Math & Manips à l'école primaire Favoriser l'apprentissage des grandeurs par des manipulations

Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Patricia Van Geet, Sylvie Vansimpsen

Mots clés : Manipulations, expérimentation, comparaison de grandeurs, transitivité de l'ordre sur les grandeurs, volume du parallélépipède rectangle.

1. Le contexte de la recherche

Le CREM est actuellement engagé dans une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par des séquences d'apprentissage intégrant des manipulations effectuées par les élèves. Nous appelons *Math & Manips* des activités conçues pour provoquer chez les élèves des conflits entre ce qu'ils pensent et ce qu'ils découvrent lors des expérimentations. Les élèves sont confrontés (par l'enseignant ou par le milieu) à des phénomènes interpellants, qui sont organisés en une suite d'épisodes pour lesquels le recours à l'expérimentation avec divers matériels pédagogiques est propice à une meilleure compréhension. L'activité expérimentale a pour but d'ancrer un nouveau concept dans la réalité.

Une *Math & Manip* doit pousser les élèves à se poser des questions et, pour les plus âgés, les amener à entrer dans des démarches de modélisation. Elle doit donner du sens aux concepts qu'elle introduit et aux outils qu'elle nécessite, et par là même, rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés par l'aspect théorique et abstrait des mathématiques.

Dans l'esprit des travaux précédents du CREM, la présente recherche envisage la scolarité dans son ensemble, depuis le début du primaire jusqu'à la fin du secondaire. Notons que trois autres activités ont déjà été brièvement présentées dans Losanges n°7 [5], une pour le cycle moyen du primaire, une pour le secondaire inférieur et une troisième pour le secondaire supérieur. Le rapport de recherche décrivant en détails ces activités finalisées en 2010-2011 est disponible sur le site du CREM. En fin de recherche l'ensemble des *Math & Manips* fera l'objet d'une publication détaillée à destination des enseignants.

L'atelier présenté au congrès de la SBPMef en août 2011 s'est concentré sur deux séquences d'apprentissage destinées aux élèves de l'école primaire. Cet article présente un compte-rendu succinct de ces deux activités (dans la forme où elles se trouvaient à ce moment). La présentation avait pour objectif non seulement de partager nos travaux mais surtout de favoriser le dialogue avec les enseignants et de recueillir leurs réactions concernant les activités encore peu testées jusque là. Les participants à l'atelier ont été invités à effectuer par eux-mêmes certaines manipulations proposées aux élèves, nous les remercions pour leurs commentaires et suggestions.

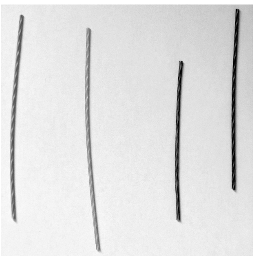
2. Le goûter d'anniversaire - Premier cycle

Avec les enfants de 6 à 8 ans, nous travaillons les grandeurs (longueurs, masses, capacités et aires) avec pour objectif de dégager des méthodes efficaces de comparaison sans unité conventionnelle de référence. Les activités sont présentées autour d'un thème : un goûter pour le septième anniversaire de la mascotte de la classe (habituellement une peluche). Au cours de la séquence d'apprentissage, les élèves sont amenés à choisir l'objet le plus long, le plus lourd, celui de plus grande capacité, ou celui de plus grande surface. Ces manipulations sont conçues pour ne nécessiter aucun recours aux mesures [8].

Une activité préliminaire est proposée afin de permettre à l'enseignant de s'assurer que le principe de conservation du volume est acquis par la plupart des élèves. Pour cela, chacun d'eux apporte un verre. L'enseignant verse dans chaque verre, devant tous les élèves, le contenu d'un petit carton de jus, puis leur demande si l'un d'eux a plus à boire que les autres. Si les enfants affirment qu'ils ont tous la même quantité à boire malgré la diversité des formes de leurs verres, les manipulations du *goûter d'anniversaire* peuvent commencer. Sinon, nous conseillons avant cette *Math & Manip* d'autres activités ciblant l'acquisition du principe de conservation du volume (voir par exemple [3]).

L'enseignant installe alors le contexte : les élèves vont fêter l'anniversaire de la mascotte de leur classe. Pour cela, ils vont être amenés à choisir les sept plus longues bougies pour mettre sur le gâteau, le moule pouvant contenir le plus de pâte, la boîte contenant le plus de bonbons, le gobelet ayant la plus grande contenance, la ficelle d'emballage la plus longue et le set de table recouvrant la plus grande surface.

2.1. Comparaison de longueurs de segments : les bougies



La classe est divisée en sept groupes et chacun d'eux reçoit un lot identique de bougies coupées à différentes longueurs. Les élèves doivent présenter à l'enseignant la bougie la plus longue de leur lot. Les sept bougies rassemblées, l'enseignant demande à un élève de vérifier qu'elles ont toutes la même longueur, puisqu'il s'agit de la bougie la plus longue de chacun des lots identiques. Ces bougies les plus longues peuvent être de couleurs différentes.

Cette activité très simple, qui se limite à la comparaison de segments rectilignes, prépare le terrain pour la comparaison des ficelles (section 2.5).

2.2. Comparaison de capacités : les moules à gâteau

Cette manipulation, menée par l'enseignant devant toute la classe, consiste à développer avec les élèves une méthode permettant de reconnaître le récipient de plus grande contenance.

Pour ce faire, l'enseignant présente trois moules différents. Notre choix s'est porté sur les moules illustrés. En les manipulant, les élèves observent leurs particularités, par exemple, un moule peut être entièrement placé à l'intérieur d'un autre, ce qui permet de déduire qu'il n'est pas celui de plus grande contenance et qu'on peut l'écarter. La comparaison des deux autres moules, l'un plus haut et l'autre plus large, nécessite une technique plus élaborée. Suite à une discussion avec les élèves, l'enseignant remplit d'eau un premier moule puis transvase son contenu dans le second. Les élèves sont amenés à se rendre compte que, s'il n'est pas possible de verser toute la quantité d'eau du premier moule dans le second, cela signifie que le premier moule a une capacité supérieure au second. De même si, ayant versé toute l'eau du premier moule dans le second, ce dernier n'est pas rempli, cela signifie que le second moule a une capacité supérieure au premier. Cette technique de transvasement, proposée par l'enseignant et mise en œuvre par lui seul devant la classe, sera travaillée individuellement par les élèves lors de la comparaison des gobelets (section 2.4).

2.3. Comparaison de masses : les boîtes à bonbons

La manipulation suivante amène les élèves à comparer des masses sans les mesurer. Elle s'effectue avec des petits groupes d'élèves, à tour de rôle. Pendant ce temps, ceux qui ne manipulent pas sont invités à réaliser des décorations pour garnir la table le jour de la fête.

L'enseignant présente aux élèves quatre boîtes identiques et opaques contenant les mêmes bonbons. Il explique qu'il a préparé ces boîtes pour différents groupes d'enfants, en comptant trois bonbons par enfant. Parmi les quatre boîtes, l'une d'elles est destinée à ses élèves qui constituent le groupe d'enfants le plus nombreux. Mais l'enseignant a oublié de noter les destinataires de chaque boîte. La tâche des élèves consiste à retrouver, sans l'ouvrir, la boîte qui leur est attribuée. La première étape est de comprendre que, si la classe représente le groupe le plus nombreux, leur boîte est celle qui contient le plus grand nombre de bonbons, et est donc la plus lourde.

Les premières réactions consistent à soupeser les boîtes et à les secouer pour « entendre » si l'une d'elles contient un nombre significativement différent de bonbons. Les boîtes sont remplies de manière à ce que l'une de ces techniques (ou les deux) permette d'exclure une boîte par une expérience purement sensorielle. Pour comparer les trois boîtes restantes, il faut recourir à une technique plus précise. Nous proposons d'utiliser une balance à deux plateaux (balance de Roberval), qui permet des comparaisons des boîtes deux par deux. C'est donc la transitivité de l'ordre sur les grandeurs qui est utilisée implicitement par les élèves dans la plupart des cas pour déterminer la boîte la plus lourde. Si tous les groupes n'ont pas sélectionné la même boîte, la balance à plateaux est utilisée devant l'ensemble des élèves pour les mettre d'accord. Il s'ensuit une vérification : l'enseignant ouvre la boîte choisie unanimement et chaque enfant prend trois bonbons. Si le choix de la boîte est correct, il doit y en avoir pour tout le monde.

2.4. Comparaison de capacités : les gobelets

Parmi quatre gobelets, sélectionnés de sorte que le plus haut ne soit pas celui qui a la plus grande capacité, les élèves ont la consigne de choisir celui qui peut contenir le plus de grenadine. Comme lors des comparaisons précédentes, une première analyse de la situation permet d'écarter un gobelet de contenance visiblement plus petite que les autres. Ensuite, les élèves doivent réinvestir les apprentissages réalisés lors de la comparaison des moules à gâteaux, et procéder par transvasements d'eau. Les élèves comparent les récipients deux par deux et conservent, après chaque transvasement, le gobelet ayant la plus grande capacité. Ils devraient ici encore appliquer spontanément le principe de transitivité.

2.5. Comparaison de longueurs : les ficelles d'emballage

L'enseignant explique aux élèves qu'il souhaite emballer le gâteau d'anniversaire dans une boîte fermée à l'aide d'une ficelle d'emballage. Il présente un ensemble de ficelles : les unes sont enroulées, les autres torsadées et les dernières déroulées. Les longueurs à comparer ne se présentent plus d'emblée comme des segments rectilignes. Les ficelles proposées ont une longueur de plus d'un mètre cinquante afin d'éviter au maximum la tentation d'utiliser la règle pour les mesurer. La classe est partagée en plusieurs groupes pour travailler. L'enseignant remet à chacun d'eux un lot de ficelles différentes et leur demande de trouver la ficelle la plus longue. Pour les comparer, les élèves tendent les ficelles et les mettent bord à bord, pour se ramener à une situation semblable à celle des bougies.

2.6. Comparaison d'aires : set de table ou serviette ?

L'enseignant souhaite protéger les bureaux des élèves pour le goûter et donne le choix entre un set de table ou deux sortes de serviettes. Il présente aux élèves des lots identiques d'éléments et leur demande de déterminer celui qui recouvre la plus grande surface de leur table. Comme prévu pour les manipulations précédentes, un élément est, à première vue, bien plus petit que les autres et est écarté. Il s'agit d'une petite serviette.

Pour comparer les deux éléments restants, les élèves doivent penser à les superposer et ainsi se rendre compte que le set dépasse de la serviette et que c'est donc lui qui recouvre la plus grande surface.

2.7. La synthèse... et le goûter !

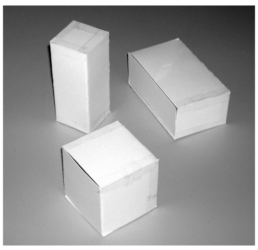
Après ces manipulations, une synthèse est nécessaire, comprenant à la fois l'ensemble des démarches effectuées par les élèves et des éléments plus théoriques. Elle se fait en deux temps : oralement lorsque les élèves expliquent ce qu'ils ont découvert au fil de la *Math & Manip* et ensuite par écrit. Les élèves pourraient dessiner eux-mêmes ce qu'ils viennent de découvrir. Cette dernière partie est laissée à l'initiative des enseignants étant donné que le matériel utilisé et les réflexions proposées par les élèves peuvent varier d'une classe à l'autre. Toutefois, des pistes seront données dans les fiches qui accompagneront cette activité lors de la publication. L'ensemble des activités se termine par la fête d'anniversaire.

3. Volumes - Troisième cycle

L'ensemble des manipulations destinées aux élèves de 10 à 12 ans a pour objectifs l'appropriation de la notion de volume et la découverte de la formule du volume d'un parallélépipède rectangle ainsi que la construction de liens entre quelques unités de volume. Nous avons délibérément choisi de travailler d'emblée sur des boîtes parallélépipédiques sans passer par des boîtes cubiques comme c'est le cas dans de nombreux manuels scolaires. En effet, il nous a semblé que le rôle de chacune des trois dimensions est plus perceptible dans le cas général. L'activité préalable portant sur la notion même de volume est en cours d'élaboration et n'est pas présentée ici.

3.1. Comparaison de boîtes

Dans le cas qui nous occupe ici, le mot volume est compris comme grandeur, c'est-à-dire comme la place qu'occupe l'objet.



L'enseignant présente aux élèves trois boîtes de forme parallélépipédique de dimensions très différentes mais de volume assez proche, par exemple une boîte cubique, une boîte assez haute et une troisième assez large. L'enseignant demande de trouver la boîte la plus grande. La boîte « la plus grande » est-ce celle qui est la plus haute, la plus large, la plus longue ? Cette discussion fait surgir la nécessité de préciser la question : nous souhaitons trouver la boîte qui a le plus grand volume.

Les élèves cherchent alors un moyen de comparer les volumes des trois boîtes. Une manière de procéder consiste à remplir les différentes boîtes de cubes. La boîte pouvant contenir le plus grand nombre de cubes est celle qui a le plus grand volume.

3.2. Découverte du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle

Chaque groupe reçoit 4 boîtes et 38 cubes de 2 cm d'arête. La consigne donnée est la suivante : combien de cubes sont nécessaires pour remplir chaque boîte ?

Le nombre de cubes donnés permet de remplir entièrement la première boîte et de remplir une base ainsi qu'une partie d'un second « étage » de la deuxième. Pour la troisième boîte, il est possible de remplir une base et de construire une hauteur. Quand à la quatrième boîte, il y a assez de cubes pour construire une longueur, une largeur et une hauteur.

Connaissant l'aire d'un rectangle, les élèves trouvent assez vite que le nombre de cubes nécessaires à remplir un étage correspond au nombre de cubes placés dans la longueur multiplié par le nombre de cubes mis dans la largeur. Ce nombre trouvé, ils le multiplient par le nombre d'étages qu'ils peuvent construire. Il est très important que les élèves notent, pour chaque boîte, la démarche qu'ils ont utilisée. Celle-ci sera expliquée lors de la mise en commun et, par la suite, lors de la synthèse construite avec eux.

Cette activité met en exergue deux manières de calculer le volume d'un parallélépipède, soit en multipliant la base par la hauteur, soit en multipliant les trois dimensions entre elles. Il nous paraît important de privilégier la première façon car elle sera valable pour calculer le volume de n'importe quel prisme, contrairement à la multiplication des trois dimensions.

Notons que, dans toute l'activité, le volume s'exprime en nombre de cubes. Nous souhaitons par là favoriser une image mentale associant le volume à un nombre de solides-étalons et pas à la multiplication de trois longueurs.

3.3. Calcul du volume d'un parallélépipède rectangle en cm^3

Il s'agit à présent de suivre la même consigne que précédemment mais avec 50 cubes de 1 cm d'arête. Le remplissage systématique des boîtes est si fastidieux que les élèves y renoncent et choisissent de compter le nombre de cubes qu'ils peuvent aligner sur chaque dimension. Si la mesure du volume d'une boîte correspond au nombre de cubes que l'on peut y ranger, nous obtenons, pour chaque boîte, deux mesures différentes du volume en fonction des cubes utilisés. Une discussion est engagée avec les élèves sur le statut à accorder à ces deux réponses différentes, sur le choix du cube à utiliser comme étalon et sur le caractère arbitraire de ce choix. La nécessité d'un cube étalon universel est ici mise en évidence.

L'enseignant propose alors de chercher le lien existant entre le cube de 2 cm d'arête et celui de 1 cm d'arête. Les élèves sont évidemment tentés de dire qu'il est de volume double puisque l'arête est multipliée par deux mais la manipulation permet de trouver et de comprendre que le rapport est 8.

3.4. Une boîte particulière

Une nouvelle boîte est proposée aux élèves, il s'agit d'un décimètre cube. L'enseignant demande aux élèves de calculer son volume. Vu le choix du cm^3 comme étalon, la plupart des élèves trouvent 1000 cm^3. C'est le moment d'établir l'égalité $1\ dm^3 = 1000\ cm^3$. Certains élèves se réfèrent au cube de 2 cm d'arête et trouvent que 125 cubes sont équivalents au volume de la boîte particulière. Il est alors opportun de remarquer avec eux qu'un unique cube de 1 dm d'arête contient 125 cubes de 2 cm d'arête (qui contiennent chacun 8 cubes de 1 cm d'arête) et prend autant de place que 1000 cubes de 1 cm d'arête.

3.5. Lien entre deux unités de mesure de volume

L'enseignant propose aux élèves de chercher le volume d'une boîte dont une dimension est donnée en décimètres et deux en centimètres (ces deux dernières étant des multiples de 10). Deux solutions s'offrent aux élèves mais dans les deux cas, une conversion d'unité est nécessaire. Certains élèves répondent en cm^3 et d'autres en dm^3, situation idéale pour réfléchir à l'équivalence de ces deux mesures.

4. Conclusion

Cet article présente deux *Math & Manips* conçues pour les premier et troisième cycles du primaire.

Dans la première, les enfants découvrent diverses méthodes de comparaison selon les grandeurs avec lesquelles ils travaillent et se forgent des intuitions relativement aux domaines de validité des techniques qu'ils possèdent déjà, ce qui crée l'espace nécessaire à la mise en place de nouvelles procédures, plus efficaces.

Dans la seconde, les élèves mettent progressivement en place des procédures pour déterminer le nombre de cubes de référence nécessaires au remplissage de boîtes parallélépipédiques. Tout en dégageant la formule de calcul du volume d'un parallélépipède rectangle par des manipulations qui lui donnent du sens, ils sont confrontés à la nécessité de s'accorder sur un étalon, et construisent les liens entre certaines unités de volume.

Les différents conflits rencontrés au cours de ces séquences d'apprentissage incitent les élèves à questionner leurs conceptions préalables, à identifier les cas où l'impression visuelle suffit et à mettre en œuvre des méthodes efficaces dans les autres cas.

Pour terminer, soulignons que, en ce qui concerne l'école primaire, l'objectif n'est pas tant l'introduction de manipulations dans les classes, car celles-ci y ont généralement leur place, mais bien la mise en évidence, pour l'enseignant, des savoirs mathématiques impliqués et des conditions nécessaires à leur mobilisation.

Pour en savoir plus

Pour plus d'informations concernant les activités du CREM vous pouvez consulter notre site :

`www.crem.be.`

Pour tout renseignement complémentaire concernant les *Math & Manips* n'hésitez pas à nous contacter via l'adresse `info@crem.be`. Si vous êtes intéressé par l'essai d'une de ces *Math & Manips* dans votre classe, nous vous communiquerons les documents nécessaires au bon déroulement de l'activité.

Pour les activités précédemment décrites dans [5], les documents complets, y compris les fiches de travail, sont disponibles au téléchargement sur le site du CREM (Recherche *Math & Manips*, rapport 2011).

Pour en savoir plus

[1] Bkouche R., *Du caractère expérimental des mathématiques. À propos des laboratoires de mathématiques. Repères IREM* n°70, 2008, pp. 123–137.

[2] Borel É., *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire,* Musée Pédagogique, Paris. Conférence prononcée le 3 mars 1904. `http://www2b.ac-lille.fr/apmep/fic_labo/borel.htm`.

[3] CREM, *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur.* N. Rouche coordinateur, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, 2002.

[4] Dias T. et Durand-Guerrier V., *Expérimenter pour apprendre en mathématiques*, *Repères IREM* n°60, 2005, pp. 61-78.

[5] Guissard M.-Fr. *et al.*, *Math & Manips.* Losanges n°7, 2010, pp. 39-46.

[6] Henry V. *et al.*, *Math & Manips : Introduction de manipulations dans les classes pour favoriser la construction des apprentissages.* À paraître in *Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants.* Actes du XXXVIIIe Colloque COPIRELEM, Dijon 2011.

[7] Ministère de la Communauté française, 1999. *Socles de compétences (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire).* Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Direction de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux, 15-17, Place Surlet de Chokier, 1000 - Bruxelles.

[8] Rouche N., *Le sens de la mesure : des grandeurs aux nombres rationnels.* Didier-Hatier, Bruxelles, 1992.

Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Patricia Van Geet et Sylvie Vansimpsen sont chercheuses au CREM ; ✉ `paulinel@crem.be`.

Lors de l'atelier Maths & Manips à Bastogne