LE THÉORÈME DE LAGRANGE EN MATHÉMATIQUES ET EN ÉCONOMIE : UNE ÉTUDE DIDACTIQUE DU SAVOIR ENSEIGNÉ

Sebastian XHONNEUX* – Valérie HENRY**

Résumé – La recherche d'extremum sous contraintes d'égalité est présentée dans la plupart des cours de calcul différentiel et intégral à l'université destinés à des étudiants non seulement en mathématiques mais aussi en économie. Ce texte rend compte d'une recherche sur l'enseignement du Théorème de Lagrange dans ces deux disciplines. Premièrement, nous présentons l'élément clé de notre unité d'analyse des processus didactiques qu'est notre modèle épistémologique de référence du Théorème de Lagrange. Deuxièmement, en nous situant dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique, nous comparons deux cours enseignés à des étudiants en première année de bachelier en Sciences mathématiques et en Sciences économiques respectivement dans les universités de Louvain et de Liège (Belgique). Le but de cette comparaison est d'illustrer les points communs, mais aussi les différences entre les organisations didactiques observées relatives au Théorème de Lagrange dans deux institutions données.

Mots-clefs : Théorème de Lagrange, optimisation, transposition didactique, Théorie Anthropologique du Didactique, modèle épistémologique de référence

Abstract – Because of its many uses, the constrained optimization problem is presented in most undergraduate mathematics courses dealing with calculus for both mathematicians and economists. Our research focuses on the teaching of Lagrange's Theorem in both branches of study, mathematics and economics. This paper addresses two objectives. First, we describe our epistemological reference model of the didactic transposition of Lagrange's Theorem in university courses. Secondly, we compare two mathematics courses dealing with Lagrange's Theorem given at the universities of Namur and Liège by means of this model and the Anthropological Theory of Didactics. This comparison is evidence of the manifold designs the teaching of Lagrange's Theorem can take.

Keywords : Lagrange's Theorem, optimization, didactic transposition, Anthropological Theory of Didactics, epistemological reference model

INTRODUCTION

En raison de ses nombreuses utilisations, l'optimisation est un champ important en mathématiques, en sciences appliquées mais aussi en économie. En effet, plusieurs problèmes fondamentaux en économie se ramènent à optimiser une fonction particulière tout en respectant certaines contraintes d'égalité. Ainsi, un consommateur souhaitera maximiser sa satisfaction, modélisée par sa fonction d'utilité, tout en étant limité par des contraintes budgétaires. De même un producteur cherchera à minimiser son coût de production en étant astreint à produire une quantité définie. Après avoir modélisé mathématiquement ces problèmes, on peut les résoudre à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange (nommé après le mathématicien Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)).

De nombreuses difficultés nous semblent accompagner l'apprentissage de ce théorème et plus largement du traitement des problèmes d'optimisation sous contraintes dans la plupart des cours de calcul différentiel et intégral à l'université destinés à des étudiants non seulement en mathématiques mais aussi en économie. Premièrement, la conceptualisation de ce type de problème nous apparaît déjà comme difficile et liée au délicat problème, plus général, de la modélisation, que ce soit au sein des mathématiques ou en provenance du domaine économique, voire d'un autre champ d'application. Plus spécifiquement, la forte composante technique du théorème, en ce sens que son application peut se réduire assez rapidement à la mise en œuvre de procédures algorithmisées, nous paraît de nature à occulter les nombreux éléments technologiques nécessaires à la conceptualisation (Sfard, 1992) du théorème, en

* Facultés Universitairs Notre-Dame de la Paix, Namur – Belgique – sebastian.xhonneux@fundp.ac.be
** Facultés Universitairs Notre-Dame de la Paix, Namur – Belgique – valerie.henry@fundp.ac.be

Xhonneux Sebastian, Henry Valérie (2012) Le théorème de Lagrange en mathématiques et en économie : une étude didactique du savoir enseigné, Actes EMF2012 – GT5, pp.

particulier le fait que celui-ci fournit une condition nécessaire mais non suffisante pour déterminer un extremum. Enfin, le statut des multiplicateurs de Lagrange, outil important dans le domaine économique, reste, d'après notre expérience comme assistant à l'université, très flou pour les apprenants.

Notre étude de l'enseignement du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie essaie d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

- Quelles formes d'enseignement du Théorème de Lagrange rencontre-t-on ?
- Quel rôle joue la preuve du Théorème de Lagrange dans l'enseignement mais aussi dans l'apprentissage du Théorème de Lagrange ?
- A quelles difficultés un étudiant en mathématiques ou en économie est-il confronté lorsque le Théorème de Lagrange lui est enseigné ?

Afin de fournir des éléments de réponses aux questions posées ci-dessus et au vu de nos premières observations, le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1991, 1992) et en particulier la transposition didactique nous semblent particulièrement adapté pour fournir une base solide à nos analyses. Néanmoins, nous nous permettrons d'élargir, dès que cela s'avérera opportun, notre champ de travail au modèle général de formation d'un concept proposé par Sfard (1992).

La première section décrit dans un premier temps l'essentiel des cadres de l'inscription théorique de notre recherche, à savoir la "Théorie Anthropologique du Didactique" (TAD) (Chevallard, 1991, 1992) avec les notions de transposition didactique et de modèle épistémologique de référence (MER) en particulier.

Pour répondre à la question de savoir comment concevoir et gérer le processus didactique qui permet aux étudiants d'étudier les types de tâches associées au Théorème de Lagrange, nous donnons dans la deuxième section une explication de notre MER dont la description se fait en grande partie à partir des OM savantes légitimant les pratiques enseignantes. Cette construction d'un modèle épistémologique de référence nous permettra d'interpréter et de décrire, de manière relativement précise, l'activité mathématique relative au Théorème de Lagrange.

La troisième section illustre la construction des organisations didactiques (OD) empiriques sur la base de l'observation du savoir enseigné (ici, les observations de cours magistraux) dans deux cours différents : le premier cours est enseigné à des étudiants en première année de bachelier[1] en Sciences mathématiques à l'université de Louvain-la-Neuve (Belgique), tandis que le deuxième s'adresse à des étudiants en première année de bachelier en Sciences économiques à l'université de Liège (Belgique).

Une comparaison entre ces cours enseignés est fournie dans la conclusion et aboutit sur quelques remarques et perspectives de notre recherche.

APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE

1. Praxéologies mathématiques et didactiques

Afin d'analyser et modéliser les pratiques institutionnelles et sociales, et l'activité mathématique en particulier, la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) considère que

[1]Le niveau « Première année de bachelier » correspond à la première année postsecondaire en Belgique, à savoir à la première année dans l'enseignement supérieur (Hautes-écoles et Universités).

> toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ. (Chevallard, 2002, p.1)

Le postulat émis par Chevallard (1999, pp.2-6) est alors que toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on note [T/τ/θ/Θ] et nomme « praxéologie » ou « organisation praxéologique ».

Ayant nommé les organisations praxéologiques relatives aux activités mathématiques des « organisations mathématiques » (OM), Chevallard ne s'arrête pas aux activités de type mathématique et propose de passer à une analyse du processus didactique en lui-même en termes de praxéologie. La notion de praxéologie permet alors de reformuler et d'étudier la tâche que la société attribue aux professeurs de mathématiques : enseigner, ou, en termes de la TAD, faire reconstruire aux étudiants des organisations mathématiques. Pour accomplir cette tâche particulière, les différentes formes possibles dans une institution donnée sont appelées « organisations didactiques » (OD). Ainsi, nous pouvons identifier des tâches professorales, des techniques dont l'enseignant dispose ou qu'il élabore et adapte, ainsi que des systèmes d'argumentations justificatives et interprétatives de ces techniques.

Les organisations didactiques s'intéressent aux phénomènes liés à l'enseignement, la transmission et la diffusion des mathématiques. Une OD renvoie donc à la reconstruction ou la transposition d'une OM en classe. Chevallard (1999, p.19) définit six moments de l'étude qui permettent de décrire une organisation didactique et qui doivent être prévus et organisés par le professeur dans le cadre des activités en classe. Les six moments sont :

1. la première rencontre avec l'organisation enjeu de l'étude ;
2. l'exploration du type de tâches T et l'élaboration d'une technique relative à ce type de tâches ;
3. la constitution de l'environnement technologico-théorique relatif à T ;
4. le travail de la technique ;
5. l'institutionnalisation ;
6. l'évaluation.

2. *Transposition didactique*

La transposition didactique a été définie par Chevallard (1991, p.38) pour témoigner de la nécessité de considérer le contenu des savoirs à enseigner - et finalement enseignés - comme produit d'un processus qui "transpose" un certain savoir savant d'une institution en-dehors de l'établissement scolaire vers cet établissement dans le but social de le diffuser, de l'enseigner.

Le processus de transposition didactique est représenté sur la Figure 1.

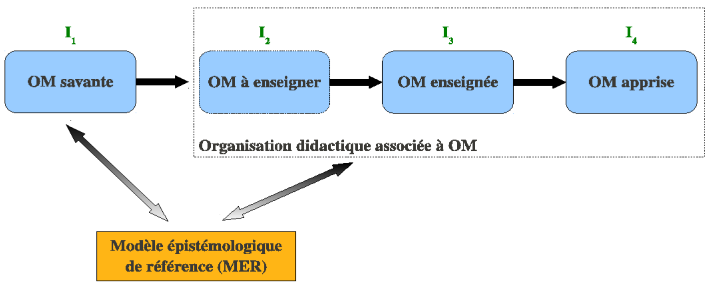

***Figure 1** – L'unité d'analyse des processus didactiques (Bosch & Gascón, 2005, p.117)*

Dans ce schéma, I_1 représente l'institution auteure du savoir mathématique savant, I_2 la noosphère, I_3 l'institution scolaire et plus particulièrement le professeur et I_4 l'ensemble des élèves ou des étudiants communément appelé classe. Ce même schéma précise en même temps l'« unité d'analyse » (Bosch & Gascón, 2005, p.116), qui permettra de définir le rapport entre le cadre théorique et les données empiriques de notre recherche.

3. *L'unité d'analyse des processus didactiques*

D'après la Figure 1, il est clair que l'organisation didactique inclura les contraintes qui proviennent des différentes étapes de la transposition didactique. Il est également évident que nous serons amenés à donner une description différente pour chaque OD rencontrée dans nos analyses puisque chaque OD sera dépendante de l'institution considérée. Notons encore que l'OD dépend non seulement des objectifs que l'institution définit à propos des caractéristiques du savoir appris auquel doit conduire le processus didactique mais aussi des OM disponibles dans la classe.

Pourquoi a-t-on ajouté une unité d'analyse dans le schéma? Dans le processus de la transposition didactique, l'OM à enseigner a un rôle central. Elle se trouve à la base de l'OD bien que ni le professeur, ni l'institution ne disposent explicitement de cette OM.

> Mais cette influence ne peut être adéquatement interprétée si nous ne disposons pas d'un point de vue épistémologique. Ce point de vue est fourni par une organisation mathématique *de référence* dont la description se fait généralement à partir des OM *savantes* légitimant le processus d'enseignement. (Bosch & Gascón, 2005, p.117)

À l'université, nous considérons que les manuels et supports de cours contiennent ce savoir à enseigner. La section suivante définit notre MER relatif au Théorème de Lagrange.

MODÈLE ÉPISTÉMOLOGIQUE DE RÉFÉRENCE DU THÉORÈME DE LAGRANGE

Fabriqué empiriquement à partir des textes « savants », comme les articles mathématiques, et des praxéologies à enseigner, comme les manuels ou les supports de cours universitaires (voir Xhonneux et Henry (*à paraître*)), notre première étape d'analyse de l'enseignement du Théorème de Lagrange (voir Annexe A pour une formulation mathématique du théorème) constitue la construction d'un MER sur le contenu mathématique en jeu. Dans le cadre de la TAD, ce modèle se formule en termes de praxéologies. Notre MER inclut cinq organisations mathématiques, OM_1, OM_2, OM_3, OM_4 et OM_5, relatives aux types de tâches suivants :

- T_1 : Chercher des candidats à être extremum d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.
- T_2 : Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.
- T_3 : Exploiter la signification du multiplicateur de Lagrange.
- T_4 : Construire les éléments théoriques relatifs au Théorème de Lagrange.
- T_5 : Construire les éléments théoriques relatifs au multiplicateur de Lagrange.

Il est possible de décrire les relations qui existent entre ces OM, mais nous nous limitons aux commentaires suivants dans cet article[2] : OM_1 est issue des œuvres de Lagrange où la méthode des multiplicateurs apparaît comme une technique particulière pour décrire la solution d'un problème bien précis. Cette OM concerne donc le Théorème de Lagrange vu comme condition nécessaire d'optimalité du premier ordre, tandis que OM_2 contient tout ce qui est mis en œuvre pour résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. Le Théorème de Lagrange peut ou peut ne pas intervenir dans la technique de OM_2 ce qui entraîne qu'accomplir OM_1 peut consister en une première étape pour la réalisation d'OM_2 . OM_4 est

[2] Des exemples de tâches de type T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 sont présentés dans l'Annexe B.

considérée comme un type de tâches construit sur les discours technologico-théoriques d'OM_1 mais aussi d'OM_2. Nous disons qu'OM_4 « transforme la théorie en tâches » (Winsløw, 2006, p.4). En ce qui concerne les praxéologies OM_3 et OM_5, elles considèrent respectivement le multiplicateur de Lagrange comme outil mathématique et comme objet mathématique (Douady, 1986).

4. Types de tâches procédurales et structurales

L'analyse du savoir à enseigner relatif au Théorème de Lagrange (Xhonneux & Henry (*à paraître*)) nous a amenés à utiliser la distinction entre deux styles de type de tâches différents : procédural et structural (Sfard, 1992, pp.5-6) lesquels renvoient à deux visions complémentaires du savoir mathématique à enseigner. L'idée est de classifier les types de tâches comme suit.

- Tâches procédurales : Le qualificatif "procédural" résume le caractère à la fois "dynamique, séquentiel et détaillé" (Sfard, 1992, p.4) dans les tâches proposées. Un type de tâches est dit "procédural" lorsqu'il fait appel au caractère outil d'un concept mathématique (le concept comme processus). Les types de tâches procédurales expriment une suite d'opérations qu'il faut effectuer pour accomplir la tâche demandée. Nous associons la mise en fonctionnement d'un concept mathématique au niveau procédural d'une tâche, où l'élève utilise les processus liés à la connaissance de ce concept, sans que ces processus soient nécessairement transformés en objet.
- Tâches structurales : La construction des opérations sur des procédures détermine, pour une part importante, l'appropriation des apprentissages. C'est pourquoi un type de tâches est dit "structural" lorsqu'il fait appel au caractère objet d'un concept mathématique (le concept comme objet). Ce sont les types de tâches qui se définissent par "expliquer", "interpréter", "définir", "analyser", "résumer", etc.

Nos praxéologies OM_1, OM_2 et OM_3, sont associées à des types de tâches procédurales, OM_4 et OM_5 sont basées sur des types de tâches structurales. En effet, les blocs technologico-théoriques d'OM_1 et d'OM_2 (respectivement d'OM_3) constituent le bloc practico-technique d'OM_4 (respectivement d'OM_5) dans l'enseignement universitaire du Théorème de Lagrange.

On peut supposer que l'activité mathématique essaie d'allier le côté structural avec le côté procédural. Cependant, l'importance accordée à chacun de ces deux aspects de l'activité mathématique dans les processus d'enseignement et d'apprentissage et dans la réalisation des tâches inhérentes à chaque type d'activité varient d'une institution à l'autre. Notons que dans les universités belges, le côté structural est souvent plus développé aux cours théoriques qui concentrent l'activité mathématique plus sur le bloc technologico-théorique d'une tâche que sur son côté procédural qui est laissé aux séances d'exercices la plupart du temps.

Il est certain que la possibilité de mobiliser le côté adéquat d'un concept mathématique pour la résolution d'une tâche donnée, d'établir et d'organiser des liens entre des tâches procédurales et des tâches structurales, requiert une certaine flexibilité de pensée chez l'étudiant. Selon l'approche de Sfard (1992), cette flexibilité de pensée est liée aux possibilités d'organisation et de généralisation des objets construits dans des structures de schémas, ou d'unités cognitives, de plus en plus développés. Ces actions sont appelées « réification ». Loin d'être le seul modèle expliquant la naissance d'une conception mathématique, l'idée de réification, vue comme outil conceptuel pour décrire l'activité mathématique, donne un ordre à nos cinq OM qui sera présenté dans la section suivante.

5. *Le MER du Théorème de Lagrange*

Basé sur la TAD et la théorie de Sfard, nous construisons notre MER du Théorème de Lagrange qui est représenté sur la Figure 2.

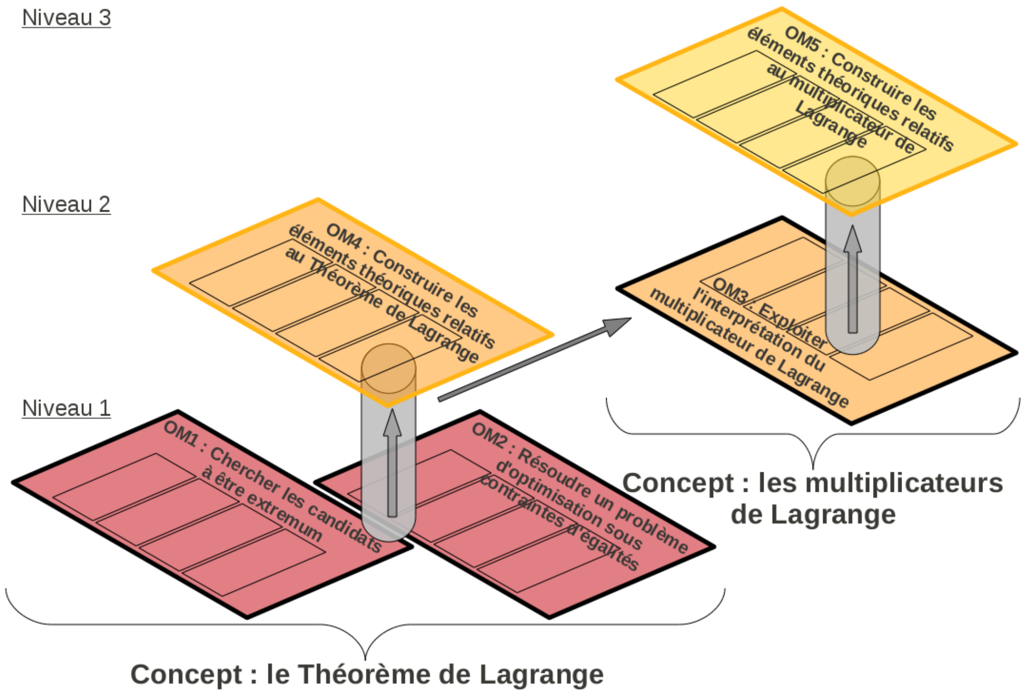

***Figure 2** – Représentation schématique de notre MER du Théorème de Lagrange*

La représentation de notre MER s'interprète de la façon suivante. Le schéma présente trois niveaux. Les OM ayant un contour gras et noir sont relatives aux types de tâches procédurales, les autres sont relatives aux types de tâches structurales. Le processus de réification des concepts mathématiques est indiqué par une flèche grise ascendante sur le schéma de la Figure 2.

Au premier niveau se trouvent OM_1 et OM_2. En effet, la recherche des candidats à être extremum et la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité font souvent intervenir le Théorème de Lagrange et se réalisent en appliquant des processus élémentaires comme le calcul de dérivées partielles ou la résolution de systèmes d'équations. Le Théorème de Lagrange est alors perçu comme un processus d'opérations. Au deuxième niveau nous trouvons le type de tâches structurales, T_4, regroupant les activités qui attribuent au Théorème de Lagrange le statut de concept mathématique. Ces activités transforment les blocs technologico-théoriques des praxéologies OM_1 et OM_2 en tâches comme décrit par Winsløw (2006).

En prenant les concepts mathématiques présents dans le Théorème de Lagrange, nous sommes ensuite en mesure de définir des procédures sur ces concepts. L'organisation OM_3 reprend les tâches qui sont relatives aux multiplicateurs de Lagrange. La mise au point de l'objet « multiplicateur de Lagrange » est alors, au troisième niveau, l'objet de l'OM_5. La réification des multiplicateurs de Lagrange complète le processus de conceptualisation.

COMPARAISON ENTRE DEUX SAVOIRS ENSEIGNÉS

À l'aide notre MER, deux cours magistraux, présentés respectivement aux universités de Louvain-la-Neuve et de Liège en Belgique, sont analysés et comparés. Cette comparaison se réalise en termes du modèle des moments de l'étude qui constitue une grille d'analyse des processus didactiques mis en place. L'objectif de chacun des cours était d'introduire le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité et le Théorème de Lagrange en particulier. Les cours observés sont des séances ordinaires de cours d'analyse en première année de bachelier en Sciences Mathématiques (Louvain-la-Neuve) et en Ingénieur de Gestion (Liège) dans le sens où ils n'ont pas fait l'objet d'une ingénierie de recherche.

6. *Analyse mathématique 2 – Fonctions de variables vectorielles (Université de Louvain-la-Neuve)*

Le cours observé se place dans le cadre du calcul différentiel et intégral et le Théorème de Lagrange y est présenté durant une seule séance de deux heures. Le professeur met en place une organisation didactique dans laquelle on peut dégager quatre moments :

1. un moment de première rencontre avec l'enjeu de la séance, à savoir résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité (OM_2) ;
2. un moment d'élaboration d'une technique relative à ce type de tâches qui aboutit au Théorème de Lagrange (OM_1), ainsi que des germes d'une constitution de l'environnement technologico-théorique associé à T_1 (tâches d'OM_4) ;
3. un moment plus long de travail de la technique (T_1 et T_2) et
4. un long moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à T_1, à savoir prouver le Théorème de Lagrange (tâche d'OM_4).

Le bref moment de la première rencontre se résume à la présentation du problème général dont il est question de trouver une méthode de résolution:

> minimiser (ou maximiser) une fonction f sur un ensemble $\{x \in U \subseteq \mathbb{R}^n \mid g(x)=0\}$. (Prof. A.)

À l'aide d'un graphique,

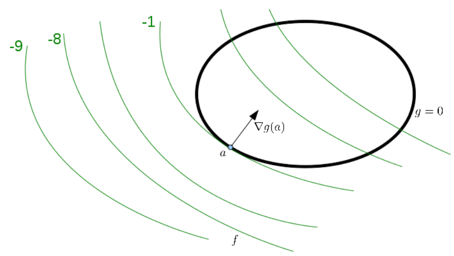

Figure 3 *– Dessin au tableau (Prof. A.)*

le professeur essaie ensuite d'élaborer un aperçu de la technique des multiplicateurs de Lagrange, technique que nous associons à l'OM_1 (et qui fait seulement partie d'une technique d'OM_2). En effet, l'enseignant ne mentionne pas explicitement que le critère exploré n'est pas suffisant, à défaut d'autres informations sur le problème, pour résoudre une tâche du type T_2 :

> on a envie de dire : $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$. (Prof. A.)

Le discours donné sur ce même graphique peut être considéré comme élément justificatif de la technique, et constitue donc une tâche de type T_4 d'après notre MER. Ces explications aboutissent à l'énoncé du Théorème de Lagrange.

Le troisième moment présent est celui du travail de la technique. Deux problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité sont présentés et résolus :

> Déterminer le point où la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x_1+x_2-x_3$ atteint son minimum restreint à l'ensemble $S=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$;
>
> Déterminer le point où la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$, atteint son minimum sur la droite définie par les équations $x_1+x_2-x_3=1$ et $x_1-x_2+2x_3=0$.

le premier par le professeur au tableau tandis que le deuxième est laissé à charge des étudiants. Nous disons qu'il y a un changement du partage « topogénétique » entre le professeur et les étudiants (Sensevy, 1976) bien que le deuxième exercice ne soit pas corrigé en classe. Il est fort probable que ce partage est fondé sur l'intention du professeur de permettre aux étudiants de s'imprégner de la technique de résolution.

Nous relevons deux instants particuliers à l'intérieur de ce moment de l'étude : premièrement, le professeur – après écriture du premier problème au tableau – fait remarquer qu'il faut

> toujours s'assurer de l'existence d'une solution du problème d'optimisation. (Prof. A.)

Ceci doit expliquer aux étudiants pourquoi la résolution d'une tâche de type T_1 donne en même temps la solution à la tâche de type T_2 : lorsque l'existence d'une solution du problème est assurée, la solution se trouve parmi les candidats à être extremum. Deuxièmement, il mentionne qu'

> il n'est pas vraiment nécessaire de connaître α et γ (les multiplicateurs de Lagrange). Dans les applications physiques et économiques, on s'intéresse aux valeurs de α et γ, mais dans les problèmes d'optimisation en mathématiques cela est sans grande importance. (Prof. A.)

Le professeur se limite donc aux OM relatives au Théorème de Lagrange (OM_1, OM_2 et OM_4) et ne se préoccupe pas de celles relatives aux multiplicateurs de Lagrange (OM_3 et OM_5). Remarquons que le cours réalise ses deux objectifs (trouver une technique de résolution de T_2 et démontrer le Théorème de Lagrange) l'un à la suite de l'autre. Le développement des tâches procédurales se fait alors de manière déconnectée du travail des quelques tâches structurales, en conséquence de quoi les techniques d'OM_2 ne sont rendues intelligibles qu'implicitement par les tâches structurales d'OM_4. La pause entre les deux heures marque cette séparation nette.

En effet, la deuxième heure de cours est entièrement consacrée à la constitution de l'environnement technologico-théorique associé à T_1, à savoir prouver le Théorème de Lagrange.

En conclusion, l'OD observée s'inscrit principalement dans un modèle d'« OD classique » (Bosch & Gascón, 2002), modèle selon lequel

> l'activité mathématique serait presque déterminée par le bloc technologico-théorique, d'où découleraient techniques et problèmes en tant que simples « applications » des définitions, axiomes et théorèmes. (Bosch & Gascón, 2002, p.10)

En effet, nous n'avons observé aucun moment d'institutionnalisation explicite car la constitution entière du bloc technologico-théorique peut être considérée, dans ce modèle, comme un moment d'institutionnalisation implicite de l'OM. D'autres moments de l'étude sont alors laissés aux séances d'exercices ou sous la seule responsabilité de l'étudiant.

7. *Analyse mathématique 2 – Fonctions de variables vectorielles (Université de Liège)*

Le cours observé se place également dans le cadre du calcul différentiel et intégral. Le Théorème de Lagrange y est présenté pendant 3h de cours, la séance des deux premières de ces heures est rapportée ici. Le professeur met en place une organisation didactique dans laquelle on peut dégager les moments suivants :

1. un moment de première rencontre mélangé à un moment d'élaboration d'une technique pour résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité et qui mène vers le Théorème de Lagrange (OM_1 et OM_2).
2. un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à T_1 (différentes tâches d'OM_4) lié à un moment d'institutionnalisation.

Le moment de première rencontre est un exposé sur différents problèmes d'optimisation rencontrés jusque-là et leurs techniques de résolution respectives (dans un cadre graphique et dans un cadre analytique). La nécessité de résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité est alors mise en avant (OM_2). À l'aide d'un exemple concret à deux dimensions sous une seule contrainte d'égalité, maximiser $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=b$, un premier moment d'élaboration d'une technique adaptée au type de tâches T_2 est abordé :

> il faut démontrer que *grad* $f(p)$ // *grad* $g(p)$. (Prof. B.)

Ce dernier moment est suivi d'un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à T_1, où différentes tâches d'OM_4 sont traitées, notamment différentes définitions spécifiant l'environnement théorique du Théorème de Lagrange, la présence d'une condition de régularité, la signification de l'équation de Lagrange et la définition de la fonction lagrangienne. Une preuve, basée sur des courbes de niveau tangentes, de cette condition nécessaire d'optimalité est présentée et aboutit à un moment d'institutionnalisation. En effet, à la fin de la preuve le professeur éclaire les étudiants sur l'organisation mathématique construite et institutionnalise ainsi les nouveaux concepts vus au cours. Notons encore que le professeur profite de ce moment pour attribuer au multiplicateur de Lagrange le statut de variable de la fonction lagrangienne ce qui peut être considérée, suite à notre MER, comme type de tâches de l'OM_5.

Nous relevons encore un bref moment lors de la constitution de l'environnement technologico-théorique. Bien que le but premier ne soit pas le travail de la technique, la présentation d'un exemple, appelé par le professeur « exemple de Courant »,

> maximiser $f(x,y)=y$ sous contrainte que $x^2+y^3=0$. (Prof. B.)

est un moment par lequel on perfectionne la maîtrise des techniques qui lui sont associées. En même temps, cet exemple de Courant est montré aux étudiants dans le but de souligner l'importance de la condition de régularité dans les hypothèses du Théorème de Lagrange et constitue donc un moment d'institutionnalisation pour le professeur.

Notons que les tâches structurales s'imbriquent dans les tâches procédurales et rendent ainsi une séparation nette entre les moments technique et technologico-théorique impossible. Il y a l'intégration du type de tâches T_1 dans l'OM par un discours technologique qui trouve son soutien dans la réalisation de nombreuses tâches structurales.

En conclusion, l'OD observée est un exemple d'un modèle d'« OD constructiviste » (Bosch & Gascón, 2002) dans le sens où ces OD

> prennent en charge, simultanément, les moments technologico-théorique et exploratoire et se caractérisent par le fait de contextualiser l'activité de résolution de problèmes en la situant dans une activité plus large de construction de connaissances ainsi que le fait de considérer que l'apprentissage est un processus actif de construction à partir d'acquis antérieurs et sous des contraintes déterminées. (Bosch & Gascón, 2002, pp.10-11)

8. *Comparaison*

Sur base de nos observations dans les deux institutions, nous faisons les constats suivants :

- la possibilité de constituer des blocs technologico-théoriques qui rendent intelligible le fonctionnement des techniques d'OM_2 et de leur résultat, est présente dans les deux cours mais cette tendance est tantôt prononcée et tantôt elle l'est moins,
- les organisations mathématiques sont constituées d'une importante composante technologico-théorique aussi bien dans le cours en mathématiques qu'en économie,
- le travail sur les multiplicateurs de Lagrange est absent dans le cours destiné aux futurs mathématiciens,
- d'un côté, l'organisation didactique en mathématiques semble être en rapport avec un « modèle enseignant classique », qui privilégie le moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique au détriment d'autres moments. De l'autre côté, l'organisation didactique en économie a été qualifiée de « constructiviste ». Finalement, deux discours technologico-théoriques fort différents sont utilisés pour justifier le Théorème de Lagrange.

En conclusion, dans l'enseignement universitaire, les constructions d'organisations mathématiques relatives au Théorème de Lagrange sont issues de modèles variées (classique et constructiviste en occurrence) et centrées sur la question de résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. En même temps, nos analyses témoignent de l'importance attribuée à l'activité de démonstration à l'université.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Cet extrait d'analyse du savoir enseigné met en lumière notre MER comme élément clé de l'unité d'analyse des processus didactiques relatifs au Théorème de Lagrange. En particulier, ce MER met en évidence la puissance explicative de la TAD, raffinée par l'approche de Sfard, comme outil d'analyse des pratiques enseignantes et de la transposition didactique du Théorème de Lagrange.

En particulier, nous avons utilisé dans cet article notre MER pour analyser, en termes des moments de l'étude, deux cours magistraux s'adressant à deux publics différents. Évidemment, les résultats obtenus sont à prendre avec précaution, car ils ne concernent que deux enseignements observés. Néanmoins, nous avons observé que différentes organisations didactiques de la même discipline – l'analyse mathématique – et relatives au même objet – le Théorème de Lagrange – peuvent être assez dissemblables. Il semble même que l'OD mise en place change de forme, qu'elle soit présentée à des futurs mathématiciens ou à des futurs économistes et ingénieurs de gestion. Maintenant, conclure que deux cours donnés dans des institutions différentes ne sont pas semblables ne suscite certainement pas un grand étonnement. À l'inverse, il est plus intéressant d'évoquer que, malgré les particularités relevées, nous avons mis la main sur quelques points communs entre les différentes OD en mathématiques et en économie.

Les résultats des analyses de nos données expérimentales nous incitent fortement à continuer l'investigation. D'autres analyses, notamment du savoir appris, doivent être entamées dans le futur et complèteront notre vision de l'enseignement du Théorème de Lagrange en mathématiques en en économie. Une perspective de recherche serait alors d'envisager une ingénierie didactique au sens d'Artigue, rapportant ainsi des qualités essentielles du Théorème de Lagrange et contribuant à la compréhension des pratiques des enseignants confrontés à l'enseignement de ce théorème.

REFERENCES

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.

Bosch, M. & Gascón, J. (2002). Les praxéologies didactiques : Organiser l'étude. 2. Théories et empiries. Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds), *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. *Cédérom*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 107-122). Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2002). Les praxéologies didactiques : Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds), *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. *Cédérom*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

Sensevy, G. & Mercier, A. (1976). *Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves.* Rennes, France : Presses Universitaires de Rennes.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Winsløw, C. (2006). Transformer la théorie en tâches : La transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. A. Rouchier, I. Bloch (eds.), *Actes de la 13e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Xhonneux, S. & Henry, V. (*à paraître*). A didactic survey of the main characteristics of Lagrange's Theorem in mathematics and in economics. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Rzeszów. Pologne (9-13 février 2011).

ANNEXE A

Entre la découverte de la technique pour résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité à la fin du 18ème siècle et les cours magistraux qui l'enseignent à l'heure actuelle, le savoir mathématique en question a évolué et changé de forme. Lagrange publie son principe pour maximiser une fonction *n* variables sous une ou plusieurs contraintes dans sa "Théorie des fonctions analytiques" en 1797 et depuis, des mathématiciens émanant de différents domaines mathématiques ont donné des formulations diversifiées (mais cohérentes et mathématiquement équivalentes) du théorème, appelé aujourd'hui « Théorème de Lagrange » (en optimisation). Il donne une condition nécessaire pour l'existence d'un extremum local d'une fonction f qui est soumise à des contraintes d'égalité. Il peut être formulé comme suit:

Soit le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité

$$(P_E)\ \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathcal{U}} & f(x) \\ \text{SC} & g_i(x)=0, \quad i=1,\dots,k\,, \end{cases}$$

où $f\ :U\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 sur un ensemble $U\subseteq\mathbb{R}$ ouvert et $g_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i=1,\dots,k$, sont des fonctions de classe C^1 sur U. Supposons que x^* est un extremum local du problème (P_E). Supposons en plus que la matrice Jacobienne $J_g(x^*)$ est de rang k[3]. Alors il existe un vecteur $\lambda^*=(\lambda_1^*,\dots,\lambda_k^*)\in\mathbb{R}^k$ vérifiant

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0.$$

Les composantes du vecteur λ^* sont les multiplicateurs de Lagrange. Les premiers pas des mathématiciens en direction de la dualité en optimisation ont réussi, au 20ème siècle, à attester aux multiplicateurs de Lagrange le statut de variables. Mieux encore, l'analyse de sensibilité ou autrement dit les effets éventuels induits par des changements dans les données (contraintes) d'un problème d'optimisation sous contraintes sur la solution du problème, s'exprime en termes des multiplicateurs de Lagrange et permet d'éviter de devoir résoudre un nouveau problème d'optimisation. C'est cette dernière utilité qui apporte à l'économie mathématique l'intérêt d'exploiter les problèmes duaux et l'interprétation du multiplicateur de Lagrange.

ANNEXE B

Voici différents exemples de tâches de type T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 :

- T_1 : Déterminer les candidats à un extremum de la fonction $f(x,y)=x^2y$ sous contrainte $g(x,y)=2x^2+y^2=3$; déterminer les candidats à un extremum de la fonction $f(x,y)=1-x^2-y^2$ sous contrainte $g(x,y)=(x-1)^3-y^2=0$; etc.
- T_2 : Déterminer le point où la fonction $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x)=x_1+x_2-x_3$ atteint son minimum restreint à l'ensemble $S=\{(x_1,x_2,x_3) | x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$; maximiser $f(x,y)=y$ sous contrainte que $x^2+y^3=0$; déterminer la distance minimale de l'origine du plan Oxy à l'hyperbole d'équation $x^2+3xy+y^2=5$; etc.
- T_3 : Écrire et résoudre le problème dual ; étudier la sensibilité du problème du minimum (ou maximum) par rapport à une variation de la contrainte ; etc.

[3] Cette hypothèse est appelée « condition de régularité ».

- *T_4* : Démontrer le Théorème de Lagrange ; définir les équations de Lagrange ; expliciter la condition de régularité ; relever l'importance du fait que le Théorème de Lagrange est une condition nécessaire d'optimalité ; relever le fait que le Théorème de Lagrange permet seulement de trouver des extrema locaux ; généraliser le Théorème de Lagrange à *n* dimensions sous *k* contraintes d'égalité ; etc.
- *T_5* : Définir le multiplicateur comme coût implicite ou « shadow price » ; démontrer la propriété concernant l'interprétation des multiplicateurs de Lagrange ; définir explicitement le multiplicateur de Lagrange comme variable duale (de la fonction lagrangienne) ; définir la fonction duale ; etc.