

N-31/93/MM

**Morphologie à seuillage : application au
lissage des formes**

Marc Van Droogenbroeck

CMM

25 Mars 1993

Morphologie à seuillage: application au lissage des formes

Marc Van Droogenbroeck

25 mars 1993

Table des matières

1	Introduction	1
2	Opérations élémentaires sur des signaux binaires	4
2.1	Erosion partielle	4
2.2	Dilatation partielle	6
2.3	Correspondance entre les opérations d'érosion partielle et de dilatation partielle	7
2.4	Etude des propriétés de l'érosion et de la dilatation partielles	8
2.4.1	L'invariance en translation, la croissance des opérations partielles et propriétés associées	9
2.4.2	Comportement sous l'intersection et l'union	11
2.5	Les opérateurs composés: ouverture et fermeture partielles	19
2.5.1	Définitions	19
2.5.2	Propriétés	20
3	Deux illustrations: détection des pointes d'un objet binaire et filtrage des contours	21
3.1	Introduction	21
3.2	Détection des pointes d'un objet binaire	22
3.2.1	Gradient partiel	22
3.2.2	Recherche des coins d'une figure	22
3.3	Algorithmes de filtrage des contours	23
4	Opérations partielles sur des images en niveaux de gris	26
4.1	Définitions	27
5	Ajout d'une pseudo-dimension: la notion de volume	28
5.1	Introduction à la notion de volume	28
5.2	Définition des opérations partielles volumiques	29
5.3	Propriété	30
5.4	Les filtres partiels volumiques	30
6	Vers le concept de polymorphisme d'un point	30
7	Conclusions	31

Résumé

La morphologie mathématique englobe différentes techniques de filtrage aussi variées qu'originales. Parmi l'imposante panoplie des filtres se distinguent ceux qui sont nés de la *morphologie à seuillage*, encore appelée *morphologie floue*, très en vogue à l'heure actuelle. Ce document s'inscrit dans ce courant. Nous y définissons le *concept central d'érosion partielle*, simple transcription d'une opération déjà connue, pour l'étendre ensuite aux notions de dilatation, d'ouverture et de fermeture partielles. A l'inverse des développements récents en ce domaine, c'est l'*aspect géométrique* qui y tient le haut du pavé; les opérations partielles se conçoivent comme des interactions entre objets et non en termes de lois de probabilité. Elles conduisent à une série de procédés de lissage des contours d'images binaires gérés par un seuil unique et une famille d'éléments structurants adaptée à l'application. Des techniques similaires sont évoquées pour des images en niveaux de gris.

Nous introduirons ensuite le nouveau concept de *polymorphisme d'un point*. Ce dernier indique pour chaque point le nombre d'éléments structurants qui contiennent ce point. C'est par son entremise que pourront s'appliquer des procédés d'optimisation de filtrage puisqu'il fournit une mesure analytique.

1 Introduction

Pour des objectifs d'analyse d'images, l'expérimentateur est souvent confronté à la nécessité de décrire la géométrie des objets qu'il observe. Pour automatiser ce travail et évoluer dans un cadre rigoureux, il utilise par exemple des outils de la morphologie mathématique. Cette théorie relativement récente consiste à déplacer une forme appelée *élément structurant* dans le plan. Le résultat de l'interaction entre l'image et l'élément structurant est le résultat de l'opérateur morphologique. Il conduit à une interprétation de l'image à traiter qui est fonction de l'élément structurant utilisé.

La diversité et surtout l'abondance de la littérature ayant trait à la morphologie témoignent du succès de son utilisation. Malheureusement, pour être vraiment très performant, il est indispensable de disposer d'une importante information a priori concernant le signal à traiter, perdant par ce fait-même tout aspect universel. C'est d'autant plus regrettable qu'un simple bruit qui se superpose au signal perturbe considérablement l'analyse. D'où l'idée de définir des opérations morphologiques moins sensibles à des perturbations de géométrie dans le cas de signaux binaires ou de bruit pour des images à niveaux de gris.

Ce document propose de comparer la forme des objets d'une image avec des éléments structurants sans qu'il y ait l'exigence de correspondance parfaite, c'est-à-dire qu'il subsiste une légère imprécision mais maîtrisable. De la sorte, nous espérons être à même d'atténuer l'influence du bruit et de stabiliser le résultat des opérateurs morphologiques. Tous les développements ultérieurs découlent du concept central d'*érosion partielle* –vocable emprunté à Simon [14] pour représenter le *filtre de rang-maximum* décrit dans la littérature scientifique– définie dans le paragraphe suivant. Succinctement, cette opération effectue une corrélation suivie d'un seuillage. Outre l'atténuation de l'effet du bruit, avantage-clef

de l'opération, elle conduit par prolongement à définir des opérateurs qui traitent un signal et son complémentaire d'une manière identique (opérateurs auto-duaux), ce qui n'est certes pas monnaie courante dans la théorie de la morphologie mathématique. Par dualité avec l'érosion, nous proposons une définition de la *dilatation partielle*. Si ce concept fixe le vocabulaire et prolonge l'analogie avec la morphologie mathématique, il n'est en toute rigueur pas indispensable parce que contenu dans celui d'érosion partielle. Et enfin, toujours par similitude avec les opérations morphologiques usuelles seront définies l'*ouverture partielle* et la *fermeture partielle*. Avec tous ces outils élémentaires, il devient possible de construire une importante quantité de nouvelles opérations et d'algorithmes mêlant ces opérateurs. Nous en étudierons quelques-unes après avoir parcouru les propriétés des opérations de base pour des images binaires. Parmi les extensions, grâce à un découpage en plateaux successifs d'une fonction à niveaux de gris ou par l'intermédiaire des opérations de maximum ou de minimum, il devient possible d'étendre les définitions à des images en niveaux de gris.

L'approche qui consiste à utiliser un seuil pour dépeindre des opérations de morphologie n'est pas neuve; on la retrouve dans les notions de *morphologie à seuillage* –le filtre de rang-maximum appartient à cette famille– ou à la base de la *morphologie floue*, très en vogue aux Etats-Unis en ce moment [15, 16]. Dans sa thèse, van den Boomgaard [20] détaille un formalisme pour les opérations de la morphologie mathématique, à la fois pour des images binaires et des images à niveaux de gris, calqué sur des résultats de logique empruntés au domaine de la reconnaissance de forme. Par le biais d'analogies, il unifie plusieurs types de filtrage.

Le point faible de la plupart de ces développements est la quasi-absence d'interprétation physique. Idéalement, il faut veiller à conserver la notion de forme dans l'étude d'opérations à seuil. La plupart des développements actuels sur le sujet négligent cet aspect parce que les opérations à seuil introduisent des imprécisions de position guère aisées à modéliser. L'étude menée dans ce document s'inscrit en faux contre ce mouvement d'écartement avec la morphologie mathématique; les opérations partielles révèlent avant tout une *conception initialement géométrique* des opérations à seuillage et non probabiliste. Par ailleurs, le formalisme utilisé s'apparente fortement aux notations de la morphologie mathématique.

Pour comprendre l'intérêt des opérations à seuil, un retour à l'objectif de base que nous poursuivons s'impose. Quand on désire filtrer des ensembles binaires, on recourt classiquement à des opérations d'ouverture ou de fermeture. Mais voilà, le résultat du filtrage dépend parfois d'un simple pixel. Pour fixer l'inconvénient et à titre d'exemple, prenons le cas d'un ensemble X représentant un carré amputé d'un seul pixel. Si par malheur, l'élément structurant est un carré complet ayant la taille de l'ensemble X , le résultat de l'ouverture est l'ensemble vide! Dans la mesure où l'application autorise une certaine imprécision, ne serait-ce que parce que les appareils de mesure sont aussi générateurs d'imprécision ou simplement parce que les résultats d'une segmentation ne sont précis qu'à quelques pixels près, le résultat est décevant. On retorquera, à raison, que dans le cas présent, il eut été plus judicieux de filtrer l'image par une fermeture. D'accord, mais comment doit-on procéder alors pour déterminer a priori l'opérateur à utiliser? Et puis de toute façon, la même difficulté

apparaît si X est une figure trouée par un carré ayant la taille de l'élément structurant à un pixel près. L'idéal est de développer un opérateur intermédiaire entre les deux opérations élémentaires que sont le filtrage par ouverture et le filtrage par fermeture. D'autre part, on désire éviter les questions relatives à la position des pixels manquants; un pixel manquant en plein centre ou sur un bord doit avoir une même conséquence puisque c'est davantage le degré de l'imprécision –en fait, le nombre de pixels “perturbateurs”– qui importe et non leur position dans l'objet, sans pour autant gommer le caractère géométrique de l'opération. Enfin, comme derniers desiderata, il y avait le besoin de créer un outil capable de mesurer le degré de filtrage avec *un seul paramètre* comme c'est le cas pour les opérations classiques de filtrage. De la sorte, si l'élément structurant est très grand et par là-même présente une grande instabilité face au bruit, on peut autoriser une plus grande imprécision, raisonnable mais néanmoins suffisante pour se départir des habituels ennuis.

L'introduction mathématique au texte à venir est réduit à sa plus simple expression parce qu'il s'adresse à des lecteurs qui connaissent déjà les principes de la morphologie mathématique. Les autres lecteurs sont invités à lire l'article d'Haralick et al. [1] référencé à la fin du document ou à parcourir l'ouvrage de Serra [11].

Plan du document. Dans un premier temps, nous étudierons le concept d'érosion partielle. Nous dégagerons plusieurs propriétés intéressantes destinées à faciliter une réalisation matérielle ou par logiciel, mais aussi dans l'espoir de mieux comprendre les mécanismes de l'érosion partielle pour des opérations plus complexes comme des ouvertures ou des fermetures partielles. Les développements analytiques complètent les études de Salembier [10] et de Simon [14]. Avec ces quelques outils, il est possible de synthétiser des algorithmes qui lissent le contour de manière à le rendre plus facile à représenter ou qui détectent les extrémités d'un objet. L'étude de quelques idées algorithmiques est menée dans la section suivante (section 3).

Les définitions proposées pour des ensembles binaires s'étendent sans peine à des images à niveaux de gris –c'est l'objet de la section 4–, soit par un découpage en plan de la fonction, soit au moyen des opérations de minimum et de maximum.

Les opérations partielles les plus simples s'apparentent à des classificateurs à poids égaux puisque l'élément structurant est plan. On peut tout aussi bien manipuler des classificateurs où les poids diffèrent pour chacun des points d'un ensemble, que ce soit l'image à traiter ou l'élément structurant. Ceci conduit aux opérations partielles volumiques, objet de la section 5. Si, pour la définition des opérations partielles, un souci premier était d'assurer une indépendance de position, certaines applications requièrent la conservation de caractéristiques topologiques. Ainsi, une petite cavité contenue dans un ensemble pourrait complètement disparaître avec des opérations partielles. Or, il se peut que cette cavité constitue l'information utile. Les opérations partielles volumiques offrent des artifices capables de préserver certaines caractéristiques géométriques locales eu égard l'application.

Avant la dernière section qui conclut ce document, nous exposerons le nouveau concept de polymorphisme d'un point et nous expliquerons comment l'appliquer au filtrage d'une collection de régions.

2 Opérations élémentaires sur des signaux binaires

Cette section débute par la définition de l'érosion partielle et de la dilatation partielle. Nous établissons ensuite l'importante relation de dualité ainsi qu'une longue série de propriétés destinées à acquérir une certaine intuition et à examiner leur comportement sous l'intersection et l'union. Nous terminerons cette section en combinant les opérations pour construire des opérations appelées ouverture et fermeture partielles. Une mise en oeuvre de ces deux opérations sera détaillée dans la section suivante par le biais de deux applications.

2.1 Erosion partielle

Le cadre mathématique de travail est le plan euclidien \mathbb{R}^n ou son équivalent discrétisé \mathbb{Z}^n . Pour montrer la généralité des propos quant au passage d'un espace continu à un espace discret et à la dimension de l'espace, nous utiliserons le symbole E pour désigner l'espace traité. Toutefois, certaines expressions de propriété diffèrent si elles concernent des espaces continus ou discrets. Nous choisirons tantôt un cadre tantôt l'autre en précisant lequel convient. En résumé, les propriétés établies ci-après sont tout à fait générales mais leur expression dépend du référentiel en question.

La morphologie mathématique définit l'érosion d'un ensemble X par un élément structurant B , notée $X \ominus B$, comme l'ensemble des points p tels que l'élément structurant translaté par p est entièrement inclus dans l'ensemble X . En d'autres termes, si X_p désigne le translaté de X par p ,

$$X \ominus B = \{p \in E \mid B_p \subseteq X\} = \bigcap_{b \in B} X_{-b} \quad (1)$$

Le dernier membre de l'égalité signifie aussi que la transformation par érosion d'un ensemble X par un ensemble B s'obtient en translatant X par le symétrique de chaque élément de B , ne conservant que les points appartenant à toutes les translations X . Parfois, l'opération d'érosion est définie avec un ensemble B qui a préalablement subi une symétrie centrale autour de l'origine [11] afin de privilégier la relation de dualité. Nous n'adoptons pas ce choix pour des raisons de facilité d'écriture; avec notre notation, le symbole du symétrique intervient moins souvent.

De la définition d'érosion, il résulte clairement que, pour un point p donné de l'ensemble érodé, B_p doit être complètement inclus dans l'ensemble de départ X . Par une interprétation moins formelle, l'érosion effectuée en quelque sorte une mesure de corrélation entre X et B pour chacun des points de l'espace [7], où la corrélation est parfaite. L'opération d'érosion partielle définie ci-après prolonge de manière analytique cette interprétation, tout en l'assouplissant. En soi, l'opération n'est qu'une réécriture de la notion de *filtre*¹ d'ordre (cfr. [5]). Voici, à présent, la définition d'érosion partielle

¹En toute rigueur et suivant la terminologie communément adoptée, il ne s'agit pas véritablement d'un filtre.

Définition 1 Soit \mathcal{A} , l'opérateur qui calcule l'aire ² d'un ensemble. L'érosion partielle de seuil m (pour $0 \leq m \leq \mathcal{A}(B)$) d'un ensemble X par un élément structurant B est l'ensemble

$$X \overset{m}{\ominus} B = \{p \in E \mid \mathcal{A}(X \cap B_p) \geq \mathcal{A}(B) - m\} \quad (2)$$

Que signifie cette définition? Simplement que le translaté de B par n'importe quel point de l'ensemble érodé intersecte l'ensemble de départ avec une précision fixée par le seuil. Il apparaît en particulier que l'érodé partiel de seuil nul est l'érodé habituel défini par la morphologie mathématique. Autrement dit, l'érodé partiel est une extension de la notion d'érosion morphologique ce qui justifie l'appellation de la nouvelle opération.

Propriété 2

$$X \overset{0}{\ominus} B = X \ominus B \quad (3)$$

Démonstration

$p \in X \overset{0}{\ominus} B \Leftrightarrow \mathcal{A}(X \cap B_p) \geq \mathcal{A}(B)$. Comme $\mathcal{A}(X \cap B_p) \leq \mathcal{A}(B_p) = \mathcal{A}(B)$ par la définition d'aire, on a $p \in X \overset{0}{\ominus} B \Leftrightarrow \mathcal{A}(X \cap B_p) = \mathcal{A}(B)$. C'est-à-dire que $B_p \subseteq X$. ■

Remarquons que, via le concept d'aire introduit dans la définition de l'érosion partielle, l'image de sortie ne fournit aucune indication quant à la position de l'erreur ou imprécision tolérée. Nous y remédierons en introduisant les opérations volumiques dans un prochain paragraphe.

D'autre part, l'érosion partielle ne fait qu'ajouter des points à l'érodé morphologique. C'est aussi un signe que l'érodé perd son caractère de réduction de la taille en fonction de la forme de l'élément structurant. Le cas de $m = \mathcal{A}(B)$ est critique. En effet, la définition en elle-même n'a plus guère de sens puisque l'aire est toujours positive. Autrement dit, l'érodé partiel remplit l'espace E tout entier; l'opérateur a agrandi la forme au lieu de la rétrécir. Comme nous le verrons plus loin, dans son comportement, l'érosion adopte le comportement d'une dilatation pour une valeur de seuil proche de la moitié de l'aire de l'élément structurant B . Dans l'espace \mathbb{R}^2 , cet érodé particulier pourrait être défini par un passage à la limite: $\lim_{m \rightarrow \mathcal{A}(B)} X \overset{m}{\ominus} B$, puisque rien ne s'oppose à ce que la fonction soit prolongée continûment. Ces considérations n'ont pas lieu dans un espace discrétisé, en l'occurrence \mathbb{Z}^2 , où la continuité n'a plus de signification. De toute façon, la valeur de seuil $m = \mathcal{A}(B)$ est d'un intérêt plutôt théorique que pratique.

La notion d'érosion partielle offre l'avantage d'être paramétrique. Par un réglage du seuil, paramètre d'interprétation aisée, l'opérateur ajuste la précision. La description d'algorithmes de lissage des contours illustrera pleinement le concept. Malheureusement, la détermination du seuil en valeur absolue pose parfois problème. Qu'à cela ne tienne, il suffira de choisir alors un seuil directement proportionnel à l'aire de l'élément structurant; par exemple, l'érosion de seuil relatif α , notée $X \overset{\alpha}{\ominus} B$, se définit par $\{p \in E \mid \mathcal{A}(X \cap B_p) \geq$

²Dans \mathbb{R}^2 , l'aire d'une surface se calcule par intégrale alors que, dans \mathbb{Z}^2 , il suffit de compter le nombre de points de l'ensemble en question.

$(1 - \alpha)\mathcal{A}(B)\}$. Plus loin, dans le paragraphe consacré aux opérations volumiques, nous adopterons une définition de ce style qui travaille en proportion de l'aire ou du volume de l'élément structurant. C'est ce type de démarche qu'il conviendra d'adopter lorsque l'image est traitée avec une palette d'éléments structurants ayant des tailles fort distinctes.

2.2 Dilatation partielle

En deçà d'un certain seuil, l'opération d'érosion partielle réduit l'aire de l'ensemble analysé. Pour les mêmes valeurs de seuil, il existe une opération duale appelée *dilatation partielle* qui est définie ci-après (voir Salembier [10]).

Définition 3 Dans l'espace \mathbb{R}^2 , la dilatation partielle de seuil m , $0 \leq m \leq \mathcal{A}(B)$, d'un ensemble X par un élément structurant B est l'ensemble

$$X \overset{m}{\oplus} B = \{p \in E \mid \mathcal{A}(X \cap \check{B}_p) > m\} \quad (4)$$

où l'ensemble \check{B} est le symétrique de B obtenu par symétrie centrale autour de l'origine: $\check{B} = \{b \mid -b \in B\}$ ³.

Dans l'espace discret \mathbb{Z}^2 , la définition prend la forme

$$X \overset{m}{\oplus} B = \{p \in E \mid \mathcal{A}(X \cap \check{B}_p) \geq m + 1\} \quad (5)$$

Avoir introduit le symétrique de B dans la définition n'a pour seule raison que de préparer le terrain pour l'ouverture partielle et de conserver l'analogie avec un formalisme existant.

Si nous avons été obligés de définir la dilatation partielle dans \mathbb{Z}^2 différemment, c'est parce que l'aire d'un ensemble discret ne se calcule pas par intégrale, ce qui signifie que lorsque la surface d'intersection des deux ensembles s'amenuise, l'aire tend continûment vers 0 dans \mathbb{R}^2 , alors que dans l'espace \mathbb{Z}^2 , elle tend vers un 1 et passe à 0 brusquement.

Interprétation. La définition du dilaté partiel impose que le nombre de points communs entre X et le translaté du symétrique de B soit strictement supérieur au seuil m . Conséquemment, le dilaté de seuil $\mathcal{A}(B)$ est toujours vide: $X \overset{\mathcal{A}(B)}{\oplus} B = \emptyset$. Le dilaté morphologique est moins contraignant que le dilaté partiel puisqu'il exige uniquement que \check{B}_p ait une intersection non nulle avec X . Formellement, le dilaté morphologique d'un ensemble X par B est l'union des translatés de X par des éléments de B :

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b = \bigcup_{x \in X} B_x = \{x + b \mid x \in X, b \in B\} \quad (6)$$

C'est aussi l'ensemble des points p tels que \check{B}_p touche X ($X \cap \check{B}_p \neq \emptyset$).

³L'écriture \check{B}_p est un raccourci pour $(\check{B})_p$; autrement dit, la translation porte sur le symétrique.

La dilatation partielle exige quant à elle que l'intersection ne soit pas seulement non vide mais également que son aire soit supérieure à un certain seuil. Tout comme pour l'érosion, il apparaît que le dilaté de seuil nul n'est rien d'autre que l'érodé morphologique:

$$X \overset{0}{\oplus} B = \lim_{m \rightarrow 0} X \overset{m}{\oplus} B = X \oplus B \quad (7)$$

Comme il exige que l'intersection de X avec \check{B}_p soit au moins non nulle, le dilaté partiel étend moins la figure que ne le ferait la dilatation morphologique. Quant à l'érosion partielle, elle réduit moins X que l'érosion morphologique. Nous allons voir que l'érosion et la dilatation partielles se rejoignent à mesure que le seuil se rapproche de la moitié de l'aire de l'élément structurant.

2.3 Correspondance entre les opérations d'érosion partielle et de dilatation partielle

Avant de poursuivre, montrons que les opérations d'érosion partielle et de dilatation partielles sont duales. De la sorte, il sera plus aisé de déduire des résultats sur l'ensemble complémentaire. Les démonstrations à venir sont adaptées à l'espace continu \mathbb{R}^2 ; revenir à \mathbb{Z}^2 modifie l'expression des démonstrations sans changer le résultat acquis, sauf avis contraire.

Propriété 4 (Dualité des opérations partielles) *Les opérations d'érosion et de dilatation partielles sont duales:*

$$(X \overset{m}{\ominus} B)^c = X^c \overset{m}{\oplus} \check{B} \quad (8)$$

Démonstration

De la définition de dilatation partielle, il résulte que $p \in X^c \overset{m}{\oplus} \check{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}(X^c \cap B_p) > m$. Or $\mathcal{A}(X^c \cap B_p) = \mathcal{A}(B_p) - \mathcal{A}(X \cap B_p)$ ou encore, après réarrangement dans l'inégalité stricte et comme $\mathcal{A}(B_p) = \mathcal{A}(B)$, $\mathcal{A}(X \cap B_p) < \mathcal{A}(B) - m$. C'est précisément la définition du membre de gauche $(X \overset{m}{\ominus} B)^c$ de la propriété à établir. ■

Le principe de dualité conduit à une interprétation de la dilatation partielle semblable à celle faite pour l'érosion partielle mais sur l'ensemble complémentaire et avec un élément structurant retourné. Pour des raisons de réalisation matérielle ou par logiciel, il peut aussi s'avérer utile. En effet, il suffira concrètement de réaliser une seule fonction pour disposer quasi simultanément de l'opération duale. En logiciel, on a peut-être avantage à réaliser l'opération duale par un algorithme propre pour accélérer le traitement. Mais ce n'est, en toute rigueur, pas indispensable.

Plus le seuil croît, plus l'érosion partielle perd son caractère d'érosion. Il en va de même pour la dilatation partielle. Le lien entre les deux opérations est résumé dans la proposition suivante, valable dans le cas discret:

Propriété 5

$$X \overset{m}{\ominus} B = X \overset{\mathcal{A}(B)-m-1}{\oplus} \check{B} \quad (9)$$

En conséquence, tant que $m < \frac{\mathcal{A}(B)-1}{2}$, l'opération d'érosion a plutôt un caractère d'érosion. Pour $m = \frac{\mathcal{A}(B)-1}{2}$, ce n'est ni une érosion ni une dilatation; il s'agit alors d'un opérateur auto-dual ou d'un opérateur appelé *filtre médian* si $\mathcal{A}(B)$ est impair. Au-delà de cette valeur limite, il y a inversion du caractère de l'opération. Cette remarque est importante pour la suite car, par combinaison d'érosions et de dilatations, nous construirons toute une panoplie de nouvelles opérations dont l'interprétation dépend très fortement de la valeur du seuil. Il est à noter que van den Boomgaard [20] ne définit pas explicitement la dilatation partielle, jugeant préférable de la traiter comme une érosion de seuil complémentaire alors que Salembier la dissocie complètement.

L'usage du filtre médian est assez répandu en traitement d'images suite à la propriété suivante:

Corollaire 6 *Le filtre médian ($m = \frac{\mathcal{A}(B)-1}{2}$ avec $\mathcal{A}(B)$ impair) commute avec la complémentation*

$$X \overset{m}{\ominus} B = (X^c \overset{m}{\ominus} B)^c \quad (10)$$

$$X \overset{m}{\oplus} B = (X^c \overset{m}{\oplus} B)^c \quad (11)$$

Démonstration

Nous n'établirons que la première relation; la seconde relation s'obtient par un cheminement identique. Par définition du seuil d'un filtre médian, $m = \mathcal{A}(B) - m - 1$, ce qui signifie que, en vertu de la propriété 5, $X \overset{m}{\ominus} B = X \overset{m}{\oplus} \check{B}$. D'autre part, le principe de dualité exposé précédemment traduit le second terme par $(X^c \overset{m}{\ominus} B)^c$. Ce qui démontre la relation. ■

La propriété du filtre médian exposée ci-dessus explique pourquoi ce filtre est abondamment utilisé: un ensemble et son complémentaire subissent le même traitement, le filtre conservant cette propriété pour des images en niveaux de gris. L'inconvénient de ce filtre est sa non-idempotence. L'itération de l'opérateur conduit parfois à des oscillations inévitables qui proviennent précisément de la valeur *médiane* du seuil du filtre. Plus la valeur s'écarte de cette médiane, plus les difficultés de convergence par itération s'évanouissent. C'est la raison majeure pour laquelle nous éviterons l'emploi d'un seuil proche de la médiane lors de la mise au point de filtres de lissage des contours.

2.4 Etude des propriétés de l'érosion et de la dilatation partielles

Les considérations de réalisation tirées de la propriété de dualité ne sont pas terminées; il appartient notamment d'analyser le comportement des opérateurs sous l'intersection et l'union pour tirer de meilleures conclusions. Ce paragraphe est consacré à l'étude des propriétés. La liste est longue à la manière d'Haralick [1] dans son article. La raison de cette exhaustivité est simple: les opérateurs partiels ne se comportent pas tout à fait comme les opérations morphologiques correspondantes.

2.4.1 L'invariance en translation, la croissance des opérations partielles et propriétés associées

La translation temporelle d'un signal introduit un facteur de phase dans la transformée de Fourier, facteur qu'il est possible d'extraire et de neutraliser. Dans le même état d'esprit, on impose habituellement aux opérations morphologiques l'invariance en translation. Dans ce cas, l'origine ne joue plus aucun rôle privilégié et les transformations sont insensibles à la position absolue des points de l'espace. La proposition suivante décrit le comportement des nouvelles opérations sous la translation.

Propriété 7 (Invariance en translation)

$$X \overset{m}{\ominus} B_q = (X \overset{m}{\ominus} B)_{-q} \quad (12)$$

$$X_q \overset{m}{\ominus} B = (X \overset{m}{\ominus} B)_q \quad (13)$$

$$X \overset{m}{\oplus} B_q = (X \overset{m}{\oplus} B)_{-q} \quad (14)$$

$$X_q \overset{m}{\oplus} B = (X \overset{m}{\oplus} B)_q \quad (15)$$

Démonstration

Relation 12: en vertu de la définition d'érosion partielle, si $p \in X \overset{m}{\ominus} B_q$ alors $\mathcal{A}(X \cap (B_q)_p) \geq \mathcal{A}(B_q) - m$. Grâce à l'invariance en translation de l'aire, $\mathcal{A}(B_q) = \mathcal{A}(B)$. Puis, posant $j = p + q$, on arrive à l'égalité $X \overset{m}{\ominus} B_q = \{j - q \mid \mathcal{A}(X \cap B_j) \geq \mathcal{A}(B) - m\}$. Le membre de droite est la définition en compréhension de l'ensemble $(X \overset{m}{\ominus} B)_{-q}$. La thèse est établie.

Relation 13:

$$\begin{aligned} (X \overset{m}{\ominus} B)_q &= \{p + q \mid \mathcal{A}(X \cap B_p) \geq \mathcal{A}(B) - m\} \\ &= \{p + q \mid \mathcal{A}(X_q \cap B_{p+q}) \geq \mathcal{A}(B) - m\}. \text{ Puis en posant } j = p + q, \\ &= \{j \mid \mathcal{A}(X_q \cap B_j) \geq \mathcal{A}(B) - m\} \\ &= X_q \overset{m}{\ominus} B \end{aligned}$$

Relations 14 et 15: ces égalités se démontrent comme les deux précédentes. ■

Nous venons de retrouver les résultats valables pour les opérations morphologiques correspondantes. L'invariance en translation est fondamentale pour toutes les opérations de traitement du signal car elle garantit que le résultat ne dépend pas de la position absolue des points ni de l'origine. Tout aussi importante est la croissance des opérateurs; il en résulte un concept d'ordre entre les ensembles sous l'opérateur, qui corrobore la notion simple d'inclusion entre ensembles.

Propriété 8 (Croissance des opérateurs partiels)

$$X \subseteq Y \Rightarrow X \overset{m}{\ominus} B \subseteq Y \overset{m}{\ominus} B \quad (16)$$

$$X \subseteq Y \Rightarrow X \overset{m}{\oplus} B \subseteq Y \overset{m}{\oplus} B \quad (17)$$

Démonstration

Il est aisé d'établir les deux relations énoncées simplement parce que, si $X \subseteq Y$ alors $\mathcal{A}(Y \cap C) \geq \mathcal{A}(X \cap C)$, quel que soit C . Ceci suffit à démontrer 16 et 17. ■

Propriété 9

$$B \subseteq C \Rightarrow X \overset{m}{\ominus} B \supseteq X \overset{m}{\ominus} C \quad (18)$$

$$B \subseteq C \Rightarrow X \overset{m}{\oplus} B \subseteq X \overset{m}{\oplus} C \quad (19)$$

Démonstration

Soit un élément p tel que $p \in X \overset{m}{\ominus} C$, alors $\Leftrightarrow \mathcal{A}(X \cap C_p) \geq \mathcal{A}(C) - m$. On découpe ensuite l'ensemble C_p en deux parties disjointes $(C_p \setminus B_p)$ ⁴ et B_p ; c'est licite puisque $B \subseteq C$. De la sorte, l'inégalité précédente devient $\mathcal{A}(X \cap [(C_p \setminus B_p) \cup B_p]) = \mathcal{A}(X \cap [C_p \setminus B_p]) + \mathcal{A}(X \cap B_p) \geq \mathcal{A}(C) - m$. Or, comme $B \subseteq C$, d'où $\mathcal{A}(B) \leq \mathcal{A}(C)$, et que le premier terme est toujours positif, il apparaît que $\mathcal{A}(X \cap B_p) \geq \mathcal{A}(B) - m$. Donc, si $p \in X \overset{m}{\ominus} C$, alors $p \in X \overset{m}{\ominus} B$. On mène un raisonnement similaire pour l'équation 19. ■

Propriété 10 (Commutativité de la dilatation partielle)

$$X \overset{m}{\oplus} B = B \overset{m}{\oplus} X \quad (20)$$

Démonstration

Si $p \in X \overset{m}{\oplus} B_q$, alors $\mathcal{A}(X \cap \check{B}_p) > m$. Or, l'aire d'un ensemble et de son symétrique sont égales: $\mathcal{A}(X \cap \check{B}_p) = \mathcal{A}([X \cap \check{B}_p])$. Cette dernière vaut encore $\mathcal{A}(\check{X} \cap B_{-p})$ puisque le symétrique de $(\check{B})_p$ vaut B_{-p} . Et finalement $\mathcal{A}(\check{X} \cap B_{-p}) = \mathcal{A}(\check{X}_p \cap B)$, d'où $X \overset{m}{\oplus} B = B \overset{m}{\oplus} X$. ■

Propriété 11

$$m \leq n \Rightarrow X \overset{m}{\ominus} B \subseteq X \overset{n}{\ominus} B \quad (21)$$

$$m \leq n \Rightarrow X \overset{m}{\oplus} B \supseteq X \overset{n}{\oplus} B \quad (22)$$

Démonstration

Evident parce que, si $m \leq n$, alors on a aussi bien $\mathcal{A}(B) - m \geq \mathcal{A}(B) - n$ et donc que $X \overset{m}{\ominus} B \subseteq X \overset{n}{\ominus} B$, que l'immédiat $X \overset{m}{\oplus} B \supseteq X \overset{n}{\oplus} B$. ■

En particulier, $X \ominus B \subseteq X \overset{m}{\ominus} B$ et $X \oplus B \supseteq X \overset{m}{\oplus} B$. La première de ces relations est somme toute assez logique puisqu'elle est à la base-même de l'érosion partielle. La seconde est inhabituelle et peut perturber quelque peu. En effet, plus le seuil augmente, et par conséquent l'imprécision, plus le dilaté partiel s'écarte du dilaté morphologique par contraction.

⁴Le signe \setminus indique la différence ensembliste. Dans le cas présent, c'est l'ensemble des points qui appartiennent à C_p sans appartenir à B_p .

2.4.2 Comportement sous l'intersection et l'union

D'un point de vue purement théorique, l'érosion et la dilatation morphologiques se caractérisent par un comportement particulier face à l'intersection et à l'union. En effet, l'érosion distribue l'intersection et la dilatation distribue l'union. Assez naturellement, et bien malheureusement, ces propriétés disparaissent pour les opérations partielles correspondantes parce que ces dernières contraignent moins le comportement. La série de propriétés à venir détaille les relations d'inclusion qui tiennent lieu pour les opérations partielles.

Propriété 12

$$(X \overset{m}{\ominus} B) \cup (X \overset{m}{\ominus} C) \subseteq X \overset{m}{\ominus} (B \cap C) \quad (23)$$

$$(X \overset{m}{\ominus} B) \cap (X \overset{m}{\ominus} C) \supseteq X \overset{m}{\ominus} (B \cup C) \quad (24)$$

$$(X \overset{m}{\oplus} B) \cap (X \overset{m}{\oplus} C) \supseteq X \overset{m}{\oplus} (B \cap C) \quad (25)$$

$$(X \overset{m}{\oplus} B) \cup (X \overset{m}{\oplus} C) \subseteq X \overset{m}{\oplus} (B \cup C) \quad (26)$$

Démonstration

Toutes ces relations sont des conséquences immédiates des relations 18 et 19. Démontrons par exemple, la relation 25.

Par la relation 19, $B \cap C \subseteq B$ et $B \cap C \subseteq C$. Dès lors, $X \overset{m}{\oplus} (B \cap C) \subseteq X \overset{m}{\oplus} B$ et $X \overset{m}{\oplus} (B \cap C) \subseteq X \overset{m}{\oplus} C$. ■

Formules de décomposition. On peut donner une définition quelque peu différente de l'érosion partielle; un point p appartient à l'érodé partiel de X par B si ces deux ensembles partagent au point p une aire valant au moins $\mathcal{A}(B) - m$. Donc, si on considère tous les sous-ensembles $B(i)$ de B ayant une aire valant au minimum $\mathcal{A}(B) - m$, l'union des érodés morphologiques $X \ominus B(i)$ fournit l'érodé partiel de seuil m . C'est-à-dire que l'érodé partiel n'est rien d'autre qu'une union d'érodés morphologiques par une famille d'ensembles extraits de B dont le nombre varie en fonction du seuil et dépend de la taille de l'ensemble B initial. Qu'apporte alors le concept d'érodé partiel? Tout d'abord, il offre un formalisme général capable de traiter une collection de sous-ensembles tirés d'un ensemble B . Et surtout, par son entremise, on dessine une famille intéressante de sous-ensembles de manière purement automatique, famille éventuellement énorme. Cette interprétation peut avoir un rôle pour le traitement d'ensembles discrétisés puisqu'alors le nombre d'érodés à calculer est fini. De tout ceci, il advient qu'une définition équivalente de l'érosion partielle est

$$X \overset{m}{\ominus} B = \bigcup \{X \ominus B(i) \mid B(i) \subseteq B \text{ et } \mathcal{A}(B(i)) \geq \mathcal{A}(B) - m\} \quad (27)$$

Si $B(i)$ représente la totalité des sous-ensembles qui satisfont $B(i) \subseteq B$ et $\mathcal{A}(B(i)) \geq \mathcal{A}(B) - m$, la relation débouche sur une formule de décomposition

Propriété 13 (Formule de décomposition de l'érosion partielle) [5, page 1173]

$$X \overset{m}{\ominus} B = \bigcup_i \{X \ominus B(i)\} = \bigcup_i \left\{ \bigcap_{b \in B(i)} X_{-b} \right\} \quad (28)$$

Mais pour les érosions morphologiques il est connu que si $B(i) \subseteq B(j)$ alors $X \ominus B(i) \supseteq X \ominus B(j)$. Dès lors, il suffit de réunir les ensembles $X \ominus B(i)$ tels que $B(i) \subseteq B$ et $\mathcal{A}(B(i)) = \mathcal{A}(B) - m$. Le nombre d'éléments structurants à considérer, c'est-à-dire aussi le nombre d'érosions à effectuer, vaut $C_{\mathcal{A}(B)}^m$, la combinaison de m par $\mathcal{A}(B)$ ⁵. Ce nombre peut être énorme, par exemple avec un élément structurant de grande aire et un seuil valant plus ou moins la moitié de cette aire. Dès lors, la formule de décomposition est plus une interprétation qu'un guide pour la réalisation.

L'érosion partielle est donc une union d'érosions morphologiques. Ce résultat acquis assez intuitivement –il a été simple de trouver la famille des ensembles $B(i)$ intervenant dans la formule– a déjà été formalisé par Matheron [6]. Ce dernier indique que toute opérateur invariant en translation et croissant peut s'exprimer par une union d'érosions ou par une intersection de dilatations. Ce résultat ne nous surprend guère pour les opérations partielles puisque la proposition 5 établit une correspondance entre l'érosion et la dilatation partielles. On suit alors un cheminement identique pour décomposer la dilatation partielle et montrer que la dilatation partielle équivaut à une intersection de dilatations morphologiques.

Propriété 14 (Formule de décomposition de la dilatation partielle)

$$X \overset{m}{\oplus} B = \bigcap_i \{X \oplus B(i)\} = \bigcap_i \left\{ \bigcup_{b \in B(i)} X_b \right\} \quad (29)$$

avec, à cette fois encore, la même collection $B(i)$ de sous-ensembles.

Ce résultat s'obtient par exemple en exploitant la relation précédente et le principe de dualité. En voici le détail,

$$\begin{aligned} X \overset{m}{\oplus} B &= (X^c \overset{m}{\ominus} \check{B})^c \\ &= (\bigcup_i \{X^c \ominus \check{B}(i)\})^c \\ &= (\bigcup_i \{X \oplus B(i)\})^c \\ &= \bigcap_i \{X \oplus B(i)\} \end{aligned}$$

L'utilisation de ces formules permet de comprendre certains faits curieux. Prenons un ensemble en forme d'échiquier dont la taille de chaque case est de 8 pixels. La dilatation morphologique de cet ensemble par un doublet de 8 pixels de large vaut le plan tout entier. Par contre, le dilaté partiel de seuil 1 est vide. Pourquoi? Parce que, conformément à la formule de décomposition (relation 29), la dilatation partielle se ramène dans ce cas à l'intersection de deux dilatations morphologiques comprenant seulement un point du doublet. Or, les deux résultats des dilatations sont complémentaires, sans intersection. On

⁵La combinaison de C_N^n est définie par $\frac{N!}{(N-n)!n!}$ où $n!$ est la factorielle de n .

peut donner l'équivalent en termes d'érosion partielle: par 5, $X \overset{m}{\oplus} B = X \overset{A(B)-m-1}{\ominus} \check{B}$, la dilatation de seuil 1 par le doublet se traduit en une érosion morphologique, c'est-à-dire de seuil 0, avec l'élément symétrique. A nouveau, le résultat cette érosion est vide.

Cet exemple a mis en évidence la double interprétation possible de l'érosion et de la dilatation partielles en termes d'opérations morphologiques, reprise ci-après [5, page 1177].

Propriété 15 Soit $\check{B}(j)$, la famille des sous-ensembles de \check{B} ayant une aire égale à $m+1$ dans le cas discret. On a les formules de décomposition

$$X \overset{m}{\ominus} B = \bigcap_j \{X \oplus \check{B}(j)\} \quad (30)$$

$$X \overset{m}{\oplus} B = \bigcup_j \{X \ominus \check{B}(j)\} \quad (31)$$

Développements en série. Par le biais des formules de décomposition, on obtient des formules de développements en série pour lesquelles une opération avec un grand élément structurant se ramène à plusieurs opérations manipulant des éléments structurants plus petits. Comme on s'en doute, ces relations sont particulièrement utiles pour toute réalisation, tant matérielle que logicielle. Voici en substance, ces formules:

Propriété 16 (Formules de développements en série) Soient $k_0 = \max(0, m - A(C \setminus B))$ et $k_1 = \min(A(B), m)$

$$X \overset{m}{\ominus} (B \cup C) = \bigcup_{k=k_0 \dots k_1} [(X \overset{k}{\ominus} B) \cap (X \overset{m-k}{\ominus} (C \setminus B))] \quad (32)$$

$$X \overset{m}{\oplus} (B \cup C) = \bigcap_{k=k_0 \dots k_1} [(X \overset{k}{\oplus} B) \cup (X \overset{m-k}{\oplus} (C \setminus B))] \quad (33)$$

Démonstration

Relation 32:

Par la relation 13, $X \overset{m}{\ominus} (B \cup C) = \bigcup_i \{X \ominus [B \cup C](i)\}$. De plus, $X \ominus [B \cup C](i) = (X \ominus B(i)) \cap (X \ominus [C \setminus B](i))$. C'est donc l'union de toutes les combinaisons pour lesquelles l'imprécision totale sur l'érosion morphologique vaut m , une partie de m étant associée à $B(i)$, l'autre à l'ensemble $[C \setminus B](i)$: $X \overset{m}{\ominus} (B \cup C) = \bigcup_i \{X \ominus B(i)\} \cap \bigcup_i \{X \ominus [C \setminus B](i)\}$. C'est pourquoi, à supposer que $m \leq A(B)$ et $m \leq A(C \setminus B)$, on a par regroupement de certains termes que $X \overset{m}{\ominus} (B \cup C) = \bigcup_{k=0 \dots m} [(X \overset{k}{\ominus} B) \cap (X \overset{m-k}{\ominus} (C \setminus B))]$.

Les contraintes sur k sont destinées à garantir que les définitions des érosions partielles intervenant dans les différents composantes de la formule de décomposition ont du sens. Elles imposent simplement que $0 \leq k \leq A(B)$ et $0 \leq m - k \leq A(C \setminus B)$.

Relation 33:

Un raisonnement de même nature conduit à la deuxième relation. Elle s'obtient également en exploitant le principe de dualité. ■

Exemple 1:

Traisons une fois encore le cas du doublet $B = \{0, p\}$ appliqué à un échiquier X dont les cases sont écartées d'une distance égale à la longueur du doublet. La dilatation partielle de seuil 1 de X par le doublet se décompose via la relation précédente en: $X \overset{1}{\oplus} B = [(X \overset{0}{\oplus} \{0\}) \cup (X \overset{1}{\oplus} \{p\})] \cap [(X \overset{1}{\oplus} \{0\}) \cup (X \overset{0}{\oplus} \{p\})]$. Par calcul, l'expression devient $X \overset{1}{\oplus} B = [X_0 \cup \emptyset] \cap [\emptyset \cup X_p] = X \cap X_p$. Mais cet ensemble est vide par définition de l'ensemble X .

Exemple 2:

Un exemple plus abstrait permet de comprendre l'utilité des formules de développement. Soit à calculer l'érosion partielle de X par B pour un seuil m . De B retirons l'élément noté p . De la sorte, nous avons deux ensembles disjoints notés respectivement $B_1 (= B \setminus \{p\})$ et $\{p\}$. Par développement en série de l'érosion partielle et après simplification:

$$\begin{aligned} X \overset{m}{\ominus} B &= [(X \overset{m-1}{\ominus} B_1) \cap (X \overset{1}{\ominus} \{p\})] \cup [(X \overset{m}{\ominus} B_1) \cap (X \overset{0}{\ominus} \{p\})] \\ &= (X \overset{m-1}{\ominus} B_1) \cup [(X \overset{m}{\ominus} B_1) \cap X_{-p}] \end{aligned}$$

Dans cette expression n'apparaît plus que B_1 et non B .

Une opération au moyen d'un élément structurant de grande taille se ramène à deux opérations qui gèrent un élément structurant plus petit d'un élément. Mais comme cette formule est récurrente, on pourrait poursuivre le raisonnement, tant que le seuil ne dépasse pas les limites fixées par la définition, pour se ramener à un élément structurant de petite taille. Probablement n'est-ce pas la voie à suivre dans une approche par logiciel, mais pour d'autres applications, cette formule fournit un moyen de calculer malgré tout des érosions pour des éléments structurants dépassant la taille autorisée.

Un corollaire reprend des formules un peu plus générales:

Corollaire 17

$$X \overset{m}{\ominus} (B \cup C) \supseteq \bigcup_{k=k_0 \dots k_1} [(X \overset{k}{\ominus} B) \cap (X \overset{m-k}{\ominus} C)] \quad (34)$$

$$X \overset{m}{\oplus} (B \cup C) \subseteq \bigcap_{k=k_0 \dots k_1} [(X \overset{k}{\oplus} B) \cup (X \overset{m-k}{\oplus} C)] \quad (35)$$

L'égalité n'est obtenue que si B et C sont mutuellement exclusifs.

Démonstration

En vertu des relations 18 et 19, il apparaît que $X \overset{m-k}{\ominus} (C \setminus B) \supseteq X \overset{m-k}{\ominus} C$ et $X \overset{m-k}{\oplus} (C \setminus B) \subseteq X \overset{m-k}{\oplus} C$. Ce qui, combiné avec les propriétés précédentes, démontre les deux relations. ■

Comportement sous l'intersection et l'union. En jonglant avec les définitions des opérations partielles, il est possible d'établir une kyrielle de propriétés. Les premières examinent ce qui se produit lors d'une sommation des seuils, ou à l'inverse, lorsqu'on essaie de décomposer un seuil en une somme de seuils.

Propriété 18

$$X \overset{m+n}{\ominus} B \supseteq (X \overset{m}{\ominus} B) \cup (X \overset{n}{\ominus} B) \quad (36)$$

$$X \overset{m+n}{\oplus} B \subseteq (X \overset{m}{\oplus} B) \cap (X \overset{n}{\oplus} B) \quad (37)$$

Démonstration

Relation 36:

Si $p \in X \overset{m}{\ominus} B$ alors $\mathcal{A}(X \cap B_p) \geq \mathcal{A}(B) - m$. Mais aussi $\mathcal{A}(X \cap B_p) \geq \mathcal{A}(B) - m \geq \mathcal{A}(B) - m - n$. Donc $p \in X \overset{m+n}{\ominus} B$. En résumé, $X \overset{m+n}{\ominus} B \supseteq X \overset{m}{\ominus} B$. De même, $X \overset{m+n}{\ominus} B \supseteq X \overset{n}{\ominus} B$. D'où, in fine, $X \overset{m+n}{\ominus} B \supseteq (X \overset{m}{\ominus} B) \cup (X \overset{n}{\ominus} B)$.

Relation 37:

On tient un raisonnement similaire pour la relation 37. ■

Propriété 19

$$X \overset{m+n}{\ominus} (B \cup C) \supseteq (X \overset{m}{\ominus} B) \cap (X \overset{n}{\ominus} C) \quad (38)$$

$$X \overset{m+n}{\oplus} (B \cup C) \subseteq (X \overset{m}{\oplus} B) \cup (X \overset{n}{\oplus} C) \quad (39)$$

Démonstration

Relation 38:

Soit un point p appartenant à $(X \overset{m}{\ominus} B) \cap (X \overset{n}{\ominus} C)$. p est donc contenu dans les deux ensembles, ce qui signifie que $\mathcal{A}(X \cap B_p) \geq \mathcal{A}(B) - m$ et $\mathcal{A}(X \cap C_p) \geq \mathcal{A}(C) - n$. La somme de ces deux relations dit que $\mathcal{A}(X \cap B_p) + \mathcal{A}(X \cap C_p) \geq \mathcal{A}(B) + \mathcal{A}(C) - m - n$. D'autre part, si $q \in X \overset{m+n}{\ominus} (B \cup C)$, cela équivaut à dire que $\mathcal{A}(X \cap (B \cup C)_q) \geq \mathcal{A}(B \cup C) - m - n$. On transforme ensuite cette inégalité comme suit:

$$\mathcal{A}((X \cap B_q) \cup (X \cap C_q)) \geq \mathcal{A}(B \cup C) - m - n$$

$$\mathcal{A}(X \cap B_q) + \mathcal{A}(X \cap C_q) - \mathcal{A}(X \cap B_q \cap C_q) \geq \mathcal{A}(B) + \mathcal{A}(C) - \mathcal{A}(B \cap C) - m - n$$

$$\mathcal{A}(X \cap B_q) + \mathcal{A}(X \cap C_q) \geq \mathcal{A}(B) + \mathcal{A}(C) - [\mathcal{A}(B \cap C) - \mathcal{A}(X \cap B_q \cap C_q)] - m - n$$

Or $[\mathcal{A}(B \cap C) - \mathcal{A}(X \cap B_q \cap C_q)]$ est toujours positif. D'où, on conclut que si $p \in (X \overset{m}{\ominus} B) \cap (X \overset{n}{\ominus} C)$, alors d'office, $p \in X \overset{m+n}{\ominus} (B \cup C)$.

Relation 39:

Partant de la relation précédente, on déduit que $[X \overset{m+n}{\ominus} (B \cup C)]^c \subseteq [(X \overset{m}{\ominus} B) \cap (X \overset{n}{\ominus} C)]^c$. Puis au moyen du principe de dualité (relation 8), on transforme l'inclusion pour obtenir successivement:

$$X^c \overset{m+n}{\ominus} (\check{B} \cup \check{C}) \subseteq (X \overset{m}{\ominus} B)^c \cup (X \overset{n}{\ominus} C)^c$$

$$X^c \overset{m+n}{\ominus} (\check{B} \cup \check{C}) \subseteq (X^c \overset{m}{\oplus} \check{B}) \cup (X^c \overset{n}{\oplus} \check{C})$$

Remplaçons X^c , \tilde{B} et \tilde{C} respectivement par Y, D, E , ce qui donne $Y \overset{m+n}{\ominus} (D \cup E) \subseteq (Y \overset{m}{\ominus} D) \cup (Y \overset{n}{\ominus} E)$, c'est-à-dire la relation à démontrer. ■

Propriété 20

$$(X \cap Y) \overset{m+n}{\ominus} B \supseteq (X \overset{m}{\ominus} B) \cap (Y \overset{n}{\ominus} B) \quad (40)$$

$$(X \cup Y) \overset{m+n}{\oplus} B \subseteq (X \overset{m}{\oplus} B) \cup (Y \overset{n}{\oplus} B) \quad (41)$$

Démonstration

Ces relations découlent des relations de croissance des opérations partielles élémentaires et de $m \leq n \Rightarrow X \overset{m}{\ominus} B \subseteq X \overset{n}{\ominus} B$ et $X \overset{m}{\oplus} B \supseteq X \overset{n}{\oplus} B$, propriété démontrée précédemment. ■

Détaillons à présent les propriétés ne faisant intervenir qu'une seule valeur de seuil. Parmi toutes les propriétés, aucune n'est une égalité. Les opérations partielles ne mènent qu'à des inclusions. L'interprétation de l'érosion et de la dilatation que nous avons donnée précédemment en termes d'union d'érosions ou d'intersection de dilatations suffit à comprendre pourquoi le comportement des opérations partielles est moins régulier que celui des opérations morphologiques correspondantes.

Propriété 21

$$(X \overset{m}{\ominus} B) \cup (Y \overset{m}{\ominus} B) \subseteq (X \cup Y) \overset{m}{\ominus} B \quad (42)$$

$$(X \cap Y) \overset{m}{\ominus} B \subseteq (X \overset{m}{\ominus} B) \cap (Y \overset{m}{\ominus} B) \quad (43)$$

$$(X \overset{m}{\oplus} B) \cup (Y \overset{m}{\oplus} B) \subseteq (X \cup Y) \overset{m}{\oplus} B \quad (44)$$

$$(X \cap Y) \overset{m}{\oplus} B \subseteq (X \overset{m}{\oplus} B) \cap (Y \overset{m}{\oplus} B) \quad (45)$$

Démonstration

Relation 42:

Par la croissance de l'opération d'érosion partielle (relation 16), $X \overset{m}{\ominus} B \subseteq (X \cup Y) \overset{m}{\ominus} B$. De même, $Y \overset{m}{\ominus} B \subseteq (X \cup Y) \overset{m}{\ominus} B$. Donc l'union de $X \overset{m}{\ominus} B$ et de $Y \overset{m}{\ominus} B$ est comprise dans $(X \cup Y) \overset{m}{\ominus} B$.

On procède de même pour les autres propriétés. ■

Propriété 22

$$X \overset{m}{\ominus} (B \cup C) \subseteq (X \overset{m}{\ominus} B) \cap (X \overset{m}{\ominus} C) \quad (46)$$

$$X \overset{m}{\oplus} (B \cup C) \supseteq (X \overset{m}{\oplus} B) \cup (X \overset{m}{\oplus} C) \quad (47)$$

Démonstration

La démonstration de la première relation s'appuie sur la relation 18. En effet, comme $B \cup C \supseteq B$, $X \overset{m}{\ominus} (B \cup C) \subseteq X \overset{m}{\ominus} B$. De même, $X \overset{m}{\ominus} (B \cup C) \subseteq X \overset{m}{\ominus} C$. Les éléments de $X \overset{m}{\ominus} (B \cup C)$ appartiennent donc à l'intersection des deux ensembles. La seconde relation s'obtient par dualité. ■

Mise en cascade d'opérations élémentaires. La propriété de mise en cascade de deux érosions morphologiques, à savoir $(X \ominus B) \ominus C = X \ominus (B \oplus C)$, est un pilier de la théorie. C'est grâce à elle que s'établit la notion de taille morphologique, et par suite, on construit des filtres axés sur la notion de taille. Comme il apparaît dans les propriétés suivantes, il n'y a pas de relation de chaîne qui tienne pour des opérations partielles. Autrement dit, il n'est plus possible de définir une "taille partielle". En conséquence aussi, une opération avec un élément structurant qui est le dilaté d'un ensemble n'équivaut pas à deux opérations avec chacun des ensembles constituants.

Propriété 23

$$X \overset{m}{\ominus} (B \oplus C) \subseteq (X \overset{m}{\ominus} B) \ominus C \quad (48)$$

$$X \ominus (B \overset{m}{\oplus} C) \supseteq (X \ominus B) \overset{m}{\ominus} C \quad (49)$$

$$X \overset{m}{\oplus} (B \oplus C) \supseteq (X \overset{m}{\oplus} B) \oplus C \quad (50)$$

$$X \oplus (B \overset{m}{\oplus} C) \subseteq (X \oplus B) \overset{m}{\oplus} C \quad (51)$$

Démonstration

Relation 48:

Par définition de la dilatation morphologique en termes d'union, $X \overset{m}{\ominus} (B \oplus C) = X \overset{m}{\ominus} (\bigcup_{c \in C} B_c)$. On utilise ensuite la relation 46 pour résoudre la question d'une érosion partielle par une union d'éléments structurants, d'où $X \overset{m}{\ominus} (\bigcup_{c \in C} B_c) \subseteq \bigcap_{c \in C} (X \overset{m}{\ominus} B_c)$. Mais en appliquant une propriété de translation démontrée précédemment et la définition de l'érosion morphologique en termes d'intersection, on a $\bigcap_{c \in C} (X \overset{m}{\ominus} B_c) = \bigcap_{c \in C} (X \overset{m}{\ominus} B)_{-c}$ encore égal à $(X \overset{m}{\ominus} B) \ominus C$. De fil en aiguille, on déduit donc que $X \overset{m}{\ominus} (B \oplus C) \subseteq (X \overset{m}{\ominus} B) \ominus C$.

Relation 49:

Par la formule de décomposition de la dilatation partielle, $X \ominus (B \overset{m}{\oplus} C) = X \ominus (\bigcap_i (\bigcup_{c \in C(i)} B_c))$. Or, $X \ominus (B \cap C) \supseteq (X \ominus B) \cup (X \ominus C)$ (consulter par exemple l'article d'Haralick [1] pour la démonstration de cette propriété), donc $X \ominus (\bigcap_i (\bigcup_{c \in C(i)} B_c)) \supseteq \bigcup_i (X \ominus \bigcup_{c \in C(i)} B_c)$. Mais comme, $X \ominus (B \cup C) = (X \ominus B) \cap (X \ominus C)$ (voir le même article), on a aussi

$\bigcup_i (X \ominus \bigcup_{c \in C(i)} B_c) = \bigcup_i (\bigcap_{c \in C(i)} X \ominus B_c)$. Or, par une propriété de translation de l'érosion partielle, ce dernier terme est égal à $\bigcup_i (\bigcap_{c \in C(i)} (X \ominus B)_{-c})$; cette dernière expression étant précisément la décomposition de l'érosion partielle de $X \ominus B$ par C . En rassemblant les diverses relations, on prouve que $X \ominus (B \overset{m}{\oplus} C) \supseteq (X \ominus B) \overset{m}{\ominus} C$.

Relation 50:

Par dualité de 48 et des opérations d'érosion et de dilatation partielles:

$$\begin{aligned} [X \overset{m}{\ominus} (B \oplus C)]^c &\supseteq [(X \overset{m}{\ominus} B) \ominus C]^c \\ X^c \overset{m}{\oplus} (B \overset{m}{\oplus} C) &\supseteq (X \overset{m}{\ominus} B)^c \overset{m}{\oplus} \check{C} \\ X^c \overset{m}{\oplus} (\check{B} \oplus \check{C}) &\supseteq (X^c \overset{m}{\oplus} \check{B}) \oplus \check{C} \end{aligned}$$

C'est bien la propriété à démontrer aux notations près.

Relation 51:

C'est à la fois une autre écriture de 50, puisque la dilatation partielle est commutative, et le dual de 49. ■

Propriété 24

$$(X \ominus B) \overset{m}{\oplus} C \subseteq (X \overset{m}{\oplus} C) \ominus B \quad (52)$$

$$(X \oplus B) \overset{m}{\ominus} C \supseteq (X \overset{m}{\ominus} C) \oplus B \quad (53)$$

Démonstration

Démontrons d'abord la première relation. $(X \ominus B) \overset{m}{\oplus} C = \bigcap_i \{(X \ominus B) \oplus C(i)\}$. Or, comme le démontre Haralick, $A \oplus (B \ominus C) \subseteq (A \oplus B) \ominus C$, ce qui équivaut à $(B \ominus C) \oplus A \subseteq (B \oplus A) \ominus C$. En conséquence, $(X \ominus B) \overset{m}{\oplus} C \subseteq \bigcap_i \{(X \oplus C(i)) \ominus B\}$. Mais comme l'intersection distribue l'érosion, cette dernière expression s'écrit $(\bigcap_i \{X \oplus C(i)\}) \ominus B$, c'est-à-dire $(X \overset{m}{\oplus} C) \ominus B$. La seconde relation est simplement la relation duale de la première. ■

On cherche à obtenir des règles de mise en cascade pour simplifier éventuellement des expressions complexes. Jusqu'à présent, toutes les règles sont des inclusions. Quid de $X \overset{m}{\ominus} (B \overset{m}{\oplus} C)$ et de $(X \overset{m}{\ominus} B) \overset{m}{\ominus} C$?

Corollaire 25 *Il n'existe malheureusement pas de relation de mise en cascade comme pour les opérations d'érosion et de dilatation morphologiques. Il existe néanmoins un ensemble que contiennent à la fois $X \overset{m}{\ominus} (B \overset{m}{\oplus} C)$ et $(X \overset{m}{\ominus} B) \overset{m}{\ominus} C$,*

$$X \overset{m}{\ominus} (B \overset{m}{\oplus} C) \supseteq (X \ominus B) \overset{m}{\ominus} C \subseteq (X \overset{m}{\ominus} B) \overset{m}{\ominus} C \quad (54)$$

De même, par dualité,

$$X \overset{m}{\oplus} (B \overset{m}{\ominus} C) \subseteq (X \oplus B) \overset{m}{\oplus} C \supseteq (X \oplus B) \overset{m}{\oplus} C \quad (55)$$

Démonstration

Inclusion de gauche:

Comme l'érosion partielle contient l'érosion morphologique et suivant une relation précédente: $X \overset{m}{\ominus} (B \overset{m}{\oplus} C) \supseteq X \ominus (B \overset{m}{\oplus} C) \supseteq (X \ominus B) \overset{m}{\ominus} C$.

Inclusion de droite:

$X \ominus B \subseteq X \overset{m}{\ominus} B$. Comme l'érosion partielle est croissante, on a que $(X \ominus B) \overset{m}{\ominus} C \subseteq (X \overset{m}{\ominus} B) \overset{m}{\ominus} C$. ■

Extensivité. Qu'en est-il de l'extensivité des opérations partielles élémentaires? L'anti-extensivité de l'érosion morphologique est garantie à condition que l'élément structurant contienne l'origine. Pour l'érosion partielle, ce n'est même pas le cas; elle n'est pas anti-extensive. Un contre-exemple illustre ces derniers propos. Prenons un élément structurant B carré de quatre pixels avec l'origine placé sur le coin supérieur gauche. Soit à traiter un ensemble X égal à B sauf que l'origine n'appartient plus à X . Le résultat de l'érosion partielle de seuil 1 de X par B est le singleton constitué de l'origine. On voit bien que, malgré que $0 \in B$, $X \stackrel{1}{\ominus} B \not\subseteq X$. Comment expliquer cela? Reprenons la formule 27 qui transforme l'érosion partielle en une union d'érosions morphologiques: la famille des $B(i)$ contient tous les sous-ensembles de B dont on a supprimé un pixel. Or, dans le cas présent, c'est précisément l'élément structurant identique à X –c'est-à-dire sans l'origine– qui contribue seul à l'union. En conclusion, si l'érosion partielle n'est pas en général anti-extensive même si l'origine appartient à l'élément structurant, c'est parce qu'elle est équivalente à une union d'érosions morphologiques par des éléments structurants qui ne contiennent pas nécessairement l'origine. Ce n'est que lorsque tous les $B(i)$ de contribution non vide dans l'union contiennent l'origine que l'érosion partielle est anti-extensive. Par dualité, la dilatation partielle n'est pas extensive.

Mise en cascade d'opérations avec des seuils différents. Dans une expression contenant plusieurs opérations partielles en cascade, on ne pourra jamais permuter les seuils. Ainsi par exemple: $(X \stackrel{m}{\ominus} B) \stackrel{n}{\ominus} B \neq (X \stackrel{n}{\ominus} B) \stackrel{m}{\ominus} B$, comme le montre la figure 1. Pareillement, $(X \stackrel{m}{\oplus} B) \stackrel{n}{\oplus} B \neq (X \stackrel{n}{\oplus} B) \stackrel{m}{\oplus} B$.

2.5 Les opérateurs composés: ouverture et fermeture partielles

2.5.1 Définitions

L'ouverture partielle résulte de la mise en cascade d'une érosion et d'une dilatation. Il n'est dès lors plus souhaitable de les définir en toute généralité au moyen d'un seuil unique quoi que dans certaines applications un seul seuil suffise. Dans l'immense famille des opérations d'ouverture et de fermeture partielles, nous aurons à effectuer un choix pour des applications concrètes. Voici les définitions intensives de ces deux opérateurs:

Définition 26 *L'ouverture partielle et la fermeture partielle de seuils (m, n) d'un ensemble X par l'élément structurant B sont définies respectivement par*

$$X \stackrel{m, n}{\circ} B = (X \stackrel{m}{\ominus} B) \stackrel{n}{\oplus} B \quad (56)$$

et

$$X \stackrel{m, n}{\bullet} B = (X \stackrel{m}{\oplus} B) \stackrel{n}{\ominus} B \quad (57)$$

Si n est choisi égal à m , on notera les opérations par $X \stackrel{m}{\circ} B$ et $X \stackrel{m}{\bullet} B$.

des exemples qu'elles ne sont ni extensives ni anti-extensives. C'est l'analogie de construction qui a guidé le choix du vocabulaire et non la similitude de propriétés.

Les opérations d'ouverture et de fermeture partielles sont croissantes mais elles ne sont nullement idempotentes. On peut distinguer plusieurs types de filtres (en prenant le sens élargi du terme "filtre"); parmi ceux-ci, signalons,

$$\begin{array}{c} X \overset{m,n}{\circ} B \\ X \overset{m}{\circ} B \\ X \overset{m,0}{\circ} B \text{ pour le codage} \end{array}$$

avec les équivalents anti-extensifs respectifs:

$$\begin{array}{c} (X \overset{m,n}{\circ} B) \cap X \\ (X \overset{m}{\circ} B) \cap X \\ (X \overset{m,0}{\circ} B) \cap X \end{array}$$

Un objectif-clef des travaux futurs est de les comparer dans la mesure du possible avec l'ouverture morphologique.

3 Deux illustrations: détection des pointes d'un objet binaire et filtrage des contours

3.1 Introduction

Par construction, "partiel" est synonyme dans bien des situations de "légère imprécision". Pour des images abîmées par un bruit poivre et sel, binaire ou à niveau de gris, l'application des opérateurs partiels se traduit par une suppression du bruit impulsif au même titre que l'application des opérations morphologiques usuelles. Par contre, le long de la frontière, leur action diffère considérablement: une figure égale à son ouvert par un certain élément structurant est déformée après emploi d'un filtre partiel de seuils non nuls. C'est donc du côté des applications qui mettent l'accent sur un traitement des contours qu'apparaîtront les nouveaux outils dérivés des filtres partiels.

Deux applications présentées dans la suite du texte étayent cette conviction. La première prescrit l'utilisation de filtres partiels pour élargir des opérateurs de détection de traits topographiques. La seconde, le lissage des contours, décrit un schéma destiné à transformer un jeu de contours de régions représentées par un plan d'étiquettes. Cette démarche, nouvelle à notre connaissance, s'apparente au raisonnement mené pour la construction du *centre morphologique*, étant étendu qu'il ne s'agit pas d'une véritable image en niveaux de gris mais plutôt d'un ensemble de régions représentées chacune par un niveau différent.

3.2 Détection des pointes d'un objet binaire

En jouant sur différentes valeurs des seuils, l'expérimentateur peut obtenir des effets fort variés sur les contours. Pour construire des outils, il suffit de reprendre les outils de détection, comme les divers gradients morphologiques, et de remplacer certaines opérations par des opérations partielles similaires.

3.2.1 Gradient partiel

L'anti-extensivité de l'érosion morphologique signifie que l'image obtenue par différence ensembliste entre une image originale et l'image érodée concentre son énergie à l'intérieur de la figure près des bords. On peut aussi bien adopter le raisonnement dual et prendre le dilaté moins l'original; le résultat s'interprète de la même manière. Par extension, le chapeau haut-de-forme est obtenu par différence entre l'original et l'ouvert. Cette série de procédés s'appliquent tout autant à des opérations partielles; c'est le prolongement naturel de la notion de gradient en présence d'un bruit sur l'image. Avant de définir, à titre d'illustration, le chapeau haut-de-forme, nous désirons souligner le rôle des seuils dans les opérations partielles: les opérations morphologiques sont très sensibles à l'élément structurant utilisé, au pixel près pourrions-nous dire, alors que les opérations partielles atténuent légèrement cette sensibilité. Cette remarque se double d'une autre considération: la construction des opérations partielles met en jeu des seuils qui conditionnent le résultat. Seule la combinaison "élément structurant-seuil(s)" conduit à une interprétation correcte. Plus que jamais, l'interpréteur doit fixer précautionneusement l'objectif pour s'en tirer à son avantage dans le dédale des opérations qui sont à sa disposition.

Définition 28 *Le chapeau haut-de-forme partiel de seuils (m,n) de X par B est défini par*

$$HF(X) = X \setminus (X \overset{m,n}{\circ} B) \quad (59)$$

Pour détecter les bords intérieurs d'un objet, il conviendra de choisir un seuil de dilata-tion égal à la longueur d'un coté de l'élément structurant. La figure 2 compare le gradient morphologique en 8-connexité, $X \setminus (X \ominus B)$, au chapeau haut-de-forme par un carré 2x2 construit avec la paire de seuils $(0, 2)$. La partie noire représente le gradient. A quelques pixels près, les résultats concordent alors même que le raisonnement sous-jacent mené diffère considérablement. A ce stade d'avancement théorique, seule l'expérience peut dicter l'utilisation de tel élément structurant ou de telle paire de seuils.

3.2.2 Recherche des coins d'une figure

Un emploi suggéré par les propriétés des opérateurs partiels est la détection des parties anguleuses puisqu'il s'agit des parties d'un objet présentant une grande sensibilité au bruit. La figure 3 illustre la détection d'angles droits d'un objet. Les traits sombres de l'image de droite sont dérivés d'un chapeau haut-de-forme par un carré 4x4 avec la paire de seuils $(0, 3)$. Le chiffre 3 est idéal car, étant inférieur à la longueur d'un côté, il empêche la détection

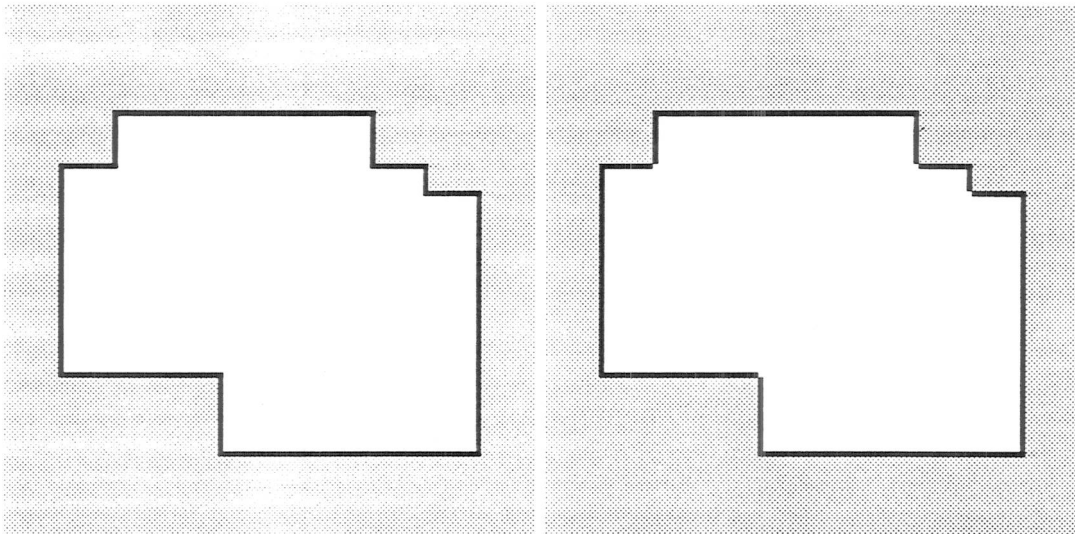


Figure 2: Comparaison de deux gradients: l'image de gauche résulte d'un gradient "classique" (l'ensemble moins l'érodé), tandis que l'image de droite a été obtenue en soustrayant l'ouvert partiel de seuils $(0, 2)$ de l'image originale.

des bords droits de la figure alors que, dans les coins, la dilatation supprime des points formant une équerre; prendre la paire $(0, 4)$ reviendrait à compléter l'équerre de sorte à former un carré 2×2 dans les coins.

Ce dernier exemple illustre simultanément l'énorme richesse que contient le concept d'érosion partielle mais également la difficulté de son utilisation et la précision demandée. Raisonner en termes d'opérations partielles et non purement morphologiques n'est pas aussi facile parce que l'imprécision introduite par les seuils ne souffre aucune interprétation simple.

3.3 Algorithmes de filtrage des contours

Muni des d'opérateurs partiels que nous venons de développer et d'étudier, il est possible de concevoir des algorithmes de filtrage des contours ayant des fonctions très spécifiques. A la différence des opérateurs, comme les filtres alternés séquentiels, où l'on utilise un élément structurant dont la taille change au fur et à mesure, les opérations que nous réalisons s'axent sur la notion de seuil et de famille d'éléments structurants parce que la finalité de ces filtres est d'obtenir des formes qui, traitées, se codent plus aisément que les formes originales sans que la dégradation ne soit prohibitive.

Le filtrage d'une seule région ou d'une collection de régions ne se conçoit pas d'une manière unique; la différence fondamentale provient du rôle de l'arrière-fond. Ou bien, l'arrière-fond n'apporte aucune information pertinente ou alors, au contraire, il constitue un objet au même titre que l'objet principal. Concrètement, ce dernier cas signifiera que les deux objets en présence sont traités sur un pied d'égalité, approche à tenir pour le filtrage

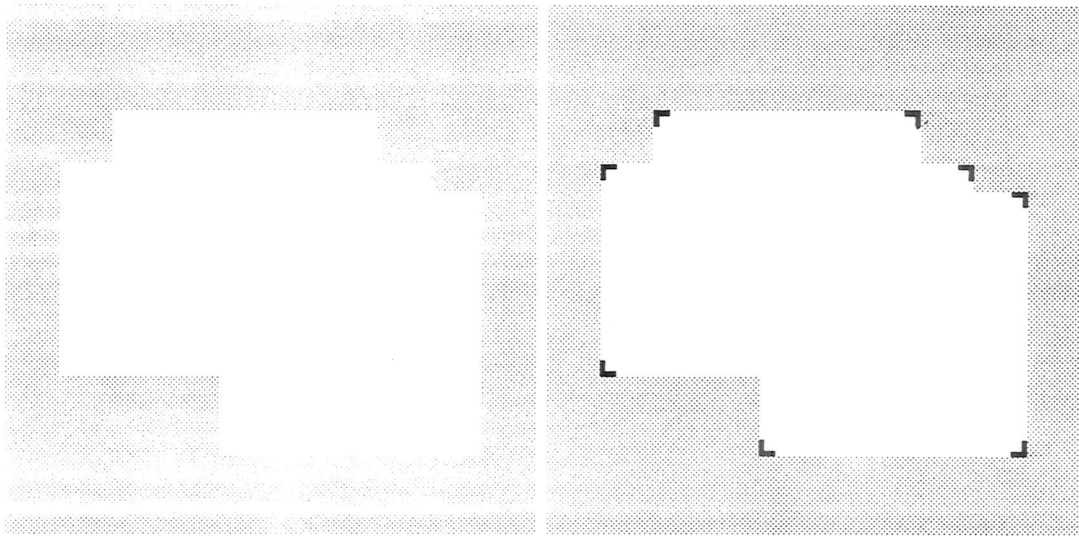


Figure 3: Détection des parties anguleuses d'un objet.

de régions. Il s'agit alors d'un filtre *auto-dual*.

Description d'un procédé de filtrage d'un ensemble de régions

La description des techniques de filtrage suit le cheminement que voici: (i) décrire les nuances algorithmiques en considérant un seul objet, (ii) appliquer (i) à un ensemble d'objets en gérant les conflits pour que le traitement soit complètement symétrique. Conceptuellement, la méthode s'apparente à celle qui conduit à la notion de *centre morphologique* pour une image binaire. La seule différence, toutefois importante, est qu'il s'agit dans le cas présent d'un plan d'étiquettes représenté par une série de niveaux de gris, ce qui n'a aucun lien avec une véritable image en niveaux de gris.

(i) *Filtrage d'une seule région.*

Nous désirons lisser le contour d'un objet X en tenant compte des éléments structurants contenus dans la palette des éléments de codage. Plusieurs considérations entrent dans la composition du procédé de filtrage d'une région:

- * **Choix de l'élément structurant.** Pour réaliser un filtrage qui agit de plein concert avec la représentation de forme, il est préférable de *choisir un élément structurant contenu dans la palette utilisée pour la représentation des contours*. Le filtrage le plus simple à construire se compose d'une érosion partielle suivie d'une dilatation partielle de seuil a priori quelconques. Prenons l'exemple de X traité par une ouverture partielle de seuils $(m, 0)$ avec un carré. Le filtre place tous les carrés dont l'intersection avec X diffère au plus de m pixels. Si le seuil de dilatation partielle est différent de 0, les certains points extrêmes des contours de l'objet ne seront pas systématiquement tous filtrés parce que la dilatation ne l'autorise pas.

* **Filtrage avec une famille d'éléments structurants et un seuil relatif.**

Pourquoi ne pas choisir plusieurs éléments structurants pour effectuer le filtrage, voire tous ceux de la palette de représentation? Nous avons choisi cette option. Le filtre procède donc en premier lieu au filtrage par ouverture par chacun des éléments structurants de la palette, puis il réunit les différents résultats. L'expression du filtre F appliqué à la région X devient:

$$F(X) = \bigcup \{X \overset{m,n}{\circ} B \mid B \in \mathcal{B}\} \quad (60)$$

La famille \mathcal{B} ne contient bien évidemment pas le pixel isolé dont l'ouverture fournirait l'ensemble X lui-même.

Il convient encore d'attribuer une paire de seuils pour chacune des ouvertures partielles. L'idée intéressante consiste à choisir une paire de seuils relatifs identiques pour tous les éléments B . La conséquence de ce choix est double: primo, dans un schéma global de codage des contours (comme celui avec une boucle de rétroaction [21]) n'interviennent plus que deux seuils, éventuellement liés, secundo, le seuil est accordé à la sensibilité au bruit de l'élément. Plus un élément est grand, plus il est sensible au bruit. En choisissant un seuil proportionnel à la surface, le filtrage autorise une erreur plus grande pour des éléments de grande taille, contrecarrant la sensibilité au bruit. En conclusion, les filtres s'expriment par:

$$F_{\alpha,\beta}(X) = \bigcup \{X \overset{\alpha,\beta}{\circ} B \mid B \in \mathcal{B}\} \quad (61)$$

où α et β sont des seuils relatifs identiques pour chaque élément structurant B . Notons que les seuils absolus sont calculés en arrondissant au plus petit entier inférieur. Par exemple, si α vaut 0.1 et $A(B) = 4$, la valeur considérée pour m sera 0.

* **Processus itératif.**

Comme le filtre n'est pas idempotent, son application répétée entraîne la disparition des trous allongés. L'itération du processus précédent a pour effet de grignoter progressivement les petites régions, en rendant l'objet pour ainsi dire plus convexe, à condition d'éloigner les risques d'oscillation en prenant une valeur éloignée de la médiane. Comme notre représentation de forme manipule des éléments de surface, le filtrage étend les grandes régions et supprime les petites régions contenues dans les grandes régions. Les parties de l'image de grande densité de contours ne subiront aucun lissage parce que la dilatation partielle l'interdit, à condition de choisir un seuil de dilatation non nul. Ainsi, les contours de l'image sont globalement conservés sans effet de lissage exagéré mais avec la particularité voulue de s'intégrer parfaitement au procédé de représentation des contours.

(ii) *Filtrage d'un ensemble de régions.*

Le problème qui se pose dans le filtrage est le partage des points qui appartiennent à l'ouvert de plusieurs régions ou celui des points délaissés par toutes les régions.

- * **Gestion des conflits d'attribution de points.** La représentation des contours concerne non pas une seule région mais une collection de régions a priori de toutes formes et de toutes tailles. La construction des filtres pour une famille de régions se résume à une simple phrase: pour filtrer une série de régions, il suffit d'*ouvrir* chaque région et de partager par une règle préfixée les points à indétermination. En d'autres termes, nous commençons par appliquer le filtre $F_{\alpha,\beta}^{\infty}$ à chacune des régions X_k de la représentation, puis les points appartenant à deux ou à aucune des régions reviennent à leur ensemble d'origine. En résumé, voici la définition mathématique du filtre de contours:

$$p \in X_k \Leftrightarrow \begin{cases} p \in F_{\alpha,\beta}^{\infty}(X_k) \text{ et } p \notin F_{\alpha,\beta}^{\infty}(X_l), \forall k \neq l, \text{ ou} \\ p \in X_k \text{ et } p \notin F_{\alpha,\beta}^{\infty}(X_l), \forall k \neq l, \text{ ou} \\ p \in X_k \text{ et } \exists l, p | p \in F_{\alpha,\beta}^{\infty}(X_l), p \in F_{\alpha,\beta}^{\infty}(X_p) \end{cases} \quad (62)$$

Un exemple d'image filtrée. Pour décrire aisément les éléments structurants intervenant dans le filtre et les seuils associés à chacun d'eux, nous avons adopté une notation "ispienne" qui précise élément après élément et leur adjoint les seuils. Par exemple, (c16 0.1 0.05 I5 0.05 0.0) signifie qu'il s'agit d'un filtre construit avec un carré de taille 16, de seuils 10% à l'érosion et 5% à la dilatation, et un losange de taille 5.

Les résultats s'interprètent suivant quelques axes tels l'influence du seuil de dilatation⁶, la variation du seuil de dilatation pour un même seuil à l'érosion, la construction d'un filtre en correspondance avec la forme des éléments structurants utilisés dans une palette de codage –à ce titre, la figure 4 illustre l'influence de la forme d'un élément structurant dans l'action des filtres partiels–, ou la progressivité du filtrage par ajout d'éléments structurants de plus en plus petits.

La forme des éléments structurants conditionne le résultat du filtrage comme en témoigne la figure 4 où l'on voit deux images filtrées par les séries (c8 0.1 0.0 c4 0.1 0.0) et (c8 0.1 0.0 I5 0.1 0.0). La différence entre les deux filtres, remplacer un carré de taille 4 par un losange de taille similaire, déteint immédiatement sur le résultat.

En plus de la complexification du raisonnement qu'entraîne l'usage de filtres partiels, la question algorithmique menant à une réalisation de ces filtres doit encore être examinée avec attention; si les développements théoriques sont avancés, il convient de surmonter les difficultés énoncées précédemment.

4 Opérations partielles sur des images en niveaux de gris

On a l'habitude de définir les opérations morphologiques simples sur des images en niveaux de gris en découpant la fonction en plateaux successifs –un plateau par valeur de gris–, puis

⁶Pour visualiser le plan d'étiquettes, nous avons utilisé un logiciel qui redistribue aléatoirement les valeurs d'une dynamique. C'est pourquoi, les niveaux de gris ne paraissent pas identiques entre les images même s'ils correspondent à une même région.

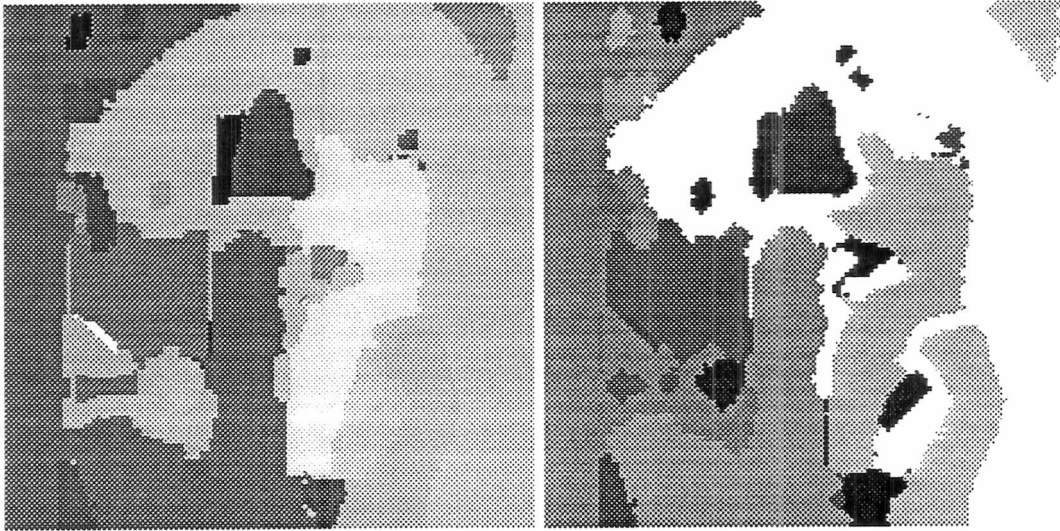


Figure 4: Influence de la forme d'un élément structurant dans la construction d'un filtre. L'image de gauche a été filtrée par des carrés de taille 8 et 4, toutes les ouvertures partielles ayant été menées avec la paire de seuils relatifs (10%, 0%). L'image de droite est obtenue en remplaçant le carré de taille 4 par un losange de diagonale 5.

par des opérations sur les ensembles de ces plateaux. Le résultat de l'opérateur sur l'image s'obtient alors par superposition des résultats dans chacun de ces plateaux. Ce procédé s'applique aux opérations partielles. L'inconvénient de cette démarche réside dans la lenteur du calcul dans une réalisation. En guise d'alternative à un découpage par tranches, il est possible de recourir à une définition qui fasse intervenir directement des opérations sur des fonctions. Dans le paragraphe suivant, nous abordons très sommairement la question de généralisation des opérations partielles à des images en niveaux de gris.

4.1 Définitions

Définition 29 (Erosion et dilatation partielles d'une fonction) Soient la fonction f à niveaux de gris et l'élément structurant plan B . L'érosion partielle, $f \overset{m}{\ominus} B$, et la dilatation partielle, $f \overset{m}{\oplus} B$ se définissent respectivement en prenant l'élément m de la suite résultant d'un tri par ordre croissant et décroissant sur \tilde{B} et B .

Tout comme pour les opérations dans le plan, l'ouverture et la fermeture s'obtiennent par combinaison des deux opérations élémentaires. Voici leur définition:

Définition 30 (Ouverture et fermeture partielles d'une fonction) Soient la fonction f à niveaux de gris et l'élément structurant plan B . L'ouverture et la fermeture partielles se définissent respectivement par

$$f \overset{m,n}{\circ} B = (f \overset{m}{\ominus} B) \overset{n}{\oplus} B \quad (63)$$

$$f \overset{m,n}{\bullet} B = (f \overset{m}{\oplus} B) \overset{n}{\ominus} B \quad (64)$$

Propriétés Maragos et van den Boomgaard étudient consciencieusement les relations entre les filtres appliqués à des images binaires et en niveaux de gris. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux références de ces auteurs ainsi qu'à la thèse de Salembier, indiquées à la fin du document, pour une étude complète des propriétés des opérateurs partiels.

5 Ajout d'une pseudo-dimension: la notion de volume

5.1 Introduction à la notion de volume

Telles qu'introduites précédemment, les opérations souffrent l'inconvénient –c'est parfois aussi un avantage– de ne pas considérer la position de la simplification introduite avec le seuil. Disons plutôt que, si le bât blesse, c'est surtout à cause de l'incapacité à gérer des notions de convexité dans les résultats des opérations partielles. Dans certaines applications, un trou à l'intérieur n'a pas la même signification qu'un pixel manquant sur le bord. Le contraire est plutôt rare. La question que suggère cette digression tient à: comment introduire une géométrie de l'erreur à partir de l'élément structurant? C'est pour résoudre cette difficulté que nous ajoutons une pseudo-dimension à chaque ensemble. Elle est définie assez simplement.

Définition 31 Soit $v(p)$, un nombre réel associé à chaque élément p d'un ensemble X . Le volume de cet ensemble noté $\mathcal{V}(X)$ est le réel obtenu par intégration (ou somme pour le cas discret) du poids de ses éléments.

$$\mathcal{V}(X) = \int_X v(x)dx \quad (65)$$

A présent, l'attribution des poids est laissée à la libre appréciation du praticien. Par un mécanisme judicieux et propre à son application, il choisit un poids pour chaque élément d'un ensemble, comme par exemple ceux de la fonction distance. Le volume peut être introduit dans chacune des opérations partielles précédentes moyennant certaines modifications. Avant toute chose, il faut définir le volume d'une intersection d'ensembles, ou ce qui revient au même, de l'union d'ensembles. Mais la tâche est ardue. En effet, de nombreuses propriétés démontrées pour des définitions avec la notion d'aire utilisent l'importante relation que voici: $X \cup Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ ce qui, en termes d'aires, équivaut à $\mathcal{A}(X \cup Y) = \mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(Y) - \mathcal{A}(X \cap Y)$. Il existe donc une correspondance bi-univoque entre la relation purement ensembliste et l'aire des ensembles. Pour le volume, ce n'est pas si simple. Si on trouve une définition pour l'intersection, il faut également proposer une définition pour l'union. Imposant que la relation précédente soit également respectée, l'union sera définie via la notion d'intersection. Pour le concept de volume d'une intersection de deux ensembles, nous utiliserons la définition suivante:

Définition 32 Soient deux ensembles X, Y et v, w , les jeux de poids respectifs. Le volume de l'intersection de ces deux ensembles vaut

$$\mathcal{V}(X \cap Y) = \int_{X \cap Y} v(p) \cdot w(p) dp \quad (66)$$

La difficulté majeure qui va apparaître sera de comparer le volume d'une intersection d'ensembles avec le volume d'un de ces deux ensembles à cause du biais qu'introduisent l'un et l'autre volume.

Si nous parlons de volume, il ne faudrait pas oublier qu'il ne s'agit pas réellement d'un volume physique parce que les poids sont attribués à des ensembles sans qu'ils ne représentent un niveau de gris. Le concept de volume défini ci-dessus s'apparente à celui de fractal, sorte de dimension intermédiaire entre l'aire et la notion véritable de volume physique pris comme portion de l'espace.

5.2 Définition des opérations partielles volumiques

Dans la morphologie mathématique, l'ensemble X et l'élément structurant ne jouent pas le même rôle. On cherche à tirer le maximum d'information sur X en utilisant B comme forme d'analyse; B est donc l'outil et X l'objet à caractériser. Par la suite, nous allons aussi introduire une différence fondamentale entre X et B dans les définitions-mêmes des opérations partielles volumiques. Elle est résumée par l'hypothèse suivante, tenue dans tous les paragraphes suivants sauf avis contraire: *l'ensemble X se caractérise par un jeu de poids valant 1 à l'intérieur et 0 à l'extérieur*. Cette dissymétrie est naturelle parce que l'élément structurant est une caractéristique connue a priori et donc accessible à l'utilisateur; il peut maîtriser son usage et le modifier à sa guise.

Après cette précision importante. Voici la définition de l'érosion partielle volumique.

Définition 33 L'érosion partielle volumique de seuil relatif m d'un ensemble X est définie comme l'ensemble des points p pour lesquels le volume de l'intersection de X par B_p est supérieur à une fraction $(1 - m)$ du volume de B , c.-à-d.

$$X \stackrel{m}{\ominus} B = \{p \in E \mid \mathcal{V}(X \cap B_p) \geq (1 - m)\mathcal{V}(B)\} \quad (67)$$

avec $m \in [0, 1]$.

La dilatation partielle volumique se définit pareillement à l'érosion partielle volumique.

Définition 34 La dilatation partielle volumique de seuil relatif m d'un ensemble X est définie comme l'ensemble des points p pour lesquels le volume de l'intersection de X par \check{B}_p est strictement supérieur à une fraction m du volume de B , c.-à-d.

$$X \stackrel{m}{\oplus} B = \{p \in E \mid \mathcal{V}(X \cap \check{B}_p) > m\mathcal{V}(B)\} \quad (68)$$

avec $m \in [0, 1]$.

5.3 Propriété

On établit assez simplement la dualité des opérations partielles volumiques

Propriété 35 (Dualité des opérations volumiques)

$$X \overset{m}{\underline{\oplus}} B = (X^c \overset{m}{\underline{\oplus}} \check{B})^c \quad (69)$$

Sans l'hypothèse des poids de X , le complémentaire ne peut être défini. Un autre moyen d'évaluer la contrainte dérive de la comparaison du calcul du volume effectué en plusieurs endroits distincts où B est complètement inclus dans X : alors que toutes ces positions satisfont notre objectif d'inclusion, la valeur du volume varie. Il n'est pas sûr que l'introduction d'un biais dans les définitions, à supposer qu'il existe une expression analytique, lève la difficulté.

5.4 Les filtres partiels volumiques

Définition 36 *L'ouverture partielle volumique et la fermeture partielle volumique de seuils (m, n) d'un ensemble X par l'élément structurant B sont définies respectivement par*

$$X \overset{m, n}{\underline{\oplus}} B = (X \overset{m}{\underline{\oplus}} B) \overset{n}{\underline{\oplus}} B \quad (70)$$

et

$$X \overset{m, n}{\overset{\bullet}{\oplus}} B = (X \overset{m}{\overset{\bullet}{\oplus}} B) \overset{n}{\underline{\oplus}} B \quad (71)$$

Si m est choisi égal à n , on notera les opérations par $X \overset{m}{\underline{\oplus}} B$ et $X \overset{m}{\overset{\bullet}{\oplus}} B$.

6 Vers le concept de polymorphisme d'un point

Comme nous l'avons montré, l'ouverture partielle met en relief les positions extrêmes des formes dans l'ensemble étudié. Le rôle majeur revient à la dilatation partielle qui se charge d'éliminer ces positions avant de les détecter par différence ensembliste avec l'original. En réalité, un point limite se caractérise par le fait que seul un élément structurant le comprend alors qu'au centre de la figure, par exemple, plusieurs répliques de l'élément structurant le comprennent; c'est alors par un dénombrement que les points se différencient. Nous formalisons cette idée par la définition de *polymorphisme d'un point*.

Définition 37 *Soit une famille \mathcal{B} d'éléments structurants et $1_Z(x)$ la fonction indicatrice de l'ensemble Z (elle vaut 1 si $x \in Z$ et 0 dans le cas contraire). Le polymorphisme d'un point x appartenant à un ensemble X est la somme des indicatrices des ouverts de X par la collection d'ensembles contenus dans \mathcal{B} , à savoir:*

$$P_B(x) = \sum_{B \in \mathcal{B}} 1_{X \circ B}(x) \quad (72)$$

Si la famille \mathcal{B} contient un seul élément structurant, le polymorphisme des points traduit tout simplement l'appartenance à l'ouvert. Pour la détection de points limites, il est utile d'étendre la définition de polymorphisme.

Définition 38 *Le polymorphisme cumulé d'un point x de X est la somme des indicatrices de tous les translats d'ensembles de \mathcal{B} inclus dans X qui contiennent le point. Plus formellement,*

$$PC_{\mathcal{B}}(x) = \sum_{p \in E} 1_{B_p}(x) \quad \text{où } B \subseteq X, B \in \mathcal{B} \quad (73)$$

Modélisation en vue d'un codage et filtrage subséquent. Pour réaliser le codage d'une forme par des éléments de surface, nous pouvons concevoir un modèle où l'objectif premier est de réduire tant que faire se peut le nombre d'éléments structurants nécessaires, quitte à modifier légèrement les contours. Regroupant les points de l'ensemble X dans un vecteur \vec{X} , la question revient à exprimer une fonction de coût proche du coût de codage, ou du moins fidèle à son principe, de sorte qu'il soit possible de déformer et de coder la figure par simple calcul, c'est-à-dire sans recherche exhaustive. La fonction qui nous servira à estimer l'efficacité de codage d'un ensemble est la fonction de polymorphisme cumulé introduite précédemment.

Définition 39 *Si le vecteur \vec{PC} reprend les valeurs de PC dans le même ordre que \vec{X} , la fonction d'efficacité $E(X)$ de l'ensemble X est définie par*

$$E(X) = \vec{PC}^T \vec{X} \quad (74)$$

Il va de soi que plus l'efficacité est élevée, plus le codage de X sera aisé. Dans le cas où il faut coder plus d'une région, c'est la somme des efficacités que nous regarderons. Par exemple, soit à coder X_1 et X_2 . L'efficacité conjointe est la somme des efficacités: $E(X_1, X_2) = E(X_1) + E(X_2)$. Pour un filtrage, il suffira de regarder l'évolution de l'efficacité pour tout changement, d'écarter ceux qui diminuent l'efficacité et de conserver dans une zone annulaire ceux qui l'augmentent fortement.

La question des aspects algorithmiques est encore ouverte.

7 Conclusions

Ce document étudie des opérations, qualifiées de *partielles*, capables de se départir dans une certaine mesure des effets de distorsion géométriques ou des effets de bruit sur les images en niveaux de gris. L'avantage des filtres définis est de traiter un ensemble et son complémentaire d'une manière plus symétrique que ne le font les opérateurs morphologiques. Outre leur efficacité de traitement, l'interprétation du paramètre, appelé *seuil* puisqu'il agit comme un seuil de la précision, demeure simple et physique. Les définitions sont accompagnées d'une étude théorique des principales propriétés des opérateurs et de l'influence de l'intersection, l'union et la complémentation –trois opérations ensemblistes usuelles– sur les

opérateurs. Dans un cadre d'idée plus large, nous avons doté les ensembles d'une pseudo-dimension en attribuant des poids à chacun des éléments de manière à guider la perte de précision. L'initiateur de tous ces développements est la volonté de disposer d'un outil de codage des objets binaires ne réagissant pas un faible bruit, volontairement introduit ou dû aux mesures, de sorte à obtenir des taux de compression élevés. De fait, le codage d'images par objet nécessite à la fois un codage de la forme, généralement appelée *contour*, et de l'aspect, souvent appelé *texture*, bien que cette dénomination soit impropre dans d'autres domaines de traitement d'images que le codage. Avec nos outils de la morphologie partielle, l'approximation d'un objet par une série d'éléments structurants de taille variable est peu sensible au bruit ce qui, en codage d'images, est plus que souhaitable. Rien n'interdit que les opérateurs soient utilisés à d'autres fins, par exemple pour du filtrage d'images. Le nouveau concept de "polymorphisme d'un point" le met en relief.

Références

- [1] R. Haralick, S. Sternberg, and X. Zhuang. Image analysis using mathematical morphology. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 9(4):532–550, July 1987.
- [2] H. Heijmans and C. Ronse. The algebraic basis of mathematical morphology; I. dilations and erosions. *Computer Graphics and Image Processing*, 50:245–295, 1990.
- [3] R. Jones and I. Svalbe. The design of morphological filters using multiple structuring elements, part II: open(close) and close(open). *Pattern Recognition Letters*, 13(3):175–181, March 1992.
- [4] P. Maragos and R. Schafer. Morphological filters – Part I: their set-theoretic analysis and relations to linear shift-invariant filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 35(8):1153–1169, August 1987.
- [5] P. Maragos and R. Schafer. Morphological filters – Part II: their relations to median, order-statistic, and stack filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 35(8):1170–1184, August 1987.
- [6] G. Matheron. *Random sets and integral geometry*. John Wiley and Sons, New York, 1975.
- [7] J. Mazille. Mathematical morphology and convolutions. *Journal of Microscopy*, 156:3–13, October 1989.
- [8] C. Ronse. Toggles of openings, and a new family of idempotent operators on partially ordered sets. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 3:99–128, 1992.

- [9] C. Ronse and H. Heijmans. The algebraic basis of mathematical morphology; II. openings and closings. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 54(1):74–97, July 1991.
- [10] P. Salembier. *Multiscale image analysis and modeling using rank order filters – Application to defect detection*. PhD thesis, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 1991.
- [11] J. Serra. *Image analysis and mathematical morphology*. Academic Press, New York, 1982.
- [12] J. Serra and L. Vincent. *Lecture notes on morphological filtering*. Ecole des Mines de Paris, 1989.
- [13] J. Serra and L. Vincent. An overview of morphological filtering. *Circuits Systems Signal Process*, 11(1):47–108, 1992.
- [14] B. Simon. *Morphologie mathématique appliquée au codage d'images par objets*. Travail de fin d'études, Université Catholique de Louvain, June 1992.
- [15] D. Sinha and E. Dougherty. Characterization of fuzzy Minkowski algebra. In *Image Algebra and Morphological Image Processing III, Vol. 1769*, pages 59–69, San Diego, July 1992. SPIE.
- [16] D. Sinha and E. Dougherty. Fuzzy mathematical morphology. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 3(3):286–302, September 1992.
- [17] J. Song and E. Delp. The analysis of morphological filters with multiple structuring elements. *Computer Graphics and Image Processing*, 50:308–328, 1990.
- [18] S. Sternberg. Grayscale morphology. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 35:333–355, 1986.
- [19] I. Svalbe and R. Jones. The design of morphological filters using multiple structuring elements, part I: openings and closings. *Pattern Recognition Letters*, 13(2):123–129, February 1992.
- [20] R. van den Boomgaard. *Mathematical morphology: Extensions towards computer vision*. PhD thesis, Amsterdam University, March 1992.
- [21] M. Van Droogenbroeck. Rapport d'activités du deuxième mandat. Document interne au laboratoire de Télécommunications et Télédétection, Université Catholique de Louvain, 158 pages, August 1992.
- [22] A. Yuille, L. Vincent, and D. Geiger. Statistical morphology and bayesian reconstruction. *Journal of Mathematical Imaging*, 1992.