'avons décrit, du processus de moyenne d'un système non-linéaire caractérisé par un écoulement non-uniforme azimutalement. La figure 1.3 présente la décomposition de l'écoulement en une partie moyenne et une partie fluctuante dans le plan (x, θ) , soit le plan aube-à-aube. La section suivante est consacrée à la description des mécanismes physiques créateurs de non-uniformité spatiale.

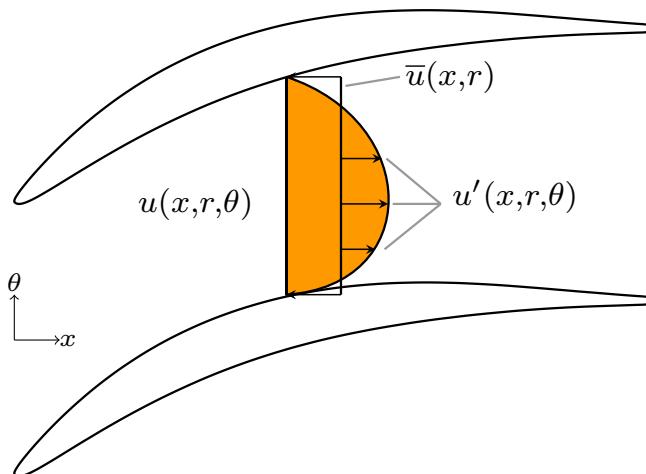


FIGURE 1.3 – Fluctuations spatiales

1.2.1 Mécanismes de création des tensions circonférentielles

Comme la cascade d'Adamczyk l'a montré, tout phénomène ne répondant pas à l'hypothèse d'axisymétrie perturbe l'écoulement moyen au travers des termes additionnels que sont les tensions circonférentielles. Il est possible de scinder les mécanismes de création en deux catégories : bidimensionnels et tridimensionnels.

Dans la première catégorie, Baralon [9] cite certains des points suivants :

- L'épaisseur de l'aube : une aube, même alignée avec l'écoulement et sans cambrure, génère un champ de pression non-uniforme.

3. En réalité, nous introduirons une part de cet effet puisque nous utiliserons un modèle de turbulence. Cependant, il ne s'agit bien que d'une partie de cet effet puisque la turbulence sera déterminée sur base d'un écoulement stationnaire axisymétrique.

- L'angle de calage : l'angle que fait l'aube avec la direction axiale, est, s'il est différent de l'angle de l'écoulement, lui aussi à l'origine de perturbations.
- La cambrure de l'aube : une aube courbe va inévitablement modifier l'écoulement et ce, de manière non-uniforme.
- Les chocs : les chocs apparaissant dans les passages inter-aubes sont généralement normaux à la direction de l'écoulement. Ainsi, pour une configuration d'aube non-alignée avec l'écoulement, un choc apparaîtra comme non-uniforme azimutalement.
- Le sillage : lors de son parcours le long des parois de l'aube, le fluide développe des couches limites visqueuses, à l'origine de perturbations. Celles-ci se propagent ensuite hors de la zone aubée pour former un sillage, une zone de basse énergie.

Ces phénomènes bidimensionnels peuvent être observés dans la partie dite saine d'un écoulement autour d'une aube, c'est-à-dire dans la partie située à mi-distance des parois de la veine (i.e du carter et du moyeu), dans une zone où l'écoulement est principalement situé dans le plan aube-à-aube.

La deuxième catégorie, par contre, apparaît par la présence des parois de la veine, qui génèrent des écoulements plus complexes, que l'on appelle généralement écoulements secondaires. Ces phénomènes locaux sont nommés ainsi parce qu'ils n'agissent pas dans la direction axiale, la direction de l'écoulement principal. Ils ne sont pas souhaités mais apparaissent notamment par la présence de parois. Une autre vision de ces écoulements secondaires est possible. En effet, selon l'approche d'Adamczyk, tout ce qui n'est pas identifiable par une simulation moyenne, ou un écoulement moyen axisymétrique, c'est-à-dire tout ce qui n'appartient pas à l'écoulement principal, est une information d'ordre supérieur. Autrement dit, Adamczyk nous indique que ces écoulements secondaires sont la traduction physique des tensions circonférentielles apparues mathématiquement. Certains de ces phénomènes secondaires sont présentés ci-dessous, faisant clairement apparaître une non-uniformité circonférentielle.

La figure 1.4 décrit les phénomènes secondaires apparaissant classiquement en turbomachines. Parmi ceux-ci on peut citer les tourbillons de coin au moyeu et au carter, l'écoulement existant dans le jeu entre le bout de pale et le carter, le tourbillon en fer à cheval qui remonte la pale côté extrados. Selon Adkins et Smith [5], l'amplitude de ces écoulements secondaires est proportionnelle au taux de chargement de la machine et le taux de pénétration dans l'écoulement principal de ces phénomènes secondaires est proportionnel à l'écart inter-aubes. Or la tendance actuelle est à l'augmentation de ces deux-ci (Hiernaux et al [68]). Il en découle que les composants aérodynamiques futurs présenteront un haut degré de non-uniformité. Il est donc important de s'atteler à leur prise en compte.

Ces écoulements secondaires génèrent des perturbations de vitesse dont la structure est complexe. Leur modélisation en simulation méridienne en est donc rendue difficile, ce qui en fait un sujet de recherche particulièrement riche.

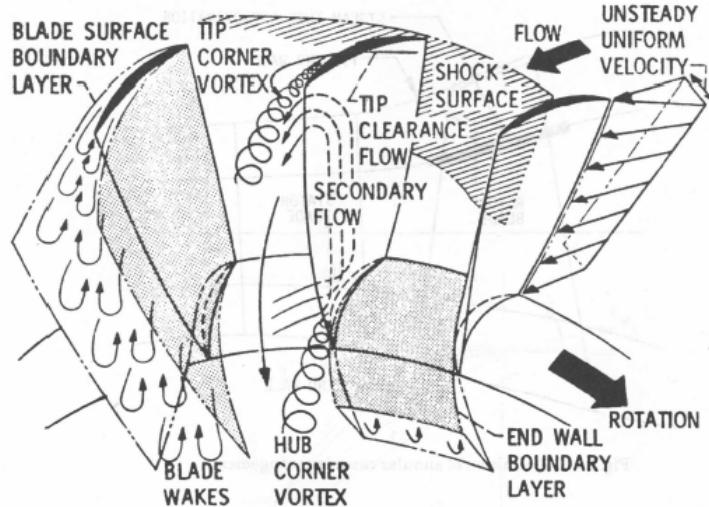


FIGURE 1.4 – Ecoulements secondaires [136]

1.2.2 Fermetures empiriques

Comme nous l'avons vu au travers des équations (1.9) à (1.11), le modèle méridien comporte des termes d'un ordre qui lui est supérieur, autrement dit des termes inconnus. Sous l'hypothèse que ces termes peuvent être connus avec exactitude, le système d'équations présenté décrit le modèle méridien le plus complet, prenant en compte tous les effets secondaires. La détermination de ces inconnues constitue la fermeture du système. Celle-ci est généralement résolue partiellement et de manière empirique.

Ainsi, pour obtenir une solution représentative, il est nécessaire de déterminer la force des aubes (parties visqueuse et non-visqueuse), les termes sources d'énergie (parties visqueuse et non-visqueuse) et les produits de fluctuations. Dans un méridien classique, les tensions circonférentielles telles qu'apparaissant dans les équations (1.10) et (1.11) sont négligées. Elles sont en réalité réintroduites indirectement au moyen de modèles censés reproduire les phénomènes physiques à l'origine de celles-ci.

En méridien classique, la force des aubes est déduite de corrélations. Celles-ci ont été élaborées sur base de résultats d'essais. De tels résultats sont notamment détaillés par Çetin et al [20]. Ces corrélations ont pour but de reproduire les pertes et les déviations⁴ correspondant aux pales étudiées. Ainsi, ils relient ces pertes⁵ aux caractéristiques géométriques des aubes et aux conditions d'écoulement en amont de celles-ci. Sur base de ces informations, la force des aubes (parties visqueuse et non-visqueuse) est déduite par résolution d'une équation supplémentaire (Bardoux [10], Simon [136]). Ces pertes sont d'origine bidimensionnelle. Ainsi, elles ne prennent en compte que l'écoulement en zone dite saine.

4. La déviation est l'écart entre la direction du fluide et l'aube à la sortie du passage inter-aubes.

5. Dans la suite, le terme "perte" inclut aussi bien les pertes visqueuses que les déviations puisque ces dernières constituent un manque à gagner en terme de travail des aubes.

Pour compléter la physique, des corrélations déterminant des pertes dites tridimensionnelles sont incluses afin de déterminer l'influence des écoulements secondaires apparaissant dans les zones proches des parois (Roberts et al [124]-[125]). Cet ensemble de corrélations doit donc déterminer la force des aubes résultant de mécanismes bidimensionnels et tridimensionnels.

Cette force des aubes apparaît au sein des équations sous forme de termes sources appliqués uniquement au droit des pales. Les phénomènes de pertes et de redistribution radiale de celles-ci s'étendent cependant à toute la zone fluide. Ainsi, il est nécessaire de rajouter, au travers de modèles, l'effet de phénomènes négligés. Un effet majeur est le mélange radial. Il consiste en une redistribution des pertes générées principalement dans les régions proches des parois vers la zone saine qu'est la région intermédiaire. La prise en compte de ce phénomène est particulièrement importante dans les machines multi-étages où une redistribution radiale des pertes permet aux derniers étages de ne pas subir d'accumulation de pertes aux parois et donc des gradients trop importants, leur permettant ainsi de fonctionner correctement. Sa formulation est donc essentielle pour une bonne prédiction des performances réelles d'un composant aérodynamique. Plusieurs auteurs se sont concentrés sur sa modélisation, formulant différentes hypothèses, certains le voyant comme un phénomène résultant d'un gradient de pression radial (Adkins et Smith [5]), d'autres comme un phénomène de diffusion analogue à la diffusion turbulente (Gallimore et Cumpsty [39]-[40]).

Le point commun entre tous ces modèles est qu'ils reposent sur une analyse empirique de phénomènes physiques observés sur certaines configurations de machines. Ils résultent tous d'hypothèses et manquent tous de généralité. Ce que nous proposons dans la suite est de suivre l'approche d'Adamczyk en introduisant la force des aubes et les tensions circonférentielles en tant qu'êtres mathématiques traduisant fidèlement les phénomènes physiques.

1.3 Le méridien d'ordre élevé

Dans cette section, nous allons considérer un méridien d'ordre élevé, c'est-à-dire ne comportant plus de fermeture empirique, comme dans le méridien classique, mais bien une fermeture répondant au formalisme d'Adamczyk, en considérant explicitement les tensions circonférentielles.

Au cours des dernières décennies, plusieurs auteurs ont investigué l'existence de termes traduisant les effets tridimensionnels moyens. Un des premiers auteurs à en parler est Smith [139] lors de la formulation de l'équation d'équilibre radial en turbomachines. Il les traite de manière approximative en supposant une évolution linéaire des grandeurs de l'écoulement dans la direction circonférentielle. Il finit par conclure qu'elles sont d'un ordre d'importance faible, en tout cas en fonctionnement nominal de la machine.

Sehra et Kerrebrock [131] analysent l'importance des tensions circonférentielles, qu'ils appellent tensions apparentes, sur la prédiction de l'écoulement moyen. Ils utilisent un code de calcul bidimensionnel résolvant l'écoulement dans le plan aube-à-aube pour déterminer les non-uniformités azimutales qu'ils utilisent ensuite dans un code méridien. Ils arrivent à la conclusion que la prise en compte de ces termes est importante pour prédire correctement les profils radiaux de l'écoulement, notamment de l'entropie.

Jennions [74] montre que la prise en compte des non-uniformités circonférentielles est nécessaire pour assurer la consistance entre un calcul aube-à-aube et un méridien, pour la qualité de prédiction de son code et pour la capture des gradients radiaux de pression. Par une comparaison des amplitudes des différents termes de l'équilibre radial, il montre aussi que les perturbations peuvent être du même ordre de grandeur que les autres termes, à l'exception de la force des aubes. Il situe l'effet des perturbations principalement dans les régions proches des parois.

Perrin [116] montre que les tensions circonférentielles sont même plus importantes que les tensions visqueuses, excepté aux parois où elles sont du même ordre. Il montre aussi que les tensions circonférentielles sont très importantes dans l'équation radiale et qu'elles sont à l'origine du gradient de pression radial, et donc du mélange dans cette direction.

Baralon [9], quant à lui, a examiné les différentes composantes du tenseur circonférentiel et les a rapprochées des phénomènes secondaires apparaissant aux parois, mentionnés précédemment.

Récemment, Simon [136] a extrait les tensions circonférentielles sur base d'une simulation tridimensionnelle pour ensuite les inclure dans une simulation méridienne. Par là, il a montré que l'effet moyen des écoulements secondaires comme le décrochage de coin (voir figure 1.4) ou encore le mélange radial étaient très bien reproduits par ces termes.

Dans la suite, nous allons reprendre cette dernière philosophie. Nous allons présenter les résultats d'une simulation⁶ tridimensionnelle d'un étage de compresseur. A partir de ce résultat, les tensions circonférentielles seront extraites. Elles seront ensuite introduites dans un code de calcul résolvant les équations (1.9) à (1.11).

1.3.1 Présentation du cas test

Le cas test est une simulation recourant à la technique du plan de mélange. Celle-ci consiste à ne transférer d'une roue à l'autre que l'écoulement moyenné selon la direction azimutale. Cette moyenne est effectuée à l'interface des deux roues, soit le plan de mélange, négligeant donc toute interaction instationnaire entre roues⁷. La comparaison entre la solu-

6. Pour cette simulation, nous utilisons un code de calcul commercial. La simulation méridienne sera quant à elle effectuée par notre code de calcul.

7. Selon le formalisme d'Adamczyk, cela signifie que les tensions déterministes sont omises. En faisant cela, la comparaison de l'écoulement dans le plan aube-à-aube avec sa moyenne donnera les tensions

tion 3D et sa moyenne circonférentielle fournira dès lors les seules tensions circonférentielles associées à chacune des roues.

Les performances globales de ce compresseur sont reprises au tableau 1.1. Y figurent également les performances correspondant à un point de fonctionnement proche du point de rendement maximum, à 90% du débit nominal, caractérisé par un degré de non-uniformité circonférentiel plus important.

	Conditions nominales		Cas test
	Expérimental	CFD 3D	CFD 3D
Débit [kg/s]	11	11	9,9
Rapport de pressions	1,14	1,14	1,16
Rendement	0,92	0,909	0,921

TABLE 1.1 – Performances globales du compresseur CME2

Une vue méridienne du domaine de calcul est représentée à la figure 1.5. Le jeu de bout de pale rotorique équivaut à 0,5 % de la hauteur de veine.

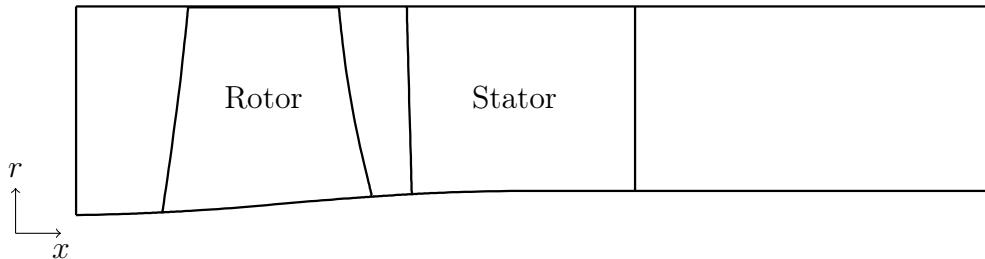


FIGURE 1.5 – Vue méridienne du domaine de calcul

Le maillage dans le plan aube-à-aube à mi-hauteur de veine est représenté à la figure 1.6. Il est composé d'un million de points par roue. Un maillage de peau en O est utilisé autour des aubes pour un meilleur contrôle du stretching dans la direction normale à la paroi. La taille de la première cellule de peau est telle que sa grandeur adimensionnelle y^+ soit inférieure à l'unité pour capturer de manière précise la couche limite visqueuse.

Le code de simulation tridimensionnelle travaille sur maillage structuré. Pour notre application, les équations “Reynolds-Averaged Navier-Stokes” (RANS) stationnaires sont considérées. La méthode numérique est basée sur une intégration temporelle explicite et sur une approche volumes finis de type “cell-centered”.

Le modèle de turbulence de Baldwin-Lomax [8] a été retenu pour cette simulation tridimensionnelle pour des raisons de compatibilité avec notre code méridien puisque ce modèle y est aussi implémenté.

circumférentielles associées à chaque roue uniquement.

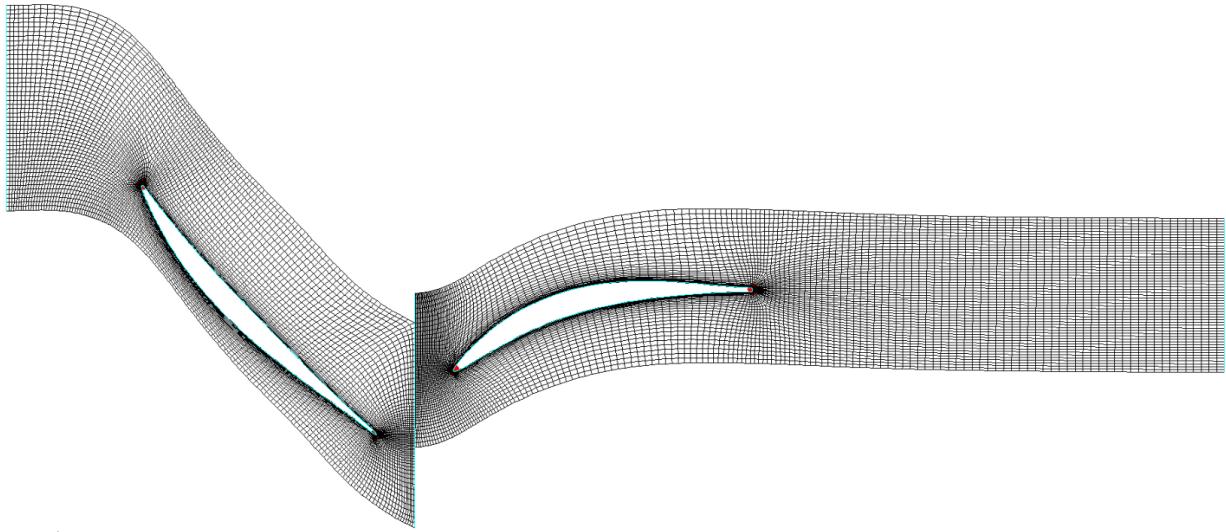


FIGURE 1.6 – Maillage dans le plan aube-à-aube à mi-hauteur de veine

1.3.2 L’écoulement moyen

Nous allons, dans ce qui suit, présenter l’évolution moyenne de l’écoulement le long de la veine, ainsi que le niveau de non-uniformité. Les moyennes circonférentielles effectuées sont conformes aux expressions (1.6) et (1.8) présentées antérieurement.

En pratique, un maillage méridien est généré avec une densité plus importante aux bords d’attaque et de fuite des aubes pour capturer les évolutions rapides de l’écoulement dans ces régions. Le maillage est aussi densifié aux parois de la veine. La figure 1.7 montre le maillage résultant.

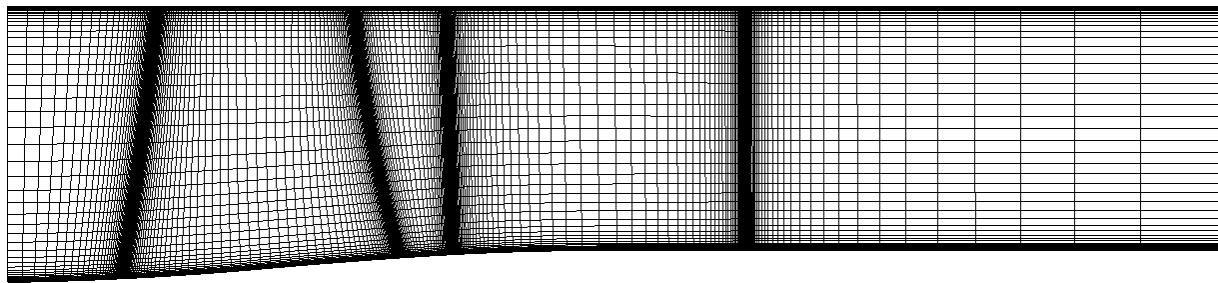


FIGURE 1.7 – Maillage méridien

Des arcs de cercle sont ensuite générés, pour chaque noeud, par une extrusion azimutale. Les grandeurs de l’écoulement correspondant à la simulation tridimensionnelle sont ensuite interpolées trilinéairement sur ces noeuds. La moyenne circonférentielle est alors effectuée sur ces arcs par la règle du trapèze, les perturbations étant ensuite déduites et éventuellement moyennées.

Attachons-nous à présent à l’analyse du degré de non-uniformité au sein de cet écoulement. Pour ce faire, il est nécessaire de définir un indicateur de cette non-uniformité. On a

recours, pour cela, à l'énergie cinétique moyenne des perturbations azimutales, définie en (1.12), qui contient la trace du tenseur circonférentiel.

$$\bar{k} = \frac{\overline{\rho V_r'' V_r''} + \overline{\rho V_\theta'' V_\theta''} + \overline{\rho V_x'' V_x''}}{2\bar{\rho}} \quad (1.12)$$

L'évolution de cette énergie cinétique est présentée à la figure 1.8 en pourcentage de l'énergie cinétique totale locale de l'écoulement.

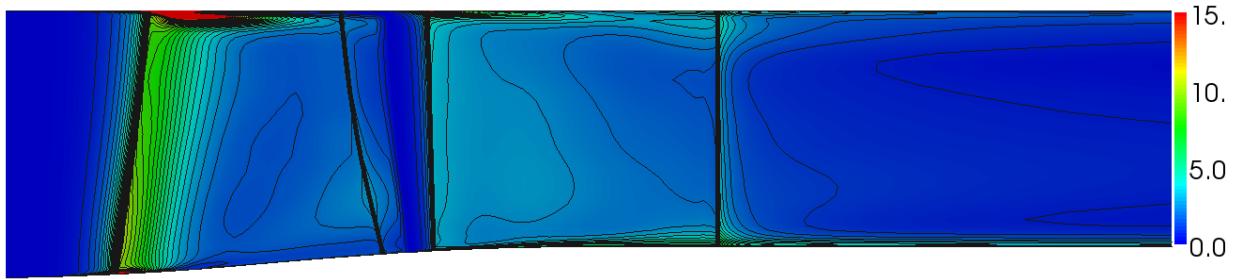


FIGURE 1.8 – Champ d'énergie cinétique moyenne des perturbations \bar{k} en pourcentage de l'énergie cinétique totale locale de l'écoulement

Considérons d'abord l'évolution de l'énergie cinétique à mi-hauteur de veine, où les non-uniformités sont principalement d'origine bidimensionnelle. Cette évolution est reprise à la figure 1.9 (gauche).

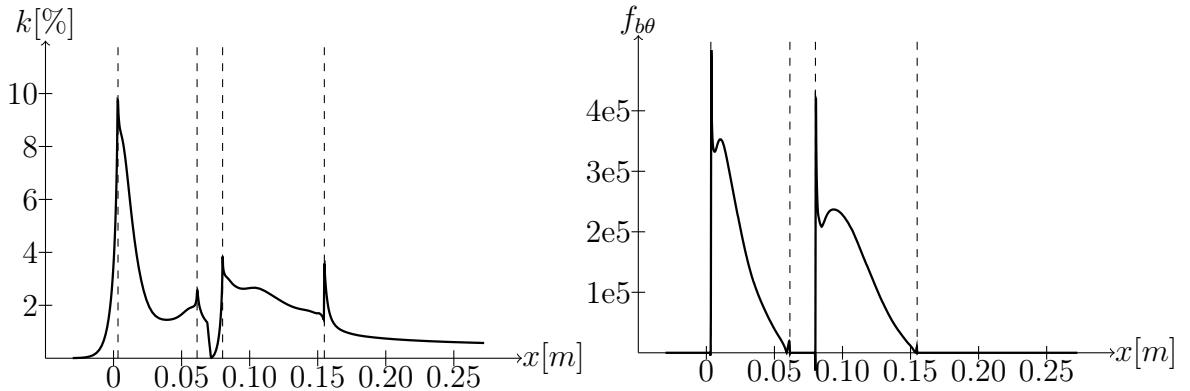


FIGURE 1.9 – Evolutions axiales à mi-hauteur de veine de l'énergie cinétique moyenne des perturbations (gauche) et de la composante tangentielle non-visqueuse de la force (droite)

Premièrement, un pic d'énergie cinétique est localisé au bord d'attaque du rotor (repéré par la première ligne discontinue sur la figure). Cette augmentation d'énergie cinétique, qui débute avant le bord d'attaque, est un effet purement potentiel (i.e. non-visqueux) dû au contournement de l'aube.

Deuxièmement, la zone située après le bord d'attaque est encore riche en non-uniformités. Celles-ci proviennent du chargement de l'aube, principalement situé dans cette région

comme en témoigne la figure 1.9 (droite) qui reprend l'évolution de la composante tangentielle non-visqueuse de la force ($f_{b\theta}$).

Les perturbations sur la seconde partie de l'aube sont principalement la conséquence de phénomènes visqueux. En effet, le chargement de l'aube est moindre dans cette zone et les couches limites se développent sur les parois de l'aube. Les perturbations augmentent ensuite jusqu'au bord de fuite (repéré par la deuxième ligne discontinue sur la figure) en même temps que l'épaisseur des couches limites.

Au bord de fuite, un second pic est observé. Il est dû à la réorganisation locale des écoulements provenant des deux côtés de l'aube. Cette réorganisation de l'écoulement est suivie par une dissipation visqueuse et un sillage.

Notons également que la position du plan de mélange est aisément identifiable par l'absence de non-uniformité circonférentielle.

Intéressons-nous à présent aux régions pariétales, où se situent les plus hauts niveaux de non-uniformité. Les perturbations les plus importantes se rencontrent dans le jeu de bout de pale au niveau de la roue rotorique, le rapport d'énergie cinétique y excédant les 15 %. Ceci est à mettre en relation avec le tourbillon de bout de pale qui se développe à proximité du bord d'attaque. Ceci est illustré par la figure 1.10 qui reprend le module de la vorticité en deux plans aube-à-aube, l'un à 2,5 % de la hauteur de veine, l'autre à 97,5 %.

Ce tourbillon de bout de pale impacte l'intrados de l'aube suivante puis se diffuse. Ce phénomène, combiné avec la couche limite au carter, génère l'entropie illustrée à la figure 1.10 (milieu). La région du moyeu implique moins de pertes suite à l'épaississement progressif de la couche limite.

Les non-uniformités dans les zones pariétales du stator sont de moindre importance. Elles sont la simple conséquence de la couche limite, excepté près du moyeu, dans la région du bord de fuite, où un décrochage de coin semble naître, comme la figure 1.10 (bas) le montre. Notons que la modélisation du moyeu est simplifiée puisqu'aucun jeu n'y est considéré.

A ce point, nous venons d'établir le lien entre les phénomènes physiques à l'origine de non-uniformités et les termes mathématiques que sont les tensions circonférentielles. Dans ce qui suit, nous allons montrer qu'en impliquant ces termes mathématiques additionnels dans un code de calcul méridien, ses capacités de reproduction de la physique sont clairement améliorées.

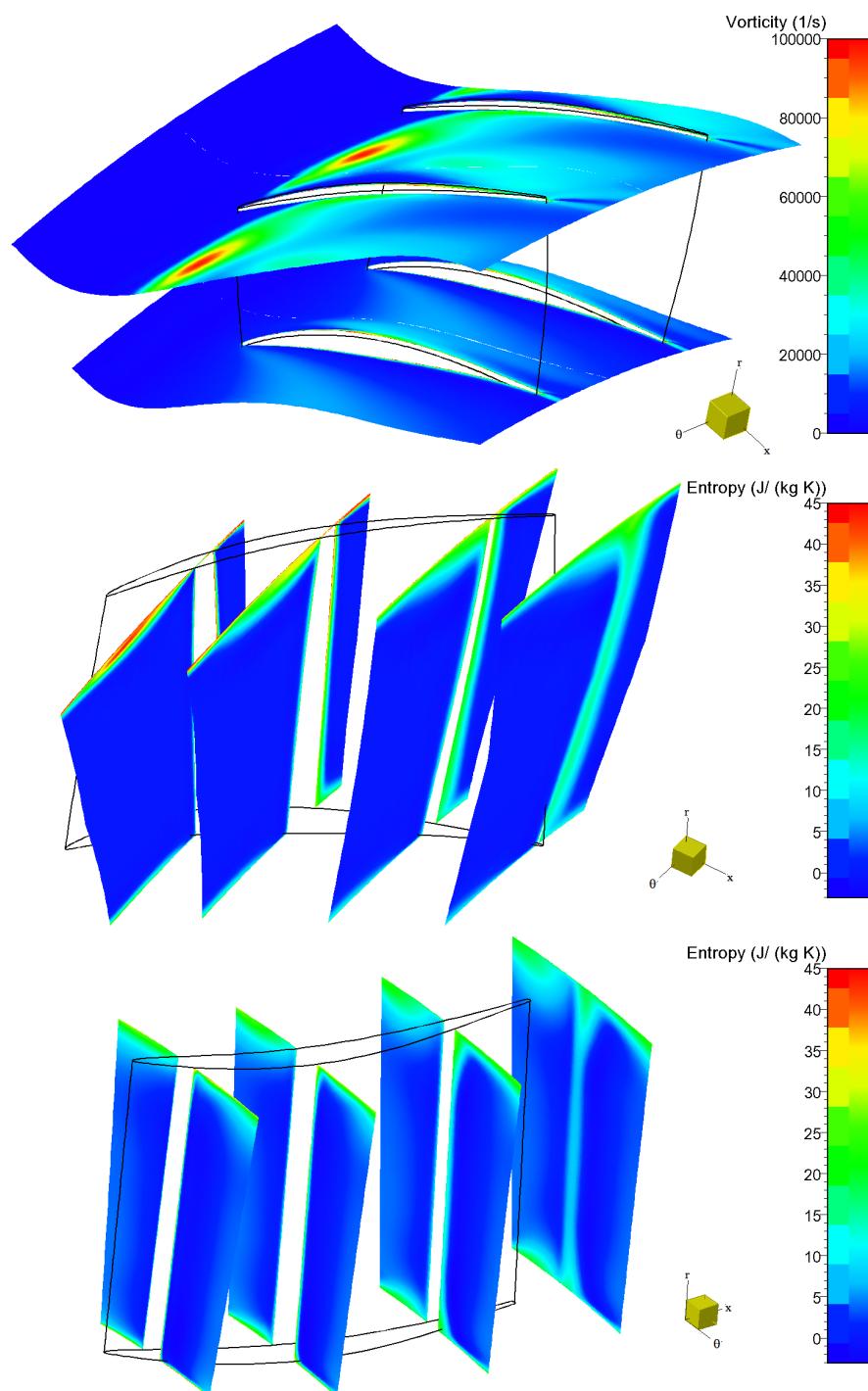


FIGURE 1.10 – Module de la vorticité dans les régions pariétales du rotor (haut), entropie dans des plans axiaux de la zone rotorique (milieu) et entropie dans des plans axiaux de la zone statorique (bas).

1.3.3 Simulation méridienne

Dans les codes méridiens classiques, les termes de perturbation apparaissant aux équations (1.10) et (1.11) sont négligés, leur effet étant en partie pris en compte par les corrélations et modèles physiques. Nous allons montrer ici quelle est leur influence. Pour ces simulations, aucune corrélation de perte ou de déviation ne sera utilisée, puisqu'elles comportent une certaine part, inconnue, des tensions circonférentielles résultant de la moyenne azimutale réalisée sur les résultats expérimentaux, dont les corrélations sont tirées. Ceci implique que tous les termes additionnels des équations (1.10) et (1.11) doivent être extraits de la simulation réalisée, c'est-à-dire la force des aubes, les termes sources d'énergie et les tensions circonférentielles. En pratique, ceci signifie que la pression et les tensions visqueuses agissant sur l'aube sont extraites en plus des non-uniformités circonférentielles. La formulation de la composante azimutale de la force des aubes est décrite par l'expression ci-après. Les expressions des autres composantes sont reprises à l'annexe A.

$$f_{b\theta} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[-\frac{p}{r} \right]_p^s, \quad f_{v\theta} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[-\tau_{x\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \tau_{r\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right]_p^s$$

La résolution numérique est basée sur une méthode volumes-finis à maille centrée à laquelle est associée une intégration temporelle explicite. Le modèle de turbulence utilisé est celui de Baldwin-Lomax [8]. Les conditions limites à l'entrée et le débit massique sont imposées aux valeurs reprises au tableau 1.1 vu précédemment.

Avant d'exposer les résultats, quelques mots sont nécessaires pour décrire le modèle de jeu de bout de pale que nous avons implémenté dans le code méridien. Afin d'être compatible avec un solveur 3D et de reproduire la physique assez complexe de l'écoulement au sein du jeu, une fonctionnalité doit être ajoutée au code.

Considérer une simple zone libre d'aube est inapproprié. Ceci est dû au niveau important d'interaction entre la couche limite et la structure fortement tridimensionnelle de l'écoulement dans cette région. Ce besoin en modélisation ne va pas à l'encontre de notre volonté de réduire l'empirisme au sein du code. Le modèle de jeu est générique. Ce n'est pas non plus le signe d'une incapacité des tensions circonférentielles à reproduire des effets tridimensionnels, comme les résultats en attestent. La source de ce besoin d'un modèle de jeu est plutôt à trouver dans la structure complexe de tensions de cisaillement dans cette région. En réalité, les seuls effets visqueux pris en compte dans le méridien proviennent des parois des aubes au travers de la composante visqueuse de la force f_v et des couches limites au moyeu et au carter, ce qui est une hypothèse communément admise en turbomachine. Le modèle de jeu de bout de pale est basé sur les considérations suivantes.

Le champ de pression dans le jeu n'est pas très différent de celui rencontré en bout de pale, comme cela a été expérimenté par Dring [36] sur un compresseur basse vitesse à 2 étages. Il est aussi connu que la pression varie peu à travers la couche limite visqueuse. Pour ces raisons, il devrait exister un mécanisme capable de maintenir un champ de pression

réaliste et de reproduire le transport de l'écoulement de bout de pale dans sa direction de rotation. La conclusion de ces observations est qu'une force tangentiale doit exister dans le jeu et peut être basée sur une extrapolation constante de la pression du bout de pale vers le carter.

La figure 1.11 illustre les évolutions axiales à mi-hauteur de veine du nombre de Mach absolu (1.13) et de l'entropie (1.14).

$$\tilde{M} = \frac{\tilde{V}}{\sqrt{\gamma R \tilde{T}}} \quad (1.13)$$

$$\tilde{s} = C_p \ln(\tilde{T}) - R \ln(\bar{P}) \quad (1.14)$$

Ces évolutions proviennent de quatre simulations :

- 1) tridimensionnelle de référence moyennée par la masse volumique,
- 2) mérienne augmentée des termes non-visqueux de force des aubes et d'énergie (f_b, e_b),
- 3) mérienne augmentée des termes visqueux et non-visqueux de force des aubes et d'énergie (f_b, f_v, e_b, e_v),
- 4) mérienne incluant tous les termes additionnels, y compris les tensions circonférentielles ($f_b, f_v, e_b, e_v, \rho \bar{V}_i'' \bar{V}_j'', \rho \bar{V}_j'' \bar{H}''$).

La courbe correspondant à la moyenne de la simulation 3D (courbe noire) consiste en la prédiction que fournirait une simulation mérienne exacte. En effet, puisque cette courbe provient d'une simulation d'un ordre supérieur, elle inclut naturellement les phénomènes associés. Nous la considérerons comme notre solution de référence.

Quelques remarques peuvent être faites concernant cette figure. Les termes non-visqueux sont responsables de l'évolution générale de l'écoulement, comme nous pouvions nous y attendre puisqu'ils correspondent à l'effet principal des aubes. L'ajout des termes visqueux déplace la courbe vers une augmentation de pertes, sans modification de forme. Pour la plupart des grandeurs de l'écoulement analysées, la dernière courbe, correspondant à l'ajout des tensions circonférentielles, permet de reproduire assez bien l'allure de la courbe de référence, en modifiant localement l'écoulement. L'évolution du nombre de Mach est représentative de cette situation. L'amélioration de la qualité de description due à ces derniers termes semble même être plus importante que celle apportée par les termes visqueux. Plus particulièrement, l'ajout des tensions circonférentielles permet de reproduire l'effet potentiel en amont des aubes, ainsi que la réorganisation de l'écoulement en aval du bord de fuite.

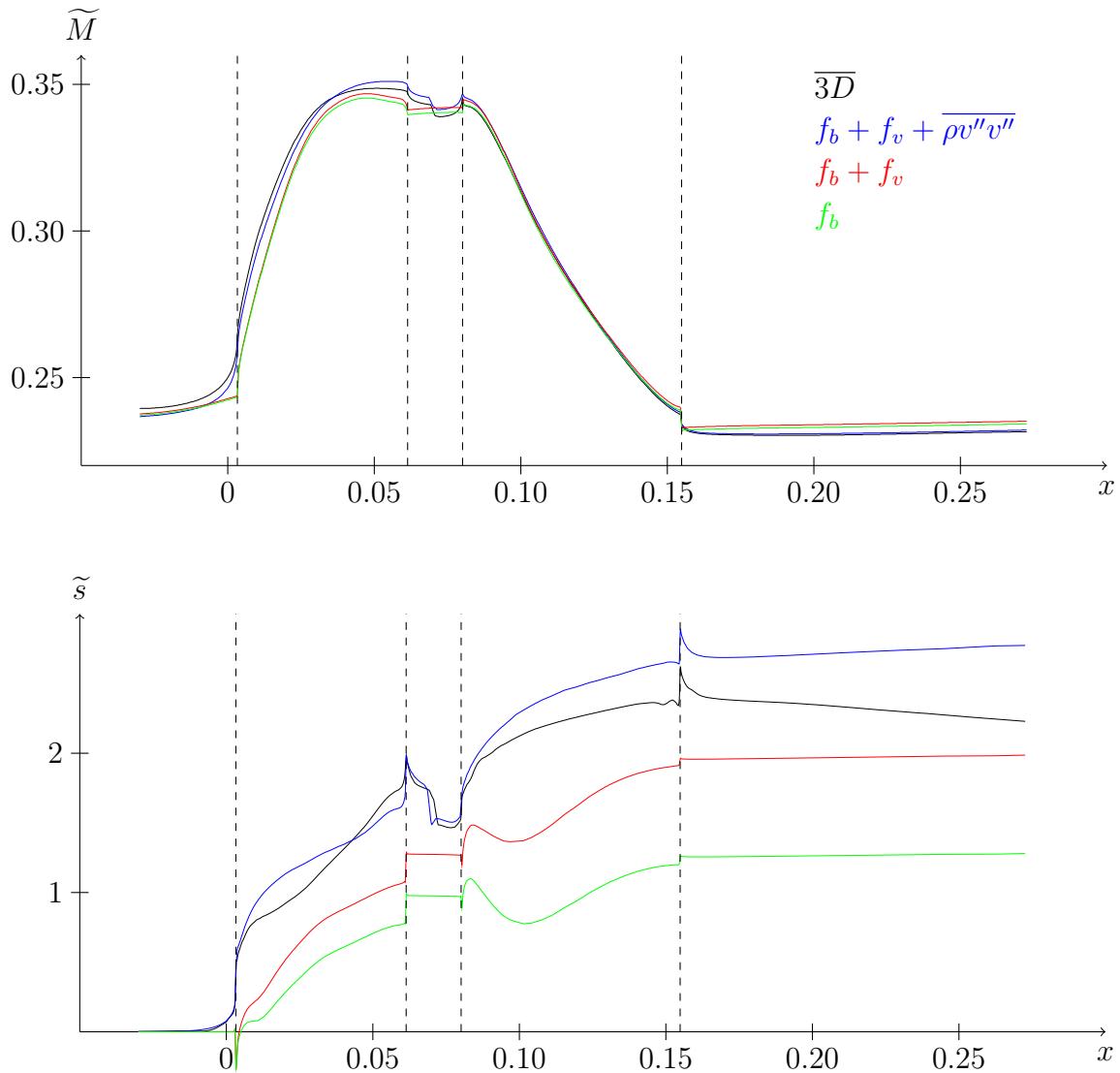


FIGURE 1.11 – Evolutions axiales à mi-hauteur de veine du nombre de Mach absolu (haut) et de l'entropie (bas) dans quatre cas : 3D moyené par la masse volumique (noir), $f_b + e_b$ (bleu), $f_b + f_v + e_b + e_v$ (rouge) et $f_b + f_v + e_b + e_v + \overline{\rho v''_i v''_j} + \overline{\rho v''_j h''}$ (vert).

Concernant l'évolution de l'entropie, il est notable que la simulation d'ordre élevé n'apprécie pas aussi bien la courbe de référence, même si la forme de la courbe est très similaire. Tout se passe comme si un phénomène d'amplitude progressivement croissante le long du canal inter-aubes était omis. Selon Simon [136], ce genre de comportement pourrait être expliqué par la non prise en compte des tensions visqueuses dans le plan aube-à-aube. Une autre composante de l'explication est probablement une perte de précision lors de l'interpolation effectuée pour extraire les informations de la simulation tridimensionnelle.

Au niveau de l'entropie toujours, il apparaît un comportement étonnant puisque celle-ci diminue à certains endroits, en aval des aubes, violant apparemment le second principe de la thermodynamique, comme l'a remarqué Bardoux [10] précédemment. Simon [136] a ensuite expliqué mathématiquement l'origine de ce phénomène, lié au type de moyenne.

En effet, pour analyser les pertes de charge et les différentes grandeurs en turbomachines, il est nécessaire de moyennner par le débit massique, non par la masse volumique. Ainsi, une moyenne physiquement acceptable serait définie par (1.15).

$$\tilde{\phi} = \frac{\int_p^s \rho V_n \phi \, d\theta}{\int_p^s \rho V_n \, d\theta} \quad (1.15)$$

où V_n est la norme du vecteur vitesse normal au plan de moyenne azimutale.

Dans le cas contraire, l'entropie augmente et diminue en fonction de l'évolution des non-uniformités circonférentielles. Ainsi, à la figure 1.11, l'entropie croît jusqu'au bord de fuite, avec les non-uniformités (voir figure 1.8) pour décroître ensuite. Ceci explique l'appellation de tensions pour ces termes additionnels (Sehra [131] les appelait tensions apparentes). En effet, tout comme les tensions visqueuses font augmenter le niveau d'entropie, ces tensions apparentes, les tensions circonférentielles, font de même. La différence majeure est que cette augmentation d'entropie est fictive et réversible. Elle traduit en fait une perte d'énergie de l'écoulement moyen vers l'écoulement d'ordre élevé (i.e. l'écoulement non-uniforme). Lorsque la non-uniformité disparaît, cette énergie est rendue à l'écoulement moyen, diminuant ainsi le niveau d'entropie.

Cependant, cette formulation d'entropie apparente est la seule disponible dans le système d'équation du canal moyen d'Adamczyk. Hirsch [69] propose, pour résoudre ce problème, d'utiliser des coefficients de blocage fictif en plus du coefficient de blocage matériel représentant les aubes afin de résoudre un écoulement moyen par le débit et non plus par la masse volumique. Bardoux [10] quant à lui, dérive l'expression de passage des grandeurs moyennées par la masse volumique à celles moyennées par le débit, laquelle implique la connaissance d'une corrélation supplémentaire par grandeur.

Une autre critique, soulignée également par Bardoux [10], est la différence de comportement entre la moyenne de l'entropie calculée sur base de grandeurs non-moyennées et la reconstruction de l'entropie sur base de grandeurs moyennées. Cette différence provient de la non-linéarité de l'expression de l'entropie (1.16). Ainsi, la moyenne du logarithme d'une variable quelconque est différente du logarithme de la moyenne de cette variable.

$$\tilde{s} = C_p \widetilde{\ln(T)} - R \widetilde{\ln(P)} \neq C_p \ln(\tilde{T}) - R \ln(\bar{P}) \quad (1.16)$$

Il en est de même pour toutes les grandeurs nécessitant l'utilisation d'une expression non-linéaire pour leur reconstruction, comme le nombre de Mach, la pression totale et la température totale. Néanmoins, comme les seules informations fournies par la résolution du système méridien sont des informations moyennes, il faut se contenter de cette formulation.

Intéressons-nous maintenant aux champs méridiens complets. La figure 1.12 reprend le champ d'entropie pour les quatre situations de calculs énoncées précédemment.

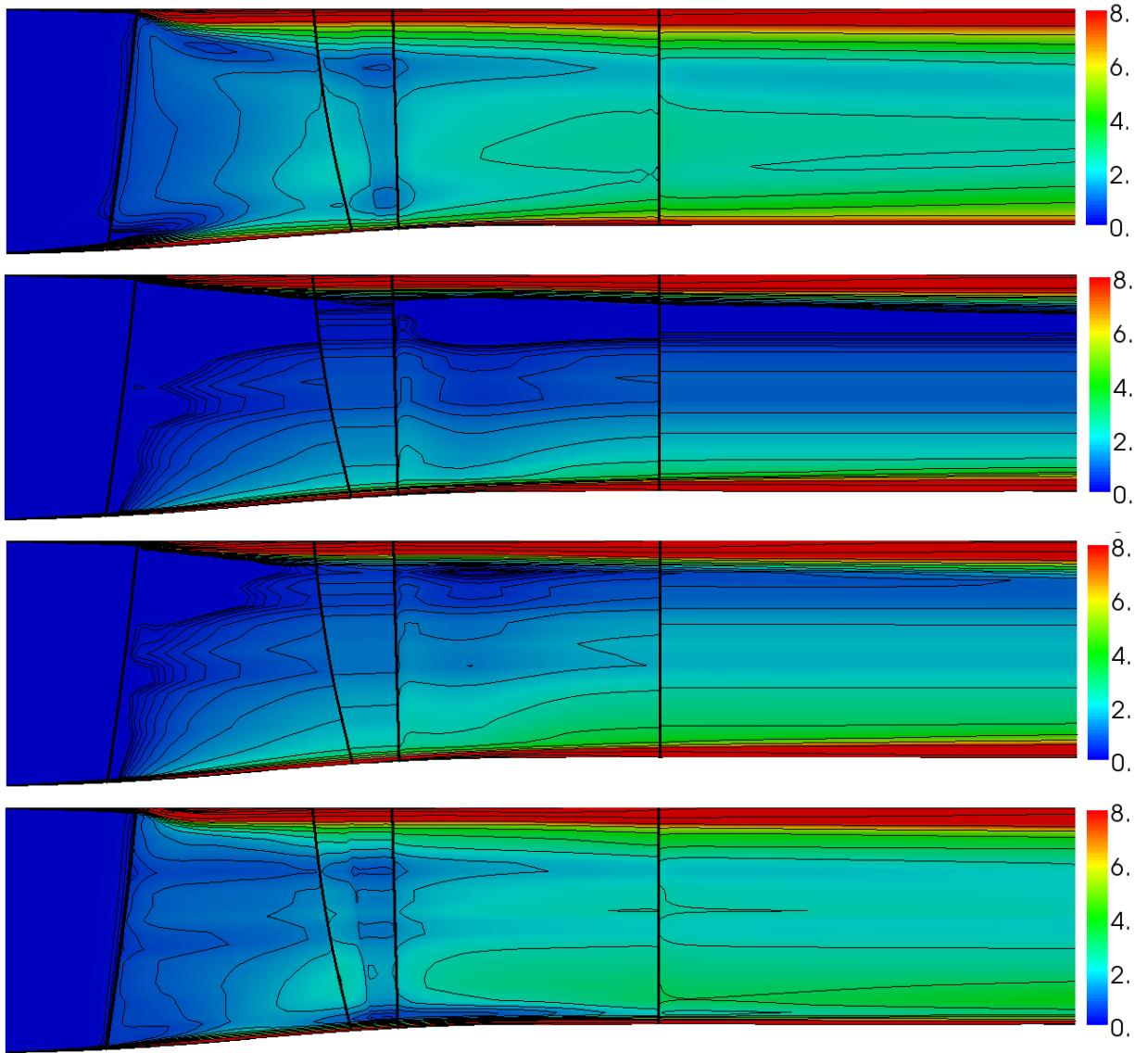


FIGURE 1.12 – Champ d'entropie dans quatre cas du haut vers le bas : (1) 3D moyenné, (2) f_b , (3) f_b+f_v and (4) $f_b+f_v+\rho v''v''$.

Nous pouvons tirer, à l'échelle globale, les mêmes conclusions que pour l'étude à mi-hauteur d'aube. Les termes non-visqueux dictent la structure générale de l'écoulement. Les termes visqueux augmentent les niveaux de pertes sans modification de l'allure générale. L'addition des tensions circonférentielles permet d'obtenir un bon accord avec la solution 3D moyennée, dans l'écoulement principal ainsi que dans les régions pariétales.

Examinons plus avant ces dernières. Nous observons que les tensions circonférentielles mènent à une très bonne reproduction de la couche limite au carter, résultant des interactions entre le tourbillon de bout de pale et l'écoulement pariétal. Les tensions circonférentielles modifient l'écoulement au bord d'attaque, épaisissant rapidement la couche limite,

et mènent à une représentation fidèle de l'écoulement, au niveau de la génération d'entropie comme pour la distribution de Mach.

La couche limite au moyeu est également assez bien représentée. Si nous regardons la distribution du nombre de Mach à la figure 1.13, nous observons que les tensions semblent revitaliser la couche limite avec pour conséquence son amincissement.

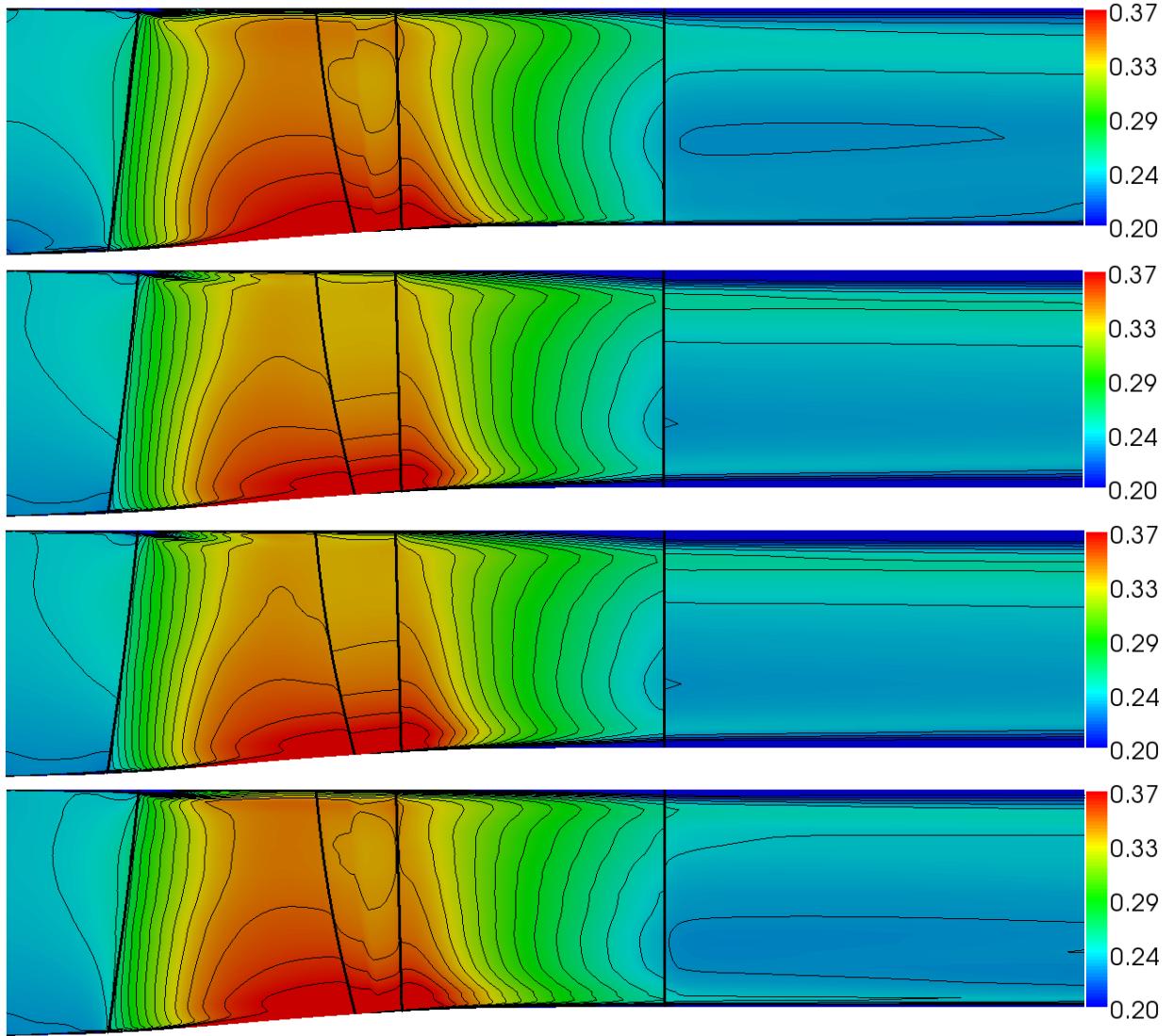


FIGURE 1.13 – Champ de nombre de Mach dans quatre cas du haut vers le bas : (1) 3D moyené, (2) f_b , (3) f_b+f_v and (4) $f_b+f_v+\rho v''v''$.

Pour conclure cette section, nous avons vu que l'inclusion des termes additionnels en tant que tels fournit une qualité de prédition de l'écoulement analogue à une simulation d'ordre supérieur, traduisant des phénomènes physiques importants. Les tensions circonférentielles permettent de reproduire l'influence moyenne des écoulements secondaires comme le décrochage de coin ou encore le mélange radial, expliqués pr  c  d  m  nt. Ainsi, ceci justifie l'intérêt porté à ces informations d'ordre élevé en simulation méridienne, d'autant plus que, comme mentionné pr  c  d  m  nt, leur importance a tendance à augmenter dans les

conceptions modernes.

Le cas test utilisé ayant démontré sa valeur quant à la prise en compte des effets non-axisymétriques, nous allons le réutiliser dans le chapitre qui suit. Il va nous permettre d'aller plus avant dans la compréhension des fluctuations spatiales, en évaluant leur caractérisation harmonique.

Chapitre 2

Modélisation harmonique des tensions circonférentielles

Sommaire

2.1	Analyse spectrale locale	30
2.2	Reconstruction harmonique	33
2.3	Fermeture harmonique du méridien	38

Le problème de la prise en compte d’effets d’un ordre supérieur ne se pose pas uniquement en modélisation méridienne. En effet, il est également présent en simulation instationnaire, au travers de la turbulence, et en simulation stationnaire tridimensionnelle par les tensions déterministes, relatives aux interactions instationnaires entre roues aubées.

Le premier à proposer une solution à ce dernier problème est Adamczyk [2]. Sa méthode consiste à calculer chaque roue séparément et à les rendre compatibles en imposant que les écoulements méridiens vus par chacune des roues soient égaux. En effet, il n’existe qu’un seul écoulement méridien au sein d’une machine, contrairement au SECM qui est caractéristique d’une roue particulière.

Rhie et al [123] proposent ensuite d’utiliser des maillages recouvrant pour transférer les tensions déterministes d’une roue à l’autre. Ainsi, pour considérer les interactions de sillage d’une roue amont sur une roue aval, il étend le maillage de cette dernière, calculée explicitement, à la roue amont pour y obtenir l’information cherchée.

Perrin [117] puis Charbonnier [21]-[22] ont essayé de développer un modèle de transport, analogue à ce qui se fait en turbulence, pour calculer les tensions déterministes. Il est apparu cependant que les mécanismes physiques à l’origine du champ fluctuant et la nature même de celui-ci (réversibilité, faible création de tensions par le champ moyen), marquent des différences importantes par rapport au cas turbulent.

Par la suite, une catégorie différente de modélisations a émergé, par He [61] d'abord puis Hall [60]. Ces méthodes consistent à résoudre, dans le domaine fréquentiel, un système aux perturbations temporelles dans le cas du premier auteur mentionné, le système instationnaire complet dans le cas du second. Ces méthodes ont montré une précision et une efficacité en temps de calcul remarquables. Non seulement elles permettent d'obtenir les tensions déterministes, mais elles vont jusqu'à reproduire une approximation de l'écoulement instationnaire lui-même. Ces techniques sont classées sous la dénomination de méthodes harmoniques car elles ont recours à une décomposition de l'écoulement en série de Fourier. Nous discuterons ces méthodes plus amplement dans les chapitres suivants. Toutefois, l'hypothèse commune à toutes ces méthodes est que l'écoulement est de nature harmonique, autrement dit, qu'il peut être reconstruit efficacement par une série de Fourier tronquée.

Ainsi, pour espérer appliquer une de ces méthodes, qui ont fait leurs preuves, au cas méridien, il est impératif de vérifier la validité de cette hypothèse. Pour ce faire, nous allons analyser, dans la suite, la possibilité de reconstruire efficacement l'évolution azimutale de l'écoulement et, en conséquence, les tensions circonférentielles. Nous investiguerons également la capacité de tensions reconstruites, et donc approchées, à reproduire les effets observés au chapitre précédent au sein d'une simulation méridienne. Pour tout ce qui suit, nous utilisons le cas test décrit précédemment.

2.1 Analyse spectrale locale

Lors d'une première étape, nous étudions la possibilité de reconstruire, par une série de Fourier tronquée, l'évolution circonférentielle de l'écoulement en certaines sections caractéristiques de la roue statorique, à mi-hauteur de veine. Celles-ci sont présentées à la figure 2.1, sur une vue dans le plan aube-à-aube (coordonnées (x, θ)). Ces positions de coupe ont été choisies dans des régions de haut degré de non-uniformité : le bord d'attaque, le bord de fuite et le sillage.

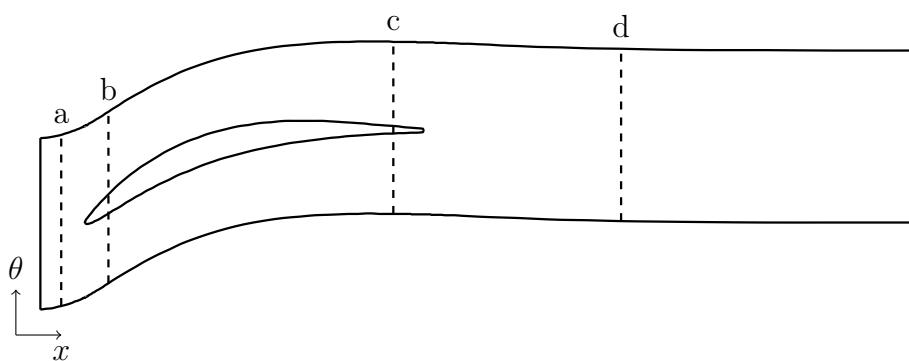


FIGURE 2.1 – Sections caractéristiques

Avant d'analyser le spectre fréquentiel en ces sections, nous présentons à la figure 2.2 l'écoulement à mi-hauteur d'aube, issu de la simulation 3D, en termes de nombre de Mach et d'entropie.

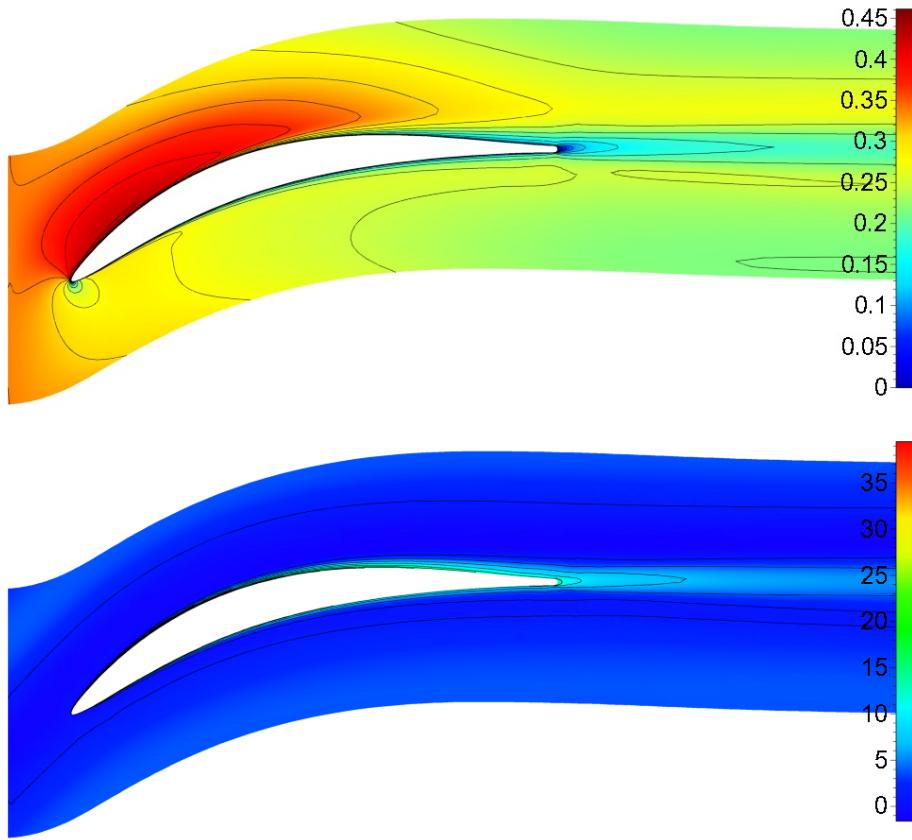


FIGURE 2.2 – Champs de Mach absolu (haut) et d'entropie (bas) à mi-hauteur de veine dans le domaine statorique

Il s'agit d'un écoulement classique illustrant nos propos du chapitre précédent. La figure confirme que l'aube est chargée principalement sur sa partie antérieure alors que la partie postérieure est concernée par le développement des couches limites.

Ces différentes zones sont caractérisées par des richesses spectrales assez variables comme nous allons l'illustrer. L'expression (2.1) rappelle le développement en série de Fourier d'une fonction quelconque f dépendant de la variable azimutale θ . Les coefficients K_n sont les coefficients de Fourier et les paramètres ω_n les fréquences associées, \bar{f} désignant la valeur moyenne de la fonction.

$$f(\theta) = \bar{f} + \sum_{n=1}^{\infty} [K_n e^{i\omega_n \theta} + K_{-n} e^{-i\omega_n \theta}] \quad (2.1)$$

$$= \bar{f} + \sum_{n=1}^N [K_n e^{i\omega_n \theta} + K_{-n} e^{-i\omega_n \theta}] + E(N) \quad (2.2)$$

Cette définition inclut un nombre infini de termes. Modéliser et calculer un nombre infini de coefficients est bien entendu irréalisable. La question qui va donc se poser, pour analyser la possibilité de dériver une méthode harmonique efficace, est de déterminer le

nombre N de coefficients de Fourier qu'il est nécessaire d'inclure dans le développement (2.2) pour reproduire, de manière satisfaisante, l'évolution circonférentielle de l'écoulement. Autrement dit, que vaut N pour obtenir une erreur $E(N)$ suffisamment faible ?

Une série de Fourier converge vers la fonction exacte pourvu que celle-ci soit continue par morceaux et périodique. Cette dernière condition n'est pas remplie dans un passage inter-aubes, puisque les écoulements sont généralement différents sur l'extrados et l'intrados de l'aube. Cela implique que pour décomposer une fonction en série de Fourier dans le canal inter-aubes, il est nécessaire de rendre cette fonction périodique. La difficulté principale est qu'en faisant cela, l'évolution réelle est altérée. Ainsi, un soin particulier doit être pris pour rendre cette fonction périodique en modifiant au minimum son contenu fréquentiel. Nous avons choisi une modification locale aux extrémités du domaine azimuthal. Nous y appliquons une adaptation linéaire vers les valeurs moyennes des fonctions d'intérêt en ces deux extrémités.

La figure 2.3, que nous appellerons spectre fréquentiel, illustre le logarithme de la valeur absolue des coefficients de Fourier normés par la valeur du premier pour la composante axiale de la quantité de mouvement (ρV_x).

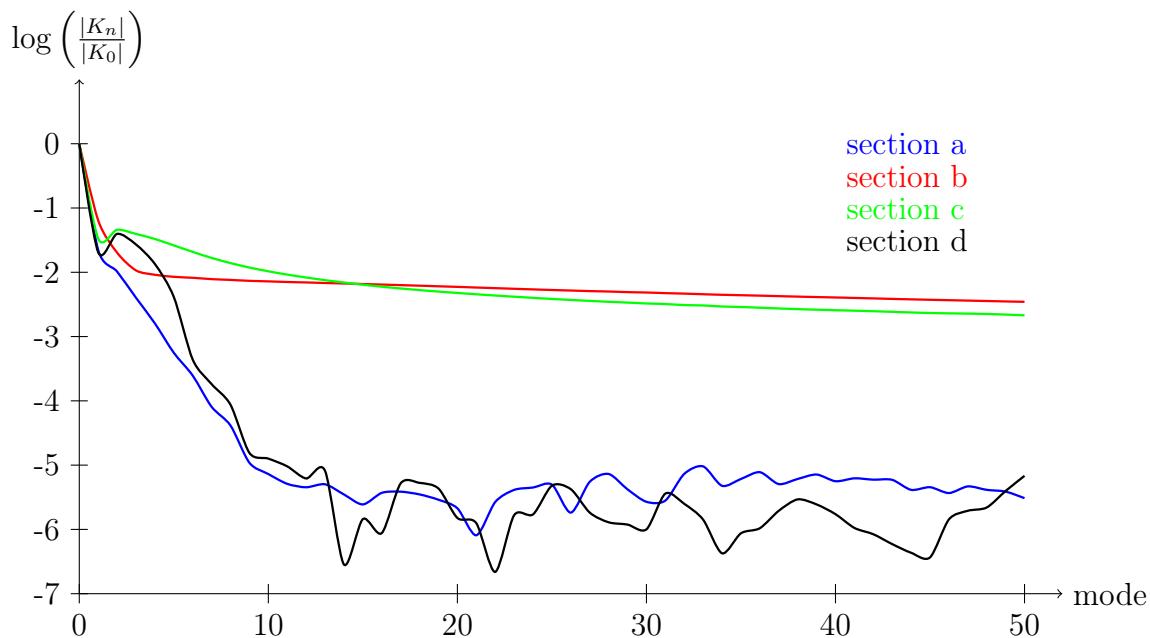


FIGURE 2.3 – Spectre fréquentiel de ρV_x aux sections a (bleu), b (rouge), c (vert) et d (noir) à mi-hauteur de veine du stator.

La station a se révèle assez pauvre en terme de contenu spectral, ce qui était attendu puisque cette région est dominée par des effets potentiels, de longueur caractéristique importante. Ce genre de comportement apparaît aussi à la station d , laquelle se situe dans le sillage. Ainsi, la même conclusion est valable pour les effets visqueux et non-visqueux hors du canal inter-aubes, témoignant d'un contenu fréquentiel limité hors des aubes. En ce qui concerne la partie droite du spectre pour ces deux stations, les termes de haute fréquence et de faible amplitude sont probablement du bruit, conséquence de l'interpolation trilinéaire

effectuée lors de l'extraction d'information de la simulation de référence.

Par contre, les stations b et c sont riches en contenu fréquentiel. La décroissance des coefficients de Fourier est lente, ce qui démontre que des phénomènes de hautes fréquences sont présents dans cette région. Ces deux positions correspondent au domaine inter-aubes, l'une près du bord d'attaque (station b) et l'autre près du bord de fuite (station c). Ainsi, elles impliquent toutes deux une zone de gradients importants, proche de la paroi. A l'avant, la zone est principalement non-visqueuse tandis qu'à l'arrière, elle est liée au développement des couches limites. Dans les deux cas, cela correspond à un faible niveau de décroissance des coefficients de Fourier.

Cet exemple illustre une différence importante entre les régions inter-aubes et hors aubes, indiquant le besoin d'une reconstruction plus coûteuse dans la zone aubée, comprenant des longueurs caractéristiques plus faibles. Ces observations tendent à affirmer qu'il est nécessaire d'inclure un nombre important de coefficients de Fourier pour obtenir une modélisation harmonique efficace. Cependant, notre objectif n'est pas de reconstruire avec exactitude les évolutions les plus brutales de l'écoulement, mais bien d'obtenir le niveau moyen de non-uniformité qui permettra de reproduire les phénomènes d'ordre supérieur au sein d'une simulation méridienne. Ceci fait l'objet de la section suivante.

2.2 Reconstruction harmonique

Cette section est consacrée à l'analyse de la difficulté à reconstruire les tensions circonférentielles, caractérisées par un spectre fréquentiel étendu, en particulier dans les régions aubées. Pour ce faire, les évolutions azimutales des variables conservatives sont reconstruites par série de Fourier, pour un nombre variable de modes.

La figure 2.4 représente l'énergie cinétique des non-uniformités circonférentielles moyennes associée à des champs fictifs approchant l'écoulement réel par reconstruction harmonique pour 3, 5, 10 et 20 modes. Elle reprend aussi l'énergie cinétique associée à la simulation 3D de référence. La correspondance générale est très bonne, dès les premiers modes. L'allure générale est en effet reproduite assez facilement. Il s'agit là d'une observation importante. En effet, nous l'avons vu aux équations (1.9) à (1.11) décrivant le modèle méridien, les tensions n'apparaissent pas directement dans ces équations, mais bien leur dérivée. Ainsi, si l'allure de la courbe présente les bonnes caractéristiques locales relatives, il est à attendre que les dérivées seront cohérentes. L'augmentation du nombre de modes permet ensuite d'elever le niveau de non-uniformité pour approcher la solution de référence.

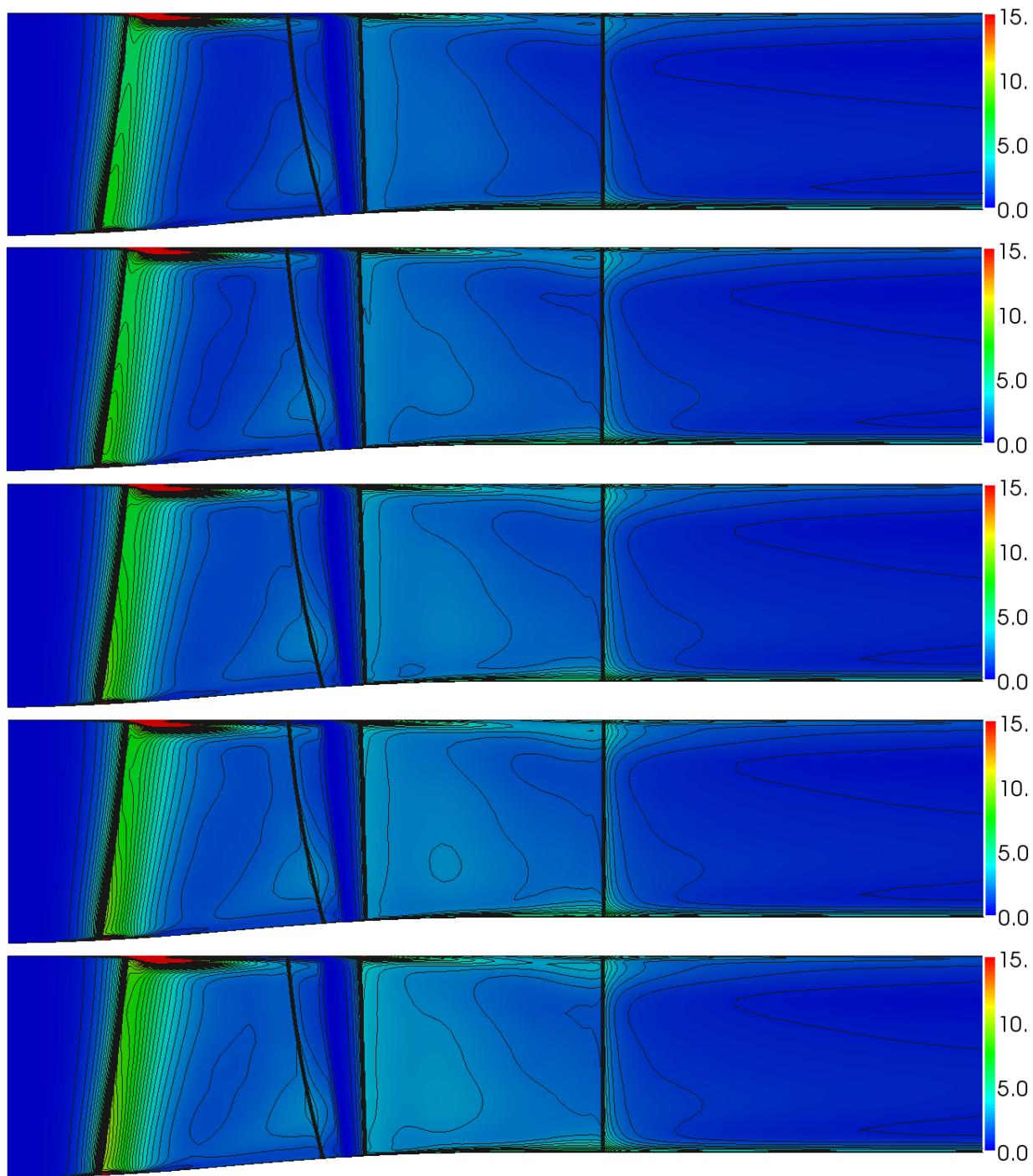


FIGURE 2.4 – Champ d'énergie cinétique, en [%], reconstruit avec, du haut vers le bas, 3 modes (1), 5 modes (2), 10 modes (3), 20 modes (4) comparé au champ de référence (5).

Afin de quantifier la qualité de reconstruction, la figure 2.5 montre le rapport de l'énergie cinétique pour 3, 5, 10 et 20 modes à l'énergie cinétique de référence.

Cette figure nous apprend que 3 modes ne sont pas suffisants pour obtenir un niveau de non-uniformité représentatif. Celle-ci n'est en effet reproduite qu'à 50 % dans la région au-

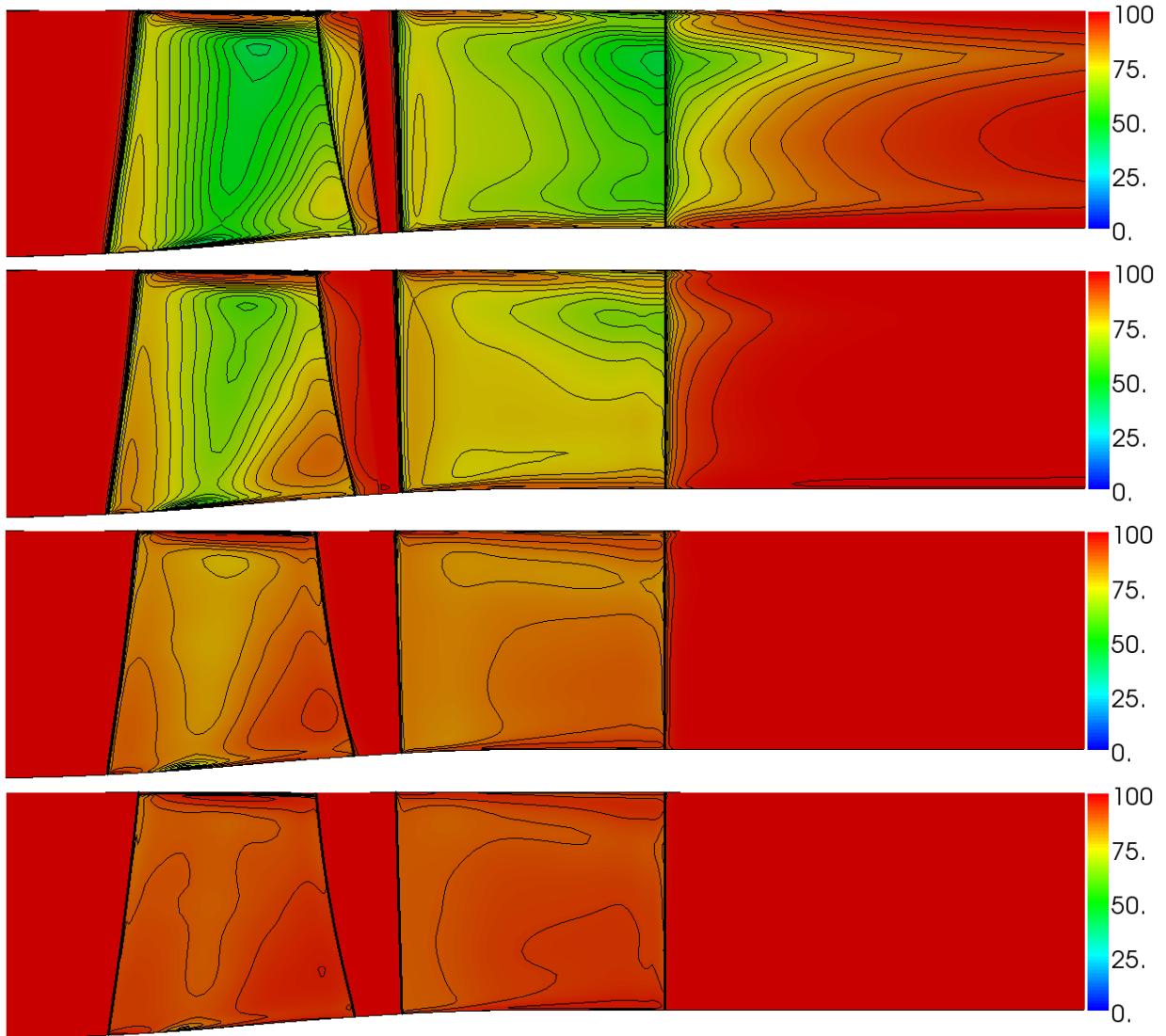


FIGURE 2.5 – Rapport du champ reconstruit d'énergie cinétique au champ de référence, en [%], pour, du haut vers le bas, 3 modes (1), 5 modes (2), 10 modes (3) et 20 modes (4).

bée et le sillage. L'ajout de 2 modes change substantiellement la situation, fournissant une bonne reproduction aux parois ainsi que dans le sillage. Avec 10 modes, la non-uniformité obtenue est à plus de 80 % presque partout, excepté localement dans la zone rotorique au moyeu, au bord d'attaque, au carter et en bout de pale. Finalement, avec 20 modes, le seuil de 80 % est atteint partout.

Un examen de cette figure 2.5 fait apparaître une différence de comportement, au niveau du passage inter-aubes, le long de la corde. En effet, dans la première moitié de la zone aubée, près du bord d'attaque, le niveau de précision atteint avec peu d'harmoniques est vite acceptable. Ainsi, 5 modes reprennent 80% du niveau moyen de non-uniformité. Par contre, pour des nombres plus élevés de modes, la précision augmente difficilement. La seconde moitié de la zone aubée présente le comportement inverse. Pour un faible nombre d'harmoniques, le niveau d'erreur est important. Celui-ci décroît cependant très rapidement

avec le nombre de modes inclus. Il est même notable que la précision, dès 10 modes, est meilleure sur la deuxième partie de l'aube que sur la première.

Ces types de comportements sont explicables par le résultat suivant. Selon Orszag [112], le nombre de modes de Fourier nécessaires pour reproduire l'évolution d'un écoulement comprenant une couche limite d'épaisseur ϵ est proportionnel à $1/\sqrt{\epsilon}$.

Sur la première moitié de l'aube, la couche limite est fine. Il est donc nécessaire, pour la reproduire, d'inclure un nombre élevé d'harmoniques, ce qui explique la convergence lente au-delà de 80 %. Pour des nombres plus faibles de modes, lesquels correspondent à des longueurs caractéristiques plus grandes que celles de la couche limite, cette dernière n'est pas capturée. Cependant, comme la couche limite est fine, elle constitue un phénomène très localisé, qui ne génère pas énormément de non-uniformité moyenne. Ainsi, il suffit de capter les phénomènes potentiels, qui conduisent à une précision élevée avec peu de modes et d'inclure quelques harmoniques plus élevées pour atteindre le niveau souhaité.

Sur la deuxième partie de l'aube, la couche limite visqueuse s'est développée, devenant d'une épaisseur plus importante. Elle ne peut dès lors plus être considérée comme un phénomène local et génère davantage de non-uniformité moyenne. Ainsi, comme les premiers modes de Fourier ne sont pas capables de reproduire cette couche limite, la précision est faible. Par contre, étant donné que la couche limite est plus épaisse, une augmentation du nombre d'harmoniques permet une capture rapide du phénomène, expliquant la convergence plus rapide pour la deuxième partie de l'aube.

De cet exemple, nous pouvons conclure qu'aussi bien pour la partie avant de l'aube, présentant un comportement principalement non-visqueux, que pour la zone proche du bord de fuite, présentant une couche limite plus épaisse, un nombre de modes de Fourier limité permet de reproduire, avec une précision suffisante, la non-uniformité moyenne.

Ces deux figures tendent à illustrer le fait que 10 à 20 modes peuvent reproduire 80 % du niveau réel de non-uniformité. Ceci apparaît aussi bien dans les régions pariétales, où l'écoulement est fortement tridimensionnel que dans l'écoulement principal pour lequel les couches limites aux parois des aubes sont caractérisées par de faibles longueurs caractéristiques.

Aussi, il est notable que l'ajout de modes supplémentaires à la série de Fourier tronquée rapproche le niveau de non-uniformité du niveau réel, dans toute la veine. Ceci est la conséquence de la convergence uniforme des séries de Fourier des variables conservatives.

Pour terminer cette analyse, nous allons examiner plus spécifiquement la convergence de l'énergie cinétique des perturbations en certaines lignes de coupe. Leur position est décrite à la figure 2.6. Trois lignes sont disposées dans la zone rotorique, juste en amont du bord d'attaque, dans la zone aubée et juste en aval du bord de fuite. Trois autres lignes se trouvent dans la zone statorique.

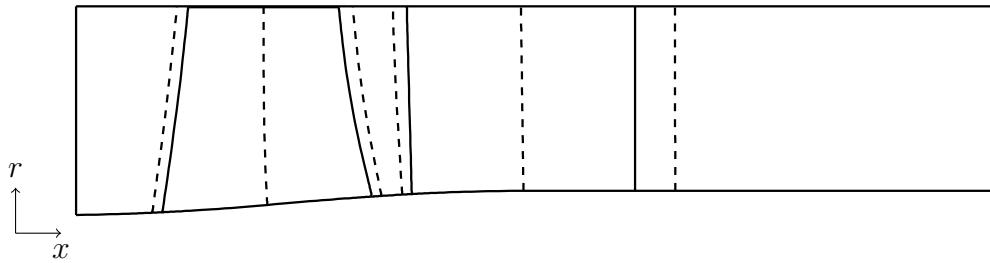


FIGURE 2.6 – Position des 6 lignes de coupes

La figure 2.7 illustre l'évolution radiale de l'énergie cinétique associée à des champs approchés avec 1, 3, 5, 10, 20 et 50 modes (traits discontinus) et au champ de référence (trait continu) dans les trois premières lignes de coupe.

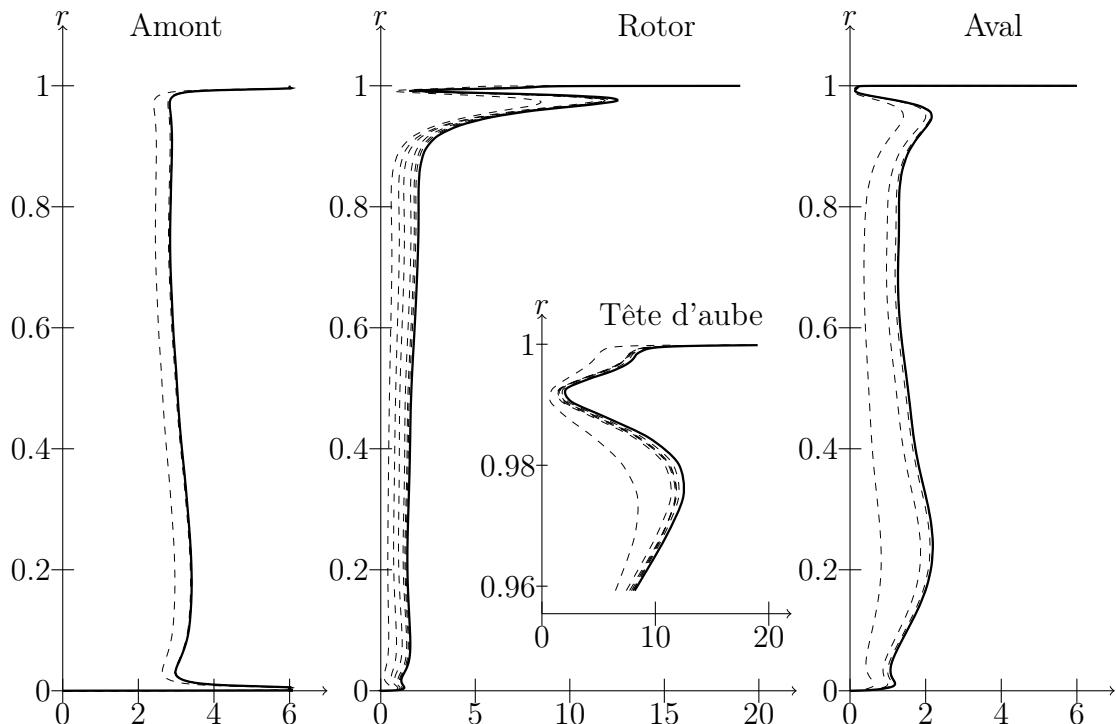


FIGURE 2.7 – Evolutions radiales de l'énergie cinétique des champs de référence (continu) et reconstruit (discontinu) dans le domaine rotorique

En amont du bord d'attaque, la convergence est très rapide, seuls des effets potentiels étant impliqués. Sur le rotor, loin des parois, la convergence est beaucoup plus lente, les couches limites visqueuses devant être reproduites. Si nous regardons plus particulièrement en bout d'aube, nous voyons que la reconstruction est assez aisée, ce qui confirme les observations précédentes. Ceci peut être expliqué par le raisonnement suivant. Dès qu'un modèle de turbulence est utilisé dans la simulation, les très petites échelles ne doivent plus être résolues. La structure résultante est complexe, avec des interactions fortes entre les couches limites pariétales et l'écoulement de bout d'aube, mais n'inclut pas de perturbations de faibles longueurs caractéristiques, contrairement à l'écoulement le long de l'aube qui, lui, comporte une fine couche limite. Si nous regardons la figure de droite, représentant une coupe avalée au bord de fuite, nous voyons que la convergence redevient assez rapide, tant

aux parois que loin de celles-ci.

Après cette analyse, nous pouvons conclure que la région la plus difficile à reconstruire en terme fréquentiel est la zone aubée, du fait de perturbations associées à des phénomènes de faibles longueurs caractéristiques et orientés dans la direction tangentielle. Près des parois, même si l'écoulement est désorganisé et comprend davantage de non-uniformité, il est caractérisé par une forte amplitude et des longueurs caractéristiques moyennes, et donc plus facilement reproductible par une série de Fourier.

Il paraît donc possible de reproduire, avec une précision raisonnable, le niveau de non-uniformité moyen au sein de l'étage de compresseur par une série de Fourier tronquée. La dernière étape, avant de pouvoir affirmer qu'une reconstruction harmonique est adaptée aux tensions circonférentielles, est d'étudier l'impact de tensions reconstruites, i.e. approchées, dans une simulation méridienne. Ceci fait l'objet de la section suivante.

2.3 Fermeture harmonique du méridien

Divers écoulements fictifs ont été reproduits par reconstruction harmonique. A chacun sont associées des tensions circonférentielles. Celles-ci vont être introduites dans une simulation méridienne, selon la procédure décrite au chapitre précédent. Ceci a pour but de vérifier la capacité de ces tensions approchées à reproduire les phénomènes physiques observés précédemment.

La figure 2.8 illustre le changement progressif du champ d'entropie avec les tensions circonférentielles harmoniques. La première sous-figure résulte d'une simulation incluant les composantes visqueuse et non-visqueuse de la force mais sans tension circonférentielle. Les sous-figures (2) à (5) proviennent de simulations incluant les tensions de champs approchés reconstruits avec 3, 5, 10 et 20 modes. La dernière sous-figure inclut la simulation méridienne augmentée de tous les termes additionnels.

Il est notable qu'avec 3 modes apparaissent déjà la zone de haute entropie au bord de fuite du rotor, l'amincissement de la couche limite au moyeu et l'effet du tourbillon de bout d'aube sur la couche limite au carter. Avec davantage de modes, la qualité augmente progressivement partout.

Analysons ensuite plus localement la reproduction des phénomènes liés aux perturbations circonférentielles. La figure 2.9 montre les évolutions radiales de l'entropie le long des six lignes de coupe reprises à la figure 2.6 pour différentes simulations. Les courbes vertes en trait discontinu sont les évolutions résultant de simulations avec des tensions circonférentielles de champs approchés avec 1, 3, 5, 10, 20 et 50 modes de Fourier. La figure 2.10 représente le nombre de Mach en ces mêmes coupes.

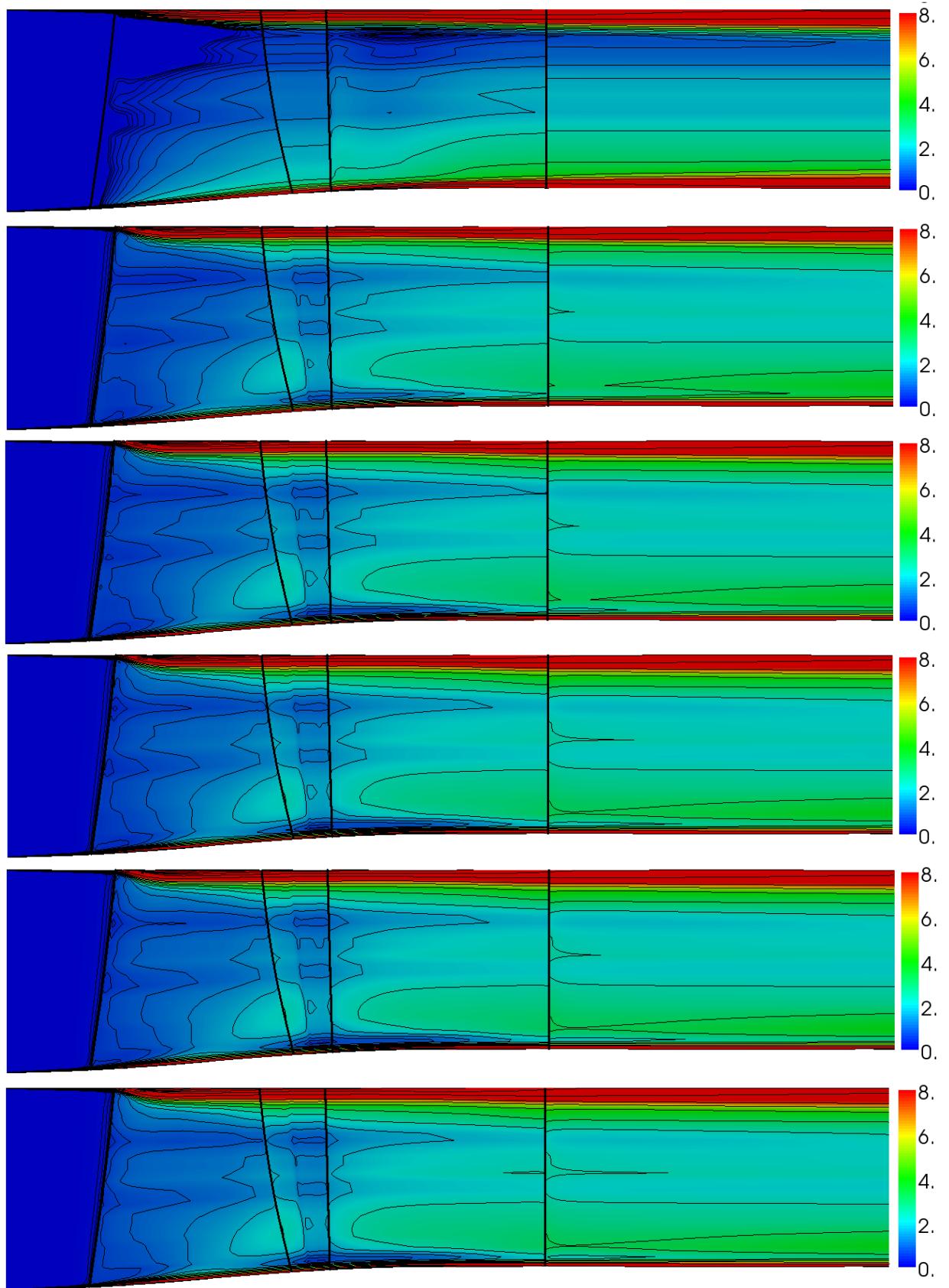


FIGURE 2.8 – Champ d'entropie dans cinq cas, du haut vers le bas : (1) $f_b + f_v$, (2) $f_b + f_v + rvv_{03}$, (3) $f_b + f_v + rvv_{05}$, (4) $f_b + f_v + rvv_{10}$, (5) $f_b + f_v + rvv_{20}$ and (6) $f_b + f_v + rvv$.

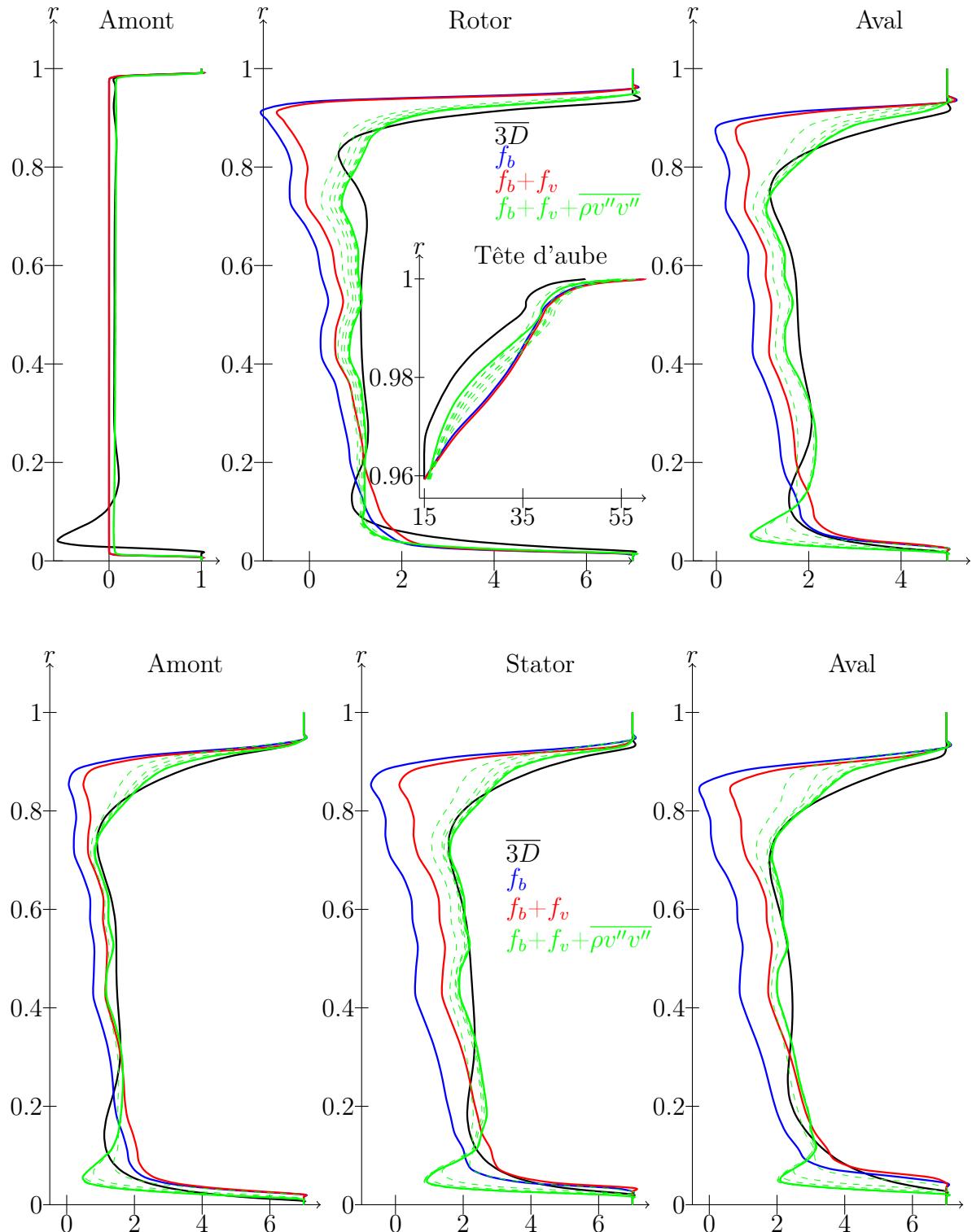


FIGURE 2.9 – Evolutions radiales de l'entropie dans les zones rotorique (haut) et statorique (bas) avec différentes termes additionnels : la composante non-visqueuse de la force f_b (bleu), les composantes visqueuse et non-visqueuse de la force $f_b + f_v$ (rouge), tous les termes additionnels (vert), les composantes visqueuse et non-visqueuse de la force avec les tensions harmoniques (vert discontinu) et la solution 3D moyennée de référence (noir).

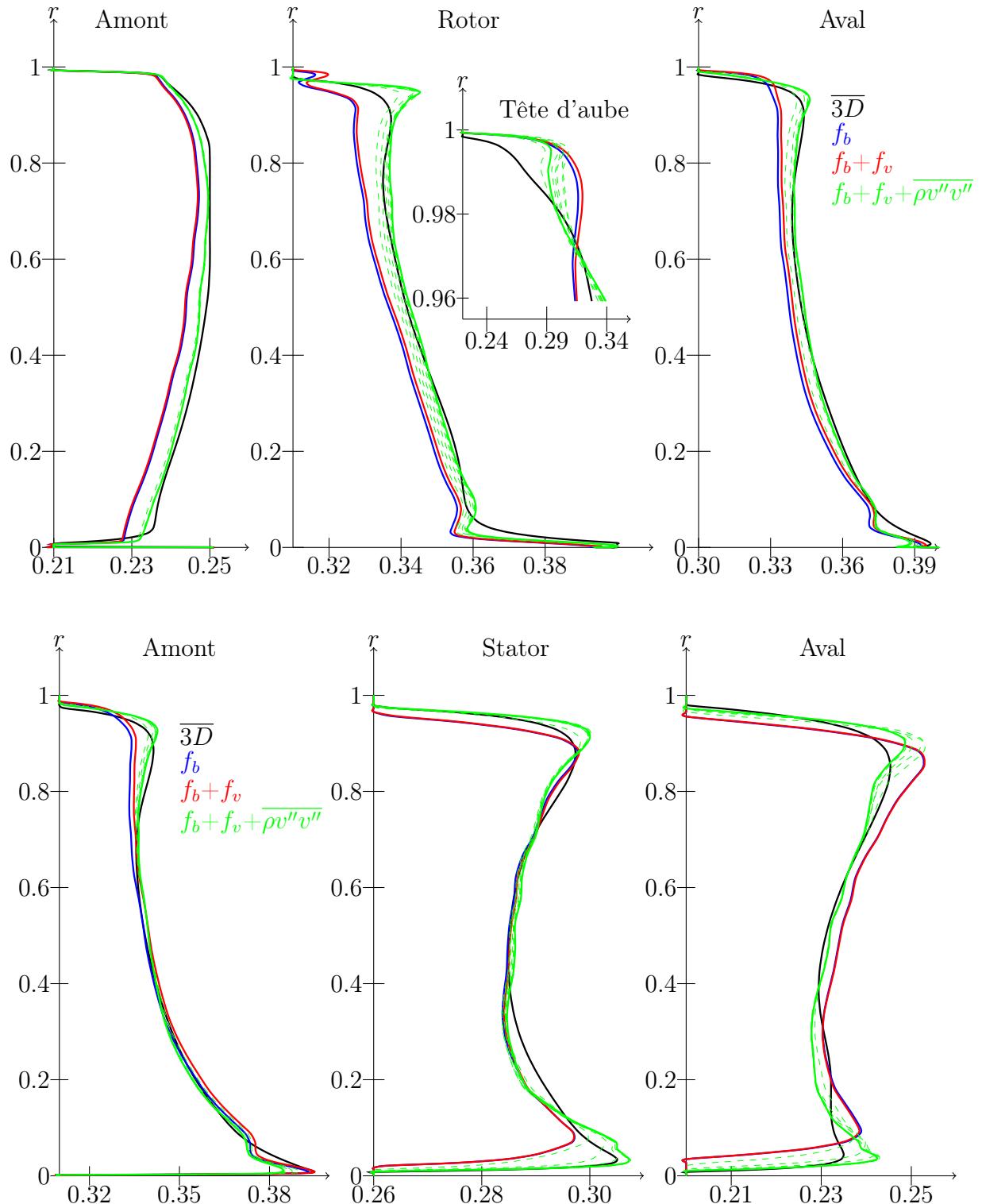


FIGURE 2.10 – Evolutions radiales du nombre de Mach dans les zones rotorique (haut) et statorique (bas) avec différentes termes additionnels : la composante non-visqueuse de la force f_b (bleu), les composantes visqueuse et non-visqueuse de la force $f_b + f_v$ (rouge), tous les termes additionnels (vert), les composantes visqueuse et non-visqueuse de la force avec les tensions harmoniques (vert discontinu) et la solution 3D moyennée de référence (noir).

L'accord entre la simulation méridienne avec tous les termes additionnels et la simulation tridimensionnelle moyennée est assez bon, pour les deux roues, près des parois comme loin de celles-ci. Les modifications locales produites par les gradients des produits de perturbations (équations (1.10) et (1.11)) mènent à des gradients réalistes au sein de l'écoulement. La région de bout de rotor est totalement modifiée par la présence des tensions circonférentielles. La qualité de reproduction semble moins bonne au moyeu en ce qui concerne l'entropie. La fidélité est meilleure pour le nombre de Mach. Cette faiblesse pourrait provenir d'une incompatibilité entre les modèles de turbulence de Baldwin-Lomax bidimensionnel et tridimensionnel. Des réinitialisations de la viscosité se produisent dans la simulation bidimensionnelle [136] alors qu'il n'en est rien pour la simulation tridimensionnelle. Ce phénomène est de moindre importance au carter où le tourbillon de bout d'aube est le principal générateur d'entropie.

Comme cela a été fait pour la veine complète, concentrons-nous sur la capacité des tensions approchées à reproduire des effets locaux. Pour chacune des six coupes, même les tensions subissant les plus fortes approximations permettent de reproduire plus fidèlement les évolutions radiales. Hors des zones aubées, proche ou loin des parois, 3 modes semblent être suffisants. Une fois encore, c'est au sein des zone aubées que le besoin modal est le plus fort. Mais dans chacun des cas, l'ajout de modes est récompensé et un nombre N de modes compris entre 10 et 20 reproduit de manière satisfaisante les effets locaux tridimensionnels moyens.

Sur base de cette analyse, nous pouvons affirmer que les tensions circonférentielles présentent une nature harmonique, c'est-à-dire qu'elles peuvent être reproduites sur base d'une série de Fourier tronquée. Ainsi, l'hypothèse principale des méthodes harmoniques est vérifiée, même s'il est vrai que la reconstruction sera probablement plus coûteuse que dans le cas instationnaire.

Il reste un point à soulever. Au cours de nos analyses, nous avons toujours supposé connaître de manière exacte les termes additionnels, à savoir les tensions circonférentielles, la force des aubes et les termes sources d'énergie. Pour cela il a été nécessaire d'extraire ces termes d'une simulation tridimensionnelle, ce qui va à l'encontre d'un code méridien autonome. La méthode harmonique qui sera implantée dans le code méridien devra donc être capable de générer ces termes additionnels par ses propres moyens. Dans ce cas, il est évident que la qualité des non-uniformités tridimensionnelles moyennes sera dépendante de la précision de la méthode utilisée.

La suite de cet exposé est consacré à la dérivation du système d'équations aux perturbations spatiales qui nous permettra d'accéder aux tensions circonférentielles.

Chapitre 3

Vers une modélisation harmonique non-linéaire

Sommaire

3.1 La méthode harmonique non-linéaire	44
3.2 Applicabilité au modèle méridien	49
3.2.1 Les conditions limites déterministes	49
3.2.2 Les conditions limites circonférentielles	51

Le chapitre précédent a permis de montrer qu'une décomposition harmonique circonférentielle était adaptée, laissant la possibilité de recourir à une des méthodes harmoniques pour résoudre le problème de fermeture. Ces deux grandes catégories de méthode harmonique proviennent de deux auteurs : Li He [61] et Kenneth Hall [60]. Les méthodes associées sont respectivement "la méthode harmonique non-linéaire" (*Nonlinear Harmonic Method*) et "l'équilibre harmonique non-linéaire" (*Nonlinear Harmonic Balance*).

Tout comme Hall, le domaine de recherche de He se situe dans l'interaction fluide structure [62]. Il a souhaité développer une méthode efficace pour étudier un phénomène instationnaire tel que le flottement. Il est cependant parti dans une autre direction, celle d'Adamczyk. En effet, He perçoit une résolution instationnaire efficace comme la résolution d'un système moyen, en l'occurrence un système moyenné dans le temps, associé à la résolution approchée d'un système d'ordre supérieur dont l'objectif est notamment de proposer une fermeture au problème moyen.

Le principe de la méthode de He est le suivant. Dans un esprit de résolution efficace de l'écoulement instationnaire, il souhaite avoir recours aux équations instationnaires linéarisées et les résoudre dans le domaine fréquentiel, par une approche numérique stationnaire, pour laquelle il existe des techniques d'accélération bien établies. Cependant, leur qualité de prédiction décroît en cas de non-linéarité importante au sein de l'écoulement, comme des chocs. Pour solutionner ce problème, du moins en partie, il couple les équations tridimensionnelles moyennes aux équations aux perturbations tridimensionnelles instationnaires au

moyen des tensions déterministes, lesquelles assurent un transfert des non-linéarités entre les deux systèmes. Cette méthode a montré son efficacité tant du point de vue du coût de résolution que de la reproduction des non-linéarités principales.

Etant basée sur la philosophie d'Adamczyk, l'extension de cette méthode à la prise en compte des interactions entre roues mobiles et statiques a été réalisée par Chen [23], par l'adaptation de la technique des plans de mélange. Les résultats obtenus illustrent une continuité retrouvée entre les grandeurs de l'écoulement de part et d'autre des plans de mélange, grâce à la modélisation précise des tensions déterministes.

He [64] a même étendu, avec succès, sa méthode harmonique non-linéaire à la prise en compte des tensions apériodiques et donc de l'effet de clocking, soit les interactions entre roues immobiles l'une par rapport à l'autre, mais de nombres d'aubes différents.

Stridh [143] applique ensuite la méthode harmonique pour le calcul d'un champ de fonctionnement de compresseur et montre l'influence des tensions déterministes sur les performances globales. On y voit que l'influence des tensions déterministes est de plus en plus marquée au fur et à mesure de l'éloignement par rapport au point de fonctionnement nominal, témoignant de l'importance des instationnarités, c'est-à-dire des interactions entre roues.

En résumé, cette méthode harmonique non-linéaire a été reprise par plusieurs auteurs qui ont prouvé son efficacité. Dans la suite, nous allons détailler cette méthode. Nous envisagerons alors son extension au cas du modèle méridien.

Nous n'envisagerons pas la méthode de “l'équilibre harmonique non-linéaire”. En effet, même s'il n'y a pas de doute quant à l'efficacité de cette méthode, elle est difficilement adaptable au modèle méridien. Elle présente principalement deux difficultés. Premièrement, en tant que méthode de collocation, elle nécessite une vision tridimensionnelle du domaine de calcul, ce qui s'oppose à la philosophie du méridien. Deuxièmement, elle ne fait pas de distinction entre les niveaux d'ordre moyen et d'ordre élevé de la simulation. Par conséquent, elle s'écarte de la ligne conductrice de la cascade d'Adamczyck. Nous nous concentrerons donc essentiellement sur la méthode harmonique non-linéaire.

3.1 La méthode harmonique non-linéaire

Pour expliquer cette méthode, nous supposerons un écoulement bidimensionnel non-visqueux, dans le plan (x, y) . Nous utiliserons donc les équations d'Euler instationnaires¹ (3.1).

1. Cette méthode est cependant applicable aux équations tridimensionnelles instationnaires visqueuses.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Les vecteurs $\mathbf{U}(x, y, t)$ des inconnues conservatives et $\mathbf{F}(x, y, t)$ et $\mathbf{G}(x, y, t)$ des flux sont donnés par l'expression (3.2). Il y apparaît la masse volumique ρ , les deux composantes de vitesse u et v , la pression statique p , l'énergie totale E et l'enthalpie totale H .

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u H \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v H \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

La forme intégrale du système d'équations (3.1) est donnée par l'expression (3.3), ΔA étant la surface d'un élément de maillage, S son périmètre.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta A} \mathbf{U} dA + \oint_S [\mathbf{F} dy + \mathbf{G} dx] = 0 \quad (3.3)$$

Ensuite, la philosophie d'Adamczyk est introduite en séparant les inconnues conservatives instationnaires en une partie moyenne et une partie fluctuante.

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \bar{\mathbf{U}}(x, y) + \mathbf{U}'(x, y, t) \quad (3.4)$$

Substituant cette décomposition au sein de l'équation (3.3) et moyennant² par rapport au temps, le système suivant est obtenu.

$$\oint_S [\bar{\mathbf{F}} dy + \bar{\mathbf{G}} dx] = 0 \quad (3.5)$$

Les vecteurs flux $\bar{\mathbf{F}}(x, y)$ et $\bar{\mathbf{G}}(x, y)$ sont donnés par l'expression (3.6).

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho u} \\ \bar{\rho u} \bar{u} + \bar{p} + \overline{(\rho u)' u'} \\ \bar{\rho u} \bar{v} + \overline{(\rho u)' v'} \\ \bar{\rho u} \bar{H} + \overline{(\rho u)' H'} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho v} \\ \bar{\rho v} \bar{u} + \overline{(\rho v)' u'} \\ \bar{\rho v} \bar{v} + \bar{p} + \overline{(\rho v)' v'} \\ \bar{\rho v} \bar{H} + \overline{(\rho v)' H'} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

2. Les différents développements mathématiques réalisés pour obtenir ce système d'équation, comme ceux qui seront effectués dans la suite, ne sont pas détaillés ici. Une procédure complète sera présentée dans la suite lors de l'application au cas du modèle méridien.

Dans l'expression des flux apparaissent des produits de fluctuations ; il s'agit des tensions déterministes. Elles sont le résultat de la procédure de moyenne appliquée à des termes non-linéaires et expriment l'effet moyen de l'instationnarité sur le champ moyen. Ces termes expriment un échange entre le champ moyen et le champ fluctuant. Ce dernier est obtenu par la soustraction du système moyen (3.5) au système instationnaire (3.3). De plus, He fait l'hypothèse que le champ de perturbations est dominé par les termes du premier ordre, et procède à une linéarisation. Le résultat est exprimé par (3.7).

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta A} \mathbf{U}' dA + \oint_S [\mathbf{F}' dy + \mathbf{G}' dx] = 0 \quad (3.7)$$

Les vecteurs flux $\mathbf{F}'(x, y, t)$ et $\mathbf{G}'(x, y, t)$ sont donnés par l'expression (3.8).

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} (\rho u)' \\ \overline{\rho u} u' + \overline{u} (\rho u)' + p' \\ \overline{\rho u} v' + \overline{v} (\rho u)' \\ \overline{\rho u} H' + \overline{H} (\rho u)' \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}' = \begin{bmatrix} (\rho v)' \\ \overline{\rho v} u' + \overline{u} (\rho v)' \\ \overline{\rho v} v' + \overline{v} (\rho v)' + p' \\ \overline{\rho v} H' + \overline{H} (\rho v)' \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Les perturbations des inconnues primitives et conservatives sont liées par des expressions linéarisées, du type (3.9).

$$u' = \frac{(\rho u)' - \bar{u}\rho'}{\bar{\rho}} \quad (3.9)$$

He fait usage de la linéarisation des perturbations afin d'obtenir une forme quasi-linéaire des équations les concernant, c'est-à-dire linéaire pour un champ moyen donné. Ainsi, une décomposition en série de Fourier permet de découpler les fréquences, le système étant homogène et les fonctions de Fourier orthogonales. C'est de ces hypothèses que provient l'efficacité de la méthode harmonique. En effet, soit la décomposition de Fourier suivante.

$$\mathbf{U}'(x, y, t) = \sum_n \mathbf{U}'_n(x, y) e^{i\omega_n t} \quad (3.10)$$

Sachant que les flux \mathbf{F}' et \mathbf{G}' sont des fonctions linéaires de \mathbf{U}' , la forme intégrale (3.7) se réduit à (3.11).

$$\sum_n \left(i\omega_n \iint_{\Delta A} \mathbf{U}'_n dA + \oint_S [\mathbf{F}'_n(\mathbf{U}'_n) dy + \mathbf{G}'_n(\mathbf{U}'_n) dx] \right) e^{i\omega_n t} = 0 \quad (3.11)$$

Le système étant homogène et les fonctions de Fourier étant orthogonales, on obtient, pour N modes, un ensemble de N équations (3.12) intégrales découpées pour les inconnues complexes \mathbf{U}'_n et ne dépendant que des variables spatiales.

$$\oint_S [\mathbf{F}'_n(\mathbf{U}'_n) dy + \mathbf{G}'_n(\mathbf{U}'_n) dx] = -i\omega_n \iint_{\Delta A} \mathbf{U}'_n dA \quad (3.12)$$

Ensuite, le système (3.12) étant exprimé en fonction de variables stationnaires, il est possible de lui adjoindre une pseudo variable temporelle τ afin de le rendre hyperbolique par rapport à celle-ci puis d'utiliser les techniques d'accélération caractéristiques des résolutions stationnaires.

Pour que la formulation (3.12) soit consistante, il est nécessaire de pouvoir exprimer les conditions limites instationnaires de manière homogène et linéaire afin d'obtenir un ensemble de conditions limites pour chaque mode. Les conditions d'entrée et de sortie utilisées sont les conditions limites non-réflectantes de Giles qui s'expriment dans le domaine fréquentiel. Elles peuvent être séparées fréquence par fréquence. En ce qui concerne les frontières circonférentielles du domaine de calcul, une condition limite de décalage de phase peut être utilisée et exprimée par la relation (3.13) s'appliquant à chaque mode séparément.

$$\rho_n(x, y + \Delta y) = \rho_n(x, y) e^{i\sigma_n}, \quad \sigma_n = \omega_n \Delta t = \frac{n \frac{2\pi}{N_a} \omega_0}{\Omega} \quad (3.13)$$

où N_a est le nombre d'aubes et Ω la vitesse de rotation.

Le problème instationnaire (3.12) peut donc être résolu pour chaque mode successivement, dans le domaine fréquentiel. Une fois le système aux perturbations résolu par superposition modale, une mise en commun des différentes solutions permet d'accéder aux perturbations temporelles, fournissant ainsi une relation supplémentaire au système moyen, résolvant le problème de fermeture.

En effet, soit la décomposition de Fourier suivante pour les perturbations des composantes de vitesse u' et v' .

$$u' = \sum_{n=1}^N [u'_n e^{i\omega_n t} + u'_{-n} e^{-i\omega_n t}] \quad (3.14)$$

$$v' = \sum_{m=1}^N [v'_m e^{i\omega_m t} + v'_{-m} e^{-i\omega_m t}] \quad (3.15)$$

La moyenne temporelle, sur une période de révolution T de la machine, du produit de ces fluctuations représente une composante du tenseur déterministe apparaissant dans les flux (3.6) du système moyen. Il s'exprime de la manière suivante.

$$\overline{u'v'} = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (u'_n v'_m e^{i(\omega_n + \omega_m)t} + u'_n v'_{-m} e^{i(\omega_n - \omega_m)t} + u'_{-n} v'_m e^{i(-\omega_n + \omega_m)t} + u'_{-n} v'_{-m} e^{i(-\omega_n - \omega_m)t}) dt \quad (3.16)$$

De ce développement ne subsistent, après moyenne, que les termes correspondant à $m = n$ et $\omega_n - \omega_m$ ou $\omega_m - \omega_n$. L'expression (3.16) se réduit donc à (3.17).

$$\overline{u'v'} = \sum_{n=1}^N (u'_n v'_{-n} + u'_{-n} v'_n) \quad (3.17)$$

Sachant de plus que chaque coefficient de Fourier contient une partie réelle et une partie imaginaire, la moyenne du produit de fluctuations prend la forme finale suivante.

$$\overline{u'v'} = \sum_{n=1}^N 2 \left(u_n'^{\Re} v_n'^{\Re} + u_n'^{\Im} v_n'^{\Im} \right) \quad (3.18)$$

Ainsi, le modèle d'ordre élevé fournit une relation supplémentaire pour fermer le système moyen, conformément au formalisme d'Adamczyk. Cette relation de fermeture est le seul couplage entre les modes de Fourier obtenus par des résolutions distinctes.

De plus, cette relation de fermeture (3.18) constitue un lien non-linéaire entre le système aux perturbations (3.12) et le système moyen (3.5). En effet, pour être résolu, le système aux perturbations nécessite la connaissance de l'écoulement moyen. Il peut alors fournir les tensions déterministes. Ces dernières sont ensuite injectées dans le système moyen et modifient la prédition. Cette modification de l'écoulement moyen va à son tour avoir une influence sur le système aux perturbations. Il s'agit donc d'un processus itératif non-linéaire. Ainsi, malgré l'hypothèse de petites perturbations menant à la linéarisation du système d'ordre supérieur, les non-linéarités principales de l'écoulement peuvent être reproduites. Pour tenir compte de ces interactions non-linéaires entre les écoulements moyen et instationnaire, He propose une stratégie de résolution réalisant un couplage fort, en intégrant simultanément les deux systèmes par rapport à un même pseudo-temps τ , ce qui offre de plus des performances accrues en termes de stabilité et de convergence.

La méthode qui vient d'être exposée s'inscrit totalement dans la lignée de la cascade d'Adamczyk, un système d'ordre élevé résolu de manière approchée étant perçu comme un moyen efficace de fournir au système moyen l'information qui lui manque. L'hypothèse la plus forte de cette méthode est que les perturbations sont faibles. Dans un premier temps, nous ne discuterons pas de la validité de cette hypothèse dans le cas du modèle méridien. Elle sera évaluée dans un chapitre ultérieur.

3.2 Applicabilité au modèle méridien

Dans le cas d'une application au modèle méridien, le système moyen serait ce dernier tandis que le système aux perturbations fournirait les non-uniformités circonférentielles, information d'ordre supérieur. Selon la méthode de He, un calcul couplé consisterait alors à résoudre un ensemble de problèmes méridiens dans le domaine fréquentiel, le nombre de résolutions étant déterminé par le nombre de modes, ce dernier conditionnant la précision de reconstruction.

La méthode présentée semble, a priori, convenir non seulement à nos objectifs d'affranchissement vis-à-vis de l'empirisme mais aussi à une résolution par un outil de calcul bidimensionnel. Nous allons cependant constater que la nature du problème à résoudre dans le cas méridien est différente du cas instationnaire et représente un obstacle à l'utilisation de cette méthode. Nous allons présenter ce dernier dans ce qui suit.

L'obstacle à l'application de la méthode précédente au cas méridien provient des conditions limites. Pour l'expliquer, l'exemple du cas instationnaire, plus particulièrement des interactions entre roues mobiles et statiques, est présenté. L'extension au cas méridien est ensuite discutée.

3.2.1 Les conditions limites déterministes

Un modèle d'ordre supérieur peut être résolu efficacement, dans le domaine fréquentiel, si ses conditions limites sont exprimables dans ce même domaine. Ainsi, il est nécessaire que les conditions limites d'ordre supérieur, c'est-à-dire associées aux phénomènes dont on souhaite une image moyenne, puissent être imposées, d'une manière ou d'une autre, au sein d'un code de calcul d'ordre inférieur, i.e. un code de calcul stationnaire dans le cas déterministe.

Prenons le cas d'un code de calcul tridimensionnel utilisant la technique des plans de mélange, où chaque roue d'un ensemble d'étages est calculée séparément, ne communiquant avec les autres roues qu'au travers d'écoulements moyennés. Si l'objectif est de reproduire les effets instationnaires, cela signifie que l'on recherche les interactions instationnaires entre roues mobiles et statiques, comme nous l'avons mentionné lors de l'analyse de la cascade d'Adamczyk. Pour cela, il faut appliquer une condition limite que nous qualifierons de déterministe, qui va permettre de générer les non-uniformités temporelles dans le domaine de calcul tridimensionnel stationnaire. Ainsi, afin de prendre en compte l'effet des roues adjacentes sur la roue considérée, il faut appliquer, aux frontières de son domaine de calcul, des conditions limites décrivant le comportement de celles-ci.

Prenons l'exemple d'un étage de compresseur, i.e. une roue mobile (rotor) suivie d'une roue statique (stator), illustré à la figure 3.1. L'interface entre les deux roues, le plan de mélange, est repéré sur la figure et constitue la limite des domaines de calcul de chaque roue.

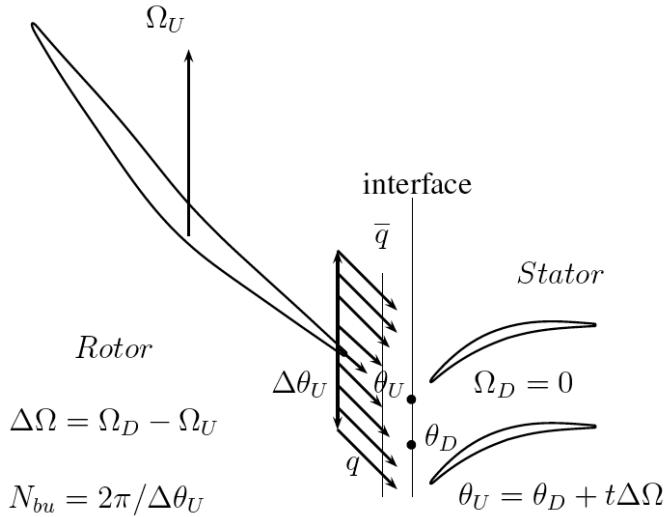


FIGURE 3.1 – Conditions limites déterministes

Afin de prendre en compte l'effet du rotor sur le stator, il faut reproduire les caractéristiques de l'écoulement en sortie du domaine amont à l'entrée du domaine aval et ce, dans un formalisme permettant une expression fréquentielle pour chaque mode. Pour ce faire, l'hypothèse d'Adamczyk [2] est utilisée. Celle-ci suppose que la composante instationnaire d'une roue sur l'autre provient de la non-uniformité azimutale stationnaire de la roue amont qui, par rotation d'un domaine par rapport à l'autre, se transforme en non-uniformité temporelle dans le domaine aval.

Dans le domaine aval, les instationnarités sont exprimées au travers d'une série de Fourier comme l'expression (3.19), où θ_D est la coordonnée azimutale dans le domaine de calcul de la roue considérée, le stator.

$$U'(r, \theta_D, x, t) = \sum_n U'_n(r, \theta_D, x) e^{i\omega_n t} \quad (3.19)$$

Le problème se réduit donc à trouver une expression des conditions limites déterministes qui a cette forme, afin de pouvoir appliquer une condition limite distincte sur chaque mode spatial. Selon l'hypothèse faite précédemment, le développement (3.21) de l'écoulement stationnaire non-uniforme azimutalement dans le domaine amont (repéré par l'indice U dans la suite) permet d'obtenir une telle expression dans le domaine aval (repéré par l'indice D dans la suite).

Soit la relation de passage (3.20) d'un domaine à l'autre.

$$\theta_U = \theta_D + \Omega t \quad (3.20)$$

La décomposition de l'écoulement amont est alors la suivante.

$$\begin{aligned} U'(r, \theta_U, x) &= \sum_n U'_n(r, x) e^{i\omega_n \theta_U} \\ &= \sum_n U'_n(r, x) e^{i\omega_n (\theta_D + \Omega t)} \\ &= \sum_n \underbrace{U'_n(r, x) e^{i\omega_n \theta_D}}_{U'^*(r, \theta_D, x)} e^{i\overbrace{\omega_n}^{\omega_n^*} \Omega t} \\ &= \sum_n U'^*(r, \theta_D, x) e^{i\omega_n^* t} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ainsi, les interactions entre roues peuvent apparaître, dans le plan fréquentiel du domaine aval, comme des conditions limites purement spatiales.

3.2.2 Les conditions limites circonférentielles

Pour que la méthode de He soit applicable au cas méridien, il est donc nécessaire que les conditions limites d'ordre supérieur à l'origine des non-uniformités circonférentielles soient décomposables en série de Fourier de la forme (3.22), afin qu'elles puissent être appliquées séparément à chaque mode méridien, fonction uniquement des variables méridiennes (r, x) .

$$U'(r, \theta, x) = \sum_n U'_n(r, x) e^{i\omega_n \theta} \quad (3.22)$$

Dans le cas méridien, l'information d'ordre supérieur, à savoir les non-uniformités azimutales, sont générées par l'aube elle-même, par son imperméabilité³ dans le cas non-visqueux. Ceci signifie qu'en certaines positions particulières θ_p et θ_s , une condition limite doit être imposée. Cette condition limite peut être exprimée par (3.23).

$$U'(r, \theta, x)|_{\theta=\theta_p} = U'_p(r, x) \quad (3.23)$$

3. Ainsi que par sa condition de non-glissement dans le cas visqueux.

Substituant (3.23) dans (3.22), on obtient l'expression (3.24) de la condition limite d'ordre supérieur.

$$\begin{aligned} U'_p(r, x) &= \sum_n \underbrace{U'_n(r, x)}_{U'^*_n(r, x)} e^{i\omega_n \theta_p} \\ &= \sum_n U'^*_n(r, x) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ainsi, cette condition limite n'est pas vraie pour tout θ . Elle ne peut donc pas être décomposée en série de Fourier du type (3.22) et ne peut s'appliquer de manière distincte sur chaque mode. Elle doit être appliquée sur la série entière, couplant tous les modes. Du fait de la présence du générateur d'information d'ordre supérieur dans le domaine de calcul, une résolution par superposition modale est donc impossible.

Une autre façon de situer le problème issu de la formulation classique des aubes dans le domaine de calcul peut être déduit de la figure 3.2.

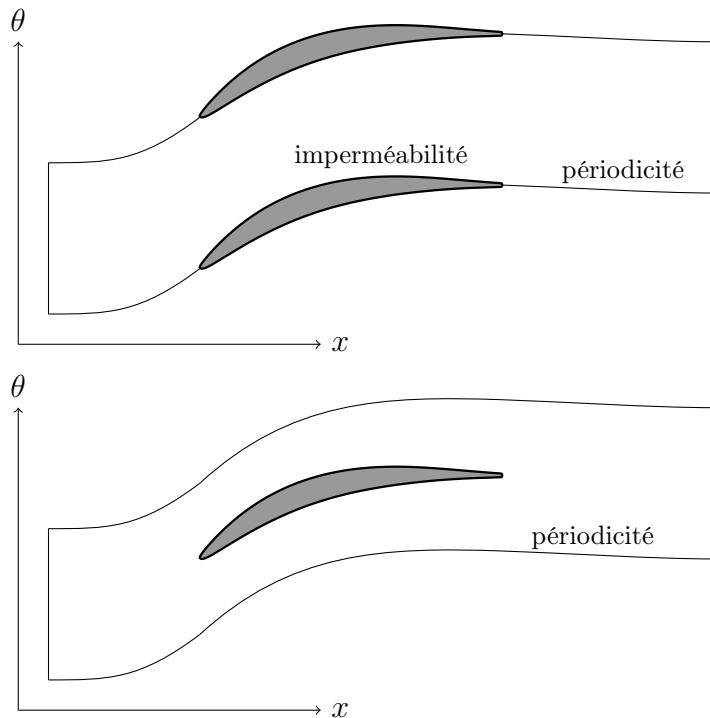


FIGURE 3.2 – Domaines de calculs avec formulation classique des aubes : domaine continu non-périodique (haut) et domaine périodique discontinu (bas).

L'utilisation de séries de Fourier passe par la condition de périodicité du domaine de calcul. Comme le montre la figure du haut, c'est le cas dans tout le domaine excepté aux parois des aubes. L'autre disposition de l'aube au sein du domaine de calcul mène à un domaine périodique mais discontinu.

Il n'en reste pas moins que la méthode de He est très attractive. L'obstacle rencontré est cependant de taille. D'un point de vue mathématique, afin de résoudre le système aux perturbations par superposition modale, il est nécessaire de rendre l'écoulement périodique. D'un point de vue physique, il faut s'affranchir de toute condition limite sur l'aube, c'est-à-dire rendre l'aube perméable. En d'autres termes, il faut supprimer l'application de conditions locales (i.e. en certains θ_i) tout en conservant l'effet des aubes puisqu'elles sont à l'origine des perturbations circonférentielles.

Selon ce raisonnement, la force des aubes doit apparaître comme un terme source dans le système d'équations aux perturbations, et ce de manière décomposable en série de Fourier. Les aubes doivent donc être remplacées par un champ de force tridimensionnel qui conduit l'écoulement à respecter une condition d'imperméabilité fictive. Ce champ de force doit de plus ne pas être localisé aux parois fictives des aubes, ce qui correspondrait à deux fonctions de Dirac (l'une à l'extrados et l'autre à l'intrados), mais être "répandu" autour de la position fictive de l'aube, de manière à fournir une décomposition spectrale de bande passante limitée.

Ainsi, chaque mode serait résolu par un calcul méridien distinct correspondant à une composante fréquentielle du champ de force. Cette formulation s'inscrit en ligne directe de la méthode de He, puisque le système aux perturbations peut être vu comme une superposition de problèmes d'ordre inférieur dans le domaine fréquentiel, et donc résolu par la même technique que le système moyen, lui-même correspondant à la partie moyenne du champ de force.

Ces idées font partie intégrante de la méthode dite de frontière immergée ("Immersed Boundary Method"), où le corps plongé dans un fluide apparaît sous forme d'un champ de force. Celui-ci agit sur le domaine fluide défini sur un maillage ne se conformant pas au corps. Le corps solide n'apparaît plus explicitement, ni les conditions limites correspondantes. La clé de cette méthode est la transposition des conditions limites reproduisant le corps afin d'en traduire l'effet sur un maillage recouvrant à la fois les domaines fluide et solide.

Le chapitre suivant est consacré à la présentation de cette méthode. Ensuite, nous montrerons que l'utilisation de cette technique de reproduction du corps permet d'appliquer la méthode de He au cas du modèle méridien.

Chapitre 4

La méthode de frontière immergée

Sommaire

4.1	Principe de la méthode	56
4.2	Approche discrète	57
4.3	Approche continue	58
4.3.1	Frontières élastiques	58
4.3.2	Frontières rigides	61
4.3.3	Méthode de pénalisation	61
4.3.4	Méthode de “feed-back”	62
4.3.5	Méthode de forçage direct	63
4.4	Synthèse de la méthode de frontière immergée	64

Charles Peskin [118, 119, 120] développe une méthode (1972) destinée à faciliter le traitement de problèmes d’interaction fluide-structure, qu’il applique en dynamique des fluides biologiques (écoulement du sang dans le cœur). Sa méthode met en jeu deux maillages. Le premier est un maillage fixe représentant tout le domaine de calcul (maillage dit “eulérien”). Le deuxième est un maillage curviligne mobile et déformable suivant le mouvement du corps (maillage dit “lagrangien”). Ces deux maillages sont totalement indépendants et l’information se transmet de l’un à l’autre au moyen d’une équation d’interaction incluant une fonction de distribution (approximation lissée de la fonction de Dirac). Celle-ci répartit l’information de la présence du corps sur le domaine. Le maillage lagrangien bouge librement sur le maillage cartésien, sans obligation de s’y adapter. Il s’agit d’une méthode de maillages non-conformes.

Par la suite, une autre catégorie de méthodes, dites “méthodes de maillages cartésiens” ont vu le jour. Elles reprennent l’idée de Peskin et l’appliquent au calcul d’écoulements sur des corps de géométrie complexe sur un simple maillage cartésien. Dans la suite, nous regroupons sous l’appellation méthode “Immersed Boundary”, ou méthode de “frontière immergée”, les méthodes qui simulent des écoulements autour de frontières solides et aux-quelles le maillage ne se conforme pas.

Au cours de ce chapitre, nous allons présenter la méthode de frontière immergée et le travail de quelques auteurs. Nous montrerons qu'elle remplit les critères d'une application au cas du méridien harmonique.

4.1 Principe de la méthode

Classiquement, la résolution du problème de l'écoulement d'un fluide autour d'un corps passe par le solutionnement des équations de Navier-Stokes sur un domaine fluide Ω_f borné notamment par la frontière solide Γ_b du corps, comme illustré à la figure 4.1 (haut).

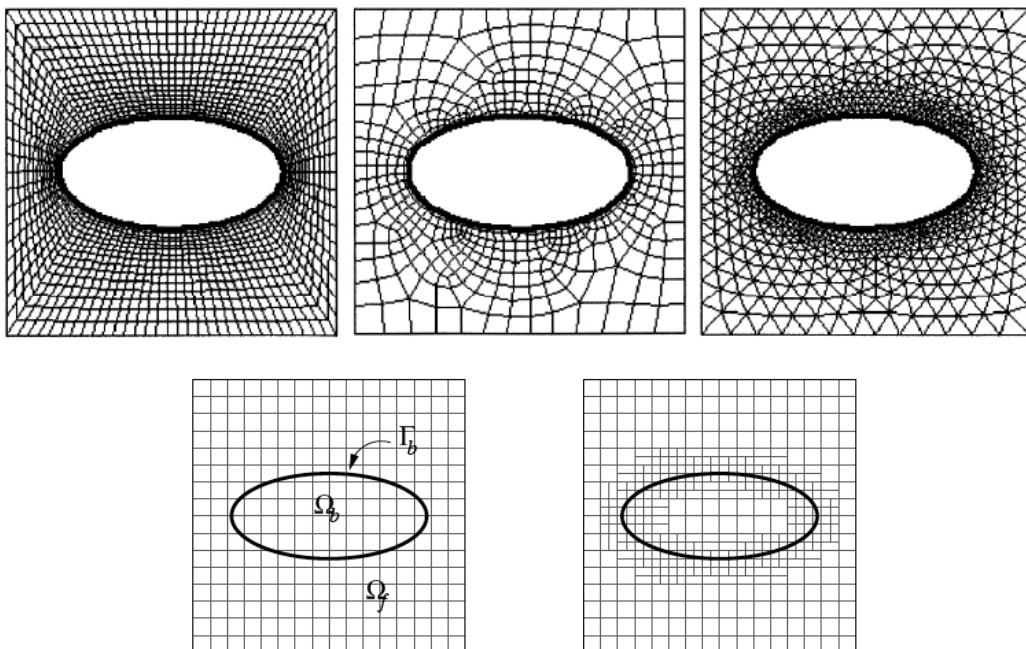


FIGURE 4.1 – Exemples de maillages conformes (haut) et de maillages cartésiens (bas) [160]

Dans ce cas, une étape importante et complexe est la génération du maillage. Les équations à résoudre sont alors discrétisées sur ce maillage et sont accompagnées de conditions limites, notamment sur le corps. Celles-ci sont aisément implémentées dans le code puisqu'elles font partie du domaine de calcul.

Par exemple, soit les équations et conditions limites suivantes, où \mathbf{U} est le vecteur des inconnues et $\mathbf{L}(\mathbf{U})$ l'opérateur représentant les équations de Navier-Stokes.

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) = 0 \quad \text{sur } \Omega_f \tag{4.1}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_\Gamma \quad \text{sur } \Gamma_b \tag{4.2}$$

Les conditions limites sont donc imposées explicitement au cours du processus de résolution. C'est ce point qui représentait un obstacle à l'application directe de la méthode de He au cas du modèle méridien.

Dans une méthode de frontière immergée par contre, il n'existe plus de restriction sur la forme du maillage, il peut être généré indépendamment de la forme du corps. Ceci est très avantageux pour des corps mobiles ou de géométrie complexe. Dans ce cas de maillage non-conforme, les conditions limites apparaissent indirectement, par une modification du système d'équations (4.1). Cette modification consiste en l'ajout d'un terme source dont le but est de reproduire l'effet du corps, c'est-à-dire l'effet de la condition limite (4.2). L'imposition des conditions limites est la clé de l'efficacité de la technique. C'est aussi par la façon d'imposer la présence du corps que les différentes méthodes se distinguent. Le terme source peut être introduit dans les équations de deux façons : discrète ("Discrete forcing approach") ou continue ("Continuous forcing approach").

4.2 Approche discrète

Dans l'approche discrète, les équations (4.1) sont d'abord discrétisées sur le maillage cartésien, sans considérer les conditions limites, ce qui donne l'expression suivante.

$$[\mathbf{L}] \{\mathbf{U}\} = 0 \text{ sur } \Omega \quad (4.3)$$

Ensuite, la discrétisation est ajustée dans les régions proches des parois fictives pour prendre en compte leur présence. Ainsi, l'opérateur discrétisé $[\mathbf{L}]$ devient un opérateur $[\mathbf{L}']$ différent et l'effet des parois fictives est introduit par un terme $\{r\}$, donnant lieu à l'expression suivante.

$$[\mathbf{L}'] \{\mathbf{U}\} = \{r\} \text{ sur } \Omega \quad (4.4)$$

Cette approche discrète n'est pas universelle car elle dépend du schéma de discrétisation choisi. Cette vision de la méthode de frontière immergée se rapproche du cas de résolution sur maillage conforme. En effet, dans le cas discret, les équations sur le domaine fluide sont traitées en priorité. Ce n'est que dans un deuxième temps que les conditions limites sont ajoutées au sein de la discrétisation. Il apparaît donc une distinction entre le domaine fluide et le corps qui y baigne, l'écoulement n'y étant d'ailleurs pas nécessairement résolu. Les conditions limites peuvent être imposées de manière indirecte, au travers d'une force, ou directe, par interpolation de l'écoulement sur les parois fictives puis correction de celui-ci. Ce dernier cas se rapproche fortement de la méthode classique sur maillage conforme.

Dans un cas comme dans l'autre, l'approche discrète nécessite une localisation explicite du corps immergé pour effectuer les modifications de la discrétisation des équations.

Le corollaire est que les conditions limites peuvent être imposées de manière plus précise, plus ponctuelle, et conviennent donc bien aux écoulements à hauts nombres de Reynolds pour lesquels la couche limite est très localisée.

4.3 Approche continue

Dans l'approche continue, le terme source de force \mathbf{f}_b traduisant la présence du corps est inclus dans les équations continues (4.1), ce qui donne l'expression suivante à résoudre.

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) = \mathbf{f}_b \text{ sur } \Omega \quad (4.5)$$

Le système d'équations à résoudre est appliqué sur le domaine $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_b$, c'est-à-dire sur le maillage cartésien entier, y compris à l'intérieur du corps. C'est une différence majeure par rapport aux résolutions sur maillage conforme. Cette équation est ensuite discrétisée sur le maillage cartésien, menant à l'équation suivante qui sera résolue sur tout le domaine.

$$[\mathbf{L}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{f}_b\} \text{ sur } \Omega \quad (4.6)$$

Contrairement à l'approche discrète, l'approche continue ne distingue pas le domaine fluide du domaine solide. Les équations sont résolues sur le domaine cartésien entier. Ceci peut présenter un inconvénient puisqu'il est nécessaire de résoudre les équations sur un domaine solide qui, a priori, ne présente aucun intérêt. Cependant, en vue d'une extension à une méthode harmonique, ceci est appréciable puisque le domaine peut être uniforme azimutalement et périodique. La présence des aubes est vue comme une information externe qui vient se superposer à l'écoulement défini sur un maillage quelconque. Ceci correspond à la philosophie d'Adamczyk où le générateur de non-uniformité circonférentielle (l'aube) est une information d'ordre supérieur. Pour cette raison, c'est l'approche continue qui est choisie et approfondie dans la suite.

Cette approche s'applique différemment selon la nature du corps immergé : élastique ou rigide.

4.3.1 Frontières élastiques

La méthode initiale de Peskin s'inscrit dans cette catégorie. Elle avait pour but de faciliter les calculs d'interaction fluide-structure, notamment le couplage des équations solides aux équations fluides. La transmission de l'information du corps élastique au domaine fluide est effectuée au moyen d'une loi constitutive comme celle de Hooke.

Soit (q, r, s) les coordonnées curvilignes d'un point de la surface du corps, $\mathbf{X}(q, r, s, t)$ sa position au temps t dans l'espace cartésien, \mathbf{x} un point quelconque de l'espace cartésien, $\mathbf{F}(q, r, s, t)$ la force élastique appliquée par le corps sur le fluide dans les coordonnées lagragiennes. La relation qui lie cette force à son équivalent dans l'espace eulérien (le domaine cartésien) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ est la suivante, où δ est la fonction de Dirac.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{F}(q, r, s, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(q, r, s, t)) dq dr ds \quad (4.7)$$

Il s'agit de l'équation d'interaction entre les deux domaines.

En pratique, ces domaines sont discréétisés. Il s'ensuit qu'une fonction de Dirac ne pourra transmettre l'information que si les deux maillages coïncident. Or cela va à l'encontre de la philosophie de Peskin. La fonction δ est donc remplacée par une fonction δ_h qui est une approximation lissée de la fonction de Dirac. Elle permet de transmettre la force exercée par un nœud lagrangien aux nœuds eulériens adjacents, sans nécessiter une coïncidence de maillage, comme illustré à la figure 4.2. Pour être cohérente, cette fonction δ_h doit satisfaire plusieurs conditions.

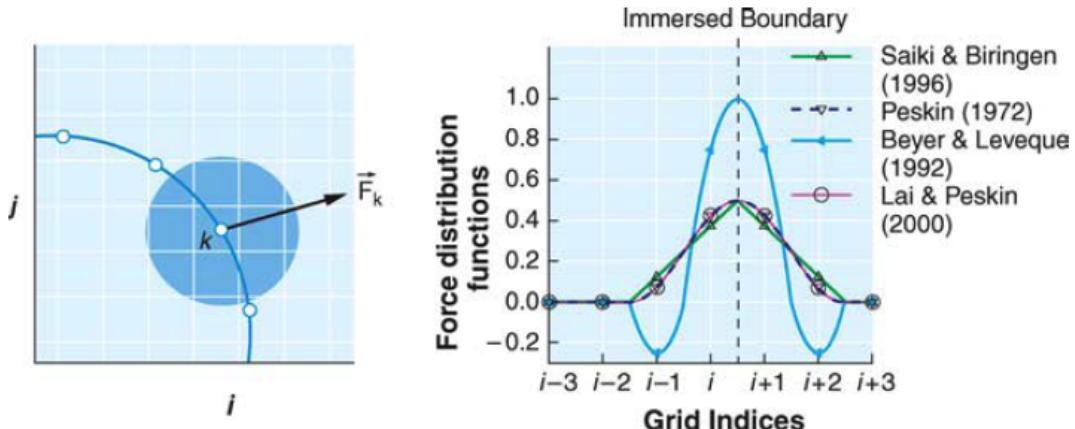


FIGURE 4.2 – Transmission de l'information d'un maillage à l'autre [104]

Construction de δ_h

Supposons que la fonction tridimensionnelle δ_h est donnée par un produit de fonctions d'une variable et qui dépendent de la largeur de maille h de la manière suivante :

$$\delta_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^3} \phi\left(\frac{x_1}{h}\right) \phi\left(\frac{x_2}{h}\right) \phi\left(\frac{x_3}{h}\right), \quad (4.8)$$

où x_1, x_2, x_3 sont les composantes cartésiennes de \mathbf{x} . Cette formulation n'est pas essentielle mais permet la simplification du raisonnement à une dimension. La dépendance

vis-à-vis du maillage exprimée par (4.8) permet de retrouver naturellement la fonction de Dirac comme une limite pour h tendant vers 0.

En fonction de cela, les postulats suivants peuvent être énoncés en termes de fonction $\phi(r)$, où r désigne x_1/h , x_2/h ou x_3/h . Ces conditions à satisfaire sont les suivantes, exprimées en langage discret.

$$\phi(r) \text{ est continue pour tout réel } r \quad (4.9)$$

$$\phi(r) = 0 \text{ pour } |r| \geq 2 \quad (4.10)$$

$$\sum_j \phi(r - j) = 1 \text{ pour tout réel } r \quad (4.11)$$

$$\sum_j (r - j)\phi(r - j) = 0 \text{ pour tout réel } r \quad (4.12)$$

La condition de continuité (4.9) est utilisée pour permettre une transmission progressive de la force au domaine fluide, facilitant la résolution numérique.

La condition (4.10) de support compact est énoncée, à l'origine, pour des raisons d'efficacité de calcul, afin de limiter le nombre de points du maillage cartésien qui interagissent avec le maillage lagrangien. Peskin propose une borne égale à 2 parce qu'elle convient à son schéma de discréétisation. La condition pourrait cependant être exprimée plus généralement pour $|r| \geq C$ où C est une constante déterminée par l'utilisateur. D'un autre côté, il est logique de limiter l'extension de la fonction, puisqu'elle est censée approcher une fonction ponctuelle.

La condition (4.11) exprime la conservation de la force lors de la distribution sur le maillage cartésien.

La dernière condition exprime la surface comme le centre de gravité de la distribution de la force qu'elle génère, ce qui permet de ne pas créer de couple parasite par la distribution.

Peskin propose la fonction suivante.

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right)\right), & \text{si } |r| \leq 2 \\ 0, & \text{si } |r| > 2 \end{cases} \quad (4.13)$$

Il existe plusieurs fonctions δ_h , les plus connues étant illustrées à la figure 4.2. Chaque point lagrangien (i.e. de la frontière solide) répand son effet sur le maillage eulérien au moyen de la fonction de distribution.

4.3.2 Frontières rigides

La méthode classique de Peskin utilise la loi de Hooke, adaptée à un corps élastique, mais dont la limite pour un corps rigide pose problème. Dans le cas d'un corps rigide, il ne s'agit plus d'un problème d'interaction fluide-structure nécessitant une loi de comportement du solide immergé. Une condition limite d'imperméabilité ou de non-glissement suffit dès lors pour traduire son influence sur l'écoulement.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la manière de formuler une force externe qui permettrait de satisfaire les conditions d'imperméabilité ou de non-glissement sur les parois fictives. Dans la suite, nous nous intéresserons plus particulièrement aux méthodes de pénalisation développée par Arquis & Caltagirone [7], de “frontière virtuelle” (*Virtual Boundary*) ou de “feed-back” proposée par Goldstein [51] et de “forçage direct” (*Direct-forcing*) initiée par Mohd-Yusof [106].

4.3.3 Méthode de pénalisation

Cette méthode de pénalisation consiste à ajouter aux équations du mouvement un terme de force pénalisant, en certaines zones, l'écoulement dont la vitesse n'est pas égale à la vitesse voulue \mathbf{u}_0 . Pour cela, Arquis & Caltagirone [7] utilisent le concept de milieu poreux pour définir le terme de force. Ils considèrent le domaine entier Ω comme l'union de différents milieux : fluide Ω_f , poreux Ω_p et solide Ω_b . Chacun des milieux est caractérisé par une constante de perméabilité $\eta(\mathbf{x})$.

$$\eta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \eta_f & \rightarrow \infty \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_f \\ \eta_p & \quad \quad \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_p \\ \eta_b & \rightarrow 0^+ \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_b \end{cases} \quad (4.14)$$

Les milieux fluide et solide apparaissent donc comme limites d'un milieu poreux. La méthode consiste ensuite à ajouter un terme de traînée aux équations de Navier-Stokes définies sur le domaine Ω . Ce terme représente l'action du milieu poreux fictif sur l'écoulement et est défini ci-dessous, où \mathbf{u} est la vitesse du fluide et ϵ une fonction porte.

$$\mathbf{f} = -\frac{\epsilon}{\eta} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (4.15)$$

Cette expression permet de définir une condition de non-glissement sur un corps solide par pénalisation sur la vitesse. Arquis & Caltagirone appliquent cette méthode en volumes-finis, tout volume appartenant au moins en partie au corps étant muni d'une constante de perméabilité η_b . Un maillage suffisamment fin est donc nécessaire pour définir les frontières solides.

Cette méthode présente l'avantage d'être facile à implémenter, un simple terme algébrique devant être ajouté aux équations du mouvement. Elle permet aussi de calculer aisément la force exercée sur un corps par une intégration volumique plutôt que surfacique. La simplicité de ce terme a permis des études théoriques assez poussées [6, 81, 80] démontrant la convergence de la solution pour η tendant vers 0. Ces études ont montré qu'il est possible, au travers de ce paramètre η , de maîtriser le niveau d'erreur sur la satisfaction de la condition de vitesse.

Néanmoins, cette méthode comporte des défauts au moins aussi importants que ses qualités. En effet, le terme source (4.15) s'avère très raide lorsque η diminue, ce qui est nécessaire pour obtenir une solution précise. Il a été montré que la stabilité de l'intégration temporelle nécessite un pas de temps $\Delta t \cong \eta \ll 1$. De plus, la convergence de l'erreur est assez lente, au mieux $O(\eta)$. Enfin, cette force génère une couche limite dont l'épaisseur est liée à l'étalement du terme (4.15) autour de la position de la paroi fictive.

D'autres auteurs [78, 94, 24] ont repris cette méthode et l'ont adaptée aux écoulements compressibles. Il ressort de ces contributions qu'une résolution implicite coûteuse est utile pour obtenir une solution précise en évitant la forte contrainte sur le pas de temps. Certains [78, 85] utilisent cette méthode dans un environnement spectral avec, toutefois, un nombre de modes de Fourier très important. Un filtrage est de plus nécessaire pour atténuer le phénomène de Gibbs.

4.3.4 Méthode de “feed-back”

Goldstein [51] inclut le calcul de la force \mathbf{f} au sein du processus itératif de résolution. Il résout les équations de Navier-Stokes et souhaite donc que l'effet des parois fictives soit l'arrêt total du fluide. Pour ce faire, il utilise un procédé de régulation de la vitesse du fluide en différents points \mathbf{x}_s du corps solide. Sa formulation de la force est la suivante, en chaque point \mathbf{x}_s , où α et β sont deux paramètres déterminés par l'utilisateur et \mathbf{u} est la vitesse du fluide.

$$\mathbf{f} = \alpha \int_0^t (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) dt + \beta (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (4.16)$$

La force externe est donc dictée par un contrôleur composé d'un terme proportionnel et d'un terme intégral, dont la consigne de régulation est une vitesse \mathbf{u}_0 aux points \mathbf{x}_s . La présence du terme intégral garantit l'obtention de la consigne à la convergence du processus.

L'inconvénient majeur de cette méthode est que le terme intégral de (4.16) introduit une condition de stabilité sur le pas de temps Δt entre les itérations, laquelle est, selon Goldstein, dans la plupart des cas plus restrictive que la condition CFL intrinsèque aux schémas d'intégration explicite d'équations hyperboliques. Cependant, il a été montré [90, 133] que cette restriction était forte dans son cas du fait de l'utilisation d'un schéma

d'intégration temporelle d'Adams-Bashforth. Dans le cas d'un schéma de Runge-Kutta, ces auteurs ont montré que la condition CFL est du même ordre que celle imposée par les équations du mouvement.

Pour aller plus loin, d'autres auteurs [90, 101] ont étudié la dynamique du contrôleur (4.16) en fonction du couple (α, β) . Il en ressort que le paramètre β , lié à l'amortissement du processus, domine la vitesse de convergence au début du processus tandis que le paramètre α est lié à la fréquence de réponse du contrôleur et détermine l'erreur finale sur la condition de vitesse. Selon Margnat [101], le couple idéal de paramètres doit être fixé selon la théorie de l'oscillateur amorti du second ordre, de fréquence propre ω_n et de taux d'amortissement ξ .

$$\alpha = -\omega_n^2 \quad (4.17)$$

$$\beta = -2\xi\omega_n \quad (4.18)$$

Certains auteurs [128, 90] notent que les écoulements interne et externe à l'obstacle sont liés dans la région proche des parois au travers de la fonction de distribution de la force. Par conséquent, il peut être intéressant dans certains cas de contrôler également l'écoulement interne.

Au passage, nous pouvons remarquer que la méthode précédente peut être considérée comme un cas particulier de celle de Goldstein pour $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{\epsilon}{\eta}$. Notons que, à précision égale sur la condition de vitesse, le terme intégral permet de diminuer la valeur du coefficient β .

4.3.5 Méthode de forçage direct

Mohd-Yusof [106] définit un terme source de force qui lui permet d'imposer directement la valeur de certaines inconnues (les composantes de vitesse) au droit des frontières fictives Γ_b . Soit les équations de Navier-Stokes discrétisées par rapport au temps, où \mathbf{U} est le vecteur des inconnues, $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ le vecteur de résidu spatial et \mathbf{f} le terme source de force.

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} = \mathbf{R}(\mathbf{U}^n) + \mathbf{f} \quad (4.19)$$

Mohd-Yusof souhaite imposer la valeur \mathbf{U}_0 aux inconnues \mathbf{U} sur les frontières Γ_b . Les équations (4.19) peuvent être réarrangées de la manière suivante.

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t [\mathbf{R}(\mathbf{U}^n) + \mathbf{f}] \quad (4.20)$$

Dès lors, si le résidu spatial $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ est connu à l’itération n , alors le terme de force est le suivant.

$$\mathbf{f} = \begin{cases} -\mathbf{R}(\mathbf{U}^n) + \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}^n) & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma_b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.21)$$

Cette méthode présente les avantages de satisfaire à tout moment la condition de vitesse et de ne pas présenter de limite de stabilité.

Cependant, elle comporte aussi des inconvénients. La précision de la méthode est grandement liée à l’interpolation de l’écoulement aux parois et à la distribution de la force. Ceci nécessite en général un maillage plus fin aux abords des parois ou un schéma d’interpolation d’ordre élevé [38, 83, 25]. D’autres auteurs [158, 161] proposent que l’intégration temporelle (4.19) soit effectuée sur le maillage lagrangien, le transfert d’information entre les maillages cartésien et lagrangien étant opéré par la même fonction pour l’interpolation et la distribution. Wang [166] mentionne que le processus de distribution détruit la satisfaction de la condition de vitesse suite à l’influence des points voisins et propose une méthode à plusieurs pas.

Aussi, l’imposition directe du champ voulu ne garantit pas que celui-ci soit physique. En effet, en règle général, le champ obtenu ne satisfait pas la conservation de la masse. Pour y remédier, Kim [83] ajoute des termes mais comme le souligne Muldoon [108], le champ de vitesse est de divergence non-nulle.

Enfin, cette méthode a été appliquée avec succès en écoulement compressible, notamment par Cho [25] et Keistler [79].

4.4 Synthèse de la méthode de frontière immergée

L’idée de base de Peskin est de définir un domaine de calcul très général puis de venir rajouter par dessus un domaine secondaire, le corps, apportant une information de modification de l’écoulement uniforme. La méthode de Peskin est très générale et offre des avantages qui sont recherchés dans plusieurs domaines. Il l’a lui-même appliquée aux problèmes d’interaction fluide-structure. Elle a ensuite été reprise pour calculer l’écoulement autour de corps de géométrie complexe pour lesquels il est difficile de générer un maillage.

L’imposition des conditions limites n’est pas directe. Il existe plusieurs méthodes pour appliquer celles-ci, aucune n’étant universelle. La méthode la plus appropriée dépend de l’usage que l’on souhaite faire de la technique.

L'approche discrète permet un contrôle sur la qualité de résolution près de l'aube, cette dernière pouvant apparaître explicitement au travers d'interpolations du maillage cartésien. Son principe se rapproche donc d'une résolution en maillage conforme, si ce n'est que ce sont les équations qui sont modifiées pour reproduire le corps, non le maillage. Elle en tire donc une propriété avantageuse, qui est la gestion efficace des écoulements à haut nombre de Reynolds, qui requièrent une localisation précise des parois. Cependant, cette approche ne peut nous convenir puisqu'il y est requis de localiser explicitement l'aube.

Nous nous orienterons plutôt vers l'approche continue. Celle-ci satisfait nos exigences en vue d'une résolution harmonique. En effet, elle permet un calcul sur un maillage uniforme azimutalement sur lequel vient se superposer une distribution de force. De plus, pour l'application au cas harmonique, nous reprenons l'idée de Peskin d'utiliser une fonction de Dirac lissée. Il ne s'agit pas seulement de répartir la force sur les points voisins du maillage eulérien mais aussi d'avoir une répartition douce de cette action. Celle-ci doit en effet être caractérisée par un spectre fréquentiel étroit, tout en offrant une définition suffisamment fine de l'aube. Ce sont là deux critères opposés, qui mèneront à un compromis.

Le corollaire est qu'il faut s'attendre à ne pouvoir résoudre l'écoulement que de manière approximative. En effet, sans localisation explicite de l'aube, l'imposition des conditions limites est soumise au niveau de raffinement du maillage, par le calcul de la force mais aussi par la répartition de celle-ci sur le maillage cartésien. Cependant, notre optique est de résoudre le système d'ordre supérieur de manière approchée, avec comme paramètres le maillage et le nombre de modes de Fourier, une information approchée donnant de bons résultats, comme nous l'avons vu au chapitre 2.

Dans ce chapitre, nous avons présenté une classe de techniques dites de frontière immérgeée qui va nous permettre de surmonter l'obstacle rencontré dans l'adaptation de la méthode de He au cas circonférentiel. En effet, les frontières immérgeées permettent de visualiser l'obstacle non plus comme un ensemble de conditions limites ponctuelles mais bien comme un champ de force, un terme source homogène, qui génère un effet identique sur l'écoulement défini sur un domaine de calcul périodique et continu. Plus rien ne s'oppose dès lors au développement d'un méridien de nature harmonique. Le chapitre suivant présente la dérivation de ce nouveau modèle.

Chapitre 5

Dérivation du méridien harmonique

Sommaire

5.1	Le système d'équations de Navier-Stokes tridimensionnelles périodiques de passage en passage	68
5.2	Les systèmes moyen et auxiliaire	69
5.3	Le système auxiliaire harmonique	73
5.3.1	Développement en série	73
5.3.2	Force des aubes	74
5.3.3	Termes non-linéaires	74
5.3.4	Termes visqueux	76
5.3.5	Système harmonique	77

Dans ce chapitre, nous allons dériver le système d'ordre supérieur donnant accès aux perturbations circonférentielles. La dérivation des systèmes moyen et aux perturbations est réalisée selon la philosophie de He, c'est-à-dire en conservant une partie moyenne non-linéaire et en linéarisant la composante fluctuante pour la résoudre ensuite par superposition modale. Dans cette configuration, les interactions non-linéaires principales entre les deux systèmes sont reprises au travers des tensions circonférentielles. Ainsi, dans un premier temps du moins, nous ferons l'hypothèse que les perturbations sont suffisamment faibles pour permettre une linéarisation. Nous savons d'ores et déjà que cette hypothèse est à mettre en doute. En effet, supposer un système linéaire reviendrait à poser une hypothèse de petites perturbations, ce que nous ne souhaitons pas faire ici. Pour concilier les objectifs, nous présenterons le système aux perturbations sous forme linéaire non-homogène, les termes non-linéaires apparaissant dans le membre de droite du système, de manière analogue à des termes sources.

Etant donné que l'écoulement est calculé sur un domaine recouvrant le corps, la valeur moyenne obtenue doit s'entendre comme une valeur moyenne non-physique, définie sur un domaine différent du domaine réel où s'écoule le fluide. Il en est de même pour les perturbations. Les valeurs réelles correspondant au domaine fluide seront ensuite obtenues

par simple post-traitement des résultats de calcul.

Afin de dériver le système méridien harmonique, nous n'allons pas partir du début de la cascade d'Adamczyk (figure 1.1) mais bien de l'étage dont nous souhaitons obtenir une image moyenne, soit les équations de Navier-Stokes périodiques de passage en passage. Aussi, nous ne considérerons pas les termes additionnels provenant des moyennes effectuées dans les étages supérieurs de la cascade. Les tensions déterministes et les tensions apériodiques n'apparaîtront donc pas dans le modèle développé.

5.1 Le système d'équations de Navier-Stokes tridimensionnelles périodiques de passage en passage

Ce système est repris aux équations (5.1) à (5.5) ci-dessous exprimées en coordonnées cylindriques (r, θ, x) , la vitesse de rotation de la roue y étant dénommée Ω . Ces équations sont complétées par l'expression de l'enthalpie totale (5.6) et la loi des gaz parfaits (5.7). Ces équations sont valables dans un repère fixe ($\Omega=0$) comme dans un repère mobile, les grandeurs apparaissant dans les équations devant, dans ce dernier cas, être assimilées aux grandeurs relatives. Pour des raisons numériques, nous conférons une forme pseudo-temporelle à ces équations, ce qui garantira la nature hyperbolique des équations par rapport au pseudo-temps τ .

Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho V_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (5.1)$$

Equations de conservation de la quantité de mouvement

Composante axiale

$$\frac{\partial \rho V_x}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho V_x V_x + p)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r V_x}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta V_x}{\partial \theta} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta} \quad (5.2)$$

Composante circonférentielle

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho V_x V_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta V_\theta + p)}{\partial \theta} &= \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} \\ &+ \frac{\tau_{r\theta} - \rho V_r V_\theta}{r} + 2\rho\Omega V_r \end{aligned} \quad (5.3)$$

Composante radiale

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V_r}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho V_x V_r}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r (\rho V_r V_r + p)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta V_r}{\partial \theta} &= \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} \\ &+ \frac{\rho V_\theta^2 + p - \tau_{\theta \theta}}{r} + \rho \Omega^2 r - 2 \rho \Omega V_\theta \end{aligned} \quad (5.4)$$

Equation de conservation de l'énergie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho V_x H}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r H}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta H}{\partial \theta} &= \frac{\partial V_j \tau_{xj}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r V_j \tau_{rj}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_j \tau_{\theta j}}{\partial \theta} \\ &- \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} \right) + \rho \Omega^2 r V_r \end{aligned} \quad (5.5)$$

Équations d'état

$$H = E + \frac{p}{\rho} \quad (5.6)$$

$$p = (\gamma - 1) \rho \left[E - \frac{V_j V_j}{2} \right] \quad (5.7)$$

5.2 Les systèmes moyen et auxiliaire

Pour obtenir le système moyen (ou système méridien), on utilise l'opérateur de moyenne circonférentielle au sein d'un canal, lequel a déjà été présenté, mais est rappelé ci-dessous.

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\frac{2\pi b}{N}} \int_p^s \phi \, d\theta \quad (5.8)$$

Nous rappelons aussi la moyenne de Favre.

$$\tilde{\phi} = \frac{\int_p^s \rho \phi \, d\theta}{\int_p^s \rho \, d\theta} = \frac{\overline{\rho \phi}}{\bar{\rho}} \quad (5.9)$$

Les expressions des perturbations par rapport aux deux moyennes sont décrites ci-dessous.

$$\phi' = \phi - \bar{\phi} \quad \phi'' = \phi - \tilde{\phi} \quad (5.10)$$

Une relation entre ces deux perturbations peut être établie.

$$\begin{aligned} \rho\phi &= (\bar{\rho} + \rho') (\tilde{\phi} + \phi'') = \bar{\rho}\tilde{\phi} + \bar{\rho}\phi'' + \rho'\tilde{\phi} + \rho'\phi'' \\ (\rho\phi)' &= \rho\phi - \overline{\rho\phi} = \bar{\rho}\phi'' + \rho'\tilde{\phi} + \rho'\phi'' \\ \rho\phi'' &= (\rho\phi)' - \rho'\tilde{\phi} \end{aligned}$$

Utilisant cette relation, il est possible d'obtenir l'expression détaillée du triple produit $\rho\phi\psi$.

$$\begin{aligned} \rho\phi\psi &= \rho (\tilde{\phi} + \phi'') (\tilde{\psi} + \psi'') \\ &= \rho\tilde{\phi}\tilde{\psi} + \rho\psi''\tilde{\phi} + \rho\phi''\tilde{\psi} + \rho\phi''\psi'' \\ &= \bar{\rho}\phi\psi + \rho'\tilde{\phi}\tilde{\psi} + \tilde{\phi}(\rho\psi)' - \rho'\tilde{\phi}\tilde{\psi} + \tilde{\psi}(\rho\phi)' - \rho'\tilde{\phi}\tilde{\psi} + \rho\phi''\psi'' \\ &= \bar{\rho}\phi\psi + \tilde{\phi}(\rho\psi)' + \tilde{\psi}(\rho\phi)' - \rho'\tilde{\phi}\tilde{\psi} + \rho\phi''\psi'' \end{aligned}$$

De là, les composantes moyenne et fluctuante du triple produit sont déduites.

$$\begin{aligned} \overline{\rho\phi\psi} &= \bar{\rho}\tilde{\phi}\tilde{\psi} + \overline{\rho\phi''\psi''} \\ (\rho\phi\psi)' &= \tilde{\phi}(\rho\psi)' + \tilde{\psi}(\rho\phi)' - \rho'\tilde{\phi}\tilde{\psi} + \rho\phi''\psi'' - \overline{\rho\phi''\psi''} \end{aligned}$$

Il nous faut ensuite traiter les dérivées pour en obtenir les moyennes et les perturbations. Rappelons l'expression de la moyenne circonférentielle d'une dérivée selon une variable spatiale quelconque s .

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial s}} = \frac{1}{b} \frac{\partial b\bar{\phi}}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \left[\phi \frac{\partial \theta}{\partial s} \right]_p^s \quad (5.11)$$

Décomposons ensuite la dérivée en une composante moyenne et une composante de perturbation.

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \overline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)'$$

Or l'expression de la moyenne d'une dérivée est connue.

$$\begin{aligned}
 \overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)} &= \frac{1}{b} \frac{\partial b\bar{\phi}}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \left[\phi \frac{\partial\theta}{\partial s} \right]_p^s \\
 &= \frac{1}{b} \frac{\partial b\bar{\phi}}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \left[\bar{\phi} \frac{\partial\theta}{\partial s} + \phi' \frac{\partial\theta}{\partial s} \right]_p^s \\
 &= \frac{1}{b} \frac{\partial b\bar{\phi}}{\partial s} - \frac{\bar{\phi}}{\frac{2\pi}{N}b} \left[\frac{\partial\theta}{\partial s} \right]_p^s - \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \left[\phi' \frac{\partial\theta}{\partial s} \right]_p^s \\
 &= \frac{1}{b} \frac{\partial b\bar{\phi}}{\partial s} - \frac{\bar{\phi}}{b} \frac{\partial b}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \left[\phi' \frac{\partial\theta}{\partial s} \right]_p^s \\
 &= \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial s} + \frac{\bar{\phi}}{b} \frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\bar{\phi}}{b} \frac{\partial b}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \left[\phi' \frac{\partial\theta}{\partial s} \right]_p^s \\
 &= \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \left[\phi' \frac{\partial\theta}{\partial s} \right]_p^s
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

On en déduit l'expression de la perturbation d'une dérivée.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)' &= \frac{\partial\phi}{\partial s} - \overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)} \\
 &= \frac{\partial\phi}{\partial s} - \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial s} + \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \left[\phi' \frac{\partial\theta}{\partial s} \right]_p^s \\
 &= \frac{\partial\phi'}{\partial s} + \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \left[\phi' \frac{\partial\theta}{\partial s} \right]_p^s
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Cette expression montre que le système aux perturbations peut être exprimé en fonction des perturbations des inconnues tridimensionnelles. Mathématiquement, le second terme du membre de droite de l'expression précédente provient de la non-périodicité de la fonction ϕ sur l'intervalle $[\theta_p, \theta_s]$. Physiquement, il traduit l'influence des aubes sur l'écoulement perturbé dans le passage inter-aubes.

Avec la formulation de type frontière immergée, l'aube n'apparaît plus dans le domaine de calcul. Par conséquent, les notions d'extrados et d'intrados n'existent plus. Dès lors, le second terme du membre de droite de chacune des relations (5.12) et (5.13) disparaît, ainsi que le facteur de blocage, rendant homogènes ces mêmes expressions.

Utilisant toutes ces relations, le système d'équations décrivant un écoulement moyen au sein d'une machine complète, soit l'écoulement méridien, peut être dérivé, ainsi que le système auxiliaire dont la solution est l'information d'ordre élevé. Ces deux systèmes sont respectivement repris par les expressions (5.14) et (5.21).

Système moyen

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial \tau} + \frac{\partial (\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{F}}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\mathbf{G}} - \bar{\mathbf{G}}_v)}{\partial r} = -(\bar{\mathbf{L}} - \bar{\mathbf{L}}_v) - (\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mathbf{S}}_v) + \bar{\mathbf{f}} \quad (5.14)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{V}_x \\ \bar{\rho}\tilde{V}_\theta \\ \bar{\rho}\tilde{V}_r \\ \bar{\rho}\tilde{E} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f}_x \\ \bar{f}_\theta \\ \bar{f}_r \\ \bar{f}_e \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{V}_x \\ \bar{\rho}\tilde{V}_x\tilde{V}_x + \bar{p} \\ \bar{\rho}\tilde{V}_x\tilde{V}_\theta \\ \bar{\rho}\tilde{V}_x\tilde{V}_r \\ \bar{\rho}\tilde{V}_x\tilde{H} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{V}_r \\ \bar{\rho}\tilde{V}_r\tilde{V}_x \\ \bar{\rho}\tilde{V}_r\tilde{V}_\theta \\ \bar{\rho}\tilde{V}_r\tilde{V}_r + \bar{p} \\ \bar{\rho}\tilde{V}_r\tilde{H} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{V}_x''\tilde{V}_x''}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{V}_x''\tilde{V}_r''}{\partial r} \\ \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{V}_\theta''\tilde{V}_x''}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{V}_\theta''\tilde{V}_r''}{\partial r} \\ \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{V}_r''\tilde{V}_r''}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{V}_r''\tilde{V}_x''}{\partial r} \\ \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{V}_x''\tilde{H}''}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{V}_r''\tilde{H}''}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\tau}_{xx} \\ \bar{\tau}_{x\theta} \\ \bar{\tau}_{xr} \\ \bar{\tau}_{xj}\tilde{V}_j - q_x \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{G}}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\tau}_{rx} \\ \bar{\tau}_{r\theta} \\ \bar{\tau}_{rr} \\ \bar{\tau}_{rj}\tilde{V}_j - \bar{q}_r \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{S}}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \bar{\tau}'_{xj}\tilde{V}_j''}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \bar{\tau}'_{rj}\tilde{V}_j''}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\bar{\mathbf{L}} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{V}_r \\ \bar{\rho}\tilde{V}_r\tilde{V}_x \\ 2\bar{\rho}\tilde{V}_r\tilde{V}_\theta - 2\Omega r\bar{\rho}\tilde{V}_r \\ \bar{\rho}\tilde{V}_r\tilde{V}_r - \bar{\rho}\tilde{V}_\theta\tilde{V}_\theta + 2\Omega r\bar{\rho}\tilde{V}_\theta - \bar{\rho}\Omega^2 r^2 \\ \bar{\rho}\tilde{V}_r\tilde{H} - \bar{\rho}\Omega^2 r^2 \tilde{V}_r \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{L}}_v = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\tau}_{xr} \\ 2\bar{\tau}_{r\theta} \\ \bar{\tau}_{rr} - \bar{\tau}_{\theta\theta} \\ \bar{\tau}_{rj}\tilde{V}_j - \bar{q}_r \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

A cela s'ajoutent les relations (5.19) et (5.20).

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \left[\bar{\rho}\bar{E} - \frac{\bar{\rho}\tilde{V}_i\tilde{V}_i}{2} - \frac{k}{2} \right], \quad k = \bar{\rho}\tilde{V}_i''\tilde{V}_i'' \quad (5.19)$$

$$\tilde{H} = \gamma\tilde{E} + \frac{(1-\gamma)}{2} \left(\tilde{V}_i^2 + \tilde{k} \right), \quad \tilde{k} = \widetilde{\tilde{V}_i''\tilde{V}_i''} \quad (5.20)$$

Système auxiliaire

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}'}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{U}'}{\partial \theta} + \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{U}' = \frac{\partial \mathbf{F}'_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}'_v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}'_v}{\partial \theta} + \mathbf{L}'_v - (\mathbf{S}' - \mathbf{S}'_v) + \mathbf{f}' \quad (5.21)$$

$\tilde{\mathbf{F}}$, $\tilde{\mathbf{G}}$ et $\tilde{\mathbf{H}}$ sont les matrices jacobiniennes axiale, radiale et azimutale. Elle ne dépendent que de l'écoulement moyen. $\tilde{\mathbf{L}}$ est la matrice jacobienne moyenne des termes sources cylindriques. \mathbf{S}' reprend les termes non-linéaires non-visqueux, \mathbf{S}'_v les termes non-linéaires visqueux. \mathbf{f}' est le vecteur de perturbation de la force obtenu par méthode de frontière immergée. \mathbf{F}'_v , \mathbf{G}'_v , \mathbf{H}'_v et \mathbf{L}'_v reprennent les termes visqueux linéaires. Le détail de ces termes se trouve en annexe B. Les relations (5.22) et (5.23) ont aussi été utilisées pour dériver le système (5.21).

$$p' = (\gamma - 1) \left[(\rho E)' + \rho' \frac{\tilde{V}_i^2}{2} - \tilde{V}_i (\rho V_i)' - \frac{k'}{2} \right] \quad (5.22)$$

$$(\rho H)' = \gamma (\rho E)' + (\gamma - 1) \left[\frac{\tilde{V}_i^2}{2} \rho' - \tilde{V}_i (\rho V_i)' - \frac{k'}{2} \right] \quad (5.23)$$

$$k' = (\rho V_i'' V_i'' - \bar{\rho} \tilde{V}_i'' \tilde{V}_i'') \quad (5.24)$$

5.3 Le système auxiliaire harmonique

Le système d'équations (5.21) est non-linéaire et tridimensionnel. Il ne comporte aucune hypothèse additionnelle. Le membre de gauche représente une forme quasi-linéaire vis-à-vis des perturbations \mathbf{U}' , c'est-à-dire linéaire pour un écoulement moyen connu. Le membre de droite reprend quant à lui les termes visqueux, les termes non-linéaires et la force des aubes.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser la démarche de He. Celle-ci consiste à faire quelques hypothèses sur la nature des termes du système et à exprimer celui-ci dans l'espace fréquentiel pour en permettre une résolution par superposition modale.

5.3.1 Développement en série

Soit le développement en série de Fourier spatiale (5.25) dans la direction circonférentielle du vecteur des perturbations des inconnues conservatives.

$$\mathbf{U}'(r, \theta, x) = \sum_n \mathbf{U}'_n(r, x) e^{i\omega_n \theta} \quad (5.25)$$

Substituant le développement (5.25) dans le système auxiliaire (5.21), nous obtenons l'expression suivante pour le membre de gauche (MG) de ce dernier.

$$\text{MG} = \sum_n \left[\frac{\partial \mathbf{U}'_n}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}'_n}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}'_n}{\partial r} + \frac{i\omega_n}{r} \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{U}'_n + \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{U}'_n \right] e^{i\omega_n \theta} \quad (5.26)$$

Afin d'obtenir un système homogène par rapport aux fonctions de Fourier, il est nécessaire d'établir une expression similaire pour le membre de droite (MD). Nous allons considérer successivement la force des aubes, les termes visqueux et les termes non-linéaires.

5.3.2 Force des aubes

Grâce au recours à la méthode dite de frontière immergée, où le corps plongé dans un fluide apparaît sous forme d'un champ de force, celui-ci agit sur le domaine fluide périodique et continue défini sur un maillage ne se conformant pas au corps. Selon cette nouvelle formulation, la force des aubes apparaît comme un terme source dans le système d'équations aux perturbations. Ce champ de force n'est pas localisé aux parois fictives des aubes, ce qui correspondrait à deux fonctions de Dirac (l'une à l'extrados et l'autre à l'intrados), mais "répandu" autour de la position fictive de l'aube, de manière à fournir une décomposition spectrale de bande passante limitée. Ceci permet de l'exprimer par la série de Fourier (5.27).

$$\mathbf{f}'(r, \theta, x) = \sum_n \mathbf{f}'_n(r, x) e^{i\omega_n \theta} \quad (5.27)$$

L'établissement de ce champ de force résulte de l'application de la méthode de frontière immergée. Son adaptation au cas harmonique sera détaillée dans la suite.

5.3.3 Termes non-linéaires

Tels quels, les termes non-linéaires participent à l'impossibilité de séparer les résolutions modales. Pour résoudre ce problème, il est donc nécessaire de les développer en série de Fourier. Les termes non-linéaires devront apparaître sous la forme suivante.

$$\mathbf{S}(r, \theta, x) = \sum_n \mathbf{S}_n(r, x) e^{i\omega_n \theta} \quad (5.28)$$

Développer les termes non-linéaires en fonction des séries de Fourier de leurs composantes et les regrouper par fréquence de Fourier nécessiterait une identification complexe et présenterait, comme l'affirmait Hall [60] pour l'expression des flux, un coût d'évaluation trop important.

Hall propose une autre solution. L'expression de ces termes non-linéaires en fonction des inconnues conservatives dans l'espace physique est connue. Dès lors, au cours d'un processus itératif, supposant connu le vecteur \mathbf{U}'_n à l'itération t , il est possible de recourir à la transformation inverse de Fourier pour retourner dans l'espace physique. Les termes non-linéaires peuvent alors être calculés puis convertis en coefficients de Fourier. Ils agiront alors comme termes sources à l'itération $t + 1$.

Cette façon de procéder présente l'inconvénient de devoir recourir aux transformations de Fourier en cours de processus itératif. Elle permet cependant d'inclure toutes les non-linéarités au sein de la méthode de He.

Il existe une alternative. Billson [13] propose une expression simplifiée des termes non-linéaires dans l'espace physique, obtenue en négligeant les triples produits de fluctuations, les perturbations de température et les fluctuations de masse volumique. Dans ce cas, les termes non-linéaires se réduisent à des doubles produits de fluctuation de vitesse. Ces formulations étant simplifiées, il serait plus aisé d'exprimer les termes sources dans l'espace fréquentiel en fonction des coefficients de Fourier des inconnues conservatives, évitant les transformations de Fourier.

Il reste une dernière possibilité. Ces termes pourraient être négligés, c'est l'hypothèse qui est faite dans la méthode harmonique de He. Pour le justifier, revenons aux objectifs fixés au début de cet exposé. Nous souhaitons limiter les besoins en empirisme du méridien. Pour cela, il nous faut notamment considérer l'influence des tensions circonférentielles sur le système moyen. Pour les former, il nous faut accéder à l'information d'ordre supérieur symbolisée par les inconnues conservatives \mathbf{U}' . Ces inconnues seront obtenues par résolution d'un système dans lequel apparaissent des termes non-linéaires du type (5.29) qui sont en fait des perturbations de perturbations.

$$\rho\phi''\psi'' - \overline{\rho\phi''\psi''} \quad (5.29)$$

Dès lors, ces termes n'auront normalement qu'une influence très indirecte sur l'écoulement méridien.

A ce niveau, nous n'allons pas plus loin dans la discussion des termes non-linéaires. Celle-ci sera poursuivie au chapitre 7.

5.3.4 Termes visqueux

Afin que les termes visqueux ne fassent pas obstacle à l'obtention d'un système homogène, il est nécessaire de leur appliquer quelques hypothèses de travail. Les tensions visqueuses sont de la forme (5.30) ou (5.31) où μ et ν sont respectivement les viscosités dynamique et cinématique.

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (5.30)$$

$$= \nu \rho \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (5.31)$$

Pour en obtenir la moyenne et la perturbation, nous allons faire l'hypothèse [141] que les fluctuations de viscosité cinématique ν' sont négligeables. Ceci mène aux expressions (5.32) et (5.33) pour la moyenne et la perturbation des tensions visqueuses.

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{ij} &= \overline{\mu \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)} \\ &\approx \nu \rho \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \\ &\approx \nu \bar{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{V}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \\ &\approx \bar{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{V}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \tau'_{ij} &= \bar{\mu} \left(\frac{\partial V''_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V''_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial V''_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \\ &\quad + \nu \rho' \left(\frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{V}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \\ &\quad + \nu \rho' \left(\frac{\partial V''_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V''_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial V''_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Telle quelle, l'expression de la perturbation des tensions visqueuses est non-linéaire et ne permet pas une décomposition en série de Fourier du type (5.34).

$$\tau' (r, \theta, x) = \sum_n \tau'_n (r, x) e^{i\omega_n \theta} \quad (5.34)$$

Ayant précédemment fait l'hypothèse de négliger les termes non-linéaires, nous allons poursuivre dans cette voie, en accord avec la philosophie de He. Nous supposerons les produits de perturbations négligeables, ce qui revient à supprimer le troisième terme du membre de droite de l'expression (5.33), et les perturbations de masse volumique négligeables par rapport à leur moyenne. Ainsi, la perturbation par rapport à une moyenne de Favre s'exprime par (5.36).

$$\phi'' = \frac{(\rho\phi)' - \rho'\tilde{\phi}}{\bar{\rho} + \rho'} \quad (5.35)$$

$$\approx \frac{(\rho\phi)' - \rho'\tilde{\phi}}{\bar{\rho}} \quad (5.36)$$

Ce faisant, la moyenne des perturbations des vitesses devient nulle. Une décomposition en série de Fourier de ces perturbations et donc des tensions visqueuses devient alors compatible avec les expressions moyennes de ces dernières.

Nous ajouterons une dernière hypothèse en supposant également que le champ de viscosité dynamique ne dépend que de l'écoulement moyen, ce qui nous permettra d'utiliser le modèle de turbulence implémenté dans le méridien. Dans ce cas, le deuxième terme du membre de droite de (5.33) est négligé.

Toutes ces hypothèses nous mènent à considérer l'expression approchée (5.37) pour les tensions visqueuses.

$$\tau'_{ij} \approx \bar{\mu} \left(\frac{\partial V_j''}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i''}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k''}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)$$

5.3.5 Système harmonique

Soit les développements en série de Fourier des inconnues conservatives et du terme source de force.

$$\mathbf{U}'(r, \theta, x) = \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \mathbf{U}'_n(r, x) e^{i\omega_n \theta} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{f}'(r, \theta, x) = \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \mathbf{f}'_n(r, x) e^{i\omega_n \theta} \quad (5.38)$$

$$\mathbf{F}'_v(r, \theta, x) = \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \mathbf{F}'_{v,n}(r, x) e^{i\omega_n \theta} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{G}'_v(r, \theta, x) = \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \mathbf{G}'_{v,n}(r, x) e^{i\omega_n \theta} \quad (5.40)$$

$$\mathbf{H}'_v(r, \theta, x) = \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \mathbf{H}'_{v,n}(r, x) e^{i\omega_n \theta} \quad (5.41)$$

$$\mathbf{L}'_v(r, \theta, x) = \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \mathbf{L}'_{v,n}(r, x) e^{i\omega_n \theta} \quad (5.42)$$

La somme s'étend sur $2N$ modes complexes conjugués, le mode d'indice 0 n'apparaissant pas puisque correspondant à la valeur moyenne, laquelle est résolue par le système moyen (5.14).

Substituant (5.37) à (5.42) dans (5.21) et sachant que les fonctions de Fourier sont orthogonales, l'expression (5.43) du sous-système n parmi $2N$ est obtenu.

$$\frac{\partial \mathbf{U}'_n}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}'_n}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}'_n}{\partial r} + \left(\frac{i\omega_n}{r} \tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{L}} \right) \mathbf{U}'_n = \frac{\partial \mathbf{F}'_{v,n}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}'_{v,n}}{\partial r} + \frac{i\omega_n}{r} \mathbf{H}'_{v,n} + \mathbf{L}'_{v,n} + \mathbf{f}'_n \quad (5.43)$$

Il s'agit donc d'un système d'équations complexes dépendant uniquement des coordonnées méridiennes (r, x) , par conséquent résoluble par un code de calcul méridien. Ainsi, chaque mode serait obtenu par un calcul méridien distinct correspondant à une composante fréquentielle du champ de force. Cette formulation s'inscrit en ligne directe de la méthode de He, puisque le système aux perturbations peut être vu comme une superposition de problèmes d'ordre inférieur dans le domaine fréquentiel, et donc résolu par la même technique que le système moyen, lui-même correspondant à la partie moyenne du champ de force.

Quant aux fréquences associées aux modes de Fourier, elles sont calculées selon l'extension azimutale $\Delta\theta$ du passage inter-aubes.

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{\Delta\theta} \quad (5.44)$$

Les coefficients de Fourier sont complexes et conjugués pour des valeurs opposées de l'indice modal. Ainsi, chaque mode de Fourier requiert la résolution de deux problèmes méridiens, l'un pour la partie réelle et l'autre pour la partie imaginaire.

$$\mathbf{U}'_n = \mathbf{U}_n^{\Re} + i\mathbf{U}_n^{\Im} \quad (5.45)$$

La formulation complète du système (5.43) peut être trouvée en annexe C.

A ce point du travail, nous sommes parvenus à proposer une solution innovante pour la reproduction des effets d'ordre élevé au sein d'un code méridien, à savoir les tensions circonférentielles et la force des aubes. A notre connaissance, cette combinaison entre la méthode harmonique non-linéaire, un méridien et la méthode de frontière immergée est unique.

Selon cette nouvelle formulation, il n'y a théoriquement plus aucun obstacle en vue de l'affranchissement du méridien en empirisme. Toute médaille a son revers et il est évident que l'acquisition de cette information d'ordre supérieur va augmenter le coût de calcul comparativement à un méridien classique.

Dans le prochain chapitre, nous allons détailler l'implémentation de ce méridien harmonique au sein du code existant. Ce méridien harmonique apparaîtra comme une nouvelle fonctionnalité, comme un nouvel étage de calcul venant s'ajouter au méridien classique, en accord avec la philosophie de la cascade d'Adamczyk. La seule modification de l'étage classique se fera au niveau de la formulation de la force de l'obstacle immergé.

Chapitre 6

Implémentation du méridien harmonique

Sommaire

6.1	Code méridien initial	82
6.1.1	Méthode des volumes finis	82
6.1.2	Discrétisation spatiale	83
6.1.3	Intégration temporelle	86
6.1.4	Conditions limites	88
6.2	Fonctionnalité harmonique	89
6.2.1	Calcul des flux	89
6.2.2	Intégration temporelle	91
6.2.3	Conditions limites	93
6.3	Recours à la formulation de frontière immergée	95
6.3.1	Choix de la méthode	95
6.3.2	Discrétisation spatiale	96
6.3.3	Du maillage lagrangien vers le maillage cartésien	99
6.3.4	Du maillage cartésien vers le maillage lagrangien	103
6.3.5	Phénomène de Gibbs	104
6.3.6	Intégration de l'équation de force	105

Ce chapitre est consacré aux aspects numériques de la mise en place du méridien harmonique. Celui-ci est composé de trois techniques : les volumes finis, la méthode harmonique non-linéaire et la méthode de frontière immergée. Nous commencerons par présenter brièvement la structure originale du méridien qui recourt à la technique des volumes finis. Ensuite, nous aborderons les modifications requises par la fonctionnalité harmonique. Pour terminer, nous concentrerons la discussion sur l'élément prépondérant du méridien nouvellement développé ; l'implémentation de la méthode de frontière immergée et ses interactions avec les deux pans précédents du code.

6.1 Code méridien initial

Cette partie du chapitre ne se veut pas une description complète du code méridien mais plutôt une présentation des techniques numériques utilisées. Ces techniques ont en effet une importance prépondérante sur la façon d'appliquer les méthodes harmonique et de frontière immergée.

La force de la méthode harmonique développée est de s'appuyer sur le méridien classique et de lui adjoindre des capacités de résolution et de simulation supplémentaires. La philosophie, développée depuis le début de cette contribution est de conserver les principes du méridien, un code bidimensionnel, tout en lui ajoutant un étage permettant l'accès à une description physique plus complète.

Le code original bénéficie de l'état de l'art de la CFD dont nous allons présenter brièvement certains points utiles pour la suite de l'exposé. L'implémentation détaillée du méridien classique est disponible dans Simon [136].

6.1.1 Méthode des volumes finis

Les systèmes d'équations (5.14) et (5.43) sont analogues à l'équation générique (6.1).

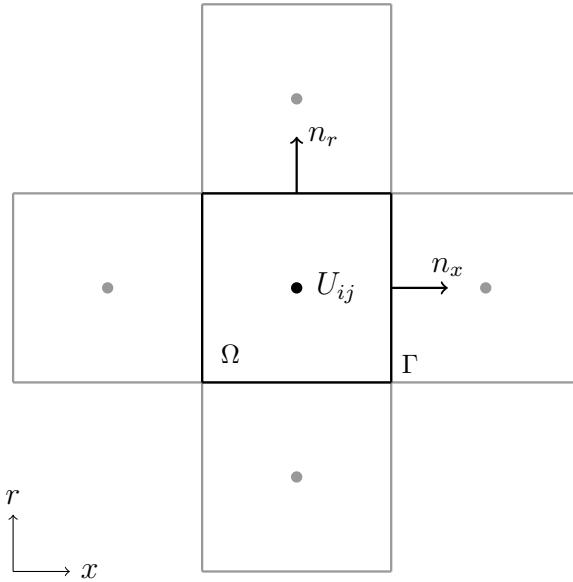
$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial r} = S \quad (6.1)$$

Afin de résoudre numériquement une équation de ce type, il est nécessaire de la discréteriser sur un certain maillage. Différentes méthodes le font : les éléments finis, les différences finies et les volumes finis. L'état de l'art en CFD fait appel à la résolution par volumes finis.

Cette technique consiste en la résolution simultanée, sur un ensemble de volumes constituant un maillage, de la forme intégrale de l'équation (6.1). Lorsque le maillage est structuré, i.e. de topologie parallélépipédique, les volumes sont des quadrangles repérables par un couple d'indices (i, j) . Selon l'approche de type centrée (“*cell-centered*”), chacun de ces quadrangles, de surface Ω et de périmètre Γ , porte en son centre l'inconnue U_{ij} . Ceci est illustré à la figure 6.1.

La valeur de l'inconnue U_{ij} est obtenue par la résolution de l'équation intégrale (6.2).

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial r} \right) d\Omega = \int_{\Omega} S d\Omega \quad (6.2)$$

FIGURE 6.1 – Approche “*cell-centered*” en volumes finis

Utilisant le théorème de Green sur le volume $d\Omega$ de contour $d\Gamma$, l'équation simplifiée (6.3) est obtenue.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega = \oint_{\Gamma} (F n_x + G n_r) d\Gamma + \int_{\Omega} S d\Omega \quad (6.3)$$

Si l'on fait les hypothèses que $\frac{\partial U}{\partial t}$ et S sont constants sur le volume et que le flux normal $f = (F n_x + G n_r)$ est constant sur chaque face, l'équation simplifiée (6.4) détermine la valeur de U .

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=1}^4 f_i \Delta \Gamma_i + S \quad (6.4)$$

Néanmoins, pour résoudre cette équation, il reste à exprimer le flux normal f et la dérivée pseudo-temporelle $\frac{\partial U}{\partial t}$. L'expression du flux concerne le problème de la discréétisation spatiale tandis que l'expression de la dérivée est relative au problème de l'intégration temporelle.

6.1.2 Discréétisation spatiale

La détermination des flux à travers les faces des éléments de volumes dépend de la nature de ces flux. La méthode numérique employée diffère selon que celui-ci est visqueux ou non-visqueux.

Partie convective

La difficulté d'établir les flux convectifs $f(U)$ provient de leur nature hyperbolique. Ces flux correspondent à la propagation d'informations dans certaines directions, dont il convient de tenir compte lors de la discréétisation pour respecter leur physique. Les schémas répondant à cette condition sont dits “décentrés amont” (“*upwind*”).

Le schéma décentré utilisé pour la cause est celui de Roe [126]. Il résout de manière approchée un problème de Riemann qui consiste, pour les équations d'Euler monodimensionnelles, à déterminer la solution des équations d'Euler à l'interface de deux zones où des écoulements différents initiaux résident. En amont de l'interface se trouve un état gauche U_L tandis qu'un état droit U_R existe en aval de l'interface, comme illustré à la figure 6.2.

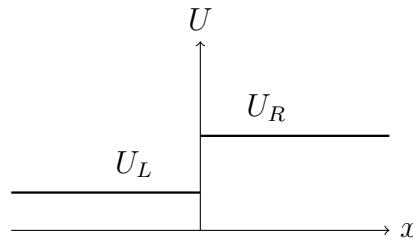


FIGURE 6.2 – Conditions initiales du problème de Riemann

Selon le schéma de Roe, le flux $f(U_L, U_R)$ est obtenu par l'expression (6.5).

$$f(U_L, U_R) = \frac{1}{2} [f(U_L) + f(U_R)] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 |\lambda_i| r_i \delta W_i \quad (6.5)$$

où λ_i sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de l'écoulement méridien, r_i les vecteurs propres à droite de la matrice jacobienne et δW_i l'intensité des ondes. Le détail de la formulation de Roe se trouve en annexe D.

Pour évaluer l'expression (6.5), il reste à déterminer les états gauche U_L et droit U_R sur la face du volume fini. La détermination de ces états constitue le problème de reconstruction. Le schéma de reconstruction employé dans le code, du fait de son ordre de précision élevée, est le schéma MUSCL (*Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws*) développé par Van Leer [162]. Ce schéma s'appuie, pour chaque dimension du problème, sur les 4 noeuds voisins de la face en $x_{i+\frac{1}{2}}$, illustrés à la figure 6.3.

Sur un maillage uniforme, le schéma de reconstruction MUSCL s'exprime par les relations (6.6) et (6.7) et atteint l'ordre 3 de précision pour $\kappa = 1/3$. Pour les autres valeurs du paramètre κ , le schéma est d'ordre 2.

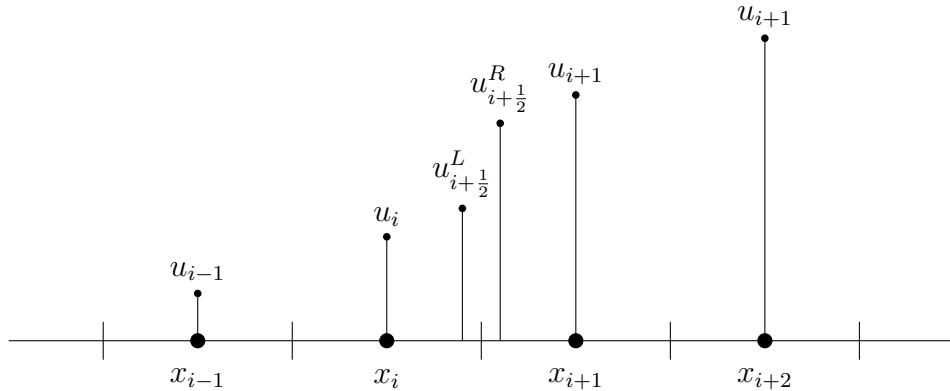


FIGURE 6.3 – Informations pour la reconstruction MUSCL

$$u_{i+\frac{1}{2}L} = u_i + \frac{1}{4} [(1 - \kappa) (u_i - u_{i-1}) + (1 + \kappa) (u_{i+1} - u_i)] \quad (6.6)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}R} = u_i + \frac{1}{4} [(1 - \kappa) (u_{i+1} - u_i) + (1 + \kappa) (u_i - u_{i-1})] \quad (6.7)$$

La formulation complète, sur un maillage quelconque, est reprise en annexe E.

Ce schéma de haut ordre ne peut cependant être utilisé tel quel. En effet, selon le théorème de Godunov [50], les schémas linéaires utilisés pour les équations de convection ne peuvent être monotones que s'ils sont du premier ordre de précision. Un schéma est dit monotone s'il ne crée pas de nouvel extremum et s'il ne diminue (resp. augmente) pas un minimum (resp. maximum) local. Le schéma MUSCL étant au moins d'ordre deux, il n'est pas monotone. Ainsi, des oscillations numériques peuvent apparaître au voisinage d'une discontinuité, telle un choc.

Selon le théorème de Godunov, il est possible d'éviter un tel comportement en introduisant de la non-linéarité. Une telle non-linéarité peut être apportée par un limiteur qui réagira, lors de la détection d'un comportement non-monotone, en modifiant le schéma pour le ramener à l'ordre 1 de précision. La description des limiteurs dépassant le cadre de l'exposé, nous nous contenterons de préciser que les limiteurs “MinMod” [127] et “Van Albada” [159] sont implémentés dans le code.

Partie visqueuse

Contrairement à la partie convective, la partie visqueuse correspond à une action diffusive sans direction préférentielle. Ces termes peuvent donc être discrétisés par un schéma centré. La difficulté de la discrétisation des termes visqueux provient plutôt du fait qu'ils comprennent les gradients des inconnues portées par les noeuds. La discrétisation spatiale visqueuse consiste à évaluer précisément ces gradients aux faces des volumes finis.

Ceci est réalisé au moyen du schéma dit “en diamant” (“*diamond path*”) [26], qui consiste à appliquer le théorème de Green à un quadrangle formé des deux sommets de la face en question et de ses deux nœuds voisins, comme l’illustre la figure 6.4.

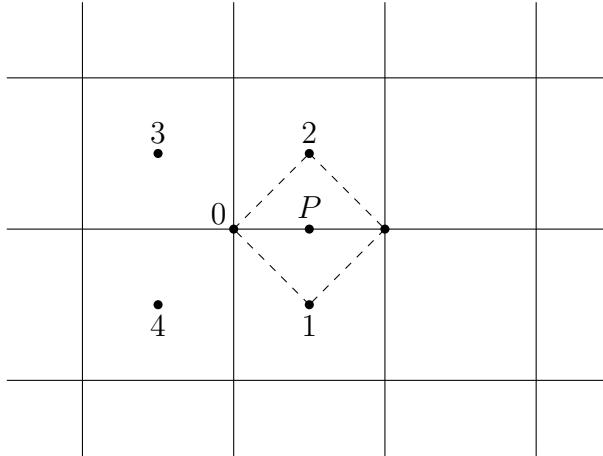


FIGURE 6.4 – Volume en diamant (en trait discontinu)

L’évaluation du gradient au point P à l’aide du théorème de Green passe par la connaissance des valeurs aux sommets du diamant. Pour conserver l’ordre de précision général de la discréétisation, ces valeurs doivent être obtenues par une méthode d’ordre 2 de précision. Elles sont obtenues par interpolation bilinéaire entre les valeurs aux 4 nœuds voisins, notés 1 à 4, du point 0. Le détail de l’interpolation est fourni en annexe F.

6.1.3 Intégration temporelle

L’équation (6.4) comporte une dérivée temporelle. En effet, bien que la seule solution stationnaire de l’écoulement soit recherchée, il est utile de conserver une dérivée temporelle. Ceci permet de conférer aux équations une nature hyperbolique, que l’écoulement soit subsonique ou supersonique. Grâce à cette invariance de la nature hyperbolique, une technique de résolution numérique unique permet de gérer tous les écoulements.

La résolution précise de l’échelle de temps n’est cependant pas notre objectif. Ainsi, il n’est pas nécessaire d’évaluer la dérivée temporelle exacte, une dérivée pseudo-temporelle, par rapport à un pseudo-temps numérique peut donc être utilisée. Ceci permet de recourir à des techniques d’accélération de la convergence.

Le schéma d’intégration temporelle utilisé dans le code est le schéma de Runge-Kutta, un algorithme d’intégration à plusieurs pas. Soit l’équation (6.4) réécrite sous la forme (6.8).

$$\frac{\partial U}{\partial t} = R(U) \quad (6.8)$$

Le schéma de Runge-Kutta à m pas s'écrit de la manière suivante, pour passer de l'itération n à l'itération $n + 1$. Comme toute méthode explicite, celle-ci comporte une limite de stabilité.

$$\begin{aligned} U^0 &= U^n \\ U^1 &= U^0 + \alpha_1 \Delta t R(U^0) \\ &\dots \\ U^m &= U^0 + \alpha_m \Delta t R(U^{m-1}) \\ U^{n+1} &= U^m \end{aligned}$$

Les coefficients α_m déterminent les propriétés du schéma. Un schéma à m pas peut être au plus d'ordre m en termes de précision temporelle. Ceci requiert cependant un ensemble de paramètres α_m particulier.

Lorsque la précision temporelle n'est pas recherchée, ce qui est le cas ici, les paramètres α_m peuvent être choisis de manière à conférer au schéma davantage d'amortissement et de stabilité afin d'accélérer la convergence. Deux schémas sont implémentés, l'un à trois pas, l'autre à quatre. Les paramètres associés ainsi que le CFL maximum sont repris au tableau 6.1.

	α_1	α_2	α_3	α_4	CFL _{max}
3 pas	8/17	17/20	1	-	1.53
4 pas	1/4	5/14	14/25	1	2.58

TABLE 6.1 – Paramètres des schémas de Runge-Kutta implémentés

La limite de stabilité d'un schéma intégrant des équations de type hyperbolique s'exprime par la restriction (6.9) sur le pas de temps discret Δt .

$$\Delta t \leq \Omega \frac{\text{CFL}_{\max}}{\sum_{i=1}^4 (|V_n + a|)_i \Delta \Gamma_i} \quad (6.9)$$

Une fois de plus, la précision temporelle n'étant pas souhaitée, il est possible d'attribuer un pas de temps maximum différent à chaque volume fini, selon l'expression (6.9). Cette technique du pas de temps local permet d'améliorer la convergence générale du processus itératif.

Une technique d'accélération additionnelle est le lissage des résidus (“*Residual Smoothing*”). Elle consiste à remplacer le résidu R_i d'un nœud i par une moyenne pondérée \bar{R}_i des résidus environnants. Le résidu pondéré est obtenu par la résolution du système implicite (6.10), pour un cas monodimensionnel.

$$-\epsilon \bar{R}_{i-1} + (1 + 2\epsilon) \bar{R}_i - \epsilon \bar{R}_{i+1} = R_i \quad (6.10)$$

Pour un paramètre de lissage ϵ positif, cette technique permet d'augmenter la limite de stabilité CFL.

6.1.4 Conditions limites

Afin de poser correctement le problème, les limites du domaine de calcul doivent inclure certaines informations provenant de l'extérieur. Pour les équations d'Euler, le nombre de ces conditions limites est déterminé par le nombre d'ondes caractéristiques entrant dans le domaine.

Ainsi, l'entrée du domaine nécessite l'imposition de quatre conditions lorsque l'écoulement y est subsonique et cinq lorsqu'il est supersonique. Les quatre conditions en subsonique sont la pression totale, la température totale et les angles d'entrée de l'écoulement. A la sortie du domaine, une seule condition suffit en subsonique. Il s'agit dans notre cas de la pression statique.

Ces conditions limites d'entrée et de sortie sont conservées pour les équations de Navier-Stokes. En effet, il est communément admis que lorsque les frontières sont suffisamment éloignées des aubages, l'écoulement y est principalement non-visqueux.

En ce qui concerne les parois solides du domaine de calcul, les conditions imposées sont différentes selon la nature visqueuse ou non des équations résolues. Pour les équations d'Euler, la vitesse normale à la paroi est nulle. Pour les équations de Navier-Stokes, une condition de non-glissement est imposée ainsi que la température de paroi si celle-ci est isotherme ou l'annulation de son gradient si la paroi est adiabatique.

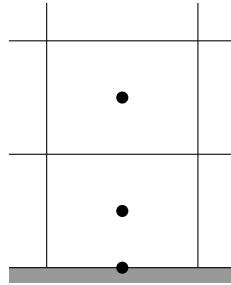


FIGURE 6.5 – Nœud additionnel en frontière de domaine

Numériquement, afin d'imposer ces conditions, un nœud additionnel est placé en chaque face frontière, comme illustré à la figure 6.5. Ces nœuds additionnels portent également des inconnues mais les équations du fluide n'y sont pas résolues. Leur seule fonction est de permettre une évaluation des flux aux faces frontières selon les valeurs imposées à leurs inconnues.

6.2 Fonctionnalité harmonique

Nous venons de décrire les caractéristiques principales de l'implémentation du méridien classique. Au sein du méridien harmonique, la partie classique devient la partie moyenne du système complet. Elle sera conservée telle quelle, à l'exception de l'adjonction de termes supplémentaires (tensions circonférentielles, force). Il s'agit là d'un des avantages de la fonctionnalité harmonique. En effet, elle apparaît, tant numériquement que physiquement, comme un étage supplémentaire apportant un lot d'informations additionnelles.

Comme nous l'avons vu précédemment, le système auxiliaire ayant pour solution les perturbations circonférentielles de l'écoulement peut être résolu par une superposition de calculs méridiens. Dès lors, la majeure partie de son implémentation est similaire à celle de la partie moyenne. Néanmoins, certaines différences apparaissent du fait du caractère pseudo-linaire des équations et de leur nature tridimensionnelle. L'exposé de ces différences fait l'objet de cette partie.

6.2.1 Calcul des flux

Le système d'équations harmoniques (5.43) peut être réécrit sous la forme conservative générique (6.11).

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + \frac{\partial F'}{\partial x} + \frac{\partial G'}{\partial r} = S' \quad (6.11)$$

avec U' les perturbations harmoniques des inconnues conservatives, F' et G' les flux harmoniques axial et radial.

Sous l'hypothèse de linéarité invoquée pour obtenir le système (5.43), il peut encore être écrit sous la forme quasi-linaire générique (6.12)

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + \mathbf{F}(\bar{U}) \frac{\partial U'}{\partial x} + \mathbf{G}(\bar{U}) \frac{\partial U'}{\partial r} = S' \quad (6.12)$$

avec les matrices jacobiniennes $\mathbf{F}(\bar{U})$ et $\mathbf{G}(\bar{U})$ du système harmonique définies par les expressions suivantes.

$$\mathbf{F}(\bar{U}) = \frac{\partial F'}{\partial U'} \quad (6.13)$$

$$\mathbf{G}(\bar{U}) = \frac{\partial G'}{\partial U'} \quad (6.14)$$

Les matrices jacobienes du système harmonique ne dépendent que de l'écoulement moyen \bar{U} . De plus, celles-ci sont égales aux matrices jacobienes du système moyen. En effet, soit le développement en série de Taylor (6.15) du flux $F(U)$ autour du point $U = \bar{U}$.

$$F(U) = \underbrace{F(\bar{U})}_{\bar{F}} + \underbrace{\left[\frac{\partial F(U)}{\partial U} \right]_{U=\bar{U}}}_{F'} (U - \bar{U}) + O((U - \bar{U})^2) \quad (6.15)$$

Le premier terme correspond au flux axial du système moyen tandis que le second correspond au flux axial du système auxiliaire. Vu la définition d'une matrice jacobienne, l'égalité (6.16) est vraie et montre que les jacobienes des deux systèmes sont identiques.

$$\mathbf{F}(\bar{U}) = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{U}} = \frac{\partial F'}{\partial U'} \quad (6.16)$$

La matrice jacobienne des deux systèmes est donc décrite par l'expression (6.17).

$$\mathbf{A}(\bar{U}) = \mathbf{F}(\bar{U}) n_x + \mathbf{G}(\bar{U}) n_r \quad (6.17)$$

Cette observation s'avère utile pour dériver de manière simple le schéma de Roe (6.5) pour le système harmonique. Comme le montre Geuzaine [43], celui-ci peut se réécrire sous la forme matricielle (6.18)

$$\mathbf{f}(U_L, U_R) = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(U_L) + \mathbf{f}(U_R)] - \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{A}}| (U_R - U_L) \quad (6.18)$$

avec

$$|\hat{\mathbf{A}}| = \hat{\mathbf{R}} |\hat{\lambda}| \hat{\mathbf{R}}^{-1} \quad (6.19)$$

où $\hat{\mathbf{R}}$ est la matrice des vecteurs propres à droite et $\hat{\lambda}$ la matrice diagonale des valeurs propres, toutes deux évaluées selon la moyenne de Roe.

Le schéma de Roe pour le système harmonique est donc exprimé par (6.20) et comparé à celui du système moyen (6.21).

$$\mathbf{f}(\bar{U}_L, U'_L, \bar{U}_r, U'_R) = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\bar{U}_L, U'_L) + \mathbf{f}(\bar{U}_r, U'_R)] - \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{A}}(\hat{\bar{U}})| (U'_R - U'_L) \quad (6.20)$$

$$\mathbf{f}(\bar{U}_L, \bar{U}_r) = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\bar{U}_L) + \mathbf{f}(\bar{U}_r)] - \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{A}}(\hat{\bar{U}})| (\bar{U}_R - \bar{U}_L) \quad (6.21)$$

6.2.2 Intégration temporelle

Le système d'équations harmoniques (5.43) peut être réécrit sous la forme quasi-linéaire générique (6.12) rappelée ci-dessous.

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + \mathbf{F}(\bar{U}) \frac{\partial U'}{\partial x} + \mathbf{G}(\bar{U}) \frac{\partial U'}{\partial r} = S'$$

avec les matrices jacobiniennes $\mathbf{F}(\bar{U})$ et $\mathbf{G}(\bar{U})$ du système harmonique, identiques à celles du système moyen, comme explicité précédemment.

Une analyse de stabilité d'un schéma menant à une condition du type (6.9), telle une analyse de Von Neumann, se base notamment sur les hypothèses suivantes :

- les matrices jacobiniennes sont constantes,
- les termes dérivés d'ordre inférieur sont négligeables.

La première condition ne pose pas de problème puisque la matrice jacobienne ne dépend pas des perturbations et que le critère est appliqué cellule par cellule pour déterminer un pas de temps local.

La deuxième hypothèse consiste à négliger le terme source S' , celui-ci étant bien inférieur aux termes dérivés à la limite de raffinement de maillage, i.e. pour une longueur de maille $\Delta x \rightarrow 0$ et un pas de temps $\Delta t \rightarrow 0$. En pratique, cette condition n'est jamais totalement remplie mais son approximation suffit. Selon cette hypothèse, la discrétisation du système harmonique étant la même que celle du système moyen, la limite de stabilité doit être la même. Dans certains cas cependant, il peut arriver que les termes dérivés d'ordre inférieur soient du même ordre que les termes dérivés d'ordre supérieur.

Dans le terme source S' du système (6.12) se trouve l'expression spectrale des flux circonférentiels, qui font intervenir la fréquence modale ω . Si l'on suppose que ce terme est dominant dans S' , l'équation (6.12) peut se réécrire sous la forme (6.22).

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + \mathbf{F}(\bar{U}) \frac{\partial U'}{\partial x} + \mathbf{G}(\bar{U}) \frac{\partial U'}{\partial r} + i \frac{\omega}{r} \mathbf{H}(\bar{U}) U' = 0 \quad (6.22)$$

Cette fréquence modale ω pouvant être importante pour les harmoniques élevées, il apparaît en pratique que ce terme ne peut pas être négligé pour établir la limite de stabilité du processus itératif. Afin d'étendre la condition (6.9) à la prise en compte de ce terme dérivé spectral, nous réécrivons l'équation (6.22) dans le formalisme volumes-finis.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=1}^4 f_i \Delta \Gamma_i + i \frac{\omega}{r} h \quad (6.23)$$

avec f_i le flux méridien normal à la frontière $\Delta \Gamma_i$ et h le terme source exprimant la dérivée

spectrale.

Par extension, si l'équation (6.4) mène à la condition de stabilité (6.9), alors l'équation (6.23) est stable pourvu que la condition (6.24) soit respectée.

$$\Delta t \leq \Omega \frac{CFL_{max}}{\sum_{i=1}^4 (|V_n + a|)_i \Delta \Gamma_i + \frac{\omega}{r} |V_\theta + a| \Omega} \quad (6.24)$$

En effet, tout comme les vitesses $|V_n + a|$ sont les valeurs propres maximales de la matrice jacobienne normale $\mathbf{F}(\bar{U}) n_x + \mathbf{G}(\bar{U}) n_r$, $|V_\theta + a|$ est la valeur propre maximale de la matrice jacobienne $\mathbf{H}(\bar{U})$.

Ainsi, chaque résolution modale du système harmonique correspondant au mode n de fréquence propre ω_n a sa propre limite de stabilité, celle-ci étant plus restrictive pour les harmoniques de plus haut ordre. Chacun de ces systèmes harmoniques est intégré temporellement par le même schéma de Runge-Kutta que celui utilisé pour le système moyen. Selon He [61], cette intégration simultanée permet d'améliorer la stabilité et la vitesse de convergence. Ceci provient du lien non-linéaire qui existe entre le système moyen d'une part et le système harmonique aux perturbations d'autre part. Ce couplage est réalisé par les matrices jacobiniennes et les tensions circonférentielles. Le système auxiliaire détermine les perturbations et par conséquent les tensions circonférentielles, qui apparaissent dans le membre de droite des équations moyennes. Celles-ci impactent également le système auxiliaire au travers des matrices jacobiniennes qui ne dépendent que des valeurs moyennes de l'écoulement. Cet échange d'information permet de capturer les non-linéarités de l'écoulement. Il est repris schématiquement à la figure 6.6, pour deux itérations t et $t + 1$. En pratique, cet échange d'information est réalisé à chaque pas du schéma de Runge-Kutta.

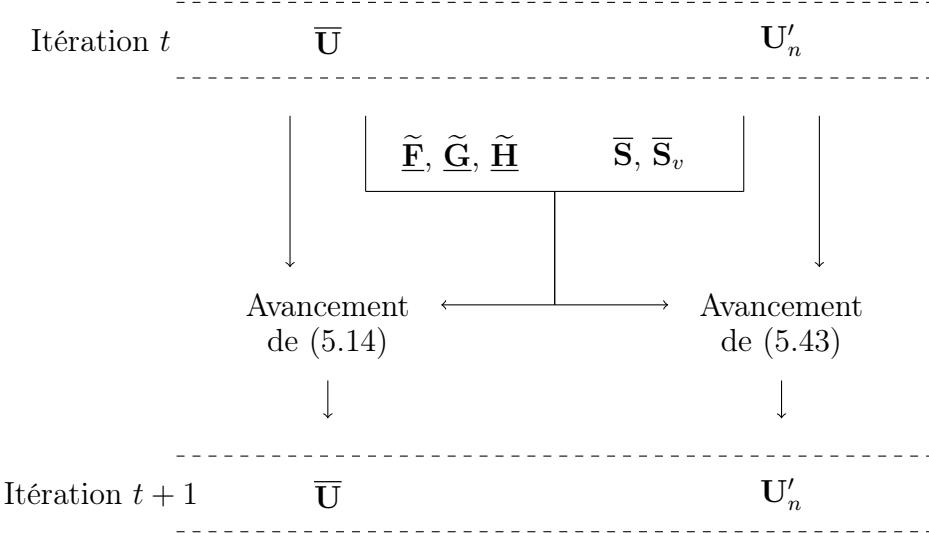


FIGURE 6.6 – Avancement temporel simultané des systèmes moyen et harmonique

Le calcul des tensions circonférentielles est donc effectué à chaque itération. Il est opéré à l'aide de la relation de fermeture (6.25), laquelle est peu consommatrice en temps de calcul.

$$\overline{\rho V_i'' V_j''} = 2\bar{\rho} \sum_{n=1}^N \left(V_{i_n}''{}^R V_{j_n}''{}^R + V_{i_n}''{}^S V_{j_n}''{}^S \right) \quad (6.25)$$

6.2.3 Conditions limites

Pour des raisons de compatibilité entre les systèmes auxiliaire et moyen, les conditions limites doivent être de même nature. Celles-ci sont reprises au tableau 6.2.

Amont	Aval	Paroi non-visqueuse	Paroi visqueuse
Pression totale	Pression statique	Glissement	Arrêt
Température totale			
Direction			

TABLE 6.2 – Conditions limites subsoniques

Ainsi, pour permettre la résolution du système harmonique par superposition modale, chacun des ces systèmes modaux doit avoir ses propres conditions limites. Il convient donc d'exprimer les valeurs du tableau 6.2, ou plutôt leurs perturbations, en terme fréquentiel.

D'un point de vue coût numérique, la façon la plus intéressante d'imposer les conditions limites est de rester dans le domaine fréquentiel et de les exprimer par des relations directes entre coefficients de Fourier des valeurs concernées. Si ceci est possible pour les conditions en aval et aux parois qui font intervenir les vitesses et la pression, aisément exprimables par des relations linéaires en fonction des inconnues conservatives, ce n'est pas le cas en amont du domaine. En effet, l'expression (6.26) de la pression totale est non-linéaire.

$$p^0 = p \left(\frac{T^0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (6.26)$$

Dès lors, pour cette frontière, l'imposition sur chaque mode des valeurs prescrites nécessite de passer dans le domaine physique par une transformation inverse de Fourier. Les valeurs y sont calculées pour être ensuite reportées dans l'espace fréquentiel par une nouvelle transformée de Fourier. Afin de préserver la compatibilité entre les systèmes auxiliaire et moyen, il est important d'utiliser cette même procédure pour déterminer les valeurs du système moyen.

En ce qui concerne les autres frontières, il est possible de recourir à des expressions linéaires des inconnues conservatives modales. Celles-ci sont exprimées ci-dessous.

Frontière aval Dans une vision méridienne du problème, nous exprimons ici la nullité des perturbations de pression statique. Un champ de pression non-uniforme pourrait cependant être envisagé. La relation (6.27) découle de l'expression (5.22) de la perturbation de pression statique, dans laquelle $p' = 0$.

$$(\rho E)' = -\rho' \frac{\tilde{V}_i^2}{2} + \tilde{V}_i (\rho V_i)' + k' \quad (6.27)$$

Paroi non-visqueuse La condition de glissement est exprimée par une perturbation de vitesse normale nulle. Sur une paroi axisymétrique, la relation (6.28) doit être vérifiée.

$$(\rho V_x)' n_x + (\rho V_r)' n_r = 0 \quad (6.28)$$

Paroi visqueuse Il s'agit d'imposer ici l'annulation de la vitesse aux travers des relations (6.29) à (6.31) ainsi que la perturbation de température (supposée nulle) (6.32) pour une paroi isotherme ou l'annulation du gradient de température (6.33) pour une paroi adiabatique.

$$(\rho V_x)' = 0 \quad (6.29)$$

$$(\rho V_r)' = 0 \quad (6.30)$$

$$(\rho V_\theta)' = 0 \quad (6.31)$$

$$T'' = 0 \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial T''}{\partial n} = 0 \quad (6.33)$$

avec

$$T'' = \frac{\gamma - 1}{\rho R} \left[(\rho E)' + \rho' \frac{\tilde{V}_i^2}{2} - \tilde{V}_i (\rho V_i)' - k' \right] - \frac{\rho'}{\rho} \tilde{T} \quad (6.34)$$

Enfin, il reste une condition limite supplémentaire à saisir par rapport au cas purement méridien. Il s'agit d'une condition de périodicité selon la direction circonférentielle, l'écoulement étant identique de canal inter-aubes en canal inter-aubes. Cette condition est implicitement saisie par l'utilisation de fonctions de Fourier.

6.3 Recours à la formulation de frontière immergée

Nous venons de décrire les deux premières composantes du méridien harmonique : le méridien classique et la fonctionnalité harmonique. Dans cette section, nous allons concentrer la discussion sur l'élément prépondérant du méridien nouvellement développé ; l'implémentation de la méthode de frontière immergée et ses interactions avec les deux composantes précédentes du code.

Comme nous l'avons annoncé au chapitre 4, il existe de nombreuses variantes de méthodes de frontière immergée. Nous commencerons par préciser la variante choisie et justifier ce choix. Nous entrerons ensuite dans la description de la discréétisation de la méthode qui fait intervenir deux maillages, l'un lagrangien, l'autre eulérien. Nous discuterons enfin l'aspect temporel de la méthode et son insertion dans le méridien.

6.3.1 Choix de la méthode

La première distinction entre les différentes techniques de frontière immergée est leur appartenance à l'approche continue ou l'approche discrète. Leur nature a été décrite au chapitre 4 et il en est ressorti que l'approche discrète ne peut convenir à l'application concernée puisqu'il y est requis de localiser explicitement l'obstacle, précisément ce que nous souhaitons éviter. Nous nous orientons donc vers l'approche continue et ses trois catégories de technique : la pénalisation en volume, le feedback et le forçage direct. De ces trois méthodes, nous sélectionnons le feedback sur base des considération suivantes.

La technique du feedback a été choisie principalement pour trois raisons. Premièrement, cette technique est compatible avec le concept de code méridien puisque c'est par une équation de force du même type que le méridien classique détermine la partie non-visqueuse du champ de force moyenne imposant la condition d'imperméabilité du squelette.

Deuxièmement, cette équation supplémentaire est caractérisée par une limite de stabilité du même ordre que le système hyperbolique fluide et n'introduit donc pas de restriction supplémentaire sur le pas de temps.

Troisièmement, la raison principale du choix de cette méthode est qu'en consistant en une boucle fermée, elle assure une certaine robustesse face aux erreurs de discréétisation inhérentes à la méthode. En effet, comme il le sera détaillé dans la suite, la communication entre les deux maillages (lagrangien et eulérien) ne garantit pas un transfert parfait de l'information de l'obstacle vers le domaine de résolution. La raison en est la non-coïncidence de la fonction de distribution avec le maillage cartésien et l'étalement harmonique, i.e. l'erreur de troncature, avec le recouvrement des informations qu'il peut engendrer.

La technique de la pénalisation en volume est quant à elle écartée car elle n'est qu'un cas particulier de la technique précédente dont l'action correctrice intégrale est supprimée.

Le corollaire est qu'elle ne présente pas la robustesse du feedback. De plus, elle ne garantit l'obtention de la consigne au travers de son action proportionnelle qu'au mieux de manière inversement proportionnelle à son gain [6, 80, 94], auquel la limite de stabilité est elle-même inversement proportionnelle. Pour résoudre cette difficulté, il est alors nécessaire de recourir à des méthodes numériques plus stables (GMRES pour [80], BI-CGSTAB pour [81], traitement implicite du terme de pénalité pour [24])

Enfin, la technique du forçage direct est également évitée car ses exigences se rapprochent d'une technique à maillage conforme. En effet, pour être efficace, il est nécessaire que la consigne soit transmise de manière précise puisqu'il n'existe pas de processus de correction. Il faut donc que la fonction de distribution soit parfaitement représentée par sa transformée de Fourier, ce qui est impossible. Il faut aussi que le maillage cartésien soit raffiné aux abords de la paroi de l'obstacle pour garantir l'ordre de précision des schémas complexes d'interpolation et de distribution du champ de vitesse [38, 83, 79, 161]. Ceci nécessite une vision physique du maillage. De plus, par l'imposition directe du champ de vitesse, la conservation de la masse n'est pas forcément assurée. Certains auteurs [83, 108] y apportent une correction sous forme de terme source de masse. Pour finir, l'équation de forçage direct (4.21) est difficilement répercutable de manière séparée sur chaque mode de Fourier.

6.3.2 Discréétisation spatiale

La traduction de la présence de l'obstacle sur l'écoulement est le point clé de la méthode de frontière immergée. Il consiste à organiser de manière précise et consistante les interactions entre le maillage cartésien, sur lequel les équations du fluide sont résolues, et le maillage lagrangien, à la surface de l'obstacle. Cette organisation passe par trois étapes. Premièrement, il est nécessaire de communiquer l'état de l'écoulement au maillage de surface. Deuxièmement, sur base de cette information, le champ de force doit être mis à jour pour atteindre l'imperméabilité de l'obstacle. Troisièmement, Le champ de force actualisé doit être transféré sur le maillage cartésien pour y influencer l'écoulement résolu. Ces trois étapes vont être décrites dans la suite.

Avant d'y diriger la discussion, il est utile de décrire brièvement la nature des deux maillages en question : le maillage cartésien et le maillage lagrangien.

Le maillage cartésien

Le premier maillage que nous envisageons est le maillage cartésien. Celui-ci est également appelé eulérien parce qu'il reste fixe par rapport à l'obstacle mouvant dans les applications d'origine de la méthode. Par la suite, pour des applications où l'obstacle est fixe, il est devenu d'usage de l'appeler cartésien, de par sa configuration extrêmement simple. Un exemple est présenté à la figure 6.7.

En effet, les exigences de la méthode de frontière immergée quant à la structure du maillage sont réduites puisque celui-ci ne doit aucunement se conformer à l'obstacle autour duquel l'écoulement est recherché. L'essence même de la méthode est de résoudre l'écoulement aussi bien à l'intérieur de l'obstacle fictif qu'à l'extérieur. La traduction de la présence de ce dernier est réalisée par un terme source et non plus par des conditions limites en surface, lesquelles nécessitent un maillage conforme. Néanmoins, pour obtenir une définition précise du corps fictif obtenue par transfert d'information entre les maillages lagrangien et eulérien, ce dernier doit être raffiné dans la zone en question. Le contrôle de la résolution de maillage dans les zones proches de la paroi est plus coûteux en méthode de frontière immergée qu'en cas de domaine de calcul épousant la forme du corps. Dans ce dernier cas, l'obtention d'un certain espacement dans la couche limite peut se faire par une adaptation du maillage dans la direction normale à l'aube. Dans le cas d'un maillage non-conforme par contre, il est nécessaire de raffiner celui-ci dans les deux directions. Ceci représente en général un inconvénient de la méthode mais dont le méridien harmonique peut être affranchi.

En ce qui concerne le maillage, le cas du méridien harmonique est particulier. En effet, le maillage cartésien est le maillage sur lequel les équations du fluide sont résolues. Or le méridien harmonique résout ces équations dans le domaine spectral par superposition modales de calculs bidimensionnels, sur un maillage méridien classique dans le plan (r, x) . Ainsi, le maillage cartésien, le maillage de calcul, possède déjà les caractéristiques de raffinement voulues.

Si le maillage cartésien est utilisé pour la résolution des équations du fluide, il doit aussi permettre un transfert d'information avec le maillage de surface de l'obstacle. Cet obstacle ayant une composante dans la direction circonférentielle, il doit en être de même pour le maillage cartésien, c'est pourquoi il est nécessaire de conférer une dimension circonférentielle à ce maillage. Elle est obtenue par simple extrusion du maillage méridien dans cette direction.

Ainsi, cette extrusion a principalement deux caractéristiques. Premièrement, elle doit être de densité uniforme pour satisfaire au développement en série de Fourier. Deuxièmement, la densité de maillage doit être suffisamment importante pour permettre un transfert précis de la représentation physique vers le domaine fréquentiel. Ce nombre de mailles est lié à la fréquence du mode le plus élevé par le théorème de Shannon.

Soit un intervalle $\Delta\theta$ dans la direction circonférentielle, correspondant au pas inter-aubes en turbomachines. Si N est l'indice du mode de Fourier de fréquence la plus élevée, alors le nombre K de mailles composant l'extrusion du maillage méridien doit vérifier la condition (6.35).

$$K \geq 2N + 1 \quad (6.35)$$

Si cette condition permet d'identifier effectivement la fréquence du mode N , elle ne garantit pas la précision de la série de Fourier. En pratique, nous augmenterons donc le

nombre de mailles. Si le nombre de mailles peut devenir important pour des grands nombres de modes, cela ne pénalisera que très modérément le calcul puisque le recours à ce maillage n'est effectué qu'une seule fois, en pré-traitement, lors de la discréétisation harmonique de la fonction de distribution.

Si le maillage cartésien correspond au maillage méridien dans le domaine fréquentiel où se passe la résolution, son extrusion est son homologue dans le domaine physique et est illustrée de manière générique à la figure 6.7 dans le plan (x, θ) pour un canal inter-aubes.

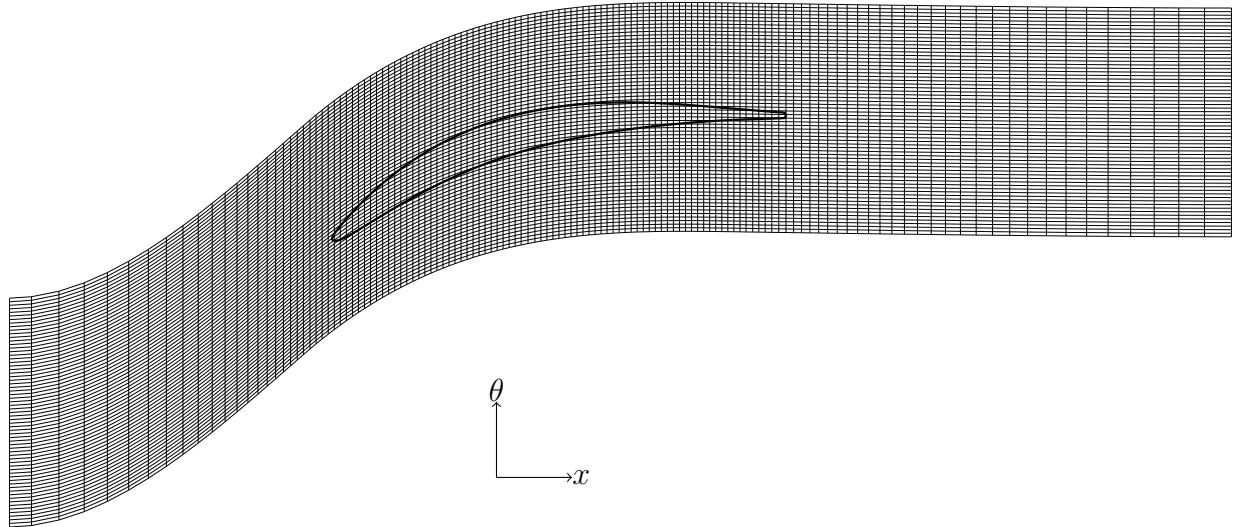


FIGURE 6.7 – Extrusion circonférentielle du maillage méridien

Le maillage lagrangien

Le maillage lagrangien consiste en la division de la paroi de l'obstacle en surfaces finies curvilignes portant les grandeurs descriptives de l'écoulement de surface en leur centre. C'est en ces noeuds lagrangiens que la condition limite fictive sera imposée.

La création du maillage est réalisée en deux étapes. La première consiste à découper l'obstacle en tranches d'épaisseur dr selon la direction radiale. Ce découpage correspond à la projection du maillage méridien, du moins ses lignes orientées selon l'écoulement, sur l'obstacle. Cette construction n'est pas requise par la méthode de frontière immergée mais facilite la décomposition de l'obstacle. La deuxième étape consiste à diviser chaque tranche d'obstacle, chaque profil, en segments portant en leur centre le noeud lagrangien. Un exemple de cette division d'un profil d'aube est fourni à la figure 6.8.

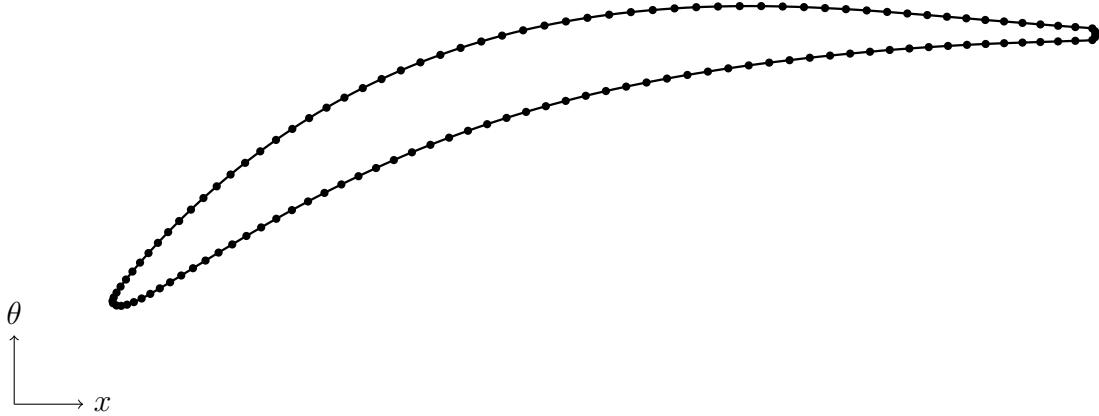


FIGURE 6.8 – Discrétisation lagrangienne d'un profil d'aube

6.3.3 Du maillage lagrangien vers le maillage cartésien

La méthode de frontière immergée repose sur le transfert de l'influence de l'obstacle, la force f_k définie en chaque nœud du maillage lagrangien, sur l'écoulement résolu sur le maillage cartésien pour le contraindre à respecter la condition imposée à la surface de l'obstacle. Cette communication fait intervenir une certaine fonction de distribution ϕ sur un certain support. Ces deux aspects caractérisent le processus de distribution.

La fonction originale définie par Peskin [118] est de la forme suivante.

$$\phi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^3} \phi\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right) \phi\left(\frac{x_2}{\epsilon}\right) \phi\left(\frac{x_3}{\epsilon}\right) \quad (6.36)$$

où x_1 , x_2 et x_3 sont les composantes cartésiennes du vecteur ayant pour origine un nœud lagrangien, ϵ étant l'extension du support de la fonction de distribution. La fonction (6.36) doit satisfaire plusieurs conditions :

- elle doit tendre vers la fonction de Dirac pour $\epsilon \rightarrow 0$,
- elle doit être continue,
- son intégrale en volume doit valoir l'unité,
- elle doit être définie sur un support compact,
- son centre de gravité doit être situé sur le nœud lagrangien.

Afin de satisfaire ces conditions, Peskin dérive une fonction définie par morceaux qu'il simplifie par une fonction du type (6.37) qui en est une bonne approximation unidimensionnelle.

$$\phi(d) = \frac{1}{2\epsilon} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi d}{\epsilon}\right) \right] \quad d \leq \epsilon \quad (6.37)$$

où d est la distance au centre du support. Le support compact utilisé par Peskin est une sphère de rayon ϵ centrée en chaque nœud lagrangien. Cette fonction cosinus est l'une des plus facile à représenter en série de Fourier puisque de même nature que ses fonctions propres¹.

La méthode originelle de frontière immergée [118] a été développée pour être appliquée sur un domaine purement cartésien avec des techniques numériques classiques. Ce que nous proposons, le méridien harmonique, utilise cette méthode d'une manière nouvelle. En effet, non seulement elle recourt à un formalisme de Fourier mais elle résout le problème dans l'espace fréquentiel, sans vision physique de la dimension circonférentielle et donc sans maillage. D'autres auteurs [51, 106, 80, 129, 78, 85] ont utilisé la technique de frontière immergée avec une représentation de Fourier. Cependant, ceux-ci l'ont fait dans des codes pseudo-spectraux, en utilisant des méthodes de collocation, qui conservent une notion de maillage dans la dimension dont on veut s'affranchir. Ce maillage doit d'ailleurs être raffiné aux abords des parois et de plus, la résolution des équations passe régulièrement sur ce maillage pour évaluer dans le domaine physique les termes non-linéaires. Le nombre de modes inclus dans leur simulation est par ailleurs supérieur à la centaine, ce que nous ne pouvons nous permettre. Il s'agit donc d'une classe de méthodes très différentes de la nôtre. La nouvelle méthode que nous proposons nécessite une discussion concernant la nature du support et le processus de distribution de l'effet de l'obstacle sur le maillage cartésien.

Le domaine de calcul du méridien harmonique est un maillage méridien classique dans le plan (r, x) . Il est complété par une dimension θ résolue dans le domaine spectral. L'objectif de la distribution est de former les termes sources de force $\bar{\mathbf{f}}$ et \mathbf{f}'_n des systèmes moyen (5.14) et harmonique (5.43). Le processus idéal serait la formation directe de ces coefficients de Fourier à partir des forces nodales \mathbf{f}_k . Ceci éviterait tout recours au maillage méridien extrudé, le maillage cartésien.

Dans la formulation classique de la méthode de frontière immergée, l'existence d'un support compact est justifiée par la nécessité de communication d'information entre deux maillages non-coïncidents. Lorsque l'aspect spectral est ajouté, le support doit répondre à des critères supplémentaires. En effet, afin que le champ de force distribué soit représentable par une série de Fourier fortement tronquée (20 à 30 modes), le spectre fréquentiel de la fonction de distribution doit être étroit. Ceci demande une certaine largeur ϵ de support suffisamment grande et en tous cas plus importante que ne le permettrait une technique de résolution dans le domaine physique sur un maillage raffiné au voisinage de la paroi.

La conséquence est que pour un maillage lagrangien donné, le recouvrement entre les distributions nodales sera de plus grande ampleur, comme le montre la figure 6.9 (gauche), ce qui mène à un lissage des variations abruptes de force lors de la distribution.

Un tel effet de moyenne engendre une perte d'information qui, dans un contexte d'action en boucle fermée, peut conduire à une incompatibilité entre l'observation et la commande, déstabilisant le contrôleur. C'est ce qui a été observé en bord d'aube, où des variations

1. Nous discuterons en détail sa représentation fréquentielle dans le chapitre 7

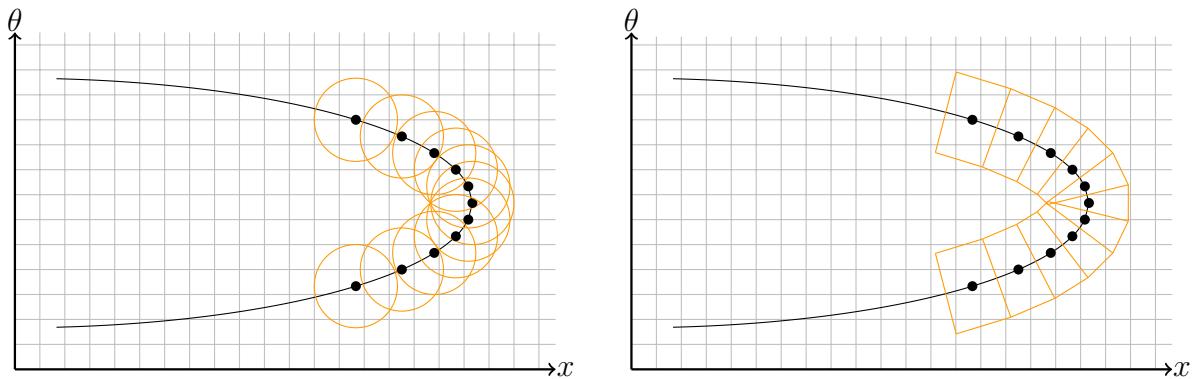


FIGURE 6.9 – Bords avec des supports classiques (gauche) et avec des supports non-recouvrants (droite)

fortes et rapides de l'écoulement existent.

Pour éviter des interactions parasites entre les actions de contrôle des noeuds lagrangiens, une enveloppe de supports non-recouvrants peut être envisagée, comme l'illustre la figure 6.9 (droite). La dimension de ces supports est variable selon la densité de points, seule leur extension dans la direction normale à la paroi étant constante et de valeur ϵ . Il n'est cependant pas souhaitable de conserver des supports totalement distincts et en tous cas propres à chaque noeud lagrangien, ce qui mènerait à une représentation grossière de la force lagrangienne et à un champ de force en escaliers, qui plus est difficilement représentable vu le faible niveau de continuité associé.

La solution élaborée pour distribuer l'effet du maillage de surface consiste à lui adjoindre une fonction de distribution globale sous la forme d'une enveloppe², comme l'illustre la figure 6.10. Cette fonction de distribution établit le lien global, dans le domaine physique, entre les maillages lagrangien et cartésien. La force physique \mathbf{f}_c en un centre c du maillage cartésien serait obtenue par l'interpolation (6.38) entre les noeuds lagrangiens voisins k_1 et k_2 .

$$\mathbf{f}_c = \alpha_{k_1}^c \mathbf{f}_{k_1} \phi(\mathbf{d}_{k_1c} \cdot \mathbf{n}_{k_1}) + \alpha_{k_2}^c \mathbf{f}_{k_2} \phi(\mathbf{d}_{k_2c} \cdot \mathbf{n}_{k_2}) \quad (6.38)$$

où $k_i c$ est la distance à la surface de l'obstacle et $\alpha_{k_1}^c + \alpha_{k_2}^c = 1$.

Afin d'établir un lien direct entre une valeur lagrangienne et son homologue fréquentiel, il est nécessaire de dériver une fonction de distribution harmonique δ_n^k reliant le noeud lagrangien k au mode n . Pour ce faire, il faut regrouper les relations du type (6.38) par noeud k , comme exprimé par la relation (6.39).

2. Notons que le vecteur normal y est approché puisque l'enveloppe est constituée de profils isoparamétriques.

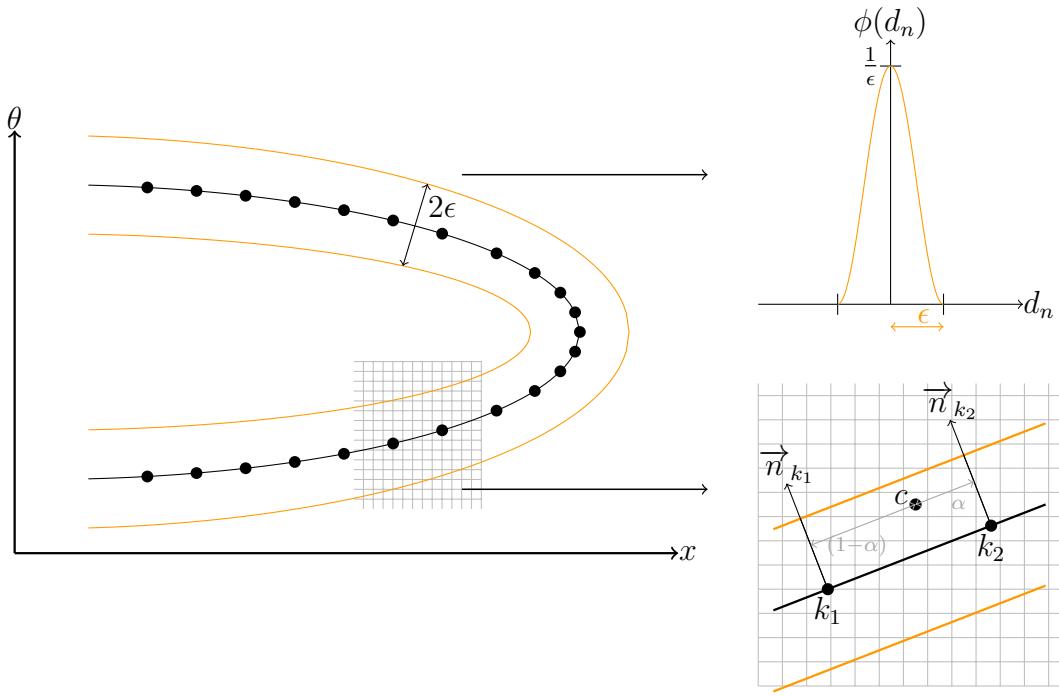


FIGURE 6.10 – Support enveloppe

$$\delta(r, \theta, x) = \sum_c \alpha_k^c \phi(\mathbf{d}_{kc} \cdot \mathbf{n}_k) \quad (6.39)$$

Une transformée de Fourier de cette fonction permet d'obtenir l'influence modale du noeud k sur tout maille mérienne. Le champ de force harmonique \mathbf{f}_n est ensuite obtenu par la sommation (6.40) de l'influence de chaque nœud lagrangien.

$$\mathbf{f}_n(r, x) = \sum_k \mathbf{f}_k \delta_k^n(r, x) \quad (6.40)$$

La discussion précédente montre combien le processus de distribution est une opération délicate, en particulier dans son application au mérien harmonique. L'une des restrictions engendrées par la résolution harmonique est l'existence d'une borne inférieure sur le paramètre ϵ afin de limiter le spectre fréquentiel de la fonction de distribution. Ainsi, la condition limite fictive, vérifiée de manière exacte aux noeuds lagrangiens, aura une influence sur l'écoulement proche de la paroi, sur une zone d'autant plus large que le paramètre ϵ est grand. Ceci est gênant pour une résolution des équations de Navier-Stokes, qui nécessite l'arrêt du fluide à la paroi. En effet, cet arrêt va notamment être provoqué par un champ de force tangentiale à la paroi distribué sur une bande de largeur ϵ . Le champ de vitesse n'étant pas nul sur toute la largeur de cette bande, la force va générer de l'entropie et donc créer une couche limite visqueuse d'épaisseur $O(\epsilon)$. Vu les restrictions qui pèsent sur ϵ , la couche limite sera fortement surestimée, en particulier pour des applications turbomachines pour lesquelles le Reynolds est $O(10^6)$. Le nombre de modes de

Fourier nécessaires pour représenter une couche limite d'épaisseur δ est $O(t/\delta)$ où t est le pas inter-aubes dimensionnel, ce qui peut très vite requérir plus d'une centaine de modes. Nous devrons donc nous cantonner à appliquer la condition de glissement à la surface de l'obstacle³. Cependant, rien n'empêche de considérer un écoulement visqueux pour lequel la condition d'arrêt aux parois de la veine pourra être appliquée. De la sorte, nous négligerons uniquement la composante visqueuse de la force qui, comme le montre Simon[136] est d'ordre inférieur à sa composante non-visqueuse et aux tensions circonférentielles. Pour des écoulements non séparés à haut Reynolds, l'application de la condition de glissement à la paroi des aubes n'aura qu'une influence limitée sur la structure de l'écoulement.

6.3.4 Du maillage cartésien vers le maillage lagrangien

Afin d'établir un champ de force qui permettra de faire respecter l'imperméabilité de l'obstacle, le maillage lagrangien doit observer l'état de l'écoulement résolu sur le maillage cartésien. En effet, même si plusieurs auteurs calculent la force sur le maillage cartésien directement [105, 38, 83], la plupart remonte sur le maillage lagrangien, [158, 146, 166, 161] notamment. Cette façon de procéder est aussi celle de Peskin et s'avère moins contraignante. Dans notre cas, c'est la seule acceptable puisque comme nous l'avons mentionné précédemment, nous ne pouvons pas imposer la condition limite fictive dans le domaine fréquentiel et donc pas directement sur le maillage cartésien, qui est le maillage de résolution des équations.

En général, la reconstruction de l'écoulement sur les nœuds lagrangiens est réalisée au moyen de la fonction de transfert utilisée pour distribuer l'effet de ceux-ci sur le maillage cartésien. Ceci établit une relation biunivoque entre les deux maillages sur le support compact de la fonction de transfert. C'est pour cette raison que son intégrale en volume doit valoir l'unité. En ce qui concerne le méridien harmonique, cette technique mène à une reconstruction fort imprécise. En effet, le support de la fonction étant assez large pour limiter son spectre fréquentiel, la fonction de transfert opère un lissage important de l'information du domaine cartésien. Ceci ne permettrait que l'imposition d'une imperméabilité moyenne. En pratique, cette méthode crée une couche limite et un sillage assez épais. Ceci peut s'apparenter à une définition imprécise des parois qui, en maillage conforme, mène également à de fortes imprécisions et à des écoulements perturbés. De plus, il ressort qu'une telle reconstruction n'est que du premier ordre de précision [12, 155, 107].

Afin d'améliorer l'ordre de précision de la reconstruction tout en conservant la même méthode de transfert entre les deux maillages, certains auteurs élaborent des fonctions de transfert [12] ou des techniques d'interpolation [161] plus complexes. Pour notre part, afin d'obtenir un contrôle précis, nous reconstruisons l'écoulement au droit de la paroi en deux étapes. La première consiste à procéder à une interpolation bilinéaire sur le maillage méridien des coefficients de Fourier des inconnues conservatives en chaque nœud lagrangien k en leur projection (r_k, x_k) , comme illustré à la figure 6.11. La deuxième étape est l'évalua-

3. Nous illustrerons cependant brièvement le cas du cylindre visqueux dans le chapitre 7 pour illustrer les capacités de la méthode à bas Reynolds.

tion dans le domaine physique, en la coordonnée θ_k du nœud k , de la série de Fourier des coefficients interpolés.

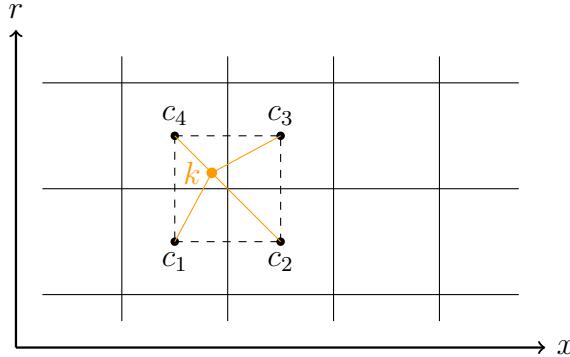


FIGURE 6.11 – Reconstruction de l’écoulement sur le nœud lagrangien k

La reconstruction est ainsi $O(2)$ dans le plan méridien et bénéficie de la convergence spectrale de la série de Fourier dans la direction circonférentielle.

6.3.5 Phénomène de Gibbs

La méthode de frontière immergée fournit une solution qui converge vers l’écoulement exact pour une fonction de distribution tendant vers la fonction de Dirac. Ainsi, la qualité de reproduction de l’effet de l’obstacle augmente avec la réduction de la taille du support compact de la fonction de distribution. Mais dès que les séries de Fourier apparaissent, le phénomène de Gibbs n’est pas loin. Les oscillations apparaissent dans deux cas : lors du développement en série de Fourier discrète au voisinage d’une discontinuité ou lors de la troncature d’une série de Fourier. Le méridien harmonique rencontre les deux cas, la reconstruction harmonique pouvant être fortement tronquée, et la fonction de distribution présentant une discontinuité sur sa dérivée seconde aux bornes du support compact.

Parmi les auteurs ayant appliqué la méthode de frontière immergée dans un code pseudo-spectral, recourant à la technique de collocation, certains [128, 80, 78] ont noté que le phénomène de Gibbs, bien que gênant pour la représentation de la solution, ne dégrade pas la résolution en elle-même. Néanmoins, bon nombre des auteurs ont recours à une technique de lissage par filtrage des coefficients de Fourier [51] ou par lissage de la fonction de distribution [106, 80, 85]. Les deux façons de procéder ont leurs avantages et inconvénients.

Le lissage de la fonction de distribution est effectué au moyen d’un filtre passe-bas tel que celui de Lanczos (6.41) appliqué à chaque coefficient de Fourier \mathbf{f}_n . L’intérêt est d’obtenir un champ de force lisse afin d’éviter des oscillations parasites dans l’écoulement. Cependant, le lissage déforme la fonction de distribution, augmentant la taille effective de son support de manière variable selon l’orientation de la portion de surface concernée.

$$\mathbf{f}_n^{\text{lissé}} = \sigma_n \mathbf{f}_n \quad \sigma_n = \frac{\sin(n\pi/N)}{n\pi/N} \quad (6.41)$$

L'utilisation d'une fonction lisse consiste, dans notre cas, à étendre suffisamment le support compact afin que le champ de force transféré dans le domaine fréquentiel soit aussi proche que possible du champ distribué dans le domaine physique. Par conséquent, l'action de la paroi est plus diffuse, lissant artificiellement les gradients de l'écoulement aux abords de cette dernière. Cependant, cette façon de procéder permet une meilleure représentation harmonique de la fonction de distribution et une adéquation plus stricte entre la volonté du contrôleur feedback et sa commande réelle. Les oscillations de Gibbs restent cependant présentes pour un nombre de modes N et une largeur de support ϵ raisonnables⁴.

6.3.6 Intégration de l'équation de force

L'équation de force de la méthode du feedback (6.42) a pour consigne, dans notre cas, l'annulation de la vitesse normale à la paroi. Elle comprend deux termes : une action intégrale et une action proportionnelle. Le premier terme intègre l'erreur sur la consigne au cours du temps. Elle est à l'origine de l'introduction d'une condition de stabilité supplémentaire à la condition CFL des équations du mouvement du fluide.

$$\mathbf{f}_k = \alpha \int_0^\tau [(\rho \mathbf{U})_k \cdot \mathbf{n}_k] d\tau' + \beta [(\rho \mathbf{U})_k \cdot \mathbf{n}_k] \quad (6.42)$$

Cette limite de stabilité dépend du schéma d'intégration temporel utilisé par le solveur fluide. Ainsi, Goldstein [51] affirme que la limite de stabilité est deux ordres de grandeur plus faible que la condition CFL, restreignant fortement l'efficacité de la méthode. Il s'avère cependant que cette limite a été dérivée pour un schéma temporel d'Adams-Bashforth. Lee [90] montre que pour un schéma de Runge-Kutta, le pas de temps limite est du même ordre que celui déterminé par la condition CFL, ne pénalisant pas la convergence du processus général. Il détermine le domaine de stabilité de l'équation (6.42) pour divers schémas temporels dans lesquels elle est insérée. Parmi les schémas testés, celui qui présente le domaine de stabilité le plus large est celui de Runge-Kutta à 3 pas.

La détermination du couple de paramètres (α, β) menant à la convergence optimale est l'une des difficultés de la méthode. Selon Lee [90], le paramètre β dicte le taux de décroissance de l'erreur sur les premières itérations tandis que le paramètre α détermine le niveau d'erreur final. Pour formaliser le choix du couple, Margnat [101] exploite la similitude de l'équation (6.42) avec un oscillateur amorti du second ordre lorsqu'elle est insérée dans les équations du fluide. Selon ce modèle, les paramètres α et β peuvent être réécrits dans le formalisme (ω_n, ξ) , respectivement la fréquence propre de l'oscillateur et son taux d'amortissement.

4. Cette discussion sera poursuivie dans le chapitre 7 consacré à la validation du code de calcul.

$$\alpha = -\omega_n^2 \quad \beta = -2\xi\omega_n \quad (6.43)$$

Ce formalisme permet de retrouver les conclusions de Lee. Lorsque la fréquence propre ω_n de la boucle fermée augmente et devient suffisamment supérieure à celle de la configuration fluide, le système est plus réactif et peut maintenir la consigne. Lorsque le taux d'amortissement ξ augmente, la décroissance de l'erreur est rapide au début du processus. Selon la théorie de l'oscillateur amorti, le taux d'amortissement permettant d'arriver en régime stabilisé au plus vite est $\xi = 0,7$. En pratique cependant, ce taux d'amortissement n'est pas optimal pour deux raisons.

Premièrement, la théorie de l'oscillateur n'est qu'une approche du système à résoudre puisque d'autres termes (convection, pression, viscosité) interviennent dans les équations du mouvement du fluide. De plus, il ne faut pas considérer la seule convergence de l'imperméabilité de l'obstacle mais plutôt celle de l'ensemble du domaine fluide, qui fait intervenir le couplage entre les systèmes moyen et harmonique avec l'imperméabilité. C'est pourquoi un taux d'amortissement supérieur, bien que censé dégrader l'évolution temporelle de la condition d'imperméabilité, permet de stabiliser le processus global de résolution.

Deuxièmement, les études de stabilité effectuées supposent une fonction de distribution parfaitement représentée. Le méridien harmonique s'en éloigne lors du transfert de celle-ci dans le domaine harmonique. Or comme Shin [133] le remarque, la stabilité dépend de la fonction de distribution utilisée. Il en est de même pour les écarts par rapport à la fonction exacte qui ne peuvent que restreindre la limite de stabilité. Ainsi, un taux d'amortissement supérieur est à nouveau souhaitable pour stabiliser la convergence. À la limite de stabilité, ceci aura pour effet de diminuer la fréquence propre de l'oscillateur mais surtout l'importance relative de l'action intégrale, qui peut s'avérer déstabilisatrice suite à un aveuglement à la commande effective dans le domaine fréquentiel.

Nous optons donc de manière générale pour un taux d'amortissement de 3, la fréquence propre étant quant à elle fixée à la limite de stabilité.

Afin de garantir un domaine de stabilité large, l'équation (6.42) doit être intégrée simultanément aux équations du fluide. L'algorithme 1 est décrit pour une équation modale du type (6.44), pour N modes de Fourier et K nœuds lagrangiens, où d_{kc} est la distance entre les nœuds lagrangien k et cartésien c et Δt le pas de temps.

$$\frac{\partial \mathbf{U}_n}{\partial t} = \mathbf{L}(\mathbf{U}_n) + \mathbf{f}_n \quad (6.44)$$

Deux intégrations temporelles simultanées sont réalisées : l'une pour les coefficients de Fourier $\mathbf{U}_n(r, x)$ des inconnues conservatives et l'autre pour la force lagrangienne \mathbf{f}_k , plus particulièrement pour sa composante intégrale \mathbf{f}_{Ik} . L'équation de force étant intégrée sur l'obstacle, une transformée de Fourier inverse (TFI) est réalisée pour identifier le champ de vitesse à la paroi. La force nodale est ensuite mise à jour puis transférée dans le domaine

fréquentiel. Les inconnues conservatives sont finalement mises à jour.

Algorithme 1 Intégration simultanée des équations du fluide et de la force de l'obstacle

Itération t

$$\mathbf{U}_n^t(r, x) \quad n = 0, \dots, N \qquad \mathbf{f}_{Ik}^t(r, x) \quad k = 1, \dots, K$$

Force de l'obstacle

$$\text{TFI sur les nœuds lagrangiens } \mathbf{x}_k \quad \mathbf{U}_k^t \quad k = 1, \dots, K$$

$$\text{Avancement temporel} \quad \mathbf{f}_{Ik}^{t+1} = \mathbf{f}_{Ik}^t + \alpha (\mathbf{U}_k^t \cdot \mathbf{n}_k) \Delta t$$

$$\text{Action proportionnelle} \quad \mathbf{f}_k = \mathbf{f}_{Ik}^{t+1} + \beta (\mathbf{U}_k^t \cdot \mathbf{n}_k)$$

Inconnues conservatives

$$\text{Distribution de la force} \quad \mathbf{f}_n^t = \sum \mathbf{f}_k \cdot \phi_k^n \quad n = 0, \dots, N$$

$$\text{Avancement temporel} \quad \mathbf{U}_n^{t+1} = \mathbf{U}_n^t + [\mathbf{L}(\mathbf{U}_n^t) + \mathbf{f}_n^t] \Delta t$$

Itération t+1

$$\mathbf{U}_n^{t+1}(r, x) \quad n = 0, \dots, N \qquad \mathbf{f}_{Ik}^{t+1}(r, x) \quad k = 1, \dots, K$$

Chapitre 7

Validation du méridien harmonique

Sommaire

7.1	Présentation du cas test	110
7.2	Caractérisation de la fonction de distribution	112
7.3	Structure de l'écoulement autour d'un corps immergé	118
7.4	Comportement modal du méridien harmonique	122
7.4.1	Fidélité spectrale de la fonction de distribution	122
7.4.2	Largeur du support	125
7.4.3	Fidélité fréquentielle de l'écoulement	129
7.5	Décalage du champ de force	131
7.6	Influence des tensions circonférentielles	137
7.7	Stabilité du processus itératif	143
7.7.1	Paramètres du contrôleur	144
7.7.2	Décalage du champ de force	146
7.7.3	Largeur du support	147
7.7.4	Comparaison avec le méridien classique	149
7.8	Ecoulement visqueux autour d'un cylindre	149
7.9	Synthèse de la méthode harmonique	152

Dans ce chapitre, nous allons concentrer la discussion sur la validation et l'illustration des développements détaillés précédemment. Pour ce faire, nous aurons recours à un cas test assez simple mais ne préjudicier pas la portée des conclusions : l'écoulement non-visqueux autour d'une cascade de cylindres. Cette configuration a été choisie pour sa notoriété, sa difficulté de reproduction et le niveau important de perturbations spatiales engendrées.

Nous commencerons par une description succincte de ce cas test. Ensuite, avant d'observer tout résultat, nous caractériserons la fonction de distribution de l'information lagrangienne vers le domaine de calcul. Celle-ci revêt une importance majeure puisque la qualité d'imposition de la condition de paroi fictive est soumise à sa représentation.

Pour suivre, nous nous pencherons sur les résultats de simulation méridienne harmonique. Nous y observerons la qualité de reproduction de l'écoulement mais aussi l'influence des paramètres de simulations (distribution, contenu fréquentiel). Bien sûr, nous illustrerons à nouveau l'intérêt des tensions circonférentielles dans la fidélité de reproduction de l'écoulement. Enfin, nous aborderons quelques points qui permettront de parfaire la maîtrise de la méthode nouvellement développée (stabilité, présence d'un écoulement interne, approximation de linéarité).

Les résultats de cette étude seront observés de deux points de vue différents, intrinsèques au méridien harmonique. Le premier est issu de l'application de la philosophie et la démarche développées dans les chapitres précédents. La résolution harmonique fournit une information d'ordre élevé utilisée pour accroître la fidélité de l'écoulement moyen. Ce point de vue est dit “moyen”.

La deuxième approche est basée sur le raisonnement suivant. Il a été montré au cours des chapitres précédents que l'obtention d'information d'ordre élevé en vue de l'amélioration de la fidélité de l'écoulement méridien passe inévitablement par un résolution de la dimension supérieure, l'effet de l'obstacle, au moyen de la méthode de frontière immergée. Ainsi, les résolutions successives dans le domaine fréquentiel solutionnent le problème de fermeture du méridien mais donnent également accès aux perturbations circonférentielles dans le domaine physique, puisque les modes de Fourier de l'écoulement sont calculés. La conséquence est que le méridien harmonique peut aussi être vu comme une simulation tridimensionnelle approchée par un code méridien. Cette vision est celle adoptée par plusieurs auteurs (Chen[23], Stridh[143], Vilmin[164]) qui utilisent la méthode harmonique non-linéaire pour reconstruire la dimension temporelle avec un code tridimensionnel stationnaire. Ce point de vue est dit “d'ordre élevé”.

Dans le cas test envisagé, la dimension radiale étant négligée, l'ordre moyen sera la moyenne d'un écoulement dans le plan aube-à-aube tandis que l'ordre élevé sera la vision bidimensionnelle de l'écoulement.

7.1 Présentation du cas test

Le cas choisi est l'écoulement non-visqueux autour d'un cylindre. Il s'agit d'un cas bidimensionnel, ce qui ne nuira pas à la généralité des propos tenus dans ce chapitre. Les effets de paroi seront abordés au chapitre 8 au travers d'une application tridimensionnelle. La configuration du cas est illustrée à la figure 7.1, où la trace du cylindre fictif apparaît en blanc.

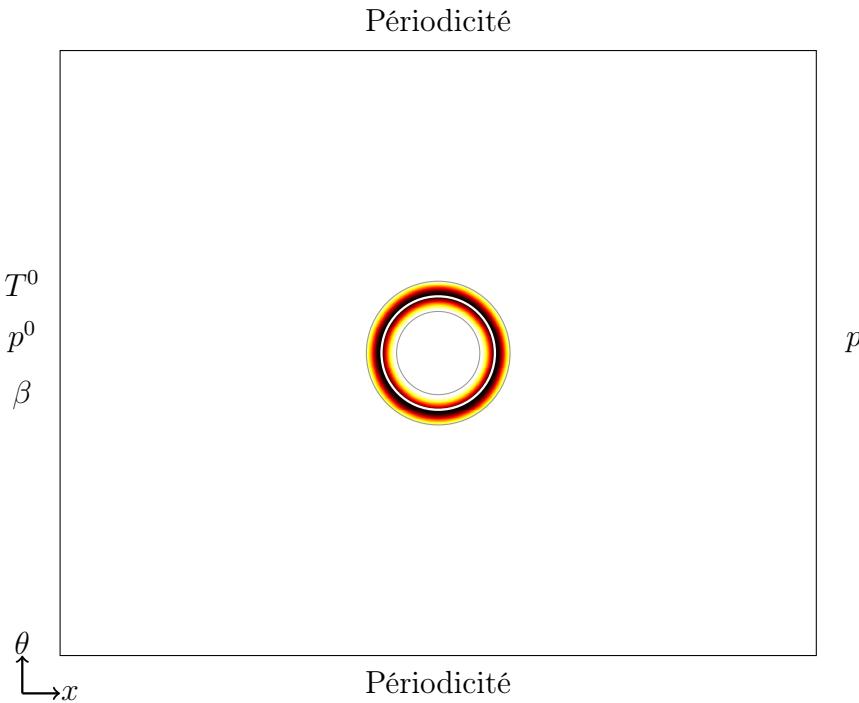


FIGURE 7.1 – Configuration spatiale du cas test

Le diamètre du cylindre est tel que la compacité vaut 0,1875. La longueur du domaine vaut 7 diamètres. Afin de simuler une grille de cylindres rectiligne, le rayon de la veine fluide est 1000 fois supérieur à sa hauteur. Ceci permet de négliger toute composante radiale. Ainsi, le résultat méridien que nous observerons dans la suite sera en réalité unidimensionnel, résultant de la moyenne azimutale d'un écoulement bidimensionnel.

Les conditions limites du calcul sont reprises au tableau 7.1. Le fluide entre dans le domaine avec un nombre de Mach de 0,3.

Température totale d'entrée	T^0	[K]	300
Pression totale d'entrée	p^0	[Pa]	101325
Angle d'entrée	β	[deg]	0
Pression statique de sortie	p	[Pa]	95200

TABLE 7.1 – Conditions limites

La figure 7.1 reprend également la fonction de distribution, dont la “largeur” ϵ vaut 2,5 % du pas inter-aubes. Les bornes du support de la fonction sont tracées en gris sur la figure. Dans la section qui suit, nous allons nous atteler à la caractérisation de cette fonction.

7.2 Caractérisation de la fonction de distribution

La fonction de distribution revêt une importance particulière puisqu'elle doit assurer la transmission de la force lagrangienne sur le maillage de calcul de manière à obtenir la satisfaction des conditions limites de paroi virtuelle en dégradant le moins possible l'écoulement dans le domaine fluide. Cette fonction est définie sur un support compact représenté par une enveloppe entourant l'obstacle et dépend de la distance à la paroi fictive de ce dernier.

$$\phi(d) = \frac{1}{2\epsilon} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi d}{\epsilon}\right) \right] \quad d \leq \epsilon \quad (7.1)$$

Lors de l'utilisation de cette fonction dans le domaine fréquentiel, un antagonisme apparaît entre la “largeur” ϵ du support et le nombre de modes de Fourier N utilisés pour la représenter. En effet, alors qu'un support étroit permet de tendre vers la solution exacte, il requiert également davantage de modes. Si l'analyse qualitative est rapide, l'influence de ces deux paramètres n'est pas immédiate d'un point de vue quantitatif.

Dans cette section, nous allons discuter la dualité entre les paramètres ϵ et N en ce qui concerne la représentation harmonique de la fonction de distribution. Les implications sur la qualité de l'écoulement seront examinées plus loin.

Le paramètre ϵ définit la longueur caractéristique de la fonction de distribution, à laquelle est associée une fréquence caractéristique de la variation induite par la fonction de distribution. Afin d'obtenir une représentation fidèle de celle-ci par une série de Fourier, cette dernière devra comporter des fréquences du même ordre. Intuitivement, il apparaît donc que le nombre de modes N requis pour garantir un certain niveau d'erreur variera de manière inversement proportionnelle à la longueur caractéristique ϵ . C'est ce qui est observé en pratique au niveau du spectre fréquentiel de la fonction de distribution $\phi(d)$. En effet, pour tout couple (ϵ, N) , le spectre illustré à la figure 7.2 est en similitude par rapport à la variable ϵN .

Le spectre fréquentiel présente une série de pics négatifs, que l'on pourrait qualifier de pics de résonance, le premier étant rencontré pour $\epsilon N = 1$. Inversement, une série de maxima locaux apparaît, laquelle permet de définir une courbe enveloppe qui colle d'aussi près que possible, par borne supérieure, aux coefficients de Fourier. Cette enveloppe est reprise en rouge sur la figure 7.2 et exprime la convergence de la série.

Pour une série de Fourier, l'ordre de convergence k est le nombre maximum pour lequel la condition (7.2) sur l'amplitude des coefficients de Fourier K_n est satisfaite.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |K_n| n^k < \infty, \quad n \gg 1 \quad (7.2)$$

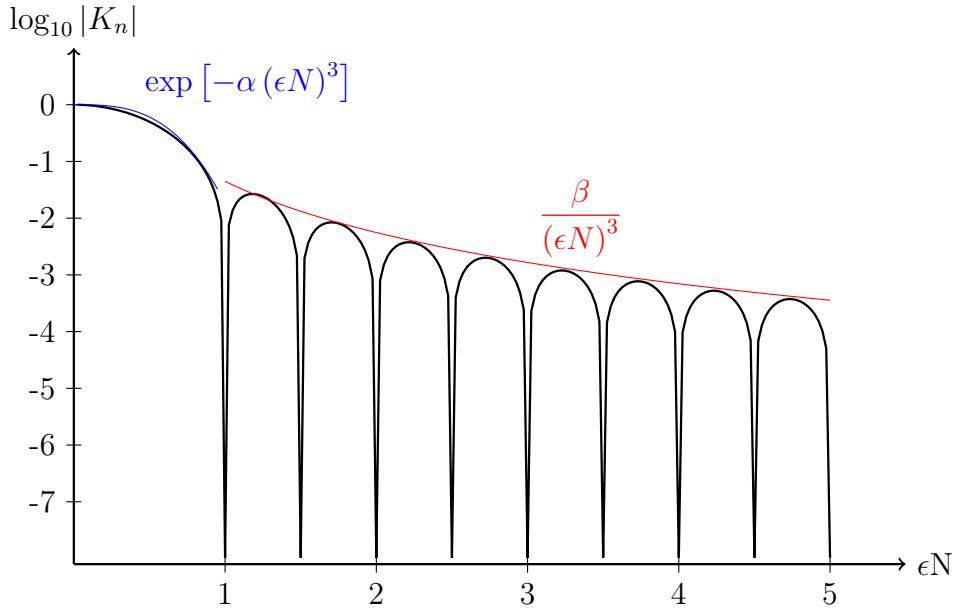


FIGURE 7.2 – Spectre fréquentiel de la fonction de distribution

Une définition équivalente consiste à dire que l’ordre de convergence est k si la condition (7.3) est rencontrée.

$$K_n \sim O [1/n^k], \quad n \gg 1 \quad (7.3)$$

D’après ces définitions, il apparaît que la fonction de distribution présente une convergence d’ordre 3 par rapport à la variable ϵN . Ce genre de convergence est dit algébrique. Notons aussi, sur base de la figure 7.2, que la décroissance modale pour $\epsilon N < 1$ peut être approchée par l’exponentielle indiquée sur la figure.

Cette notion de convergence est importante car elle permet d’estimer l’ordre de grandeur de chaque mode du spectre fréquentiel. En effet, si l’erreur de troncature $E(N)$, définie comme la différence entre la fonction $f_N(x)$ correspondant à l’approximation par une série de Fourier tronquée au mode N de la fonction $f(x)$, alors, selon Boyd [15], pour une convergence algébrique, l’erreur de troncature est estimée par la relation (7.4).

$$E(N) \sim O(N|K_N|) \quad (7.4)$$

C’est effectivement le résultat obtenu dans notre cas et illustré à la figure¹ 7.3, si la notion précédente est étendue à la variable ϵN .

1. L’erreur de troncature illustrée est en réalité l’amplitude maximale des oscillations en dehors du support $[-\epsilon, \epsilon]$ de la fonction de distribution car ce sont elles qui sont à l’origine de la dégradation de la représentation de l’écoulement.

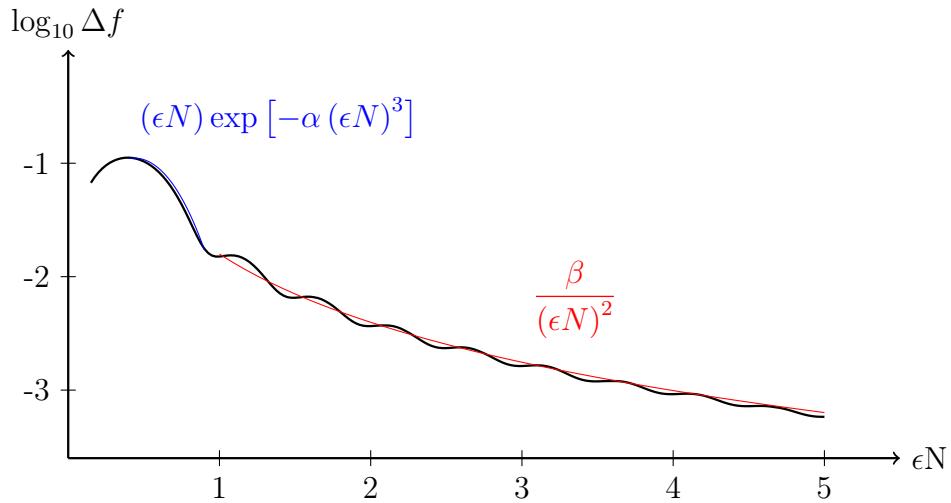


FIGURE 7.3 – Amplitude maximale des oscillations de la fonction reconstruite

Cette figure présente une série de paliers qui sont à mettre en relation avec les pics observés à la figure 7.2. Ces paliers plus ou moins larges s'avèrent être des modes inutiles à la diminution de l'erreur. La prise en compte de ces modes serait une pure perte au niveau coût de calcul. L'erreur de troncature étant déjà environ deux ordres de grandeurs inférieure à la valeur maximale de la fonction de distribution, nous nous satisferons pour la suite de la plage de valeurs $\epsilon N \in [0, 1]$.

Pour une troncature correspondant à $\epsilon N = 0.6$, la fonction de distribution approchée prend la forme présentée à la figure 7.4 (en rouge). Pour une largeur $\epsilon = 0.025$, le nombre de modes N est d'environ 25, ce qui constitue une valeur à ne pas dépasser fortement au risque d'engendrer des temps de calculs prohibitifs. Malgré cela, des oscillations non-négligeables apparaissent.

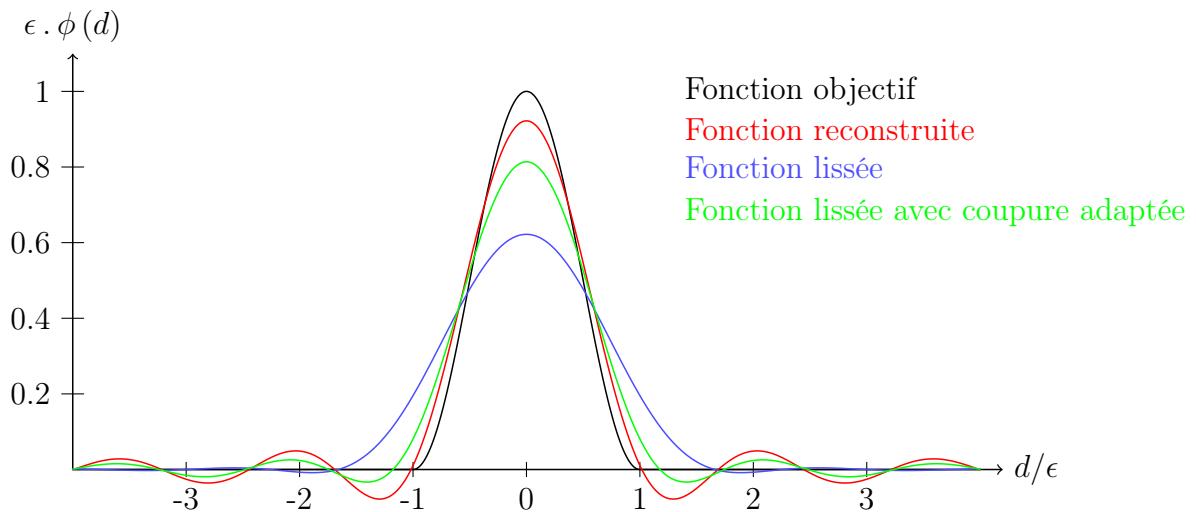


FIGURE 7.4 – Fonctions de distribution originale (noire), reconstruite (rouge) et lissées (bleue et verte).

Afin de lisser ces oscillations parasites qui dégraderont la qualité de reproduction de l'écoulement, il faut recourir au filtrage des plus hautes fréquences. En effet, ces oscillations proviennent d'une décroissance trop lente des modes de haute fréquence dont la troncature pénalise la reconstruction. Afin d'amincir le spectre fréquentiel, un filtre passe-bas est utilisé. Ce filtre a été présenté au chapitre précédent et est rappelé à l'expression (7.5).

$$K_n^{\text{lissée}} = \sigma_n K_n \quad \sigma_n = \frac{\sin(\theta)}{\theta} \quad (7.5)$$

où $\theta = n\pi/N$.

L'effet d'un tel lissage est illustré par la courbe bleue à la figure 7.4. Les oscillations ont presque totalement disparu mais la largeur effective de la fonction a fortement augmenté. Ceci est très pénalisant car la forme de l'obstacle, représentée par cette fonction, va être déformée de manière variable selon son orientation et parce qu'un contrôle de l'écoulement va être opéré dans une zone éloignée de l'observation, dégradant la qualité et la stabilité du processus.

Afin de maîtriser "l'intensité" du filtre, il est nécessaire de lui adjoindre un paramètre supplémentaire. En effet, un filtre passe-bas est caractérisé par une fréquence de coupure ω_c à laquelle correspond une atténuation de 50% de l'amplitude du signal. Au-delà de cette fréquence, les modes sont fortement amoindris. Cette atténuation diminue les oscillations mais est responsable de l'étalement de la fonction. Pour amoindrir cet effet indésirable, il convient d'ajuster la fréquence de coupure du filtre pour obtenir les effets souhaités.

Nous redéfinissons donc le filtre par l'expression (7.6).

$$\sigma_n = \frac{\sin\left(\frac{\omega_c}{\omega_c^*}\theta\right)}{\frac{\omega_c}{\omega_c^*}\theta} \quad (7.6)$$

où ω_c est la fréquence de coupure du filtre (7.5) qui vaut environ 0.6π et ω_c^* est la fréquence de coupure souhaitée.

A présent, le problème consiste donc à déterminer le couple $(\epsilon N, \omega_c)$ pour obtenir les caractéristiques souhaitées $(\Delta f, \epsilon^*)$ de la fonction de distribution approchée, où ϵ^* est la largeur effective de la fonction après lissage.

La figure 7.5 dresse la carte de deux familles de courbes. La première correspond aux courbes de même erreur de troncature Δf (en noir), pour des valeurs allant de 1% à 9% du maximum de la fonction. La deuxième famille est celle de même largeur effective ϵ^* en pourcentage de la largeur demandée ϵ .

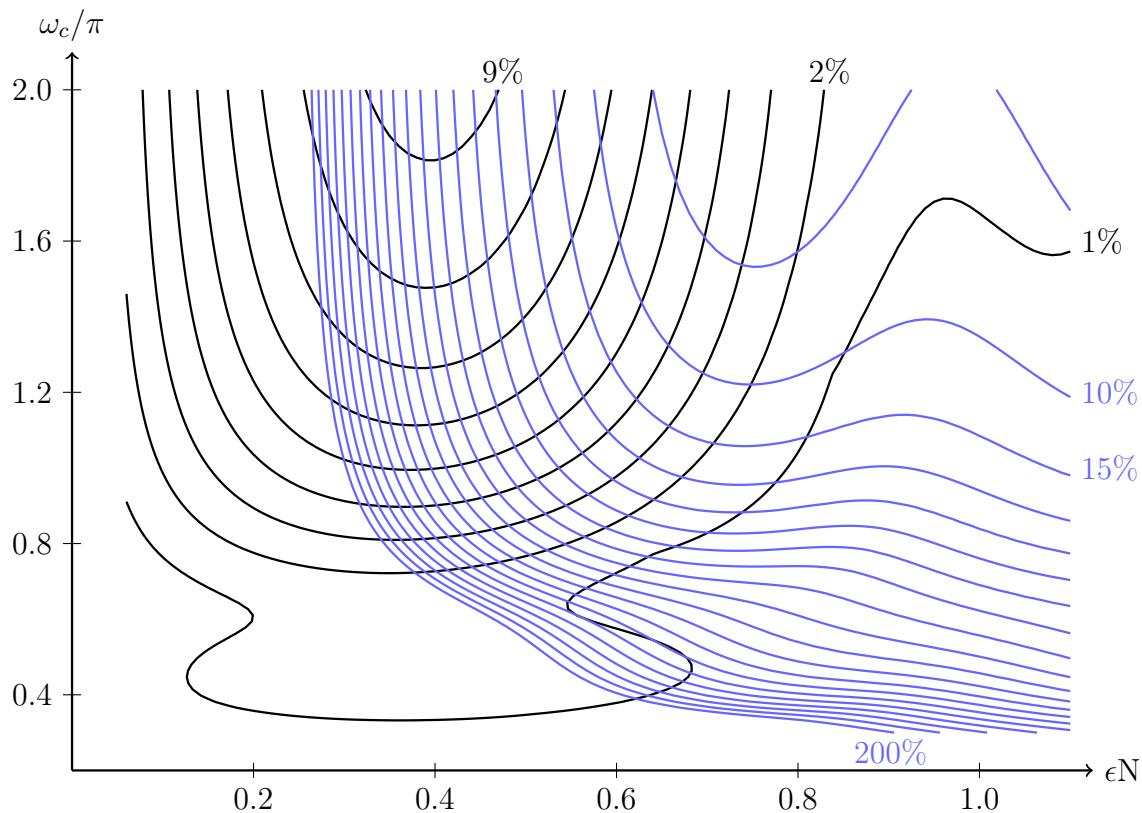


FIGURE 7.5 – Courbes d'égales erreurs d'amplitude (noir) et de lissage (bleu)

Les deux familles de courbes sont caractérisées par deux tendances différentes. En effet, si Δf et ϵ^* diminuent tous deux lorsque ϵN augmente, ils évoluent de manière opposée lorsque la fréquence de coupure varie. Il convient donc soit d'effectuer un compromis entre les deux caractéristiques de la fonction, soit de donner la priorité à l'un d'eux. Nous choisissons cette deuxième option et décidons de limiter l'erreur de troncature. Cette option est sélectionnée pour deux raisons. La première est qu'il est difficile d'établir une relation déterminant l'évolution idéale de Δf et ϵ^* . La deuxième est que les oscillations sont génératrices de perturbations circonférentielles parasites, qu'il convient de limiter. Nous limiterons l'erreur de troncature à la valeur arbitraire de 3,5% du maximum de la fonction de distribution.

Une fois ce choix effectué, nous disposons donc d'une courbe déterminant la fréquence de coupure ω_c à appliquer pour toute valeur ϵN . Ainsi, le seul paramètre de calcul devient la valeur ϵN liée tant au coût de calcul qu'à la qualité de représentation. En fonction de ce choix apparaît une distorsion de la fonction de distribution représentée à la figure 7.6.

Si une distorsion de 20 % est acceptée, le nombre de modes à inclure pour représenter correctement le champ de force est de $0,6/\epsilon$. Ceci correspond à la courbe verte de la figure 7.4.

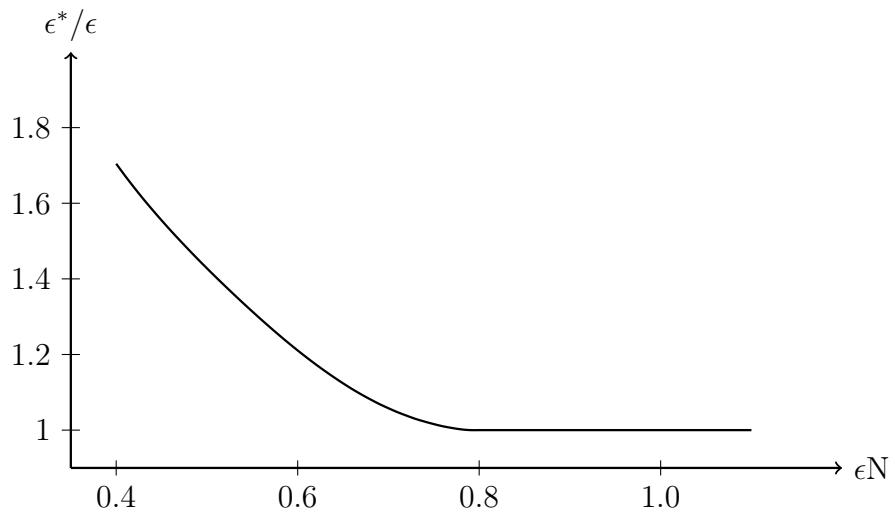


FIGURE 7.6 – Ratio de la largeur de la fonction de distribution après lissage à celle avant lissage pour une erreur de troncature limitée à 3,5% du maximum de la fonction de distribution

La figure 7.7 illustre les composantes axiale et tangentielle du champ de force développé par le cylindre pour garantir son imperméabilité. La force est diffuse autour de la position de la frontière indiquée en trait continu noir, sur un support compact dont les frontières sont représentées en trait continu gris. Notons que de légères oscillations de Gibbs sont observées sur la composante tangentielle. Elles sont cependant très limitées et n'altéreront manifestement pas la solution.

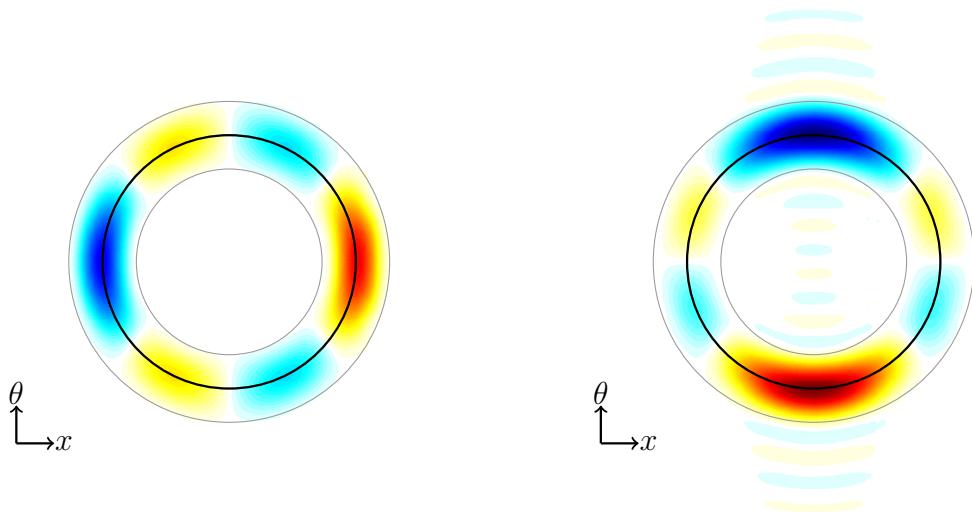


FIGURE 7.7 – Composantes axiale (gauche) et tangentielle (droite) du champ de force pour $\epsilon=0,25\%$ et $N=25$

7.3 Structure de l'écoulement autour d'un corps immergé

Avant d'engager l'étude de la méthode développée sur le cas de l'écoulement non-visqueux autour d'un cylindre, il convient d'aborder une des particularités de celle-ci, issue de l'utilisation de la méthode de frontière immergée. Il s'agit du fait que l'écoulement est également résolu à l'intérieur de l'obstacle et s'y développe. Dans ce qui suit, nous allons décrire la structure de cet écoulement interne qui, de manière générale, dépend peu de la géométrie du corps immergé.

L'écoulement interne n'est qu'une conséquence de son pendant externe et du champ de force qui maintient l'imperméabilité à la paroi fictive de l'obstacle. Le champ de force a été observé à la figure 7.7. L'écoulement externe est quant à lui visible à la figure 7.8, au travers de la vitesse et de la pression statique adimensionnelles. Les constantes d'adimensionnalisation sont la vitesse et la pression totale à l'entrée du domaine.

Les résultats bien connus sont retrouvés : deux points d'arrêt de part et d'autre du cylindre selon l'axe et deux pics de succion selon la direction circonférentielle. Ces résultats ont été obtenus par le mériдиен harmonique. Nous préciserons sa configuration dans la suite.

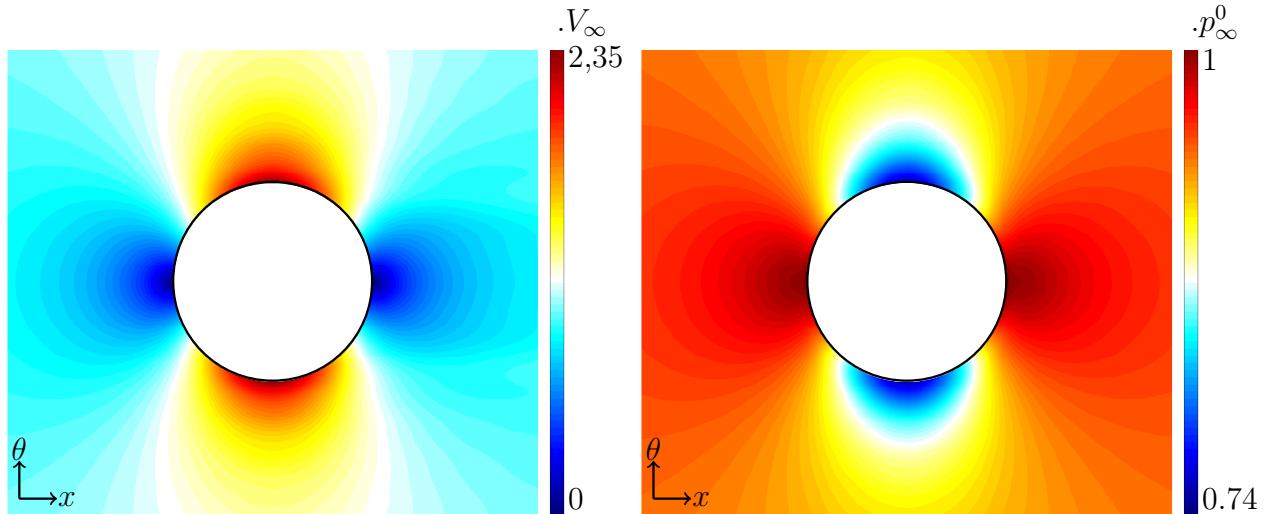


FIGURE 7.8 – Champs de vitesse (gauche) et de pression (droite) autour du cylindre

Afin de déduire, de manière générale, la structure de l'écoulement interne, il convient d'ajouter aux figures 7.7 et 7.8 la projection des équations de conservation de la masse (7.7) et de la quantité de mouvement (7.8) dans le référentiel (\mathbf{n}, \mathbf{t}) de la normale et la tangente au cylindre.

$$\frac{\partial \rho V_n}{\partial n} + \frac{\partial \rho V_t}{\partial t} = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial \rho V_n V_n}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\partial \rho V_n V_t}{\partial t} = f_n \quad (7.8)$$

La vitesse normale V_n étant annulée à la paroi, dans une région proche de celle-ci, les équations simplifiées (7.9) et (7.10) représentent fidèlement le comportement du fluide.

$$\frac{\partial \rho V_n}{\partial n} + \frac{\partial \rho V_t}{\partial t} = 0 \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = f_n \quad (7.10)$$

Ces relations, appliquées au cas du cylindre, permettent de dégager les tendances illustrées à la figure 7.9, laquelle présente également les lignes de courant, la trace du cylindre et les zones principales de force (en orange).

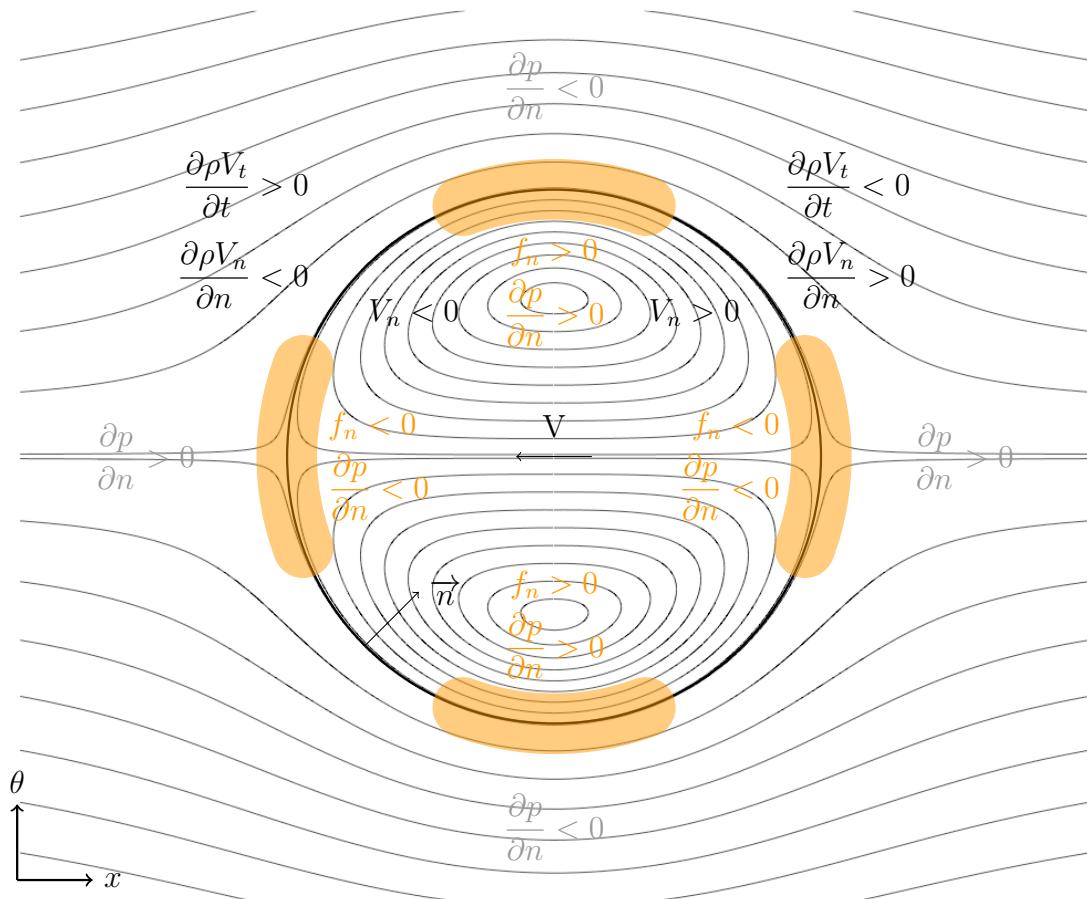


FIGURE 7.9 – Structure des écoulements interne et externe au cylindre

A l'avant et à l'arrière du cylindre, la force est orientée vers l'extérieur de l'obstacle et mène aux deux points d'arrêt (vitesse nulle et pression élevée). A l'avant du cylindre, la force diffuse arrête le fluide au niveau de la paroi et provoque une vitesse vers l'amont à l'intérieur de l'obstacle. En poursuivant le long de l'axe, la force qui se trouve à l'arrière du cylindre permet de réorienter le vecteur vitesse dans le sens aval, en passant par un nouveau point d'arrêt. L'écoulement interne est donc caractérisé par une recirculation sur l'axe de symétrie. De manière générale, pour une géométrie de profil aérodynamique, celle-ci se

retrouvera sur le squelette ou dans ses proches abords.

L'obstacle étant imperméable, le reste de l'écoulement interne doit assurer la conservation du débit. Celle-ci se traduit par le développement de deux zones tourbillonnaires. En effet, hors de l'aube, en partant du point d'arrêt amont pour se diriger vers le pic de succion "extrados", le gradient tangentiel de vitesse tangentielle est positif. Il s'ensuit, par la conservation de la masse, que le gradient normal de vitesse normale est négatif. Cette dernière étant nulle au droit de la paroi, elle est positive à l'extérieur et négative à l'intérieur (i.e. dirigée vers la paroi). La vitesse tangentielle interne quant à elle est dirigée vers l'aval, par continuité avec la vitesse tangentielle externe. Ce couple (V_n, V_t) montre une circulation tourbillonnaire dans le sens horloger dans cette moitié supérieure du cylindre. Un raisonnement analogue valide l'écoulement interne dans le reste de l'obstacle.

Ainsi, la structure interne de l'écoulement présente deux lobes de circulation tourbillonnaire avec une vitesse inverse proche de la ligne moyenne. Ce raisonnement est général car tout obstacle dans un fluide en mouvement présente deux zones de surpression, aux bords d'attaque et de fuite, ainsi que des zones de succion, ne fussent-elles que locales. Dès lors, bien que l'écoulement interne ne présentera pas en général une allure symétrique, il aura la même comportement. Ceci sera à nouveau illustré au chapitre 8.

La présence d'une telle structure d'écoulement dans la résolution a des implications importantes pour le méridien harmonique. Afin de dériver le modèle méridien harmonique, il a été nécessaire de présenter le système aux perturbations sous forme quasi-linéaire, pour permettre sa résolution par superposition modale. Les termes non-linéaires incluant des perturbations de produits de fluctuations de la forme (7.11) ont ainsi été mis à l'écart.

$$\rho V_i'' V_j'' - \overline{\rho V_i'' V_j''} \quad (7.11)$$

Après la discussion que nous venons d'effectuer, il apparaît que ces termes ne sont pas négligeables. En effet, à l'intérieur de l'obstacle existe une zone de recirculation importante qui crée des perturbations de l'ordre des composantes moyennes de l'écoulement.

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 5, il existe plusieurs façons de prendre en compte ces termes non-linéaires. Ils peuvent être évalués à partir des séries de Fourier de leurs composantes, calculés dans le domaine physique ou résulter d'une approximation (Billson[13]). Nous avons utilisé cette dernière méthode pour exprimer les termes non-linéaires par les expressions (7.12) à (7.13).

$$\frac{\partial (\rho V_i'' V_j'' - \overline{\rho V_i'' V_j''})}{\partial s_j} = \frac{\partial \bar{\rho} (V_i'' V_j'' - \overline{V_i'' V_j''})}{\partial s_j} \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial (\rho V_j'' H'' - \overline{\rho V_j'' H'})}{\partial s_j} = \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{V}_i (V_i'' V_j'' - \overline{V_i'' V_j''})}{\partial s_j} \quad (7.13)$$

Ces termes sont calculés dans le domaine fréquentiel en réalisant le produit de convolution des transformées de Fourier des perturbations de vitesse. En effet, l'expression (7.14) reprend l'une des propriétés des séries de Fourier qui est que le produit de deux fonctions temporelles est égal au produit de convolution de leurs transformées de Fourier dans le domaine spectral.

$$f(t) \cdot g(t) = \widehat{f}[\omega_n] * \widehat{g}[\omega_n] \quad (7.14)$$

Numériquement, la convolution est exprimée par la relation (7.15).

$$\begin{aligned} \widehat{h}_n &= \widehat{f} \cdot \widehat{g} \\ &= \sum_{m=-N}^N f_{n-m} \cdot g_m \end{aligned} \quad (7.15)$$

Cependant, l'ajout de ces termes non-linéaires dans le système auxiliaire a tendance à déstabiliser la résolution numérique. Ceci est probablement dû au fait que ce système est résolu par un schéma numérique basé sur les composantes moyennes de l'écoulement, comme nous l'avons détaillé au chapitre 6. Dès lors, la physique des termes non-linéaires n'est pas respectée. De plus, l'intensité de ceux-ci est importante et leur variation brutale, ce qui rend la résolution numérique difficile et instable.

Pour l'application sur le cylindre, il a été néanmoins possible d'arriver à la convergence en calculant les termes non-linéaires une seule fois au cours de la résolution, pour une solution linéaire déjà bien établie, et en les figeant pour le reste de la résolution non-linéaire. Les résultats présentés à la figure 7.8 en sont l'illustration².

Néanmoins, l'expérience a montré qu'il n'est pas possible d'obtenir une stabilité du processus de résolution de manière générale. Nous devons donc nous résoudre à négliger les termes non-linéaires, même si cela se fait au détriment de la qualité de reproduction.

Le corollaire est que les termes non-linéaires présents dans le système moyen, i.e. les tensions circonférentielles, ne peuvent plus apparaître tels quels. En effet, considérer la moyenne de ces termes sans leur pendant aux perturbations déséquilibrerait la résolution, les perturbations n'étant pas altérées de façon compatible avec l'altération des moyennes, les termes de la forme (7.11) étant absents.

Afin d'éviter le découplage entre les systèmes moyens et aux perturbations qui découlent de la non prise en compte des tensions circonférentielles, il reste possible de se conformer aux hypothèses de perturbations limitées de He en calculant les tensions circonférentielles d'après la seule partie de l'écoulement externe à l'obstacle. Dans ce cas, les produits de perturbations peuvent devenir négligeables. Les tensions calculées de la sorte

2. Ces résultats seront comparés à la solution de référence plus loin dans l'exposé par souci d'exhaustivité.

modifieront l'écoulement moyen de façon favorable à une reproduction fidèle à la physique, comme nous le montrerons dans la suite. En effet, étant donné que nous ne nous intéressons qu'à l'écoulement externe, l'usage de termes non-linéaires qui leur sont compatibles s'avère suffisant. Cette philosophie est adoptée dans la suite. Les tensions circonférentielles restent calculables dans le domaine fréquentiel. Leur expression complète est reprise à l'annexe G.

7.4 Comportement modal du méridien harmonique

La discussion de début de chapitre a permis d'identifier les paramètres qui définiront la qualité de reproduction du méridien harmonique. Il s'agit du nombre de modes de Fourier N inclus dans la simulation, de la largeur ϵ du support de la fonction de distribution et le produit ϵN qui influence la représentation fréquentielle du champ de force.

L'influence du produit ϵN a été mise en lumière précédemment. C'est de lui que dépend la fidélité de reconstruction fréquentielle de la fonction de distribution. Les effets de cette fidélité variable seront abordés en premier.

Ensuite, nous aborderons l'influence que présente la dimension ϵ relative à la compacité du support de la fonction de distribution sur la reproduction de l'écoulement.

Pour chacun de ces cas, nous effectuerons la comparaison avec la solution de référence obtenue par un code tridimensionnel stationnaire³.

7.4.1 Fidélité spectrale de la fonction de distribution

Comme cela a été discuté précédemment, l'effet d'un produit ϵN variable est double. Premièrement, un produit trop faible correspond à une troncature trop importante du spectre fréquentiel de la fonction de distribution, ce qui laisse apparaître des oscillations de Gibbs. Deuxièmement, un produit de valeur insuffisante engendre un étalement du champ de force et une distorsion de la représentation géométrique de l'obstacle.

Dans ce qui suit, les différents résultats présentés ont été obtenus par des simulations harmoniques incluant un nombre de modes de Fourier variable, allant de 10 à 50, et pour une largeur ϵ du support équivalente à 2% de l'extension circonférentielle du domaine étudié, soit une valeur assez faible qui permet d'assurer une représentation assez compacte de la paroi. Ceci correspond à une gamme de produits ϵN allant de 0,2 à 1.

Pour commencer, la figure 7.10 présente, d'un point de vue moyen, les évolutions de

3. Notons que, afin de s'affranchir de tout défaut émanant de la résolution effectuée par ce code, le résultat fourni par celui-ci a été symétrisé par rapport au plan de symétrie de normale axiale passant par le centre du cylindre. Ceci ne fausse nullement le cas de référence puisque l'écoulement est censé être naturellement symétrique.

l'énergie cinétique des perturbations et le nombre Mach. Les traits discontinus indiquent les positions de début et de fin du cylindre. La coordonnée axiale est adimensionnée par le diamètre D du cylindre.

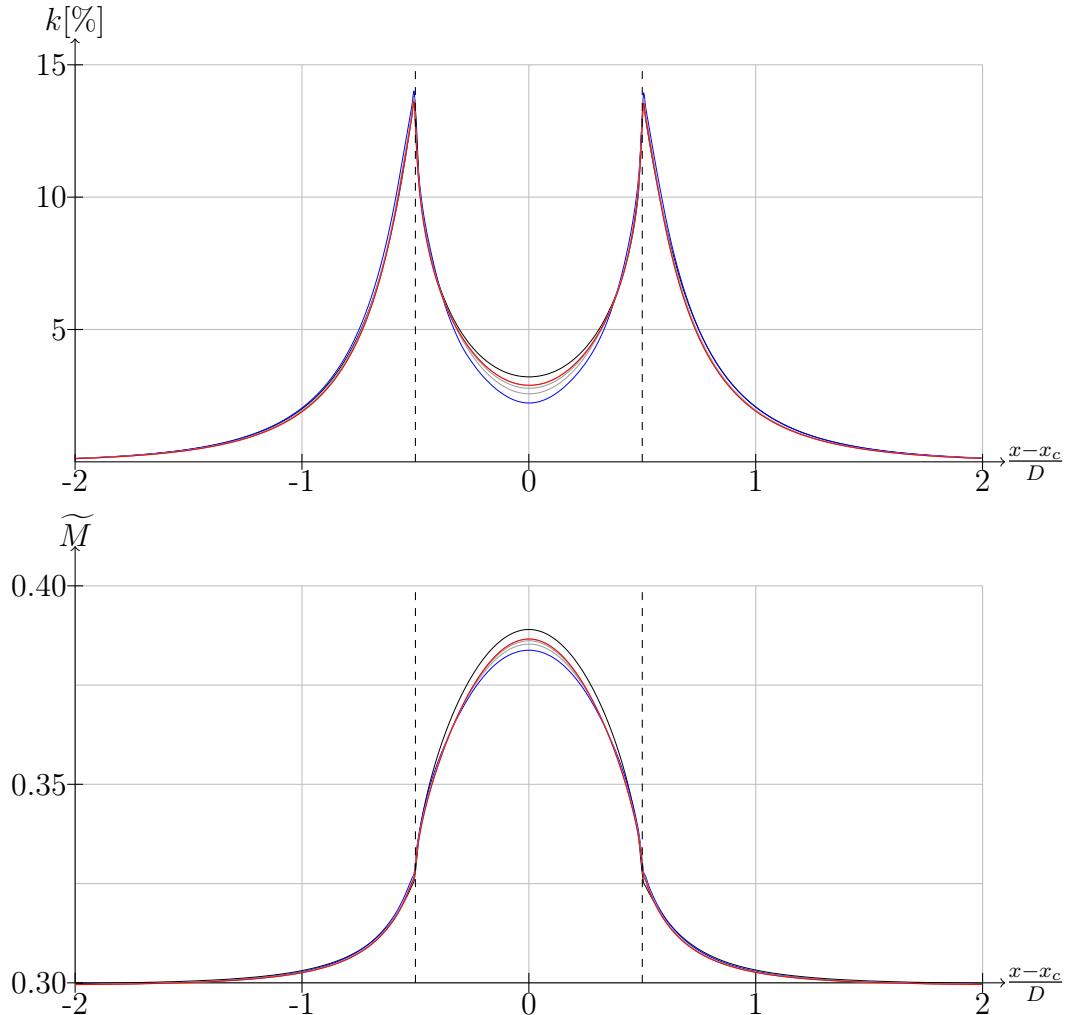


FIGURE 7.10 – Evolutions axiales de l'énergie cinétique moyenne des perturbations (haut) et du nombre de Mach moyen (bas) pour ϵN variant de 0,2 (bleu) à 1 (rouge) par pas de 0,2 (gris) comparées à la solution de référence (noir)

L'accord entre les différentes simulations hors de la zone couverte par le cylindre est très bon, dès les plus faibles nombres de modes. L'écoulement dans ces régions est principalement conditionné par l'arrêt du fluide aux bords “d'attaque et de fuite”, eux-mêmes liés à la configuration de la fonction de distribution. Or celle-ci varie peu en ces endroits car sa plus faible dimension, sa largeur ϵ , est orientée selon la direction axiale, dont la qualité est liée au maillage méridien, inchangé d'une simulation à l'autre.

En revanche, dans la zone couverte par le cylindre, l'influence de la qualité variable du champ de force harmonique est ressentie. Si l'allure générale est bonne dès les plus faibles valeurs du produit ϵN , il s'avère qu'une valeur de 0,8 mène à la convergence des valeurs illustrées. L'explication est à trouver à la figure 7.6 exprimant l'étalement harmonique de

la fonction de distribution en fonction du paramètre ϵN . Comme cela avait été observé sur cette figure, une valeur de 0,6 pour ce produit semble acceptable, tant pour le champ de force que pour l'écoulement qu'il génère.

Afin de poursuivre les observations d'un point de vue d'ordre élevé, la figure 7.11 représente l'évolution circonférentielle du champ de vitesse axiale adimensionnée par la vitesse en entrée en un plan de coupe de normale axiale passant par le centre du cylindre. La seule portion fluide est illustrée. La distorsion de la fonction de distribution y est indiquée en traits discontinus au travers de la valeur effective ϵ^* de la largeur de son support.

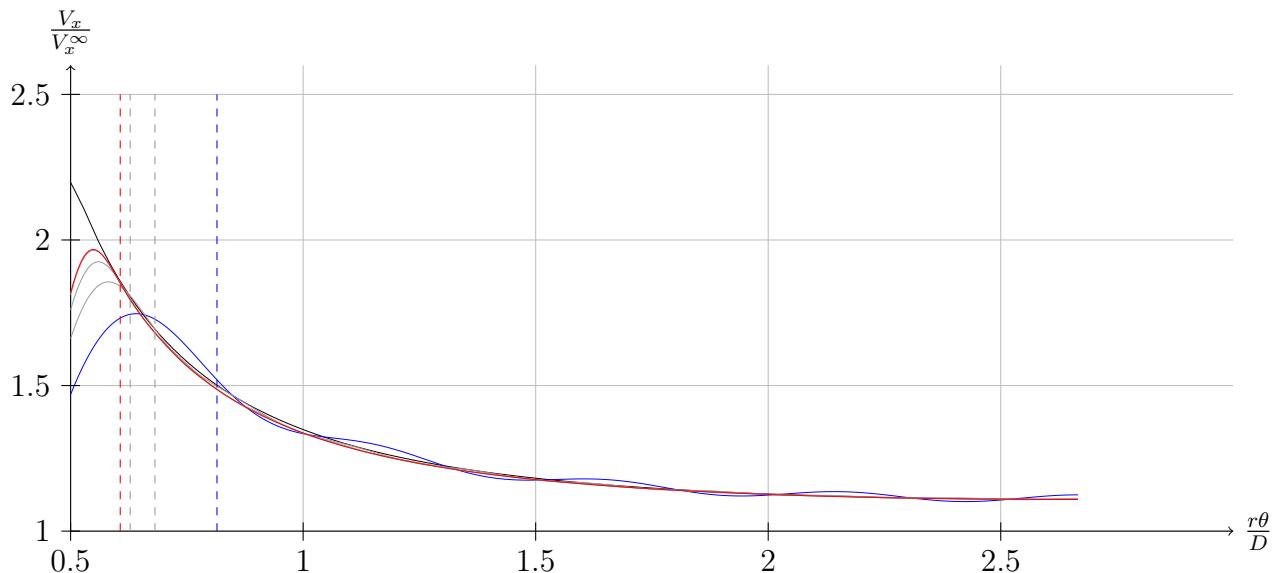


FIGURE 7.11 – Evolutions circonférentielles de la vitesse axiale sur la portion fluide en un plan de coupe passant par le centre du cylindre pour ϵN variant de 0,2 (bleu) à 1 (rouge) par pas de 0,2 (gris) comparées à la solution de référence (noir)

Cette figure montre que les oscillations de Gibbs du champ de force n'influencent plus l'écoulement pour une inclusion d'au moins 20 modes, soit $\epsilon N=0,4$. Ensuite, l'effet marquant est la diminution de la distorsion de la fonction de distribution et son impact sur la reproduction du pic de vitesse à la paroi. A nouveau, on observe que l'écoulement atteint sa convergence spectrale à 40 modes, soit à une valeur $\epsilon N=0,8$.

Cette figure montre également que le pic de vitesse est décalé de la paroi fictive du cylindre, contrairement à la réalité de cet écoulement. Ceci est dû à la localisation floue de la frontière solide. Nous aborderons ce point en détail à la section 7.5. C'est également pour cette raison que les grandeurs moyennes ne se conforment pas à l'évolution de référence, comme la figure 7.10 l'exprime.

Pour terminer, la figure 7.12 illustre le champ de vitesse absolue adimensionnelle de simulations harmoniques incluant 10, 20 et 30 modes qu'elle compare à la solution de référence. Cette figure apporte une confirmation visuelle des éléments discutés. La structure de l'écoulement hors de la zone couverte par le cylindre varie peu tandis que les pics de

vitesse, par leur amplitude et leur étendue, sont fortement influencés par la richesse modale de la simulation.

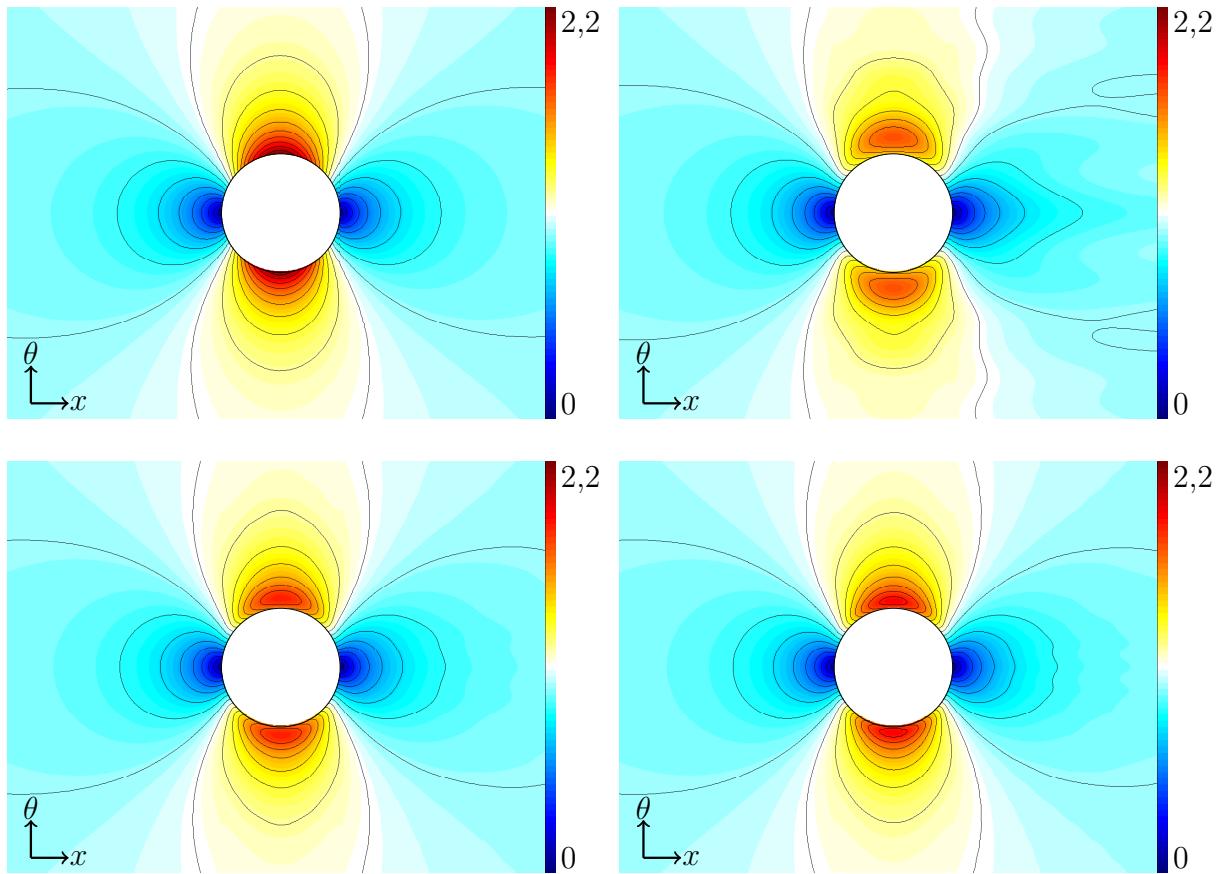


FIGURE 7.12 – Champs de vitesse adimensionnelle obtenus par la simulation de référence (haut, gauche) et par des simulations harmoniques de 10 modes (haut, droite), de 20 modes (bas, gauche) et de 30 modes (bas, droite)

Sur base des observations réalisées, nous pouvons confirmer qu'un produit ϵN de valeur 0,6 est suffisant pour représenter correctement le champ de force et son impact sur l'écoulement. La confrontation des points de vue moyen et d'ordre élevé nous apprend que l'écoulement moyen est moins sensible à ce paramètre, car moins sensible aux variations locales, et pourrait même être représenté de façon satisfaisante pour une valeur $\epsilon N=0,4$.

7.4.2 Largeur du support

Par sa distribution diffuse, le champ de force empêche une localisation précise de la paroi et donc de son influence sur l'écoulement. La frontière effective du cylindre est difficile à déterminer, comme c'est le cas pour une balle de tennis. Ainsi, pour reproduire au mieux les gradients de l'écoulement, il semble évident qu'une largeur ϵ du support de la fonction de distribution faible soit souhaitable. C'est ce que nous allons étudier.

Dans ce qui suit, les différents résultats présentés ont été obtenus par des simulations harmoniques dans lesquelles la fonction de distribution est définie sur un support de largeur ϵ variable, allant de 1% de l'extension circonférentielle du domaine étudié à 8% de celle-ci. Pour chacune d'entre elles, le nombre de modes de Fourier inclus est de 60, ce qui permet d'obtenir des valeurs ϵN supérieures à 0,6 et de garantir une représentation fidèle de la fonction de distribution.

La figure 7.13 présente, d'un point de vue moyen, les évolutions de l'énergie cinétique des perturbations et le nombre Mach. Les traits discontinus indiquent les positions de début et de fin du cylindre.

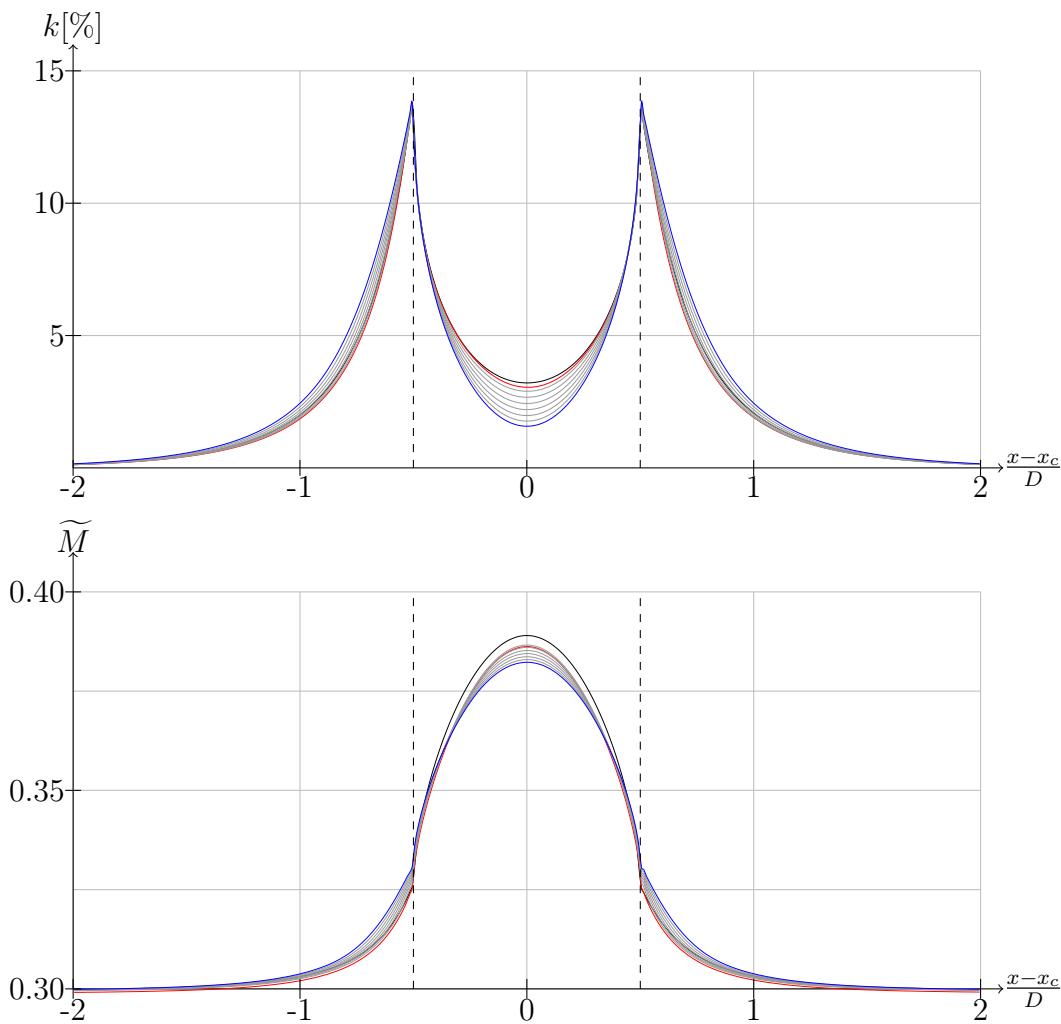


FIGURE 7.13 – Evolutions axiales de l'énergie cinétique moyenne des perturbations (haut) et du nombre de Mach moyen (bas) pour $N=60$ et ϵ variant de 8% (bleu) à 1% (rouge) par pas de 1% (gris) comparées à la solution de référence (noir)

Cette figure montre que l'écoulement moyen est influencé par l'étroitesse du support tant dans la zone couverte par le cylindre qu'en dehors, bien que dans une moindre mesure. La conformation à la solution de référence est continue pour des supports se rétrécissant, sans atteinte de la convergence. En effet, celle-ci ne sera obtenue que pour une fonction de

distribution égale à la fonction de Dirac, autrement dit pour un support d'extension nulle.

D'un point de vue d'ordre élevé, la figure 7.14 représente l'évolution circonférentielle du champ de vitesse axiale adimensionnée par la vitesse en entrée en un plan de coupe de normale axiale passant par le centre du cylindre. La seule portion fluide est illustrée. L'extension du support de la fonction de distribution y est indiquée en traits discontinus.

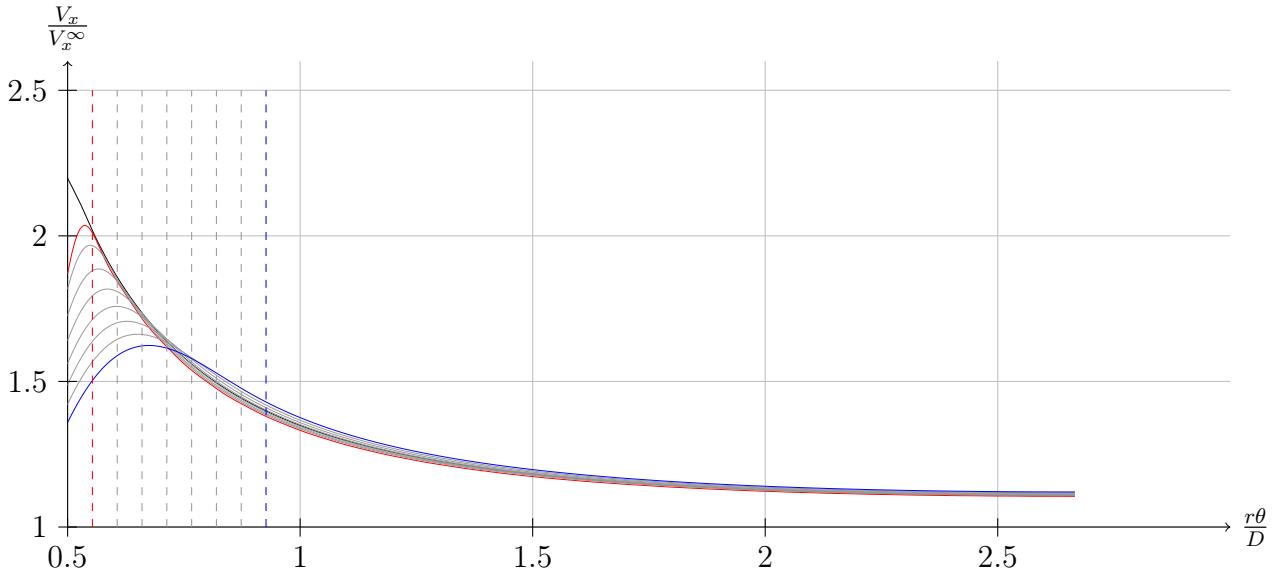


FIGURE 7.14 – Evolutions circonférentielles de la vitesse axiale sur la portion fluide en un plan de coupe passant par le centre du cylindre pour ϵ variant de 8% (bleu) à 1% (rouge) par pas de 1% (gris) comparées à la solution de référence (noir)

Pour une définition de plus en plus localisée du champ de force, la représentation du pic de vitesse se rapproche de la solution de référence, tant par son amplitude que par sa position. A nouveau, il est observé que l'amélioration de la description est continue pour une largeur ϵ diminuant. Cependant, cet effet est principalement localisé dans la région proche de la paroi fictive, les courbes se conformant d'emblée à la solution de référence hors du support de la fonction de distribution. Ces effets localisés et orientés selon la direction circonférentielle modifient le niveau d'énergie cinétique des perturbations (figure 7.13) mais sans pour autant en altérer grandement l'allure. Ces deux observations expliquent pourquoi l'influence sur l'évolution moyenne du nombre de Mach (figure 7.13) est plus limitée. Par conséquent, l'étendue de la fonction de distribution sera fixée différemment selon le point de vue abordé, moyen ou d'ordre élevé, et selon le niveau de fidélité recherché.

L'effet de la dimension du support sur la structure complète de l'écoulement est représenté à la figure 7.15 qui compare le champ de vitesse absolue adimensionnelle de simulations harmoniques à la solution de référence. Elle confirme l'étendue restreinte des améliorations en fonction du support mais aussi son importance pour la conformation à l'écoulement réel.

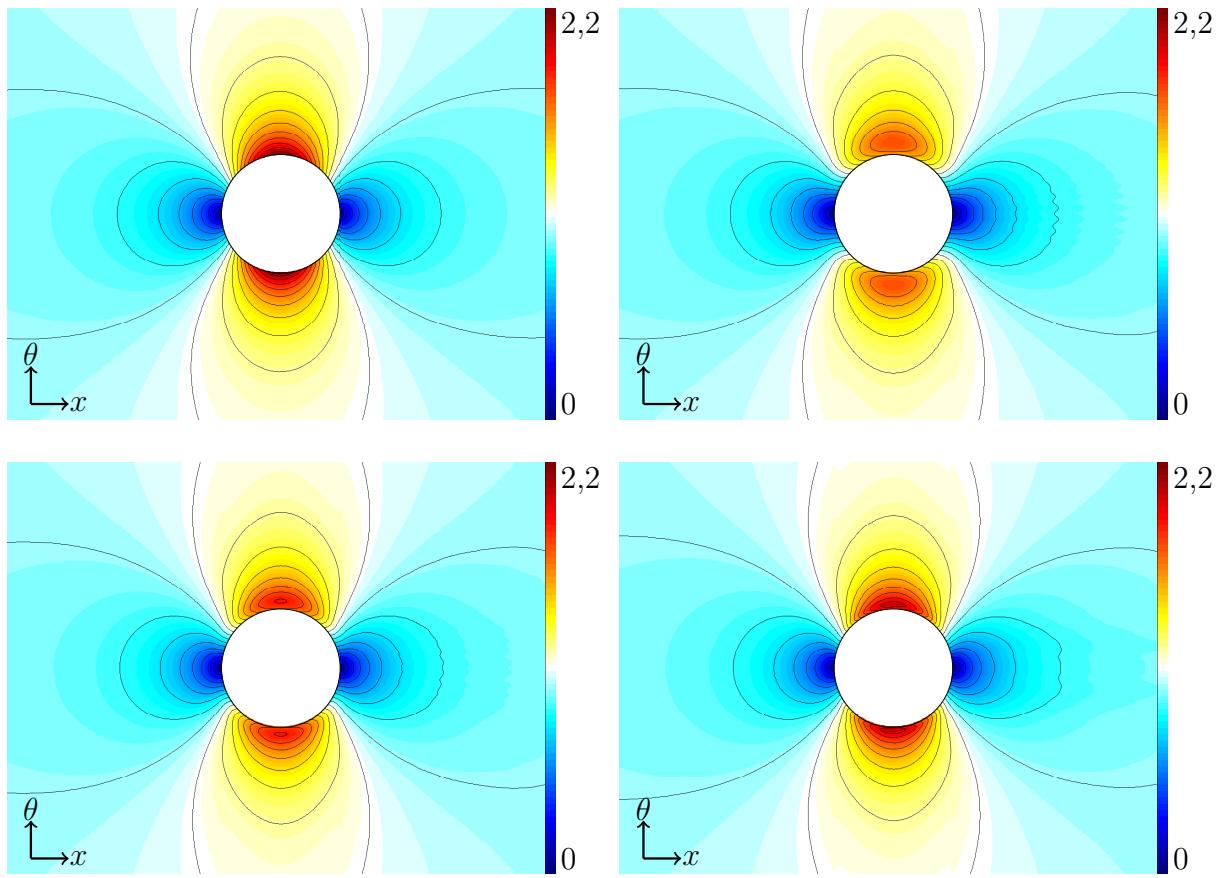


FIGURE 7.15 – Champs de vitesse adimensionnelle obtenus par la simulation de référence (haut, gauche) et par des simulations harmoniques caractérisées par une largeur de support $\epsilon=5\%$ (haut, droite), $\epsilon=3\%$ (bas, gauche) et $\epsilon=1\%$ (bas, droite).

Si un support très compact présente l'avantage de localiser plus précisément l'obstacle et d'approcher au mieux les gradients de l'écoulement à ses abords, il excite des modes de Fourier d'ordres plus élevés. Les spectres fréquentiels relatifs aux variables conservatives, inconnues de la simulation harmonique, vont s'élargir et réclamer des simulations plus coûteuses.

La figure 7.16 montre l'évolution axiale des amplitudes des modes de Fourier de la quantité de mouvement axiale.

Il apparaît clairement qu'un support de dimension restreinte crée un écoulement fréquenciellement plus riche. Ainsi, tout comme le cas s'est présenté pour la représentation de la fonction de distribution, un compromis apparaît entre la fidélité de la simulation et son coût. Néanmoins, ce compromis dépend du point de vue recherché, moyen ou d'ordre élevé. En effet, la courbe noire présente sur chaque composante de la figure 7.16 indique le lieu des modes d'amplitude ayant diminué d'un facteur 100 par rapport au mode dominant, le mode 0 étant la valeur moyenne. On constate que cette courbe varie peu avec le paramètre ϵ . Ainsi, l'allure générale de l'écoulement, et donc la composante moyenne de celui-ci, peut être reproduite pour un nombre de modes relativement faible. L'accès aux

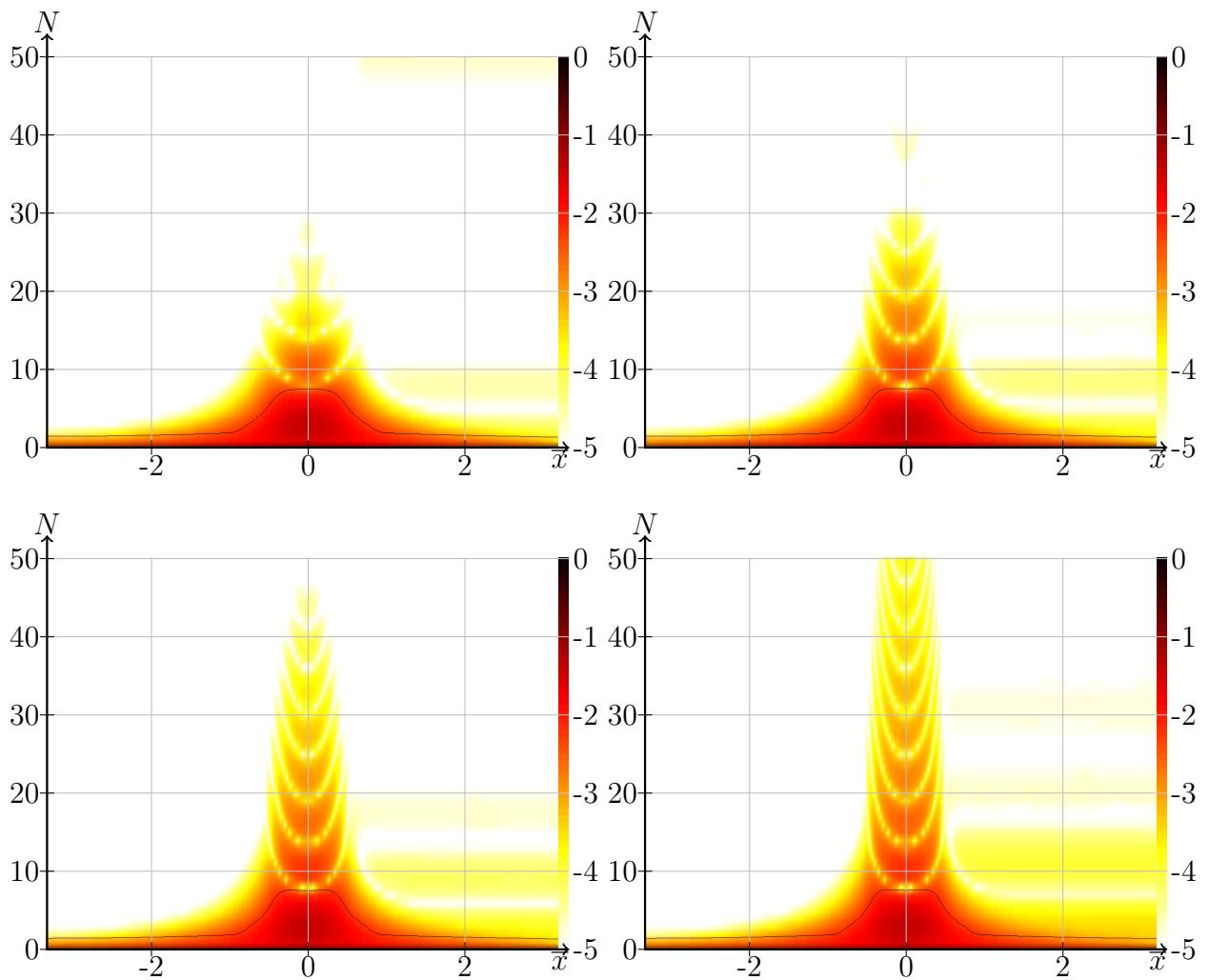


FIGURE 7.16 – Spectres $\left(\log_{10} \left[\frac{K_n}{K_n^{\max}} \right] \right)$ de ρV_x associés à des simulations harmoniques caractérisées par une largeur de support $\epsilon = 5\%$ (haut, gauche), $\epsilon = 3\%$ (haut, droite), $\epsilon = 2\%$ (bas, gauche) et $\epsilon = 1\%$ (bas, droite).

détails sera quant à lui conditionné par la richesse modale de la simulation.

7.4.3 Fidélité fréquentielle de l'écoulement

Nos discussions précédentes ont fait ressortir qu'il existe une borne inférieure sur le produit ϵN pour représenter correctement l'obstacle au travers de son champ de force et qu'une largeur ϵ faible favorise la reproduction des variations locales et brutales de l'écoulement tout en élargissant le spectre fréquentiel. Nous allons à présent aborder l'impact sur l'écoulement du compromis qu'impose une valeur ϵN constante. En effet, le résultat utile est l'écoulement lui-même et non le seul champ de force.

Si la largeur du support et le nombre de modes ne sont pas indépendants, le choix du paramètre dont il faut déterminer la valeur reste libre. Choisir ϵ signifie choisir le niveau de détail de l'écoulement, comme cela a été montré. Il en découle une borne inférieure sur le paramètre N fixée par la représentation du champ de force. Le nombre de modes ainsi fixé pourrait cependant s'avérer insuffisant pour représenter l'écoulement. Autrement dit, il se pourrait que la valeur de ϵN soit insuffisante. C'est cependant fort peu probable.

En effet, l'exciteur de l'écoulement est le champ de force au travers des composantes modales présentes dans le membre de droite du système aux perturbations (5.43). Si l'on excepte l'existence de conditions limites variables circonférentiellement en entrée et en sortie de domaine de calcul, c'est lui seul qui excite les modes. Aucune perturbation de fréquence supérieure au spectre du champ de force ne sera créée au sein de l'écoulement. Or ce champ de force est déterminé par ϵ pour sa localisation et par la valeur de ϵN pour la qualité de sa représentation. Pour exciter l'écoulement suffisamment, il faut donc une largeur ϵ faible. Et pour que cet écoulement soit excité fréquemment, il faut de plus que le produit ϵN soit suffisant, i.e. qu'il y ait assez de modes pour représenter la force.

La figure 7.11 discutée précédemment permet d'étayer ces affirmations. Elle montre une convergence spectrale de l'écoulement à partir de $\epsilon N=0,8$. C'est cette valeur qui permet de représenter la force de manière précise, comme l'étude de la section 7.2 l'a mis en lumière.

A son tour, la figure 7.16 renforce ces considérations. En effet, pour les différentes dimensions du support de la fonction de distribution, elle montre que le spectre de l'écoulement présente des amplitudes non négligeables jusqu'à des valeurs du produit ϵN voisines de 0,8. Au-delà, la coupure est assez nette.

Pourtant, l'écoulement intrinsèque autour du cylindre ne comporte pas une telle richesse modale. Pour preuve, le spectre de la solution de référence est illustré à la figure 7.17.

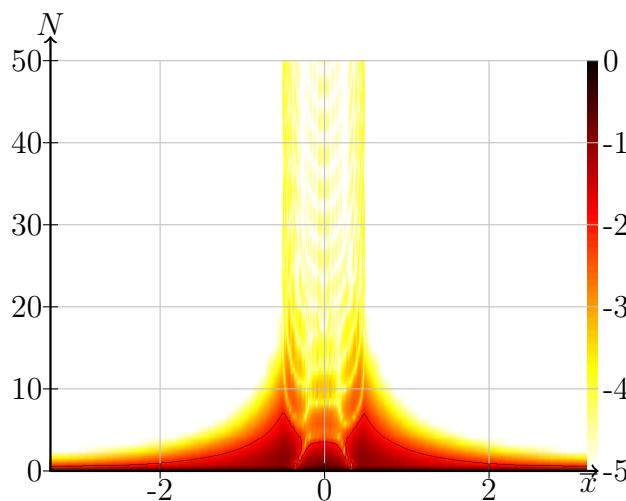


FIGURE 7.17 – Spectre $\left(\log_{10} \left[\frac{K_n}{K_n^{max}} \right] \right)$ de ρV_x associé à la solution de référence

Dès lors, la différence ne peut provenir que de l'écoulement interne. En effet, afin de représenter spectralement la solution de référence, celle-ci a été prolongée de manière douce,

par des polynômes du troisième degré, ce qui n'a probablement introduit que très peu de contenu de haute fréquence. Par contre, l'écoulement interne de la solution harmonique montre des variations rapides aux parois, comme en témoigne la figure 7.18. Celles-ci le deviennent de plus en plus au fur et à mesure que la largeur ϵ du support diminue.

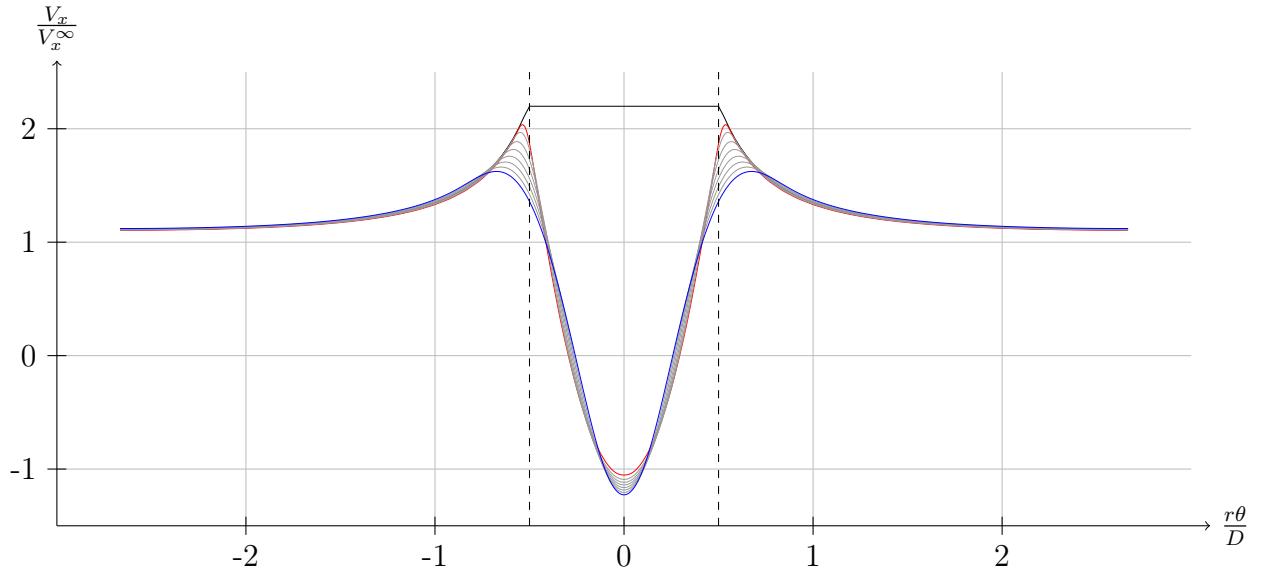


FIGURE 7.18 – Evolution circonféentielle de la vitesse axiale sur un canal complet en un plan de coupe passant par le centre du cylindre pour ϵ variant de 8% (bleu) à 1% (gris) par pas de 1% (gris) comparées à la solution de référence (noir)

De manière générale, c'est l'écoulement interne qui dictera le contenu fréquentiel de l'écoulement. En effet, les variations s'y produisent sur une longueur caractéristique maximale de l'ordre de l'épaisseur de l'obstacle alors que celles de l'écoulement externe se produisent sur une portion fluide qui est plus étendue pour un facteur de blocage usuel. Or la méthode de frontière immergée voit les écoulements interne et externe comme une seule et même évolution, la représentation de faible qualité de l'un entraîne la même pauvreté de l'autre.

En conclusion, lors de la résolution d'un écoulement, le choix de la dimension ϵ est primordial, le nombre de modes N suivra au travers d'un produit ϵN devant assurer une représentation suffisamment fidèle de la fonction de distribution associée.

7.5 Décalage du champ de force

Par le recours à la méthode de frontière immergée, la paroi de l'obstacle apparaît de manière floue et diffuse au travers de la fonction de distribution dont le support est de largeur non nulle ϵ . Ceci mène à un lissage des variations de l'écoulement proche de la paroi.

Pour fixer les idées, considérons la conservation de la quantité de mouvement selon la direction normale à la paroi en la position du pic de succion du cylindre, représenté à la figure 7.19. L'équilibre des forces (7.10) montre que le champ de force et la pression vont évoluer de concert.

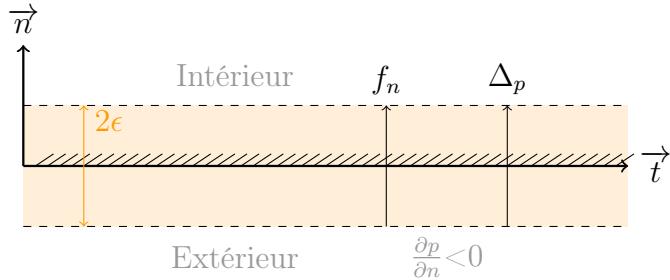


FIGURE 7.19 – Equilibre des forces à la surface fictive

La force appliquée pour maintenir l'imperméabilité de l'obstacle va induire un gradient normal de pression positif sur une bande de largeur 2ϵ . Cependant, à l'extérieur de cette zone, l'écoulement externe est tel que le gradient normal de pression est négatif. Cet antagonisme va mener à un minimum qui ne sera pas localisé à la paroi et qui sera supérieur à la valeur réelle. Cette analyse est transposable au champ de vitesse qui est lui aussi altéré par la présence du champ de force dans l'écoulement externe. Cet effet a été observé au cours des discussions précédentes. Il existe donc une couche tampon, sorte de couche limite non-visqueuse, qui dégrade le comportement du fluide aux abords de la paroi.

Pour éviter ou du moins limiter cet effet, il convient de décaler le support de la fonction de distribution par rapport à la paroi vers l'intérieur de l'obstacle. L'imposition de l'imperméabilité est quant à elle conservée au droit de la paroi fictive.

Dans ce qui suit, les différents résultats présentés ont été obtenus par des simulations harmoniques dans lesquelles la fonction de distribution est définie sur un support de largeur $\epsilon=2,5\%$ de l'extension circonférentielle du domaine étudié et décalée par rapport à la frontière fictive de 0% à 75% de la largeur ϵ . Les simulations incluent 25 modes, ce qui assure une valeur ϵN supérieure à 0,6.

La figure 7.20 présente, d'un point de vue moyen, les évolutions de l'énergie cinétique des perturbations et le nombre Mach. Les traits discontinus indiquent les positions de début et de fin du cylindre.

Si l'effet est limité hors de la zone couverte par le cylindre, il est par contre remarquable à l'intérieur de celle-ci. En effet, pour un décalage de 50% de la largeur du support, les courbes sont très proches de la réalité et pour un décalage de 75%, l'accord avec la solution de référence est presque total si l'on excepte quelques oscillations que nous expliquerons dans la suite.

D'un point de vue d'ordre élevé, la figure 7.21 (bas) représente l'évolution circonférentielle sur la portion fluide du champ de vitesse axiale adimensionnée par la vitesse en entrée en un plan de coupe de normale axiale passant par le centre du cylindre. L'extension du

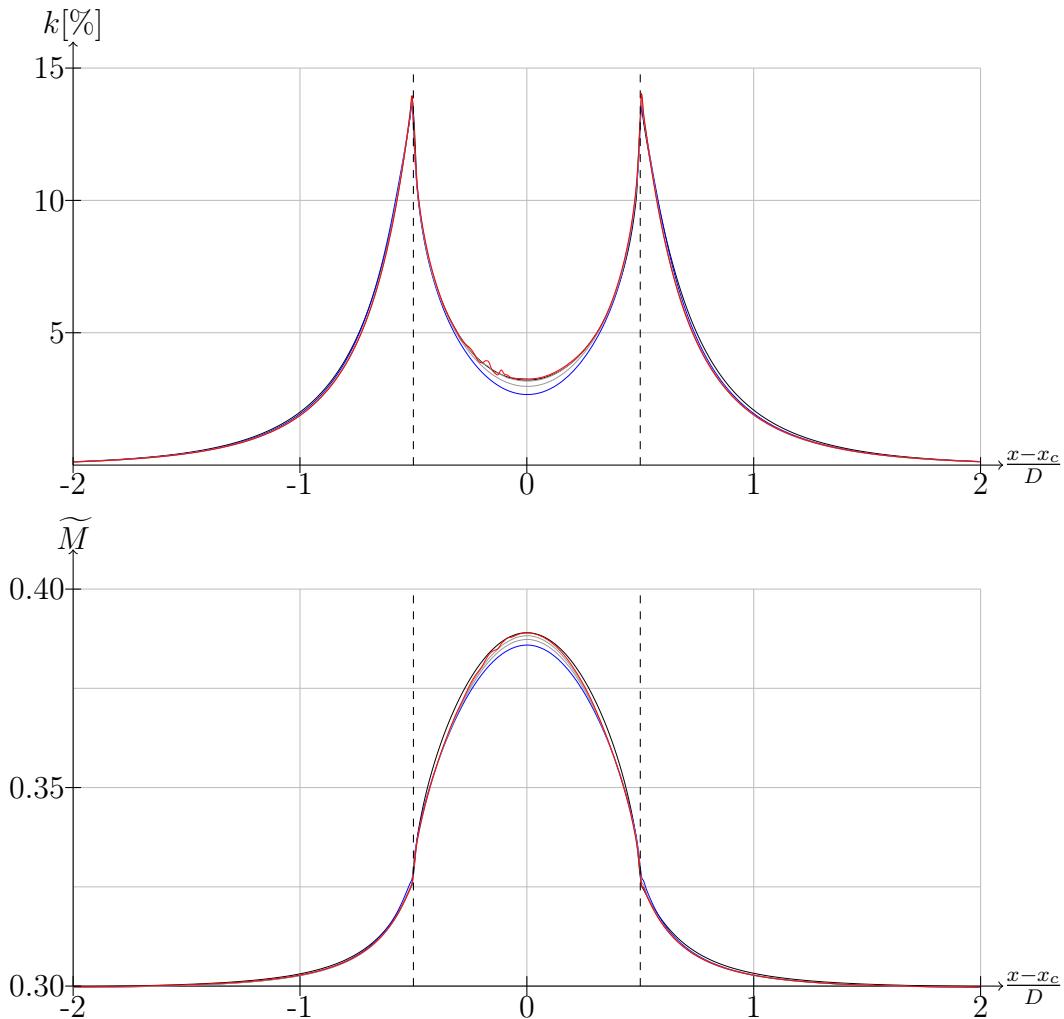


FIGURE 7.20 – Evolutions axiales de l'énergie cinétique moyenne des perturbations (haut) et du nombre de Mach moyen (bas) pour un décalage variant de 0% (bleu) à 75% (rouge) par pas de 25% (gris) de la largeur ϵ du support comparées à la solution de référence (noir)

support de la fonction de distribution y est indiquée en traits discontinus.

Au fur et à mesure du décalage du support de la fonction de distribution, l'écoulement externe devient de moins en moins lissé par le champ de force. Il tend progressivement vers l'écoulement qui se développe naturellement autour d'une paroi classique, d'épaisseur nulle. Un décalage de 75% permet de retrouver l'évolution réelle du pic de vitesse à la frontière. Cependant, pour cette valeur du décalage, quelques oscillations de Gibbs apparaissent. Elles sont à relier à la raideur de l'évolution de l'écoulement interne illustré à la figure 7.21 (haut). Elles proviennent d'une part, des évolutions plus brutales au niveau de la paroi mais surtout de l'amplification du pic de vitesse inverse rencontré au centre du cylindre.

Lors de l'examen de la figure 7.9 illustrant l'écoulement interne, nous avons expliqué la présence d'une zone de vitesse axiale négative sur la ligne moyenne de l'obstacle. Elle résulte des champs de force orientés vers l'extérieur de l'obstacle aux “bords d'attaque

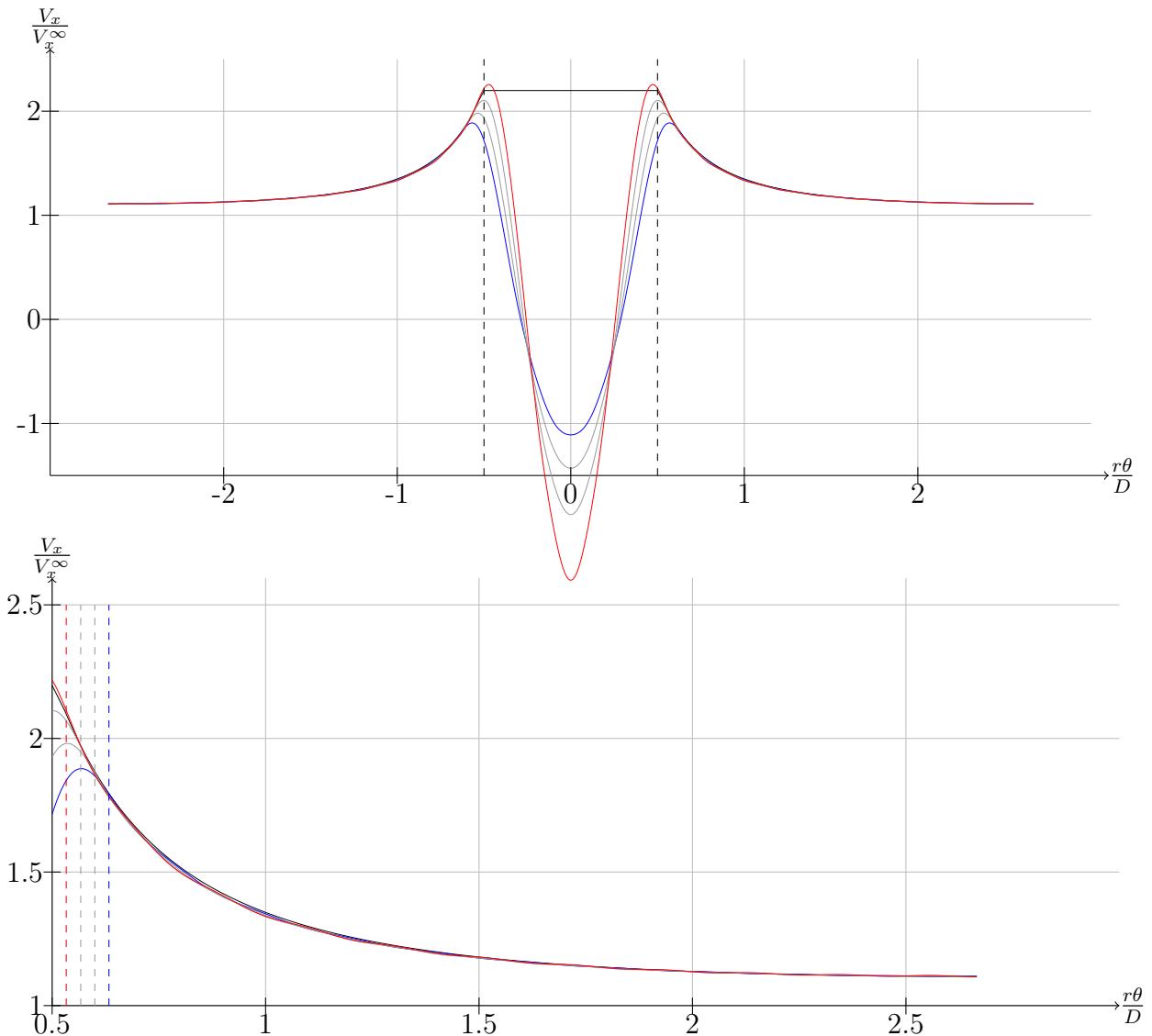


FIGURE 7.21 – Evolutions circonférentielles de la vitesse axiale sur un canal inter-aubes (haut) et sur la seule portion fluide (bas) pour $\epsilon N=0,625$ et $\epsilon=2,5\%$ et un décalage allant de 0% (bleu) à 75% (rouge) par pas de 25% (gris) de la largeur ϵ comparées à la solution de référence (noir)

et de fuite". Considérons, par symétrie, la seule partie avant du cylindre. La consigne du contrôleur feed-back est d'annuler la vitesse normale à la paroi. Pour un décalage nul, le champ de force va agir de manière à annuler la vitesse normale au centre du support. Cette force va cependant continuer à agir après la position de la frontière, sur la deuxième moitié du support, interne à l'obstacle. Ainsi, la vitesse poursuit sa diminution, devenant forcément négative. Ceci est illustré à la figure 7.22 qui représente l'évolution axiale de la vitesse axiale en un plan de coupe orienté circonférentiellement passant par le centre du cylindre. La zone couverte par le cylindre est délimitée par deux traits discontinus noirs.

Au passage, on observe qu'un décalage nul est suffisant en cette position pour reproduire correctement les variations de vitesse de l'écoulement. Ceci provient du fait que la largeur

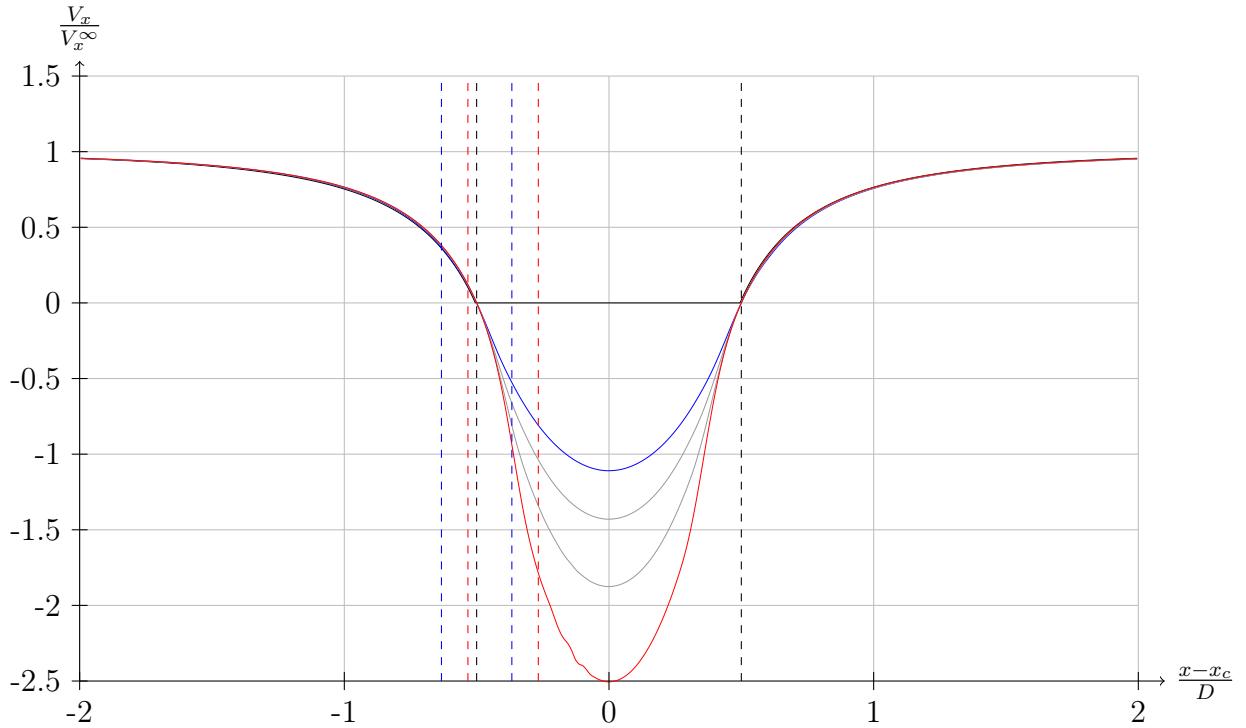


FIGURE 7.22 – Evolutions axiales de la vitesse axiale pour $\epsilon N=0,625$ et $\epsilon=2,5\%$ pour un décalage allant de 0% (bleu) à 75% (rouge) par pas de 25% (gris) de la largeur ϵ comparées à la solution de référence (noir)

ϵ est suffisamment faible et que le champ de force agit dans le même sens que le gradient normal de vitesse, ne créant pas d'antagonisme et donc pas d'extremum local.

La figure 7.22 montre que lorsque le support de la fonction de distribution est décalé vers l'intérieur, la vitesse interne sur la ligne moyenne diminue encore. En effet, le support rentrant dans l'obstacle, le champ de force est exercé sur une zone de plus en plus large après la position de vitesse nulle, ne faisant que renforcer l'action sur l'écoulement interne.

Ainsi, pour compléter la discussion de la section 7.4.3, il peut arriver, par une situation particulière associée à l'écoulement interne, que le contenu spectral de l'écoulement soit supérieur à celui du champ de force. La figure 7.23 montre l'enrichissement fréquentiel qui découle du décalage du support de la force.

Contrairement au cas classique d'utilisation de la méthode de frontière immergée ([51], [38], [88]), son application au domaine spectral peut avoir pour conséquence que l'écoulement interne dégrade son pendant externe.

L'effet de la dimension du support sur la structure complète de l'écoulement est représenté à la figure 7.24 qui compare le champ de vitesse absolue adimensionnelle de simulations harmoniques à la solution de référence. Elle confirme l'augmentation de la fidélité de l'écoulement à la réalité pour un décalage augmentant.

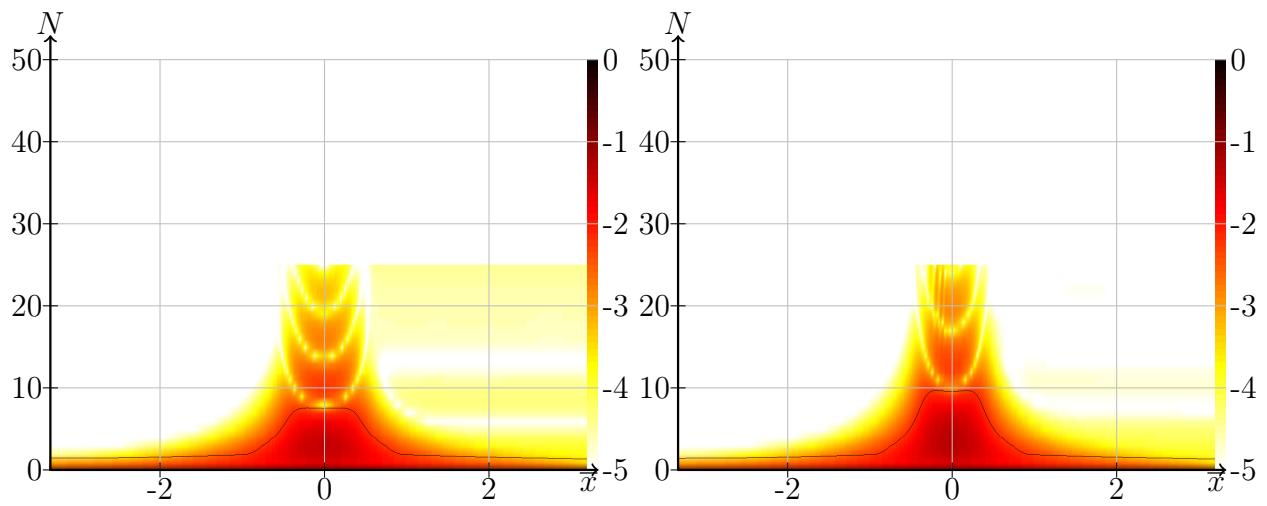


FIGURE 7.23 – Spectres $\left(\log_{10} \left[\frac{K_n}{K_n^{max}} \right] \right)$ de ρV_x associés aux simulations harmoniques avec 25 modes et $\epsilon=0,025$ pour un décalage de 0% (gauche) et de 75% (droite)

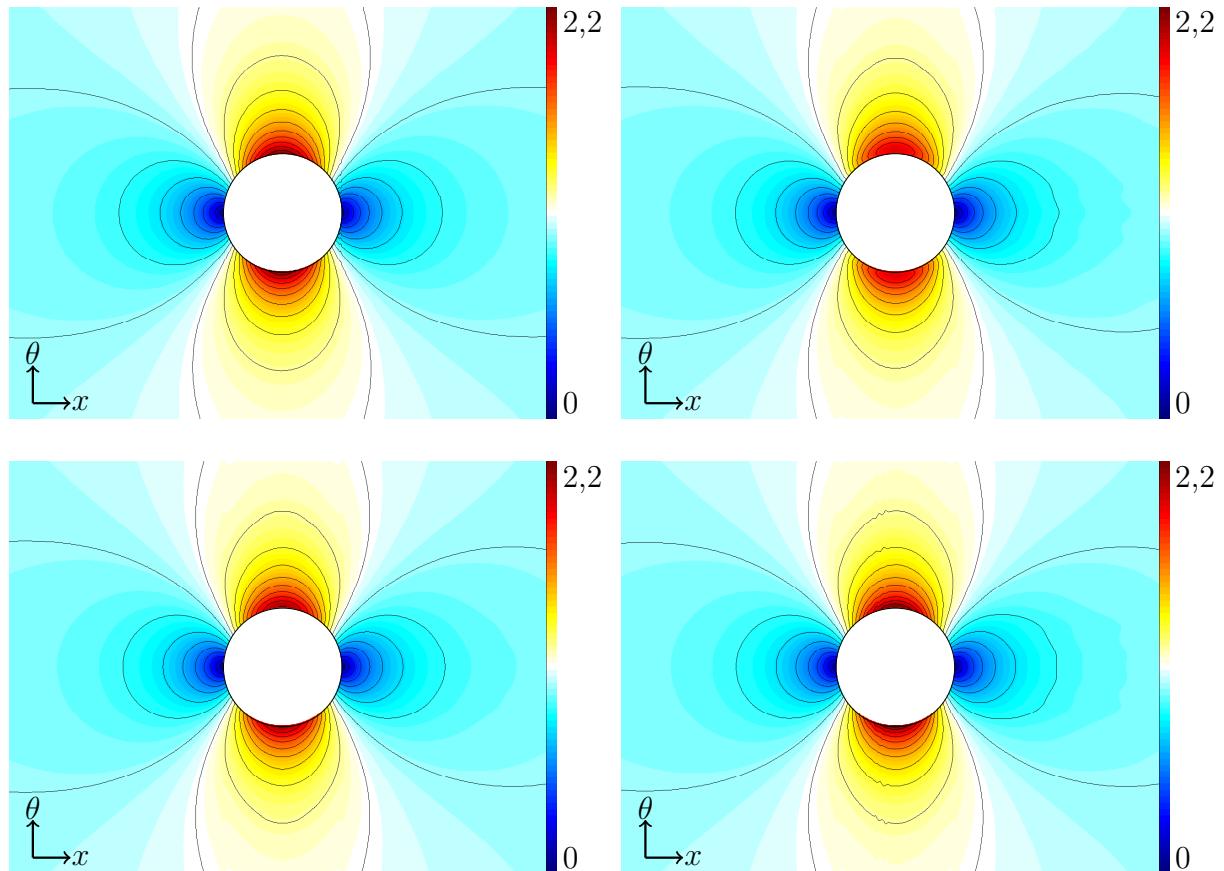


FIGURE 7.24 – Champs de vitesse adimensionnelle obtenus par la simulation de référence (haut, gauche) et par des simulations harmoniques avec $\epsilon N=0,625$ et $\epsilon=0,025$ pour un décalage de 25% (haut, droite), 50% (bas, gauche) et 75% (bas, droite)

7.6 Influence des tensions circonférentielles

Au sein du modèle méridien apparaissent deux types de termes : la force des aubes et les tensions circonférentielles. Nous avons vu les bénéfices de chacun d'eux. Contrairement au méridien classique, le méridien harmonique est capable de les obtenir de manière autonome. Précédemment, nous avons discuté la qualité de reproduction du champ de force et des tensions circonférentielles. Dans ce qui suit, nous allons illustrer, dans un cas de simulation harmonique, les bienfaits de celles-ci.

Nous l'avons expliqué à la section 7.3, les termes non-linéaires présents dans le système aux perturbations ne sont pas négligeables et il conviendrait de les considérer. Les résultats d'une simulation incluant ces termes, sous les hypothèses simplificatrices exposées en 7.3, seront présentés ci-après. Cependant, étant donné que cela rend la simulation fortement instable, nous ne pourrons, de manière générale, inclure ces produits de perturbations dans la résolution. Afin de conserver un couplage non-linéaire entre systèmes moyen et aux perturbations, nous considérons les tensions circonférentielles de l'écoulement externe à l'obstacle. Nous montrerons, par comparaison avec les résultats d'une simulation dont elle sont absentes, qu'il est important de les inclure et qu'elles reproduisent la physique de manière satisfaisante. La figure 7.25 reprend l'évolution axiale du nombre de Mach moyen dans les cas énoncés et comparés à leurs équivalents par résolution méridienne classique.

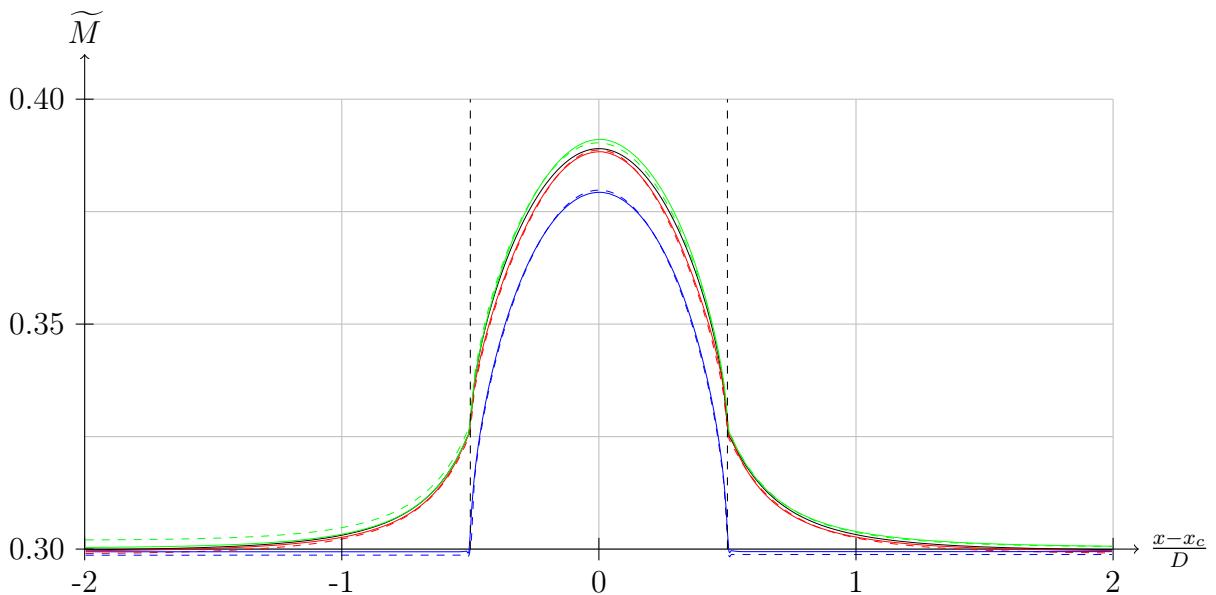


FIGURE 7.25 – Evolutions axiales du nombre de Mach moyen issues d'une simulation classique (discontinue bleue), d'une simulation classique nourrie des tensions circonférentielles (discontinue rouge), d'une simulation classique nourrie des tensions circonférentielles et de la force (discontinue verte), d'une simulation harmonique sans tensions circonférentielles (continue bleue), d'une simulation harmonique avec tensions circonférentielles (continue rouge), d'une simulation harmonique avec tensions circonférentielles et termes non-linéaires (continue verte) comparées à la solution de référence (trait continu noir).

Il apparaît clairement trois couples de courbes, chacun étant composé d'une simulation classique (en traits discontinus) et d'une simulation harmonique (en traits continus).

Le premier couple (bleu) est formé par deux simulations dont les tensions circonférentielles sont absentes. Les effets potentiels, à l'origine de l'adaptation du fluide à l'obstacle, sont absents. Aussi, le niveau de Mach est fortement sous-estimé au sein de la zone couverte par le cylindre. L'absence de tensions circonférentielles empêche de reproduire le blocage que créent les effets non-axisymétriques.

Le deuxième couple (rouge) est composé d'une simulation classique nourrie des tensions circonférentielles, extraites de la simulation de référence, et d'une simulation harmonique incluant les tensions circonférentielles calculées. Pour chacune des simulations, l'accord avec la solution de référence est excellent. L'adaptation de l'écoulement est reproduite ainsi que le niveau de Mach sur le cylindre.

Le troisième couple (vert) est le résultat d'une simulation méridienne classique augmentée des tensions circonférentielles et du champ de force extraits de la simulation de référence, et d'une simulation harmonique incluant tous les termes non-linéaires, tant du système moyen que du système aux perturbations. L'accord avec la solution de référence est ici aussi assez bon. Il y a cependant peu de différence avec le couple précédent. C'est au niveau des évolutions des champs moyens de pression (figure 7.26) et de masse volumique (figure 7.27) que la différence apparaît.

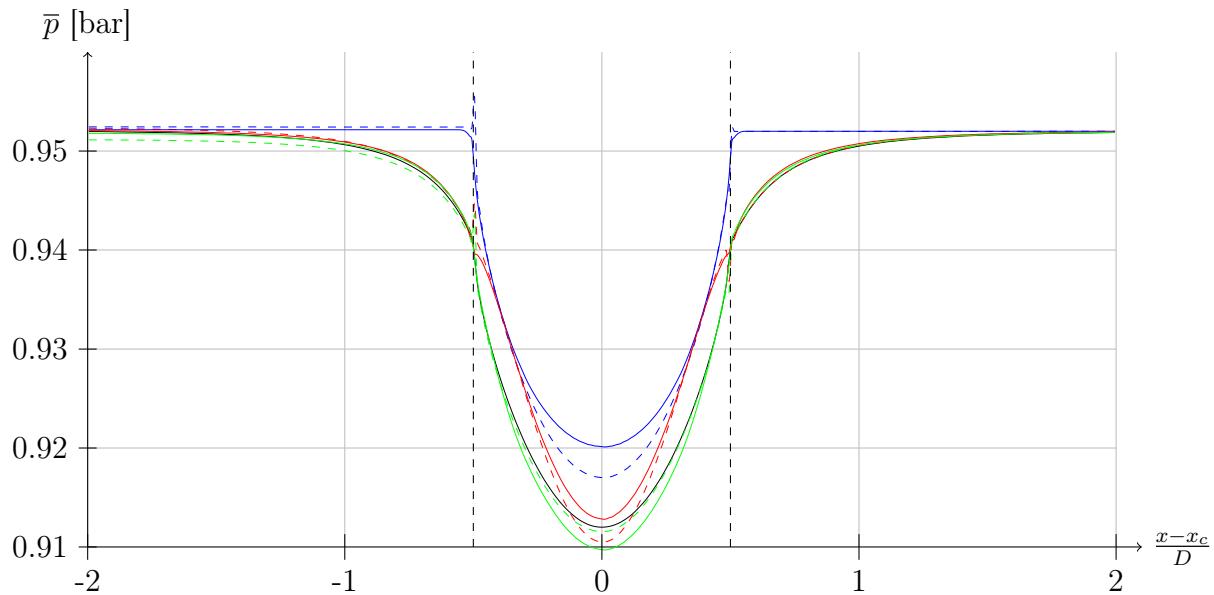


FIGURE 7.26 – Evolutions axiales de la pression moyenne issues de simulations méridiennes classiques et harmoniques comparées à la solution de référence (trait continu noir)

Tout comme pour le champ de Mach moyen, l'absence de tensions circonférentielles est préjudiciable à la reproduction de l'écoulement. Lorsque celles-ci sont ajoutées, les courbes de pression et de masse volumique se rapprochent sensiblement de la solution de référence, tant pour la simulation classique que pour la simulation harmonique. L'écoulement hors

zone solide est bien reproduit et les pics de pression et de masse volumique sont assez fidèles. En revanche, l'écoulement sur l'avant et l'arrière du cylindre est moins précis, comportant même une discontinuité aux bords de celui-ci. Cette dernière provient de l'effet brutal que créent les pics de non-uniformités aux abords de l'obstacle.

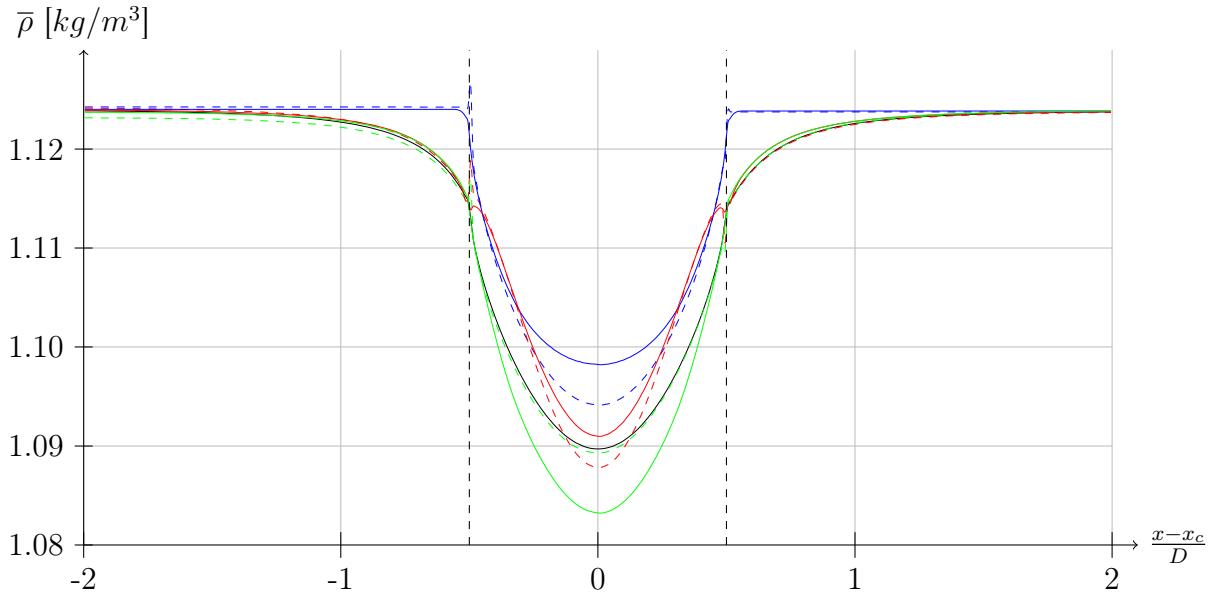


FIGURE 7.27 – Evolutions axiales de la masse volumique moyenne issues de simulations méridiennes classiques et harmoniques comparées à la solution de référence (trait continu noir)

Ensuite, lorsque le champ de force issu de la simulation de référence est ajouté à la simulation méridienne classique, les évolutions reproduites deviennent très proches de la référence. Ceci est conforme aux attentes puisque tous les termes additionnels du modèle méridien sont présents et “exact”. Les discontinuités observées précédemment n’existent plus car le terme source de force rétablit la compatibilité de l’écoulement.

Penchons-nous sur la simulation harmonique, dont ressort un résultat remarquable. Lorsque les termes non-linéaires du système aux perturbations sont inclus, le champ moyen de pression se conforme assez bien à la simulation classique augmentée et par conséquent à la solution de référence. L’explication est à trouver dans l’expression du champ de force utilisé pour fermer le méridien classique (7.16).

$$f_{bx} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[p \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_p^s \quad (7.16)$$

Celui-ci est calculé d’après le champ de pression sur l’obstacle issu de la simulation de référence. Ce champ de pression se compose d’une partie moyenne et d’une partie fluctuante (7.17) dans laquelle apparaissent les triples produits.

$$p' = (\gamma - 1) \left[(\rho E)' + \rho' \frac{\tilde{V}_i^2}{2} - \tilde{V}_i (\rho V_i)' - \frac{k'}{2} \right] \quad k' = (\rho V_i'' V_i'' - \overline{\rho V_i'' V_i''}) \quad (7.17)$$

Ainsi, le champ de force procure à la simulation méridienne le même effet que les termes non-linéaires du système aux perturbations sur la simulation harmonique. Il est donc logique de retrouver des résultats comparables. Il convient cependant de ne pas réduire le champ de force aux seuls triples produits. Le cas examiné ici est particulier puisque le champ de force tangentiel moyen est nul, l'écoulement n'étant pas dévié. De manière générale, l'effet premier du champ de force sera de dévier le fluide par sa composante moyenne avant d'apporter les effets non-linéaires des triples produits.

En ce qui concerne le champ moyen de masse volumique, la reproduction obtenue par la simulation harmonique complète n'est pas aussi réaliste que pour le Mach et la pression. En effet, afin de permettre une résolution par superposition modale et un calcul des termes non-linéaires dans le domaine fréquentiel, les perturbations de masse volumique ont été négligées devant leur partie moyenne. Il est donc cohérent d'obtenir une image moins fidèle de cette grandeur.

L'étude du champ moyen nous apprend plusieurs choses. Premièrement, une simulation harmonique est capable de se fournir, de manière autonome, un champ de force et des tensions circonférentielles qui reproduisent de manière assez fiable l'écoulement réel. Deuxièmement, la linéarisation requise par la résolution harmonique s'avère pénalisante au niveau du champ de pression, grandeur la plus touchée par l'hypothèse. Néanmoins, les résultats obtenus par le mériidien harmonique sont nettement supérieurs à un mériidien classique, incapable d'accéder aux informations d'ordre élevé, lesquelles ont un impact majeur sur le champ moyen.

Pour terminer, les figures 7.28 et 7.29 illustrent, d'un point de vue d'ordre élevé, les champs de pressions de référence et obtenus par simulations harmoniques complètes, avec et sans tensions circonférentielles.

Ces figures confirment que la simulation harmonique complètement non-linéaire reproduit de manière quasiment exacte le champ réel. Les résultats obtenus avec et sans tensions circonférentielles sont inévitablement moins fidèles. L'inclusion des tensions circonférentielles modifie le champ de pression dans la bonne direction. Les faits marquants sont la surévaluation de pression aux "bords d'attaque et de fuite" du cylindre ainsi que la sous-estimation des pics de succion.

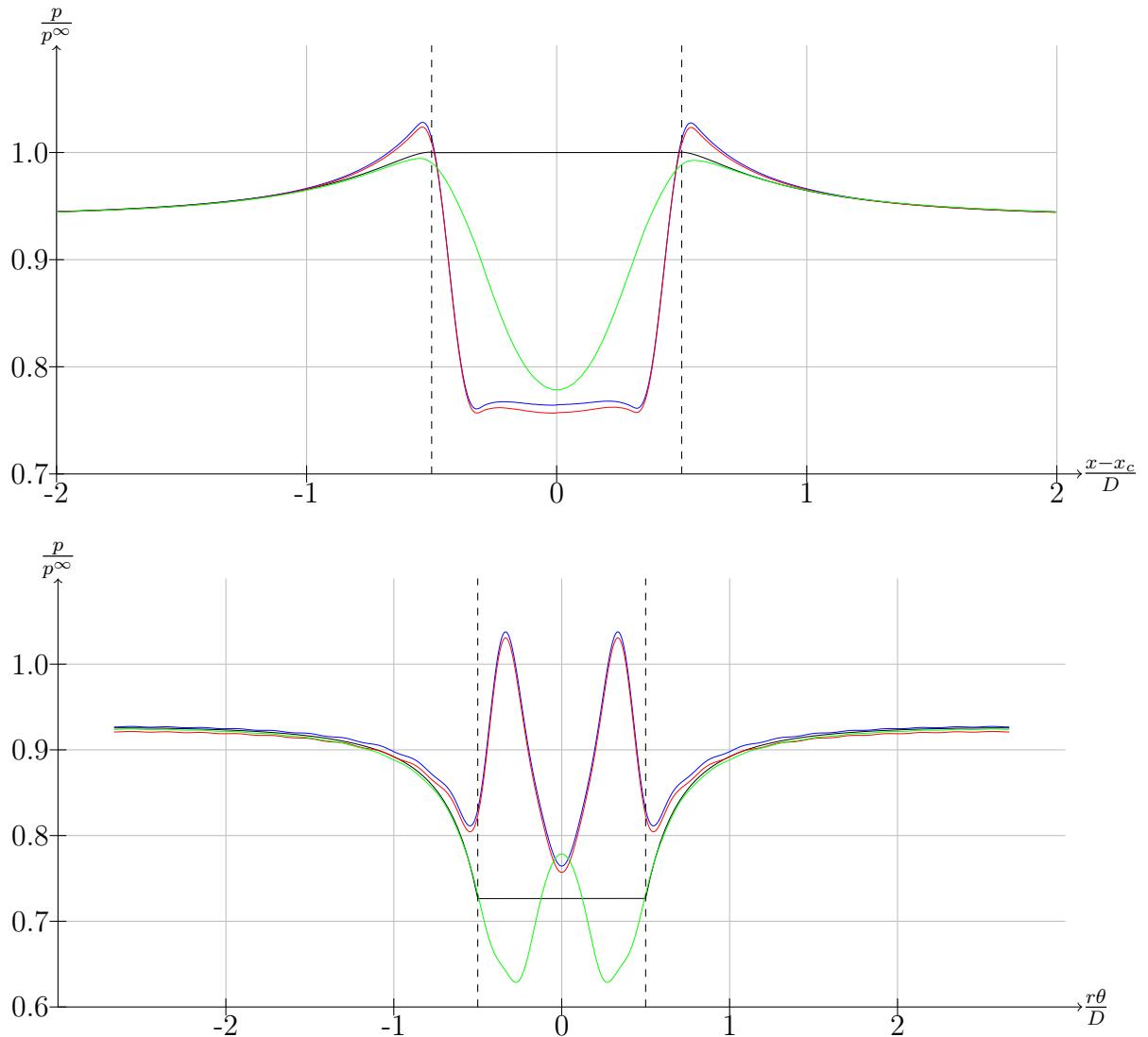


FIGURE 7.28 – Evolutions axiale (haut) et circonférentielle (bas) de la pression statique de référence (noir) comparée à celle obtenue par simulation harmonique complète (vert), avec tensions circonférentielles (rouge) et sans tensions circonférentielles (bleu).

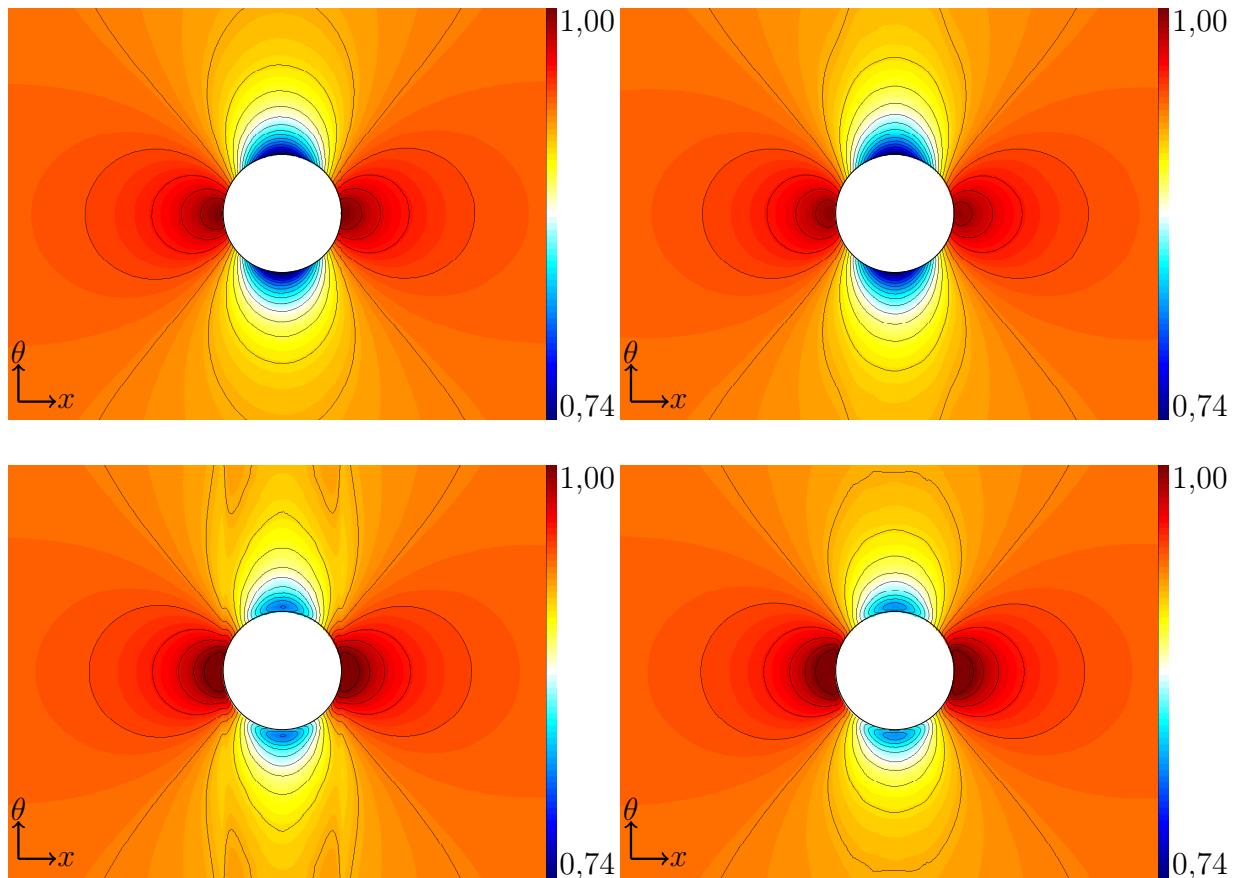


FIGURE 7.29 – Champs de pression adimensionnelle obtenus par la simulation de référence (haut, gauche) et par des simulations harmoniques complète (haut, droite), avec tensions circonférentielles (bas, gauche) et sans tensions circonférentielles (bas, droite).

7.7 Stabilité du processus itératif

L'option choisie pour imposer l'imperméabilité, le forçage par feed-back, a une large influence sur l'évolution temporelle de la solution. En effet, l'imposition de l'imperméabilité de l'obstacle est réalisée au moyen d'un contrôleur de type Proportionnel-Intégral (PI). Ce terme intégral introduit une limite de stabilité, laquelle dépend du schéma d'intégration temporelle de l'équation de force (7.18).

$$f = \alpha \int_0^\tau (\rho V_n) d\tau + \beta (\rho V_n) \quad (7.18)$$

Selon Lee [90], pour un schéma de Runge-Kutta à 2 pas, la limite de stabilité peut être obtenue de manière analytique. Pour une résolution bidimensionnelle, celle-ci est exprimée par (7.19). La limite de stabilité augmente avec le nombre de pas du schéma mais ne peut plus être exprimée par une telle inégalité.

$$-\frac{\alpha \Delta t^2}{2} - \frac{4\beta \Delta t}{2} \leq 8 \quad (7.19)$$

L'équation (7.18) est résolue simultanément aux équations du mouvement du type (7.20).

$$\frac{\partial \rho V_n}{\partial \tau} = RHS + f \quad (7.20)$$

Remplaçant la force par son expression complète dans l'équation (7.20) et dérivant par rapport au pseudo-temps τ , l'équation (7.21) est obtenue, laquelle s'apparente à l'expression décrivant l'évolution temporelle d'un oscillateur amorti de fréquence propre $\omega_n = \sqrt{-\alpha}$ et de taux d'amortissement $\xi = -\beta / (2\omega_n)$.

$$\frac{\partial^2 (\rho V_n)}{\partial \tau^2} - \beta \frac{\partial (\rho V_n)}{\partial \tau} - \alpha (\rho V_n) = \frac{\partial RHS}{\partial \tau} \quad (7.21)$$

Remplaçant les expressions de la fréquence propre et du taux d'amortissement dans l'expression (7.19) de la limite de stabilité, la relation (7.22) est obtenue.

$$\omega_n \Delta t \leq 4 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 + 1} \right) \quad (7.22)$$

En pratique, bien que nous utilisions un schéma de Runge-Kutta à 3 ou 4 pas, même cette limite de stabilité ne pourra être atteinte. En effet, celle-ci a été dérivée dans l'hypothèse d'une représentation de la fonction de distribution sur un maillage physique et sur

les seuls points voisins de la frontière fictive.

Dans la suite, nous allons présenter les courbes de convergence relatives à trois cas. Nous commencerons par illustrer l'effet d'une variation de la fréquence propre ω_n de l'oscillateur et de son taux d'amortissement ξ . Ensuite, nous envisagerons le résultat du décalage du support de la fonction de distribution. Enfin, nous observerons les conséquences d'une variation de la largeur ϵ du support. Pour toutes ces simulations, sauf mention contraire, nous introduirons 25 modes de Fourier, un support de largeur $\epsilon=2,5\%$ ainsi qu'un taux d'amortissement $\xi=3$ et une fréquence d'oscillateur égale à 10% de la limite théorique (7.22). Le pas de temps sera une moyenne sur la zone couverte par l'obstacle de celui des équations du mouvement, fourni par la condition CFL classique.

7.7.1 Paramètres du contrôleur

La figure 7.30 présente les courbes de convergence du champ de force (i.e. l'imperméabilité) et du champ moyen pour des simulations harmoniques de paramètres (ω_n, ξ) variables.

Tout d'abord, observons les conséquences d'une variation de la fréquence propre de l'oscillateur amorti. Lorsque la fréquence augmente, le résidu du champ de force, qui n'est autre que la norme rms des vitesses normales aux noeuds lagrangiens, diminue plus rapidement mais en présentant des oscillations de plus forte amplitude pendant la phase d'établissement. A convergence, l'imperméabilité est mieux respectée pour des fréquences élevées. En effet, plus le contrôleur est rapide, mieux il parvient à dominer l'écoulement, représenté par le membre de droite des équations du mouvement, pour assurer une vitesse normale faible à la paroi fictive.

En revanche, le résultat est bien différent en ce qui concerne la convergence du champ moyen⁴. En effet, plus la fréquence de l'oscillateur est élevée, plus le résidu moyen reste important à convergence. Ceci s'explique par le fait que, dans les équations du mouvement forcées, l'imperméabilité prend une part de plus en plus importante, au détriment du champ d'inconnues conservatives sur le maillage cartésien. Ce contrôle devient si rapide qu'il empêche l'écoulement de s'établir plus précisément.

Ainsi, lorsque l'on observe la convergence dans sa globalité, il apparaît qu'il n'est pas nécessairement opportun de choisir une fréquence élevée pour le contrôleur car l'effet recherché est principalement la convergence du champ d'inconnues conservatives, tout en assurant un respect suffisant de l'imperméabilité sur l'obstacle. Or c'est bien le cas puisque celle-ci est obtenue à 10^{-3} dans tous les cas et pour une vitesse normale maximale inférieur à $5 \cdot 10^{-4} V^\infty$.

4. La convergence du champ de perturbations est très semblable à celle du champ moyen et ne sera donc pas détaillée.

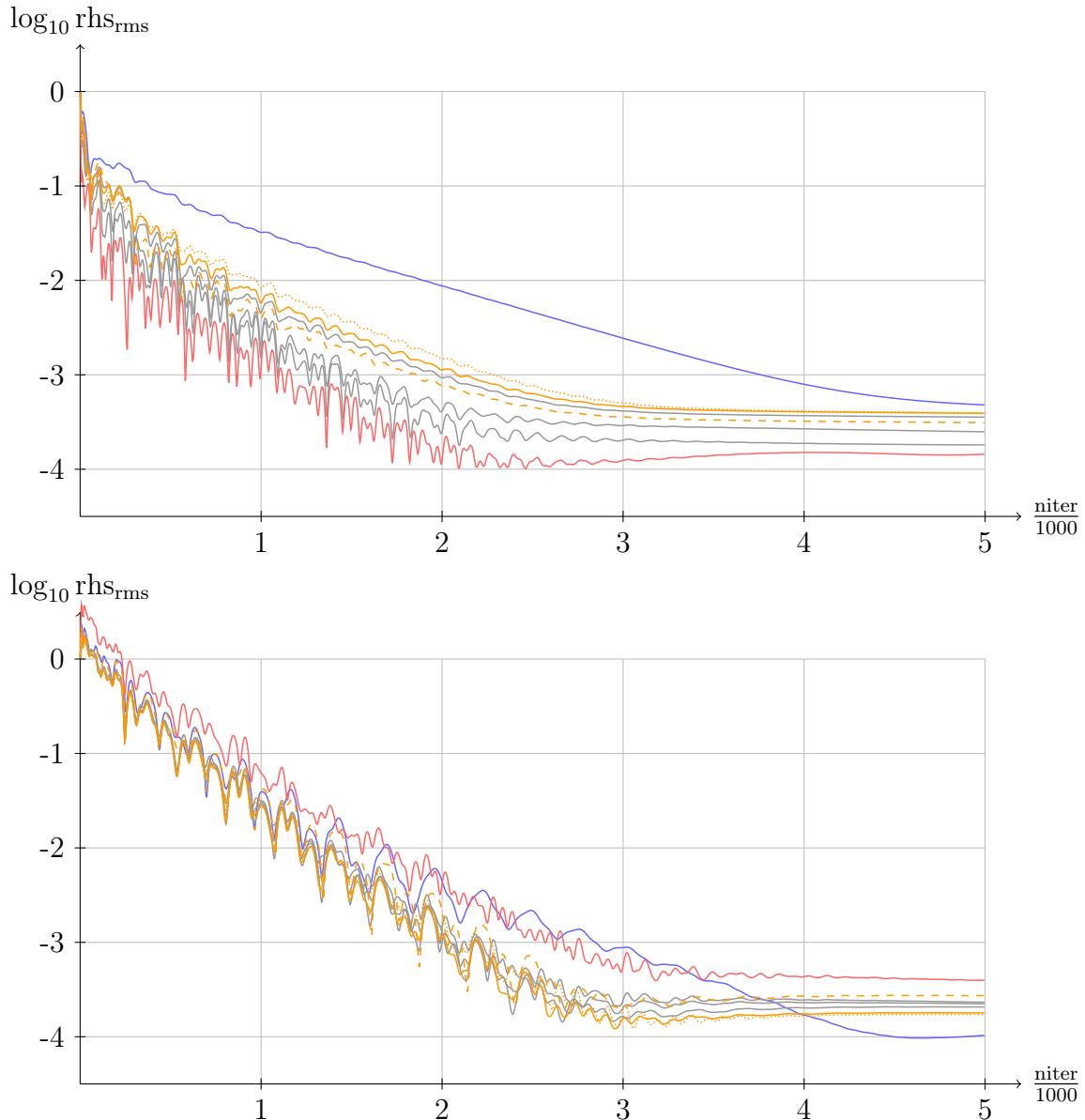


FIGURE 7.30 – Courbes de convergence du champ de force (haut) et du champ moyen (bas) avec la fréquence propre de l'oscillateur ω_n variant de 5% (bleu) à 30% (rouge) de la fréquence limite théorique par pas de 5% (gris) et le taux d'amortissement ξ variant de 2 (traits discontinus oranges) à 6 (pointillés oranges) par pas de 2 (continu orange)

Concernant le taux d'amortissement, comme attendu, lorsque celui-ci augmente, les oscillations présentes pendant la phase d'établissement de l'imperméabilité sont atténées. La convergence est cependant ralentie et l'imperméabilité moins bien respectée, l'amplitude des variations étant toutefois moindre que par la variation de la fréquence propre. Comme précédemment, l'effet sur le champ moyen est contraire. Ceci confirme que la théorie de l'oscillateur amorti ne peut être appliquée aveuglément puisqu'il convient de considérer également la dynamique des termes relatifs au mouvement du fluide dans le membre de droite de (7.21). Ainsi, un taux d'amortissement de 3 semble un compromis équilibré.

7.7.2 Décalage du champ de force

Nous avons vu précédemment l'intérêt que présente le décalage du champ de force vers l'intérieur de l'obstacle. Il permet d'obtenir un écoulement plus naturel aux abords de la paroi fictive. Cependant, lorsque la fonction de distribution est distancée de la frontière virtuelle, c'est aussi le lieu où est exercée l'action du contrôleur qui est éloigné de la position d'observation. Cette configuration ne peut mener qu'à une déstabilisation de la boucle de contrôle. C'est ce qu'illustre la figure 7.31 présentant les courbes de convergence du champ de force et du champ moyen pour différentes valeurs de décalage.

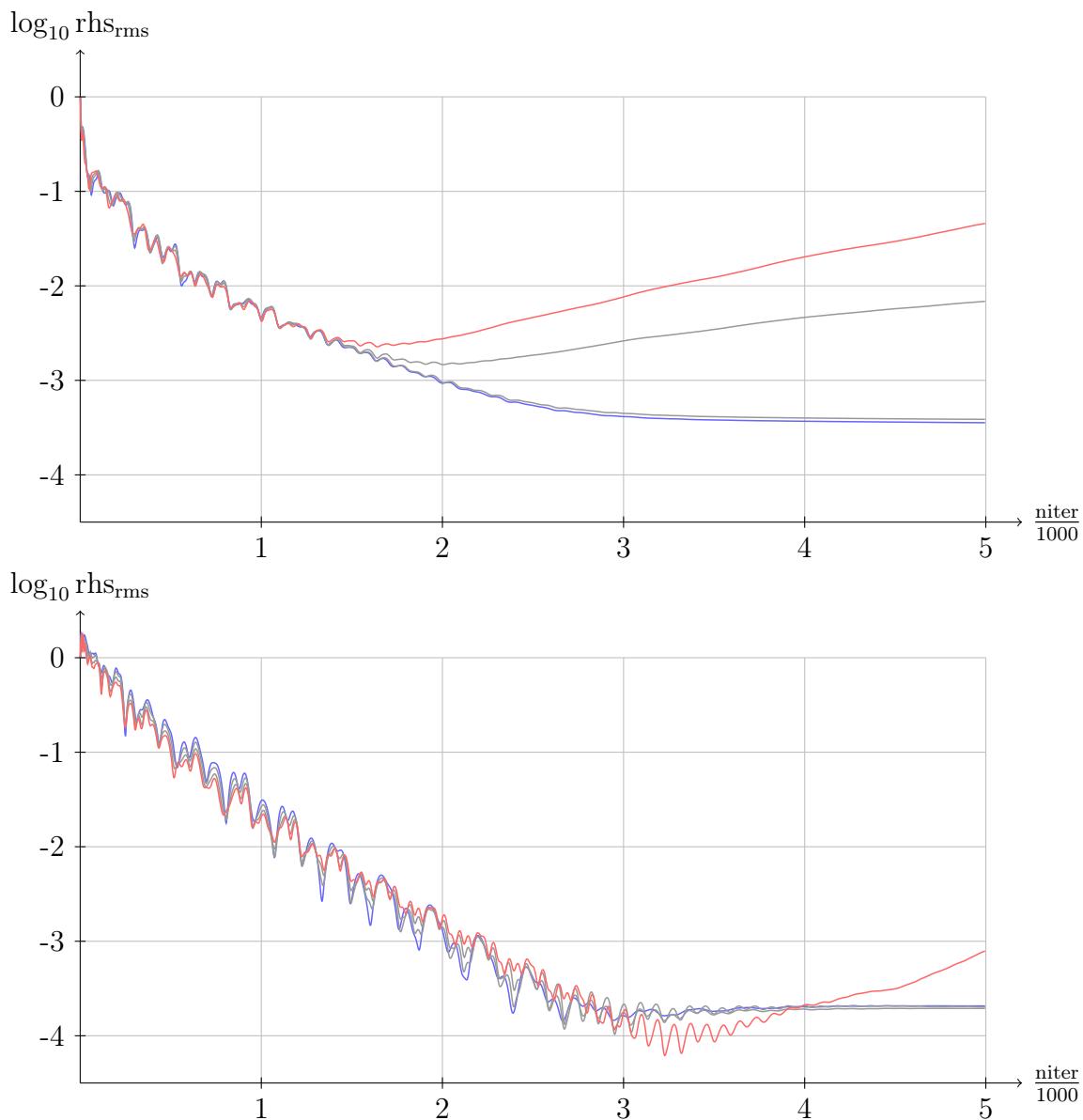


FIGURE 7.31 – Courbes de convergence de champ de force (haut) et du champ moyen (bas) avec le décalage du support variant de 0% (bleu) à 75% (rouge) de la largeur ϵ par pas de 25% (gris)

Pour le couple de paramètres (ω_n, ξ) , il s'avère qu'un décalage supérieur ou égal à 50% déstabilise l'imposition de l'imperméabilité. Cette divergence observée sur le champ de force se reporte ensuite, avec un certain délai, sur l'écoulement lui-même. C'est apparent pour un décalage de 75%. Pour ce qui concerne l'écart de 50%, l'instabilité apparaît sous la forme d'oscillations pendant la phase d'établissement. La divergence arrive progressivement après l'historique présenté.

Cependant, la divergence observée ne signifie pas qu'il est impossible d'utiliser un décalage de 50% ou de 75% de la largeur ϵ du support de la fonction de distribution. Cela témoigne simplement d'une limite de stabilité inférieure. Le choix d'une fréquence propre plus faible permettra donc de parvenir à la convergence. Afin d'éviter une évolution temporelle trop lente tout en conservant le bénéfice d'un décalage sur l'écoulement, un écart de 50% semble raisonnable.

7.7.3 Largeur du support

La stabilité de la méthode de forçage par feed-back est fortement dépendante de la façon dont est distribuée la force lagrangienne sur le maillage cartésien. De manière générale, Lee [90] affirme que plus le schéma d'interpolation et de distribution utilisé pour communiquer entre les deux maillages est de précision élevée et moins la boucle de contrôle est stable. Shin [133], quant à lui, montre dans le contexte de la fonction de distribution régulière de Peskin, que la stabilité varie selon le nombre de points du maillage cartésien sur lesquels la force est distribuée.

Dans la suite, nous allons étudier l'influence de la largeur du support de la fonction de distribution sur la stabilité du processus itératif. La figure 7.32 présente les courbes de convergence du champ de force et du champ moyen pour différentes largeurs de support.

Tout d'abord, une comparaison des courbes de convergence du champ de force et du champ moyen montre une réaction identique de ceux-ci à une variation de l'étendue du support de la fonction de distribution. Ceci indique que l'effet ne provient pas de caractéristiques différentes du contrôleur mais d'une origine plus globale. Aussi, il est observé que la courbe correspondant à $\epsilon=4\%$ mène, pour le couple de paramètres (ω_n, ξ) , au résidu minimum parmi l'ensemble des simulations présentées.

Pour des supports plus étroits, tant l'imperméabilité que le champ moyen convergent vers des niveaux d'erreur supérieurs. D'après ces figures, nous pouvons affirmer qu'un de support relativement large permet d'obtenir une solution plus précise. En effet, lorsque le support s'élargit, l'écoulement est lissé et adapté progressivement à la présence de la frontière solide. Le contrôleur a une emprise plus large sur le fluide et organise de manière plus stable l'imperméabilité de l'obstacle.

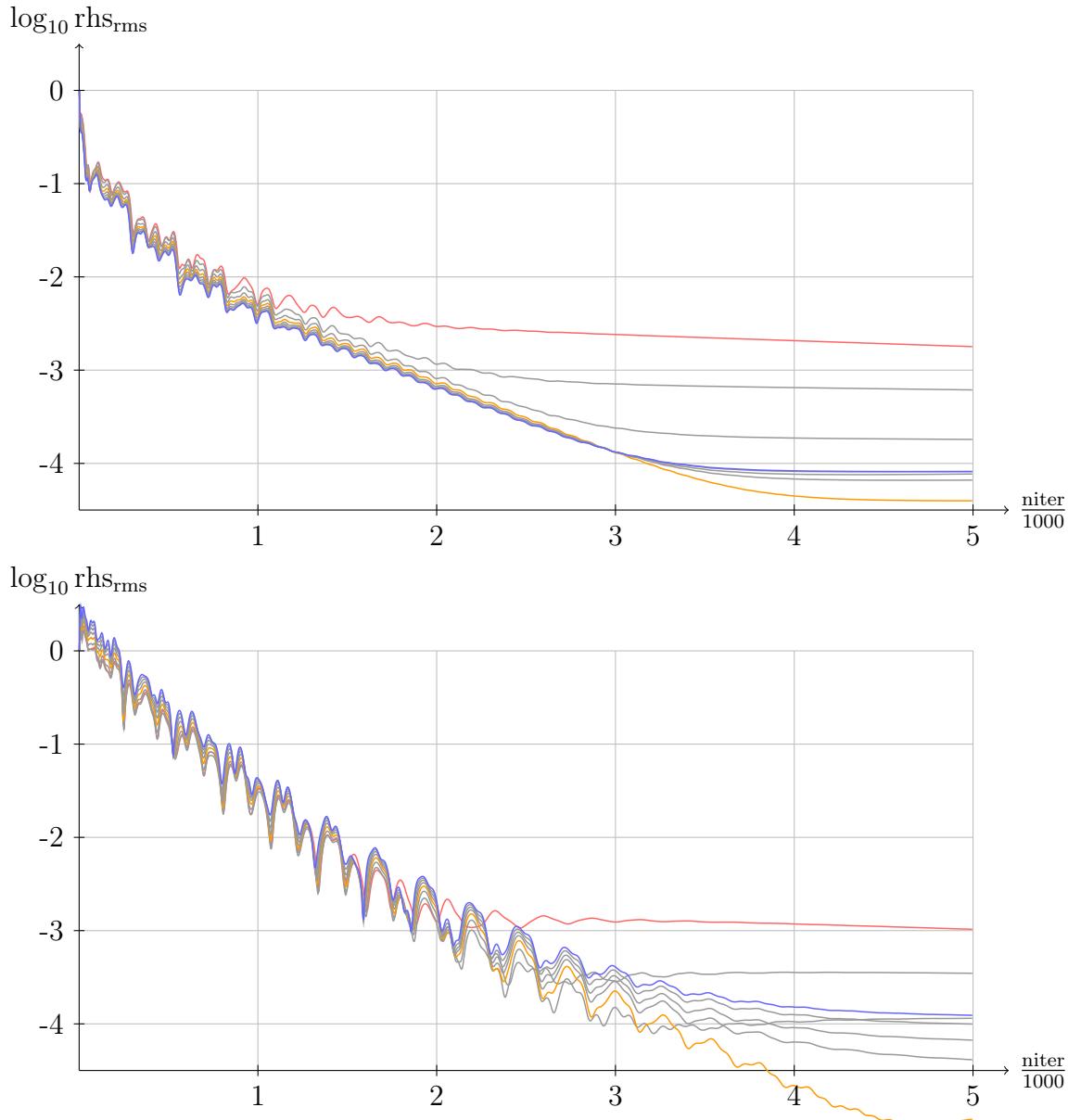


FIGURE 7.32 – Courbes de convergence du champ de force (haut) et du champ moyen (bas) avec une largeur de support ϵ variant de 8% (bleu) à 1% (rouge) par pas de 1% (gris). La largeur $\epsilon=4\%$ est remarquée en orange.

Ceci est vrai dans une certaine mesure seulement. Lorsque la largeur du support dépasse la valeur $\epsilon=4\%$, la précision atteinte est moins bonne. La discussion de la section 7.7.3 a montré que lorsque le champ de force s’élargit, l’écoulement aux abords de la paroi est moins bien représenté, pour cause de lissage et de décalage des pics de variation en cas de gradients interne et externe antagonistes. Ainsi, lorsque le comportement du fluide est mal reproduit proche de la frontière virtuelle, il devient difficile d’y imposer l’imperméabilité.

7.7.4 Comparaison avec le méridien classique

Pour terminer l'étude de la stabilité du méridien harmonique, nous proposons de comparer sa convergence à celle d'un méridien classique au travers de la figure 7.33.

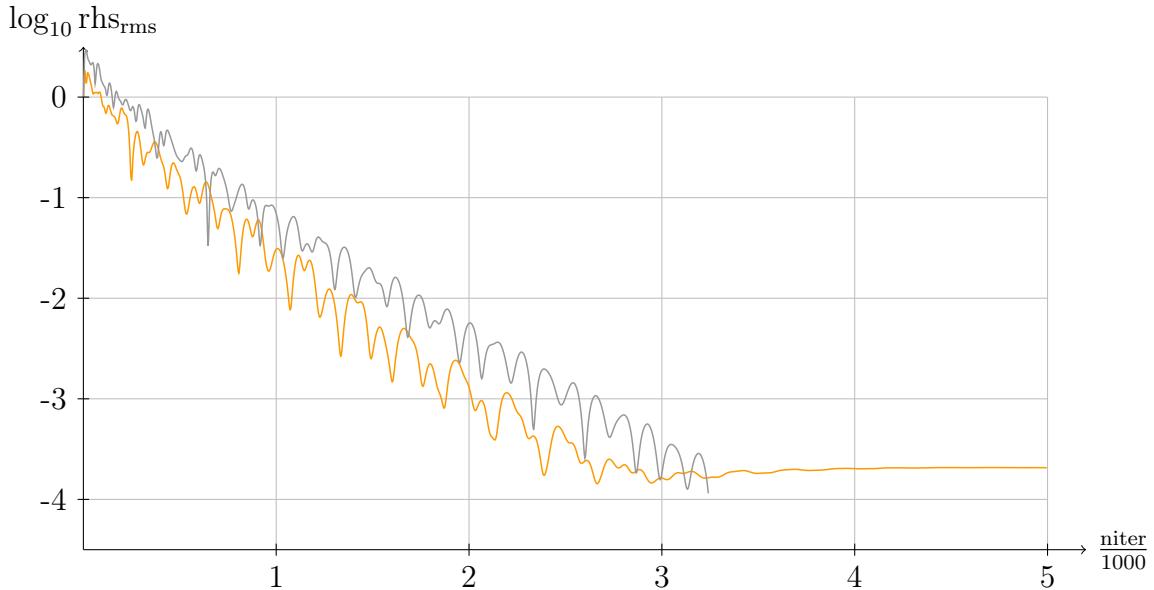


FIGURE 7.33 – Courbes de convergence du champ moyen par le méridien harmonique (orange) et par le méridien classique (gris)

La comparaison des courbes de convergence des méridiens classique et harmonique montre que la méthode de feed-back ne pénalise pas la phase d'établissement, le méridien harmonique étant même plus rapide durant celle-ci. Ceci montre bien que la limite de stabilité du feed-back ne mène pas à des nombres CFL inférieurs à celui des équations du fluide elle-même. Par contre, le respect de l'imperméabilité étant limité, il existe une limite à la convergence du méridien harmonique. Celle-ci est cependant acceptable et peut être adaptée en fonction des influences examinées précédemment.

7.8 Ecoulement visqueux autour d'un cylindre

Pour terminer la validation du méridien harmonique, nous allons présenter succinctement les résultats de la simulation harmonique d'un écoulement visqueux autour d'une cascade de cylindres. Nous n'effectuerons pas ici d'étude quantitative mais nous nous concentrerons sur les tendances observées d'un point de vue d'ordre élevé. Celles-ci permettront d'illustrer les possibilités et les limites du méridien harmonique lorsque la viscosité est impliquée.

Le domaine de calcul représente un canal de la grille de cylindres dont l'extension circonférentielle vaut 6 fois le diamètre de chacun d'eux. La longueur du domaine en aval

du cylindre vaut 15 fois ce diamètre, ce qui permet de limiter la perturbation de l'écoulement par la condition de pression uniforme en aval. Nous présenterons les résultats de deux simulations pour des nombres de Reynolds valant 25 et 40 ($Re = \rho U^\infty D / \mu$). Nous restons à des Reynolds assez bas pour plusieurs raisons. Premièrement, afin d'obtenir une représentation fidèle de l'écoulement, il faut faire en sorte que la couche limite soit suffisamment épaisse devant le support de la fonction de distribution. Deuxièmement, nous souhaitons que les effets visqueux soient dominants. Enfin, nous voulons conserver un écoulement intrinsèquement stationnaire pour rentrer dans le domaine d'application du modèle développé.

La figure 7.34 représente les lignes de courant autour du cylindre pour les deux écoulements simulés avec 80 modes et une largeur du support de la fonction de distribution $\epsilon=0,8\%$ de l'extension circonférentielle, soit environ 5% du diamètre du cylindre. Pour amoindrir le lissage par l'extension du support dans l'écoulement, il a été décalé de 50% de sa largeur vers l'intérieur du cylindre. L'équation de force du contrôleur PI inclut maintenant une composante tangentielle afin d'annuler la vitesse absolue à la paroi fictive.

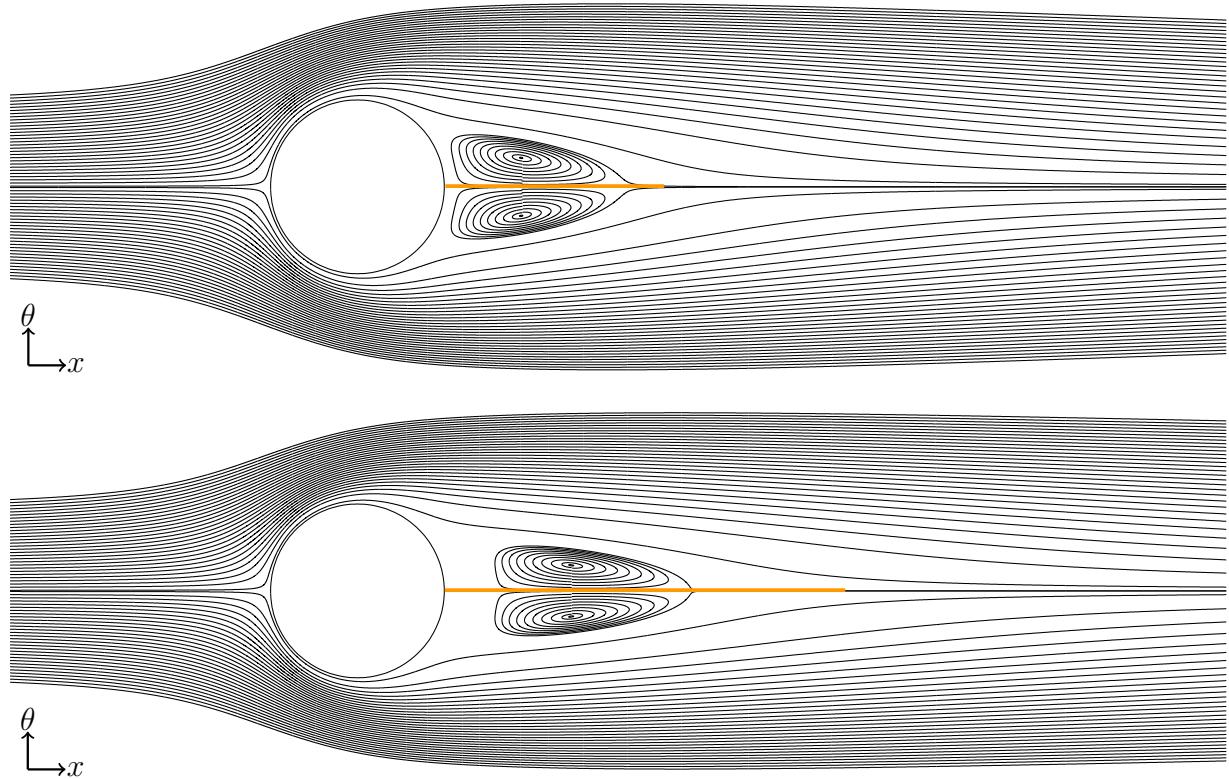


FIGURE 7.34 – Lignes de courant à $Reynolds = 25$ (haut) et $Reynolds = 40$ (bas)

Dans les deux cas, une bulle de recirculation apparaît à l'aval du cylindre. Ceci est cohérent avec la réalité. Cependant, la longueur de celle-ci est sous-estimée. En effet, la figure reprend également la longueur moyenne observée par plusieurs auteurs et reprises aux références [128, 150, 89] sous la forme d'un trait orange. Dans chacun des cas, la longueur issue de la littérature est supérieure à celle observée. Cependant, la zone de faible vitesse est d'extension comparable. La différence provient du fait que la recirculation se

crée plus en aval du cylindre qu'elle ne le devrait par la présence dans l'écoulement du champ de force qui assure le non-glissement à la frontière fictive. Néanmoins, l'évolution de la structure de l'écoulement avec le nombre de Reynolds est assez représentative de la réalité.

Afin d'illustrer l'extension de la zone de faible vitesse à l'arrière du cylindre, la figure 7.35 reprend le champ de vitesse absolue pour les deux simulations.

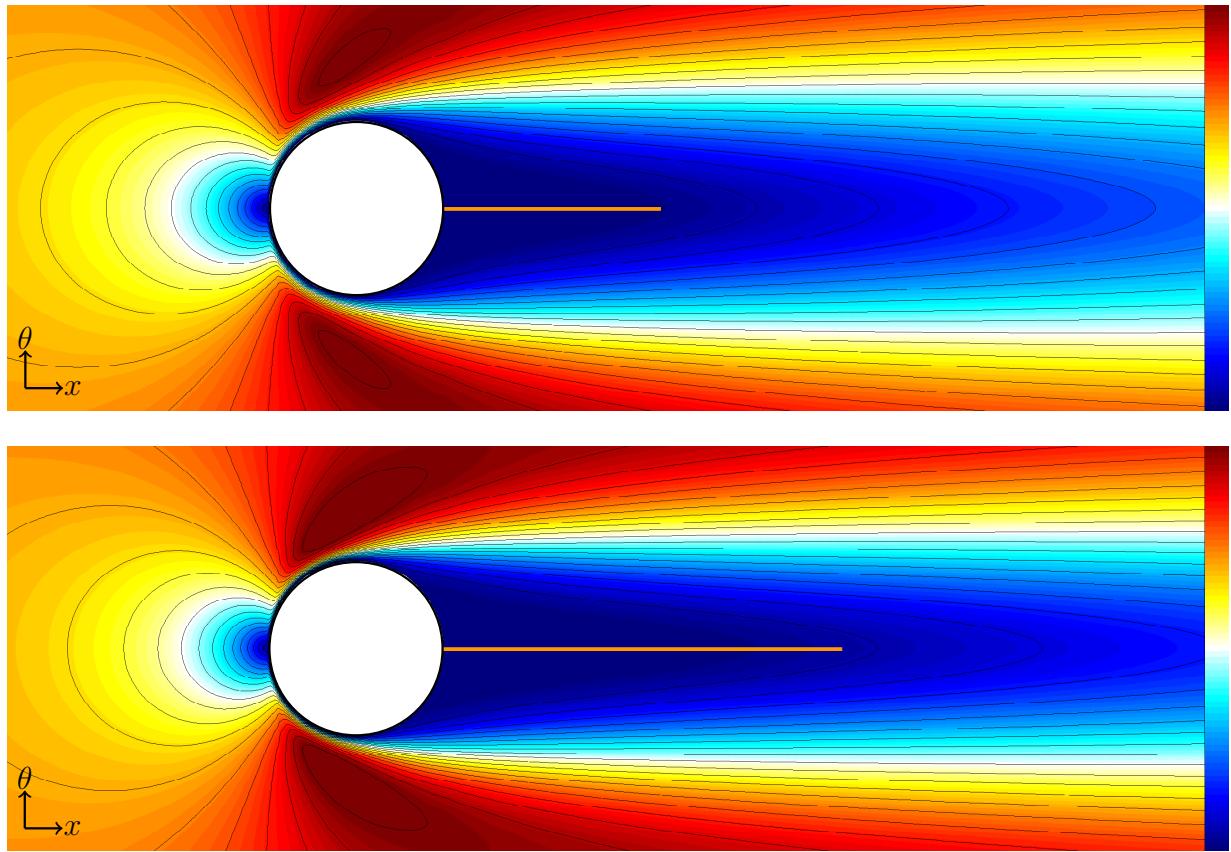


FIGURE 7.35 – Champs de vitesse absolue à Reynolds = 25 (haut) et Reynolds = 40 (bas)

Ce bref exemple confirme la capacité du méridien harmonique à traiter un écoulement visqueux mais à la condition que le support de la fonction de distribution soit suffisamment étroit pour exciter les hautes fréquences liées à la couche limite et surtout pour ne pas surévaluer cette dernière. Pour l'application présentée, 80 modes furent utilisés pour permettre une largeur ϵ faible dans l'absolu mais pourtant non-négligeable devant l'épaisseur de couche limite. Ceci justifie le choix opéré de ne pas imposer la condition de non-glissement de manière générale, en particulier pour des écoulements à haut nombre de Reynolds tels que ceux rencontrés en turbomachines.

7.9 Synthèse de la méthode harmonique

Au cours de ce chapitre, nous avons évalué en détail le méridien harmonique nouvellement développé. Celui-ci permet d'obtenir de l'information d'ordre supérieur à un méridien classique tout en utilisant le même type de solveur bidimensionnel. Pour ce faire, il est enrichi d'une modélisation spectrale qui donne accès aux non-uniformités circonférentielles. Afin d'obtenir cette précieuse information, il est cependant nécessaire de passer par une gestion soignée et relativement complexe de l'ordre élevé, de l'obstacle en l'occurrence.

La traduction correcte des frontières solides fictives sur l'écoulement passe par un choix adéquat des paramètres spécifiques à la méthode de frontière immergée. Tout d'abord, le support de la fonction de distribution doit être suffisamment étroit pour reproduire les variations rapides de l'écoulement proche paroi tandis qu'un élargissement permet une diminution du besoin modal et une meilleure convergence. Ensuite, un décalage de ce support vers l'intérieur de l'obstacle s'avère appréciable pour éviter de lisser artificiellement les évolutions du fluide aux abords de la paroi. Il doit pourtant rester d'ampleur limitée pour éviter de déstabiliser la résolution itérative. Il a d'ailleurs été montré qu'à condition que les paramètres du contrôleur PI soient choisis judicieusement, celle-ci présente la même convergence que le méridien classique. L'introduction d'une troisième dimension n'est donc pas pénalisante du fait du transfert immédiat d'information découlant de sa résolution dans le domaine spectral, contrairement à ce qu'il se passerait dans un code tridimensionnel classique.

L'une des particularités issues de la méthode de frontière immergée est la présence d'un écoulement interne à l'obstacle présentant un haut degré de non-uniformité circonférentielle. Ceci a pour conséquence l'affaiblissement de la validité de l'hypothèse de petites perturbations, laquelle est pourtant requise pour une application saine de la méthode harmonique non-linéaire. L'utilité des termes non-linéaires, négligés par cette méthode, a été illustrée. Ceux-ci se montrent cependant fortement déstabilisateurs, empêchant leur inclusion générale dans la méthode. Malgré cela, il a été montré que l'utilisation des tensions circonférentielles relatives au domaine externe à l'obstacle suffit à améliorer de manière significative la reproduction moyenne de l'écoulement et, dans une moindre mesure, la vision tridimensionnelle de celui-ci.

Ainsi, le méridien harmonique représente un bon compromis en vue de l'obtention autonome et sans empirisme d'informations d'ordre élevé qui permettent d'améliorer sensiblement la fidélité de la solution produite.

Chapitre 8

Application du méridien harmonique

Sommaire

8.1 Particularités de l'application aux profils (minces)	154
8.1.1 Bords minces	154
8.1.2 Influence des parois	156
8.2 Le stator du CME2	159
8.3 Le CME2 complet	165

Au cours du chapitre précédent, les caractéristiques du méridien harmonique nouvellement développé ont été illustrées et les conditions de son fonctionnement idéal ont été épinglees. En effet, la nature harmonique de la méthode engendre une série de contraintes qu'il convient de respecter afin d'obtenir une résolution efficace de l'écoulement. Ces conditions portent principalement sur trois aspects : la dimension du support compact de la fonction de distribution, la courbure de la paroi solide et l'épaisseur de l'obstacle.

La dimension du support de la fonction de distribution résulte d'un compromis. D'une part, elle doit être importante pour diminuer le besoin modal de reconstruction de la fonction de distribution. D'autre part, elle doit être faible afin de reproduire au mieux les variations rapides de l'écoulement aux abords de la frontière solide. En pratique, cette dimension sera déterminée par le coût de calcul supportable.

Ensuite, la courbure de la frontière doit être suffisamment faible pour éviter la création de zones de variations importantes sur des distances de l'ordre de la dimension du support. L'exemple type est celui des bords minces que l'on rencontre sur des profils aérodynamiques. De telles configurations géométriques engendent des influences importantes entre les noeuds lagrangiens par l'étalement de la fonction de distribution. Ainsi, il peut résulter, au mieux, un contrôle moyen de l'écoulement et au pire, une déstabilisation de la force en ces points.

L'épaisseur du domaine solide, enfin, s'avère importante pour plusieurs raisons. Celle-ci doit, dans tous les cas, être suffisamment grande devant le support de la fonction de distribution. En effet, dans le cas contraire, l'écoulement interne peut devenir ample et fréquentiellement riche. Aussi, pour des obstacles fins, des points lagrangiens se faisant face pourraient s'influencer mutuellement au travers de leur fonction de distribution. Enfin, si l'obstacle ne présente pas une épaisseur suffisante, le décalage du support compact vers l'intérieur devient impossible pour les mêmes raisons de risque d'influence mutuelle entre points se faisant face.

Ces différentes restrictions trouvent toutes leur origine dans la nature spectrale de la résolution et rendent délicate l'application de la méthode à des géométries ne les satisfaisant pas. C'est le cas des profils aérodynamiques, que nous allons aborder dans ce chapitre. Il ne faut pas pour autant en conclure que la méthode développée est inapplicable à de telles configurations mais bien qu'elle nécessite certaines adaptations et qu'une précision inférieure au cas illustré précédemment est à attendre.

Dans ce qui suit, nous allons présenter les adaptations à effectuer pour les profils minces et les illustrerons sur une coupe à mi-hauteur d'aube du stator du compresseur CME2 déjà abordé. Nous poursuivrons avec ce profil pour comparer les résultats fournis par le méridien harmonique à ceux d'une simulation tridimensionnelle qui constituera notre référence. Nous terminerons le chapitre par l'application de la méthode au compresseur CME2 complet.

8.1 Particularités de l'application aux profils (minces)

Les deux adaptations propres aux profils aérodynamiques concernent la gestion des bords minces et l'influence mutuelle des parois.

8.1.1 Bords minces

L'incompatibilité du support enveloppe présenté au chapitre 6 avec les restrictions énoncées mène à scinder celui-ci en trois parties : le bord d'attaque, le bord de fuite et le reste de l'aube. La discréétisation qui en découle est illustrée à la figure 8.1.

L'influence du bord d'attaque et de son voisinage est transmise au domaine de calcul au moyen d'une fonction de distribution définie sur un disque de rayon ϵ . Le contrôle de cette région est effectué par un seul degré de liberté puisqu'une seule information est transmise par cette fonction de distribution centrée sur le bord d'attaque. Afin de garantir une imperméabilité moyenne de la zone concernée, l'action feedback a pour consigne l'annulation du débit à travers cette portion d'aube, i.e. la vitesse normale moyenne sur cette surface frontière. Ainsi, le résultat obtenu sera une satisfaction moyenne de la condition d'imperméabilité tout en évitant une instabilité dans le contrôle de l'écoulement au bord.

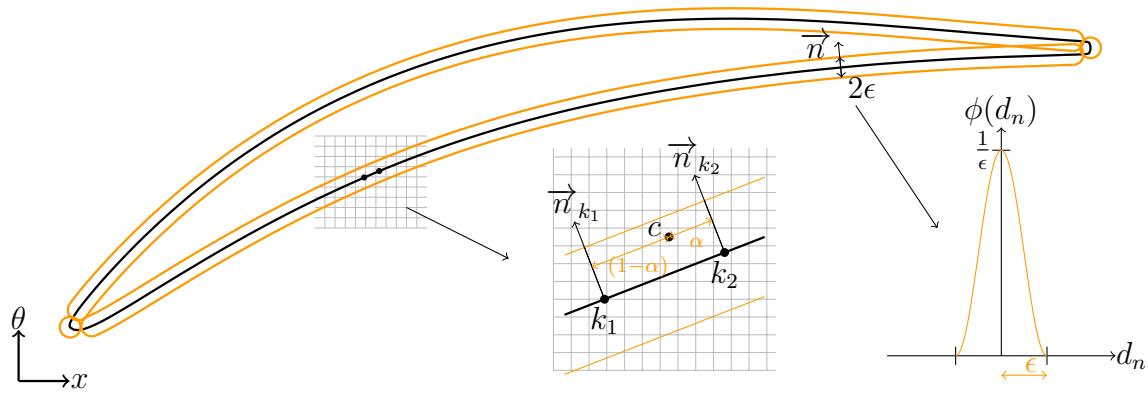


FIGURE 8.1 – Discrétisation adaptée aux profils minces

Le bord de fuite présente lui aussi un seul degré de liberté. Contrairement au bord d'attaque, l'imperméabilité moyenne ne peut y être imposée car cela engendre un sillage de vitesse faible en aval du bord de fuite. En effet, l'écoulement en aval de ce dernier va dépendre de l'écoulement interne l'abordant et de la force qui y est exercée. Dès lors que l'écoulement interne est libre de s'établir naturellement, il sera, dans la plupart des cas, impossible d'obtenir à la fois une imperméabilité moyenne dans la région du bord de fuite et un écoulement uniforme en aval.

Afin d'obtenir une solution cohérente, nous choisissons de privilégier l'écoulement aval et d'autoriser une perméabilité au bord de fuite. Etant donné que cette portion d'aube est restreinte, son effet sur le débit total le sera tout autant. Puisque l'objectif est d'obtenir un écoulement uniforme en aval, la force appliquée au bord de fuite est telle que l'écoulement observé après celui-ci soit uniforme. Le degré d'uniformité est établi selon une observation située à une distance égale à 10% de la corde axiale, sur une certaine extension azimutale $\beta\Delta\theta$ comme illustré à la figure 8.2, $\Delta\theta$ étant la portion circonférentielle couverte par un canal inter-aubes¹.

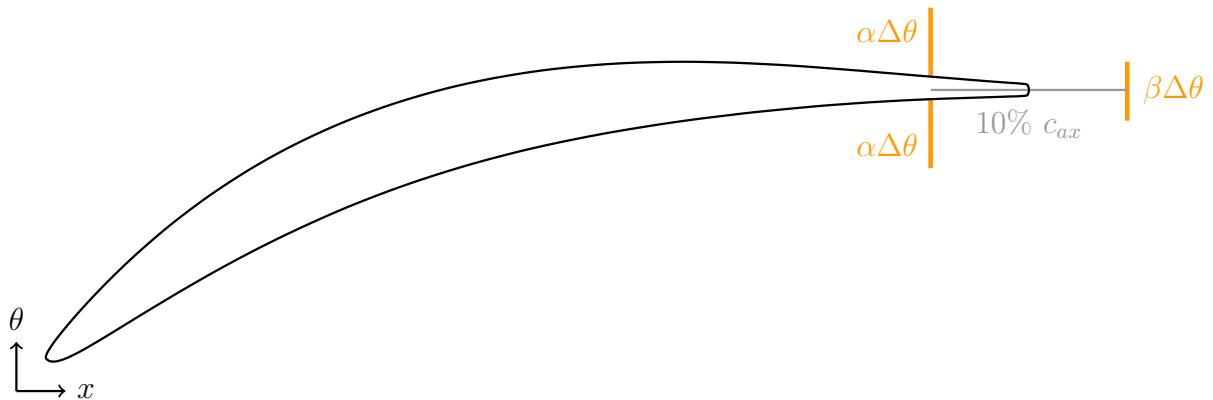


FIGURE 8.2 – Disposition des observations (traits oranges) pour le contrôle de la force appliquée au bord de fuite (10% aval du bord de fuite) et du taux de cisaillement (10% amont du bord de fuite)

1. Nous adoptons la valeur $\beta=0,06$.

Le reste de l'aube est commandé par une vitesse normale nulle, qui peut être atteinte avec une bonne précision, la discrétisation y étant favorable et la boucle de contrôle réactive.

La figure 8.3 illustre la fonction de distribution du profil selon la discrétisation adaptée aux bords minces.



FIGURE 8.3 – Fonction de distribution du profil selon la discrétisation adaptée

8.1.2 Influence des parois

La deuxième problématique des profils minces est celle de l'influence que peuvent avoir l'une sur l'autre les parois solides opposées, i.e. l'extrados et l'intrados, en certaines régions de l'aubage dont l'épaisseur est de l'ordre de grandeur de l'extension ϵ du support de la fonction de distribution. Un exemple de recouvrement des fonctions de distribution est visible à la figure 8.1. Dans la région du bord de fuite, l'effilement de l'aubage engendre une superposition partielle des supports relatifs à l'intrados et l'extrados.

Une telle superposition des actions de noeuds lagrangiens résulte en une action moyenne. Ainsi, il n'est plus possible d'effectuer un contrôle local précis en ces points, seule la moyenne de leurs commandes sera transmise au domaine de calcul et donc à l'écoulement. La maîtrise de ce dernier dans ces zones effilées est donc limitée et ne permet plus que d'agir sur la moyenne de celui-ci.

La conséquence importante qui en découle est que le champ de force moyen résultant ne permet plus d'obtenir un écoulement interne du type rencontré au chapitre précédent, à la figure 7.9, et donc de le contraindre à l'intérieur de l'obstacle. La structure à deux tourbillons de l'écoulement interne se propage à l'extérieur des frontières solides virtuelles tout en respectant avec une tolérance assez faible de $10^{-4} U_\infty$ l'imperméabilité du solide. L'écoulement associé est illustré à la figure 8.4 sous forme vectorielle.

Comme nous l'avons mis en lumière au chapitre précédent, la position du support représente une zone tampon, une bande de transition entre les écoulements externe et

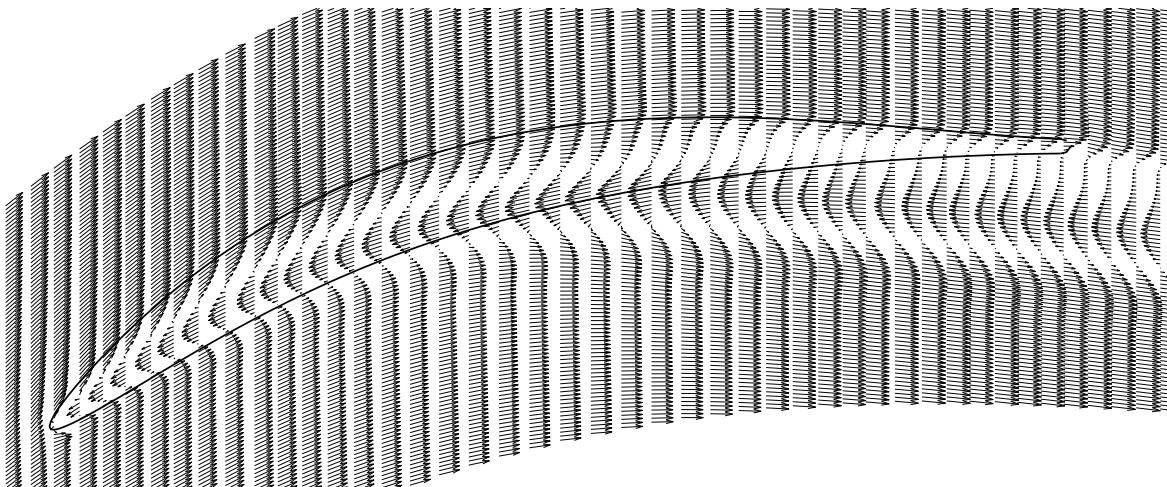


FIGURE 8.4 – Ecoulements externe et interne au profil

interne. La vitesse tangentielle y décroît de l'extérieur vers l'intérieur du solide, de manière analogue à une couche limite visqueuse au sein de laquelle la vitesse tangentielle tend progressivement vers zéro. Il existe donc toujours une couche de cisaillement qui, dans le meilleur des cas, se trouve à l'intérieur de l'obstacle et, dans le pire des cas, sort de l'aubage.

Pour un écoulement avec imposition de la condition de glissement à la paroi, la zone pariétale ne doit théoriquement pas inclure de cisaillement. Cependant, la méthode de frontière immergée en génère inévitablement. L'utilisation de cette méthode dans un contexte harmonique rend impossible le positionnement de ces bandes de cisaillement à l'intérieur de l'obstacle impossible, le décalage du support de la fonction de distribution étant contraint par l'épaisseur du solide.

Dès lors, il est nécessaire de s'en accommoder et de maîtriser cette couche pariétale cisaillée, illustrée à la figure 8.5.

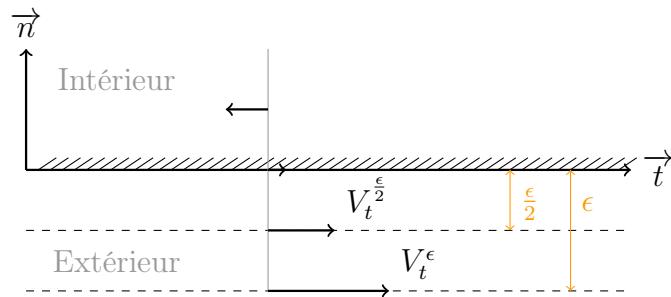


FIGURE 8.5 – Zone de cisaillement à la surface fictive

Pour ce faire, il convient d'ajouter une composante tangentielle à la force lagrangienne. Celle-ci ne modifie que la zone pariétale, de faible précision en méthode de frontière immergée, tout en permettant de contenir l'écoulement interne et de contrôler efficacement la vitesse normale, comme le montre la figure 8.6.

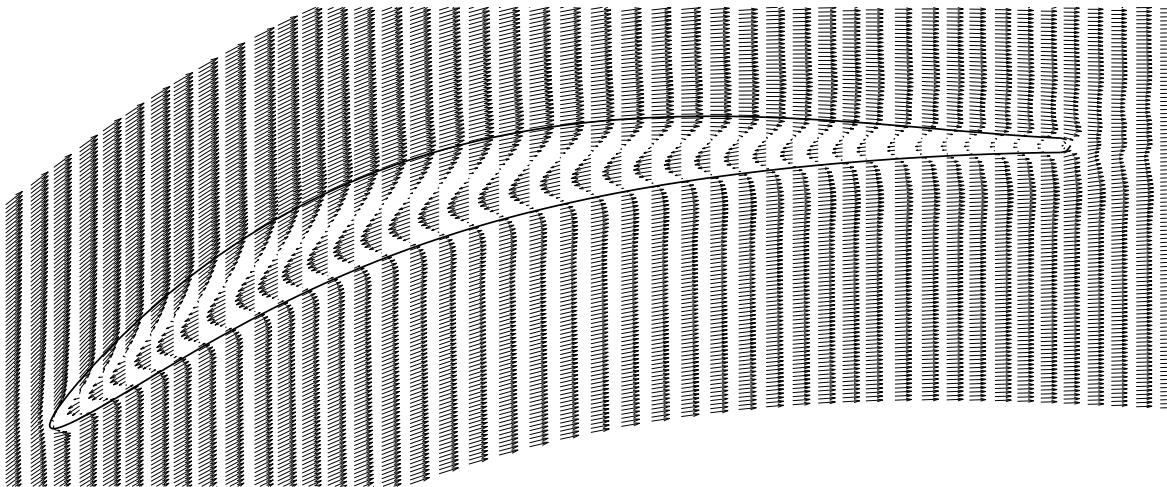


FIGURE 8.6 – Ecoulements externe et interne au profil en présence d'une force tangentielle

L'écoulement interne retrouve une structure à deux tourbillons fermée par la surface virtuelle, analogue à celle décrite au chapitre précédent. Si l'ajout d'une force tangentielle permet de résoudre le problème de l'influence des parois opposées, il reste à déterminer son intensité.

Etant donné que l'on ne peut imposer un taux de cisaillement nul, nous l'imposons à une valeur constante. L'objectif de cette action tangentielle est d'établir une barrière censée circonscrire l'écoulement interne pour permettre à son pendant externe de se développer naturellement tout en détériorant au minimum les caractéristiques pariétales de l'écoulement. Pour suivre cette voie, le taux de cisaillement à la paroi est calculé d'après les vitesses tangentielles aux distances ϵ et $\epsilon/2$ de celle-ci. Elles se trouvent ainsi dans la zone d'influence de la force pariétale sans pour autant se situer aux abords directs de la frontière virtuelle, ceux-ci pouvant être fortement variables et perturbés. Ensuite, le taux de cisaillement $T = \frac{\partial V_t}{\partial n}$ à atteindre est adapté au cours des itérations, une valeur constante étant définie séparément pour l'intrados et l'extrados, en vue d'obtenir des champs de vitesse aussi uniformes et similaires que possible de part et d'autre de l'aubage en aval de ce dernier. Cette uniformité est quantifiée à l'extrados et à l'intrados, en amont du bord de fuite, à une distance équivalente à 10% de la corde axiale, sur des portions azimutales d'extension $\alpha\Delta\theta$, comme illustré à la figure 8.2². Si cette action présente une part arbitraire, elle permet d'atteindre un écoulement se rapprochant au mieux de la physique, en dirigeant la résolution vers l'obtention d'un champ uniforme en aval de l'aube.

En pratique, le contrôle tangentiel aura pour consigne la vitesse tangentielle à une distance $\epsilon/2$ de la paroi qui mène au taux de cisaillement prescrit. Afin d'éviter une limitation temporelle supplémentaire, cette action est proportionnelle. Ainsi, pour imposer le taux de cisaillement T sur un élément de contrôle illustré à la figure 8.7, la force tangentielle est définie par (8.1).

2. Nous adoptons une valeur $\alpha=0,35$.

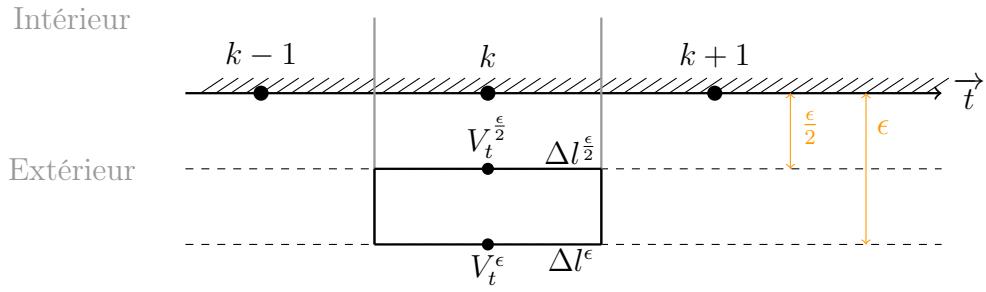


FIGURE 8.7 – Elément de contrôle à la paroi

$$f_t = \beta \rho \left(V_t^{\frac{\epsilon}{2}} - V_t^{\frac{\epsilon}{2} \text{ objectif}} \right) \quad (8.1)$$

$$V_t^{\frac{\epsilon}{2} \text{ objectif}} = \frac{V_t^\epsilon \Delta l^\epsilon - T \frac{(\Delta l^\epsilon + \Delta l^{\frac{\epsilon}{2}})\epsilon}{4}}{\Delta l^{\frac{\epsilon}{2}}} \quad (8.2)$$

L'action tangentielle et la discréétisation des bords minces constituent les deux adaptations nécessaires à la résolution de l'écoulement autour de profils minces. Elles apportent une réponse pragmatique aux difficultés rencontrées et permettent, comme nous allons le montrer dans ce qui suit sur un profil statorique, d'obtenir un écoulement cohérent.

8.2 Le stator du CME2

Afin de valider les modifications apportées, nous résolvons l'écoulement non-visqueux à mi-hauteur d'un profil d'aube statorique du compresseur CME2. Cette application résulte à nouveau en un écoulement moyen unidimensionnel. Les conditions limites relatives à cet exemple sont reprises au tableau 8.1. Les résultats seront générés avec 25 modes et comparés à la solution obtenue par un code tridimensionnel, moyennée dans la direction circonférentielle, considérée comme solution de référence.

Température totale d'entrée	T^0	[K]	312
Pression totale d'entrée	p^0	[Pa]	115000
Angle d'entrée	β	[deg]	39
Pression statique de sortie	p	[Pa]	109000

TABLE 8.1 – Conditions limites

Comme précédemment, nous présenterons les résultats selon deux approches. La première est une vision moyenne selon laquelle le méridien harmonique fournit les termes d'ordre supérieur et en traduit l'effet moyen sur l'écoulement moyen. La deuxième est une vision complète de l'ordre supérieur, tirant profit de la résolution des modes de Fourier des perturbations circonférentielles pour en reconstruire l'évolution.

Commençons par focaliser l'analyse sur la vision moyenne de l'écoulement et sur l'amélioration procurée par les termes d'ordre élevé. Dans cette optique, la figure 8.8 compare l'énergie cinétique des perturbations circonférentielles obtenues par le méridien harmonique à la référence.

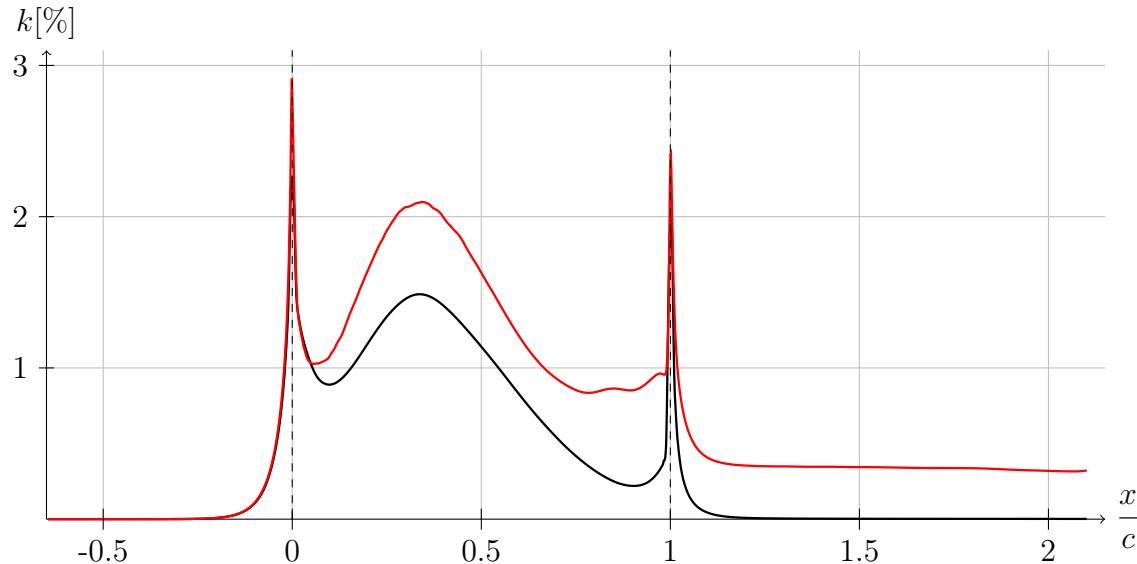


FIGURE 8.8 – Evolutions axiales de l'énergie cinétique moyenne des perturbations issues de la simulation de référence (noir) et du méridien harmonique (rouge)

Le niveau de perturbation est globalement surestimé. Ceci est dû à la présence dans l'écoulement, aux abords de la paroi, d'une zone de transition entre les écoulements externes et internes. Cependant, l'allure générale est cohérente et présente des évolutions similaires à la référence.

Afin de souligner l'apport des termes d'ordre élevé, la figure 8.9 compare les évolutions axiales du Mach et de la pression statique moyens, obtenues par la simulation de référence, à celles issues du méridien harmonique incluant ou non les tensions circonférentielles.

La comparaison entre les évolutions du nombre de Mach moyen incluant ou non les tensions circonférentielles montre l'amélioration fournie par celles-ci. L'adaptation du fluide à la présence de l'aube en amont est notable, ainsi que la conformation de l'accélération du fluide sur l'avant de l'aube à la référence.

En ce qui concerne la pression statique, l'accord avec la courbe de référence est de moindre qualité. Ceci est à relier aux approximations découlant de l'hypothèse de petites perturbations, comme nous l'avons expliqué au chapitre 7. Néanmoins, nous observons à nouveau l'amélioration procurée par la prise en compte des tensions circonférentielles.

L'examen de l'écoulement moyen a confirmé les observations du chapitre précédent. Le méridien harmonique d'ordre élevé permet une reproduction fiable du champ de vitesse mais ne permet d'approcher la pression statique qu'avec une précision limitée.

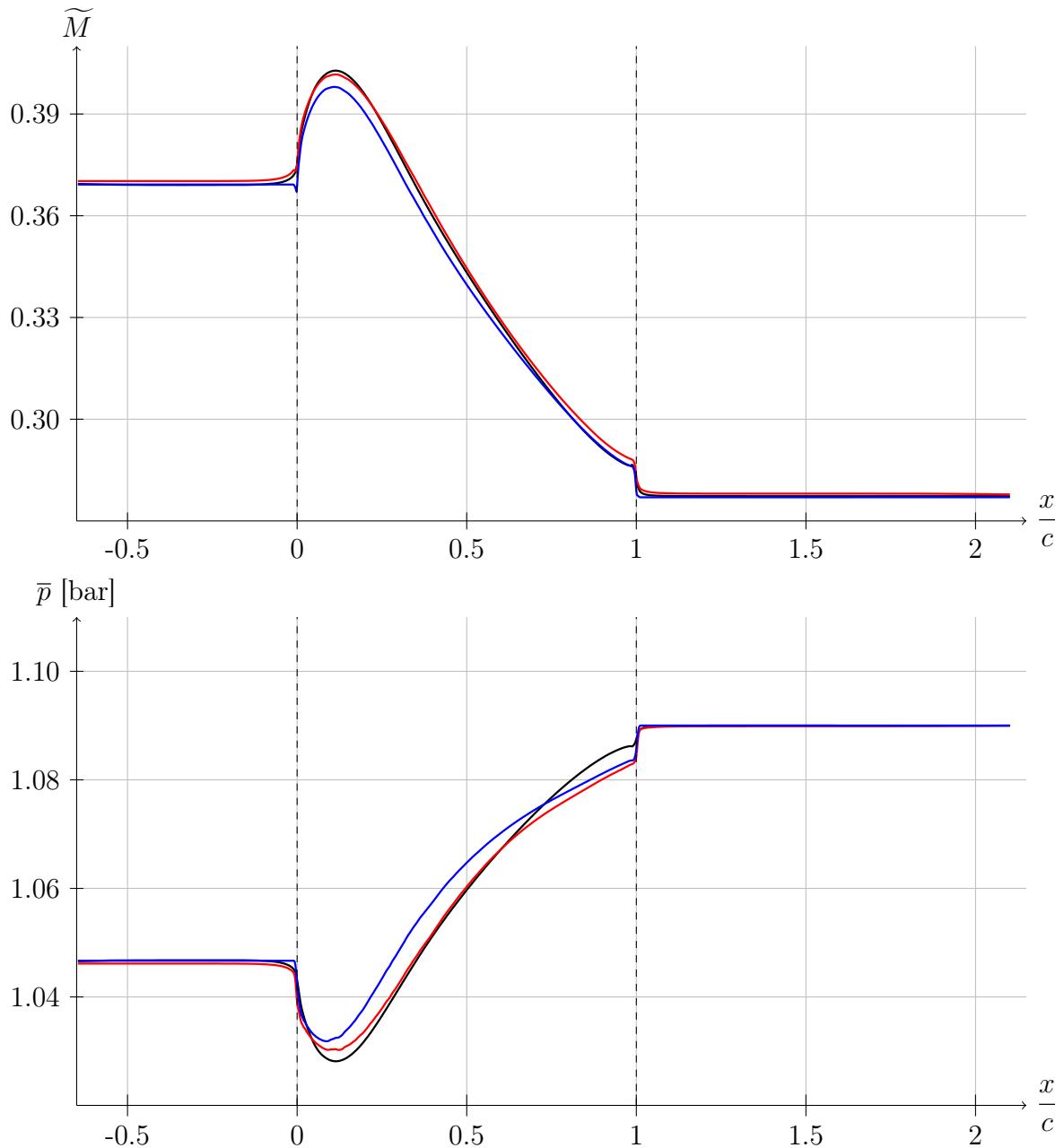


FIGURE 8.9 – Evolutions axiales du Mach et de la pression statique moyens, issues de la simulation de référence (noir) et du méridien harmonique avec (rouge) ou sans (bleu) tensions circonférentielles

Passons à présent à la discussion des résultats associés à la seconde vision de la méthode, la vision circonférentielle. La figure 8.10 compare les champs de vitesse obtenus par le méridien harmonique (haut) et la simulation de référence (bas). La trace de l'aube dilatée d'un facteur $(1+\epsilon)$ y est représentée. Elle délimite la zone d'application du champ de force.

Cette figure montre que l'écoulement est assez bien reproduit jusqu'à mi-corde. Ensuite, l'amincissemement de l'aube entraîne une influence mutuelle des parois discrétisées qui ne permet plus un contrôle précis aux abords de la paroi. Il se crée une couche de transition

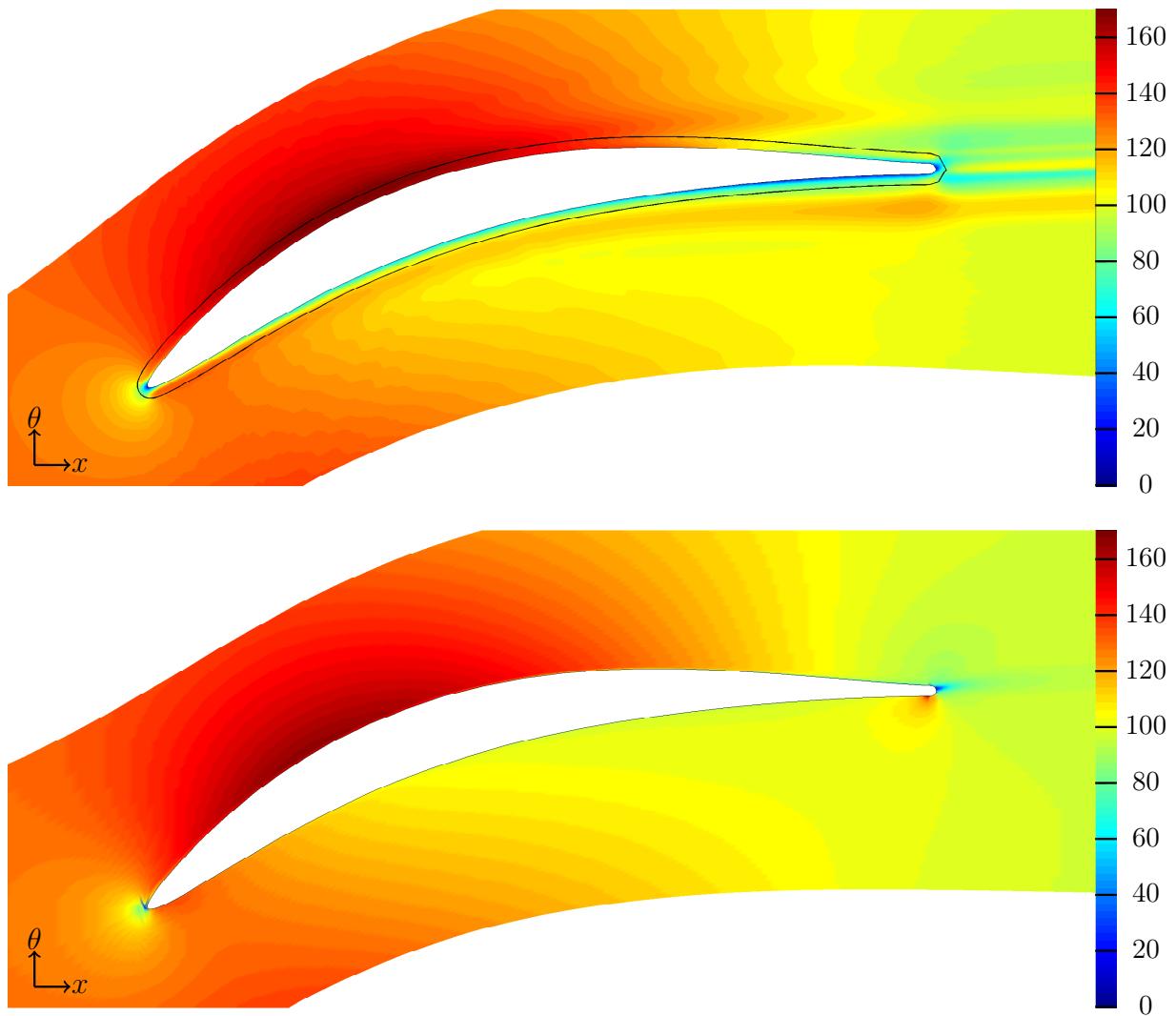


FIGURE 8.10 – Champs de vitesse [m/s] issus du méridien harmonique (haut) et de la simulation de référence (bas)

entre les écoulements externe et interne qui se propage ensuite à l'aval, laissant un sillage non-visqueux. Cette couche de transition est clairement délimitée par le support de la fonction de distribution et est inévitable sur un profil mince. Si l'écoulement aux abords de la paroi est détérioré, l'allure générale hors de cette zone est en assez bon accord avec la solution de référence.

Afin de poursuivre l'analyse, la figure 8.11 compare les champs de pression statique obtenus par le méridien harmonique (haut) et la simulation de référence (bas). A nouveau, si l'on excepte la bande pariétale associée au support de distribution et perturbée par le champ de force, l'allure générale du champ de pression est en assez bon accord avec le champ de référence. En particulier, les points de stagnation sont visibles, ainsi que la poche de succion à l'extrados et l'augmentation progressive de pression à l'intrados. A ce sujet, tant à l'intrados qu'à l'extrados, l'épaississement des bandes de basse vitesse de la figure 8.10 (haut) concorde avec les gradients de pression adverses observés aux parois.

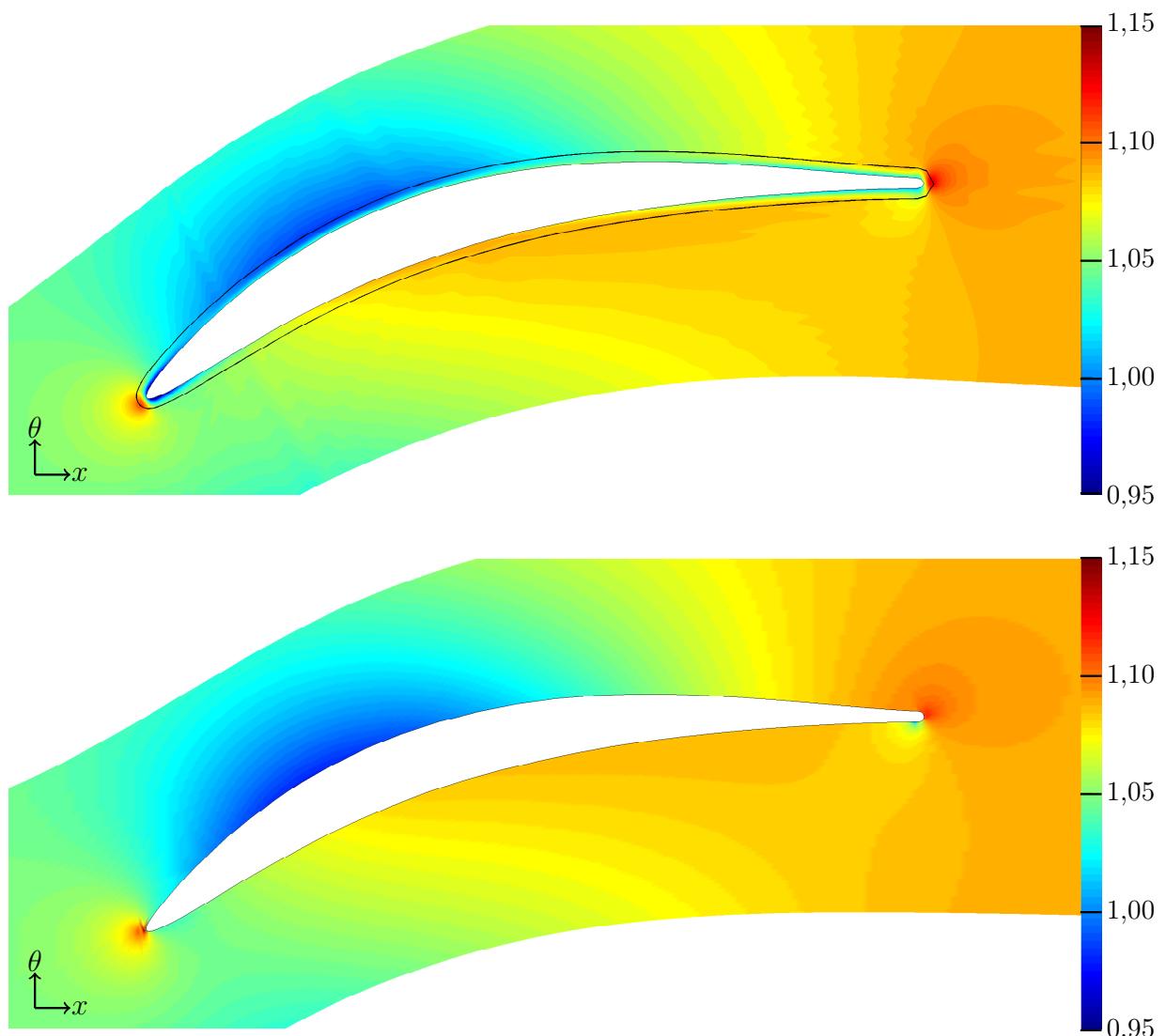


FIGURE 8.11 – Champs de pression statique [bar] issus du méridien harmonique (haut) et de la simulation de référence (bas)

Pour terminer notre analyse, les figures 8.12 et 8.13 comparent les évolutions pariétales de la vitesse et de la pression statique établies par le méridien harmonique à une distance ϵ de la paroi virtuelle (noir), à celles issues de la simulation de référence à des distances moyennes $\epsilon/10$ (rouge) et ϵ (bleu) de la paroi solide.

Concernant la vitesse, on constate un accord entre les différentes tendances jusqu'à environ 70% de la corde. Cet accord est moindre sur la dernière portion d'aube, par l'augmentation de l'influence entre les parois, du fait de l'amincissement du profil. En particulier, cette fin de profil est principalement conditionnée par la boucle de contrôle de la force tangentielle et par le choix d'agir sur le taux de cisaillement et l'uniformité de l'écoulement aval.

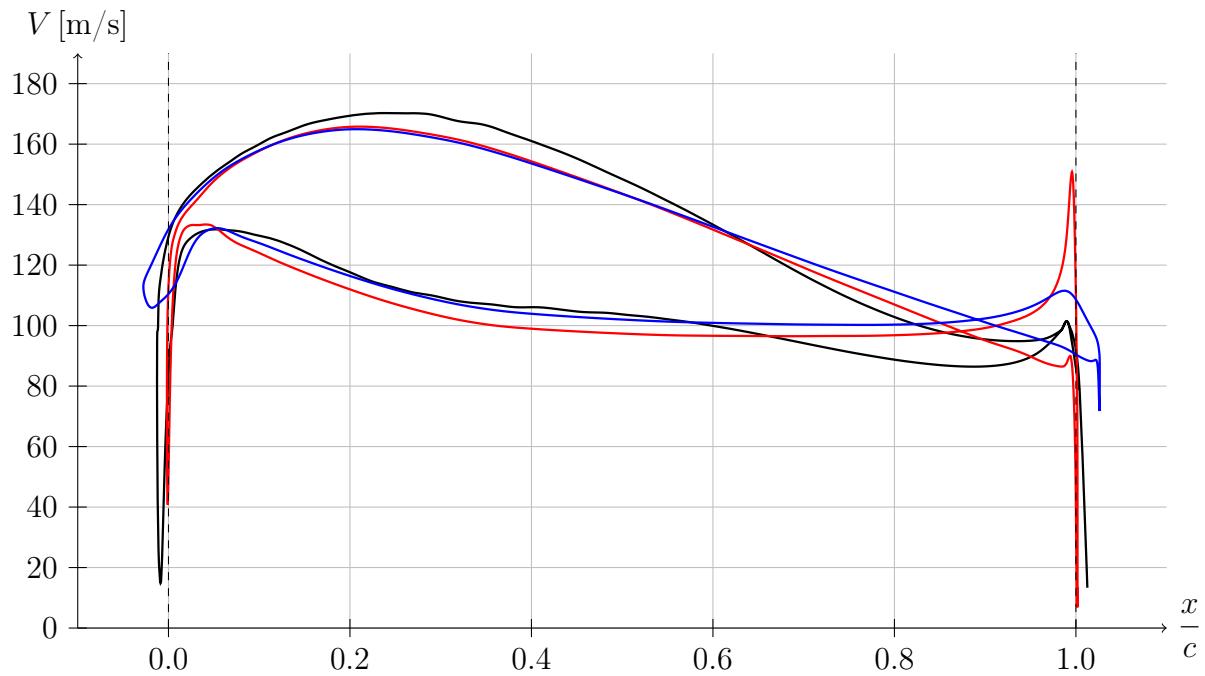


FIGURE 8.12 – Vitesse à la paroi établie par le méridien harmonique à une distance ϵ de la paroi virtuelle (noir) comparée à celles issues de la simulation de référence à des distances moyennes $\epsilon/10$ (rouge) et ϵ (bleu) de la paroi solide

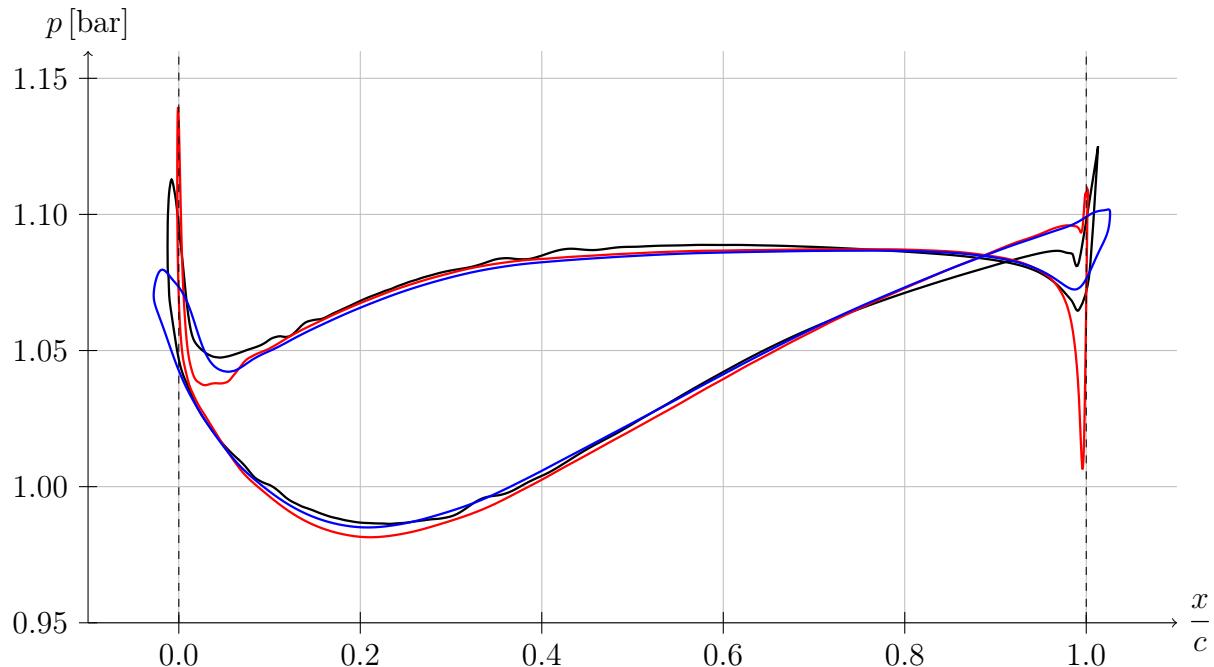


FIGURE 8.13 – Pression à la paroi établie par le méridien harmonique à une distance ϵ de la paroi virtuelle (noir), comparée à celles issues de la simulation de référence à des distances moyennes $\epsilon/10$ (rouge) et ϵ (bleu) de la paroi solide

L'examen de la figure 8.13 relative aux pressions montre des évolutions pariétales similaires entre le méridien harmonique et la simulation de référence. Bien que la pression soit une grandeur fortement conditionnée à l'hypothèse de petites perturbations et que de légères oscillations apparaissent tant à la paroi que dans l'écoulement, sa répartition sur l'intrados et l'extrados est fidèle à la réalité et témoigne d'une bonne prédition du champ de force.

Aussi, tant la vitesse tangentielle que la pression montrent que la force tangentielle ajoutée pour garantir le maintien de l'écoulement interne ne détériore pas la physique associée à l'écoulement. Les choix opérés pour le contrôle de cette action s'avèrent donc respectueux de la nature de l'écoulement. Il est clair que d'autres choix de contrôle seraient possibles et pourraient sans doute fournir des résultats comparables mais ceux que nous avons effectués sont justifiés et donnent satisfaction.

L'ensemble de la discussion menée sur ce cas de l'écoulement autour d'un profil statique nous permet de conclure que par une modélisation adaptée aux particularités des profils aérodynamiques, il est possible d'obtenir de l'information d'ordre élevé au travers d'une méthode de frontière immergée utilisée dans un contexte harmonique.

8.3 Le CME2 complet

Dans ce qui suit, nous allons aborder la dernière étape illustratrice des capacités du méridien harmonique. Celle-ci consiste en la résolution de l'écoulement au sein du compresseur CME2, dont la description a été effectuée au chapitre 1. Pour ce cas test, la vision méridienne sera bien bidimensionnelle tandis que la vision d'ordre élevé relèvera de l'espace tridimensionnel.

Si le domaine de calcul méridien est toujours exprimé dans un repère fixe, la résolution des perturbations circonférentielles se déroule quant à elle dans les repères relatifs aux roues aubées. En simulation tridimensionnelle stationnaire classique, le transfert d'information d'un repère à l'autre est formalisé par la technique dite de plan de mélange. Ce dernier constitue l'interface entre les roues, une moyenne circonférentielle y étant opérée afin de transférer l'écoulement moyen d'un repère à l'autre. Dans le cas du méridien harmonique, la communication apparaît naturellement au travers du domaine méridien qui recouvre l'entièreté de la machine.

Température totale d'entrée	T^0	[K]	288,15
Pression totale d'entrée	p^0	[Pa]	101325
Angle d'entrée	β	[deg]	0
Pression statique de sortie	p	[Pa]	113500
Vitesse de rotation	Ω	[rpm]	6300

TABLE 8.2 – Conditions limites

Les conditions limites relatives à cette application sont indiquées au tableau 8.2. Dans le but de nous placer en conditions efficaces d'utilisation du mériidien harmonique, nous limiterons le nombre de modes de Fourier résolus à 25. Les résultats seront comparés à la solution obtenue par un code tridimensionnel stationnaire, considérée comme solution de référence. Nous présenterons à nouveau ces résultats selon deux visions, l'une moyenne et l'autre d'ordre supérieur.

Pour débuter notre discussion, penchons-nous sur la reproduction des non-uniformités circonférentielles, que nous visualisons au moyen de l'énergie cinétique des perturbations. La figure 8.14 compare le champ obtenu par le mériidien harmonique à celui de référence, dans les cas de fluide visqueux et non-visqueux.

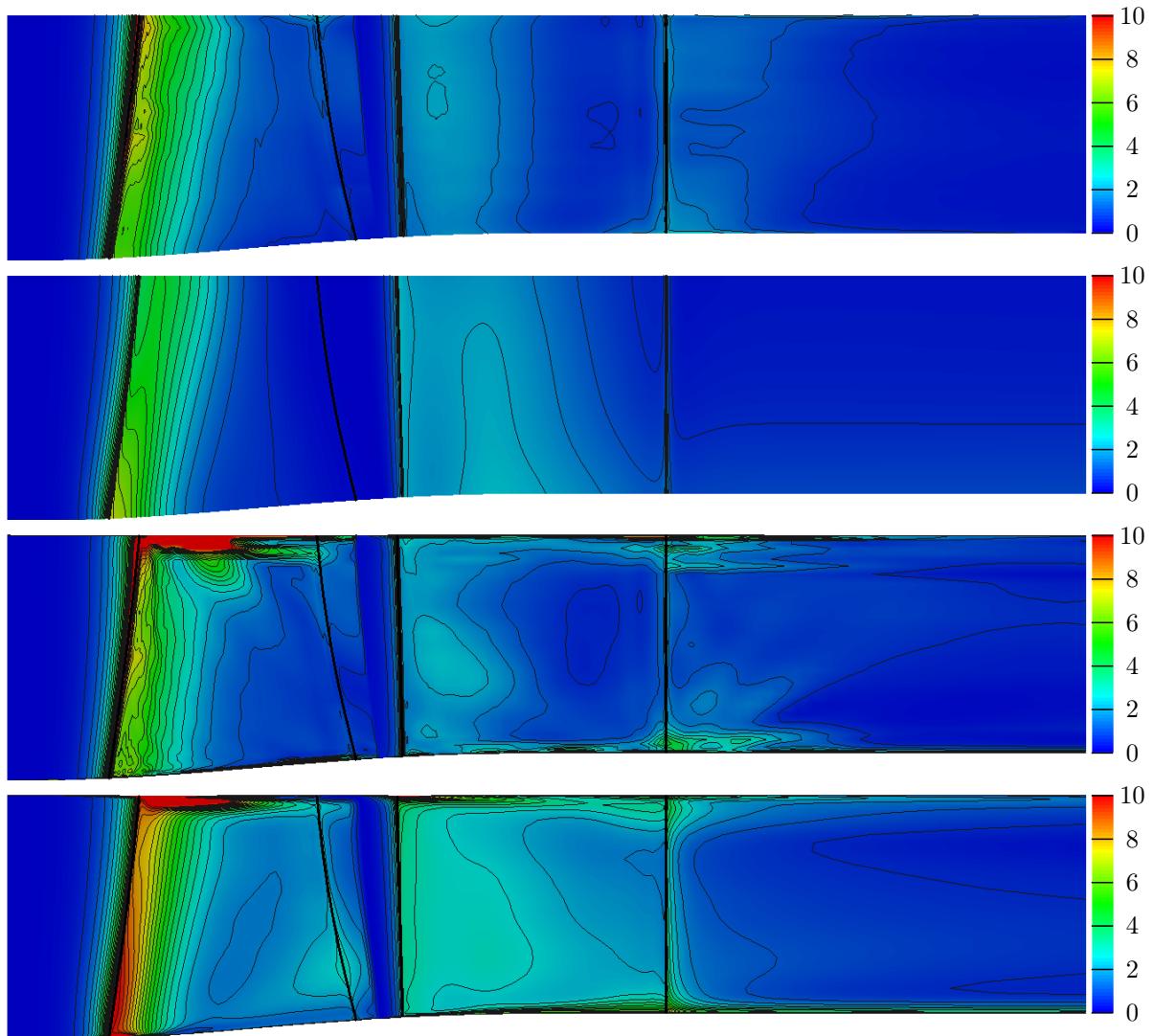


FIGURE 8.14 – Champs d'énergie cinétique moyenne des perturbations \bar{k} en pourcentage de l'énergie cinétique totale locale de l'écoulement issus (respectivement du haut vers le bas) de simulations mériidienne harmonique non-visqueuse (1), de référence non-visqueuse (2), mériidienne harmonique visqueuse (3) et de référence visqueuse (4).

La confrontation des deux figures du haut, issues de la résolution des équations d'Euler³, montre un accord entre le méridien harmonique et la référence, tant au niveau de la localisation des zones de non-uniformité que de leur intensité. Dans un cas comme dans l'autre, les perturbations proviennent du chargement des aubages, situé sur l'avant de ceux-ci.

En ce qui concerne les simulations de fluides visqueux, précisons toutefois que le méridien harmonique applique une condition de glissement aux parois virtuelles des aubages. Seules les parois méridiennes, i.e. le carter et le moyeu, sont caractérisées par l'arrêt du fluide. Par conséquent, le flux principal présente une nature non-visqueuse, le mécanisme de génération de tensions visqueuses étant absent dans cette région. C'est ce que montre en effet la comparaison des résultats de simulation méridienne dans les cas visqueux et non-visqueux.

De ce fait, le degré de non-uniformité reproductible est réduit. Il est possible d'estimer cette diminution en comparant les résultats de la simulation de référence incluant ou non la viscosité. Lorsque la condition d'arrêt est imposée, les couches limites visqueuses qui en découlent apportent un niveau de non-uniformité comparable à ce qu'engendre le chargement des pales.

Néanmoins, la condition d'arrêt imposée aux parois méridiennes permet d'altérer le champ d'énergie cinétique des perturbations dans ces régions pour en reproduire assez fidèlement les caractéristiques locales. En particulier, le champ de non-uniformité associé au jeu de bout de rotor est cohérent avec la simulation de référence. Aussi, les régions de pied et de tête en fin de stator sont remarquables.

Afin d'observer les effets de la prise en compte des tensions circonférentielles sur l'écoulement méridien, la figure 8.15 compare le champ de Mach moyen résultant de simulations harmoniques incluant ou non les termes de perturbation, et ce dans un environnement visqueux ou non, à celui des simulations de référence.

Abordons les simulations d'Euler, soit les trois figures du haut. De manière générale, le champ méridien est assez bien reproduit, si l'on excepte une survitesse au moyeu du rotor et un déficit en tête de ce dernier. Si à l'échelle globale, la prise en compte des tensions circonférentielles est réduite, des modifications locales sont notables. Il s'agit notamment de l'effet d'adaptation de l'écoulement en amont des roues et d'un rééquilibrage des vitesses en pied et en tête. Les termes de perturbation permettent donc de se rapprocher de la réalité, même si l'effet principal reste associé à la force exercée par les aubages sur le fluide, laquelle est également déterminée par le méridien harmonique.

Poursuivons la discussion sur base des simulations de type Navier-Stokes, dont les résultats sont exprimés par les trois figures du bas. Si nous ne pouvons nous attendre à une cohérence forte entre le méridien harmonique et la référence loin des parois, il est intéressant d'approcher l'analyse de ces dernières. Un niveau de Mach amoindri y est observé, surtout

3. Notons que ces simulations ne comprennent pas de jeu en bout de pale rotorique.

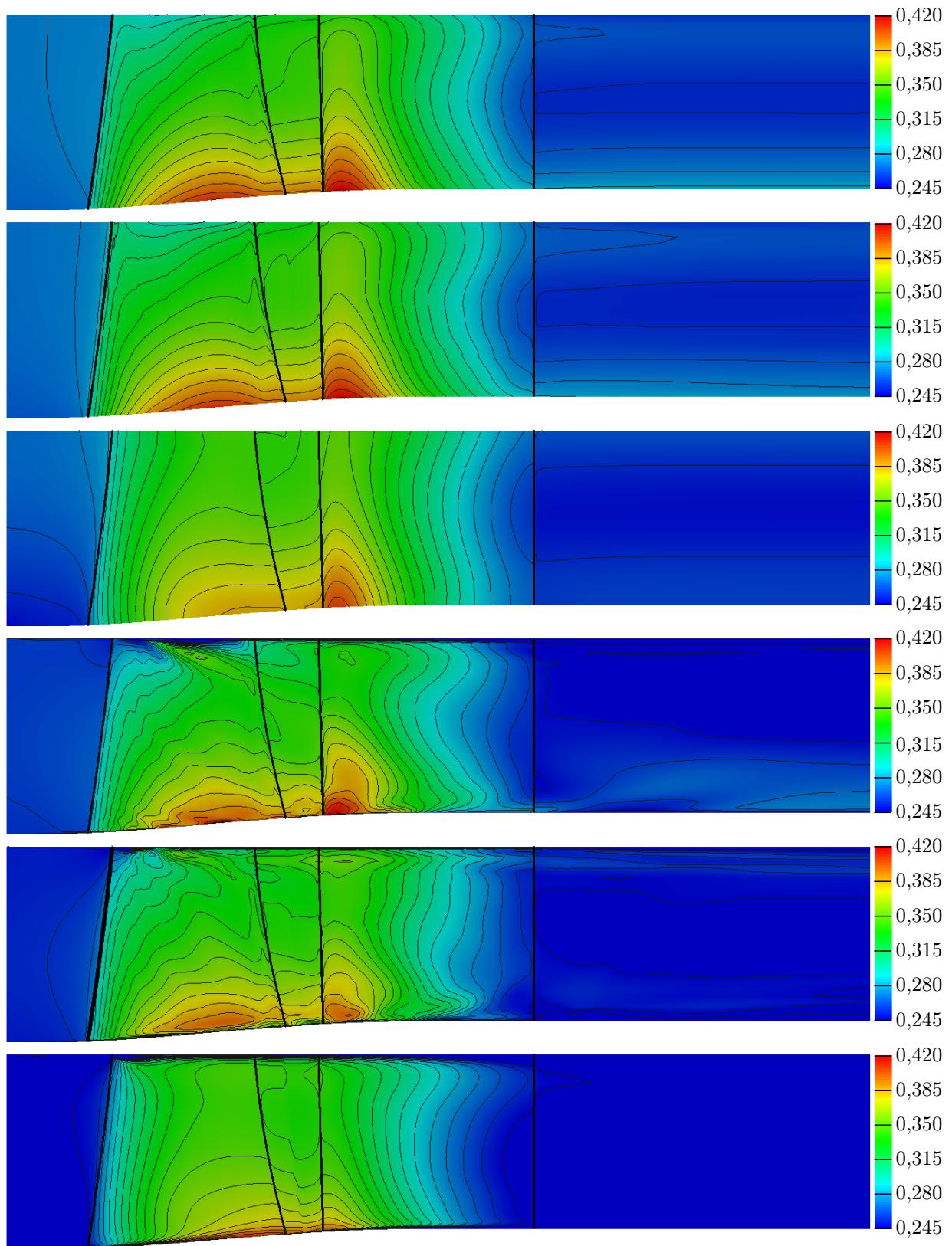


FIGURE 8.15 – Champs de nombre de Mach moyen issus (respectivement du haut vers le bas) de simulations mérienne harmonique non-visqueuse sans tension circonférentielle (1) et avec (2), de référence non-visqueuse (3), mérienne harmonique visqueuse sans tension circonférentielle (4) et avec (5) et de référence visqueuse (6).

suite à l'altération engendrée par les tensions circonférentielles. En particulier, l'écoulement au carter subit clairement l'effet du jeu de bout d'aube rotorique et l'usage des tensions circonférentielles semble y être primordial pour obtenir une représentation réaliste.

Etant donné l'absence de certains mécanismes créateurs de non-uniformité dans le flux principal en contexte de fluide visqueux au sein du méridien harmonique, nous préférons terminer l'analyse sur base des simulations non-visqueuses, celles-ci étant totalement comparables. Dans ce cas, les performances prédictives sont reprises au tableau 8.3. Elles prouvent que même si des différences locales sont observées entre les résultats des deux codes, les caractéristiques d'entrée et de sortie sont identiques.

		Référence 3D	Méridien harmonique
Débit	[kg/s]	10,9	11,1
Rapport des pressions		1,172	1,174
Rapport des températures		1,046	1,044

TABLE 8.3 – Performances globales du compresseur CME2 en non-visqueux

Pour terminer l'observation des résultats sous l'oeil méridien, la figure 8.16 présente les champs de pression statique obtenus par le méridien avec et sans tensions circonférentielles et par la simulation de référence.

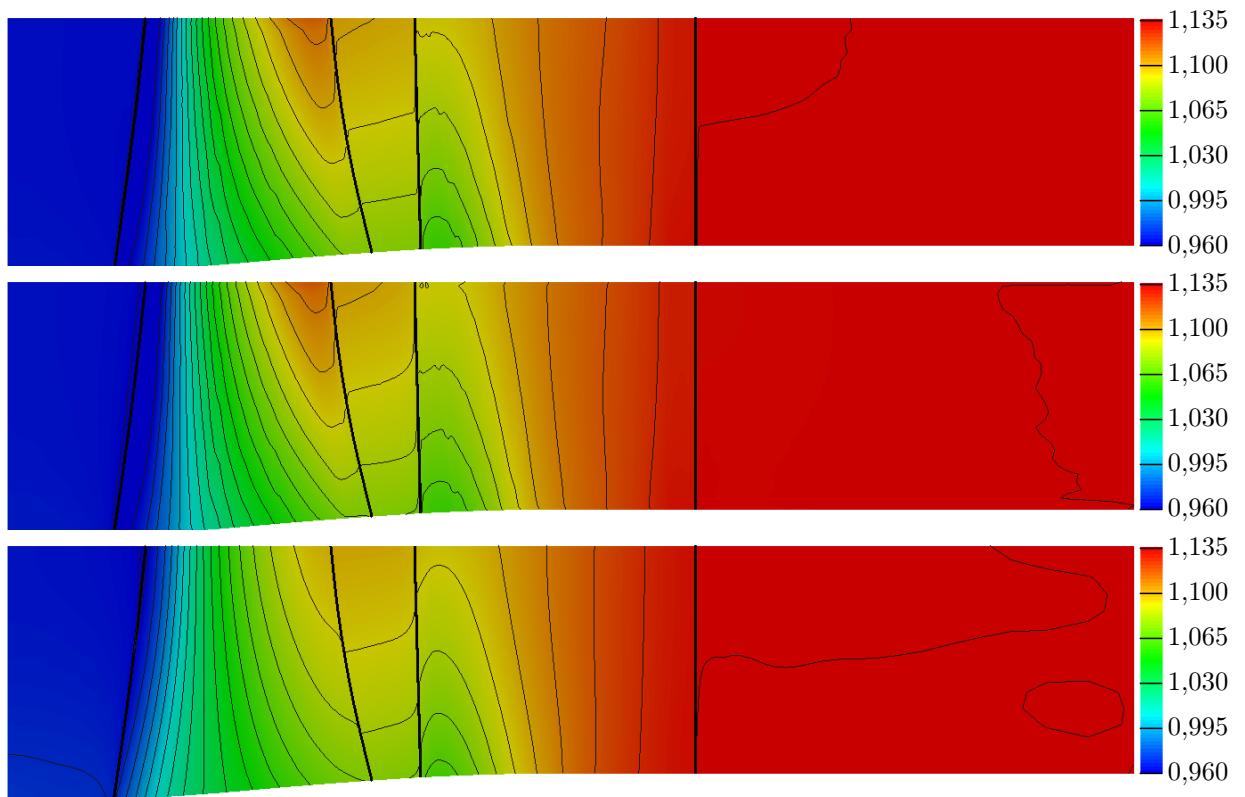


FIGURE 8.16 – Champs de pression statique moyenne [bar] issus (respectivement du haut vers le bas) de simulations méridienne harmonique non-visqueuse sans tensions circonférentielles (1) et avec (2) et de référence non-visqueuse (3)

L'accord entre le méridien harmonique et la référence est assez bon. La distribution de pression dans les directions axiale et radiale est bien reproduite. Comme précédemment, la continuité de l'écoulement est préservée au passage du plan de mélange.

La comparaison des deux premières figures montre que l'apport des termes de perturbations permet de reproduire l'effet potentiel en amont des roues et de rééquilibrer quelque peu la distribution de pression entre le pied et la tête du rotor.

A ce sujet, une surestimation de la pression en tête de rotor apparaît clairement à l'approche du bord de fuite. L'origine de ce fait est la minceur de l'aubage dans cette région. En effet, comme nous l'avons exposé en début de chapitre, une épaisseur faible engendre une augmentation de l'influence entre l'extrados et l'intrados. Au delà d'une certaine limite, un recouvrement entre les supports compacts des fonctions de distribution survient. Dès cette valeur, chaque paroi doit non seulement imposer une force qui permet de contrôler l'écoulement externe mais qui doit aussi compenser celle de la paroi qui lui fait face. De l'équilibre entre ces forces et l'écoulement externe naît une surpression dans cette zone.

Pour un support compact dont la dimension ϵ vaut 2,5% de l'extension azimutale du passage inter-aubes, la valeur limite au-delà de laquelle s'établit un recouvrement correspond à un facteur de blocage égal à 0,95. La figure 8.17 montre le facteur de blocage associé aux roues et pointe cette valeur limite.

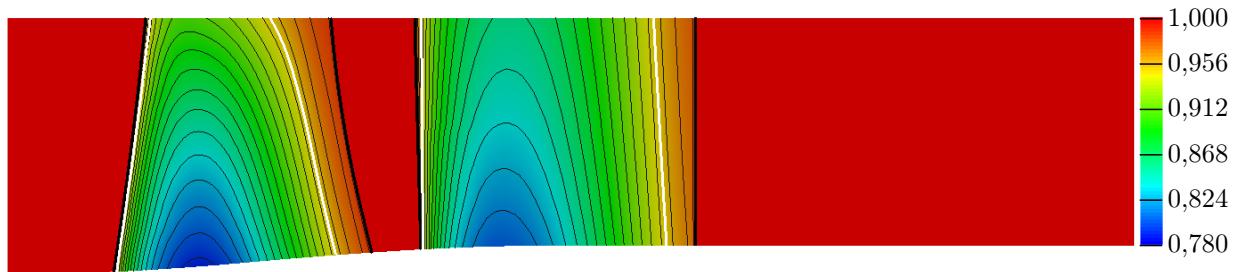


FIGURE 8.17 – Facteur de blocage avec indication (en blanc) du lieu des points de blocage valant 0,95

La portion d'aube rotorique caractérisée par une valeur du blocage supérieure à celle pour laquelle survient le recouvrement correspond assez bien à la zone de surestimation de pression observée à la figure 8.16.

Cependant, si l'écoulement diffère localement dans la zone aubée, il est fidèle à la réalité en dehors. Les performances globales sont donc bien établies, la qualité de prédiction dans les passages inter-aubes est quant à elle soumise à la finesse de discréétisation harmonique des pales.

Abordons à présent les résultats sous une vision d'ordre élevé afin d'examiner les capacités d'information locale du méridien harmonique. La figure 8.18 présente, à mi-hauteur d'aube, les champs de vitesse déterminés par le méridien harmonique et la simulation de

référence. Notons qu'un telle visualisation est possible sur toute la hauteur de la veine, l'information d'ordre supérieur étant calculée sur l'entièreté du domaine.

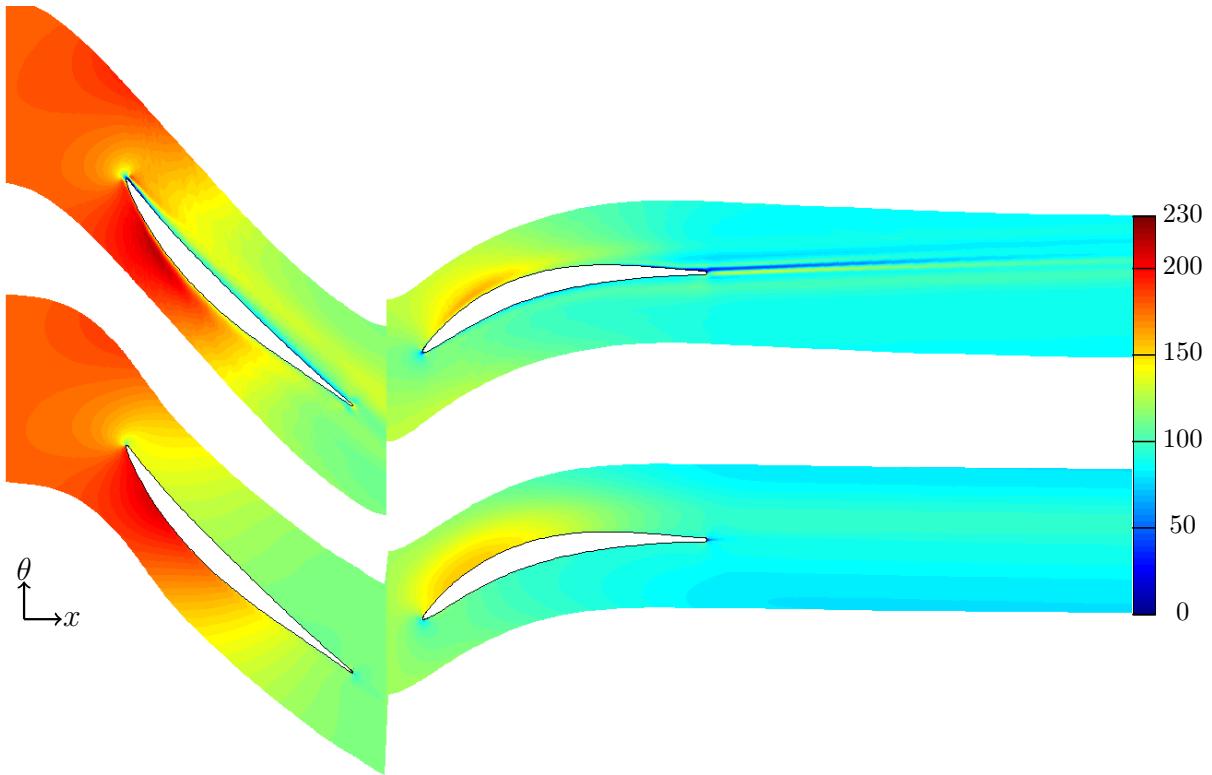


FIGURE 8.18 – Champs de vitesse [m/s], à mi-hauteur de veine, obtenus par le méridien harmonique (haut) et la simulation de référence (bas).

La structure générale de l'écoulement est bien approchée. En particulier, les poches de survitesse aux extrados des deux profils sont bien représentées. Comme observé sur le cas du profil statorique seul, il subsiste une couche pariétale découlant de la présence dans l'écoulement du champ de force représentant les parois virtuelles. Aussi, l'amincissement des aubes à l'approche du bord de fuite reste une épreuve délicate.

La visualisation du plan de mélange est ici aisée et l'arrêt des perturbations circonférentielles y est notable. En effet, le seul transfert d'information est réalisé par l'écoulement méridien. Le corollaire est que des modélisations harmoniques indépendantes des roues sont envisageables. Il serait en effet possible d'inclure des nombres différents de modes de Fourier dans chaque repère. L'utilisation limite du méridien harmonique pourrait d'ailleurs consister à ne calculer aucune perturbation dans l'une des deux roues, utilisant alors le méridien pour fournir un environnement à la résolution d'une roue particulière dont on recherche les évolutions tant méridiennes que circonférentielles.

Pour suivre, la figure 8.19 dépeint, à mi-hauteur d'aube, les champs de pression statique déterminés par le méridien harmonique et la simulation de référence.

Les caractéristiques dominantes telles que les poches de succion ou les points de stagnation sont bien approchées. Quant à l'examen de la portion arrière de l'aube rotorique, il

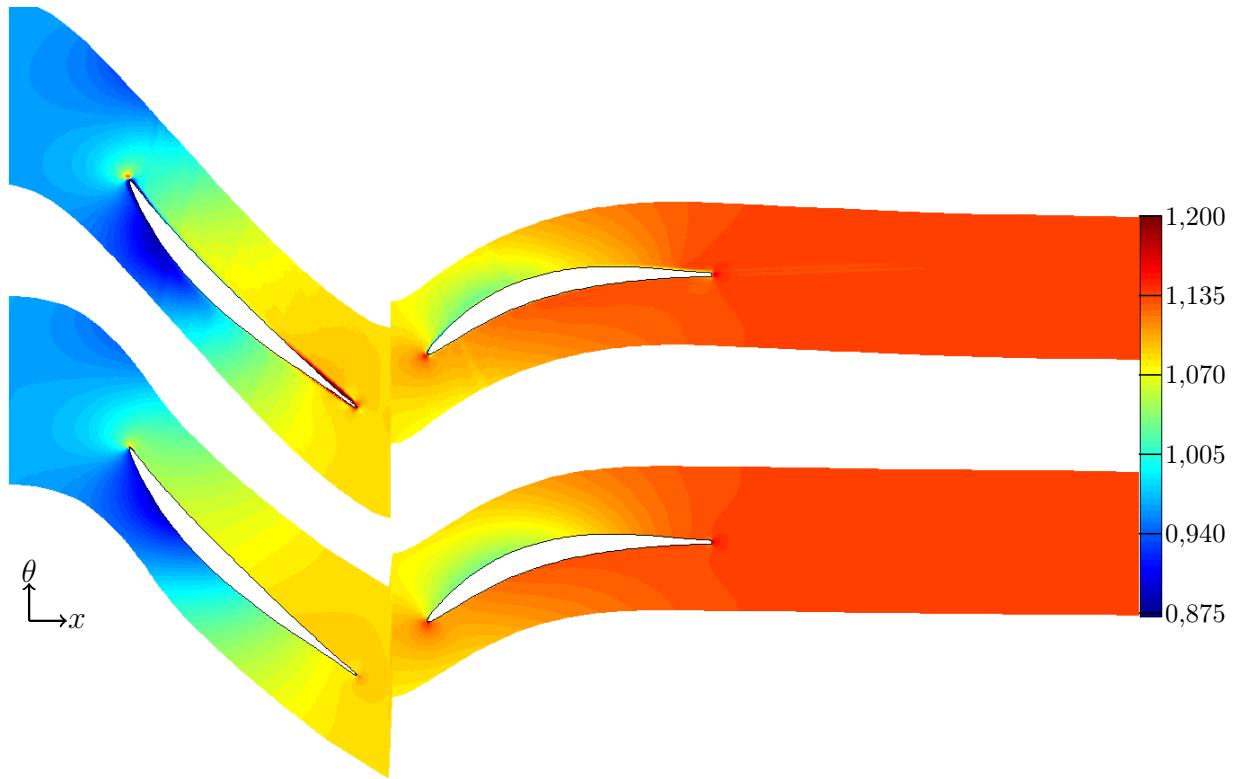


FIGURE 8.19 – Champs de pression statique [bar], à mi-hauteur de veine, obtenus par le méridien harmonique (haut) et la simulation de référence (bas).

confirme l'origine de la surestimation de pression rencontrée à la figure 8.16. La proximité des parois solides entraîne un forçage inadéquat et une augmentation locale de pression sous le support de la fonction de distribution, dans l'écoulement externe. Celui-ci ne se transmet pas à l'aval et explique pourquoi l'écoulement y redevient cohérent.

Pour compléter cette vision d'ordre élevé, la figure 8.20 compare les vitesses aux parois du rotor établies par le méridien harmonique à une distance ϵ de ces dernières et par la simulation de référence à distance nulle.

Cette figure montre que les évolutions tant axiale que radiale sont cohérentes. Les intensités sont approchées de manière satisfaisante, rendant possible une analyse locale du comportement de l'écoulement. En effet, même si le processus de distribution de la force entraîne un certain lissage des gradients aux abords de la paroi, l'image obtenue est assez fidèle à la réalité.

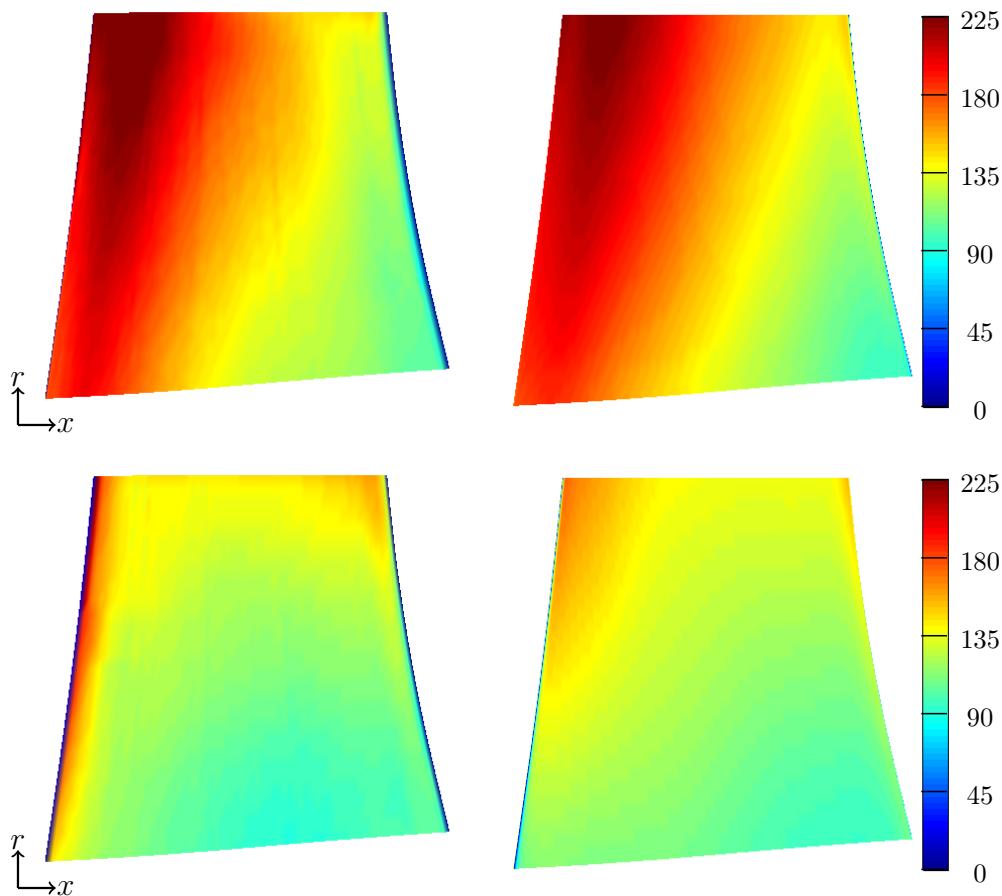


FIGURE 8.20 – Champs de vitesse [m/s] à l’extrados (haut) et à l’intrados (bas) du rotor établis par le méridien harmonique à une distance ϵ de la paroi virtuelle (gauche) et par la simulation de référence à la paroi solide (droite)

Enfin, nous terminons l’observation des résultats avec la figure 8.21 qui compare les pressions statiques aux parois du rotor établies par le méridien harmonique à une distance ϵ de ces dernières et par la simulation de référence à distance nulle.

A nouveau, l’accord entre les deux simulations est bon, si l’on excepte la surestimation de pression rencontrée principalement à l’intrados de l’aubage et dont l’origine est la faible épaisseur de la pale, comme mentionné précédemment.

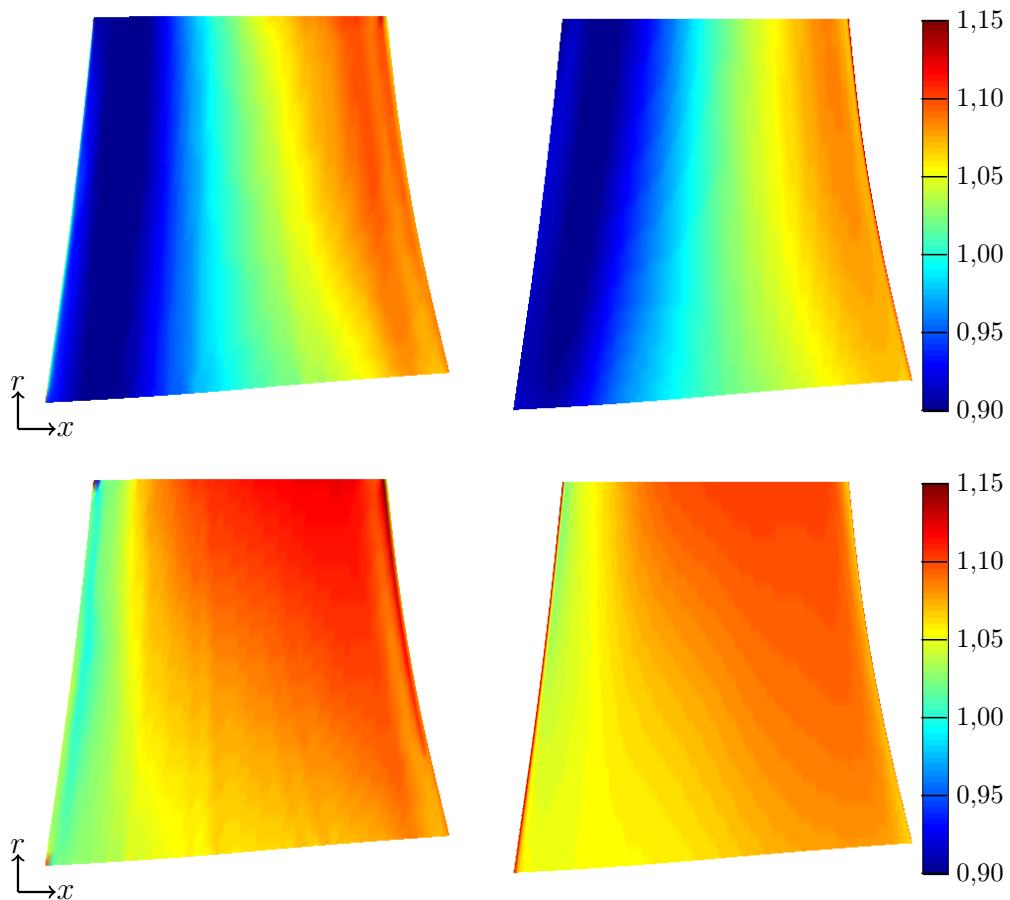


FIGURE 8.21 – Champs de pression statique [bar] à l’extrados (haut) et à l’intrados (bas) du rotor établis par le méridien harmonique à une distance ϵ de la paroi virtuelle (gauche) et par la simulation de référence à la paroi solide (droite)

Toute la discussion effectuée dans ce chapitre montre que la reproduction de l’écoulement autour de profils aérodynamiques est une tâche complexe, en particulier dans un environnement tridimensionnel tel qu’un étage de compresseur. Aussi, de l’absence de condition d’arrêt aux parois des aubages découle l’omission de mécanismes de création de non-uniformité.

Cependant, par un code fondamentalement bidimensionnel, il est possible, à l’aide d’une modélisation adaptée aux profils minces, d’accéder à des informations locales qui relèvent de l’ordre supérieur au méridien classique, potentielles dans l’entièreté de la veine et visqueuses aux abords des parois méridiennes.

Conclusions

Tout au long de cette contribution, nous avons analysé et développé la possibilité d'af-franchir la simulation méridienne d'une part de l'empirisme qui lui est associé au travers de l'obtention autonome des termes d'ordre élevé, par l'extension au cas circonférentiel d'une méthode de résolution harmonique.

Nous avons commencé par exposer les bienfaits d'une prise en compte des termes provenant des différentes moyennes réalisées pour parvenir au modèle méridien. Suite à une décomposition rigoureuse de celui-ci, des termes d'ordre élevé originaires de phénomènes supérieurs à un modèle bidimensionnel stationnaire viennent compléter le modèle classique, qui ne les considère pas. Ces composantes additionnelles améliorent la prédition de l'écoulement mais sont inaccessibles au méridien classique.

Afin de les obtenir, nous avons proposé d'étendre au cas circonférentiel une méthode harmonique déterministe éprouvée. Celle-ci aborde un problème en le décomposant en un tronc moyen résolu de manière non-linéaire et un ordre supérieur, ou élevé, linéarisé et résolu par superposition modale. Son domaine d'application originel, l'obtention de perturbations instationnaires par un code tridimensionnel stationnaire, requiert assez peu de modes de Fourier, environ cinq. Nous avons montré que les perturbations circonférentielles présentent un spectre fréquentiel du même ordre de largeur hors des zones aubées. En revanche, dans les passages inter-aubes, ce spectre s'élargit du fait des gradients importants rencontrés aux parois des aubages. Nous avons cependant illustré qu'une reconstruction approchée des tensions circonférentielles offre déjà une nette amélioration dans la description de l'écoulement méridien.

Hormis cette divergence de besoin modal, il existe une différence fondamentale entre les cas circonférentiel et instationnaire. Ce dernier est résoluble dans le domaine fréquentiel parce que les conditions limites génératrices des non-uniformités temporelles sont exprimables dans un formalisme spectral. Dans le cas circonférentiel en revanche, les perturbations spatiales proviennent des aubages, en particulier des conditions limites de non-glisement, qui ne peuvent être exprimées sous la forme d'une série de Fourier. Vu au-trement, le recours aux séries spectrales est rendu impossible par la non-périodicité du domaine de résolution ou encore sa discontinuité. Afin de pouvoir exprimer le générateur de non-uniformités circonférentielles, i.e. l'aubage, dans un formalisme fréquentiel, il s'avère nécessaire d'établir une nouvelle formulation de celui-ci. Elle est proposée par la méthode de frontière immergée, qui assimile un obstacle à un champ de force reproduisant un effet

identique à des conditions limites classiques de non-glissement ou d'imperméabilité sur le fluide.

Cette méthode satisfait les critères fréquentiels tant par sa formulation en terme source que par la continuité du champ de force qu'elle procure et qui permet une expression en série de Fourier du terme établi. Parmi les différentes ramifications reprises sous l'appellation de frontière immergée, nous nous sommes dirigés vers la méthode continue de frontière virtuelle (ou feedback). Celle-ci présente une robustesse appréciable et une familiarité avec les techniques de calcul du champ de force moyen en simulation méridienne classique. Si le champ de force est suffisamment lisse pour présenter un contenu spectral réduit, il nécessite pour cela d'être réparti sur une portion non-négligeable du domaine, ne permettant ainsi pas de recréer des couches limites fines et réduisant la représentation des parois virtuelles à une condition de glissement.

Par l'association novatrice des méthodes de frontière immergée et harmonique non-linéaire au modèle méridien, nous avons développé le modèle méridien harmonique. Sous l'hypothèse de petites perturbations, celui-ci établit un ensemble de systèmes numériques bidimensionnels donnant accès aux termes d'ordre élevé, les tensions circonférentielles et le champ de force de l'obstacle immergé, ainsi qu'à l'image méridienne de l'écoulement enrichie et libre de l'emploi de toute corrélation.

L'ensemble du modèle numérique est issu de l'assemblage flexible de trois techniques séparables. En effet, le système méridien classique résolu par volumes-finis détermine l'écoulement moyen. Celui-ci est enrichi par les tensions circonférentielles formées à partir des perturbations établies par l'étage harmonique du code et par le champ de force déterminé par le module de frontière immergée. Si la composante méridienne représente le tronc du modèle, tant les fonctionnalités harmonique que de frontière immergée sont des greffons qui ont pour seul objectif de nourrir l'écoulement moyen. Chacun d'eux peut être modifié ou remplacé sans altérer le reste du modèle.

Si l'écoulement moyen est l'objectif principal, la résolution harmonique donne également accès à une vision tridimensionnelle de l'écoulement. Celle-ci conditionne la qualité des tensions circonférentielles reconstruites et est dépendante d'une gestion soignée du champ de force, créateur des non-uniformités. Un décalage de celui-ci vers l'intérieur de l'obstacle permet notamment d'éviter le lissage des écoulements de parois et de saisir au mieux les gradients dans cette région, mais déstabilise la résolution. Si l'écoulement recherché est externe à l'obstacle, il existe une contrepartie interne, caractéristique de la méthode de frontière immergée et inévitable en contexte harmonique. Cet écoulement interne apparaît comme une limitation à l'hypothèse des petites perturbations et dégrade la reproduction du champ de pression. Néanmoins, le méridien harmonique fait preuve de stabilité et permet d'accéder à des informations d'ordre élevé avec un nombre de modes, certes plus important que dans le cas instationnaire, mais raisonnable. Aussi, si la seule condition de glissement aux parois de l'obstacle est acceptable pour le méridien harmonique, nous avons montré que le modèle permet la résolution d'écoulements de fluides visqueux.

Pour fonctionner de manière optimale dans un contexte harmonique, le méridien requiert de l'obstacle autour duquel s'écoule le fluide une configuration adéquate, évitant des rayons de courbure faibles ou des épaisseurs minces. Les profils aérodynamiques ne satisfont pas ces critères. Néanmoins, par une réponse pragmatique à un problème concret, une modélisation adaptée aux particularités rencontrées, il a été montré que le méridien harmonique permet d'accéder à des informations d'ordre élevé, d'origine supérieure aux capacités intrinsèques d'un méridien classique, fondamentalement bidimensionnel. Il a ainsi été possible d'évaluer l'écoulement dans un compresseur mono-étage, en soulignant une prédition de phénomènes locaux. La capacité de résolution des équations de Navier-Stokes a été éprouvée et offre notamment des informations locales aux parois méridiennes. Loin de celles-ci cependant, les mécanismes restent principalement d'origine potentielle, par l'absence de condition d'arrêt du fluide aux parois virtuelles des aubes. Il s'ensuit que des phénomènes à l'origine d'une part non-négligeable de non-uniformité telles que les couches limites pariétales restent inaccessibles. Néanmoins, les aspects d'origine potentielle des perturbations circonférentielles sont couverts et permettent d'enrichir la qualité de prédition de l'écoulement méridien tout comme la connaissance de la turbomachine.

La philosophie du méridien harmonique est élégante, disposant dans un même ensemble de méridiens classique et augmenté, avec la possibilité de passer de l'un à l'autre par l'usage de la fonctionnalité d'ordre élevé ou des corrélations empiriques. Néanmoins, bien qu'enrichi, le modèle reste méridien et ne peut donc accéder aux informations d'ordre supérieur que par une modélisation supplémentaire comprenant quelques approximations et inconvénients.

En effet, pour obtenir les tensions circonférentielles notamment, et leur effet moyen sur l'écoulement méridien, il s'avère nécessaire de reproduire de manière précise les phénomènes physiques générateurs de non-uniformité. La qualité des termes additionnels est donc fortement dépendante de la discrétisation du problème d'ordre supérieur, soit l'écoulement tridimensionnel. Or, le contexte harmonique limite fortement la finesse de celle-ci. Les conditions de périodicité et de continuité du domaine de calcul ainsi que la nécessité de limiter le nombre de modes de Fourier pour des raisons de coût numérique mènent à une représentation floue de la paroi solide et à un lissage des variations de l'écoulement à ses abords. De ce fait, certaines géométries, telles que les profils minces, deviennent difficiles à résoudre et demandent une modélisation particulière. De plus, il devient irréaliste de recréer des couches limites visqueuses associées à des écoulements à haut Reynolds rencontrés en turbomachines, écartant donc certains phénomènes créateurs de non-uniformité. Ce même contexte harmonique impose une linéarisation des équations aux perturbations, laquelle est une hypothèse forte, trop forte sans doute, dans le cas circonférentiel, qui plus est lorsqu'un écoulement interne prend place. Un contrôle de ce dernier pourrait être envisagé par l'ajout d'une force interne mais cette solution ne serait applicable qu'à des configurations d'obstacles suffisamment épais.

Néanmoins, l'ensemble développé reste attractif. Il permet d'accéder à des informations d'ordre élevé avec un code fondamentalement bidimensionnel. En outre, il ne nécessite pas la création de maillage tridimensionnel complexe et ne requiert pas un traitement d'information conséquent en aval des simulations. De plus, l'implémentation reste générale et

flexible. Pour des configurations répondant aux critères de fonctionnement optimal du méridien harmonique, les résultats obtenus sont bons, comme en atteste le cas de l'écoulement autour d'un cylindre. Aussi, après une adaptation de la modélisation aux profils minces, la résolution de cas plus élaborés tel un étage complet de compresseur est possible, permettant d'obtenir des informations tridimensionnelles locales en plus de la solution méridienne enrichie.

Le package ainsi développé consiste en une association novatrice de techniques indépendantes qui a notamment permis de mettre en lumière les interactions entre celles-ci. Ces interactions ont été étudiées, critiquées et solutionnées lorsque cela était possible.

Il n'en demeure pas moins que le formalisme harmonique et la linéarisation associée apportent un lot de contraintes. Si certaines peuvent être gérées, les autres restent des obstacles majeurs à une résolution fine. Nous proposons donc deux alternatives pour diriger le méridien classique vers un enrichissement au travers de l'accès aux informations d'ordre élevé. Elles correspondent à deux voies opposées, le choix de l'une ou de l'autre reposant sur la prépondérance accordée par le développeur à l'un de ces deux critères : l'affranchissement total d'empirisme ou la rapidité de calcul.

Si l'affranchissement total d'empirisme est poursuivi, il convient de se diriger vers une reconstruction précise des phénomènes physiques à l'origine des tensions circonférentielles et autres termes additionnels. Cette voie mène donc à l'élaboration d'une résolution tridimensionnelle, par quelque méthode que ce soit. Nous en proposons trois.

La première est l'utilisation de la méthode "Non-linear Harmonic Balance" de Hall [60]. Elle poursuit avec l'usage de séries de Fourier mais ne nécessite pas une reformulation de l'obstacle. Conservant une vision tridimensionnelle du problème, elle peut gérer des conditions limites solides classiques. De plus, elle ne nécessite pas de maillage tridimensionnel complexe mais une extrusion du maillage méridien conforme à l'obstacle.

La deuxième possibilité serait de recourir à une méthode de collocation, analogue à la précédente, mais utilisant des fonctions propres mieux adaptées au cas circonférentiel. Ce pourrait être des fonctions satisfaisant directement les conditions limites, des ondelettes ou d'autres encore. Tout comme la proposition précédente, celle-ci ne permet plus un découplage des domaines (r, x) et θ .

La troisième option consisterait à poursuivre l'usage de la méthode de frontière immergée, une méthode élégante par la simplicité du maillage de résolution. Il s'agirait d'une technique permettant de satisfaire la précision requise aux abords de la paroi par des écoulements à haut Reynolds.

Si la rapidité du code de calcul est privilégiée, il est souhaitable de rester à un niveau de modélisation bidimensionnel. La relative simplicité des codes méridiens les rend rapides et appréciés. Cependant, afin de continuer vers une diminution du besoin en empirisme, il faut conserver le modèle méridien dérivé rigoureusement selon la cascade de moyennes, avec les termes additionnels conséquents, sans corrélation générale. Il reste alors à identifier

les moyens d'obtenir chacun des termes supérieurs aux capacités de simulation bidimensionnelle. Nous proposons les réponses suivantes au problème de modélisation séparée de chaque terme.

La composante non-visqueuse du champ de force peut être obtenue de différentes façons : par un code aube-à-aube rapide, par la méthode des panneaux ou encore par la résolution d'une équation supplémentaire donnant accès à la répartition de pression sur le profil [19].

La composante visqueuse pourrait résulter d'un calcul de couche limite sur les parois de l'aube ou de l'usage de fonctions de forme de tensions de cisaillement ou d'écoulement à la paroi.

Pour ce qui est des tensions circonférentielles, deux options se présentent. La première est de constituer une base de données de simulations tridimensionnelles pour en extraire les caractéristiques principales et, de là, identifier un modèle paramétré. La deuxième serait de les modéliser sur base de fonctions de forme d'écoulement dans la zone aubée, d'un modèle de sillage pour l'aval et d'un modèle potentiel à l'amont, recouvrant les grands phénomènes créateurs de non-uniformités azimutales.

Cette seconde voie reste approchée bien sûr mais de l'ordre d'erreur méridienne et permettra d'enrichir le méridien en qualité de reproduction et en autonomie.

Bibliographie

- [1] Adamczyk, J.J., 1984, *Model Equation for Simulating Flows in Multistage Turbomachinery*, NASA-TM-86869.
- [2] Adamczyk, J.J., Mulac, R.A., Celestina, M. L., 1986, *A Model for Closing the Inviscid Form of the Average-Passage Equation System*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 108, pp. 180-186.
- [3] Adamczyk, J.J., 1996, *Wake Mixing in Axial Flow Compressors*, ASME Paper 96-GT-29.
- [4] Adamczyk, J.J., 2000, *Aerodynamic Analysis of Multistage Turbomachinery Flows in Support of Aerodynamic Design*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 122, pp. 189-217.
- [5] Adkins, G.G. Jr, Smith, L.H. Jr, 1982, *Spanwise Mixing in Axial-Flow Turbomachines*, Transactions of the ASME Journal of Engineering for Power, vol. 104, pp. 97-110.
- [6] Angot, P., Bruneau, C.H., Fabrie, P., 1999, *A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows*, Numer. Math., vol. 81, pp. 497-520.
- [7] Arquis, E., Caltagirone, J.P., 1984, *Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide - milieu poreux : application à la convection naturelle.*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 299, série II pp. 1-4.
- [8] Baldwin, B.S., Lomax, H., 1978, *Thin layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows*, AIAA Paper 78-257.
- [9] Baralon, S., 2000, *On Multistage Analysis of Transonic Compressor : From Axisymmetric Throughflow Time Marching to Unsteady Three Dimensional Methods*, Ph.D thesis, Chalmers University of Technology.
- [10] Bardoux, F., 2000, *Modélisation des interactions instationnaires rotor-stator en turbomachine multi-étages*, Ph.D thesis, Ecole centrale de Lyon.
- [11] Barrows, S.T., Balasubramian, R., Chen, J.P., 2009, *Investigation of Tip Clearance Modeling Techniques for a Transonic Compressor Rotor*, Proceedings of ASME Turbo Expo 2009, GT2009-60136, 8p.
- [12] Beyer, R.P., LeVeque, R.J., 1992, *Analysis of a One-dimensional Model for the Immersed Boundary Method*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 29, pp. 332-364.
- [13] Billson, M., Eriksson, L.E., Davidson, L., 2005, *Acoustic Terms for the Linearized Euler Equations in Conservative Form*, AIAA Journal, vol. 43, pp. 752-759.

- [14] Biros, G., Ying, L., Zorin, D., 2003, *A fast solver for the Stokes equations with distributed forces in complex geometries*, Journal of Computational Physics, vol. 193, pp. 317-348.
- [15] Boyd, J.P., 2001, *Chebyshev and Fourier spectral methods*, 2nd edition, Dover, New-York.
- [16] Burgos, M.A., Contreras, J., Corral, R., 2009, *Validation of an Efficient Unstructured Time-Domain Rotor/Stator Interaction Method*, ASME Paper GT2009-59385, 13p.
- [17] Callot, S., 2002, *Analyse des mécanismes macroscopiques produits par les interactions rotor/stator dans les turbomachines*, Ph.D thesis, Ecole centrale de Lyon.
- [18] Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A., Zang, T.A., 2007, *Spectral methods*, Springer Berlin Heidelberg, New-York.
- [19] Casey, M., Robinson, C., 2008, *A New Streamline Curvature Throughflow code for Radial Turbomachinery*, ASME Paper GT2008-50187, 12p.
- [20] Çetin, M., Üçer, A.S., Hirsch, C., Serovy, G.K., 1987, *Application of Modified Loss and Deviation Correlations to Transonic Axial Compressors*, AGARD R-745.
- [21] Charbonnier, D., Leboeuf, F., 2003, *Development of a model for the deterministic stresses in a transonic turbine stage*, Proceedings of the 5th European Conference on Turbomachinery, pp. 1197-1206.
- [22] Charbonnier, D., Leboeuf, F., Trébinjac, I., 2004, *Steady Simulation of Rotor-Stator Interactions With a New Unsteady Flow Model - Application to a Transonic Centrifugal Compressor Stage and an Axial Turbine Stage*, ASME Paper GT2004-53724.
- [23] Chen, T., Vasanthakumar, P., He, L., 2001, *Analysis of Unsteady Blade Row Interaction Using Nonlinear Harmonic Approach*, AIAA journal of Propulsion and Power, vol. 17, pp. 651-658.
- [24] Chiavassa, G., Donat, R., 2008, *A Penalization Technique for the Efficient Computation of Compressible Fluid Flow with Obstacles*, Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications, Springer Berlin Heidelberg, pp. 89-100.
- [25] Cho, Y., Chopra, J., 2007, *Immersed Boundary Method for Compressible High-Reynolds Number Viscous Flow around Moving Bodies*, Proceedings of the 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA, AIAA paper 2007-125, 14p.
- [26] Coirier, W.J., 1994, *An Adaptatively-Refined Cartesian Cell-Based Scheme for the Euler and Navier-Stokes Equations*, PhD Thesis, University of Michigan, USA.
- [27] Corral, R., Crespo, J., 2009, *A Hybrid Unstructured/Spectral Method for the Resolution of Navier-Stokes Equations*, Proceedings of ASME Turbo Expo, GT2009-59491, 10p.
- [28] Cumpsty, N.A., Horlock, J.H., 2005, *Averaging Non-Uniform Flow for a Purpose*, ASME Paper GT2005-68081, 14p.
- [29] Damle, S.V., Dang, T.Q., Reddy, D.R., 1997, *Throughflow method for turbomachines applicable for all flow regimes*, Journal of Turbomachinery, vol. 119, no. 2, pp. 256-262.

- [30] Dawes, W.N., 1992, *Toward Improved Throughflow Capability : The Use of Three-Dimensional Viscous Flow Solvers in a Multistage Environment*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 114, pp. 8-17.
- [31] Delanaye, M., 1998, *Polynomial Reconstruction Finite Volume Schemes for the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations on Unstructured Adaptative Grids*, PhD Thesis, Université de Liège.
- [32] Denton, J.D., 1986, *The Use of a Distributed Body Force to Simulate Viscous Effects in 3D Flow Calculations*, ASME Paper 86-GT-144, 8p.
- [33] Denton, J.D., 1993, *Loss Mechanisms in Turbomachines*, Journal of Turbomachinery, Vol. 115, pp. 621-656.
- [34] De Palma, P., de Tullio, M.D., Pascazio, G., Napolitano, M., 2006, *An Immersed-Boundary Method for Compressible Viscous Flows*, Computers & Fluids, vol. 35, pp. 693-702.
- [35] Drela, M., Merchant, A., Peraire, J., 2000, *Elimination of Spurious Loss in Euler Computations*, AIAA Journal, Vol. 38, No. 3, pp. 411-417.
- [36] Dring, R.P, 1993, *Radial Transport and Momentum Exchange in an Axial Compressor*, Transaction of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 115, pp. 477-486.
- [37] Ekici, K., Hall, K., 2007, *Nonlinear Analysis of Unsteady Flows in Multistage Turbomachines Using Harmonic Balance*, AIAA Journal, vol. 45, No. 5, pp. 1047-1057.
- [38] Fadlun, E.A., Verzicco, R., Orlandi, P., Mohd-Yusof, J., 2000, *Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations*, Journal of Computational Physics, vol. 161, pp. 35-60.
- [39] Gallimore, S.J., Cumpsty, N.A., 1986, *Spanwise Mixing in Multistage Axial Flow Compressors : Part I - Experimental Investigation*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 108, pp. 2-9.
- [40] Gallimore, S.J., 1986, *Spanwise Mixing in Multistage Axial Flow Compressors : Part II - Throughflow Calculations Including Mixing*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 108, pp. 10-16.
- [41] Gallimore, S.J., 1997, *Viscous Throughflow Modelling of Axial Compressor Blade Rows Using a Tangential Blade Force Hypothesis*, Proceedings of ASME Turbo Expo, 97-GT-415,10p.
- [42] Gerolymos, G.A., Michon, G.J., Neubauer, J., 2002, *Anaysis and Application of Chorochronic Periodicity in Turbomachinery Rotor/Stator Interaction Computations*, Journal of Propulsion and Power, vol. 18, No. 6, pp. 1139-1152.
- [43] Geuzaine, P., 1999, *An Implicit Finite Volume Method for Compressible Turbulent Flows on Unstructured Meshes*, PhD Thesis, Université de Liège.
- [44] Ghias, R., Mittal, R., Dong, H., 2007, *A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows*, Journal of Computational Physics, vol. 225, pp. 528-553.
- [45] Giles, M.B., 1990, *Nonreflecting Boundary Conditions for Euler Equation Calculations*, AIAA Journal, vol. 28, no. 12, pp. 2050-2058.

- [46] Gilmanov, A., Sotiropoulos, F., Balaras, E., 2003, *A general reconstruction algorithm for simulating flows with complex 3D immersed boundaries on Cartesian grids*, Journal of Computational Physics, vol. 191, pp. 660-669.
- [47] Giunta, G., Murli, A., 1987, *A Package for Computing Trigonometric Fourier Coefficients Based on Lyness's Algorithm*, ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 13, no. 1, pp. 97-107.
- [48] Glowinski, R., Kearsley, A.J., Pan, T.W., Periaux, J., 1995, *Fictitious Domain Methods for Viscous Flow Simulation*, Internal Report, Computational and Applied Mathematics Department, Rice University, 28p.
- [49] Godard, B., 2006, *Analyse de signaux vibratoires par ondelettes*, Licenciate Thesis, Université de Liège.
- [50] Godunov, S.K., 1959, *A Finite-Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics*, Math. Sbornik. Translated US Joint Publ. Res. Service, JPRS 7226.
- [51] Goldstein, D., Handler, R., Sirovich, L., 1993, *Modeling a No-Slip Flow Boundary with an External Force Field*, Journal of Computational Physics, vol. 3105, pp. 354-366.
- [52] Gong, Z.X., Huang, H.X., Lu, C.J., 2007, *Stability Analysis for the Immersed Boundary Method*, Proceedings of the Fifth International Conference on Fluid Mechanics, Shanghai, China, pp. 718-721.
- [53] Gourdain, N., 2005, *Simulation Numérique des Phénomènes de Décollement Tournant dans les Compresseurs Axiaux*, PhD Thesis, Ecole Centrale de Lyon.
- [54] Griffith, B.E., Peskin, C.S., 2005, *On the order of accuracy of the immersed boundary method : Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems*, Journal of Computational Physics, vol. 208, pp. 75-105.
- [55] Guy, R.D., Hartenstine, D.A., 2010, *On the accuracy of direct forcing immersed boundary methods with projection methods*, Journal of Computational Physics, vol. 229, pp. 2479-2496 .
- [56] Hall, E.J., 1997, *Aerodynamic Modeling of Multistage Compressor Flowfields - Part 1 : Analysis of Rotor/Stator/Rotor Aerodynamic Interaction*, ASME Paper 97-GT-344, 13p.
- [57] Hall, E.J., 1997, *Aerodynamic Modeling of Multistage Compressor Flowfields - Part 2 : Modeling Deterministic Stresses*, ASME Paper 97-GT-345, 15p.
- [58] Hall, K.C., Crawley, E.F., 2002, *Calculation of Unsteady Flows in Turbomachinery Using the Linearized Euler Equations*, AIAA Journal, vol. 27, pp. 777-787.
- [59] Hall, K.C., Clark, W.S., 1993, *Linearized Euler Predictions of Unsteady Aerodynamic Loads in Cascades*, AIAA Journal, vol. 31, pp. 540-550.
- [60] Hall, K.C., Thomas, J.P., Clark, W.S., 2002, *Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades Using a Harmonic Balance Technique*, AIAA Journal, vol. 40, pp. 879-886.
- [61] He, L., Ning, W., 1998, *Efficient Approach for Analysis of Unsteady Viscous Flows in Turbomachines*, AIAA journal, vol. 36, pp. 2005-2012.
- [62] He, L., 1999, *Nonlinear Time-Domain Aerodynamic Solutions*, VKI Lecture Series.

- [63] He, L., 1999, *Nonlinear Harmonic Aerodynamic Modelling*, VKI Lecture Series.
- [64] He, L., Chen, T., Wells, R.G., Li, Y.S., Ning, W., 2002, *Analysis of Rotor-Rotor and Stator-Stator Interferences in Multi-Stage Turbomachines*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 124, pp. 564-571.
- [65] He, L., Li, H.D., Rhie, C.M., Dong, Y., 2005, *Single-Passage Fourier Solution for Flow in Multi-Row Compressor Under Inlet Distortion*, Proceedings of the 17th ISABE Conference, 9p.
- [66] He, L., 2006, *Fourier Modeling of Steady and Unsteady Nonaxisymmetrical Flows*, Journal of Propulsion and Power, vol. 22, pp. 197-201.
- [67] Hembera, M., Johann, E., 2009, *Validation of the Non-Linear Harmonic Approach for Quasi-Unsteady Simulations in Turbomachinery*, ASME Paper GT2009-59933, 11p.
- [68] Hiernaux, S., Lebas, C., Brouckaert, J.F., Lepot, I., 2007, *The Next Generation Booster*, Proceedings of the 18th ISABE Conference.
- [69] Hirsch, C., Dring, R.P., 1987, *Through-Flow Models for Mass and Momentum-Averaged Variables*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 109, pp. 362-370.
- [70] Holmes, D.G., Tong, S.S., 1985, *A Three-Dimensional Euler Solver for Turbomachinery Blade Rows*, Transactions of the ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 107, pp. 258-264.
- [71] Horlock, J.H., Marsh, H., 1971, *Flow Models for Turbomachines*, Journal of Mechanical Engineering Sciences, vol. 13, No. 5, pp. 358-368.
- [72] Howard, M.A., Gallimore, S.J., 1993, *Viscous Throughflow Modeling for Multistage Compressor Design*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 115, pp. 296-304.
- [73] Hubbard, M.E., Garcia-Navarro, P., 2000, *Flux Difference Splitting and the Balancing of Source Terms and Flux Gradients*, Journal of Computational Physics, vol. 165, pp. 89-125.
- [74] Jennions, I.K., Stow, P., 1986, *The Importance of Circumferential Non-uniformities in a Passage-Averaged Quasi-Three-Dimensional Turbomachinery Design System*, Transactions of the ASME Journal of Engineering for Power, vol. 108, pp. 240-245.
- [75] Johnson, R.W., Adamczyk, J.J., 1989, *Kinetic Energy Equations for the Average-Passage Equation System*, Journal of Propulsion and Power, vol. 5, pp. 252-254.
- [76] Jung, E., Peskin, C.S., 2001, *Two-Dimensional Simulations of Valveless Pumping Using the Immersed Boundary Method*, SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 23, No. 1, pp. 19-45.
- [77] Kalitzin, G., Iaccarino, G., 2003, *Toward immersed boundary simulation of high Reynolds number flows*, Center fo Turbulence Research, Annual Research Briefs, pp. 369-378.
- [78] Keetels, G.H., Clercx, H.J.H., van Heijst, G.J.F., 2007, *Fourier Spectral Solver for the Incompressible Navier-Stokes Equations with Volume-Penalization*, Proceedings of the 7th international conference on Computational Science, Beijing, pp.898-905.

- [79] Keistler, P.G., 2008, *An Immersed Boundary Method for Supersonic Flow*, Proceedings of the 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA Paper 2008-529.
- [80] Kevlahan, N.K.R., Ghidaglia, J.M., 2001, *Computation of turbulent flow past an array of cylinders using a spectral method with Brinkmann penalization*, EUR. J. Mech. B - Fluids, vol. 20, pp. 333-350
- [81] Khadra, K., Angot, P., Parneix, S., Caltagirone, J.P., 2000, *Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier-Stokes equations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 34, pp. 651-684.
- [82] Khalighi, B., Jindal, S., Johnson, J.P., Chen, K.H., Iaccarino, G., 2008, *Validation of the Immersed Boundary CFD Approach for Complex Aerodynamic Flows*, The Aerodynamics of Heavy Vehicles II : Trucks, Buses, and Trains, Springer Berlin / Heidelberg, pp. 31-38.
- [83] Kim, J., Kim, D., Choi, H., 2001, *An Immersed-Boundary Finite-Volume Method for Simulations of Flow in Complex Geometries*, Journal of Computational Physics, vol. 171, pp. 132-150.
- [84] Kirtley, K.R., Turner, M.G., Saeidi, S., 1999, *An Average Passage Closure Model for General Meshes*, ASME Paper 99-GT-77, 15 p.
- [85] Kolomenskiy, D., Schneider, K., 2009, *A Fourier spectral method for the Navier-Stokes equations with volume penalization for moving solid obstacles*, Journal of Computational Physics, vol. 228, pp. 5687-5709.
- [86] Lacor, C., 2004, *Solution of Time Dependent Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations with the Finite Volume Method*, GraSMech course, Vrije Universiteit Brussel.
- [87] Lai, M.C., Peskin, C.S., 2000, *An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity*, Journal of Computational Physics, vol. 160, pp. 705-719.
- [88] Lamballais, E., 2003, *Simulation numérique des mouvements tourbillonnaires dans les fluides*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Poitier.
- [89] Le, D.V., Khoo, B.C., Lim, K.M., 2008, *An implicit-forcing immersed boundary method for simulating viscous flows in irregular domains*, Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 197, pp. 2119-2130.
- [90] Lee, C., 2003, *Stability characteristics of the virtual boundary method in three-dimensional applications*, Journal of Computational Physics, vol. 184, pp. 559-591.
- [91] Léonard, O., 1992, *Conception et développement d'une méthode inverse de type Euler et application à la génération de grilles d'aubes transsoniques.*, Ph.D thesis, Faculté Polytechnique de Mons et Institut von Karman.
- [92] Léonard, O., Borguet, S., Thomas, J.P., 2009, *Ten Years of Experience With a Small Jet Engine as a Support for Education*, Journal of Engineering for Gas Turbines & Power, vol. 131, 10p.
- [93] Li, Z., Lai, M.C., 2001, *The Immersed Interface Method for the Navier-Stokes Equations with Singular Forces*, Journal of Computational Physics, vol. 171, pp. 822-842.
- [94] Liu, Q., Vasilyev, O.V., 2007, *A Brinkman penalization method for compressible flows in complex geometries*, Journal of Computational Physics, vol. 227, pp. 946-966.

- [95] Madrane, A., 1998, *Nouvelles Constructions de Méthodes de Volumes/Eléments Finis pour les Ecoulements Transsoniques/Supersoniques Compressibles*, Thèse de Doctorat, Université de Montréal.
- [96] Mansour, M.L., 2007, *Validation of Steady Average-Passage and Mixing-Plane CFD Approaches for the Performance Prediction of a Modern Gas Turbine Multistage Axial Compressor*, Proceedings of the 18th ISABE Conference, 9p.
- [97] Maple, R.C., King, P.I., Orkwis P.D., 2003, *Split-Domain Harmonic Balance Solutions to Burger's Equation for Large-Amplitude Disturbances*, AIAA journal, vol. 41, No. 2, pp. 205-212.
- [98] Maple, R.C., King, P.I., Oxley, M.E., 2003, *Adaptive Harmonic Balance Solutions to Euler's Equation*, AIAA journal, vol. 41, pp. 1705-1714.
- [99] Maple, R.C., King, P.I., Orkwis P.D., Wolff, J.M., 2004, *Adaptive harmonic balance method for nonlinear time-periodic flows*, Journal of Computational Physics, vol. 193, pp. 620-641.
- [100] Margnat, F., 2005, *Méthode numérique hybride pour l'étude du rayonnement acoustique d'écoulements turbulents pariétaux*, Thèse de Doctorat, Université de Poitiers.
- [101] Margnat, F., Morinière, V., 2009, *Behaviour of an immersed boundary method in unsteady flows over sharp-edged bodies*, Computers & Fluids, vol. 38, pp. 1065-1079.
- [102] Mark, A., van Wachem, B.G.M., 2008, *Derivation and validation of a novel implicit second-order accurate immersed boundary method*, Journal of Computational Physics, vol. 227, pp. 6660-6680.
- [103] McMullen, M., Jameson, A., Alonso, J., 2006, *Demonstration of Nonlinear Frequency Domain Methods*, AIAA journal, vol. 44, pp. 1428-1435.
- [104] Mittal, R., Iaccarino, G., 2005, *Immersed Boundary Methods*, Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 37, pp. 239-261.
- [105] Mohd-Yusof, J., 1997, *Combined immersed-boundary/B-spline methods for simulations of flow in complex geometries*, CTR Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ., pp. 317-327.
- [106] Mohd-Yusof, J., 1998, *Development of immersed boundary methods for complex geometries*, CTR Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research ; NASA Ames/Stanford Univ., pp. 325-336.
- [107] Mori, Y., 2007, *Convergence Proof of the Velocity Field for a Stokes Flow Immersed Boundary Method*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 61, pp. 1213-1263.
- [108] Muldoon, F., Acharya, S., 2008, *A divergence-free interpolation scheme for the immersed boundary method*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 56, pp. 1845-1884.
- [109] Newren, E.P., Fogelson, A.L., Guy, R.D., Kirby, R.M., 2007, *Unconditionally stable discretizations of the immersed boundary equations*, Journal of Computational Physics, vol. 222, pp. 702-719.
- [110] Ning, W., He, L., 1998, *Computation of Unsteady Flows Around Oscillating Blades Using Linear and Nonlinear Harmonic Euler Methods.*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 120, pp. 508-514.

- [111] Olausson, M., Eriksson, L.E., Baralon, S., 2007, *Nonlinear Rotor Wake/Stator Interaction-Computations*, Proceedings of the 18th ISABE Conference, 8 p.
- [112] Orszag, S.A., Israeli, M., 1974, Annual Review of Fluid Mechanics, 6, 281.
- [113] Paccou, A., Chiavassa, G., Liandrat, J., Schneider, K., 2003, *A penalization method applied to the wave equation*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 329, 6p.
- [114] Pasquetti, R., Bwemba, R., Cousin, L., 2008, *A pseudo-penalized method for high Reynolds number unsteady flows*, Applied Numerical Mathematics, vol. 58, pp 946-954.
- [115] Patankar, N.A., 2001, *A formulation for fast computations of rigid particulate flows*, Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, pp. 185-196.
- [116] Perrin, G., Leboeuf, F., 1995, *Investigation of Throughflow Hypothesis in a Turbine Cascade Using a Three-Dimensional Navier-Stokes Computation*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 117, pp. 126-132.
- [117] Perrin, G., Leboeuf, F., 1995, *Modèles pour le calcul de fluctuations spatiales tridimensionnelles dans le cadre d'une approche méridienne en turbomachine*, Paper presented at the AGARD PEP 85th Symposium on “Loss Mechanisms and Unsteady Flows in Turbomachines”, held in Derby, United Kingdom.
- [118] Peskin, C.S., 1972, *Flow patterns around heart valves : a numerical method*, Journal of Computational Physics, vol. 10, pp. 252-271.
- [119] Peskin, C.S., 1977, *Numerical analysis of blood flow in the heart*, Journal of Computational Physics, vol. 25, pp. 220-252.
- [120] Peskin, C.S., 2002, *The immersed boundary method*, Acta Numerica, 11, pp. 1-39.
- [121] Petrovic, M.V., Wiedermann, A., Banjac, M.B., 2009, *Development and Validation of a New Universal Throughflow Method for Axial Compressors*, Proceedings of ASME Turbo Expo, ASME Paper GT2009-59938.
- [122] Pourquie, M., 2008, *Accuracy Close to the Wall for Large-Eddy Simulations of Flow Around Obstacles Using Immersed Boundary Methods*, Quality and Reliability of Large-Eddy Simulations, Springer Netherlands, pp. 205-212.
- [123] Rhie, C.M., Gleixner, A.J., Spear, D.A., Fischberg, C.J., Zacharias, R.M., 1995, *Development and Application of a Multistage Navier-Stokes Solver, Part I : Multistage Modelling Using Bodyforces and Deterministic Stresses*, ASME Paper 95-GT-342.
- [124] Roberts, W.B., Serovy, G.K., Sandercock, D.M., 1986, *Modeling the 3D Flow Effects on Deviation Angle for Axial Compressor Middle Stages*, Transactions of the ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 108, pp. 131-137.
- [125] Roberts, W.B., Serovy, G.K., Sandercock, D.M., 1988, *Design Point Variation of 3D Loss and Deviation for Axial Compressor Middle Stages*, ASME Paper 88-GT-57.
- [126] Roe, P.L., 1981, *Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes*, Journal of Computational Physics, vol. 43, pp. 357-372.
- [127] Roe, P.L., 1986, *Characteristic-based schemes for the Euler equations*, Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 18, pp. 337-365.

- [128] Saiki, E.M., Biringen, S., 1995, *Numerical Simulation of a Cylinder in Uniform Flow : Application of a Virtual Boundary Method*, Journal of Computational Physics, vol. 123, pp. 450-465.
- [129] Schneider, K., 2005, *Numerical simulation of the transient flow behaviour in chemical reactors using a penalisation method*, Computers & Fluids, vol. 34, pp. 1223-1238.
- [130] Schneider, K., Farge, M., 2005, *Numerical simulation of the transient flow behaviour in tube bundles using a penalisation method*, Journal of Fluids and Structures, vol. 20, pp. 555-566.
- [131] Sehra, A.K., Kerrebrock, J.L., 1979, *Blade-to-Blade Effects on Mean Flow in Transonic Compressors*, AIAA Journal, vol. 19, No. 4, pp. 476-483.
- [132] Seo, J.H., Moon, Y.J., 2006, *Linearized perturbed compressible equations for low Mach number aeroacoustics*, Journal of Computational Physics, vol. 218, pp 702-719.
- [133] Shin, S.J., Huang, W.H., Sung, H.J., 2009, *Assessment of Regularized Delta Functions and Feedback Forcing Schemes for an Immersed Boundary Method*, Computational Fluid Dynamics 2008, Springer Berlin Heidelberg, pp. 481-486.
- [134] Shizgal, B.D., Jung, J.H., 2003, *Towards the resolution of the Gibbs phenomena*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 161, pp 41-65.
- [135] Silva, L.E., Neto, A.S., Damasceno, J.J.R., 2003, *Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method*, Journal of Computational Physics, vol. 189, pp. 351-370.
- [136] Simon, J.F., 2007, *Contribution to Throughflow Modelling for Axial Flow Turbomachines*, Ph.D thesis, University of Liège.
- [137] Simon, J.F., Thomas, J.P., Léonard, O., 2009, *On the Role of the Deterministic and Circumferential Stresses in Throughflow Calculations*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 131, 12p.
- [138] Sjögreen, B., Petersson, A., 2007, *A Cartesian Embedded Boundary Method for Hyperbolic Conservation Laws*, Communications in Computational Physics, Vol. 2, No. 6, pp. 1199-1219.
- [139] Smith, L.H., 1966, *The Radial-Equilibrium Equation of Turbomachinery*, Transactions of the ASME Journal of Engineering for Power, Series A, Vol. 88, pp. 1-12.
- [140] Smith, L.H., 2002, *Axial Compressor Aerodesign Evolution at General Electric*, Journal of Turbomachinery, Vol. 124, pp. 321-330.
- [141] Speziale, C.G., 1996, *Modeling of turbulent transport equations*, In Hussaini, M.Y., Gatski, T.B., Lumley, J.L., editors, *Simulation and Modeling of Turbulent Flows*, ICASE/LaRC Series in Computational Science and Engineering, PP. 185-242, Oxford University Press.
- [142] Stridh, M., Eriksson, L.E., Hall, U., 2003, *Transfer of Unsteady and Non-Axisymmetric Effects in Throughflow Calculations*, Proceedings of the 16th ISABE Conference.
- [143] Stridh, M., Eriksson, L.E., 2005, *Modeling Unsteady Flow Effects in a 3D Transonic Compressor*, ASME Paper GT2005-68149.

- [144] Stridh, M., Eriksson, L.E., 2006, *Solving Harmonic Linear Problems in Unsteady Turbomachinery Flows Using a Preconditioned GMRES Solver*, ECOMAS.
- [145] Sturmayr, A., 2004, *Evolution of a 3D Structured Navier-Stokes Solver Towards Advanced Turbomachinery Applications*, Ph.D thesis, Vrije Universiteit Brussel.
- [146] Su, S.W., Lai, M.C., Lin, C.A., 2007, *An immersed boundary technique for simulating complex flows with rigid boundary*, Computers & Fluids, vol. 36, pp. 313-324.
- [147] Tadmor, E., Tanner, J., 2002, *Adaptative Mollifiers for High Resolution Recovery of Piecewise Smooth Data from its Spectral Information*, Foundations of Computational Mathematics, vol. 2, pp 155-189.
- [148] Tai, C.H., Sheu, J.H., van Leer, B., 1995, *Optimal Multistage Schemes for Euler Equations with Residual Smoothing*, AIAA Journal, vol. 33, No. 6, pp. 1008-1016.
- [149] Taira, K., Colonius, T., 2007, *The immersed boundary method : A projection approach*, Journal of Computational Physics, vol. 225, pp. 2118-2137.
- [150] Tseng, Y.H., Ferziger, J.H., 2003, *A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry*, Journal of Computational Physics, vol. 192, pp. 593-623.
- [151] Thomas, J.P., Léonard, O., 2008, *Investigating Circumferential Non-Uniformities in Throughflow Calculations Using an Harmonic Reconstruction*, ASME Paper GT2008-50328.
- [152] Thomas, J.P., Léonard, O., 2010, *Towards a High Order Throughflow. Part I : Investigating the Effectiveness of a Harmonic Reconstruction for 3D Flows*, ASME Paper GT2010-22841.
- [153] Thomas, J.P., Léonard, O., 2010, *Towards a High Order Throughflow. Part II : Investigation of the Nonlinear Harmonic Method Coupled with an Immersed Boundary Method for the Modeling of the Circumferential Stresses*, ASME Paper GT2010-22842.
- [154] Thomas, J.P., Léonard, O., 2012, *Towards a High Order Throughflow. Investigation of the Nonlinear Harmonic Method Coupled with an Immersed Boundary Method for the Modeling of the Circumferential Stresses*, Journal of Turbomachinery, vol. 134, no. 1, 9p.
- [155] Tornberg, A.K., Engquist, B., 2004, *Numerical Approximations of Singular Source Terms in Differential Equations*, Journal of Computational Physics, vol. 200, pp. 462-488.
- [156] Tullio, M.D., Iaccarino, G., 2005, *Immersed boundary technique for compressible flow simulations on semi-structured meshes*, Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, pp. 71-83.
- [157] Tullio, M.D., De Palma, P., Iaccarino, G., Pascazio, G., Napolitano, M., 2009, *Immersed boundary technique for compressible flow simulations on semi-structured grids*, Computational Fluid Dynamics 2006, Springer Berlin Heidelberg, pp. 365-370.
- [158] Uhlmann, M., 2005, *An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows*, Journal of Computational Physics, vol. 209, pp. 448-476.
- [159] Van Albada, G.D., Van Leer, B., Roberts, W.W., 1981, *A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics*, ICASE Report no. 81-24.

- [160] Vander Meulen, R., 2006, *The Immersed Boundary Method for the (2D) Incompressible Navier-Stokes Equations*, Master of Science Thesis, Delft University of Technology.
- [161] Vanella, M., Balaras, E., 2009, *A moving-least-squares reconstruction for embedded-boundary formulations*, Journal of Computational Physics, vol. 228, pp. 6617-6628.
- [162] Van Leer, B., 1977, *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, IV : A New Approach to Numerical Convection*, Journal of Computational Physics, vol. 23, pp. 276-299.
- [163] Verzicco, R., Mohd-Yusof, J., Orlandi, P., Haworth, D., 1998, *LES in complex geometries using boundary body forces*, Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program, pp. 171-186.
- [164] Vilmin, S., Lorrain, S., Hirsch, C., Swoboda, S., 2006, *Unsteady Flow Modeling Across The Rotor/Stator Interface Using The Nonlinear Harmonic Method*, ASME Paper GT2006-90210.
- [165] Vilmin, S., Lorrain, S., Hirsch, C., 2009, *Application of a Nonlinear Harmonic Method to the Simulation of Clocking Effects*, Proceedings of ASME Turbo Expo 2009, ASME Paper GT2009-59475.
- [166] Wang, Z., Fan, J., Luo, K., 2007, *Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles*, International Journal of Multiphase Flow, vol. 34, pp. 283-302.
- [167] Xu, L., Hynes, T.P., Denton, J.D., 2003, *Towards long length scale unsteady modelling in turbomachines*, Journal of Power and Energy, vol. 217, pp. 75-82.
- [168] Xu, L., 2003, *Assessing Viscous Body Forces for Unsteady Calculations*, Journal of Turbomachinery, vol. 125, pp. 425-432.
- [169] Yang, X., Zhang, X., Li, S., He, G.W., 2009, *A smoothing technique for discrete delta functions with application to immersed boundary method in moving boundary simulations*, Journal of Computational Physics, vol. 228, pp. 7821-7836.
- [170] Zhong, G., Sun, X., 2009, *New Simulation Strategy for an Oscillating Cascade in Turbomachinery using Immersed-Boundary Method*, Journal of Propulsion and Power, vol. 256, pp. 312-321.

Annexe A

Formulation des termes additionnels

La force des aubes, composante non-visqueuse, est calculée par extraction de la pression s'exerçant sur les aubes d'une roue en comportant un nombre N.

$$f_{bx} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[p \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_p^s$$

$$f_{br} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[p \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]_p^s$$

$$f_{b\theta} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[-\frac{p}{r} \right]_p^s$$

La force des aubes, composante visqueuse, est calculée par extraction des tensions visqueuses s'exerçant sur les aubes d'une roue en comportant un nombre N.

$$f_{vx} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[-\tau_{xx} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \tau_{rx} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta x}}{r} \right]_p^s$$

$$f_{vr} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[-\tau_{xr} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \tau_{rr} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta r}}{r} \right]_p^s$$

$$f_{v\theta} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[-\tau_{x\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \tau_{r\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right]_p^s$$

Les termes sources d'énergie sont calculés par extraction du flux de chaleur s'exerçant sur l'aube.

$$e_v = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[-q_x \frac{\partial \theta}{\partial x} - q_r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{q_\theta}{r} \right]_p^s$$

La composante non-visqueuse apparaît dans une roue mobile de vitesse de rotation Ω .

$$e_b = \Omega r f_{b\theta}$$

Annexe B

Le système méridien auxiliaire

Le système 3D pseudo-instationnaire aux perturbations circonférentielles est présenté à l'expression (B.1), dans un repère cylindrique (r, θ, x) . Ces équations sont décrites en fonction des grandeurs relatives, Ω étant la vitesse de rotation.

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}'}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{U}'}{\partial \theta} + \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{U}' = \frac{\partial \mathbf{F}'_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}'_v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}'_v}{\partial \theta} + \mathbf{L}'_v - (\mathbf{S}' - \mathbf{S}'_v) + \mathbf{f}' \quad (\text{B.1})$$

$\tilde{\mathbf{F}}$, $\tilde{\mathbf{G}}$ and $\tilde{\mathbf{H}}$ sont les matrices jacobiniennes axiale, radiale and azimutale. Elle ne dépendent que de l'écoulement moyen. $\tilde{\mathbf{L}}$ est la matrice jacobienne moyenne des termes sources cylindriques non-visqueux. \mathbf{S}' reprend les termes non-linéaires non-visqueux, \mathbf{S}'_v les termes non-linéaires visqueux. \mathbf{f}' est le vecteur de perturbation de la force obtenu par méthode de frontière immergée. \mathbf{F}'_v , \mathbf{G}'_v , \mathbf{H}'_v et \mathbf{L}'_v reprennent les termes visqueux linéaires.

$$\tilde{\mathbf{F}}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{\gamma-3}{2}\right) \tilde{V}_x^2 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \left(\tilde{V}_\theta^2 + \tilde{V}_r^2\right) \\ -\tilde{V}_x \tilde{V}_\theta \\ -\tilde{V}_x \tilde{V}_r \\ -\gamma \tilde{V}_x \tilde{E} + (\gamma-1) \tilde{V}_x \left(\tilde{V}_i^2 + \frac{\tilde{k}}{2}\right) \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{F}}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ (3-\gamma) \tilde{V}_x \\ \tilde{V}_\theta \\ \tilde{V}_r \\ \gamma \tilde{E} - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \left(2\tilde{V}_x^2 + \tilde{V}_i^2 + \tilde{k}\right) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{F}}}(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\gamma)\tilde{V}_\theta \\ \tilde{V}_x \\ 0 \\ (1-\gamma)\tilde{V}_x\tilde{V}_\theta \end{bmatrix} \quad \underline{\tilde{\mathbf{F}}}(4) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\gamma)\tilde{V}_r \\ 0 \\ \tilde{V}_x \\ (1-\gamma)\tilde{V}_x\tilde{V}_r \end{bmatrix} \quad \underline{\tilde{\mathbf{F}}}(5) = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma-1 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma\tilde{V}_x \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{G}}}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{V}_x\tilde{V}_r \\ -\tilde{V}_\theta\tilde{V}_r \\ \left(\frac{\gamma-3}{2}\right)\tilde{V}_r^2 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\left(\tilde{V}_\theta^2 + \tilde{V}_x^2\right) \\ -\gamma\tilde{V}_r\tilde{E} + (\gamma-1)\tilde{V}_r\left(\tilde{V}_i^2 + \frac{\tilde{k}}{2}\right) \end{bmatrix} \quad \underline{\tilde{\mathbf{G}}}(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{V}_r \\ 0 \\ (1-\gamma)\tilde{V}_x \\ (1-\gamma)\tilde{V}_x\tilde{V}_r \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{G}}}(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{V}_r \\ (1-\gamma)\tilde{V}_\theta \\ (1-\gamma)\tilde{V}_\theta\tilde{V}_r \end{bmatrix} \quad \underline{\tilde{\mathbf{G}}}(4) = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{V}_x \\ \tilde{V}_\theta \\ (3-\gamma)\tilde{V}_r \\ \gamma\tilde{E} - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\left(2\tilde{V}_r^2 + \tilde{V}_i^2 + \tilde{k}\right) \end{bmatrix} \quad \underline{\tilde{\mathbf{G}}}(5) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma-1 \\ \gamma\tilde{V}_r \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{H}}}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{V}_x\tilde{V}_\theta \\ \left(\frac{\gamma-3}{2}\right)\tilde{V}_\theta^2 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\left(\tilde{V}_x^2 + \tilde{V}_r^2\right) \\ -\tilde{V}_\theta\tilde{V}_r \\ -\gamma\tilde{V}_\theta\tilde{E} + (\gamma-1)\tilde{V}_\theta\left(\tilde{V}_i^2 + \frac{\tilde{k}}{2}\right) \end{bmatrix} \quad \underline{\tilde{\mathbf{H}}}(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{V}_\theta \\ (1-\gamma)\tilde{V}_x \\ 0 \\ (1-\gamma)\tilde{V}_x\tilde{V}_\theta \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{V}_x \\ (3 - \gamma) \tilde{V}_\theta \\ \tilde{V}_r \\ \gamma \tilde{E} - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \left(2\tilde{V}_\theta^2 + \tilde{V}_i^2 + \tilde{k}\right) \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{H}}(4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1 - \gamma) \tilde{V}_r \\ \tilde{V}_\theta \\ (1 - \gamma) \tilde{V}_\theta \tilde{V}_r \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{H}}(5) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma - 1 \\ 0 \\ \gamma \tilde{V}_\theta \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{L}}(1) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{V}_x \tilde{V}_r \\ -2\tilde{V}_r \tilde{V}_\theta \\ \tilde{V}_\theta^2 - \tilde{V}_r^2 - \Omega^2 r^2 \\ -\gamma \tilde{V}_r \tilde{E} + (\gamma - 1) \tilde{V}_r \left(\tilde{V}_i^2 + \frac{\tilde{k}}{2}\right) \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{L}}(2) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{V}_r \\ 0 \\ 0 \\ (1 - \gamma) \tilde{V}_x \tilde{V}_r \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{L}}(3) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\tilde{V}_r \\ -2\tilde{V}_\theta + 2\Omega r \\ (1 - \gamma) \tilde{V}_\theta \tilde{V}_r \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{L}}(4) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{V}_x \\ 2\tilde{V}_\theta - 2\Omega r \\ 2\tilde{V}_r \\ \gamma \tilde{E} - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \left(2\tilde{V}_r^2 + \tilde{V}_i^2 + \tilde{k}\right) - \Omega^2 r^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{L}}(5) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \tilde{V}_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}'(1) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'(2) &= \frac{\partial(\rho V''_x V''_x - \overline{\rho V''_x V''_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V''_r V''_x - \overline{\rho V''_r V''_x})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V''_\theta V''_x - \overline{\rho V''_\theta V''_x})}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{\partial(\rho V''_k V''_k - \overline{\rho V''_k V''_k})}{\partial x} + \frac{(\rho V''_r V''_x - \overline{\rho V''_r V''_x})}{r} \\ \mathbf{S}'(3) &= \frac{\partial(\rho V''_\theta V''_x - \overline{\rho V''_\theta V''_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V''_r V''_\theta - \overline{\rho V''_r V''_\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V''_\theta V''_\theta - \overline{\rho V''_\theta V''_\theta})}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{(\gamma - 1)}{2r} \frac{\partial(\rho V''_k V''_k - \overline{\rho V''_k V''_k})}{\partial \theta} + 2 \frac{(\rho V''_r V''_\theta - \overline{\rho V''_r V''_\theta})}{r} \\ \mathbf{S}'(4) &= \frac{\partial(\rho V''_r V''_x - \overline{\rho V''_r V''_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V''_r V''_r - \overline{\rho V''_r V''_r})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V''_\theta V''_r - \overline{\rho V''_\theta V''_r})}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{\partial(\rho V''_k V''_k - \overline{\rho V''_k V''_k})}{\partial r} - \frac{(\rho V''_\theta V''_\theta - \overline{\rho V''_\theta V''_\theta})}{r} + \frac{(\rho V''_r V''_r - \overline{\rho V''_r V''_r})}{r} \\ \mathbf{S}'(5) &= \frac{\partial(\rho V''_x H'' - \overline{\rho V''_x H''})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V''_r H'' - \overline{\rho V''_r H''})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V''_\theta H'' - \overline{\rho V''_\theta H''})}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{\partial(\widetilde{V}_j (\rho V''_k V''_k - \overline{\rho V''_k V''_k}))}{\partial s_j} + \frac{(1 - \gamma)}{2} \frac{(\widetilde{V}_r (\rho V''_k V''_k - \overline{\rho V''_k V''_k}))}{r} \\ &\quad + \frac{(\rho V''_r H'' - \overline{\rho V''_r H''})}{r} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}'_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau'_{xx} \\ \tau'_{x\theta} \\ \tau'_{xr} \\ \bar{\tau}_{xj} V''_j + \tau'_{xj} \widetilde{V}_j - q'_x \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}'_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau'_{rx} \\ \tau'_{r\theta} \\ \tau'_{rr} \\ \bar{\tau}_{rj} V''_j + \tau'_{rj} \widetilde{V}_j - q'_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}'_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau'_{\theta x} \\ \tau'_{\theta\theta} \\ \tau'_{\theta r} \\ \bar{\tau}_{\theta j} V''_j + \tau'_{\theta j} \widetilde{V}_j - q'_\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}'_v = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau'_{rx} \\ \tau'_{r\theta} \\ \tau'_{rr} \\ \bar{\tau}_{rj} V''_j + \tau'_{rj} \widetilde{V}_j - q'_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}'_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial(\tau'_{xj}V''_j - \overline{\tau'_{xj}V''_j})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau'_{rj}V''_j - \overline{\tau'_{rj}V''_j})}{\partial r} + \frac{\partial(\tau'_{\theta j}V''_j - \overline{\tau'_{\theta j}V''_j})}{\partial \theta} + \frac{(\tau'_{rj}V''_j - \overline{\tau'_{rj}V''_j})}{r} \end{bmatrix}$$

Annexe C

Le système méridien auxiliaire harmonique

Le système 2D pseudo-instationnaire aux perturbations circonférentielles exprimé dans l'espace fréquentiel est présenté à l'expression (C.1), dans les coordonnées méridiennes (x, r) .

$$\frac{\partial \mathbf{U}'_n}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}'_n}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}'_n}{\partial r} + \left(\frac{i\omega_n}{r} \tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{L}} \right) \mathbf{U}'_n = \frac{\partial \mathbf{F}'_{v,n}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}'_{v,n}}{\partial r} + \frac{i\omega_n}{r} \mathbf{H}'_{v,n} + \mathbf{L}'_{v,n} + \mathbf{f}'_n = 0 \quad (\text{C.1})$$

Il peut être scindé en deux sous-systèmes, l'un pour la partie réelle \mathbf{U}_n^{\Re} , l'autre pour la partie imaginaire \mathbf{U}_n^{\Im} .

$$\mathbf{U}'_n = \mathbf{U}_n^{\Re} + i\mathbf{U}_n^{\Im} \quad (\text{C.2})$$

Partie réelle

$$\frac{\partial \mathbf{U}_n^{\Re}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}_n^{\Re}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}_n^{\Re}}{\partial r} - \frac{\omega_n}{r} \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{U}_n^{\Im} + \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{U}_n^{\Re} = \frac{\partial \mathbf{F}_{v,n}^{\Re}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_{v,n}^{\Re}}{\partial r} - \frac{\omega_n}{r} \mathbf{H}_{v,n}^{\Im} + \mathbf{L}_{v,n}^{\Re} + \mathbf{f}_n^{\Re} = 0 \quad (\text{C.3})$$

Partie imaginaire

$$\frac{\partial \mathbf{U}_n^{\Im}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}_n^{\Im}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}_n^{\Im}}{\partial r} + \frac{\omega_n}{r} \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{U}_n^{\Re} + \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{U}_n^{\Im} = \frac{\partial \mathbf{F}_{v,n}^{\Im}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_{v,n}^{\Im}}{\partial r} + \frac{\omega_n}{r} \mathbf{H}_{v,n}^{\Re} + \mathbf{L}_{v,n}^{\Im} + \mathbf{f}_n^{\Im} = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_v^{\Re} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx}^{\Re} \\ \tau_{x\theta}^{\Re} \\ \tau_{xr}^{\Re} \\ \bar{\tau}_{xj} V_j^{\Re} + \tau_{xj}^{\Re} \tilde{V}_j - q_x^{\Re} \end{bmatrix} & \mathbf{G}_v^{\Re} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rx}^{\Re} \\ \tau_{r\theta}^{\Re} \\ \tau_{rr}^{\Re} \\ \bar{\tau}_{rj} V_j^{\Re} + \tau_{rj}^{\Re} \tilde{V}_j - q_r^{\Re} \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}_v^{\Re} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{\theta x}^{\Re} \\ \tau_{\theta \theta}^{\Re} \\ \tau_{\theta r}^{\Re} \\ \bar{\tau}_{\theta j} V_j^{\Re} + \tau_{\theta j}^{\Re} \tilde{V}_j - q_{\theta}^{\Re} \end{bmatrix} & \mathbf{L}_v^{\Re} &= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rx}^{\Re} \\ \tau_{r\theta}^{\Re} \\ \tau_{rr}^{\Re} \\ \bar{\tau}_{rj} V_j^{\Re} + \tau_{rj}^{\Re} \tilde{V}_j - q_r^{\Re} \end{bmatrix} \\
\tau_{xx}^{\Re} &= \bar{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial V_x^{\Re}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_r^{\Re}}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{V_r^{\Re}}{r} + \frac{\omega_n}{r} \frac{2}{3} V_{\theta}^{\Im} \right) \\
\tau_{x\theta}^{\Re} &= \bar{\mu} \left(-\frac{\omega_n}{r} V_x^{\Im} + \frac{\partial V_{\theta}^{\Re}}{\partial x} \right) \\
\tau_{xr}^{\Re} &= \bar{\mu} \left(\frac{\partial V_r^{\Re}}{\partial x} + \frac{\partial V_x^{\Re}}{\partial r} \right) \\
\tau_{\theta\theta}^{\Re} &= \bar{\mu} \left(-\frac{\omega_n}{r} \frac{4}{3} V_{\theta}^{\Im} + \frac{4}{3} \frac{V_r^{\Re}}{r} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_x^{\Re}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_r^{\Re}}{\partial r} \right) \\
\tau_{\theta r}^{\Re} &= \bar{\mu} \left(-\frac{\omega_n}{r} V_r^{\Im} + \frac{\partial V_{\theta}^{\Re}}{\partial r} - \frac{V_{\theta}^{\Re}}{r} \right) \\
\tau_{rr}^{\Re} &= \bar{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial V_r^{\Re}}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{V_r^{\Re}}{r} + \frac{\omega_n}{r} \frac{2}{3} V_{\theta}^{\Im} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_x^{\Re}}{\partial x} \right) \\
q_x^{\Re} &= -\frac{C_p \bar{\mu}}{\text{Pr}} \frac{\partial T^{\Re}}{\partial x} \\
q_{\theta}^{\Re} &= -\frac{C_p \bar{\mu}}{\text{Pr}} \frac{\partial T^{\Re}}{\partial r} \\
q_r^{\Re} &= \frac{C_p \bar{\mu}}{\text{Pr}} \frac{\omega_n}{r} T^{\Im}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_v^{\mathfrak{I}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx}^{\mathfrak{I}} \\ \tau_{x\theta}^{\mathfrak{I}} \\ \tau_{xr}^{\mathfrak{I}} \\ \bar{\tau}_{xj}V_j^{\mathfrak{I}} + \tau_{xj}^{\mathfrak{I}}\tilde{V}_j - q_x^{\mathfrak{I}} \end{bmatrix} & \mathbf{G}_v^{\mathfrak{I}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rx}^{\mathfrak{I}} \\ \tau_{r\theta}^{\mathfrak{I}} \\ \tau_{rr}^{\mathfrak{I}} \\ \bar{\tau}_{rj}V_j^{\mathfrak{I}} + \tau_{rj}^{\mathfrak{I}}\tilde{V}_j - q_r^{\mathfrak{I}} \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}_v^{\mathfrak{I}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{\theta x}^{\mathfrak{I}} \\ \tau_{\theta\theta}^{\mathfrak{I}} \\ \tau_{\theta r}^{\mathfrak{I}} \\ \bar{\tau}_{\theta j}V_j^{\mathfrak{I}} + \tau_{\theta j}^{\mathfrak{I}}\tilde{V}_j - q_{\theta}^{\mathfrak{I}} \end{bmatrix} & \mathbf{L}_v^{\mathfrak{I}} &= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rx}^{\mathfrak{I}} \\ \tau_{r\theta}^{\mathfrak{I}} \\ \tau_{rr}^{\mathfrak{I}} \\ \bar{\tau}_{rj}V_j^{\mathfrak{I}} + \tau_{rj}^{\mathfrak{I}}\tilde{V}_j - q_r^{\mathfrak{I}} \end{bmatrix} \\
\tau_{xx}^{\mathfrak{I}} &= \bar{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial V_x^{\mathfrak{I}}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_r^{\mathfrak{I}}}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{V_r^{\mathfrak{I}}}{r} - \frac{\omega_n}{r} \frac{2}{3} V_{\theta}^{\mathfrak{R}} \right) \\
\tau_{x\theta}^{\mathfrak{I}} &= \bar{\mu} \left(\frac{\omega_n}{r} V_x^{\mathfrak{R}} + \frac{\partial V_{\theta}^{\mathfrak{I}}}{\partial x} \right) \\
\tau_{xr}^{\mathfrak{I}} &= \bar{\mu} \left(\frac{\partial V_r^{\mathfrak{I}}}{\partial x} + \frac{\partial V_x^{\mathfrak{I}}}{\partial r} \right) \\
\tau_{\theta\theta}^{\mathfrak{I}} &= \bar{\mu} \left(\frac{\omega_n}{r} \frac{4}{3} V_{\theta}^{\mathfrak{R}} + \frac{4}{3} \frac{V_r^{\mathfrak{I}}}{r} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_x^{\mathfrak{I}}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_r^{\mathfrak{I}}}{\partial r} \right) \\
\tau_{\theta r}^{\mathfrak{I}} &= \bar{\mu} \left(\frac{\omega_n}{r} V_r^{\mathfrak{R}} + \frac{\partial V_{\theta}^{\mathfrak{I}}}{\partial r} - \frac{V_{\theta}^{\mathfrak{I}}}{r} \right) \\
\tau_{rr}^{\mathfrak{I}} &= \bar{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial V_r^{\mathfrak{I}}}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{V_r^{\mathfrak{I}}}{r} - \frac{\omega_n}{r} \frac{2}{3} V_{\theta}^{\mathfrak{R}} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_x^{\mathfrak{I}}}{\partial x} \right) \\
q_x^{\mathfrak{I}} &= -\frac{C_p \bar{\mu}}{\text{Pr}} \frac{\partial T^{\mathfrak{I}}}{\partial x} \\
q_{\theta}^{\mathfrak{I}} &= -\frac{C_p \bar{\mu}}{\text{Pr}} \frac{\partial T^{\mathfrak{I}}}{\partial r} \\
q_r^{\mathfrak{I}} &= -\frac{C_p \bar{\mu}}{\text{Pr}} \frac{\omega_n}{r} T^{\mathfrak{R}}
\end{aligned}$$

Annexe D

Expression des flux axisymétriques de Roe

Les flux $f(U_L, U_R)$ sont obtenus par l'expression (D.1).

$$f(U_L, U_R) = \frac{1}{2} [f(U_L) + f(U_R)] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 |\lambda_i| r_i \delta W_i \quad (\text{D.1})$$

où λ_i sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de l'écoulement méridien, r_i les vecteurs propres à droite de la matrice jacobienne et δW_i l'intensité des ondes.

La matrice jacobienne est en fait la matrice jacobienne moyenne des états gauche et droit. Les moyennes de Roe des grandeurs utiles sont reprises ci-dessous.

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{\rho^R}{\rho^L}} & \tilde{H} &= \frac{RH^R + H^L}{R+1} \\ \tilde{\rho} &= R\rho^L & \tilde{t} &= \frac{Rt^R + t^L}{R+1} \\ \tilde{V}_x &= \frac{RV_x^R + V_x^L}{R+1} & \tilde{k} &= \frac{Rk^R + k^L}{R+1} \\ \tilde{V}_r &= \frac{RV_r^R + V_r^L}{R+1} & \tilde{a} &= \sqrt{\gamma \tilde{t}} \\ \tilde{V}_\theta &= \frac{RV_\theta^R + V_\theta^L}{R+1} & \tilde{V}_n &= \tilde{V}_x n_x + \tilde{V}_r n_r \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice jacobienne moyenne sont les suivantes.

$$\lambda_1 = \tilde{V}_n \quad \lambda_2 = \tilde{V}_n \quad \lambda_3 = \tilde{V}_n \quad \lambda_4 = \tilde{V}_n + \tilde{a} \quad \lambda_5 = \tilde{V}_n - \tilde{a}$$

Les vecteurs propres à droites r_i sont formulés ci-dessous.

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{V}_x \\ \tilde{V}_\theta \\ \tilde{V}_r \\ \frac{1}{2} (\tilde{V}_x^2 + \tilde{V}_\theta^2 + \tilde{V}_r^2 + \tilde{k}) \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\rho} n_r \\ 0 \\ -\tilde{\rho} n_x \\ \tilde{\rho} (\tilde{V}_x n_r - \tilde{V}_r n_x) \end{bmatrix} \quad r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{\rho} \tilde{V}_\theta \end{bmatrix}$$

$$r_4 = \frac{\tilde{\rho}}{2\tilde{a}} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{V}_x + \tilde{a} n_x \\ \tilde{V}_\theta \\ \tilde{V}_r + \tilde{a} n_r \\ \tilde{H} + \tilde{a} \tilde{V}_n \end{bmatrix} \quad r_5 = \frac{\tilde{\rho}}{2\tilde{a}} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{V}_x - \tilde{a} n_x \\ \tilde{V}_\theta \\ \tilde{V}_r - \tilde{a} n_r \\ \tilde{H} - \tilde{a} \tilde{V}_n \end{bmatrix}$$

Les intensités des ondes δW_i sont reprises ci-dessous.

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= \delta \rho - \frac{\delta p}{\tilde{a}^2} \\ \delta W_2 &= \delta V_x n_r - \delta V_r n_x \\ \delta W_3 &= \delta V_\theta \\ \delta W_4 &= \frac{\delta p}{\tilde{\rho} \tilde{a}} + \delta V_x n_x + \delta V_r n_r \\ \delta W_5 &= \frac{\delta p}{\tilde{\rho} \tilde{a}} - \delta V_x n_x - \delta V_r n_r \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \delta \rho &= \rho^R - \rho^L \\ \delta V_x &= V_x^R - V_x^L \\ \delta V_\theta &= V_\theta^R - V_\theta^L \\ \delta V_r &= V_r^R - V_r^L \\ \delta p &= p^R - p^L \end{aligned}$$

Annexe E

Schéma de reconstruction MUSCL

Le schéma de reconstruction MUSCL (*Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws*) développé par Van Leer [162] est détaillé ci-dessous, pour un maillage quelconque.

$$u_{i+\frac{1}{2}}^L = u_i + \frac{\Delta x}{4\bar{\Delta x}} \left[(u_i - u_{i-1}) \left(\frac{1 + \frac{\epsilon}{2} - \kappa \frac{\Delta x_i}{\bar{\Delta x}}}{1 - \frac{\epsilon}{2}} \right) + (u_{i+1} - u_i) \left(\frac{1 - \frac{\epsilon}{2} + \kappa \frac{\Delta x_i}{\bar{\Delta x}}}{1 + \frac{\epsilon}{2}} \right) \right] \quad (\text{E.1})$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^R = u_i - \frac{\Delta x}{4\bar{\Delta x}} \left[(u_i - u_{i-1}) \left(\frac{1 + \frac{\epsilon}{2} + \kappa \frac{\Delta x_i}{\bar{\Delta x}}}{1 - \frac{\epsilon}{2}} \right) + (u_{i+1} - u_i) \left(\frac{1 - \frac{\epsilon}{2} - \kappa \frac{\Delta x_i}{\bar{\Delta x}}}{1 + \frac{\epsilon}{2}} \right) \right] \quad (\text{E.2})$$

avec

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_i - \frac{\Delta x_i}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x_i}{2}} u(x) dx \\ \bar{\Delta x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2} + \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{2} \right) \\ \epsilon &= \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}} - \Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{\bar{\Delta x}} \\ \Delta x_i &= x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Annexe F

Interpolation dans le cadre du schéma en diamant

Pour l'évaluation des gradients aux faces des volumes finis par l'utilisation du schéma en diamant, il est nécessaire de connaître les valeurs aux sommets de ces faces. La valeur q_0 au point 0 est déterminée par interpolation linéaire entre les valeurs q_i des 4 noeuds voisins, par la formule (F.1).

$$q_0 = \frac{\sum_{i=1}^4 w_i q_i}{\sum_{i=1}^4 w_i} \quad (\text{F.1})$$

Les poids w_i sont obtenues par l'expression (F.2) en fonction des distances d_i entre le point 0 et les noeuds voisins.

$$w_i = \frac{1}{d_i} + \lambda_x (x_0 - x_i) + \lambda_y (y_0 - y_i) \quad (\text{F.2})$$

avec les multiplicateurs lagrangiens donnés par les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \frac{I_{xy}R_y - I_{yy}R_x}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2} \\ \lambda_y &= \frac{I_{xy}R_x - I_{xx}R_y}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 R_x &= \sum_{i=1}^4 (x_i - x_0) \\
 R_y &= \sum_{i=1}^4 (y_i - y_0) \\
 I_{xx} &= \sum_{i=1}^4 (x_i - x_0)^2 \\
 I_{yy} &= \sum_{i=1}^4 (y_i - y_0)^2 \\
 I_{xy} &= \sum_{i=1}^4 (x_i - x_0)(y_i - y_0)
 \end{aligned}$$

Annexe G

Calcul des tensions circonférentielles

Les tensions circonférentielles relatives au domaine externe à l'obstacle, que nous appelons tensions relatives au fluide (indice f), peuvent être déduites des tensions circonférentielles relatives au domaine complet (externe et interne), que nous appellerons tensions relatives au domaine immergé (indice i).

Soit le domaine circonférentiel fluide $\Omega_f = [\theta_p, \theta_s]$ inclus dans le domaine circonférentiel $\Omega_i = [0, \frac{2\pi}{N}]$.

La relation entre les moyennes sur chacun des domaines peut être déduite.

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}^f &= \frac{N}{2\pi b} \int_{\Omega_f} \phi \, d\theta \\
 &= \frac{N}{2\pi b} \left[\int_{\Omega_i} \phi \, d\theta - \int_{\Omega_i - \Omega_f} \phi \, d\theta \right] \\
 &= \frac{\bar{\phi}^i}{b} - \frac{N}{2\pi b} \int_{\Omega_i - \Omega_f} \phi \, d\theta
 \end{aligned} \tag{G.1}$$

où b est le facteur de blocage et N le nombre de d'aubes.

Dès lors, la cascade de relation suivantes peut être établie.

$$\overline{\rho\phi''_f\psi''_f}^f = \overline{\rho\phi\psi}^f - \tilde{\rho}^f \tilde{\phi}^f \tilde{\psi}^f \tag{G.2}$$

$$\overline{\rho\phi\psi}^f = \frac{\overline{\rho\phi\psi}^i}{b} - \frac{N}{2\pi b} \int_{\Omega_i - \Omega_f} \rho\phi\psi \, d\theta \tag{G.3}$$

$$\overline{\rho\phi\psi}^i = \overline{\rho\phi''_i\psi''_i}^i + \tilde{\rho}^i \tilde{\phi}^i \tilde{\psi}^i \tag{G.4}$$

L'intégrale du triple produit $\rho\phi\psi$ sur le domaine $\Omega_i - \Omega_f$ est effectuée dans le domaine fréquentiel, en intégrant le produit des variables conservative et primitive $(\rho\phi)\psi$, cette dernière étant obtenue par la relation linéaire (G.5).

$$\psi = \tilde{\psi} + \frac{(\rho\psi)' - \rho'\tilde{\psi}}{\bar{\rho}} \quad (\text{G.5})$$

Soient les séries de Fourier (G.6) et (G.7).

$$\rho\phi = a_0 + 2 \sum_n [a_n \cos(\omega_n \theta) - b_n \sin(\omega_n \theta)] \quad (\text{G.6})$$

$$\psi = c_0 + 2 \sum_n [c_n \cos(\omega_n \theta) - d_n \sin(\omega_n \theta)] \quad (\text{G.7})$$

L'intégrale peut être calculée par la somme suivante.

$$\begin{aligned}
\int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho\phi) \psi \, d\theta &= a_0 c_0 (\theta_2 - \theta_1) \\
&+ 2a_0 \sum_m \left[\frac{c_m}{\omega_m} \{ \sin(\omega_m \theta_2) - \sin(\omega_m \theta_1) \} \right] \\
&+ 2a_0 \sum_m \left[\frac{d_m}{\omega_m} \{ \cos(\omega_m \theta_2) - \cos(\omega_m \theta_1) \} \right] \\
&+ 2c_0 \sum_n \left[\frac{a_n}{\omega_n} \{ \sin(\omega_n \theta_2) - \sin(\omega_n \theta_1) \} \right] \\
&+ 2c_0 \sum_n \left[\frac{b_n}{\omega_n} \{ \cos(\omega_n \theta_2) - \cos(\omega_n \theta_1) \} \right] \\
&+ 4 \sum_n \sum_m a_n c_m \left[\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \frac{\sin(2\omega_n \theta_2) - \sin(2\omega_n \theta_1)}{4\omega_n} \right], \quad \omega_n = \omega_m \\
&+ 4 \sum_n \sum_m a_n c_m \left[\frac{\sin(\omega_n - \omega_m) \theta_2 - \sin(\omega_n - \omega_m) \theta_1}{2(\omega_n - \omega_m)} \right], \quad \omega_n \neq \omega_m \\
&+ 4 \sum_n \sum_m a_n c_m \left[\frac{\sin(\omega_n + \omega_m) \theta_2 - \sin(\omega_n + \omega_m) \theta_1}{2(\omega_n + \omega_m)} \right], \quad \omega_n \neq \omega_m \\
&+ 4 \sum_n \sum_m a_n d_m \left[\frac{-\sin^2(\omega_n \theta_2) + \sin^2(\omega_n \theta_1)}{2\omega_n} \right], \quad \omega_n = \omega_m \\
&+ 4 \sum_n \sum_m a_n d_m \left[\frac{\cos(\omega_m - \omega_n) \theta_2 - \cos(\omega_m - \omega_n) \theta_1}{2(\omega_m - \omega_n)} \right], \quad \omega_n \neq \omega_m \\
&+ 4 \sum_n \sum_m a_n d_m \left[\frac{\cos(\omega_m + \omega_n) \theta_2 - \cos(\omega_m + \omega_n) \theta_1}{2(\omega_m + \omega_n)} \right], \quad \omega_n \neq \omega_m \\
&+ 4 \sum_n \sum_m b_n c_m \left[\frac{-\sin^2(\omega_n \theta_2) + \sin^2(\omega_n \theta_1)}{2\omega_n} \right], \quad \omega_n = \omega_m \\
&+ 4 \sum_n \sum_m b_n c_m \left[\frac{\cos(\omega_n - \omega_m) \theta_2 - \cos(\omega_n - \omega_m) \theta_1}{2(\omega_n - \omega_m)} \right], \quad \omega_n \neq \omega_m \\
&+ 4 \sum_n \sum_m b_n c_m \left[\frac{\cos(\omega_n + \omega_m) \theta_2 - \cos(\omega_n + \omega_m) \theta_1}{2(\omega_n + \omega_m)} \right], \quad \omega_n \neq \omega_m \\
&+ 4 \sum_n \sum_m b_n d_m \left[\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} - \frac{\sin(2\omega_n \theta_2) - \sin(2\omega_n \theta_1)}{4\omega_n} \right], \quad \omega_n = \omega_m \\
&+ 4 \sum_n \sum_m b_n d_m \left[\frac{\sin(\omega_n - \omega_m) \theta_2 - \sin(\omega_n - \omega_m) \theta_1}{2(\omega_n - \omega_m)} \right], \quad \omega_n \neq \omega_m \\
&- 4 \sum_n \sum_m b_n d_m \left[\frac{\sin(\omega_n + \omega_m) \theta_2 - \sin(\omega_n + \omega_m) \theta_1}{2(\omega_n + \omega_m)} \right], \quad \omega_n \neq \omega_m
\end{aligned}$$