

# Comportement des articulations flexibles à col elliptique

Jean-François Debongnie

ULg, LTAS/LMF

February 27, 2012

# Articulations flexibles : avantages et inconvénients

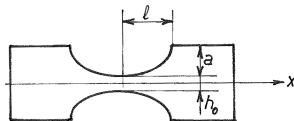
- Absence de jeu
- Absence de frottement, donc
  - Pas d'hystérésis
  - Pas de particules d'usure
- MAIS course limitée.

## *Applications:*

- Métrologie
- Micromécanique
- Micropompes d'injection de fluides dans le corps humain

*Pour les concevoir, on a besoin d'un modèle de leur raideur sous différentes sollicitations.*

# Description géométrique



Posant

$$x = l \sin \varphi$$

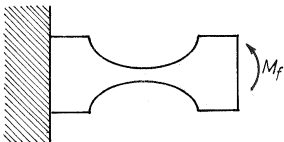
on a

$$\begin{aligned} h(x) &= h_0 + 2a - 2a \cos \varphi = 2a \left[ \left( 1 + \frac{h_0}{2a} \right) - \cos \varphi \right] \\ &= \frac{2a}{\varepsilon} (1 - \varepsilon \cos \varphi) \end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{h_0}{2a}}$$

## Moment de flexion constant dans le plan



$$\alpha = \frac{12M_f}{Eb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h^3}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h^3} = \frac{\varepsilon^3 \ell}{8a^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} d\varphi = \frac{\varepsilon^3 \ell}{4a^3} I_1(\varepsilon)$$

avec

$$I_1(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} d\varphi$$

Ainsi,

$$\frac{\alpha}{M_f} = \frac{3}{Eb} \frac{\ell}{a^3} \varepsilon^3 I_1(\varepsilon)$$

## Calcul exact de $l_1(\varepsilon)$

*Changement de variables de Sommerfeld (cf. lubrification)*

$$\cos \varphi = \frac{\cos \omega + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \omega}$$

$$\varphi = 0 \quad \leftrightarrow \quad \omega = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \leftrightarrow \quad \omega = \omega^* = \arccos(-\varepsilon)$$

Le calcul donne

$$l_1(\varepsilon) = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{3\varepsilon}{2} \omega^* \right]$$

*... un peu compliqué !*

## Expression asymptotique pour $h_0/a \ll 1$

On a alors

$$\varepsilon \approx 1, \quad 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \approx \frac{3}{2}, \quad \omega^* \approx \pi$$

ce qui donne

$$I_{1,as} = \left( \frac{a}{h_0} \right)^{5/2} \cdot \frac{3}{2} \pi$$

et, par conséquent,

$$\left( \frac{\alpha}{M_f} \right)_{as} = \frac{9\pi}{2Eb} \frac{\ell}{a} \frac{\sqrt{a}}{h_0^{5/2}}$$

Dans le cas du col circulaire ( $\ell = a$ ), la même expression a été obtenue par Paros et Weisbord (1965)

## Expression approchée dans le cas général

On se propose d'écrire

$$\frac{\alpha}{M_f} = \left( \frac{\alpha}{M_f} \right)_{as} \cdot \frac{1}{K_1(h_0/a)}$$

où  $K_1(h_0/a)$  a pour définition

$$K_1 = \frac{\frac{3\pi}{2} \left( \frac{a}{h_0} \right)^{5/2}}{\varepsilon^3 I_1}$$

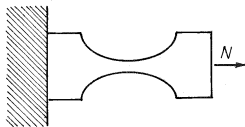
Ajustement des valeurs numériques pour  $h_0/a \leq 0,5 \rightarrow$  approximation simple de  $K_1$ :

$$K_{1,app} = 1 + 0,136 \frac{h_0}{a}$$

*erreur relative* : 0,08%

Ceci fournit une méthode simple de calcul.

Extension



$$u = \frac{N}{Eb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h} = \frac{\ell \varepsilon}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} d\varphi = \frac{\ell}{a} I_2(\varepsilon) \Rightarrow \frac{u}{N} = \frac{1}{Eb} \frac{\ell}{a} I_2(\varepsilon)$$

Valeur exacte

$$I_2(\varepsilon) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\omega^*}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Expression asymptotique

$$\left(\frac{u}{N}\right)_{as} = \frac{1}{Eb} \frac{\ell}{a} \pi \sqrt{\frac{a}{h_0}}$$

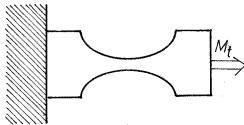
Expression approchée

$$\frac{u}{N} = \left(\frac{u}{N}\right)_{as} \cdot \frac{1}{K_2} \quad \text{avec} \quad K_2 \approx 1 + 0,97 \sqrt{\frac{h_0}{a}}$$

Erreur relative: 1,62%



Torsion



$$\psi = \frac{3M_t}{Gb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h^3} = \frac{3}{4} \frac{M_t}{Gb} \frac{\varepsilon^3 \ell}{a^3} I_1(\varepsilon)$$

Même intégrale qu'en flexion, donc

$$\frac{\psi}{M_t} = \frac{9\pi}{8Gb} \frac{\ell}{a} \frac{\sqrt{a}}{h_0^{5/2}} \frac{1}{K_1}$$

## Flexion transverse sous moment constant $M_{fT}$

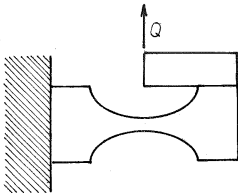
La rotation d'extrémité  $\beta$  se calcule par

$$\beta = \frac{12M_{fT}}{Eb^3} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dx}{h}$$

Même intégrale qu'en traction, donc

$$\frac{\beta}{M_{fT}} = \frac{12\pi}{Eb^3} \frac{\ell}{a} \frac{1}{K_2}$$

## Translation pure d'une extrémité dans le plan



$$M_f = -Qx$$

Déformée = terme de flexion  $v_f$  + terme de cisaillement  $v_c$ , à évaluer séparément:

$$v = v_f + v_c$$

## Terme de flexion $v_f$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{12M_f}{Ebh^3} = -\frac{12Qx}{Ebh^3}$$

$$\begin{aligned} v_f &= \int_{-\ell}^{\ell} \alpha dx = [x\alpha]_{-\ell}^{\ell} - \int_{-\ell}^{\ell} x \frac{d\alpha}{dx} dx = - \int_{-\ell}^{\ell} x \frac{d\alpha}{dx} dx \\ &= \frac{12Q}{Eb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{x^2}{h^3} dx = \frac{3Q}{Eb} \frac{\ell^3 \varepsilon^3}{a^3} I_3(\varepsilon) \end{aligned}$$

avec

$$I_3(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^3} d\varphi$$

Valeur exacte (calcul un peu long):

$$\begin{aligned} I_3(\varepsilon) = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} & \left[ \frac{1}{2\varepsilon} \left( \omega^* - \frac{\sin 2\omega^*}{2} \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{\varepsilon} \left( \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\omega^*}{\varepsilon} - \sin \omega^* \right) + \left( \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\pi}{2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right] \end{aligned}$$

## Expression asymptotique

$$\left(\frac{v_f}{Q}\right)_{as} = \frac{3\pi}{Eb} \left(\frac{\ell}{a}\right)^3 \left(\frac{a}{h_0}\right)^{3/2}$$

## Expression approchée

$$\frac{v_f}{Q} = \left(\frac{v_f}{Q}\right)_{as} \frac{1}{K_3}$$

avec

$$K_{3,app} = 1 + 1,40 \frac{h_0}{a}$$

Erreur relative: 0,9%

## Terme de cisaillement

$$\frac{v_c}{Q} = \frac{1}{\frac{5}{6}Eb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h} = \frac{6}{5Eb} \frac{\ell}{a} I_2(\varepsilon) = \frac{1}{K_2} \frac{6\pi}{5Eb} \frac{\ell}{a} \sqrt{\frac{a}{h_0}}$$

Généralement, cette contribution  $\propto (a/h_0)^{1/2}$  est petite devant  $v_f \propto (a/h_0)^{3/2}$ .

## Translation pure hors plan

Même raisonnement, avec charge  $R$  et déplacement d'extrémité  $w$ .

$$\left(\frac{w_f}{R}\right)_{as} = \frac{12\ell^3}{Eb^3} \frac{\ell}{a} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{w_f}{R} = \left(\frac{w_f}{R}\right)_{as} \frac{1}{K_4}$$

$$K_{4,app} = 1 + 1,726 \sqrt{\frac{h_0}{a}} \left(1 + \sqrt{\frac{h_0}{a}}\right)$$

*Erreur relative* : 0,6%.

$$\frac{w_c}{R} = \frac{1}{K_2} \frac{6\pi}{5Eb} \frac{\ell}{a} \sqrt{\frac{a}{h_0}}$$

On notera que

$$\frac{w_c}{w_f} = \frac{K_4}{17,85K_2} \left(\frac{b}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{a}{h_0}}$$

n'est généralement pas petit devant l'unité.

# Conclusions

- Nos résultats permettent de traiter toutes les solutions du col : flexion simple = flexion pure ( $M_f = cte$ ) + translation pure ( $M_f = linéaire$ ).
- Pour chaque cas, nous avons dégagé la solution générale, la solution asymptotique et une *solution approchée originale et très simple*.
- Nos résultats constituent un outil très efficace au niveau de la conception.