

Sélection du portefeuille de projets d'exploration production en utilisant la méthode de Markowitz

Fateh BELAID and Daniel DE WOLF

Instiut des Mers du Nord,
Université du Littoral,
21 quai de la citadelle,
59140 Dunkerque, France.

Fateh.Belaid@univ-littoral.fr
Daniel.Dewolf@univ-littoral.fr

Résumé Deux caractéristiques importantes de l'investissement en exploration ou production pétrolière sont les montants financiers très importants en jeu et les incertitudes élevées. Pour ces raisons, l'analyse du risque devrait être mise en oeuvre dans le processus d'évaluation et de sélection des projets. En fonction de leurs ressources disponibles, les compagnies pétrolières sélectionnent un ensemble de projets sur la base de certains critères : la valeur actuelle nette, le taux de rendement interne, l'indice de profitabilité, etc . . . Cependant, ces critères se révèlent insuffisants vu, d'une part, l'absence de la notion du risque qui est un élément essentiel de l'industrie pétrolière, et d'autre part, l'omission des interactions entre les différents projets. Dans ce travail, afin de pallier aux insuffisances de l'approche traditionnelle, nous appliquons une variante de la méthode de Markowitz afin de déterminer le portefeuille optimal de projets d'exploration ou production qui assure le meilleur compromis *risque minimum-rendement maximum* sous les diverses contraintes auxquelles l'entreprise est confrontée. Un cas pratique d'application de cette méthode à la sélection de projets d'exploitation pétrolière en Mer du Nord est présenté. Ce cas pratique permet d'illustrer l'influence du facteur prix du brut sur le choix du portefeuille.

Mots-Clefs. Optimisation de portefeuille ; Exploration pétrolière ; Gestion du risque.

1 Introduction

Le but principal de cet article est de présenter une application de la théorie de Markowitz à la sélection de projets d'investissement. En se souciant de présenter une méthode simple et concrète, c'est- à-dire, compréhensible et facile à appliquer par les décideurs de compagnies pétrolières. Des critères d'évaluation préliminaires d'investissement sont nécessaires dans chaque étape de décision, toutefois, la grande question à laquelle doit répondre cette étude est : comment utiliser l'approche d'optimisation de portefeuilles pour faciliter la décision stratégique d'investissement dans la pratique ? En général, le financement ne peut pas soutenir toutes les opportunités d'investissement disponibles. La sélection d'un portefeuille de projets est donc importante. Le processus de sélection vise à choisir un sous-ensemble de projets qui permette de maximiser les bénéfices (objectif) de la société tout en respectant les restrictions budgétaires (contraintes). Toutefois, en plus de toutes les considérations précédentes, la compagnie doit suivre une stratégie lui assurera un *meilleur rendement avec un minimum de risque*.

2 Le fonctionnement du modèle pour l'ensemble de la procédure

Le processus utilisé pour l'optimisation du portefeuille de projets en exploration et production est un modèle économique intégral, ventilé en trois étapes principales :

1. *Evaluation individuelle de chaque projet* par l'utilisation de la méthode déterministe pour l'évaluation des cash-flows du projet d'exploration ou production pétrolière.
2. *Génération des simulations de Monte Carlo* pour l'évaluation des risques économiques de projets ;
3. *Construction d'un modèle d'optimisation* pour sélectionner le portefeuille optimal de projets.

La construction et le fonctionnement du modèle sont schématisés à la figure 1.

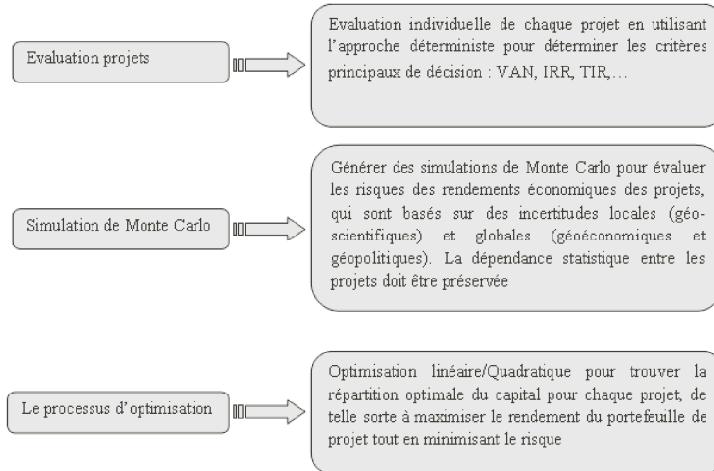


FIG. 1. Fonctionnement du processus d'optimisation

Le but est d'obtenir un taux d'investissement optimal pour chaque projet afin de maximiser le rendement total du portefeuille en prenant en compte les différents risques ainsi que les contraintes de l'entreprise. Pour cela, nous comparons deux méthodes : La méthode d'optimisation de Markowitz avec la *variance comme mesure du risque* et la méthode de Markowitz avec la *semi-variance comme du risque*.

Afin de tester l'impact de la volatilité du prix de pétrole sur la rentabilité du portefeuille de projets, nous utilisons quatre modèles correspondant à des scénarios de prix différents :

Scénario 1 : un prix bas à 25 \$ le baril,

Scénario 2 : un prix moyen à 100 \$ le baril,

Scénario 3 : un prix élevé à 200 \$ le baril,

Scénario 4 : un modèle mixte, où l'on assigne une probabilité d'occurrence de chaque scénario de prix :

- un prix à 25 \$ le baril avec une probabilité de 0,2 ;
- un prix à 100 \$ le baril avec une probabilité de 0,4 ;
- un prix à 200 \$ le baril avec une probabilité de 0,4.

3 La méthode de Markowitz pour l'optimisation de portefeuilles

Depuis Markowitz (1952), l'analyse mathématique sur la gestion du portefeuille s'est développée considérablement, et la variance est devenue la définition mathématique la plus populaire du risque pour la sélection de portefeuille. Les chercheurs ont développé une variété de modèles en utilisant la variance comme mesure du risque dans diverses situations, par exemple, Hlouskova (2000), Chopra (1998), Chow (1994), etc...

En revanche, quand les distributions des rendements sont asymétriques, la sélection du portefeuille basée sur la variance peut être un handicap potentiel, de fait qu'elle sacrifie trop de rendement prévu en éliminant les rendements extrêmes, à la fois les rendements extrêmes élevés et les rendements extrêmes faibles ; pour palier à ce problème, la *semi-variance* a été proposée comme une autre mesure alternative du risque. Beaucoup de modèles ont été construits sur la base de la minimisation de la semi-variance, exemple, Homaifar(1999), Grootveld (1999), Huang (2008), Markowitz (1993), etc...

3.1 Notation utilisée

Comme indices, nous utilisons i et j pour indiquer les différents projets et t pour les années. Les différents paramètres du problème sont notés :

N	le nombre total de projets (14 dans notre application) ;
E	le nombre de projets d'exploration (5 dans notre application) ;
$ENPV_i$	le rendement espéré du projet i (fournit par la simulation de Monte Carlo) ;
σ_{ij}	les coefficients de la matrice des variances-covariances entre les rendements espérés des projets i et j (fournis par la simulation de Monte Carlo) ;
Ω_{ij}	les coefficients de la matrice des semi-covariances entre les valeurs actuelles nettes espérées des projets i et j (fournis par la simulation de Monte Carlo) ;
R_i	les réserves du projet i ;
P_i	la production du projet i ;
I_i	l'investissement du projet i ;
$P_{\min t}$	la production minimale ciblée l'année t ;
R_{\min}	le seuil de production minimal requis pour le portefeuille sélectionné (supposé ici de 500 millions de \$) ;
I_{\max}	le capital d'investissement disponible (supposé ici de 5 000 millions de \$) ;
α	l'enrichissement en capital requis pour le portefeuille sélectionné (supposé ici de 0,2) ;
ρ_{\min}	le seuil de la valeur actuelle nette désirée du portefeuille (supposé ici de 900 millions de \$) ;
λ	le coefficient reflétant le facteur d'aversion au risque de l'investisseur (0 à 1) ;
β	la fraction des investissements attribuée aux cinq premiers projets (20 %).

3.2 La méthode de Markowitz avec la variance comme mesure du risque

Les variables de décision sont simplement :

X_i = la fraction de projet i investie dans le portefeuille

Remarquons que l'on suppose ici que l'on peut participer à un projet à n'importe quelle hauteur.

L'optimisation du portefeuille a été menée pour un groupe de 14 projets d'exploration ou production en Mer du Nord avec les considération du risque. Il en résulte en une frontière efficiente. Dans ce modèle, la fonction objective utilisée est une combinaison linéaire de la VAN espérée et de l'opposé du risque.

Modèle : Max (VAN-VAR) :

$$\max z_1 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^N EVAN_i X_i - \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} X_i X_j$$

Sous les contraintes suivantes : $\forall i = 1, 2, \dots, N, \forall t = 2013, \dots, 2017$

$$\begin{aligned} 0 &\leq X_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^N I_i X_i &\leq I_{max} \\ \sum_{i=1}^N R_i X_i &\geq R_{min} \\ \sum_{i=1}^N EVAN_i X_i &\geq \rho_{min} \\ \sum_{i \in E} I_i X_i &\geq B \sum_{i=1}^N I_i X_i \\ \sum_{i=1}^N P_{it} X_i &\geq P_{min,t} \end{aligned}$$

C'est un modèle qui consiste donc à maximiser la somme pondérée de la valeur actuelle nette et de l'opposé du risque. Il s'agit d'un *programme quadratique* qui, pour chaque valeur de λ détermine les valeurs X_i (les fractions de chaque projet investies dans le portefeuille), ainsi, le rendement et le risque correspondant. Ces derniers constituent les éléments de la courbe de la frontière efficiente. En résolvant le problème pour les différentes valeurs de λ (0 ; 0,01 ; 0,02 ; 0,03 ; 0,04 ; 0,05 ; 0,06 ; 0,07 ; 0,08 ; 0,09 ; 0,10 ; 0,15 ; 0,20 ; 0,30 ; 0,40 ; 0,50 ; 0,60 ; 0,70 ; 0,90 ; 0,99 ; 1), on construit progressivement la frontière efficiente.

3.3 La méthode de Markowitz avec la semi-variance comme mesure du risque

La variance ne permet pas de déterminer si les écarts à la moyenne se sont produits en-dessous ou au-dessus de la moyenne puisque ceux-ci sont exprimés au carré. La semi-variance vient remédier à cette lacune *en ne retenant que les rendements sous la moyenne*.

Avec la minimisation de la variance de portefeuilles en exploration et production, l'optimisation effective pénalise les projets qui ont un potentiel au-dessus et au-dessous de la moyenne. Les gestionnaires pensent au risque comme une perte de valeur uniquement. La semi variance pallie à ce problème en mesurant la probabilité et la dispersion au-dessous de la valeur moyenne de rendement. Pour cela, on modifie le programme d'optimisation pour minimiser la semi-variance au lieu de la variance pour une VAN donnée.

Le modèle avec la semi-variance comme mesure du risque s'écrit de la manière suivante :

Modèle : Max (VAN-SVAR) :

$$\max z_1 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^N EVAN_i X_i - \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Omega_{ij} X_i X_j$$

Sous les contraintes suivantes : $\forall i = 1, 2, \dots, N, \forall t = 2013, \dots, 2017$

$$\begin{aligned} 0 &\leq X_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^N I_i X_i &\leq I_{max} \\ \sum_{i=1}^N R_i X_i &\geq R_{min} \\ \sum_{i=1}^N EVAN_i X_i &\geq \rho_{min} \\ \sum_{i \in E} I_i X_i &\geq B \sum_{i=1}^N I_i X_i \\ \sum_{i=1}^N P_{it} X_i &\geq P_{min,t} \end{aligned}$$

4 Résultats du modèle

Les différents modèles d'optimisation quadratique sont résolus en utilisant le logiciel GAMS.

4.1 La méthode de Markowitz avec la variance comme mesure du risque

Dans cette partie, pour obtenir la courbe de la frontière efficiente, on fait varier les valeurs du coefficient λ (tolérance au risque) dans l'intervalle $[0, 1]$.

Scénario 1 : prix du pétrole à 25 \$ le baril : Avec ce scénario, nous avons obtenu 10 portefeuilles optimaux différents. Le tableau en annexe A nous donne le contenu de chaque portefeuille.

Le portefeuille P1 obtenu pour les valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 correspond au portefeuille le plus rentable avec une $EVAN = 1336,04$ millions de \$, et le plus risqué avec une variance

de 4 019,66 et investissement qui représente un montant de 5 000 millions de \$. Ce dernier correspond au même portefeuille qui aurait été sélectionné avec la méthode traditionnelle de sélection de portefeuille (qui prend les projets dans l'ordre décroissant de leur espérance de VAN). En revanche, P10 qui correspond aux valeurs λ_{13} à λ_{20} , est le portefeuille le moins risqué avec le rendement le plus faible de 900 millions de \$, une variance de 1 472,35 et un investissement de 3 462,56 millions de \$. Dans ce portefeuille, tous les projets sont sélectionnés à l'exception du projet EXP 9, ce qui est très logique car sa VAN est négative (-37,12). Le portefeuille P 4 réduit le risque du portefeuille de 9% avec une perte de rendement de 23,91 millions de \$. Le projet EXP9 n'a été sélectionné dans aucun portefeuille, ce qui s'explique puisqu'il est très risqué, contrairement aux projets EXP7 et EXP8 qui sont sélectionnés en intégralité dans tous les portefeuilles. A partir de ces résultats, on peut construire la frontière efficiente (voir le graphique de la figure 2).

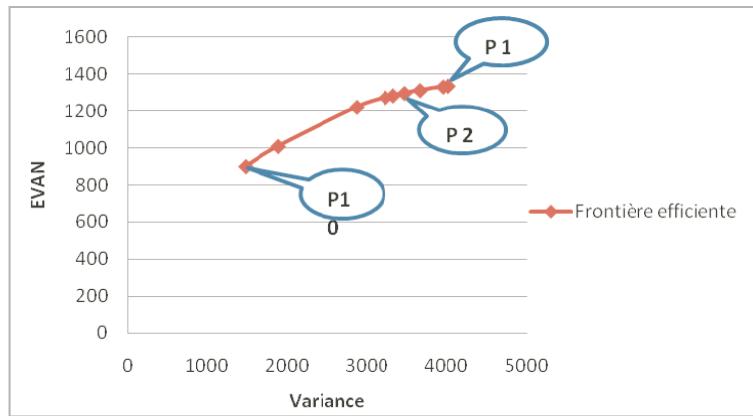


FIG. 2. Frontière efficiente pour un prix de 25 \$ le baril

Scénario 2 : prix du pétrole à 100 \$ le baril : On applique la méthode du Markowitz à nos quatorze projets cette fois-ci avec le prix de pétrole à 100 \$ le baril. Le nombre de portefeuilles efficents s'élève à 20. Le portefeuille le plus risqué est P1 avec un rendement espéré de 13 326,95 millions de \$, une variance de 52 271,98, et un investissement de 5 000 millions de \$. Il est à noter que ce portefeuille correspond au portefeuille choisi par la méthode traditionnelle. A l'inverse, le portefeuille le moins risqué est P 20 avec un rendement de 3 913,17 millions de \$, une variance de 2 612,63, et un investissement de 1 938,45 millions de \$. Le reste des résultats est présenté dans le tableau en annexe A. La frontière efficiente résultante du modèle est présentée par le graphique de la figure 3.

Scénario 3 : prix du pétrole à 200 \$ le baril : Avec le prix à 200 \$ le baril, nous obtenons le même nombre de portefeuilles efficents que le scénario 2. Le portefeuille le plus rentable est P1 avec une EVAN de 29 464,91 millions de \$, une variance de 193 029,29, et

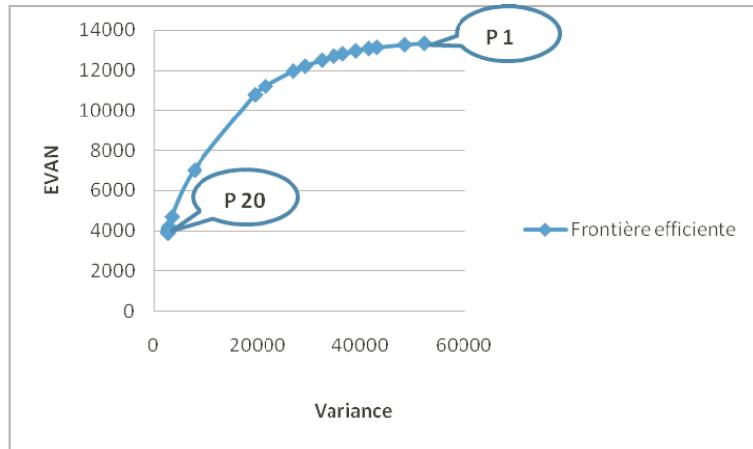


FIG. 3. Frontière efficiente pour un prix de 100 \$ le baril

un investissement de 4 995,594 millions de \$. Le rendement correspond au rendement du portefeuille sélectionné avec la méthode traditionnelle de la VAN espérée maximum, sauf que sa composition n'est pas la même. Le projet EXP7 qui n'a pas été sélectionné auparavant, figure dans le nouveau portefeuille avec une fraction de 0,34 %. Les résultats en Annexe A. La frontière efficiente résultante est tracée dans le graphique de la figure 4.

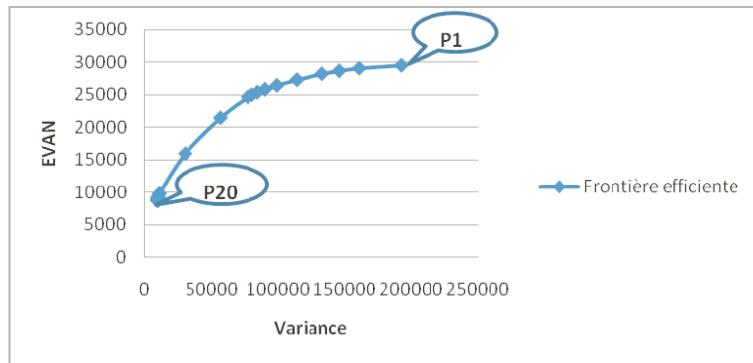


FIG. 4. Frontière efficiente pour un prix de 200 \$ le baril

Scénario 4 : VAN moyenne : Une fois appliqué le modèle sur les trois scénarios de prix, nous l'appliquons sur l'espérance de la VAN résultante de ces trois derniers scénarios. En tout, nous obtenons 20 portefeuilles efficaces. Les résultats sont présentés dans le tableau en annexe A. A lecture de ce dernier, on remarque que le portefeuille P 1 est le plus rentable avec un rendement de 17355,14 millions de \$, une variance de 98 334,55, et un investissement de

4 995,78 millions de \$. Le portefeuille correspond au portefeuille sélectionné avec la méthode traditionnelle, avec une petite différence de composition : par exemple, le projet EXP 7 qui est sélectionné avec une proportion de 24% n'avait pas été choisi par la méthode traditionnelle, de même que le projet EXP 4 qu'est sélectionné avec une fraction de 0,89 % seulement alors qu'il avait été sélectionné en intégralité par la méthode traditionnelle. Le graphique de la 5 présente la frontière efficiente résultante du modèle.

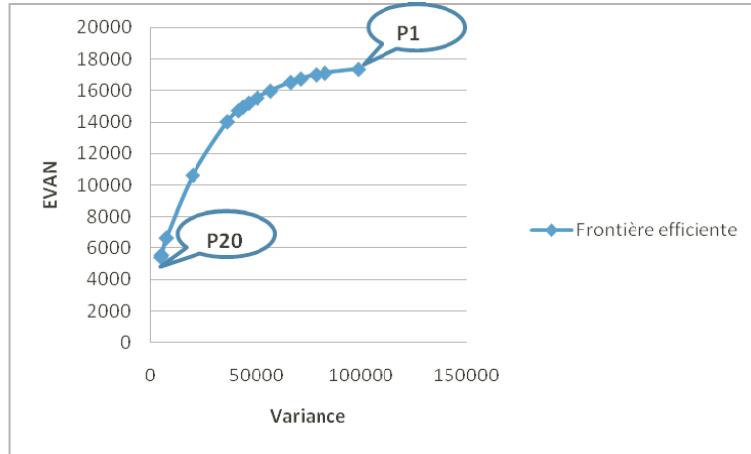


FIG. 5. Frontière efficiente pour le scénario moyen de prix

4.2 Maximisation du rendement avec la semi-variance comme mesure du risque

Comme dans Markowitz et al. (1993), nous calculons la semi-variance de la VAN du portefeuille comme suit :

$$SV(R) = \sum_{i=1}^N (VAN_i - EVAN_i)^2 / N \text{ si } VAN_i < EVAN_i$$

La semi-covariance entre les projets est définie comme suit :

$$\Omega_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\min(VAN_i - EVAN_i, 0) \cdot \min(VAN_j - EVAN_j, 0)] / N$$

Scénario 1 : prix du pétrole à 25 \$ le baril : En utilisant la semi-variance comme mesure du risque, nous obtenons 8 portefeuilles optimaux, c'est-à-dire moins qu'avec le modèle de la variance, parce que pour différents coefficients λ , on obtient des portefeuilles similaires avec le même rendement et même risque. Le portefeuille le plus risqué est P1 avec une semi-variance de 1 950,16 et un rendement de 1 336,04 millions de \$. P 8 est le portefeuille le moins risqué

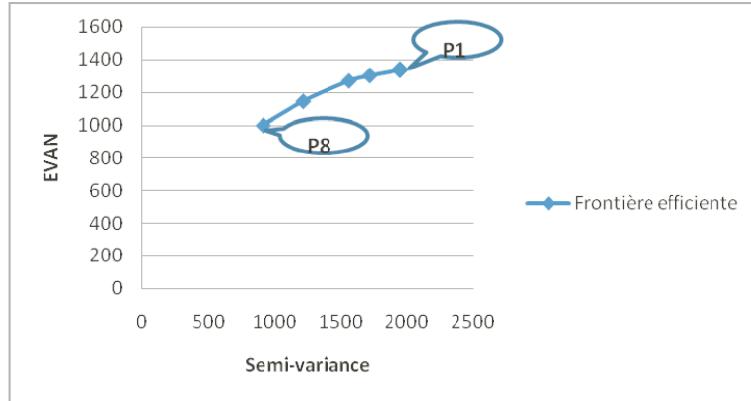


FIG. 6. Frontière efficiente pour un prix de 25 \$ le baril

avec une semi-variance de 908,11, un rendement de 1 000 millions de \$, et un investissement de 3 874,90 millions de \$. Les résultats sont présentés dans le tableau en annexe B.

La frontière efficiente est présentée au graphique de la figure 6. On remarque qu'elle est différente de celle obtenue avec l'utilisation de la variance comme mesure du risque. Pour un rendement similaire on a un risque moins élevé. Cela est dû au fait que la semi-variance considère comme risque que les rendements au-dessous de la moyenne contrairement à la variance qui ne fait pas la différence entre les rendements au dessous et dessus de la moyenne, ce qui pénalise les rendements extrêmes.

Scénario 2 (prix du pétrole à 100 \$ le baril) : L'application de la méthode du Markowitz avec la semi-variance comme mesure du risque sur ce scénario, nous fournit 19 portefeuilles optimaux. P1, le portefeuille le plus risqué a une semi-variance de 26 136,00, un rendement de 13 326,95 millions de \$, et un investissement de 5 000 millions de \$, tandis que P19 est le portefeuille le moins risqué avec une semi-variance de 1 938,45, une espérance de VAN de 3 913,17 millions de \$ et un investissement de 1 938,45 millions de \$. On remarque que la composition de P1 est la même que celle de portefeuille sélectionné avec la méthode traditionnelle pour le même scénario du prix. Les résultats sont présentés à la figure 7.

Scénario 3 : prix du pétrole à 200\$ le baril : L'utilisation de la semi-variance comme mesure du risque sur ce scénario nous donne 19 portefeuilles optimaux avec des compositions proches de celles obtenues avec l'utilisation de la variance. P 1 est le portefeuille le plus risqué avec une semi-variance de 9 7 956,37, un rendement de 29 489,20 millions de \$ et un investissement de 5 000 millions de \$. Il correspond au même portefeuille que celui obtenu avec la méthode traditionnelle. P 2 est le portefeuille le moins risqué, avec une semi-variance de 4 927,53, un rendement de 8 721,27 millions de \$, et un investissement de 1 947,04 millions de \$. Les résultats sont présentés à la figure 8.

Scénario 4 : VAN moyenne : Ce scénario moyen, nous a fourni 19 portefeuilles optimaux dont les compositions sont différentes de celles obtenues avec la variance comme mesure du

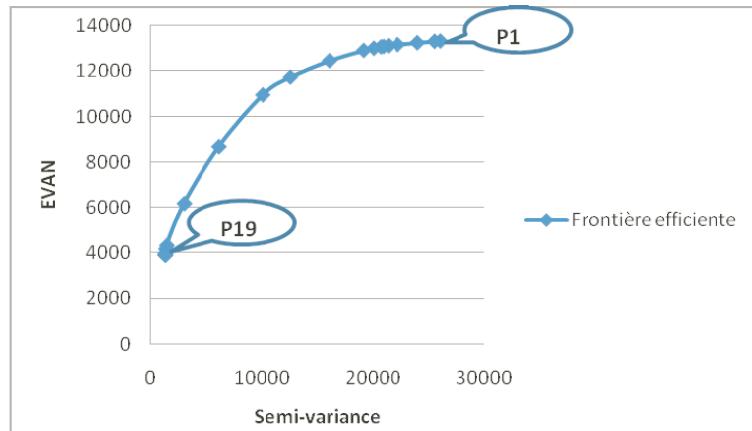


FIG. 7. Frontière efficiente pour un prix de 100 \$ le baril

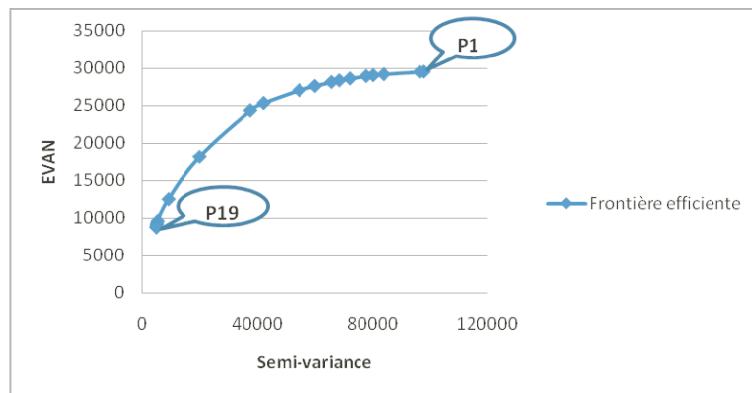


FIG. 8. Frontière efficiente pour un prix de 200 \$ le baril

risque, par contre les rendements sont proches. P1 est le portefeuille le plus risqué avec une semi-variance de 49 882,68, un rendement de 17 367,52 millions de \$, et un investissement de 5 000 millions de \$ (c'est le même portefeuille obtenu avec la méthode classique). P2 est le portefeuille le plus sur (moins risqué) avec une semi-variance de 2 484,07, une VAN de 5 116,71 millions de \$, et un investissement de 1 952,749 millions de \$, ce dernier il réduit le risque de 95 % et l'investissement de 60,95 % (3 047,251 millions de \$) avec une perte de rendement de 70,53% (12 250,81 millions de \$). La frontière efficiente obtenue avec les résultats de modèle est présentée par le graphique de la figure 9.

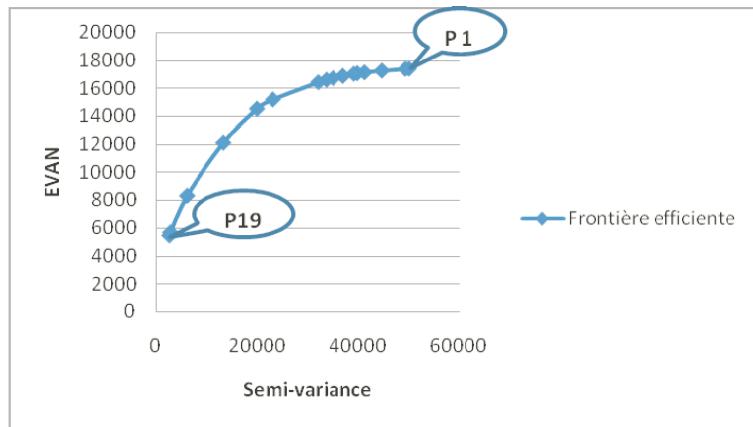


FIG. 9. Frontière efficiente pour le scénario médian

4.3 Comparaison des deux frontières efficientes résultantes de maximisation de la variance et de la semi-variance

Pour qu'on puisse comparer l'utilisation de la variance et de la semi-variance comme mesure du risque, nous traçons les frontières efficientes résultantes des deux mesures dans un même graphique pour les différents scénarios de prix (voir les graphiques des figures 10, 11, 12, 13 ci-dessous). On remarque que les frontières efficientes des modèles avec la semi-variance comme mesure du risque sont différentes de celles de la variance. On note que pour un même niveau de rendement, la semi-variance correspond à un risque moins élevé. Par conséquent, avec la décroissance du risque, la différence ou la dispersion entre les deux courbes devient moins importante.

5 Conclusion

Notre modèle s'articule sur les trois étapes principales suivantes :

- *Analyse des cash-flows de projets par les calculs déterministes* en utilisant les critères de la VAN ;

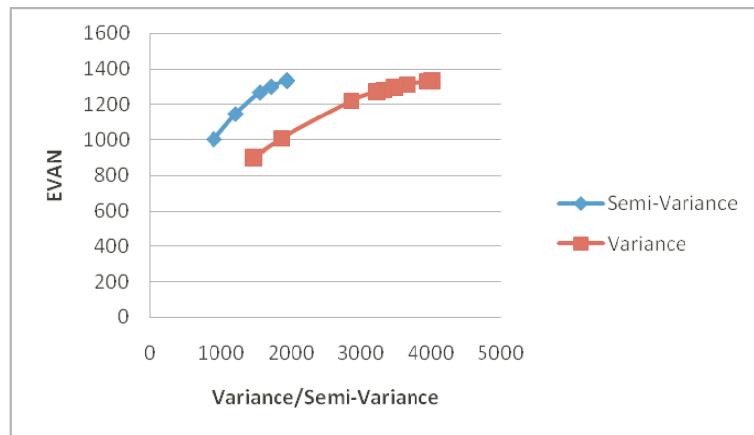


FIG. 10. Scénario 1 : prix du pétrole à 25\$ le baril.

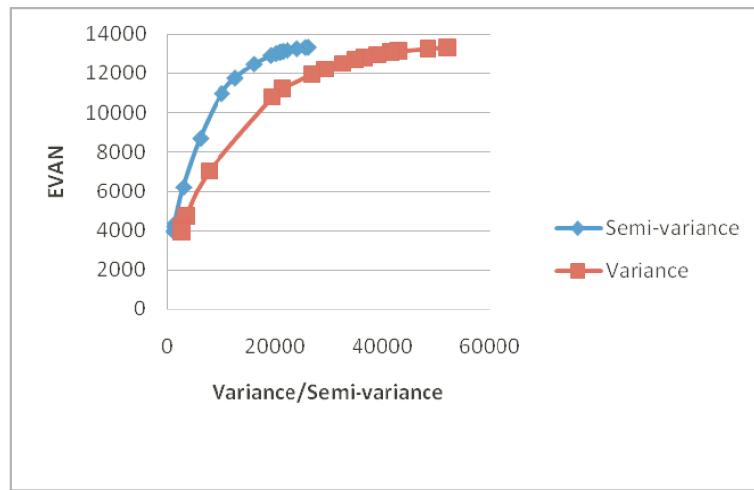


FIG. 11. Scénario 2 : prix du pétrole à 100\$ le baril.

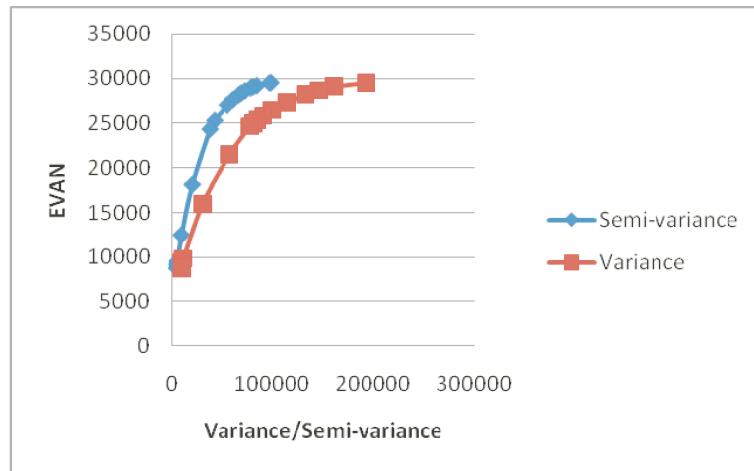


FIG. 12. Scénario 3 : prix du pétrole à 200\$ le baril.

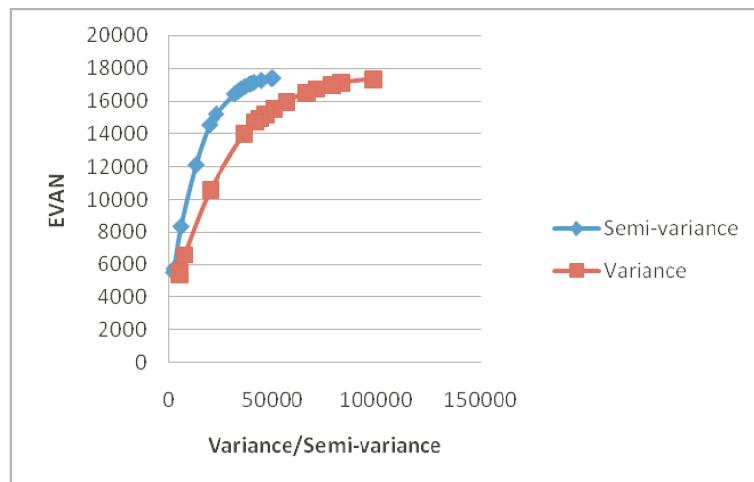


FIG. 13. Scénario 4 : scénario moyen.

- *Analyse des cash-flows de projets par des calculs stochastiques* en utilisant la simulation de Monte Carlo pour le calcul de la VAN ;
- *Sélection du portefeuille optimal de projets en utilisant la méthode du Markowitz*, en utilisant deux statistiques différentes comme mesure du risque (variance et semi-variance).

La méthode d'optimisation de portefeuille qui est basée sur la méthode de Markowitz, permet aux décideurs de **voir la contribution marginale de chaque projet au portefeuille**, de **définir ainsi les portefeuilles de projets optimaux**, et le **meilleur taux de participation dans chaque projet**. Cette méthode, contrairement aux méthodes de sélection classiques, analyse les projets en prenant en considération les **différentes facettes du risque** et les **différentes corrélations qui existent entre les différents projets**, ce qui nous permet de cerner au mieux le risque encouru par les projets, de les quantifier, et de limiter les échecs d'investissement. Elle permet de déterminer :

- les allocations en capital, ainsi que la distribution de la production et des rendements pour chaque projet ;
- les stratégies d'investissement adéquates, qui répondent aux objectifs attendus, et respectent les contraintes budgétaires de la compagnie.

L'utilisation de la variance comme mesure du risque dans l'optimisation, pénalise à la fois les projets ayant un potentiel au-dessus et au-dessous de la moyenne. On peut **surpasser ce problème en utilisant d'autres statistiques comme la semi-variance** dans la définition de problème d'optimisation.

La semi-variance se concentre uniquement sur la réduction des pertes, sans tenir compte de *risques* des gains potentiels extrêmes, ce qui la rend particulièrement souhaitable pour les distributions de probabilité asymétriques comme celles de la rentabilité de l'industrie pétrolière et gazière. Cette approche permet aux gestionnaires de portefeuille de définir le risque d'une manière adéquate en fonction des ses objectifs et des contraintes qui lui sont imposées concernant le rendement de son portefeuille. Cette étude démontre qu'une analyse explicite des incertitudes et des corrélations dans l'évaluation individuelle du risque de projets d'exploration ou de production ou du portefeuille, renforce et améliore la qualité de la prise de décision d'investissement.

Références

1. Al-Harthy, M. H. (2007). Stochastic oil price models : Comparison and impact, Eng. Econ. 52(3) pp 269-284.
2. Babusiaux D. (1990), Décision d'investissement et calcul économique dans l'entreprise, Paris, Economica et Technip.
3. Babusiaux D. (2005), Pétrole : quelles productions et quels prix à l'avenir ?, Pétrole et Techniques, No. 456, pp 39-44.
4. Babusiaux D., Pierru A., (2002), Decision d'investissement et création de la valeur, exercices, problèmes et études de cas, Ed. Technip, Paris.
5. Babusiaux D., et al (2007), Oil and Gas Exploration and Production, IFP Publication, Edition TECHNIP, Paris.
6. Chow K., Denning K.C. (1994), On variance and lower partial moment betas : The equivalence of systematic risk measures, Journal of Business Finance and Accounting 21, pp 231-241.

7. Grootveld, H., W. Hallerbach (1999). Variance vs downside risk : Is there really that much difference ? Eur. J. Oper. Res. 114(2) 304-319.
8. Homaifar G., Graddy D.B. (1990), Variance and lower partial moment betas as alternative risk measures in cost of capital estimation : A defense of the CAPM beta, Journal of Business Finance and Accounting 17, pp 677-688.
9. Huang, X. (2008), Portfolio selection with new definition of risk. Eur. J. Oper. Res. 1(1) pp 351-357.
10. Markowitz, H. (1952), Portfolio selection. J. Financ. 7(1), pp 77-91.
11. Markowitz, H. (1959), Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investment. John Wiley & Sons, New York.
12. Markowitz, H., P. Todd, G. Xu, Y. Yamane (1993), Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm, Ann. Oper. Res. 45(1), pp 307-317.

A Résultats de la méthode de Markowitz avec la variance comme mesure du risque

A.1 Scénario 1 : prix du pétrole à 25 \$ le baril

Portefeuille	P 1	P 2	P 3	P 4	P5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10
Valeur de λ	(λ_1, λ_4)	(λ_5)	(λ_6)	(λ_7)	(λ_8)	(λ_9)	(λ_{10})	(λ_{11})	(λ_{12})	$(\lambda_{13}, \dots, \lambda_{20})$
EVAN	1 336,04	1 335,83	1 331,96	1 312,13	1 296,7	1 283,58	1 273,08	1 221,26	1 009,04	900
Variance	4 019,66	4 015,26	3 952,78	3 666,31	3 475,23	3 333,4	3 233,05	2 867,56	1 879,82	1 472,35
Investissement	5 000	5 000	4 995,44	5 000	5 000	5 000	4 997,56	4 991,39	3 881,92	3 462,56
EXP1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,93
EXP2	1	1	1	1	1	1	1	0,86	0,63	0,55
EXP3	0	0	0	0	0	0	0	0,16	0,13	0,11
EXP4	1	0,98	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	0,65	0,57
EXP5	0,59	0,63	0,68	0,7	0,92	0,73	0,73	0,75	0,55	0,48
EXP6	0	0	0	0	0	0	0	0,09	0,11	0,1
EXP7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
EXP10	0	0	0	0,11	0,2	0,26	0,31	0,44	0,33	0,29
EXP11	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9	0,79
EXP12	0	0	0	0	0	0,11	0,19	0,43	0,33	0,29
EXP13	1	1	1	1	1	1	1	0,97	0,7	0,61
EXP14	1	1	0,97	0,88	0,8	0,74	0,69	0,55	0,4	0,35

A.2 Scénario 2 : prix du pétrole à 100 \$ le baril

Portefeuille	P 1	P 2	P 3	P 4	P5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10
Valeur de λ	(λ_1)	(λ_2)	(λ_3)	(λ_4)	(λ_5)	(λ_6)	(λ_7)	(λ_8)	(λ_9)	(λ_{10})
<i>EVAN</i>	13 326,95	13 262,31	13 130,01	13 076,30	12 956,12	12 811,90	12 697,75	12 497,50	12 195,73	11 954,31
Variance	52 271,98	48 537,89	43 093,57	41 562,56	39 091,16	36 591,30	34 940,76	32 520,30	29 259,51	26 952,65
Investiss.	5 000,00	4 997,45	4 992,98	5 000,00	5 000,00	5 000,00	4 994,04	5 000,00	5 000,00	5 000,00
EXP1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
EXP2	0,48	0,49	0,6	0,72	0,72	0,68	0,65	0,64	0,63	0,62
EXP3	0	0	0	0	0,05	0,15	0,24	0,31	0,9	0,43
EXP4	1	0,83	0,95	1	1	1	0,96	0,93	0,9	0,89
EXP5	1	1	1	1	1	1	0,99	0,94	0,38	0,87
EXP6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP7	0	0,76	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP10	0	0	0	0	0,09	0,18	0,25	0,32	0,37	0,41
EXP11	1	1	1	1	1	1	1	0,95	0,84	0,75
EXP12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP13	1	1	0,99	0,96	0,89	0,8	0,74	0,7	0,68	0,65
EXP14	1	0,93	0,73	0,65	0,58	0,51	0,46	0,43	0,41	0,39
Portefeuille	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20
Valeur de λ	(λ_{11})	(λ_{12})	(λ_{13})	(λ_{14})	(λ_{15})	(λ_{16})	(λ_{17})	(λ_{18})	(λ_{19})	(λ_{20})
<i>EVAN</i>	11 199,96	10 781,01	7 022,16	4 718,48	4 230,82	4 124,93	4 049,30	3 948,46	3 916,38	3 913,17
Variance	21 457,16	19 433,57	7 817,18	3 442,91	2 771,45	2 683,22	2 641,80	2 614,59	2 612,65	2 612,63
Investissement	5 000,00	5 000,00	3 261,31	2 189,74	1 984,15	1 984,66	1 956,97	1 942,99	1 938,45	1 938,45
EXP1	0,93	0,80	0,48	0,30	0,25	0,22	0,20	0,17	0,16	0,16
EXP2	0,6	0,6	0,37	0,24	0,21	0,21	0,2	0,2	0,19	0,19
EXP3	0,58	0,67	0,42	0,27	0,25	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27
EXP4	0,84	0,82	0,49	0,32	0,32	0,34	0,35	0,38	0,38	0,38
EXP5	0,78	0,74	0,45	0,29	0,26	0,25	0,24	0,24	0,23	0,23
EXP6	0,98	0,94	0,58	0,37	0,31	0,28	0,26	0,24	0,23	0,23
EXP7	1	1	1	0,78	0,71	0,71	0,71	0,7	0,7	0,7
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP9	1	1	1	0,73	0,59	0,52	0,47	0,4	0,37	0,37
EXP10	0,53	0,6	0,37	0,24	0,22	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24
EXP11	0,48	0,35	0,21	0,13	0,09	0,06	0,05	0,02	0,01	0,01
EXP12	1	0,99	0,59	0,38	0,31	0,28	0,25	0,22	0,21	0,21
EXP13	0,59	0,56	0,34	0,22	0,19	0,19	0,19	0,18	0,18	0,18
EXP14	0,33	0,3	0,18	0,12	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11

A.3 Scénario 3 : prix du pétrole à 200 \$ le baril

Portefeuille	P 1	P 2	P 3	P 4	P5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10
Valeur de λ	(λ_1)	(λ_2)	(λ_3)	(λ_4)	(λ_5)	(λ_6)	(λ_7)	(λ_8)	(λ_9)	(λ_{10})
EVAN	29 464,91	29 024,44	28 623,73	28 162,15	27 254,45	26 401,29	25 791,89	25 334,84	24 949,62	24 619
Variance	193 029,29	160 842,24	145 948,43	133 047,73	11 4107,2	99 319,12	90 497,35	84 833,21	80 680,66	77 524
Investissement	4 995,594	5 000	5 000	4 997,547	5 000	5 000	5 000	49 90,885	5 000	5 000
EXP1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,97	0,92
EXP2	0,39	0,61	0,65	0,6	0,58	0,57	0,57	0,56	0,56	0,56
EXP3	0	0	0,13	0,28	0,39	0,46	0,52	0,56	0,59	0,62
EXP4	0,95	1	1	0,95	0,91	0,88	0,85	0,84	0,83	0,82
EXP5	1	1	1	0,94	0,86	0,81	0,77	0,74	0,72	0,71
EXP6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP7	0,34	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP10	0	0	0,09	0,25	0,35	0,42	0,47	0,5	0,54	0,56
EXP11	1	1	1	1	0,86	0,71	0,61	0,53	0,46	0,41
EXP12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP13	1	0,96	0,85	0,74	0,69	0,65	0,63	0,61	0,6	0,59
EXP14	1	0,71	0,59	0,49	0,44	0,41	0,38	0,36	0,35	0,34
Portefeuille	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20
Valeur de λ	(λ_{11})	(λ_{12})	(λ_{13})	(λ_{14})	(λ_{15})	(λ_{16})	(λ_{17})	(λ_{18})	(λ_{19})	(λ_{20})
EVAN	21 434,81	15 939,24	9 823,18	9 362,22	9 148,59	9 006,17	8 904,45	8 768,81	8 725,65	8 721,34
Variance	56 954,76	30 392,84	11 259,24	10 333,5	10 066,51	9 947,83	9 892,12	9 855,52	9 852,9	9 852,88
Investissement	4 482,98	33 21,59	2 029,58	1 978,08	1 970,38	1 956,381	1 959,21	1 948,78	1 934,93	1 947,04
EXP1	0,7	0,5	0,29	0,25	0,23	0,21	0,2	0,18	0,18	0,18
EXP2	0,49	0,34	0,2	0,19	0,18	0,18	0,18	0,18	0,17	0,17
EXP3	0,61	0,43	0,25	0,25	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
EXP4	0,71	0,5	0,29	0,32	0,34	0,35	0,36	0,38	0,38	0,38
EXP5	0,59	0,42	0,24	0,23	0,22	0,22	0,21	0,21	0,21	0,21
EXP6	0,98	0,7	0,41	0,36	0,33	0,31	0,3	0,28	0,27	0,27
EXP7	1	1	0,75	0,74	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP9	1	1	0,68	0,55	0,47	0,42	0,38	0,33	0,32	0,32
EXP10	0,54	0,38	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23	0,24
EXP11	0,26	0,19	0,11	0,07	0,05	0,03	0,02	0,01	0	0
EXP12	0,97	0,69	0,4	0,34	0,31	0,29	0,27	0,25	0,24	0,24
EXP13	0,5	0,35	0,21	0,2	0,2	0,2	0,2	0,19	0,19	0,19
EXP14	0,27	0,19	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12

A.4 Scénario 4 : prix moyen

Portefeuille	P 1	P 2	P 3	P 4	P5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10
Valeur de λ	(λ_1)	(λ_2)	(λ_3)	(λ_4)	(λ_5)	(λ_6)	(λ_7)	(λ_8)	(λ_9)	(λ_{10})
<i>EVAN</i>	17 355,14	17 113,72	17 008,06	16 741,05	16 522,13	15 972,15	15 533,75	15 204,96	14 949,23	14 730,72
Variance	98 334,55	82 459,21	78 140,29	70 885,84	66 178,96	56 737,72	50 391,44	46 316,73	43 553,42	41 469,82
Investissement	4 995,78	5 000,00	5 000,00	5 000,00	4 999,28	4 997,77	5 000,00	5 000,00	5 000,00	4 993,17
EXP1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,97
EXP2	0,51	0,67	0,83	0,8	0,77	0,75	0,74	0,73	0,72	0,72
EXP3	0	0	0	0,14	0,27	0,36	0,43	0,48	0,52	0,55
EXP4	0,89	0,91	1	0,97	0,92	0,88	0,86	0,84	0,82	0,81
EXP5	1	1	1	0,9	0,82	0,77	0,73	0,7	0,68	0,66
EXP6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP7	0,24	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP10	0	0	0	0,14	0,26	0,34	0,4	0,44	0,48	0,5
EXP11	1	1	1	1	1	0,85	0,72	0,62	0,55	0,49
EXP12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP13	1	0,95	0,89	0,79	0,72	0,68	0,65	0,62	0,61	0,59
EXP14	1	0,75	0,63	0,54	0,47	0,43	0,4	0,83	0,36	0,35
Portefeuille	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20
Valeur de λ	(λ_{11})	(λ_{12})	(λ_{13})	(λ_{14})	(λ_{15})	(λ_{16})	(λ_{17})	(λ_{18})	(λ_{19})	(λ_{20})
<i>EVAN</i>	14 020,69	10 616,19	6 630,19	5 547,11	5 404,05	5 308,68	5 240,56	5 149,73	5 120,83	5 117,94
Variance	36 263,00	20 063,64	7 567,59	5 286,99	5 108,17	5 028,69	4 991,39	4 966,88	4 965,12	4 965,11
Investissement	5 000,00	3 767,27	2 351,95	2 006,69	1 981,24	1 959,76	1 959,79	1 952,98	1 961,98	1 960,47
EXP1	0,8	0,57	0,34	0,26	0,23	0,21	0,2	0,18	0,17	0,17
EXP2	0,71	0,51	0,3	0,25	0,24	0,24	0,23	0,23	0,23	0,23
EXP3	0,66	0,48	0,28	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,26	0,26
EXP4	0,79	0,57	0,33	0,31	0,33	0,35	0,36	0,37	0,38	0,38
EXP5	0,62	0,44	0,26	0,21	0,21	0,2	0,2	0,19	0,19	0,19
EXP6	1	0,76	0,45	0,35	0,32	0,3	0,29	0,27	0,26	0,26
EXP7	1	1	0,86	0,73	0,73	0,72	0,72	0,72	0,72	0,72
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP9	1	1	0,75	0,56	0,48	0,43	0,39	0,34	0,33	0,32
EXP10	0,6	0,43	0,25	0,22	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,23
EXP11	0,31	0,22	0,13	0,08	0,06	0,04	0,03	0,01	0	0
EXP12	1	0,77	0,45	0,35	0,31	0,28	0,27	0,24	0,23	0,23
EXP13	0,56	0,4	0,24	0,2	0,2	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19
EXP14	0,31	0,22	0,13	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12

B Maximisation du rendement avec la semi-variance comme mesure du risque

B.1 Scénario 1 : prix du pétrole à 25 \$ le baril

Portefeuille	P 1	P 2	P 3	P 4	P5	P 6	P 7	P 8
Valeur de λ	$(\lambda_1, \dots, \lambda_7)$	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	$(\lambda_{14}, \dots, \lambda_{20})$
EVAN	1 336,04	1 335,99	1 335,86	1 335,76	1 301,04	1 268,61	1 144,69	1 000
Semi-variance	1 950,16	1 949,57	1 948,22	1 947,27	1 715,75	1 559,22	1 214,22	908,11
Investissement	5 000,00	5 000,00	4 997,18	4 997,53	4 991,64	5 000,00	4 534,89	3 874,90
EXP1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP2	1	1	1	1	1	1	0,76	0,64
EXP3	0	0	0	0	0	0	0,15	0,12
EXP4	1	1	0,98	0,97	0,97	0,94	0,79	0,65
EXP5	0,59	0,6	0,62	0,64	0,72	0,74	0,65	0,54
EXP6	0	0	0	0	0	0	0,19	0,16
EXP7	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP9	0	0	0	0	0	0	0	0
EXP10	0	0	0	0	0,17	0,32	0,38	0,31
EXP11	1	1	1	1	1	1	1	0,87
EXP12	0	0	0	0	0	0,26	0,41	0,34
EXP13	1	1	1	1	1	1	0,87	0,72
EXP14	1	1	1	1	0,82	0,68	0,49	0,4

B.2 Scénario 2 : prix du pétrole à 100 \$ le baril

Portefeuille	P 1	P 2	P 3	P 4	P5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10
Valeur de λ	(λ_1)	(λ_2)	(λ_3)	(λ_4)	(λ_5)	(λ_6)	(λ_7)	(λ_8)	(λ_9)	(λ_{10})
EVAN	13 326,95	13 313,88	13 253,26	13 170,47	13 122,43	13 090,42	13 070,80	13 009,01	12 912,86	12 461,29
Semi-variance	26 136,00	25 617,50	24 049,34	22 257,53	21 426,08	20 959,80	20 716,68	20 064,10	19 145,35	16 053,45
Investissement	5 000,00	5 000,00	5 000,00	4 996,55	5 000,00	4 997,72	4 994,84	4 994,47	5 000,00	5 000,00
EXP1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP2	0,48	0,47	0,49	0,55	0,61	0,67	0,73	0,74	0,71	0,64
EXP3	0	0	0	0	0	0	0	0,01	0,08	0,32
EXP4	1	0,86	0,84	0,9	0,97	1	1	1	1	0,92
EXP5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,94
EXP6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP7	0	0,43	0,79	1	1	1	1	1	1	1
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP10	0	0	0	0	0	0	0	0,05	0,11	0,32
EXP11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,93
EXP12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP13	1	1	1	1	0,99	0,97	0,96	0,93	0,87	0,7
EXP14	1	1	0,92	0,79	0,72	0,67	0,64	0,6	0,56	0,43
Portefeuille	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	
Valeur de λ	(λ_{11})	(λ_{12})	(λ_{13})	(λ_{14})	(λ_{15})	(λ_{16})	(λ_{17})	(λ_{18})	$(\lambda_{19}, \lambda_{20})$	
EVAN	11 737,05	10 949,63	8 679,18	6 186,37	4 336,70	4 185,44	3 983,76	3 919,59	3 913,17	
Semi-variance	12 552,92	10 081,89	6 117,94	3 003,68	1 447,50	1 364,66	1 310,24	1 306,35	1 306,32	
Investissement	4 998,20	4 983,25	4 049,31	2 886,11	2 009,60	1 975,00	1 954,80	1 939,97	1 938,45	
EXP1	1	0,85	0,61	0,41	0,28	0,23	0,18	0,16	0,16	
EXP2	0,61	0,6	0,47	0,32	0,22	0,21	0,2	0,19	0,19	
EXP3	0,47	0,63	0,53	0,36	0,25	0,25	0,26	0,27	0,27	
EXP4	0,87	0,82	0,64	0,42	0,29	0,32	0,37	0,38	0,38	
EXP5	0,84	0,75	0,58	0,39	0,26	0,25	0,24	0,23	0,23	
EXP6	1	0,96	0,74	0,5	0,34	0,3	0,25	0,23	0,23	
EXP7	1	1	1	1	0,72	0,71	0,71	0,7	0,7	
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
EXP9	1	1	1	0,98	0,66	0,56	0,42	0,38	0,37	
EXP10	0,44	0,57	0,48	0,32	0,22	0,23	0,23	0,24	0,24	
EXP11	0,67	0,4	0,26	0,18	0,12	0,08	0,03	0,01	0,01	
EXP12	1	1	0,76	0,51	0,35	0,3	0,23	0,21	0,21	
EXP13	0,63	0,57	0,44	0,29	0,2	0,19	0,19	0,18	0,18	
EXP14	0,37	0,31	0,24	0,16	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	

B.3 Scénario 3 : prix du pétrole à 200 \$ le baril

Portefeuille	P 1	P 2	P 3	P 4	P5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10
Valeur de λ	(λ_1)	(λ_2)	(λ_3)	(λ_4)	(λ_5)	(λ_6)	(λ_7)	(λ_8)	(λ_9)	(λ_{10})
EVAN	29 489,20	29 463,81	29 147,31	29 018,01	28 899,93	28 573,17	28 318,18	28 100,25	27 566,46	26 997,70
Semi-variance	97 956,37	96 481,49	83 960,11	80 288,38	77 850,30	72 189,37	68 513,04	65 812,16	60 127,08	54 692,29
Investissement	5 000,00	4 998,95	4 998,54	5 000,40	5 000,00	5 000,00	5 000,00	4 928,12	4 993,64	4 999,61
EXP1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP2	0,48	0,39	0,48	0,61	0,69	0,64	0,61	0,6	0,59	0,58
EXP3	0	0	0	0	0,05	0,14	0,23	0,3	0,36	0,41
EXP4	1	0,95	0,95	1	1	1	0,98	0,94	0,92	0,9
EXP5	1	1	1	1	1	1	0,98	0,92	0,88	0,84
EXP6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP7	0	0,35	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP10	0	0	0	0	0	0,11	0,19	0,27	0,32	0,37
EXP11	1	1	1	1	1	1	1	1	0,92	0,82
EXP12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP13	1	1	0,99	0,96	0,93	0,84	0,77	0,73	0,7	0,68
EXP14	1	1	0,8	0,71	0,65	0,58	0,52	0,43	0,45	0,43
Portefeuille	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	
Valeur de λ	(λ_{11})	(λ_{12})	(λ_{13})	(λ_{14})	(λ_{15})	(λ_{16})	(λ_{17})	(λ_{18})	$(\lambda_{19}, \lambda_{20})$	
EVAN	25 291,43	24 321,40	18 133,33	12 483,70	9 575,79	9 290,95	9 087,49	8 816,22	8 721,27	
Semi-variance	42 179,63	37 505,94	19 954,38	9 178,50	5 354,79	5 117,42	5 006,01	4 932,81	4 927,53	
Investissement	5 000,00	5 000,00	3 773,24	2 607,80	1 994,29	1 970,15	1 969,05	1 949,25	1 947,04	
EXP1	1	0,87	0,58	0,38	0,28	0,24	0,22	0,19	0,18	
EXP2	0,56	0,56	0,4	0,26	0,19	0,19	0,18	0,18	0,17	
EXP3	0,56	0,65	0,5	0,33	0,25	0,25	0,26	0,26	0,26	
EXP4	0,84	0,81	0,58	0,38	0,3	0,33	0,35	0,37	0,38	
EXP5	0,74	0,7	0,49	0,31	0,23	0,22	0,22	0,21	0,21	
EXP6	1	1	0,81	0,53	0,39	0,35	0,32	0,29	0,27	
EXP7	1	1	1	0,96	0,74	0,74	0,73	0,73	0,73	
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
EXP9	1	1	1	0,88	0,62	0,52	0,45	0,35	0,32	
EXP10	0,51	0,59	0,44	0,28	0,22	0,22	0,23	0,23	0,24	
EXP11	0,52	0,37	0,22	0,14	0,09	0,06	0,04	0,01	0	
EXP12	1	1	0,8	0,52	0,38	0,33	0,3	0,26	0,24	
EXP13	0,61	0,58	0,41	0,27	0,2	0,2	0,2	0,19	0,19	
EXP14	0,36	0,33	0,22	0,14	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	

B.4 Scénario 4 : prix moyen

Portefeuille	P 1	P 2	P 3	P 4	P5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10
Valeur de λ	(λ_1)	(λ_2)	(λ_3)	(λ_4)	(λ_5)	(λ_6)	(λ_7)	(λ_8)	(λ_9)	(λ_{10})
EVAN	17 367,52	17 354,58	17 227,81	17 107,88	17 042,59	17 003,71	16 852,48	16 696,74	16 575,12	16 401,37
Semi-variance	49 882,68	49 159,39	44 519,56	41 114,29	39 710,58	39 033,49	36 883,01	34 953,47	33 639,24	32 011,03
Investissement	5 000	5 000	5 000	5 000	4 997,72	5 000	5 000	5 000	4 998,775	5 000
EXP1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP2	0,48	0,51	0,56	0,67	0,76	0,84	0,82	0,79	0,77	0,76
EXP3	0	0	0	0	0	0	0,07	0,17	0,24	0,3
EXP4	1	0,89	0,84	0,92	0,98	1	1	0,96	0,93	0,91
EXP5	1	1	1	1	1	1	0,95	0,89	0,84	0,81
EXP6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP7	0	0,25	0,84	1	1	1	1	1	1	1
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP10	0	0	0	0	0	0	0,08	0,17	0,23	0,29
EXP11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,97
EXP12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EXP13	1	1	1	0,95	0,9	0,89	0,83	0,78	0,74	0,71
EXP14	1	1	0,87	0,74	0,67	0,62	0,57	0,52	0,49	0,46
portefeuille	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	
Valeur de λ	(λ_{11})	(λ_{12})	(λ_{13})	(λ_{14})	(λ_{15})	(λ_{16})	(λ_{17})	(λ_{18})	$(\lambda_{19}, \lambda_{20})$	
EVAN	15 173,86	14 514,57	12 105,1	8 340,04	5 721,47	5 498,01	5 361,83	5 180,26	5 116,71	
Semi-variance	23 009,34	19 842,74	13 271,2	6 060,44	2 802,75	2 611,17	2 536,6	2 487,6	2 484,07	
Investissement	5 000	5 000	4 329,14	2 963,77	2 020,513	1 986,934	1 967,705	1 963,717	1 952,749	
EXP1	1	0,92	0,66	0,43	0,29	0,25	0,22	0,18	0,17	
EXP2	0,72	0,71	0,6	0,38	0,26	0,24	0,24	0,23	0,22	
EXP3	0,48	0,58	0,56	0,36	0,24	0,25	0,25	0,25	0,26	
EXP4	0,84	0,81	0,67	0,43	0,29	0,31	0,34	0,37	0,38	
EXP5	0,7	0,65	0,52	0,33	0,22	0,21	0,2	0,2	0,19	
EXP6	1	1	0,88	0,57	0,38	0,34	0,31	0,27	0,26	
EXP7	1	1	1	1	0,74	0,73	0,73	0,72	0,72	
EXP8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
EXP9	1	1	1	0,97	0,64	0,54	0,46	0,36	0,32	
EXP10	0,45	0,53	0,51	0,32	0,21	0,22	0,22	0,23	0,23	
EXP11	0,62	0,44	0,26	0,17	0,11	0,08	0,05	0,02	0	
EXP12	1	1	0,89	0,58	0,39	0,33	0,3	0,25	0,23	
EXP13	0,62	0,58	0,47	0,3	0,2	0,2	0,19	0,19	0,19	
EXP14	0,38	0,34	0,26	0,17	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	