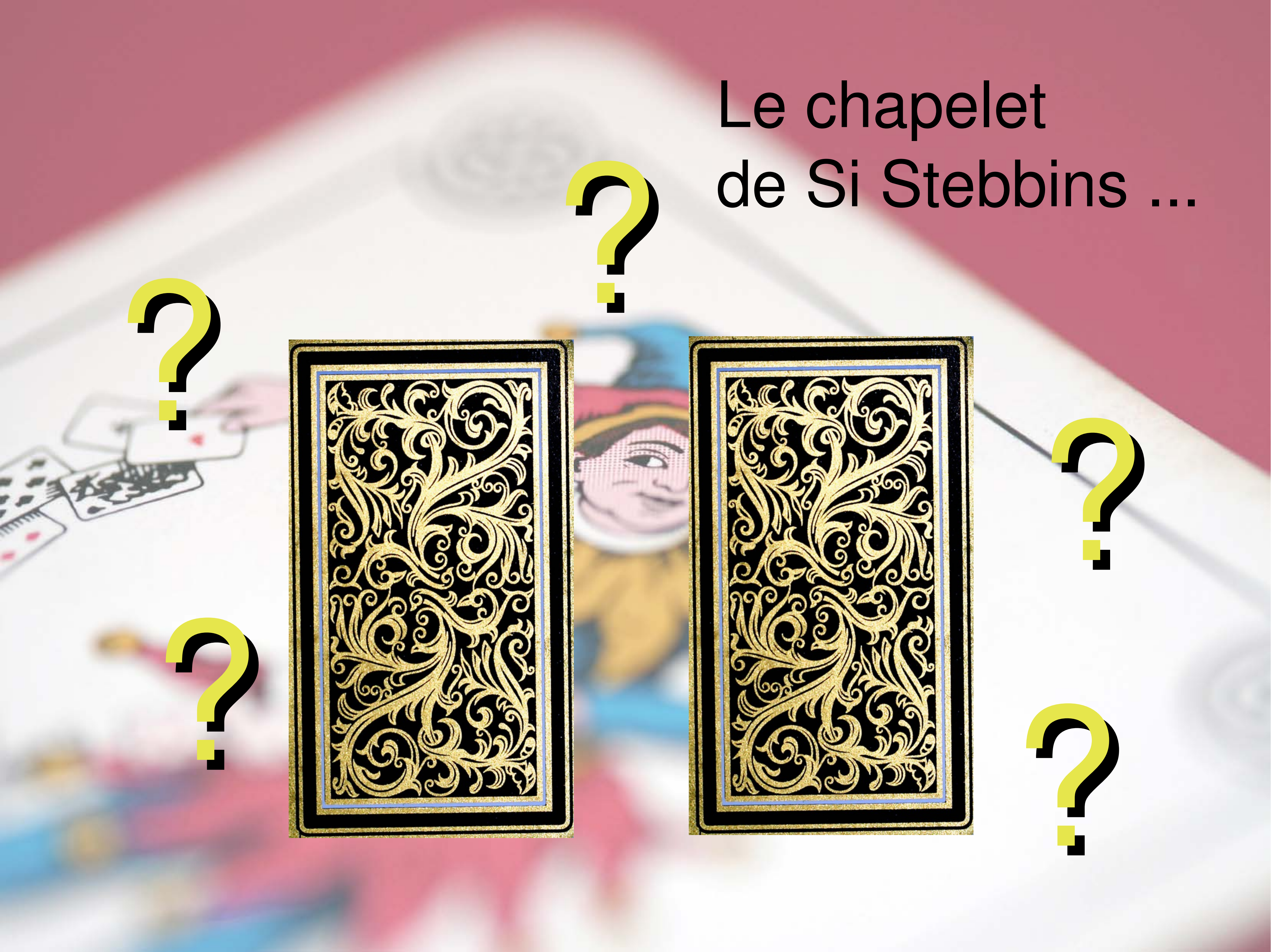
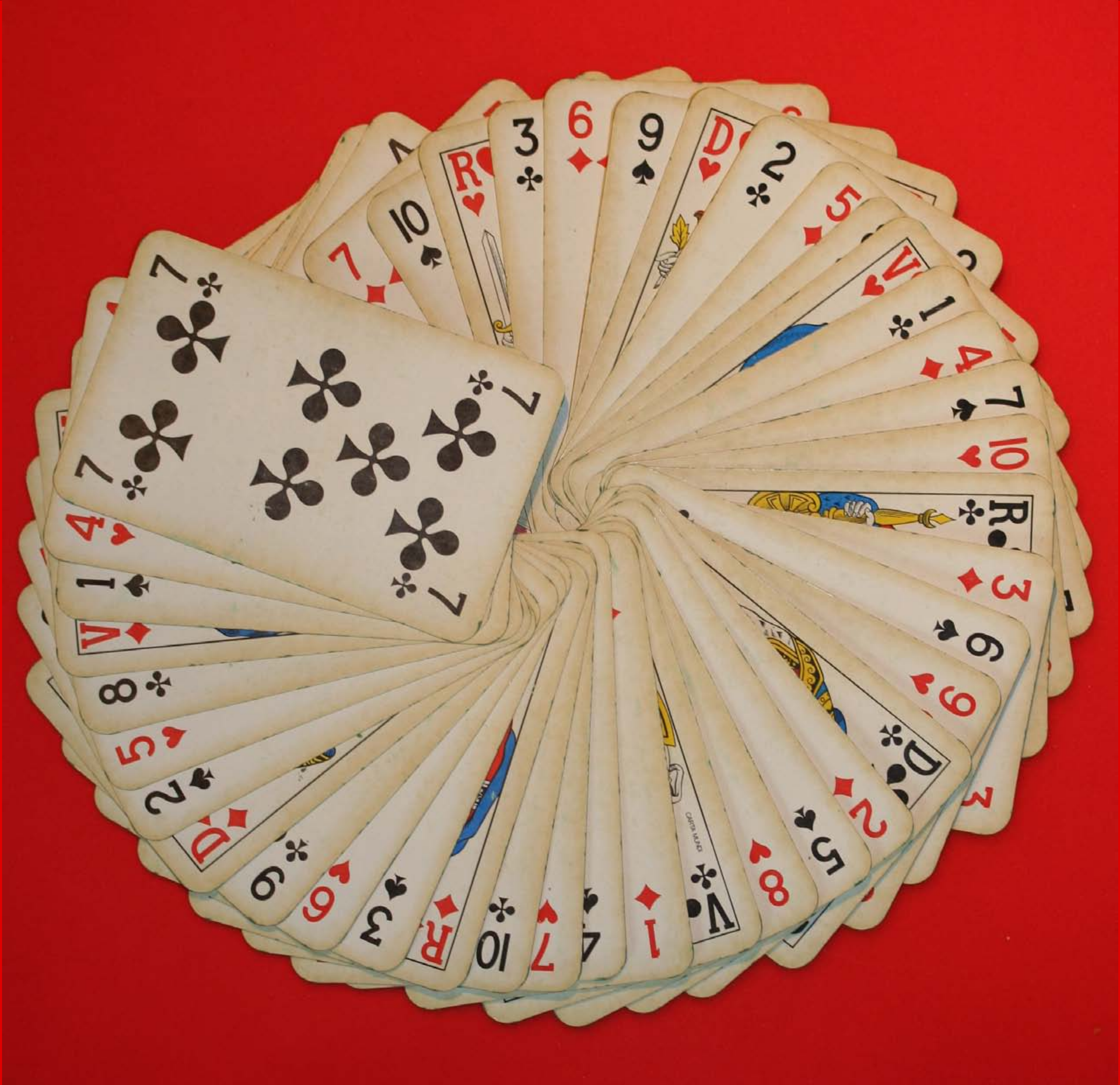
Mathémagie et au-delà

Michel Rigo http://www.discmath.ulg.ac.be/

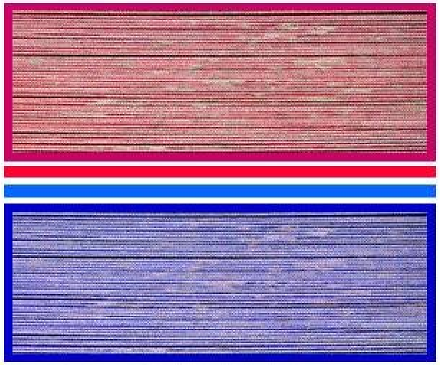
UNIVERSITÉ de Liège

Le chapelet de Si Stebbins ...

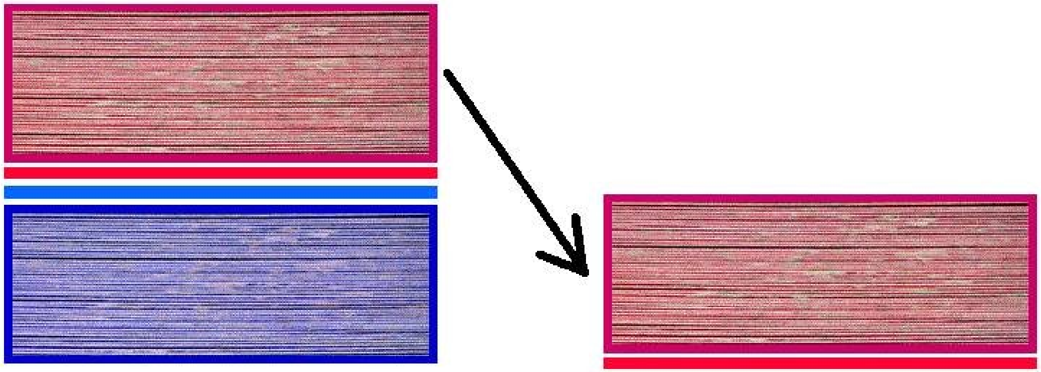

Le chapelet
de Si Stebbins ...



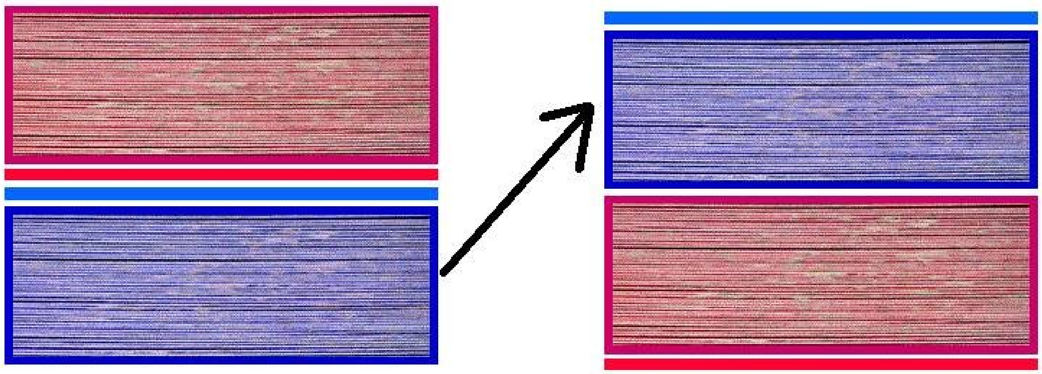
Que se passe-t-il quand on coupe le jeu ?



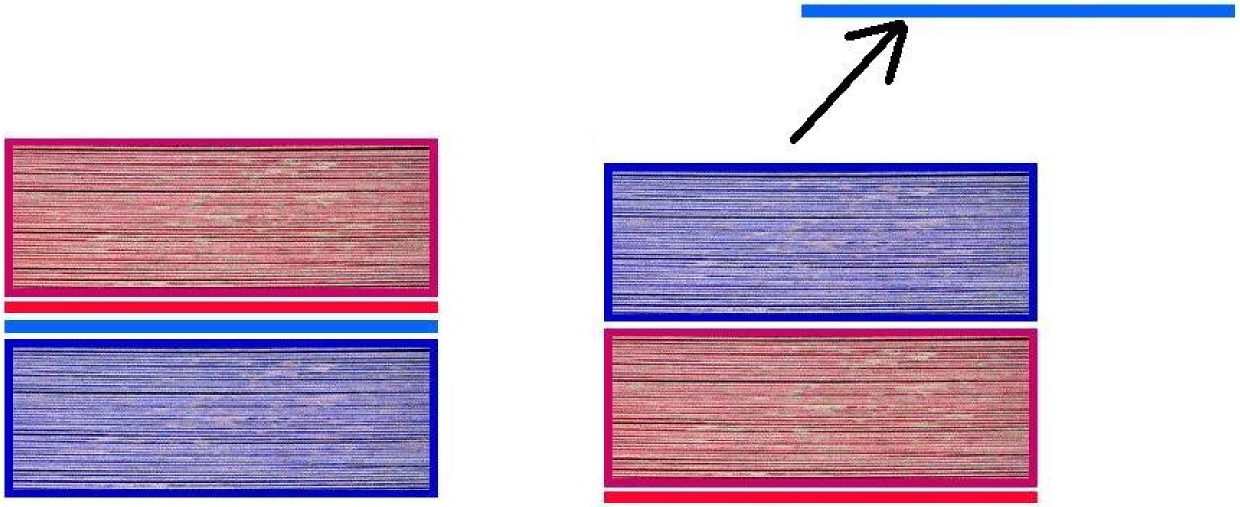
Que se passe-t-il quand on coupe le jeu ?



Que se passe-t-il quand on coupe le jeu ?



Que se passe-t-il quand on coupe le jeu ?

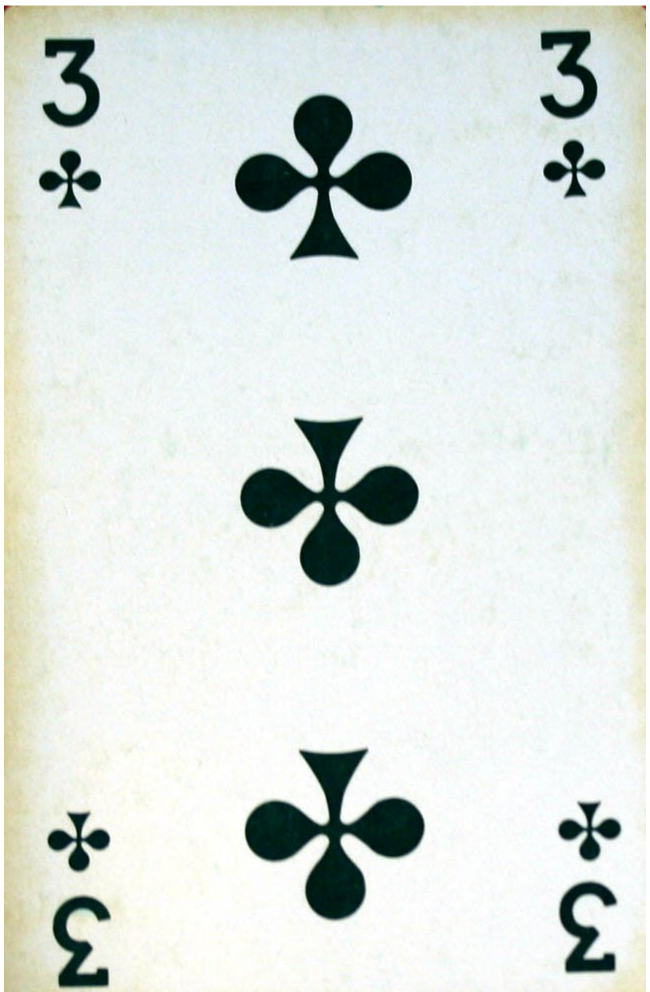


Classer les cartes au préalable !

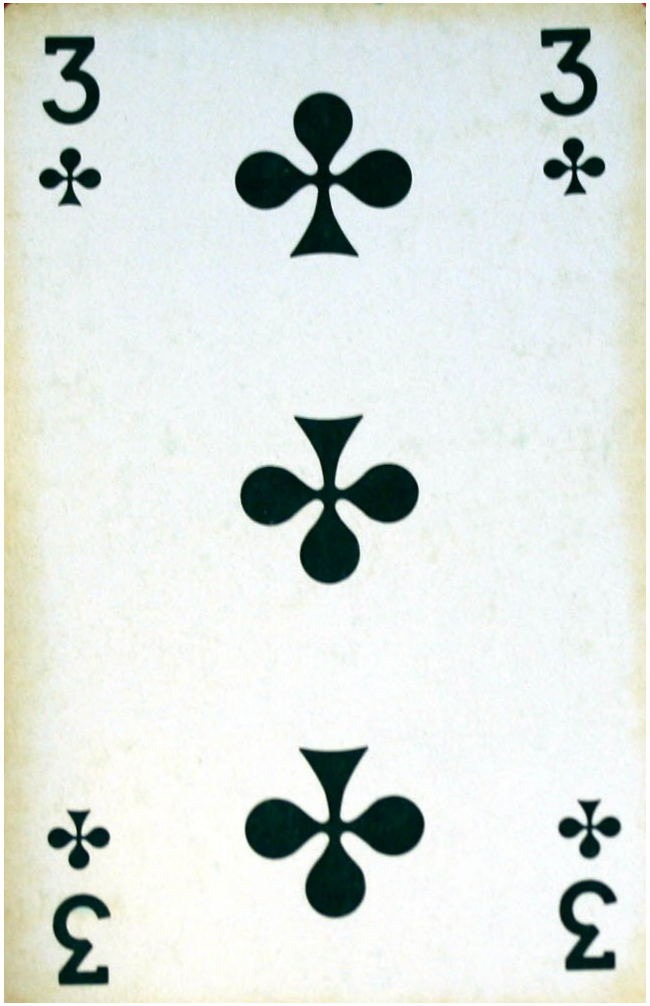
Classer les cartes au préalable !

1 – 4 – 7 – 10 – Roi – 3 – 6 – 9 – Dam - 2 – 5 – 8 – Val

Quelle carte suit ?

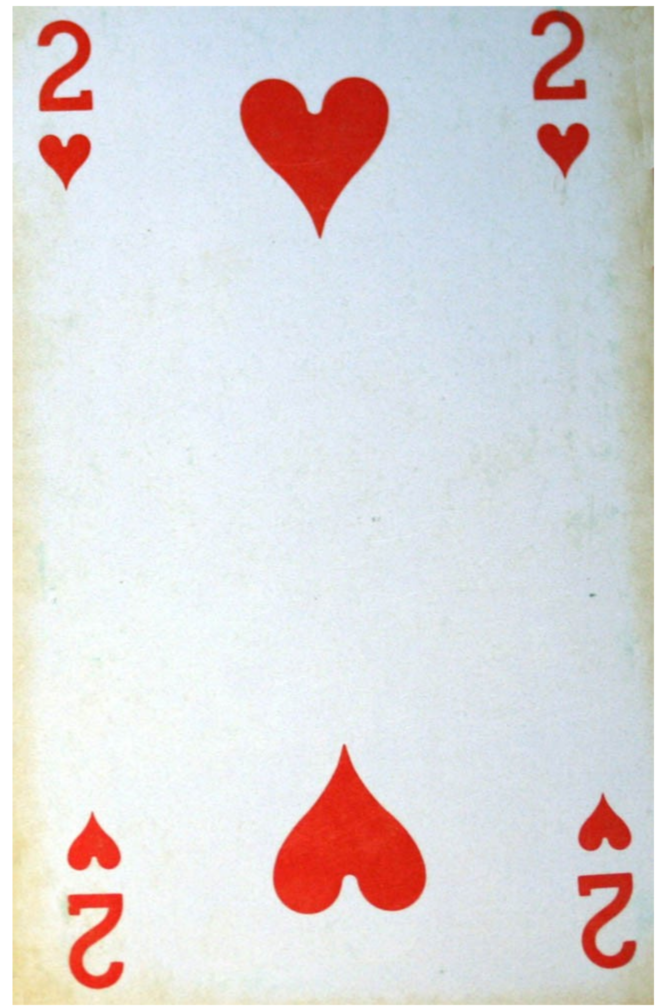


Quelle carte suit ?



Quelle carte suit ?

Quelle carte suit ?



Le chapelet de de Bruijn ...

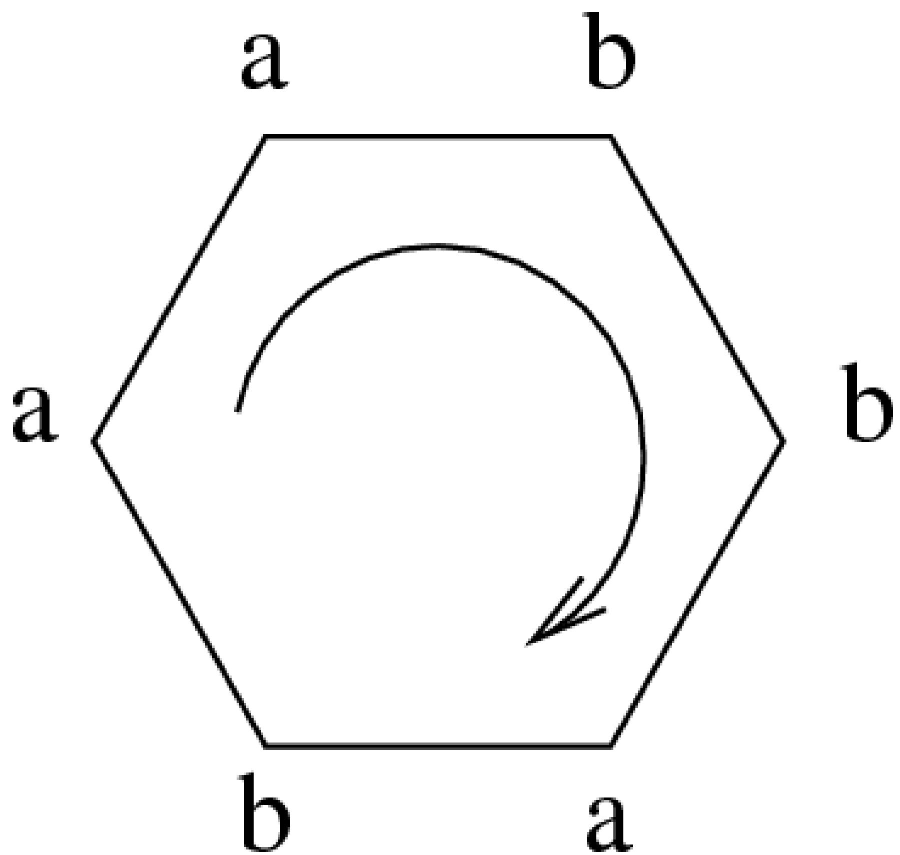

Le chapelet
de de Bruijn ...

Mots circulaires de de Bruijn

Mots circulaires de de Bruijn

Facteurs

abbaba – bbabaa – baabba ...



abba
bbab
baba
abaa
baab
aabb

Mots circulaires de de Bruijn

$p,n > 1$

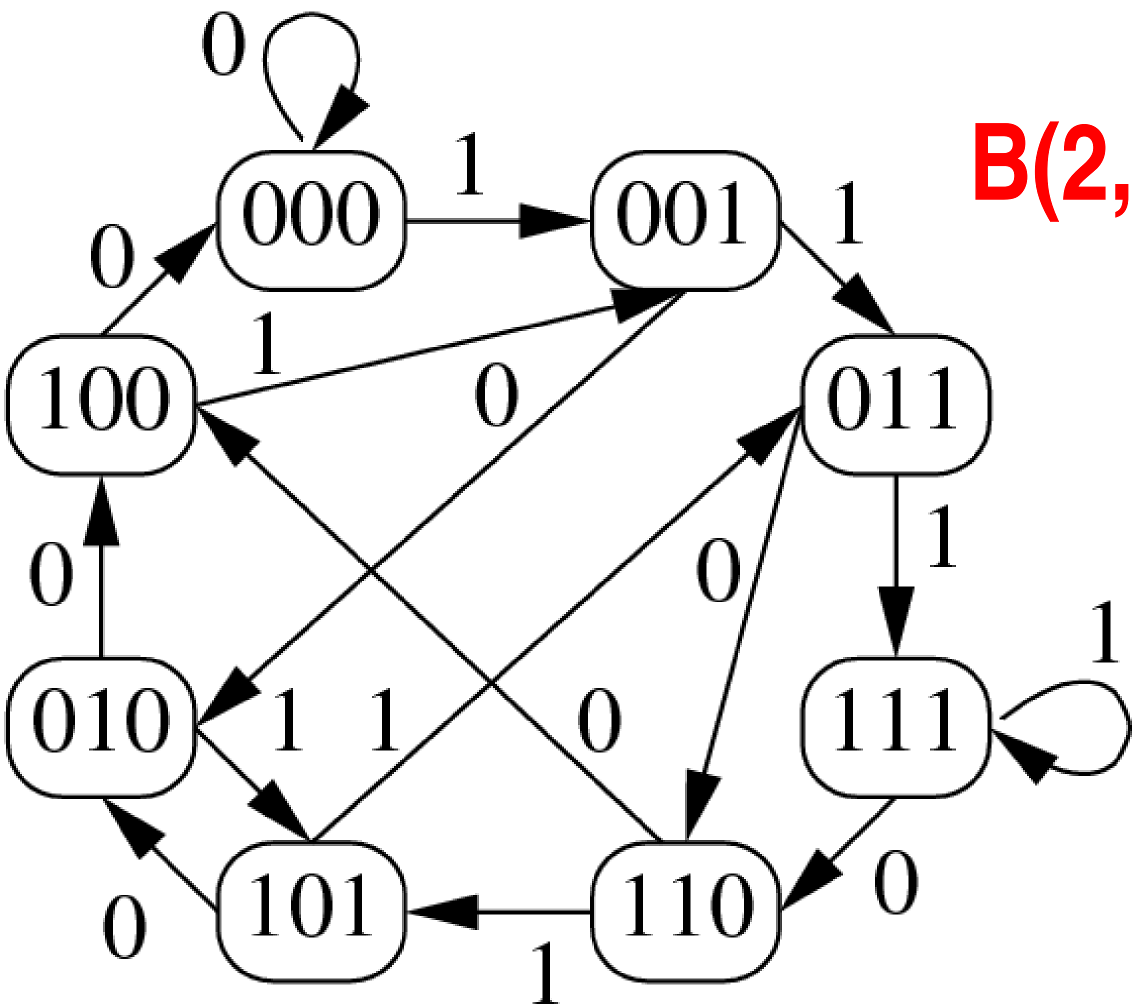
B(p,n) : Mot circulaire le plus court contenant
TOUS les facteurs de longueur *n*
sur un alphabet de taille *p.*

Théorème : Pour tous *p,n*, il existe un
mot de de Bruijn *B(p,n)* de longueur p^n.

Mots circulaires de de Bruijn

n=3, p=2 {0,1}

B(2,3)=11101000

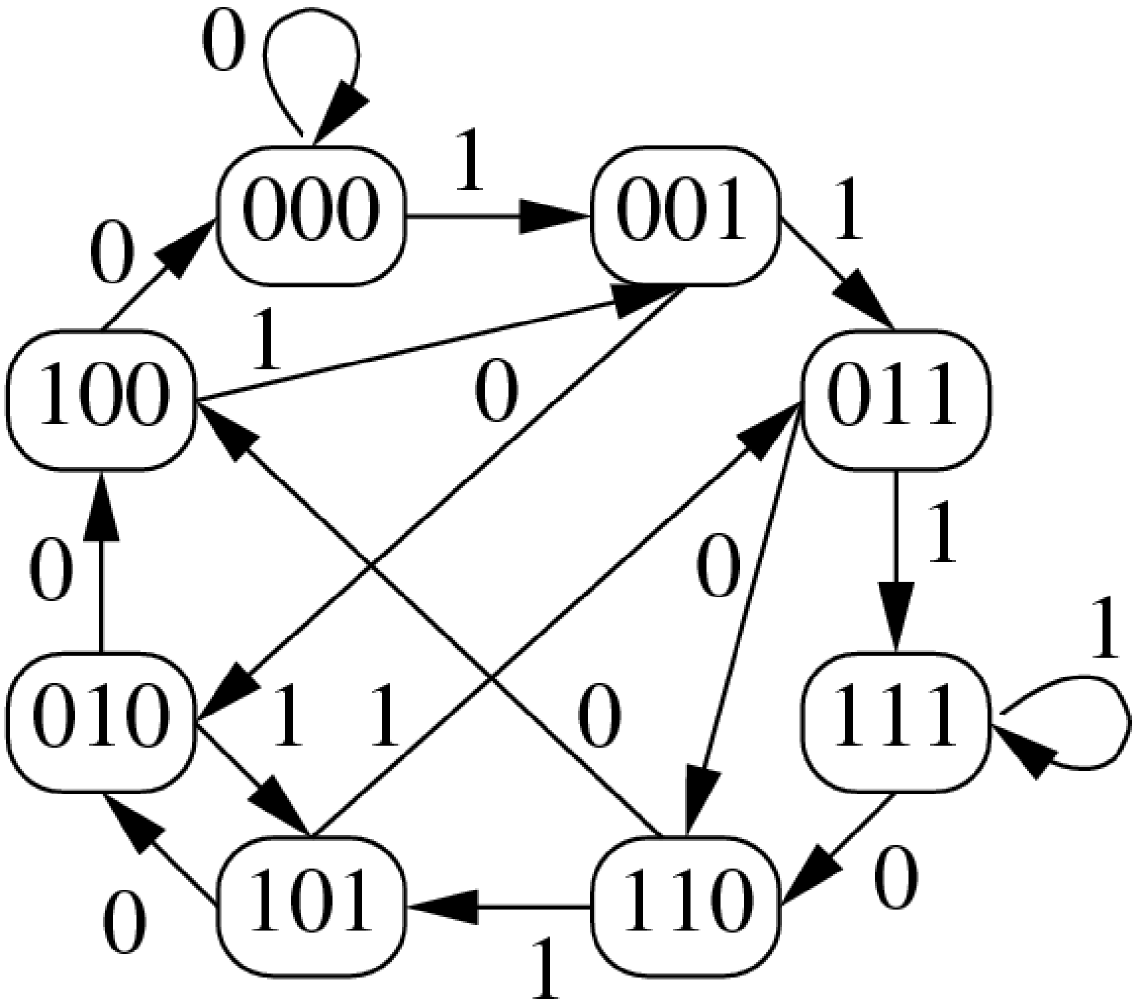


Graphe hamiltonien

000
001
011
111
110
101
010
100

Mots circulaires de de Bruijn

n=4, p=2 {0,1}



Chaque arc donne un unique facteur !

Graphe eulérien

0000101100111101

Mots circulaires de de Bruijn

n=5, p=2 {R,N}

RRRRRNNNNNRNNNRR
NNRNRNNRRRRNRNRRN

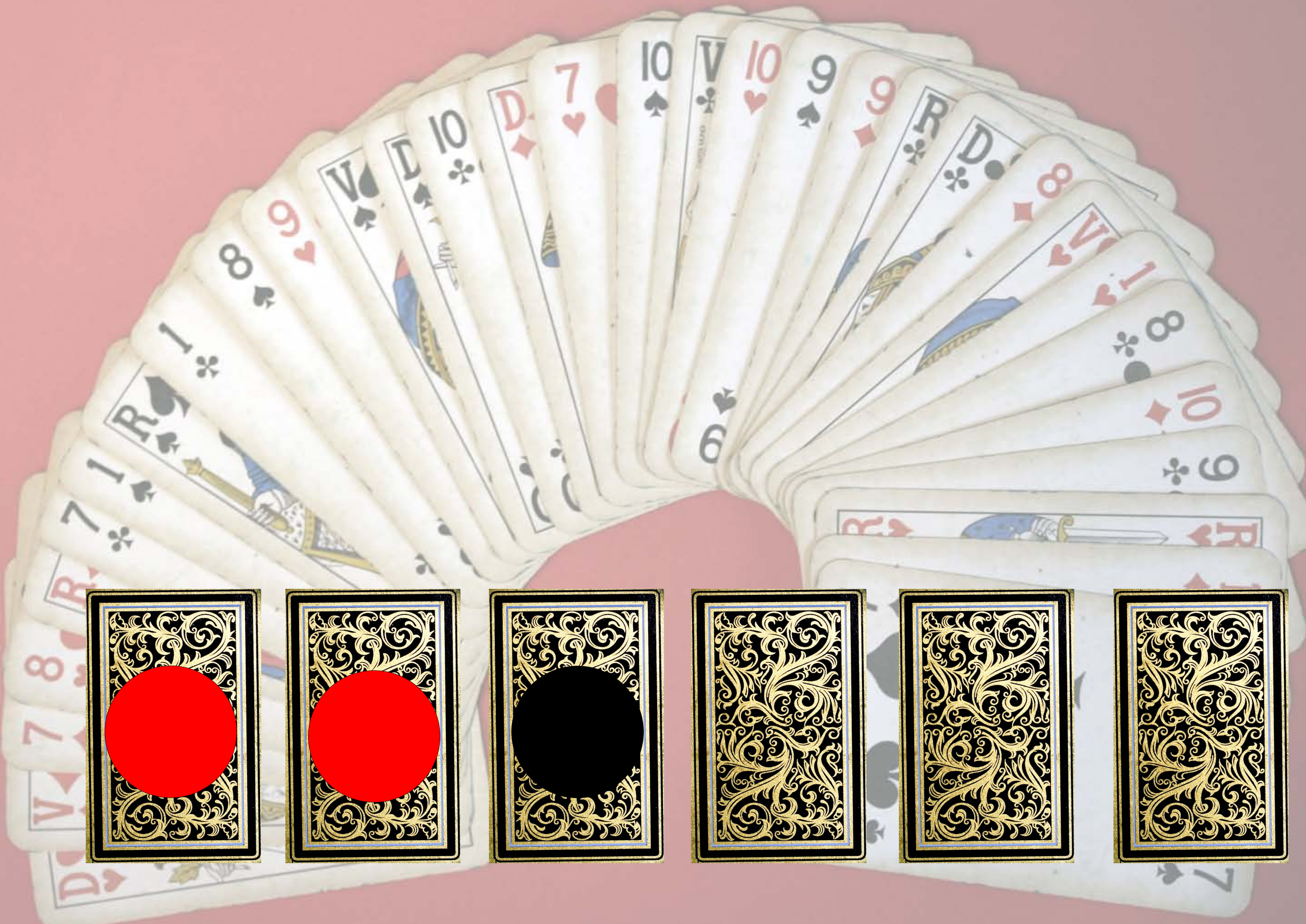
RRRRR
RRRRN
RRRNN
RRNNN
RNNNN
NNNNN
NNNNR
... ...

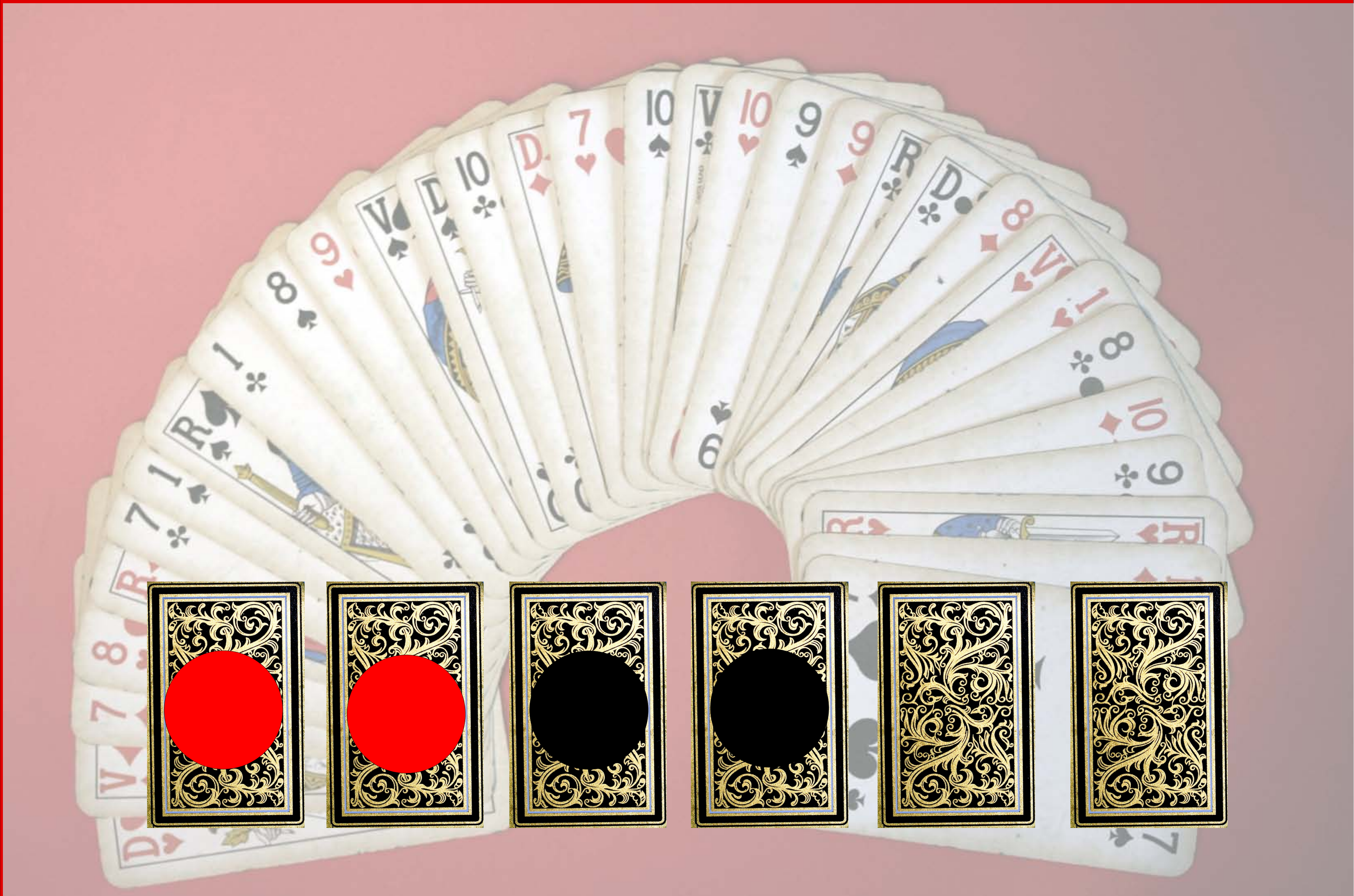
Mots circulaires de de Bruijn

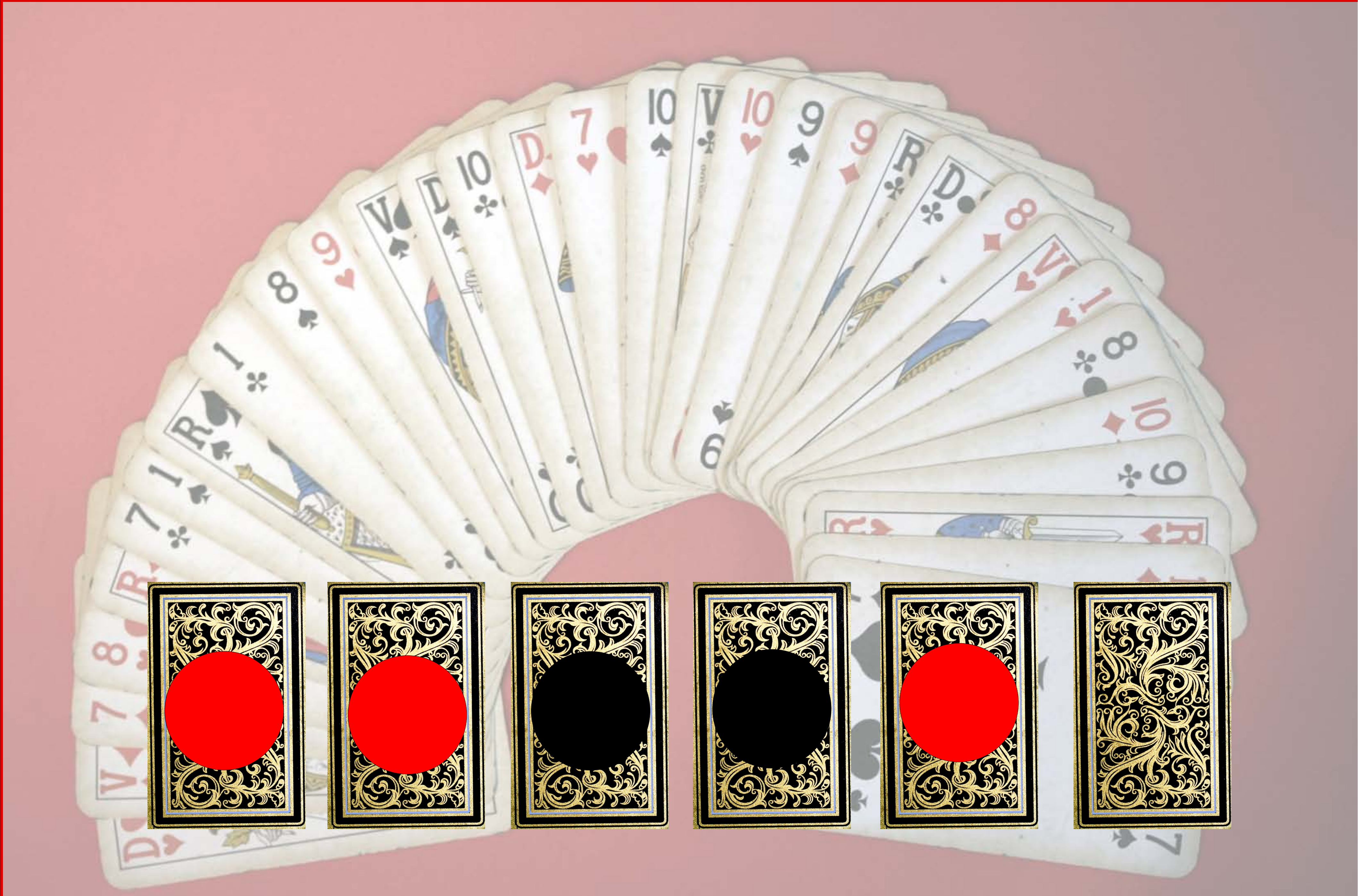
n=5, p=2 {R,N}

RRRRRNNNNNRNNNRR
NNRNRNNRRRNRNRRN

RRRRR
RRRRN
RRRNN
RRNNN
RNNNN
NNNNN
NNNNR
… … …







RRRRRNNNNNRNNNRRNNRNRNNRRRNRNRRN

Divination ... en base 10

1) **Choisir un nombre de 3 chiffres**
   par exemple : 712
   le chiffre des unités diffère de celui des centaines

2) **Considérer le miroir du nombre choisi**
   par exemple : 217

3) **Soustraire “le plus grand – le plus petit”**

Divination ... en base 10

4) Additionner le résultat avec son miroir

Rem : si le résultat n'a que 2 chiffres,

par exemple 17 = 017, son miroir est 710

5) SE CONCENTRER !

Divination ... en base 10

1089

Pourquoi cela fonctionne-t-il ?

$a, b, c \in \{0, \ldots, 9\}$

$$abc, \text{ supposons } a > c$$

"*abc-cba*" = $(a - c) \times 100 + (c - a)$, mais $c - a$ est négatif.
Ce nombre se décompose encore comme

$$(a - c - 1) \times 100 \;+\; 9 \times 10 \;+\; 10 + c - a.$$

Si maintenant, on ajoute à ce dernier son miroir :

$$\begin{array}{rcccc}
 & 1 & & & \\
 & (a-c-1) & 9 & (10+c-a) \\
+ & (10+c-a) & 9 & (a-c-1) \\
\hline
1 & 0 & 8 & 9
\end{array}$$

Divination en base 2

Choisissez un nombre entre 1 et 63

Divination en base 2

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

Divination en base 2

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

DIVINATION EN BASE 2

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

Divination en base 2

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

Divination en base 2

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Divination en base 2

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

DIVINATION EN BASE 2

Ecrire les nombres en base 2

	32	16	8	4	2	1
1						1
2					1	0
3					1	1
4				1	0	0
5				1	0	1
6				1	1	0
7				1	1	1
8			1	0	0	0
$\vdots$						
45	1	0	1	1	0	1
$\vdots$						

DIVINATION EN BASE 2

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

1	11	101	111	1001	1011	1101	1111
10001	10011	10101	10111	11001	11011	11101	11111
100001	100011	100101	100111	101001	101011	101101	101111
110001	110011	110101	110111	111001	111011	111101	111111

DIVINATION EN BASE 2

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

10	11	110	111	1010	1011	1110	1111
10010	10011	10110	10111	11010	11011	11110	11111
100010	100011	100110	100111	101010	101011	101110	101111
110010	110011	110110	110111	111010	111011	111110	111111

Divination en base 2

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

100	101	110	111	1100	1101	1110	1111
10100	10101	10110	10111	11100	11101	11110	11111
100100	100101	100110	100111	101100	101101	101110	101111
110100	110101	110110	110111	111100	111101	111110	111111

DIVINATION EN BASE 2

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111
101000	101001	101010	101011	101100	101101	101110	101111
111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110	111111

DIVINATION EN BASE 2

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

10000	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111
11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111
110000	110001	110010	110011	110100	110101	110110	110111
111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110	111111

DIVINATION EN BASE 2

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

100000	100001	100010	100011	100100	100101	100110	100111
101000	101001	101010	101011	101100	101101	101110	101111
110000	110001	110010	110011	110100	110101	110110	110111
111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110	111111

Le barman aveugle avec des gants de boxe

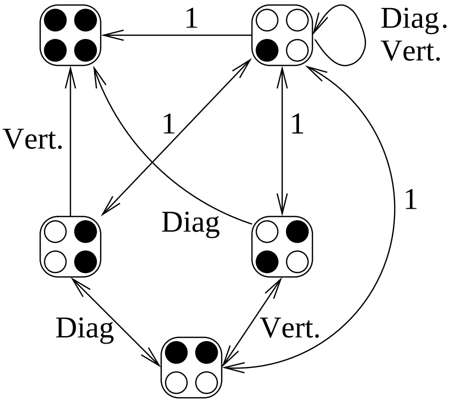
Le challenge

En 7 coups maximum, être capable de mettre les quatre récipients tous dans le même sens...

Le barman aveugle avec des gants de boxe

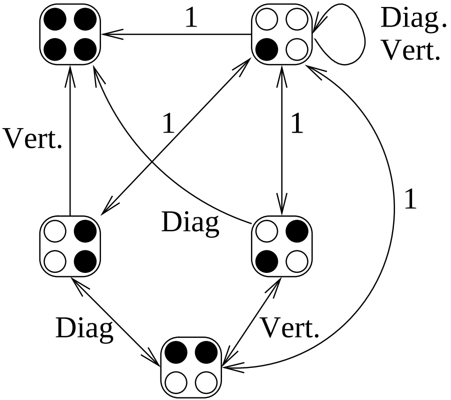
		$\times$			$\times$	$\times$			$\times$	$\times$			$\times$	$\times$	
			$\times$		$\times$		$\times$				$\times$		$\times$		$\times$
$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$						
$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$						
$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$		
$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$		
$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$				
$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$				
$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$										
$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$										
$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$												
$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$												
$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$								
$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$								

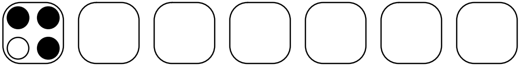
"diagonal - vertical - diagonal - un seul - diagonal - vertical - diagonal".



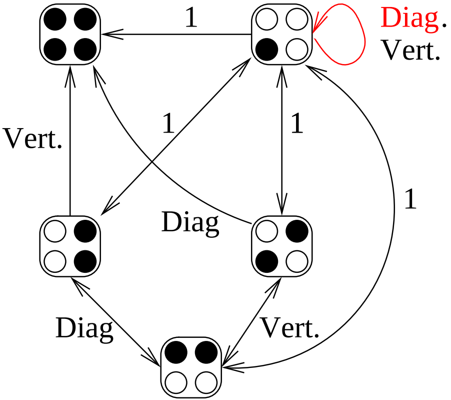
Le barman aveugle avec des gants de boxe

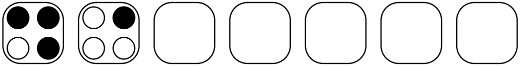
"diagonal - vertical - diagonal - un seul - diagonal - vertical - diagonal".





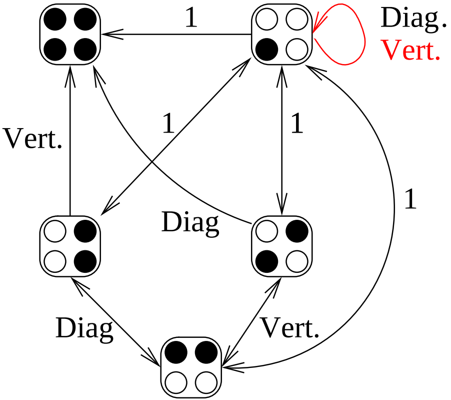
"diagonal - vertical - diagonal - un seul - diagonal - vertical - diagonal".

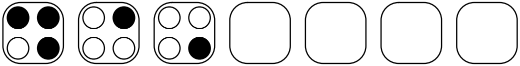




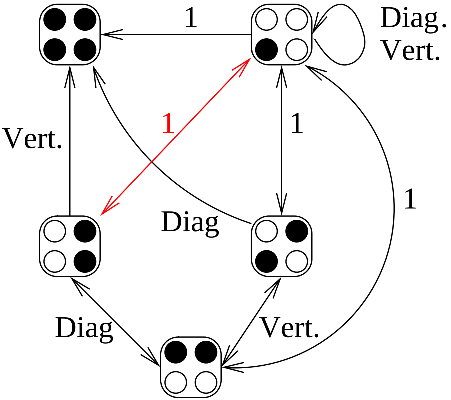
LE BARMAN AVEUGLE AVEC DES GANTS DE BOXE

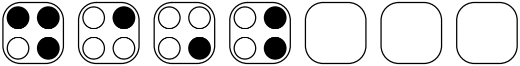
"diagonal - vertical - diagonal - un seul - diagonal - vertical - diagonal".





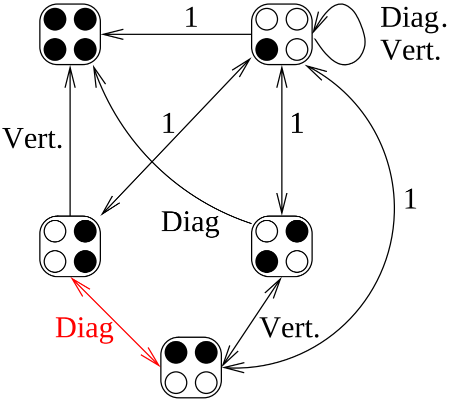
“diagonal - vertical - diagonal - un seul - diagonal - vertical - diagonal”.

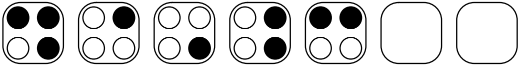




LE BARMAN AVEUGLE AVEC DES GANTS DE BOXE

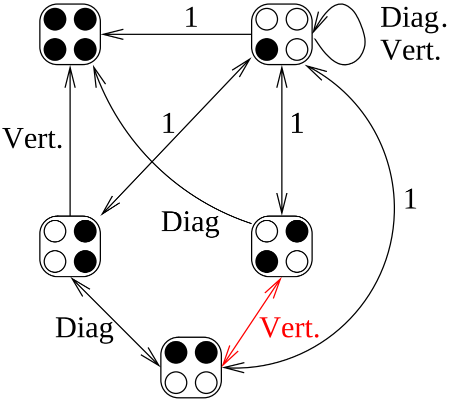
“diagonal - vertical - diagonal - un seul - diagonal - vertical - diagonal”.

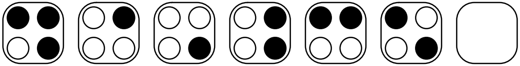




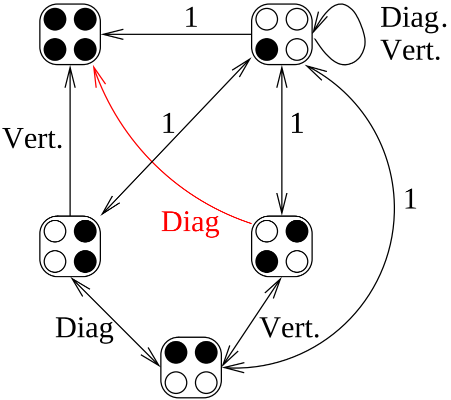
Le barman aveugle avec des gants de boxe

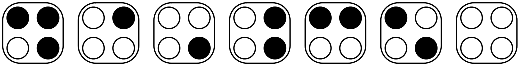
"diagonal - vertical - diagonal - un seul - diagonal - vertical - diagonal".





"diagonal - vertical - diagonal - un seul - diagonal - vertical - diagonal".





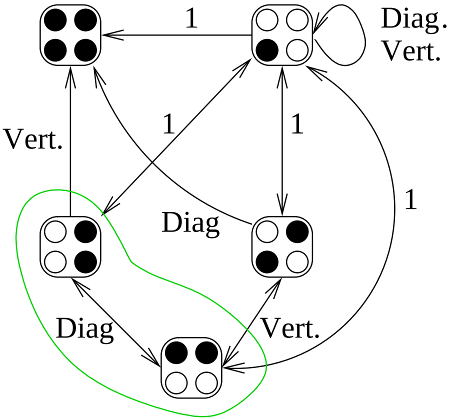
Le barman aveugle avec des gants de boxe

Variante

Faire tourner le plateau de 90° entre les coups.

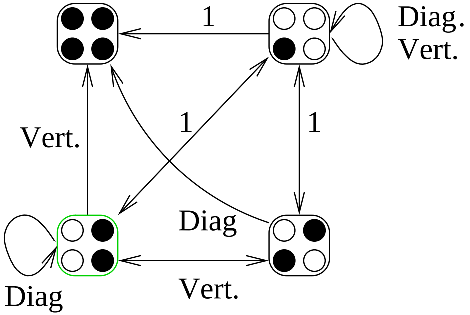
Variante

Faire tourner le plateau de 90° entre les coups.



VARIANTE

Faire tourner le plateau de 90° entre les coups.



DÉFINITION

Soient $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ un ensemble de k couleurs et $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta)$ un graphe de transitions

De tout sommet q de l'ensemble Q des sommets sont issus exactement k arcs, un par couleur. Le codage de ces arcs est donné par $\delta : Q \times \Sigma \to Q$.

Couleurs : a, b

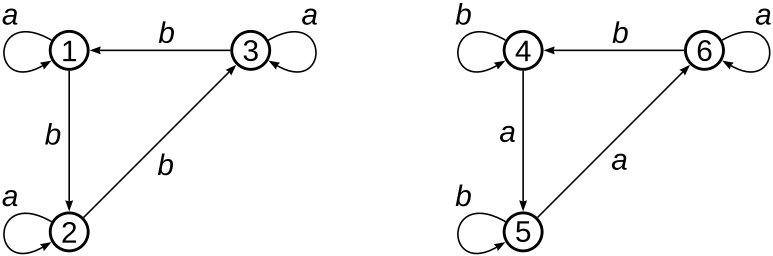
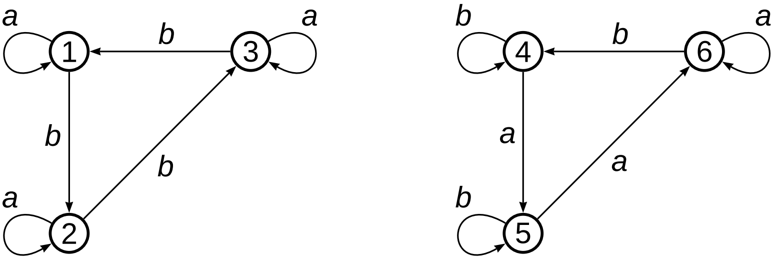


FIGURE: Deux graphes de transitions avec $\Sigma = \{a, b\}$.

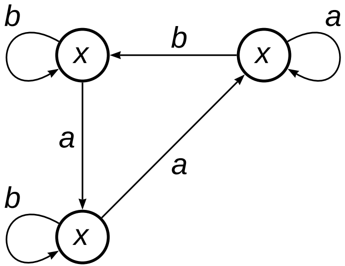
DÉFINITION

Une suite ordonnée $m = m_1 \cdots m_\ell$ de ℓ couleurs (ou un simplement un mot) est synchronisante s'il existe un sommet $p \in Q$ tel que pour tout sommet $q \in Q$, $q.m = p$.

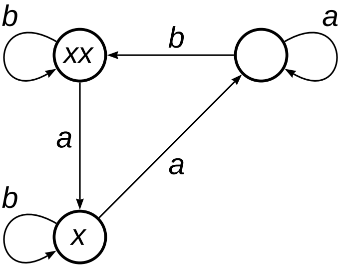


$1.baab = 3$, $2.baab = 1$, $3.baab = 2$,
$4.baab = 4$, $5.baab = 4$, $6.baab = 4$

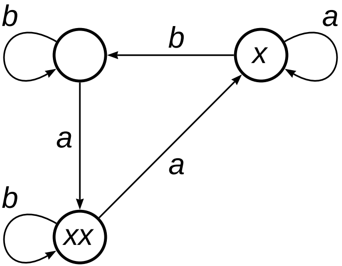
Un jeu de solitaire baab



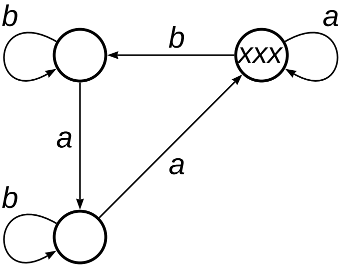
Un jeu de solitaire baab



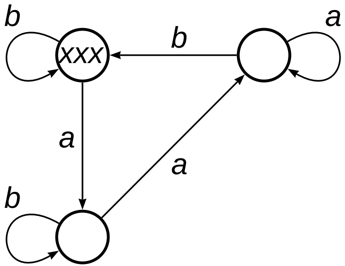
Un jeu de solitaire baab



Un jeu de solitaire baab



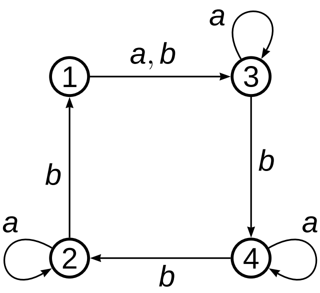
Un jeu de solitaire baab



Un graphe de transitions est synchronisant s’il admet un mot synchronisant.

CONJECTURE (ČERNÝ 1964)

Si un graphe de transitions à n sommets est synchronisant, alors il admet un mot synchronisant de longueur au plus $(n-1)^2$.



abbbabbba

PROPOSITION

Un graphe de transitions est synchronisant si et seulement si pour tous $p, q \in Q$, il existe un mot m tel que $p.m = q.m$.

REMARQUE

Si un graphe de transitions à n sommets est synchronisant, alors il admet un mot synchronisant de longueur au plus k^n.

THÉORÈME (J.-E. PIN)

Si un graphe de transitions à n sommets est synchronisant, alors il admet un mot synchronisant de longueur au plus $(n^3 - n)/6$.

PROPOSITION

Un graphe de transitions est synchronisant si et seulement si pour tous $p, q \in Q$, il existe un mot m tel que $p.m = q.m$.

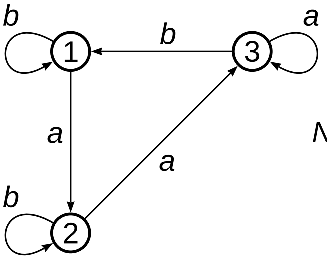
REMARQUE

Si un graphe de transitions à n sommets est synchronisant, alors il admet un mot synchronisant de longueur au plus k^n.

THÉORÈME (J.-E. PIN)

Si un graphe de transitions à n sommets est synchronisant, alors il admet un mot synchronisant de longueur au plus $(n^3 - n)/6$.

Application...



$$N_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soit $m = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t$ un mot sur Σ. L'élément i,j de la matrice

$$N_{\sigma_1}.N_{\sigma_2}\cdots N_{\sigma_t}$$

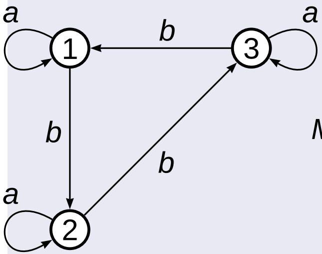
vaut 1 SSI partant de i, on aboutit en j en suivant le chemin prescrit par $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t$. En particulier, m est synchronisant si $N_{\sigma_1}.N_{\sigma_2}\cdots N_{\sigma_t}$ contient une colonne formée de 1.

$$N_b N_a N_a N_b =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 \\ \color{red}{1} & 0 & 0 \\ \color{red}{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

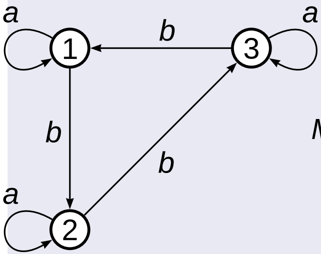
CE GRAPHE EST-IL SYNCHRONISANT ?



$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_b^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce graphe est-il synchronisant ?



$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_b^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Procédure de décision

- Etant donné un graphe de transitions
- Ce graphe est-il synchronisant ? Oui ou Non ?

THÉORÈME (J.-E. PIN)

Si un graphe de transitions à n sommets est synchronisant, alors il admet un mot synchronisant de longueur au plus $(n^3 - n)/6$.

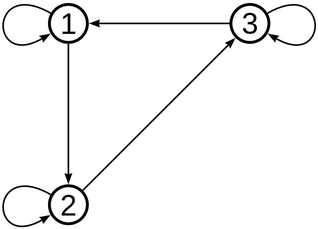
On passe en revue tous les mots de longueur $\leq (n^3 - n)/6$...

The road coloring problem

Soit un graphe (fini) orienté k-régulier, chaque sommet possède le même demi-degré sortant k

QUESTION

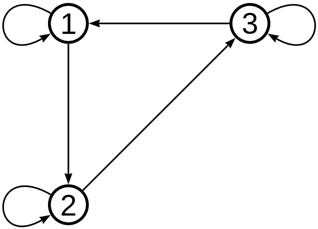
est-il possible de colorer les arcs du graphe de façon à le rendre synchronisant ?

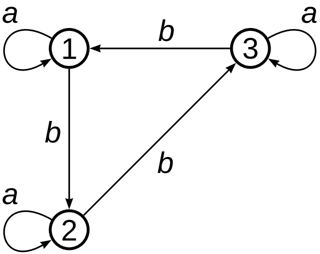


Soit un graphe (fini) orienté *k*-régulier, chaque sommet possède le même demi-degré sortant *k*

QUESTION

est-il possible de colorer les arcs du graphe de façon à le rendre synchronisant ?

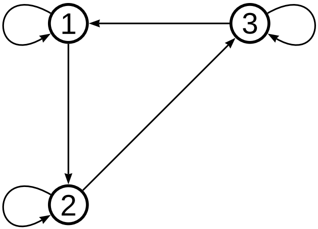


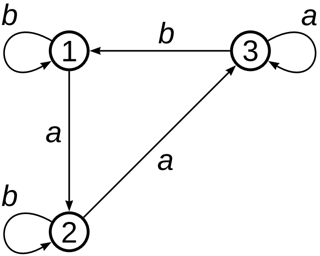


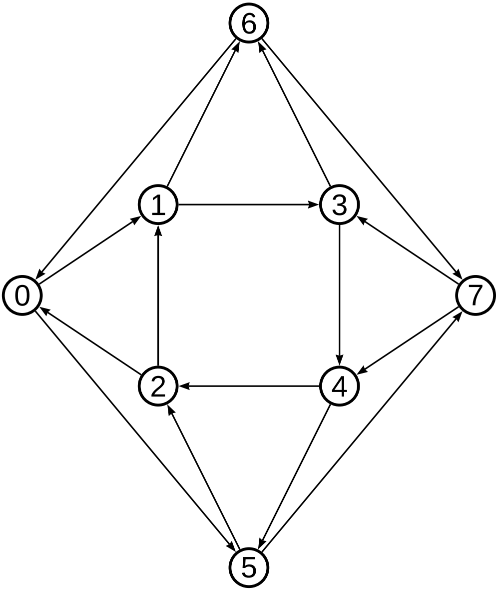
Soit un graphe (fini) orienté k-régulier, chaque sommet possède le même demi-degré sortant k

QUESTION

est-il possible de colorer les arcs du graphe de façon à le rendre synchronisant ?

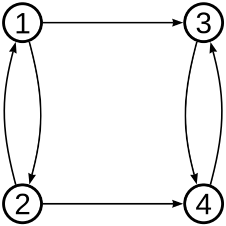





6
1
3
0
7
2
4
5

DEFINITION

Un graphe orienté est fortement connexe si pour tout couple (p, q) de sommets, il existe une suite d'arcs allant de p à q.



Un graphe <u>non</u> fortement connexe.

DEFINITION

Un graphe fortement connexe est apériodique si le plus grand commun diviseur des longueurs de ses cycles vaut 1.

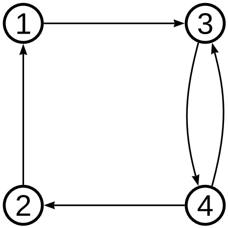


FIGURE: Un graphe orienté <u>non</u> apériodique.

PROPOSITION

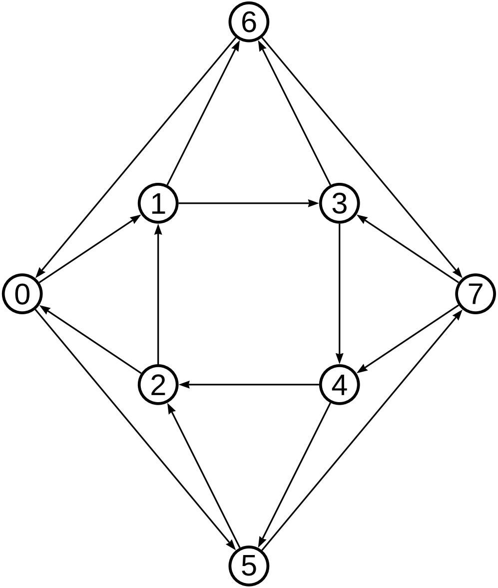
Un graphe de transitions synchronisant, fortement connexe et k-régulier est toujours apériodique.

Le résultat suivant a été conjecturé par Adler, Goodwin et Weiss en 1977 et prouvé en 2007 par Avraham Trahtman.

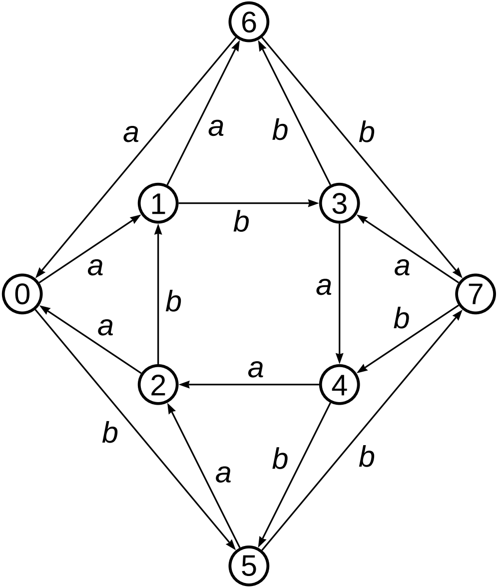
THÉORÈME

Tout graphe fini orienté k-régulier, fortement connexe et apériodique possède un coloriage des ses arcs qui en fait un graphe de transitions synchronisant.

A. Trahtman à Liège (Septembre 2004)



Graphe 2-régulier, fortement connexe, apériodique



bbabbabba et *baabaabaa* sont deux mots synchronisants

REMARQUE

Sous les hypothèses du théorème de Trahtman, la conjecture de Černý est vérifiée : un graphe à n sommets dispose toujours d'un coloriage avec un mot synchronisant de longueur au plus $n(n-1)/2$.

$$n(n-1)/2 < (n-1)^2, n \geq 3$$