

La notion de point d'ancrage : théorie et utilisation pour le développement de nouveaux algorithmes

M. Van Droogenbroeck

Septembre 2005

Référence

M. VAN DROOGENBROECK, M. BUCKLEY (CSIRO, Australia). **Morphological Erosions and Openings : Fast Algorithms Based on Anchors**, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 22 : 121-142, 2005

Motivation

- L'implémentation des opérations de base (érosion, ouverture, etc) est souvent rudimentaire.
- Peut-on accélérer le calcul des granulométries ?
- Il existe plus catégories d'algorithmes. Qu'ont-ils en commun ?
 - Certains analysent l'élément structurant
 - D'autres se basent sur la simplification du signal

La simplification du signal repose sur des propriétés mal comprises \Rightarrow théorie des points d'ancrage

Lignes directrices de la présentation

- Rappel de certaines définitions et notations
- Quelques mots sur la notion d'ouverture
 - Effets de bord
- **I. Théorie des points ancrage**
 - Définition
 - Existence
 - Propriétés (algorithmiques)
- **II. Description d'un algorithme**
 - Principe de l'algorithme
 - Contexte
 - Performances
 - Un mot sur les granulométries
- Conclusions
- **Travaux de recherche en cours**

Rappel : définitions et notations

Opérations sur les ensembles

Soient un référentiel \mathcal{E} (typiquement \mathbb{R}^n ou \mathbb{Z}^n , avec $n \geq 1$), un ensemble $X \subseteq \mathcal{E}$ et un vecteur $b \in \mathcal{E}$,

Dilatation

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b = \bigcup_{x \in X} B_x = \{x + b \mid x \in X, b \in B\}$$

Erosion

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b} = \{p \in \mathcal{E} \mid B_p \subseteq X\}$$

Pour $X \oplus B$, X et B sont interchangeable mais ils jouent un rôle différent.

Ouverture (morphologique)

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B$$

Fermeture (morphologique)

$$X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B$$

Dualité

$$X \ominus B = (X^c \oplus \check{B})^c \quad \text{et} \quad X \oplus B = (X^c \ominus \check{B})^c$$

où $X^c = \{p \in \mathcal{E} \mid p \notin X\}$ et $\check{B} = \{-b \mid b \in B\}$

Opérateurs de fonction

Le translaté de la fonction f par b : $f_b(x) = f(x - b)$.

Dilatation et érosion

$$\delta_B(f)(x) = \bigvee_{b \in B} f_b(x) = \bigvee_{b \in B} f(x - b)$$

$$\epsilon_B(f)(x) = \bigwedge_{b \in B} f_{-b}(x) = \bigwedge_{b \in B} f(x + b)$$

Ouverture morphologique $\gamma_B(f)$ et **fermeture morphologique** $\phi_B(f)$:

$$\gamma_B(f) = \delta_B(\epsilon_B(f))$$

$$\phi_B(f) = \epsilon_B(\delta_B(f))$$

Illustration



Image originale, dilatation, érosion, fermeture et ouverture par un carré 21×21 .

$\gamma_B(f)$ et $\phi_B(f)$ sont des opérations duales.

HEIJMANS and RONSE parle d'adjonction pour $(\epsilon_B(f), \delta_B(f))$:

$$\epsilon_B(f) \geq g \Leftrightarrow f \geq \delta_B(g)$$

Précisions sur les types d'ouverture

Une ouverture algébrique est définie comme un opérateur :

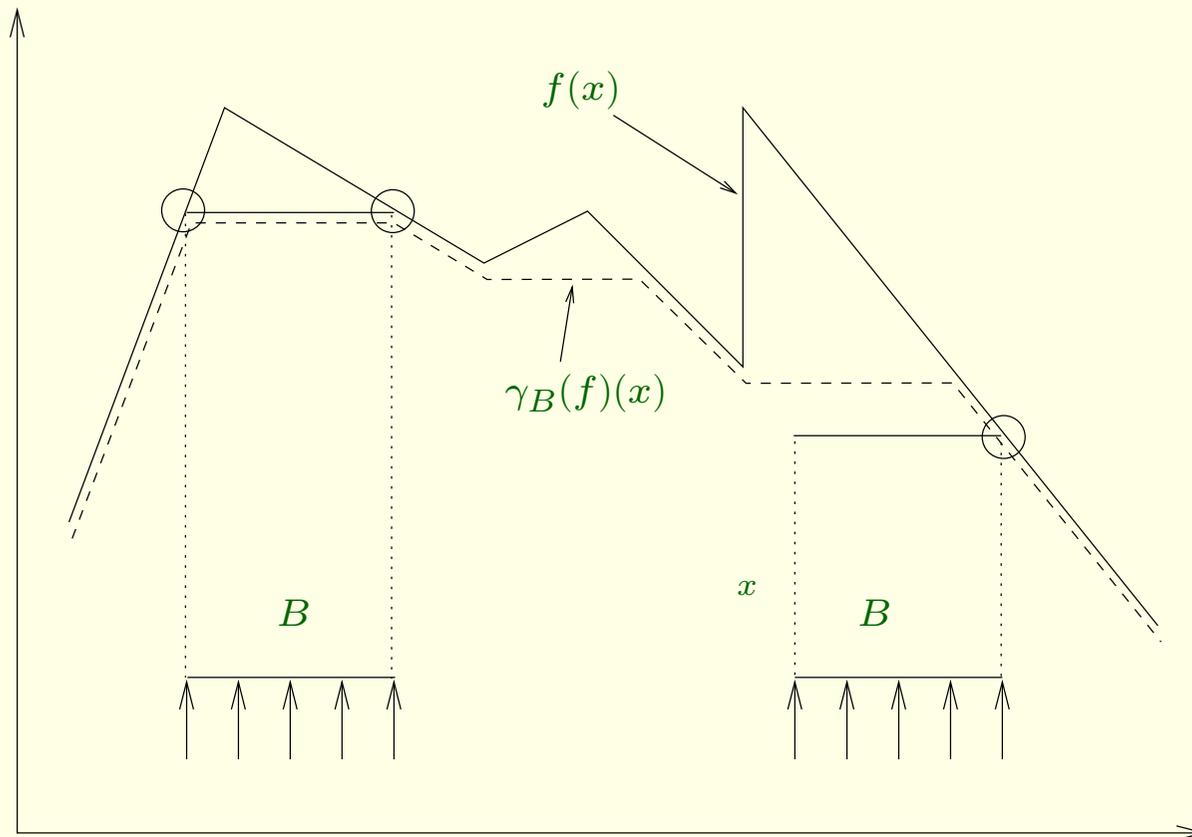
- croissant,
- anti-extensif et
- idempotent.

+ l'origine de l'élément structurant B n'a aucune importance

La famille des ouvertures algébriques comprend :

- ouvertures morphologiques,
- ouvertures de surface (area opening),
- ouvertures par reconstruction,
- ouvertures annulaires,
- ouvertures par attributs,
- etc.

Définition “géométrique” d’une ouverture morphologique



Ouverture d’une fonction unidimensionnelle par un segment

Algorithmes d'ouverture existants

Objectif :

– calcul de $\gamma_{mH \oplus nV}(f)$ où $B = mH \oplus nV$ est un rectangle.

Notation : mH , nV désigne un segment horizontal de taille m , resp. vertical de taille n .

À ma connaissance, il n'existe pas d'algorithme immédiat pour $\gamma_{mH \oplus nV}(f)$.

Remarque :

$\gamma_{nV}(\gamma_{mH}(f))$

– n'est pas égal à $\gamma_{mH \oplus nV}(f)$

– n'est pas une ouverture

Illustration



Quelques ouvertures : $\gamma_{mH \oplus nV}(f)$, $\gamma_{mH}(f)$, $\gamma_{nV}(f)$ et $\gamma_{mH}(f) \vee \gamma_{nV}(f)$.

Algorithmes existants

Problème :

- Soit à calculer $X \circ (nH \oplus mV)$ où $B = nH \oplus mV$.

Algorithmes existants

Problème :

- Soit à calculer $X \circ (nH \oplus mV)$ où $B = nH \oplus mV$.

Classification des algorithmes :

- Implémentation triviale et dérivées
- Algorithme basé sur l'histogramme
- Algorithme de VAN HERK et variantes → benchmarking
- Algorithmes applicable aux images binaires
 - Algorithmes basés sur la fonction distance
- Algorithmes basés sur l'interprétation géométrique de l'ouverture

Les effets de bord

Soit ψ un opérateur invariant en translation.

- En pratique, on observe

$$f^{(\mathcal{D})} = \mathcal{D}(f)$$

qui est une restriction de f à un domaine \mathcal{D} fini.

- Idéalement (propriété d'invariance au domaine),

$$\psi^{(\mathcal{D})}(\mathcal{D}(f)) = \mathcal{D}(\psi(f))$$

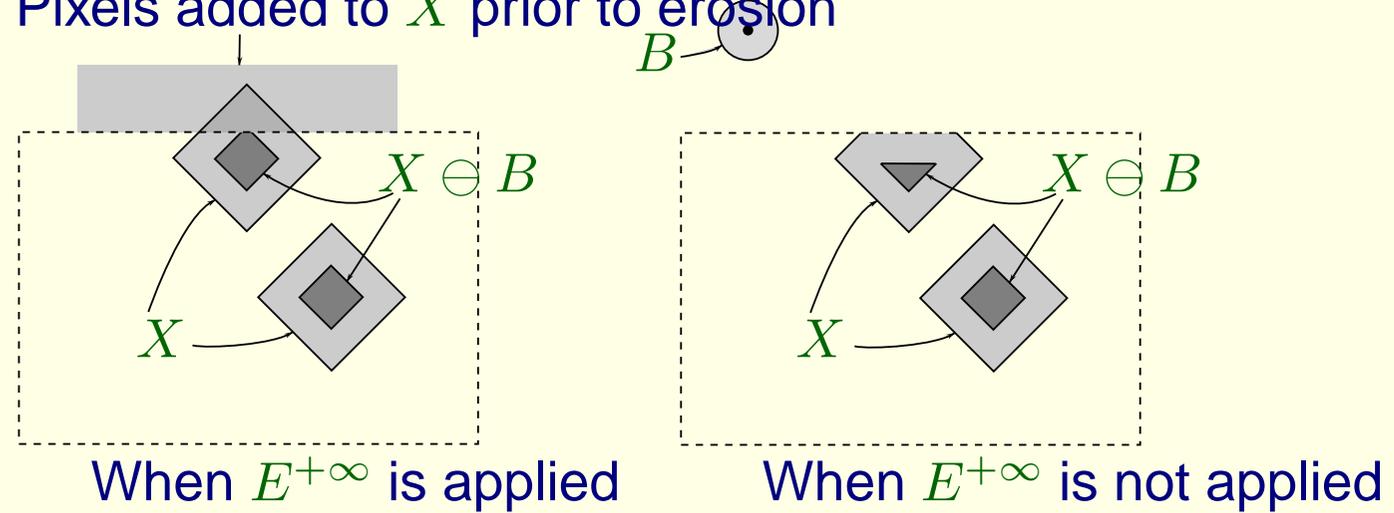
pour toute fonction f .

- Pour les implémentations, il est courant de calculer

$$\psi^{(\mathcal{D})}(f^{(\mathcal{D})}) = \mathcal{D}\left(\psi(E^{+\infty}(f^{(\mathcal{D})}))\right)$$

Illustration

Pixels added to X prior to erosion



Comparaison de 2 stratégies pour le calcul de $X \ominus B$ au bord.

Malheureusement,

$$\gamma_B^{(\mathcal{D})}(f) \neq \delta_B^{(\mathcal{D})}(\epsilon_B^{(\mathcal{D})}(f))$$

Théorie des points d'ancrages

Pour caractériser le comportement des filtres, on utilise parfois la notion de signal racine (root signal).

Définition 1 *Pour un signal racine,*

$$\psi(f) = f$$

- Théorie développée dans le cadre des filtres médians.
- La propriété de convergence

$$\psi(\psi(f)) = \psi(f)$$

est au coeur de l'analyse mais elle n'a pas de sens pour l'étude des ouvertures morphologiques.

Définitions

Définition 2 *Un point d'ancrage x pour l'opérateur ψ est défini comme*

$$\psi(f)(x) = f(x). \quad (1)$$

$A(f, \psi)$ est l'ensemble des points d'ancrage de f pour ψ .

- Existence ?
- Propriétés ?
- Quel usage ?

Existence

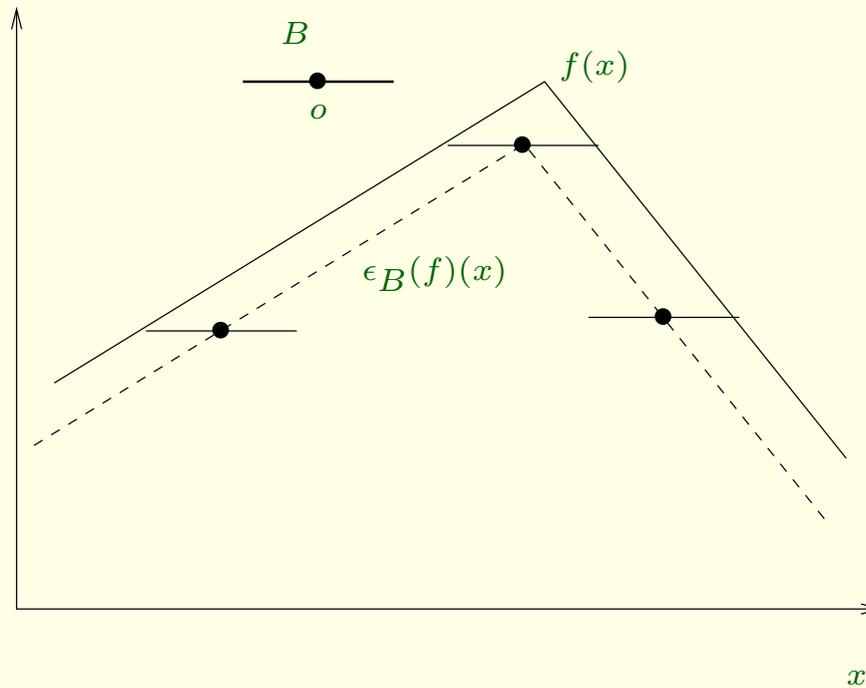
Intuitivement

Théorème 3 *Pour B fini et un domaine de définition de f fini,*

$$A(f, \gamma_B) \neq \emptyset.$$

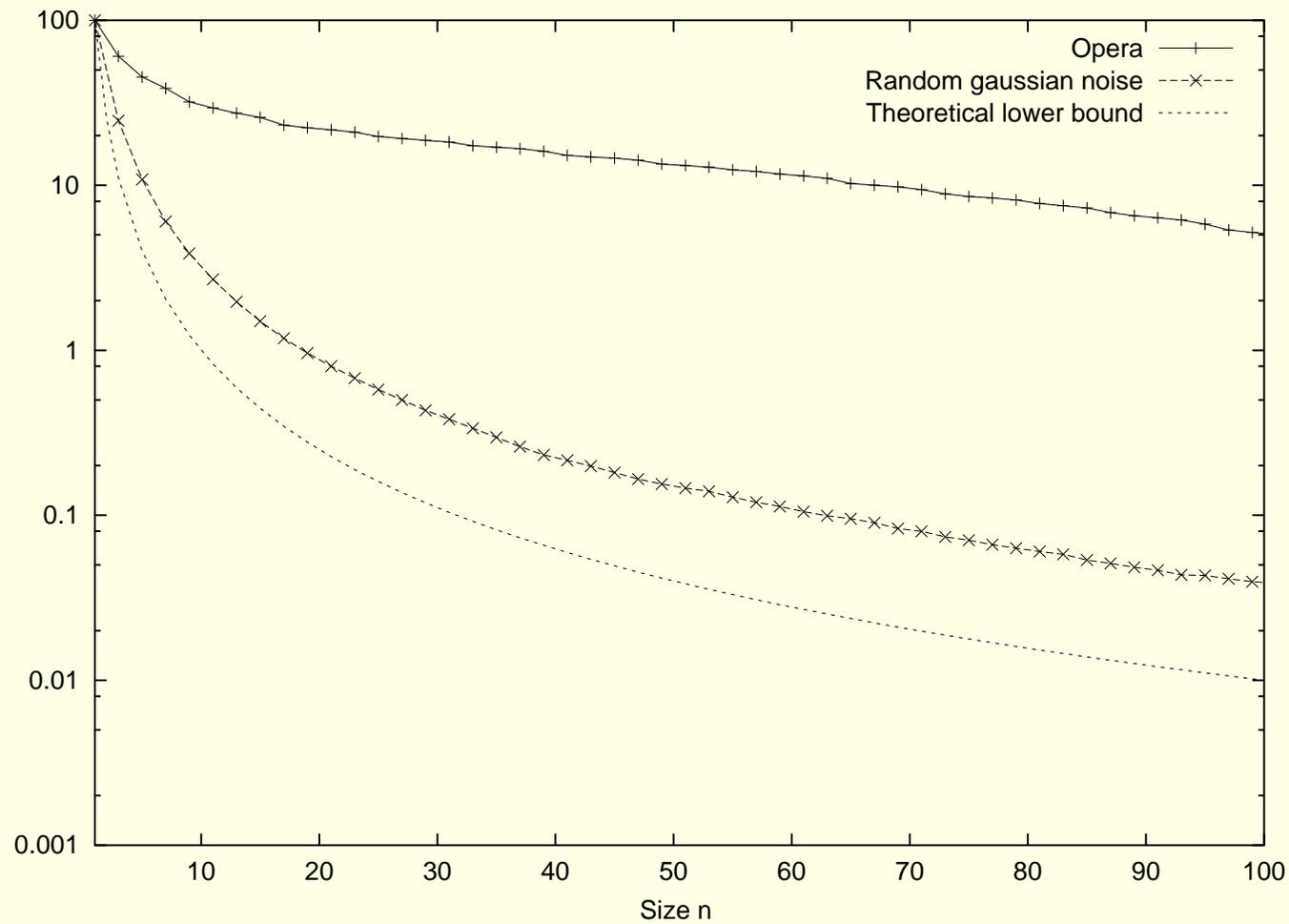
Il n'en va pas de même pour l'érosion !

Exemple d'érosion d'une fonction en forme de V retourné



$$A(f, \epsilon_B) = \emptyset$$

Densité des points d'ancrage pour $\gamma_B(f)$ avec $B = \text{carré } n \times n$



Existence de points d'ancrage ?

Comme

$$\epsilon_B(f)(x) = \bigwedge_{b \in B} f(x + b)$$

on a

Proposition 4 *Si B est fini et x appartient à \mathcal{E} , alors*

$$\epsilon_B(f)(x) = f(y)$$

pour un point $y \in B_x$.

Autres résultats

Proposition 5 *Si B est fini et x appartient à \mathcal{E} , alors*

$$\delta_B(f)(x) = f(y)$$

pour un point $y \in (\check{B})_x$.

Théorème 6 *Si B est fini et x appartient à \mathcal{E} , alors*

$$\gamma_B(f)(x) = f(z)$$

pour un point $z \in (B \oplus \check{B})_x$.

Points d'ancrage pour l'ouverture

Théorème 7 Si B est fini et x appartient à \mathcal{E} , alors

$$\gamma_B(f)(x) = \gamma_B(f)(z) = f(z)$$

pour un point $z \in (B \oplus \check{B})_x$.

Remarques :

- toute l'information relative au calcul est contenu dans les points d'ancrage de l'ouverture
- la formule ne fournit pas un moyen de trouver les points d'ancrage. C'est le rôle d'un bon algorithme.

Lien entre points d'ancrage pour l'ouverture et l'érosion

Théorème 8 Si B est fini et x appartient à \mathcal{E} , alors

$$\epsilon_B(f)(x) = \gamma_B(f)(y)$$

pour un point $y \in B_x$. De plus, y est un point d'ancrage pour l'ouverture :

$$\gamma_B(f)(y) = f(y).$$

En conséquence, la densité des points d'ancrage de l'ouverture est $\geq \frac{1}{\#(B)}$.

Densité des points d'ancrage pour une ouverture

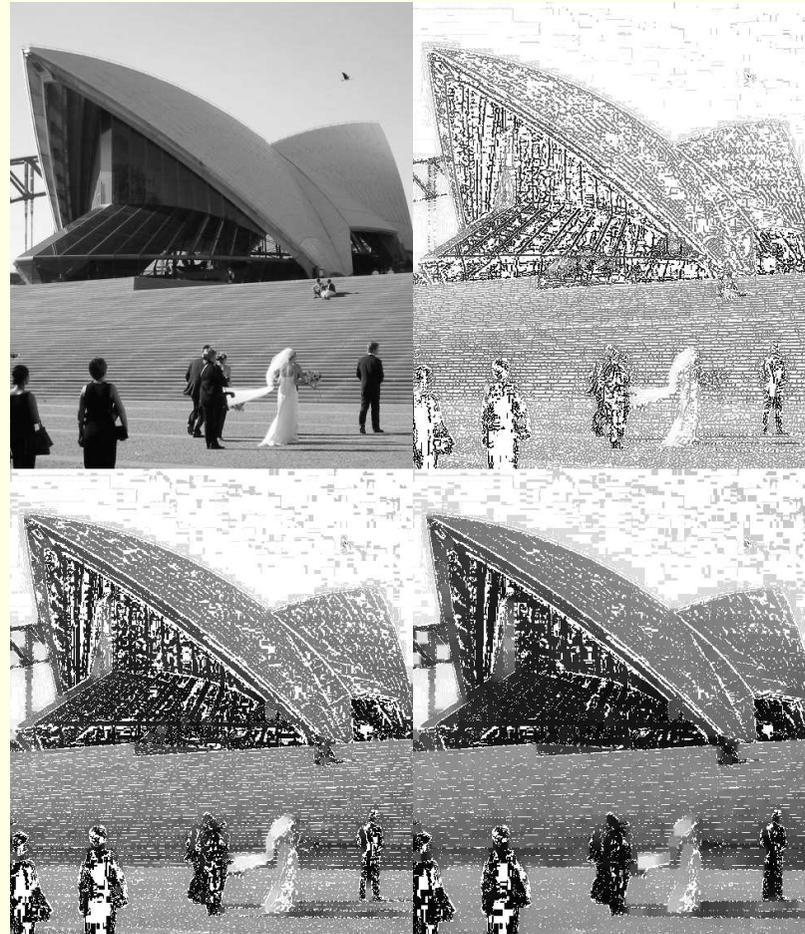


Image originale et 3 ouvertures par B (resp. de taille 3×3 , 11×11 et 21×21)

Propriétés algorithmiques des points d'ancrage

Théorème 9 Soient B fini et C, D des sous-ensembles de B tels que $C_y = B_y \cap B_x$ et $D_y = B_y \setminus B_x$. Si

$$\epsilon_C(f)(y) > \epsilon_D(f)(y)$$

alors

$$\epsilon_B(f)(y) = \gamma_B(f)(z) = f(z)$$

pour un point $z \in D_y$.

Liens entre l'érosion et l'ouverture (II)

Si B contient l'origine, on a le résultat suivant :

Théorème 10 Si $o \in B$ et $x \in A(f, \epsilon_B)$ alors

$$x \in A(f, \gamma_B).$$

En d'autres termes, tous les points d'ancrage de l'érosion sont des points d'ancrage pour l'ouverture lorsque B contient l'origine.

Éléments structurants “symétriques”

Théorème 11 *Si $\exists p \in \mathcal{E}$ tel que $B = (\check{B})_p$, alors*

$$A(f, \gamma_B) = A(f, \gamma_{\check{B}}).$$

Algorithmes

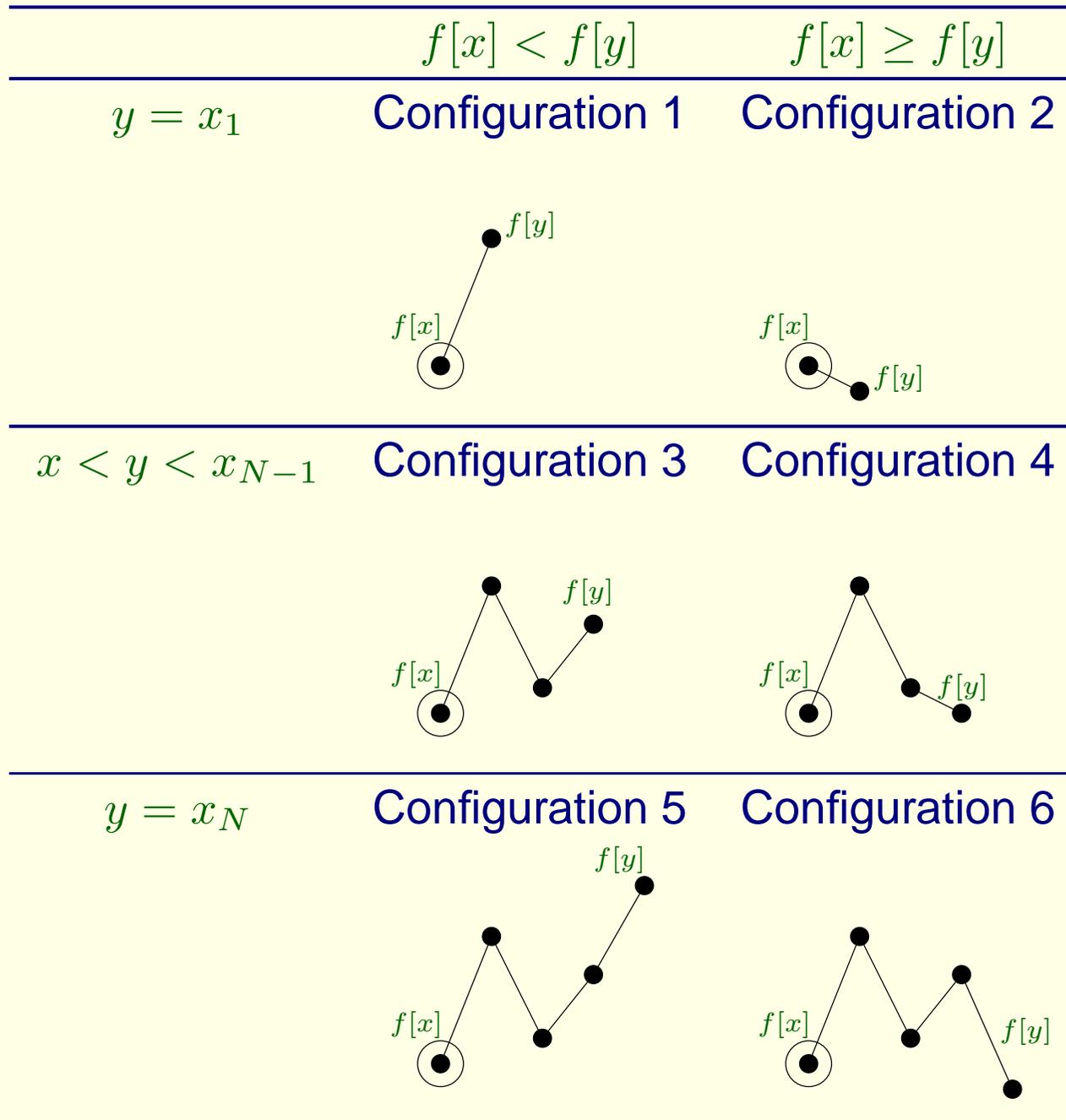
Cadre :

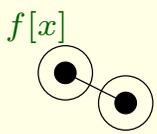
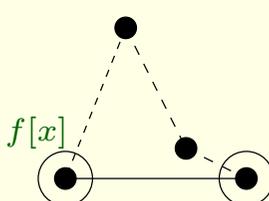
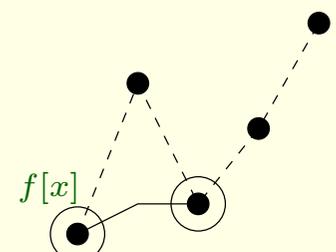
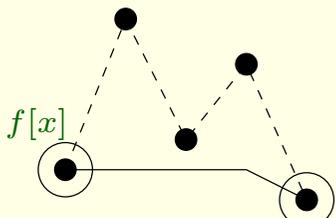
Soit à réaliser l'ouverture pour un segment de N pixels.

x est la position du dernier point d'ancrage connu, y est la position du courant.

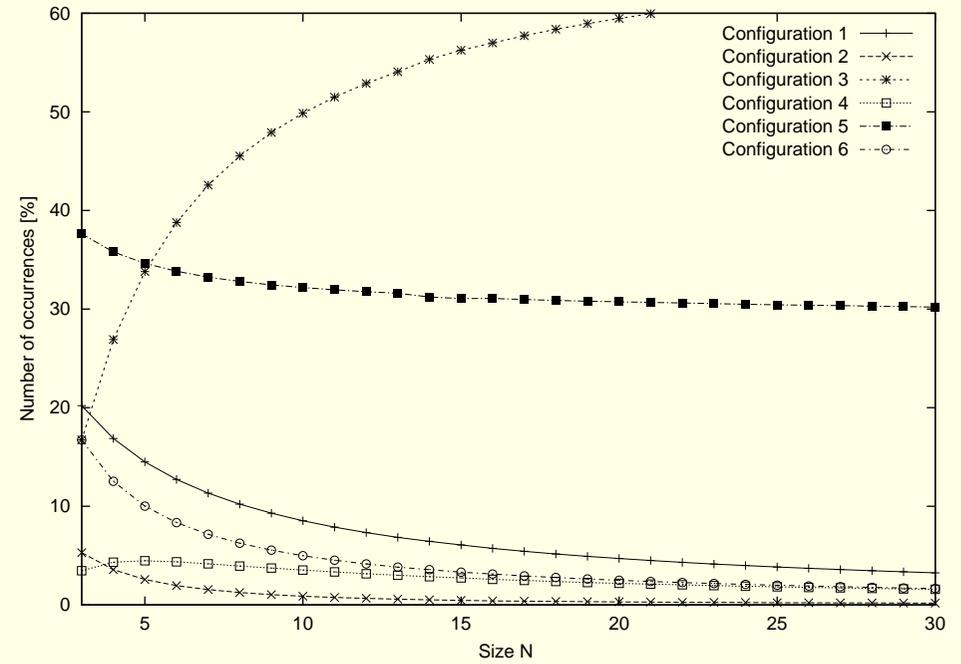
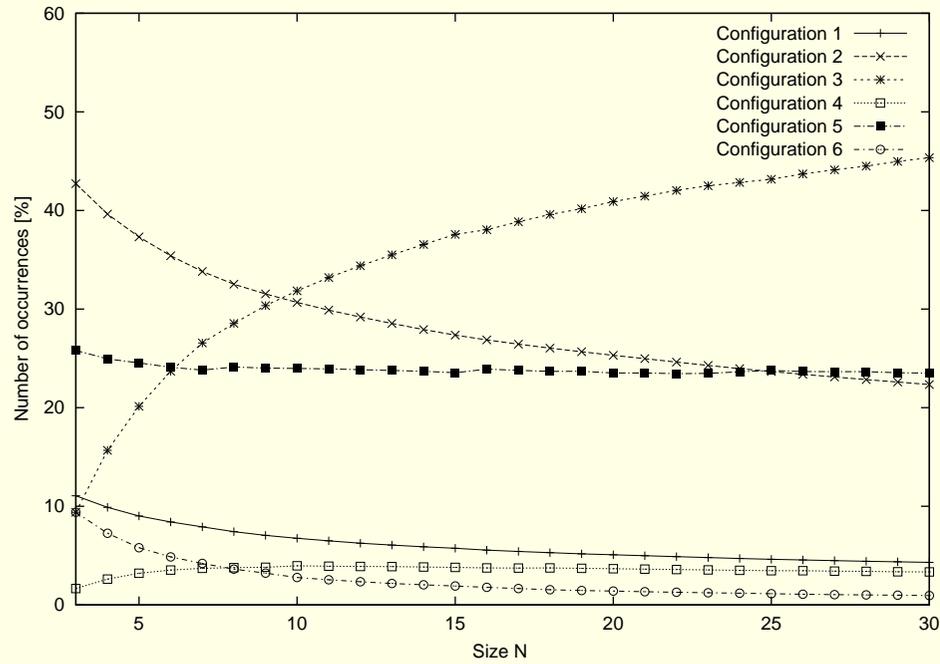
Le résultat du calcul dépend de :

- la distance entre x et y ,
- des fluctuations de la fonction entre les 2 positions,
- si $f[x] < f[y]$ ou $f[x] \geq f[y]$.



	$f[x] < f[y]$	$f[x] \geq f[y]$
$y = x_1$	Configuration 1	Configuration 2
		
$x < y < x_{N-1}$	Configuration 3	Configuration 4
		
$y = x_N$	Configuration 5	Configuration 6
		

Nombre d'occurrences de chaque configuration pour une image naturelle (opera) et aléatoire



Algorithme

f = image d'entrée, g = image de sortie.

Quelques caractéristiques :

- Initialisation

$$g[0] = f[0]$$

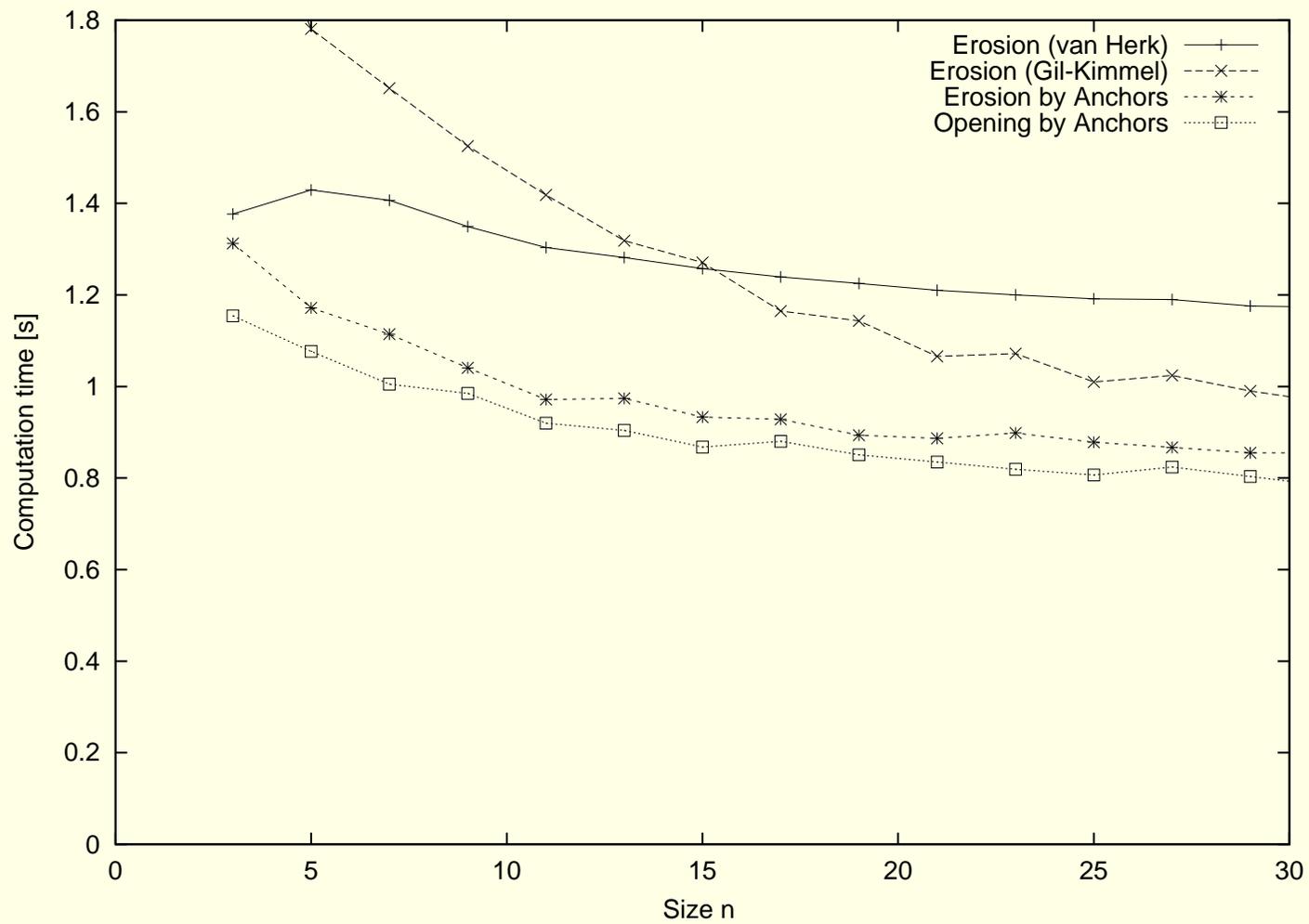
- Traitement des 6 configurations possibles (réduites à 4)
 - Aucune recherche de minimum n'est nécessaire lorsque la fonction décroît !
- L'algorithme d'ouverture travaille in situ \Rightarrow on commence par copier $f[.]$ dans $g[.]$
- Utilisation d'un histogramme lorsqu'il faut accumuler l'information du minimum local.
- Pas besoin de calcul d'indice ; condition d'arrêt simple.

Implémentation

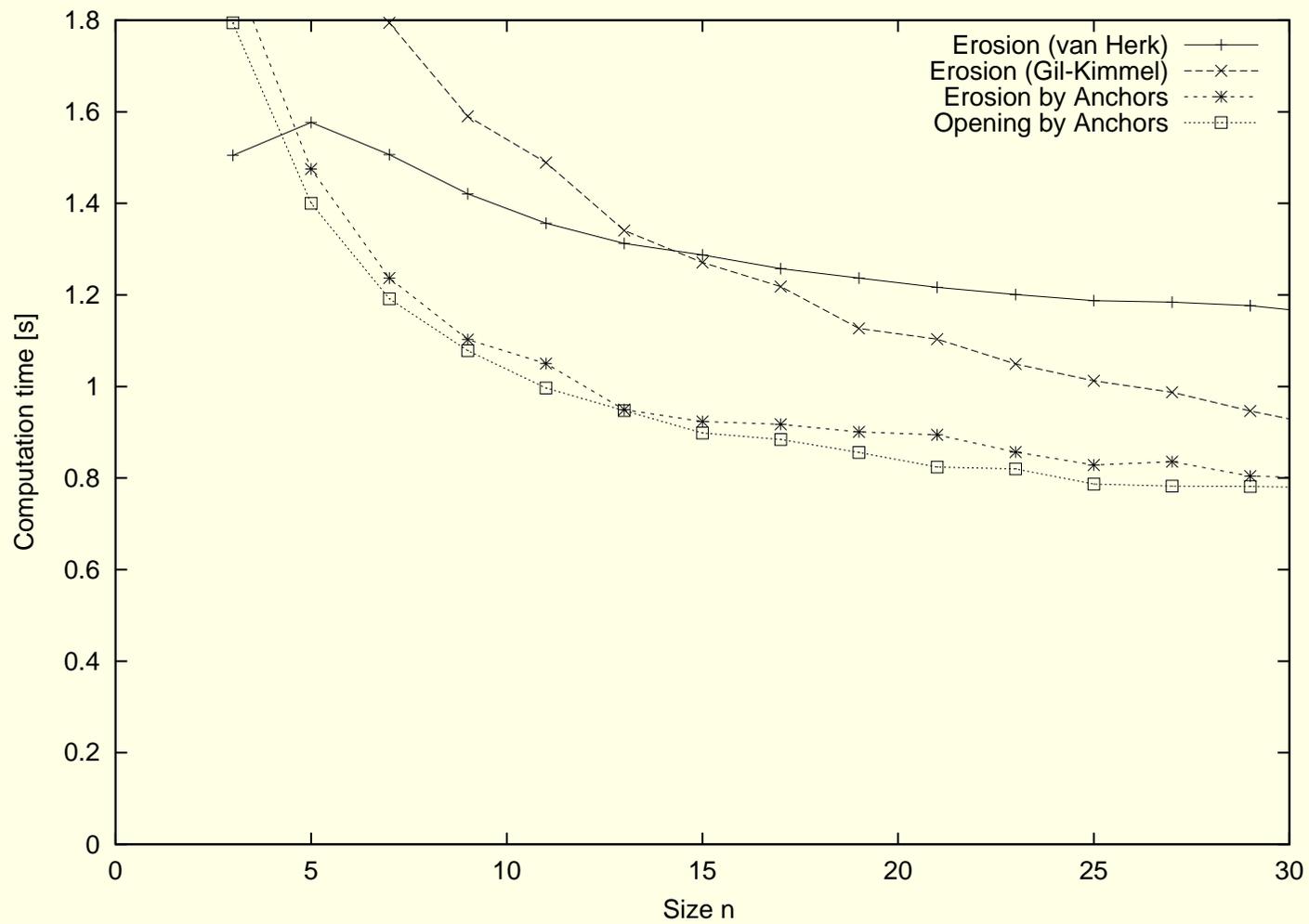
- Tous les algorithmes ont été implémentés en C.
- Utilisation de l'arithmétique de pointeurs.
- Les images sont monochromes et définies sur 8 bits.
- Les images comprennent 20 millions de pixels (5000x4000).
- Traitement correct des bords.
- Utilisation d'un histogramme local lorsque nécessaire.
- L'algorithme d'ouverture fonctionne *in situ*.

- Comparaison/benchmarking avec
 - VAN HERK
 - GIL-KIMMEL

Temps de calcul pour une image naturelle (opera)



Temps de calcul pour une image aléatoire



Un mot sur les granulométries

Travaux de L. VINCENT (1994 et +) :

– série d'ouvertures linéiques de taille croissante \Rightarrow opening trees

1. Si B contient A et B est A -ouvert, c'à-d. $A \subseteq B$ et $B \circ A = B$ alors [HEIJMANS 94]

$$\gamma_B(f)(x) \leq \gamma_A(f)(x)$$

2. Supposons que x soit un point d'ancrage pour γ_B : $\gamma_B(f)(x) = f(x)$. En vertu de l'anti-extensivité,

$$\gamma_A(f)(x) \leq f(x)$$

et donc

$$\gamma_A(f)(x) \leq f(x) = \gamma_B(f)(x).$$

3. Dès lors,

$$\gamma_A(f)(x) = f(x) = \gamma_B(f)(x)$$

Granulométries (II)

Théorème 12 *Pour toute fonction f . Si B contient A et B est A -ouvert alors*

$$A(f, \gamma_B) \subseteq A(f, \gamma_A) \quad (2)$$

On a donc un ordre entre les ensembles de points d'ancrage dans le cas de certaines granulométries.

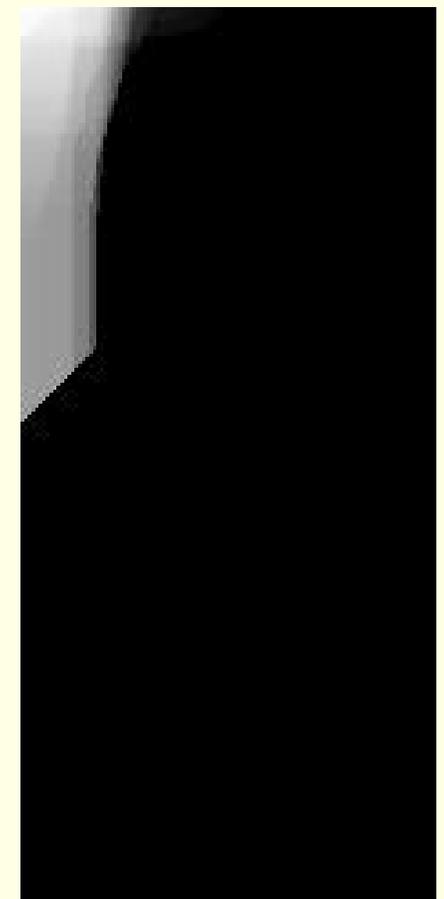
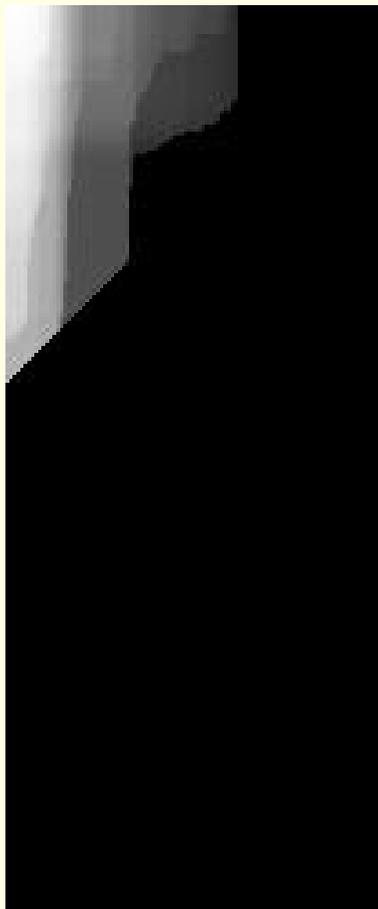
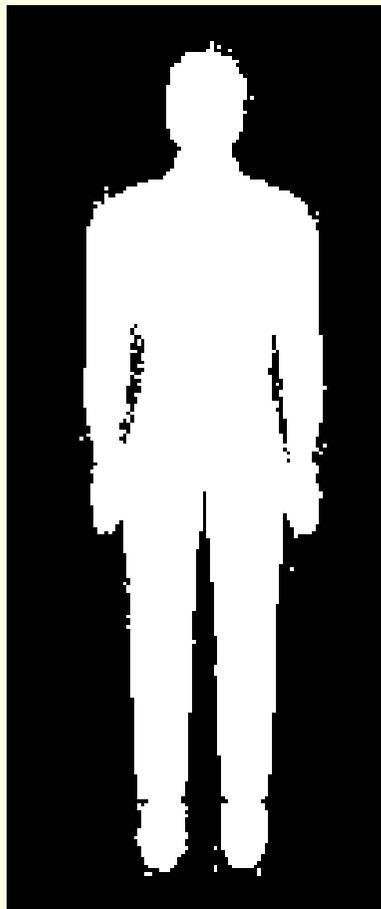
Conclusions

- La théorie des points d'ancrage est utile pour appréhender l'interaction entre les opérateurs morphologiques de base et une fonction.
- Toute l'information relative au calcul de l'ouverture et de l'érosion est contenue dans les points d'ancrage de l'ouverture.
- Il n'est pas possible d'obtenir les points d'ancrage de l'ouverture sans calcul. Il faut donc un algorithme efficace de détermination de ces points.
- Des algorithmes basés sur les points d'ancrage sont plus rapides que les algorithmes cités comme référence (existe-t-il actuellement un algorithme plus rapide ?).

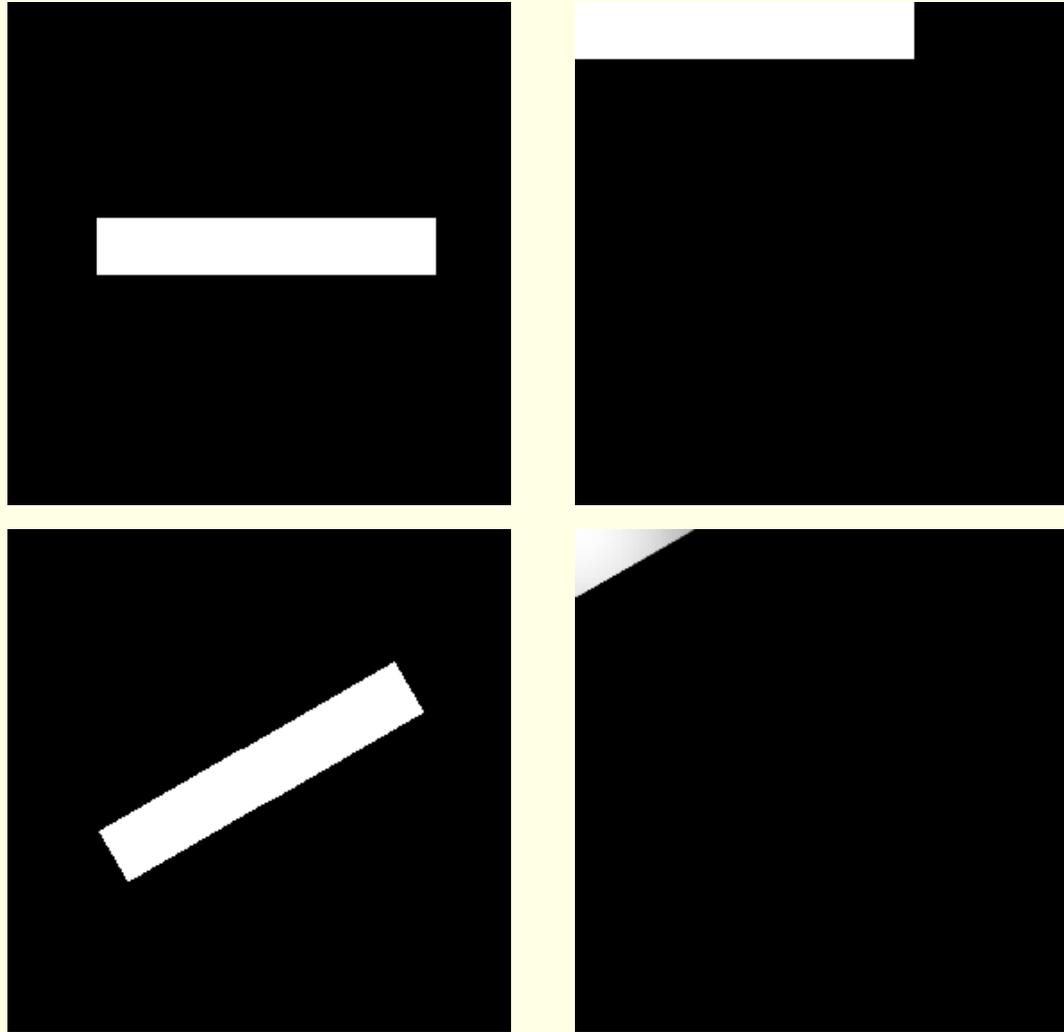
Travaux de recherche en cours (extension des granulométries)

Courbes granulométriques (size distribution) ou spectres de forme :

$$\#(X \circ (mH \oplus nV))$$

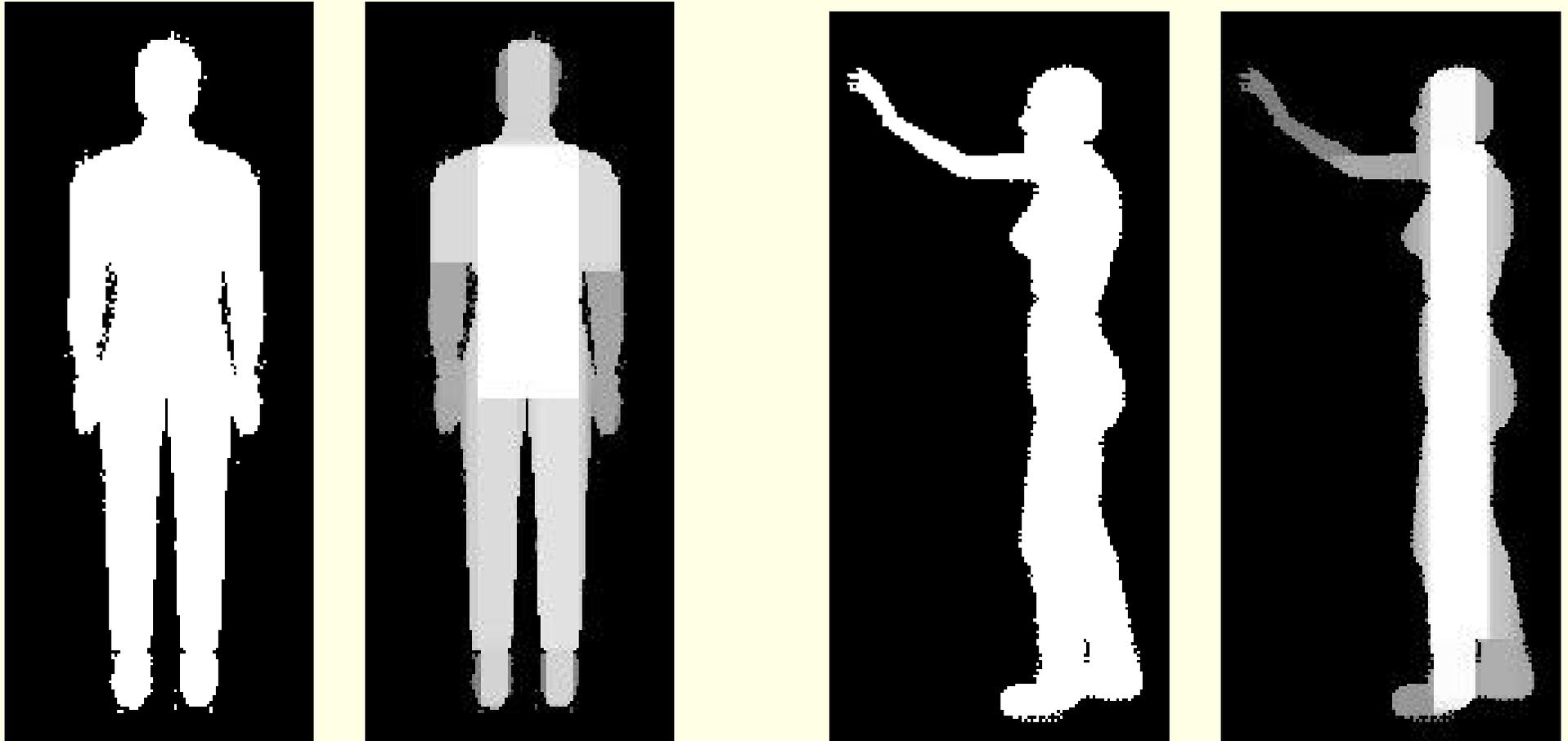


Dépendance en rotation



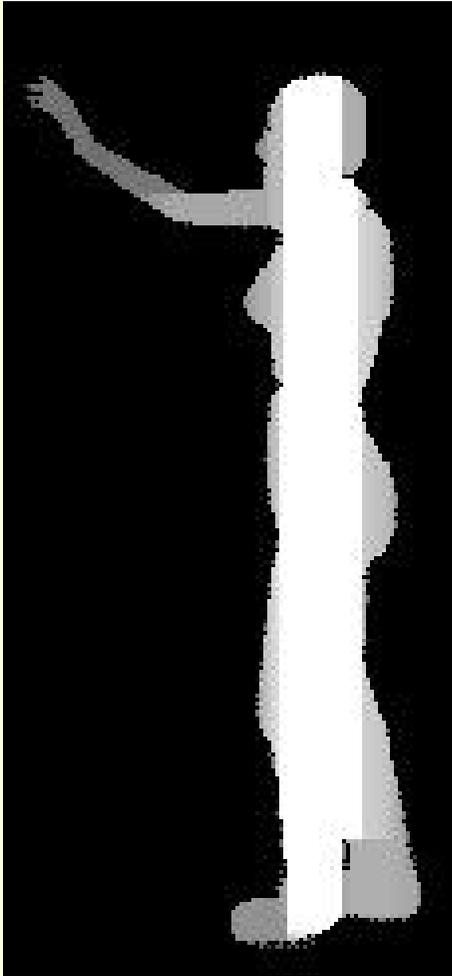
Courbes granulométriques de 2 images (à droite).

Définition de filtres morphométriques

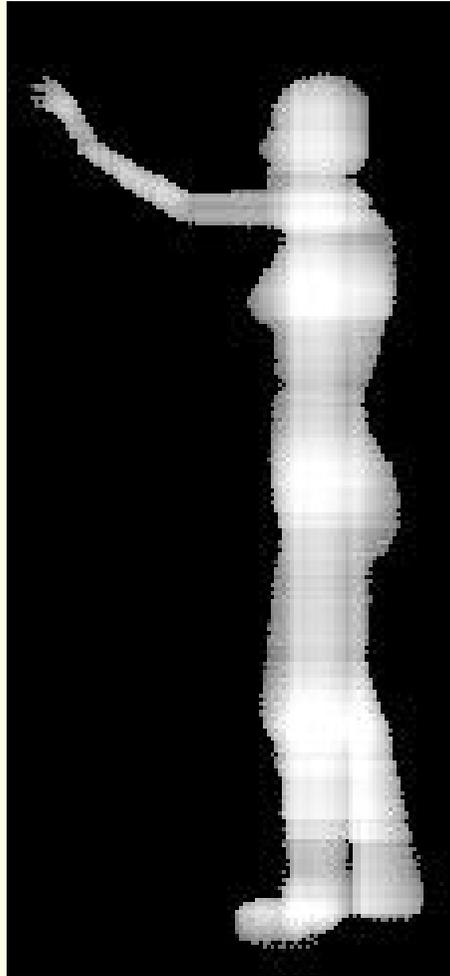


Aire du plus grand rectangle passant par chaque point.

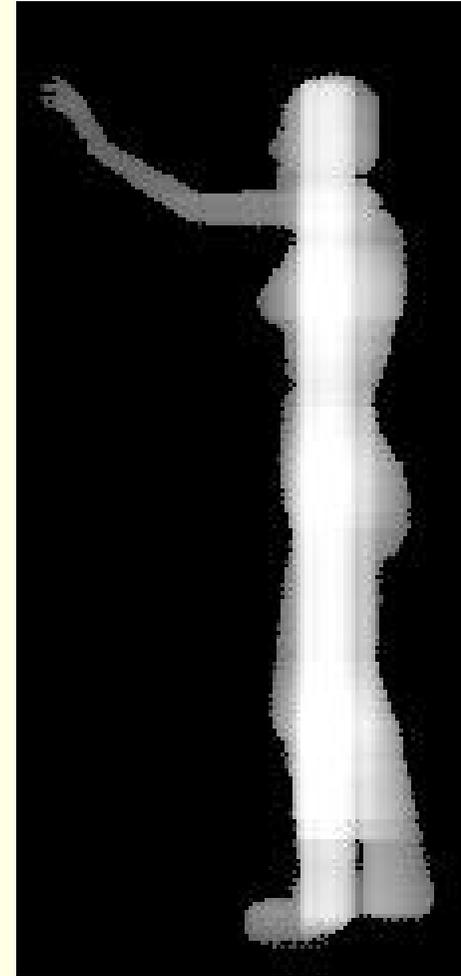
Mesures plus complexes à manipuler



(a)



(b)



(c)

(a) aire du rectangle maximum, (b) nombre de rectangles, (c) somme de l'aire de tous les rectangles, etc

Application “prudente” à des images en niveaux de gris

