

## Chapitre 3

### TRAITEMENT NUMERIQUE

#### 3.1. SCHEMAS D'INTEGRATION TEMPORELLE - THEORIE

La forme discrète de l'équation des travaux virtuels conduit à un système d'équations différentielles non linéaires du second degré. Nous avons opté (chapitre 2, paragraphe 2.1) pour une intégration pas-à-pas suite, notamment, aux non-linéarités géométriques.

Il existe principalement deux catégories de telles méthodes : celles à "pas multiples" (interpolation sur plusieurs pas antérieurs) et celles à "un pas". Nous en avons testé quelques unes dans le cadre de notre étude.

##### 3.1.1. Méthodes à "pas multiples"

Ces méthodes établissent une relation linéaire entre déplacements et vitesses ou accélérations à des instants successifs. Ce sont les méthodes de "HOUBOLT", "PARK", "GEAR", etc..., du nom de leurs auteurs [109, 120, 106]. Le plus souvent, elles expriment d'une manière explicite la valeur de la vitesse ou de l'accélération en fonction des déplacements, plutôt qu'une combinaison linéaire des deux. Ces expressions peuvent se déduire des formules de différenciations à pas constants [97] :

$$\left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=x_j} = \frac{k!}{m!h^k} \sum_{j=0}^m A_j f(x_j) \quad (1)$$

m étant le nombre de pas de temps successifs de valeur h. Les coefficients  $A_j$  satisfont des conditions de cohérence [106,107]. De cette manière on peut établir en posant  $q_p = q(t_0 + ph)$  les relations (i) :

$$\begin{aligned} * \text{ 3 points (m=2)} \\ -1 \leq p \leq 1 \end{aligned} \quad \dot{q}_p = \frac{1}{h} \left[ \left(p - \frac{1}{2}\right) q_{-1} - 2p q_0 + \left(p + \frac{1}{2}\right) q_1 \right] + R_3 \quad (2)$$

$$\ddot{q}_p = \frac{1}{h^2} [q_{-1} - 2q_0 + q_1] + R_3' \quad (3)$$

$R_3$  et  $R_3'$  sont les erreurs locales de troncature, de l'ordre de  $h^3 \cdot q^{(3)}$  (sauf si  $p=0$ , auquel cas  $R_3'$  est de l'ordre de  $h^4 \cdot q^{(4)}$ )

$$\begin{aligned} * \text{ 4 points (m=3)} \\ -1 \leq p \leq 2 \end{aligned} \quad \dot{q}_p = \frac{1}{h} \left[ -\frac{3p^2 - 6p + 2}{6} q_{-1} + \frac{3p^2 - 4p - 1}{2} q_0 - \right.$$

$$\left. \frac{3p^2 - 2p - 2}{2} q_1 + \frac{3p^2 - 1}{6} q_2 \right] + R_4 \quad (4)$$

$$\text{et } \ddot{q}_p = \frac{3}{h^2} [(1-p)q_{-1} + (3p-2)q_0 - (3p-1)q_1 + pq_2] + R_4' \quad (5)$$

$R_4$  et  $R_4'$  sont les erreurs locales de troncature, de l'ordre de  $h^4 \cdot q^{(4)}$

Par exemple, si  $p=1$ , les formules sur 3 points (et donc sur 2 pas) donnent :

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2h} (q_{-1} - 4q_0 + 3q_1) + R \quad (6)$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{h^2} (q_{-1} - 2q_0 + q_1) + R \quad (7)$$

-----  
(i) référence [97], page 883

où R est de l'ordre de  $h^3 \cdot q^{(3)}$

et si  $p=2$ , les formules sur 4 points (et donc sur 3 pas) donnent :

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{6h} [-2q_{-1} + 9q_0 - 18q_1 + 11q_2] + R' \quad (8)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{h^2} [-q_{-1} + 4q_0 - 5q_1 + 2q_2] + R' \quad (9)$$

où R' est de l'ordre de  $h^4 \cdot q^{(4)}$

Les relations 6 à 9 peuvent aisément être généralisées à un pas de temps n en substituant l'indice "0" pour les formules sur 3 points et l'indice "1" pour les formules sur 4 points, par "n" et en ajustant les autres indices en conséquence.

La relation (6) est à la base du schéma "GEAR TWO-STEP"

La relation (8) est à la base du schéma "GEAR THREE-STEP"

La relation (9) est à la base du schéma "HOUBOLT"

La combinaison de (6) et (8) par addition, est à la base du schéma de "PARK"

Ces schémas font apparaître deux classes de méthode à pas multiples :

- 1.- celles reliant vitesses et déplacements
- 2.- celles reliant accélérations et déplacements

En l'absence d'amortissement dans la modélisation du phénomène, ce qui est notre cas, la classe 2 suffit à résoudre directement l'équation d'équilibre. On peut également utiliser une combinaison de ces deux classes [122], solution pour laquelle nous optons. On notera que l'utilisation de la classe 1, seule, nécessite l'introduction de "moments généralisés", du type  $M\dot{q}$ , de manière à décomposer l'équation de second ordre en deux équations du premier ordre.

Comme nous nous limitons à la combinaison des deux classes il n'apparaît plus de distinction entre "HOUBOLT" et "GEAR THREE STEP", et "GEAR TWO STEP" est identique au schéma sur deux pas, étudié par GERADIN [107]. Il existe bien d'autres méthodes reprises notamment dans les références [100, 105, 106, 107, 115, 120, 121, 122, 125], à chacune correspond des caractéristiques précises quant à la distorsion en fréquence, l'amortissement numérique et la stabilité. Nous en discuterons au paragraphe 3.1.3. Nous nous sommes limités, dans le cadre de notre analyse, à tester le schéma sur 3 points (formules (6) et (7)), le schéma sur 4 points ou "HOUBOLT" (formules (8) et (9)) et le schéma sur 6 points caractérisé par les formules (i)

$$\dot{q}_{n+1} = \frac{1}{120h} [-24q_{n-4} + 150q_{n-3} - 400q_{n-2} + 600q_{n-1} - 600q_n + 274q_{n+1}] \quad (10)$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \frac{1}{60h^2} [-50q_{n-4} + 305q_{n-3} - 780q_{n-2} + 1070q_{n-1} - 770q_n + 225q_{n+1}] \quad (11)$$

En effectuant cette opération sur 6 points, on pourrait espérer améliorer la précision et ainsi pouvoir augmenter le pas de temps. Ce raisonnement simpliste sera amendé plus avant compte-tenu de l'apparition de phénomènes secondaires. Nous reportons au paragraphe 3.2.3. pour les tests numériques.

### 3.1.2. Méthodes à "un pas"

L'avantage de la formulation à un pas réside essentiellement dans sa facilité de mise en oeuvre. Plus facile à initialiser, elle ne requiert que la mémorisation des résultats du pas précédent, et elle s'adapte mieux à une modification du pas en cours de progression.

(i) référence [97], page 914



On approche les valeurs des déplacements, vitesses et accélérations à l'instant  $t_{n+1}$  en fonction de ces mêmes variables en  $t_n$  par un développement en série de TAYLOR, limitée :

$$f(t_n+h) = f(t_n) + hf'(t_n) + \dots + \frac{h^s}{s!} f^{(s)}(t_n) + R \quad (12)$$

où R désigne le reste entre la valeur exacte et la valeur approchée :

$$(t_n+h = t_{n+1}) \quad R = \frac{1}{s!} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f^{(s+1)}(\tau) \cdot (t_{n+1} - \tau)^s d\tau \quad (13)$$

Si on suppose connue l'accélération sur l'intervalle, on peut déterminer :

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(t) dt \quad (14)$$

$$\text{et} \quad q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t) \cdot \ddot{q}(t) dt \quad (15)$$

Les intégrales des expressions (14) et (15) sont évaluées par quadrature numérique selon le schéma de NEWMARK [118]; il vient : ( $\beta$  et  $\gamma$  sont les paramètres de NEWMARK, discutés ci-après)

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + (1-\gamma)h \ddot{q}_n + \gamma h \ddot{q}_{n+1} + R_n \quad (16)$$

$$\text{et} \quad q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + \frac{1}{2} h^2 \ddot{q}_n + \beta h^2 (\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n) + R'_n \quad (17)$$

avec pour erreurs dues à la quadrature :

$$R_n = (\gamma - \frac{1}{2}) h^2 q^{(3)} + O\{h^3 q^{(4)}\} \quad (18)$$

$$R'_n = (\beta - \frac{1}{6}) h^3 q^{(3)} + O\{h^3 q^{(4)}\} \quad (19)$$

Nous étudierons le comportement de ce schéma pour différentes valeurs de  $\beta$  et  $\gamma$ .

Remarques : - On obtient l'erreur minimale de troncature sur les vitesses en utilisant la règle du trapèze (correspondant au choix  $\gamma = \frac{1}{2}$ ) ce qui revient à considérer une valeur moyenne de l'accélération sur l'intervalle envisagé :

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h \frac{\dot{q}_{n+1} + \dot{q}_n}{2} \quad (20)$$

- le paramètre  $\beta$  conditionne le mode de résolution :

\*  $\beta=0$  fournit une évaluation explicite du déplacement :

$$q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + \frac{1}{2} h^2 \ddot{q}_n \quad (21)$$

$q_{n+1}$  ne dépend que des valeurs à l'instant n. Ce schéma sera conditionnellement stable (paragraphe 3.1.3).

\*  $\beta \neq 0$  réalise une prédiction implicite du déplacement dans la mesure où la valeur de celui-ci, à l'instant  $t_{n+1}$  dépend de l'accélération en  $t_n$  et en  $t_{n+1}$

Le choix particulier  $\beta = \frac{1}{4}$  donne lieu à une réponse inconditionnellement stable (voir paragraphe 3.1.3) dans les problèmes linéaires. Il correspond à l'hypothèse d'accélération constante et égale à la valeur moyenne sur l'intervalle de temps :

$$q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + \frac{1}{2} h^2 \cdot \frac{\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1}}{2} \quad (22)$$

Le choix particulier  $\beta = \frac{1}{6}$  minimise l'erreur de troncature (18) sur les déplacements. Il correspond à l'hypothèse d'accélération linéaire sur l'intervalle de temps :

$$q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + \frac{1}{2} h^2 \left( \ddot{q}_n + \frac{\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n}{3} \right) \quad (23)$$

### 3.1.2.1. Deux variantes aux schémas implicites ( $\beta \neq 0$ ) : WILSON et H.H.T.-

Nous verrons au paragraphe 3.1.3. que l'on choisit souvent  $\gamma = \frac{1}{2}$  dans les formules (16) et (17). Le choix ( $\beta = 0,25; \gamma = 0,5$ ) conduit à un schéma inconditionnellement stable mais ne minimise pas l'erreur de troncature. Le choix ( $\beta = \frac{1}{6}; \gamma = \frac{1}{2}$ ) conduit à minimiser l'erreur de troncature mais il conduit à un schéma conditionnellement stable.

WILSON [125] a groupé les avantages des deux propositions ci-dessus en choisissant d'une part ( $\beta = \frac{1}{6}; \gamma = \frac{1}{2}$ ) et d'autre part en exprimant l'équilibre non plus à l'instant  $t_{n+1}$  mais à l'instant  $t_{n+\theta}$  où  $\theta$  est supérieur à l'unité. Il a été démontré [99, 122] qu'un tel schéma était inconditionnellement stable si  $\theta \geq 1,373$ .

Dans ce schéma, l'accélération à un instant  $\tau$  dans l'intervalle  $[t_n, t_{n+\theta}]$  s'écrit :

$$\ddot{q}(\tau) = \ddot{q}_n + \theta \cdot (\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n) \quad (24)$$

où

$$\theta = \frac{\tau - t_n}{h} > 0 \quad (25)$$

en effet,  $\beta = \frac{1}{6}$  correspond à une variation linéaire de l'accélération.

La quadrature numérique des intégrales des expressions (14) et (15) prises en remplaçant  $n+1$  par  $n+\theta$ , donne d'une part :

$$\dot{q}_{n+\theta} = \dot{q}_n + \theta h \ddot{q}_n + \frac{\theta h}{2} (\ddot{q}_{n+\theta} - \ddot{q}_n) \quad (26)$$

ou, vu la relation (24) :

$$\dot{q}_{n+\theta} = \dot{q}_n + \theta h \ddot{q}_n + \frac{\theta^2 h}{2} (\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n) \quad (26')$$

et d'autre part,

$$q_{n+\theta} = q_n + \theta h \dot{q}_n + \frac{\theta^2 h^2}{2} \ddot{q}_n + \frac{\theta^2 h^2}{6} (\ddot{q}_{n+\theta} - \ddot{q}_n) \quad (27)$$

ou, vu la relation (24)

$$q_{n+\theta} = q_n + \theta h \dot{q}_n + \frac{\theta^2 h^2}{2} \ddot{q}_n + \frac{\theta^3 h^2}{6} (\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n) \quad (27')$$

On notera que cette méthode peut être considérée comme une méthode à pas multiples ( $n, n+1, n+\theta$ ).

Une autre variante a été proposée par HILBER, HUGHES et TAYLOR (en abrégé H.H.T). Ils proposent le choix particulier [110, 116]

$$\beta = (1-\alpha)^2/4 \quad (28)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha \quad (29)$$



où  $\alpha$  est un paramètre compris entre  $-\frac{1}{3}$  et 0, auquel cas le schéma proposé est inconditionnellement stable [115]. Nous comprendrons aisément le choix apparemment insolite de  $\beta, \gamma$  au paragraphe 3.1.3. Ce schéma ne minimise pas l'erreur de troncature mais il possède des propriétés remarquables que nous aborderons plus avant. Les deux variantes seront étudiées dans le cadre de notre étude.

### 3.1.3. Comportement numérique des différents schémas d'intégration

Les différents schémas d'intégration que nous venons de décrire introduisent d'une part des approximations : distorsion en fréquence et amortissement artificiel et d'autre part les problèmes de stabilité de la réponse numérique.

Nous allons décrire sommairement comment on peut évaluer ces approximations dans les schémas que nous avons introduits dans le logiciel. Néanmoins, nous nous limiterons le plus souvent à l'approche linéaire comme notamment aux références [98, 100, 101, 103, 106, 107, 108, 110, 115, 121], l'extension aux problèmes non-linéaires ne peut être systématique car elle dépend du problème étudié (modification des fréquences dans le temps, dépendance vis-à-vis du type d'excitation, etc...). Quelques auteurs ont proposé différentes approches [102, 105, 111, 113, 117, 119, 120, 122-125], nous en reprendrons les conclusions dans le cadre de notre étude.

L'approche linéaire présente l'avantage de la simplicité de mise en oeuvre et certaines conclusions peuvent être extrapolées, moyennant quelques restrictions, dans les cas non-linéaires. C'est la raison pour laquelle nous en ferons une analyse sommaire.

3.1.3.1. Equation de récurrence, équation caractéristique et facteur de distorsion.- Le comportement des différents schémas peut s'étudier [122, 123] sur la réponse de l'équation d'équilibre dynamique d'un système linéaire du second ordre non amorti, en oscillation libre :

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (30)$$

Pour un système à  $n$  degrés de liberté, l'équation (30) représente l'équation "normale" d'un mode. Il est clair qu'un schéma d'intégration stable doit l'être vis-à-vis des  $n$  équations normales prises individuellement [110].

La discussion de la résolution du système d'équations (30) par les divers schémas d'intégration nécessite l'établissement de l'équation aux "différences finies" ou "équation de récurrence" qui ne relie plus que les déplacements à des instants successifs. Il suffit, pour ce faire, d'éliminer les accélérations et les vitesses grâce aux équations de liaison que nous donnent les différents schémas.

On sait par ailleurs que la solution exacte du système (30) est du type :

$$q_n = c e^{j\omega t} = c e^{j\omega n h} \quad (31)$$

la solution numérique de la même équation introduit une éventuelle distorsion en fréquence et en amortissement, auquel cas la solution devient :

$$q_n = c e^{(\alpha + j\Omega)nh} = c z^n \quad (32)$$

En remplaçant, dans "l'équation de récurrence", les valeurs de  $q$  en fonction de (32) on obtient une équation en  $z$  qui sera caractéristique du schéma d'intégration. Cette équation permet d'étudier les distorsions et la stabilité du schéma par les théories classiques des systèmes discrets [116], auquel cas cette étude se fait dans le plan complexe  $z$  (partie réelle et imaginaire) et la zone de stabilité est l'intérieur d'un cercle de rayon unitaire centré à l'origine des axes. Souvent, on préfère se ramener, par un artifice, au plan de Laplace (système

continu) par la transformation conforme, dite bilinéaire

$$z = \frac{1+s}{1-s} \quad (33)$$

Cette transformation transpose l'intérieur du cercle unitaire dans le plan  $z$  en un demi plan (partiellement négative) du plan complexe  $s$ . L'axe imaginaire du plan " $s$ " étant l'image de la circonférence du cercle dans le plan  $z$ .

Après cette opération, on peut appliquer le critère de stabilité de ROUTH-HURWITZ, détaillé à la référence [104] par exemple.

L'équation en  $s$  est appelée "équation caractéristique". On en déduit aisément la distorsion en fréquence et l'amortissement artificiel introduits par le schéma d'intégration qui a conduit à l'équation :

1.- amortissement numérique

soit  $s = p + jq$  les racines de l'équation caractéristique, avec  $p \leq 0$  combinant (32) et (33), on a l'égalité

$$\frac{1+s}{1-s} = e^{(\alpha + j\Omega)h} \quad (34)$$

ce qui permet de déterminer la relation :

$$\alpha h = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+p)^2 + q^2}{(1-p)^2 + q^2} \quad (35)$$

on peut en déduire l'amortissement en pour cent d'amortissement critique (pour rappel le mouvement devient apériodique si  $\xi = 1$ ). Cette grandeur se déduit de la connaissance du décrément logarithmique :

$$\partial = \ln \frac{e^{(\alpha + j\Omega)nh}}{e^{(\alpha + j\Omega)(nh+T)}} = \ln \left( e^{-(\alpha + j\Omega)\frac{2\pi}{\omega}} \right) = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$$

d'où  $\xi = \frac{\partial}{2\pi} = \frac{\alpha}{\omega} \quad (36)$

c'est-à-dire  $\xi = \frac{1}{2\omega h} \ln \frac{(1+p)^2 + q^2}{(1-p)^2 + q^2} \quad (37)$

la grandeur  $1 - e^{-2\pi\xi}$  donne l'atténuation relative de la réponse sur une période.

2.- distorsion en fréquence

de la relation (34) on déduit également

$$\Omega h = \text{artg} \frac{2q}{1 - (p^2 + q^2)} \quad (38)$$

d'où le facteur de distorsion :

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{1}{\omega h} \text{artg} \frac{2q}{1 - (p^2 + q^2)} \quad (39)$$

Signalons également que DAHLQUIST (i) a introduit la notion de méthode "A-stable" (implicite et d'ordre inférieur à 2) et GEAR (ii) la notion de méthode "Stiffly-stable" (l'ordre peut atteindre 6, mais il y a des conditions sur la précision du schéma). Nous référerons le lecteur à [106, 107, 110, 122] pour plus d'informations à ce propos. Nous indiquerons dans le texte quand la méthode sera soit "A-stable" soit "stiffly-stable". Cette conclusion n'est cependant valable que pour un système linéaire.

(i) DAHLQUIST, G.G. "A special stability problem for linear multistep methods". BIT, 3, pp. 27-43. 1963.

(ii) GEAR, C.W. "The automatic integration of stiff ordinary differential equations", Information Proceeding 68, North-Holland Publ. Co, 1969



Enfin, la stabilité des schémas n'est pas seulement liée au comportement de l'erreur introduite par accumulation des erreurs locales de troncature; elle est également liée aux erreurs numériques d'arrondis, nous en reparlerons.

Dans les paragraphes qui vont suivre, nous allons étudier sommairement le comportement numérique des quelques schémas qui ont été introduits dans le logiciel.

3.1.3.2. Schémas de NEWMARK et variantes.- Les relations (16) et (17) écrites à l'instant  $n+1$  et à l'instant  $n$ , permettent, en tenant compte de l'équilibre dynamique instantané (relation (30) à chaque instant), d'établir l'équation de récurrence des schémas de NEWMARK ( $\beta$  et  $\gamma$  quelconques) :

$$Dq_n + \omega^2 h^2 \left[ \frac{1}{2}(q_n + q_{n-1}) + \gamma(q_n - q_{n-1}) + \beta Dq_n \right] = 0 \quad (40)$$

$$\text{où} \quad Dq_n = q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} \quad (41)$$

Posant  $q_n = C \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^n$  (relations (32) et (33)), il vient :

$$s^2 [4 + \omega^2 h^2 (4\beta - 2\gamma)] + \omega^2 h^2 s (2\gamma - 1) + \omega^2 h^2 = 0 \quad (42)$$

(42) est l'équation caractéristique des schémas de Newmark. Appliquant le critère de ROUTH-HURWITZ, on établit le tableau 1 des coefficients :

$$\begin{vmatrix} 4 + \omega^2 h^2 (4\beta - 2\gamma) & \omega^2 h^2 \\ \omega^2 h^2 (2\gamma - 1) & 0 \\ \omega^2 h^2 & 0 \end{vmatrix}$$

TABLEAU 1. Tableau des coefficients selon le critère de ROUTH.  
Pour le second degré, la première colonne est identique aux coefficients de l'équation caractéristique.

Le nombre des racines ayant une partie réelle positive est donné par le nombre de changement de signe des coefficients de la première colonne. Ce qui donne les conditions de stabilité :

$$\begin{cases} 4 + \omega^2 h^2 (4\beta - 2\gamma) \geq 0 & (43) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\gamma - 1 \geq 0 & (44) \end{cases}$$

ces deux conditions seront toujours vérifiées si

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta \geq \frac{\gamma}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \beta \geq \frac{1}{4} \quad (45)$$

auquel cas, la stabilité est inconditionnelle, c'est-à-dire indépendante du pas de temps.

Rappelons rapidement les quelques cas introduits au paragraphe 3.1.2.

1.- méthode explicite :  $\beta=0$ ,  $\gamma=\frac{1}{2}$

le respect de la condition (43) implique :  $4 - \omega^2 h^2 \geq 0$

ou encore :  $h \leq \frac{2}{\omega}$

dans ce cas  $\omega$  est évidemment la plus haute pulsation du système. Cette condition implique souvent le choix d'un pas de temps très faible et lié à la discrétisation.

L'équation (42) se réduit à l'expression :

$$s^2(4-\omega^2h^2) + \omega^2h^2 = 0 \quad (47)$$

de laquelle on déduit aisément la distorsion en fréquence (fig.1) il n'y a pas d'amortissement artificiel.

- 2.- méthode implicite - accélération constante :  $\beta=\frac{1}{4}$ ,  $\gamma=\frac{1}{2}$  (dénommé encore schéma du trapèze). Cette méthode est inconditionnellement stable car elle répond aux conditions (45).

L'équation (42) se réduit à l'expression :

$$4s^2 + \omega^2h^2 = 0 \quad (48)$$

de laquelle on déduit aisément la distorsion en fréquence (fig.1), il n'y a pas d'amortissement artificiel.

Cette méthode est "A-stable"

- 3.- méthode implicite - accélération linéaire :  $\beta=\frac{1}{6}$ ,  $\gamma=\frac{1}{2}$   
Le respect de la condition (43) implique :

$$h \leq \sqrt{\frac{12}{\omega}} \quad (49)$$

Cette limitation fait perdre l'intérêt du choix de la méthode implicite, nous ne l'utiliserons donc plus.

- 4.- Méthode implicite - H.H.T. :  $\beta=(1-\alpha)^2/4$ ,  $\gamma=\frac{1}{2}-\alpha$   
La condition (44) implique  $\alpha \leq 0$  (50)

et la condition (43) est toujours vérifiée ( $4+\omega^2h^2 \geq 0$ )  
Ce schéma, si  $\alpha \leq 0$  est inconditionnellement stable. Le cas particulier  $\alpha=0$  correspond au schéma implicite à accélération constante. Le respect simultané des conditions (43) et (44) fait apparaître clairement le choix particulier de  $\beta$  et  $\gamma$ .

L'équation (42) se réduit à l'expression :

$$s^2(4+\omega^2h^2\alpha^2) - 2\omega^2h^2\alpha s + \omega^2h^2 = 0 \quad (51)$$

qui permet d'en déduire la distorsion en fréquence et l'amortissement artificiel en fonction de  $\alpha$  :

$$\xi = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{1}{2\omega h} \ln \left[ \frac{[4+\omega^2h^2\alpha(1+\alpha)]^2 + 4\omega^2h^2}{[4+\omega^2h^2\alpha(\alpha-1)]^2 + 4\omega^2h^2} \right] \quad (52)$$

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{1}{\omega h} \operatorname{artg} \left| \frac{4\omega h}{4+\omega^2h^2\alpha^2 - \omega^2h^2} \right| \quad (53)$$

Ces courbes sont reprises aux figures 1 et 2. L'amortissement artificiel augmente très rapidement avec  $\alpha$  alors que la distorsion en fréquence reste limitée pour un pas donné. Les deux effets croissent rapidement avec la fréquence, ce qui est très intéressant dans le cadre de notre étude (phénomène basse fréquence). Cette méthode est "A-stable" si  $\alpha \leq 0$ .

- 5.- Méthode implicite - WILSON, ce cas sera étudié plus avant car il faut modifier l'équation de récurrence puisqu'un nouveau point intervient : l'instant  $n+\theta$ .

3.1.3.3. Schémas à pas multiples.- Les équations de récurrence se déduisent aisément des relations (généralisées à l'instant  $n+1$ ) (7) (schéma sur 3 points); (9) (schéma sur 4 points de HOU Bolt) et (11) (schéma sur 6 points) en tenant compte de l'équilibre dynamique instantané (30) à l'instant  $n+1$ .



On en déduit les équations caractéristiques en posant, comme précédemment :

$$q_n = C \cdot \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^n$$

on obtient finalement :

1.- Schéma sur 3 points ou 2 pas (ordre 2)

$$s^2(4+\omega^2h^2) + 2s\omega^2h^2 + \omega^2h^2 = 0 \quad (54)$$

cette équation est identique à (51) où l'on aurait posé  $\alpha = -1$ . Il est inconditionnellement stable. Les figures 1 et 2 donnent la distorsion en fréquence et l'amortissement, qui est considérable. Nous nous servirons de cette propriété dans un paragraphe ultérieur. Cette méthode est "A-stable".

2.- Schéma de HOUBOLT (4 points, 3 pas, ordre 3) :

$$12s^3 + 4s^2 + \omega^2h^2(1+s)^3 = 0 \quad (55)$$

Ce schéma est inconditionnellement stable (tous les coefficients sont positifs, il n'y a pas de racine à partie réelle positive, selon le critère de ROUTH). Les deux racines complexes de l'équation (55) permettent de tracer les courbes de distorsion en fréquence et l'amortissement numérique introduit par ce schéma (figures 1 et 2). La comparaison avec les mêmes courbes établies pour le schéma H.H.T. ( $\alpha = -0.1$  et  $\alpha = -0.3$ ) est digne d'intérêt. Cette méthode est "stiffly stable".

3.- Schéma de WILSON (ordre 3). Nous avons tiré la relation suivante de la référence [122], pour  $\theta = 1.4$  :

$$s^3(7,2+0,072\omega^2h^2) + s^2(4+0,7867\omega^2h^2) + 1,8\omega^2h^2s + \omega^2h^2 = 0 \quad (56)$$

Comme  $\theta > 1,373$  le schéma est inconditionnellement stable. Les figures 1 et 2 reprennent la distorsion en fréquence et l'amortissement de ce schéma. On notera que si  $\theta = 2$  on retombe évidemment sur le schéma de HOUBOLT. Cette méthode est "stiffly-stable" si  $\theta \geq 1,373$ .

4.- Schéma à 6 points (ordre 5) conduit à une équation caractéristique du cinquième degré que nous ne reprendrons pas ici. Le schéma devient conditionnellement stable et de plus il est possible de rencontrer des racines "indésirables" qui vont introduire numériquement des fréquences insolites comme on le verra lors des tests numériques. Ce phénomène est connu en anglais sous le nom de "spurious" ou "extraneous root" [107, 122].

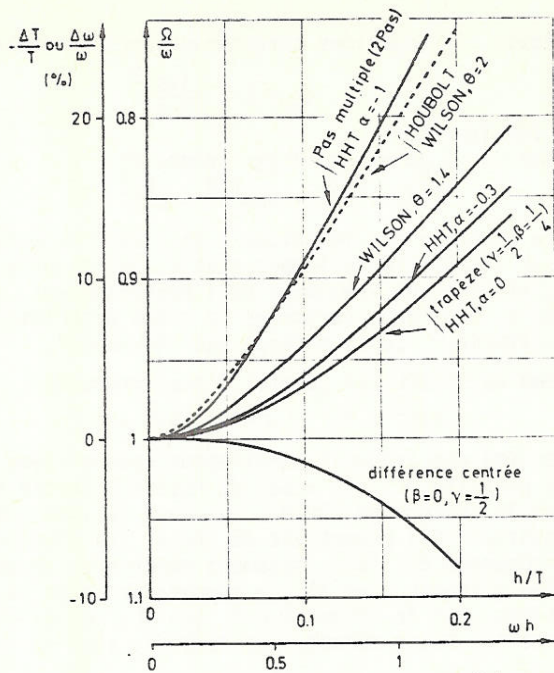


Figure 1

Distorsion en fréquence introduite par quelques schémas d'intégration temporelle.  $\omega$  = pulsation exacte.  $\Omega$  = pulsation déformée du mode considéré ( $\omega = \frac{2\pi}{T}$ );  $h$  est le pas de temps.

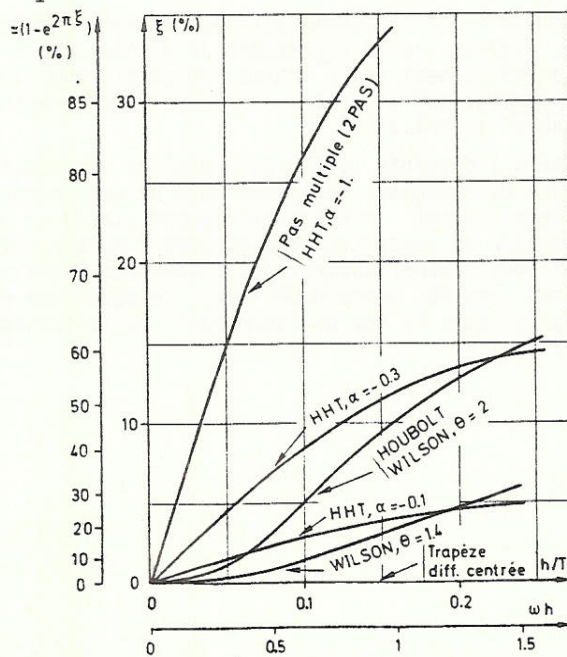


Figure 2

Amortissement artificiel introduit par quelques schémas d'intégration temporelle.  $\xi$  en pourcentage d'amortissement critique.



3.1.3.4. Les problèmes non-linéaires , position du problème.- Dans les problèmes de ce type, la stabilité est liée à l'excitation et les fréquences sont dépendantes des déplacements, par l'intermédiaire de la matrice de raideur qui n'est plus une constante. Cette dernière remarque conduirait à considérer l'équation d'équilibre dynamique instantanée (3U) en tenant compte de la modification de la pulsation  $\omega$  d'un pas à l'autre :

$$\ddot{q}_{n-1} + \omega_{n-1}^2 q_{n-1} = 0; \quad \ddot{q}_n + \omega_{n,n}^2 q_n = 0; \quad \ddot{q}_{n+1} + \omega_{n+1}^2 q_{n+1} = 0 \quad (57)$$

La recherche de l'équation caractéristique donnerait, dans le cas des schémas de NEWMARK :

$$\begin{aligned} & s^2 [4 - \omega_n^2 h^2 (\gamma - 2\beta + \frac{1}{2}) + \omega_{n+1}^2 h^2 \beta - \omega_{n-1}^2 h^2 (\gamma - \beta - \frac{1}{2})] \\ & + s [\omega_{n+1}^2 \beta + \omega_{n-1}^2 (\gamma - \beta - \frac{1}{2})] 2h^2 \\ & + \omega_n^2 h^2 [\gamma - 2\beta + \frac{1}{2}] + \omega_{n+1}^2 h^2 \beta - \omega_{n-1}^2 h^2 (\gamma - \beta - \frac{1}{2}) = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

Les conditions de stabilité, stricto sensu, sont complètement modifiées et deviennent dépendantes de l'évolution des fréquences.

Notamment le choix  $\gamma = \frac{1}{2}$  ne fait plus disparaître le terme en  $s$  qui se réduit maintenant à :

$$2\beta h^2 (\omega_{n+1}^2 - \omega_{n-1}^2) \quad (59)$$

il existera toujours un amortissement artificiel sauf pour un schéma explicite.

Dans un choix explicite ( $\beta=0, \gamma=\frac{1}{2}$ ) la condition (46) reste de

rigueur à condition de considérer la pulsation à l'instant  $n$ .

Dans un choix implicite ( $\beta \neq 0$ ) on ne peut plus trouver des conditions de stabilité seulement limitées aux paramètres  $\beta$  et  $\gamma$ . Par exemple, dans

le cas particulier  $\gamma = \frac{1}{2}$ , l'équation (59) impose la condition

$$\omega_{n+1} \geq \omega_{n-1} \quad (60)$$

Sur base des considérations établies plus haut, on classera comme [115, 122] les phénomènes non-linéaires d'une part, entre ceux pour lesquels les basses fréquences mécaniques sont dominantes (séisme, comportement au court-circuit des structures en câbles, etc...) et les autres (chocs, etc...). En nous limitant à la première classe, qui constitue le fondement de notre étude, on peut en première approximation considérer la pulsation  $\omega$  constante bien que totalement différente de la valeur en régime linéaire ( $\omega$  non linéaire peut être plusieurs dizaines de fois plus élevée, comme nous le verrons lors des tests).

Cette simplification permet certaines extrapolations à partir de l'étude linéaire.

3.1.3.5. Problèmes non-linéaires. Distorsion en fréquence et amortissement artificiel.- Sur base de l'approximation citée plus haut, et dans le cadre des problèmes basses fréquences, on peut admettre avec PARK [122], et l'expérience le confirme, que : "l'erreur due à l'amortissement et à la distorsion en fréquence peut être extrapolée des caractéristiques linéaires" (figures 1 et 2).

3.1.3.6. Problèmes non linéaires. Stabilité des schémas d'intégration.- La stabilité des schémas devient, en général, conditionnelle, comme on l'a montré plus haut. Ce fait est notamment lié à l'ordre de l'équation caractéristique qui, compte-tenu de la dépendance de  $\omega$  vis-à-vis des

déplacements, est d'une valeur effective bien supérieure à celle en régime linéaire.

Néanmoins, dans la classe des problèmes basses fréquences on peut supposer avec PARK [122] que l'évolution des fréquences est suffisamment lente pour ne pas trop perturber les conclusions en régime linéaire. PARK [122] ajoute les remarques suivantes :

- 1.- Le choix du pas de temps sera limité, plus pour une raison de précision que pour une question de stabilité.
- 2.- Les méthodes "A-stables" qui utilisent les dérivées des pas antérieurs (trapèze, H.H.T...) peuvent devenir instables.
- 3.- Les méthodes utilisant un important amortissement numérique (HOUBOLT, H.H.T. avec  $\alpha = -0.3, \dots$ ) ne sont pas nécessairement plus stables que celles comportant un amortissement plus faible (H.H.T. avec  $\alpha = -0,1, \dots$ ).
- 4.- Sur base du pas de temps maximal possible, Park a classé dans l'ordre décroissant d'intérêt :

"HOUBOLT" puis "WILSON" puis "trapèze" ( $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$ )

(H.H.T. n'était pas envisagé dans la publication [122]).

Signalons enfin qu'il existe une technique d'ajustement de pas liée à l'évolution de la stabilité en régime implicite. Cette technique est basée sur une méthode énergétique (i).

### 3.2. EXPRESSION DISCRETE DES EQUATIONS D'EQUILIBRE DYNAMIQUE.

Les notations utilisées, sauf indications contraires, sont détaillées à l'annexe 6.

Soit  $n$  l'instant où sont connus  $q_n, \dot{q}_n$  et  $\ddot{q}_n$

.. Nous recherchons les mêmes quantités à l'instant  $n+1$  :  $q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}$  et  $\ddot{q}_{n+1}$ .

Déplacement vitesse et accélération à un même instant, sont dépendants dans un schéma d'intégration implicite alors qu'ils ne sont fonction que des valeurs du pas précédent dans un schéma explicite. Il convient donc d'approcher séparément les deux cas.

#### 3.2.1. Schémas d'intégration implicites. Matrice d'itération.

Compte tenu de la dépendance du déplacement vis-à-vis de l'accélération, au même instant, la solution en fin d'intervalle ne peut être obtenue que de façon itérative.

Soit  $q_{n+1}^k, \dot{q}_{n+1}^k, \ddot{q}_{n+1}^k$  les valeurs à l'itération  $k$ , on aura :

$$q_{n+1}^{k+1} = q_{n+1}^k + \Delta q \quad (62)$$

$$\dot{q}_{n+1}^{k+1} = \dot{q}_{n+1}^k + \Delta \dot{q} \quad (63)$$

$$\ddot{q}_{n+1}^{k+1} = \ddot{q}_{n+1}^k + \Delta \ddot{q} \quad (64)$$

Par ailleurs, les expressions des schémas d'intégration peuvent toutes se mettre sous la forme :

$$q_{n+1} = \zeta h^2 \ddot{q}_{n+1} + \ell(q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n) \quad (65)$$

où la fonction  $\ell$  et la valeur de  $\zeta$  dépendent du schéma utilisé.

On peut également écrire une relation analogue liant vitesse et accélération :

$$\dot{q}_{n+1} = \nu h \ddot{q}_{n+1} + \ell'(q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n) \quad (66)$$

(i) T.J.R. HUGHES, "A note on the Stability of Newmark's Algorithm in Nonlinear Structural dynamics". Short communications - Univ. of California, Berkley, USA, pp. 383-386, 1975



qui peut encore s'écrire en tenant compte de (65) :

$$\dot{q}_{n+1} = \frac{\nu}{\zeta h} q_{n+1} - \frac{\nu}{\zeta h} \ell(q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n) + \ell'(q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n) \quad (67)$$

En écrivant la relation (65) aux itérations  $k$  et  $k+1$  du pas de temps " $n+1$ ", on obtient par soustraction la relation :

$$\ddot{q}_{n+1}^{k+1} - \ddot{q}_{n+1}^k = \frac{1}{\zeta h^2} (q_{n+1}^{k+1} - q_{n+1}^k)$$

ou

$$\Delta \ddot{q} = \frac{1}{\zeta h^2} \cdot \Delta q \quad (68)$$

D'une manière analogue, on obtient pour les vitesses :

$$\Delta \dot{q} = \frac{\nu}{\zeta h} \cdot \Delta q \quad (69)$$

Par ailleurs, nous avons préalablement établi la forme incrémentale des équations discrètes d'équilibre statique : (relation (65) du chapitre 2) :

$$K_T \cdot \Delta q = f_{\text{ext}} - f_{\text{int}} \quad (70)$$

La forme dynamique correspondante s'écrit alors simplement, sur base de l'équation des travaux virtuels : (instant  $n+1$ )

$$-M \cdot (\ddot{q}_{n+1}^k + \Delta \ddot{q}) + f_{\text{ext}} \Big|_{q_{n+1}^k} - K_T \Big|_{q_{n+1}^k} \cdot \Delta q - f_{\text{int}} \Big|_{q_{n+1}^k} = 0 \quad (71)$$

ou, compte tenu de la relation (68) :

$$\left[ \frac{1}{\zeta h^2} M + K_T \right] \cdot \Delta q = f_{\text{ext}} \Big|_{q_{n+1}^k} - f_{\text{int}} \Big|_{q_{n+1}^k} - M \cdot \ddot{q}_{n+1}^k \quad (72)$$

Le second membre de cette équation est appelé "résidu", c'est le résidu des forces hors équilibre :

$$r(q^k) = M \ddot{q}^k + f_{\text{int}} \Big|_{q^k} - f_{\text{ext}} \Big|_{q^k} \quad (73)$$

$r(q^k)$  s'annule à l'équilibre.

Le premier membre de l'équation (72) contient une matrice appelée "matrice d'itération" :

$$IT = \frac{1}{\zeta h^2} M + K_T \quad (74)$$

La valeur de  $\zeta$  dépend du schéma d'intégration utilisé, on obtiendra successivement, vu la définition de  $\zeta$  introduite à la relation (64) :

1.- Schéma de NEWMARK ( $\beta, \gamma$ ) :  $IT = \frac{1}{\beta h^2} \cdot M + K_T \quad (75)$

2.- Schéma de WILSON ( $\theta$ ) :  $IT = \frac{6}{\theta^2 h^2} \cdot M + K_T \quad (76)$

3.- Schéma de H.H.T. ( $\alpha$ ) :  $IT = \frac{4}{(1-\alpha)^2 h^2} \cdot M + K_T \quad (77)$

4.- Schéma sur 3 points :  $IT = \frac{1}{h^2} \cdot M + K_T \quad (78)$

5.- Schéma sur 4 points (HOUBOLT) :  $IT = \frac{2}{h^2} \cdot M + K_T$  (79)

6.- Schéma sur 6 points :  $IT = \frac{225}{60h^2} \cdot M + K_T$  (80)

Ces définitions se déduisent directement des relations établies au paragraphe 3.1, soit respectivement (17), (27), (28) (couplée à 17), (7), (9) et (11).

Cette matrice d'itération dépend des déplacements car la matrice de raideur tangente en dépend.

A chaque itération il faudrait donc théoriquement remettre à jour la matrice IT, et le résidu bien sûr. Nous en reparlerons ultérieurement (paragraphe 3.4).

En résumé, l'expression discrète de la forme incrémentale des équations d'équilibre dynamique s'écrit :

$$IT \Big|_{q^k} \cdot \Delta q = -r(q^k) \quad (81)$$

avec les définitions (75) à (80) de la matrice d'itération, et (73) du résidu des forces hors équilibre. On effectuera autant de corrections qu'il faudra jusqu'à annulation du résidu (voir remarque 2 ci-après). On remarquera que le système (81) correspond à une résolution du type NEWTON-RAPHSON. En effet, il répond au développement, en série de TAYLOR, du résidu (73) :

$$r(q^{k+1}) = r(q^k) + IT \cdot (q^{k+1} - q^k) \quad (82)$$

l'annulation de cette expression rend bien la relation (81) et IT est une matrice tangente que l'on peut encore définir comme étant

$$IT = \frac{\partial r}{\partial q} \Big|_{q^k} = M \frac{\partial^2 q}{\partial q^2} \Big|_{q^k} + \frac{\partial f_{int}}{\partial q} - \frac{\partial f_{ext}}{\partial q} \quad (83)$$

où  $M \frac{\partial^2 q}{\partial q^2} = \frac{\zeta}{h^2} M$  d'après la relation (65)

$\frac{\partial f_{int}}{\partial q} = K_T$  d'après sa définition au chapitre 2 (i)

$\frac{\partial f_{ext}}{\partial q}$  est négligé comme on l'avait déjà fait remarquer au chapitre 2. En effet, les forces externes non conservatives (électromagnétiques) varient peu au sein d'un pas de temps. Cette affirmation devrait être revue lors de l'étude des faisceaux de conducteurs.

Notons enfin que la généralisation au câble inextensible est évidente vu l'analogie des relations (44) et (45) du chapitre 2.

La méthode implicite de résolution appelle les remarques suivantes :

- 1.- Il convient d'initialiser le processus itératif. L'initialisation est capitale car elle conditionne la première matrice d'itération. Or, dans un comportement hautement non-linéaire, ce sont toujours les premières itérations les plus "ardues".

(i) incidemment, on remarquera que l'on peut retrouver l'expression classique des forces internes pour un système linéaire :  $f_{int} = K \cdot q$  où K serait la matrice de raideur. La matrice de raideur tangente  $K_T$  n'est alors rien d'autre que  $K_T = \frac{\partial (K \cdot q)}{\partial q}$ . L'annexe 3 en montre un exemple concret.



Plusieurs propositions sont possibles, notamment les deux suivantes :

$$\ddot{q}_{n+1}^{(1)} = 0 \quad (84)$$

$$\text{ou } \dot{q}_{n+1}^{(1)} = \dot{q}_n \quad (85)$$

Desquelles on déduira les autres grandeurs, selon le cas. Les tests numériques développés ci-après, montrent un effet systématiquement favorable à la première proposition (84). Ceci est probablement lié au fait qu'aux moments cruciaux de l'évolution du câble, les déplacements varient rapidement et la deuxième proposition (85) conduirait à une accélération, en début de pas, souvent négative. Ce qui est évidemment loin de la vérité et influence défavorablement la valeur du résidu par le terme

$M \ddot{q}_{n+1}^{(1)}$ . Par contre, la première proposition (84) tend vers une solution plus réaliste, notamment pour les déplacements.

Signalons encore l'initialisation correspondant à la prédiction explicite (schéma dénommé "prédicteur-correcteur") (relations (16) et (17) où  $\ddot{q}_{n+1}^{(1)} = \ddot{q}_n$ ).

Ce schéma présente cependant des caractéristiques moins stables [133] que le schéma implicite "pur" sauf pour de faibles pas de temps.

- 2.- Nous avons vu que l'état  $n+1$  ne peut être obtenu qu'après un nombre d'itérations suffisant pour "annuler" le résidu. Numériquement, il convient de définir un critère de convergence pour assurer l'équilibre dynamique au sens du principe de d'Alembert :

$$\| M \ddot{q}_{n+1} + f_{int} \Big|_{q_{n+1}} - f_{ext} \Big|_{q_{n+1}} \| < \varepsilon \quad (86)$$

Généralement, on considère :

$$\varepsilon = \varepsilon_R \cdot c \quad (87)$$

où " $\varepsilon_R$ " est une quantité petite à définir par l'utilisateur ( $10^{-4}$  e.g) et "c" une grandeur de comparaison. Le logiciel considère actuellement :

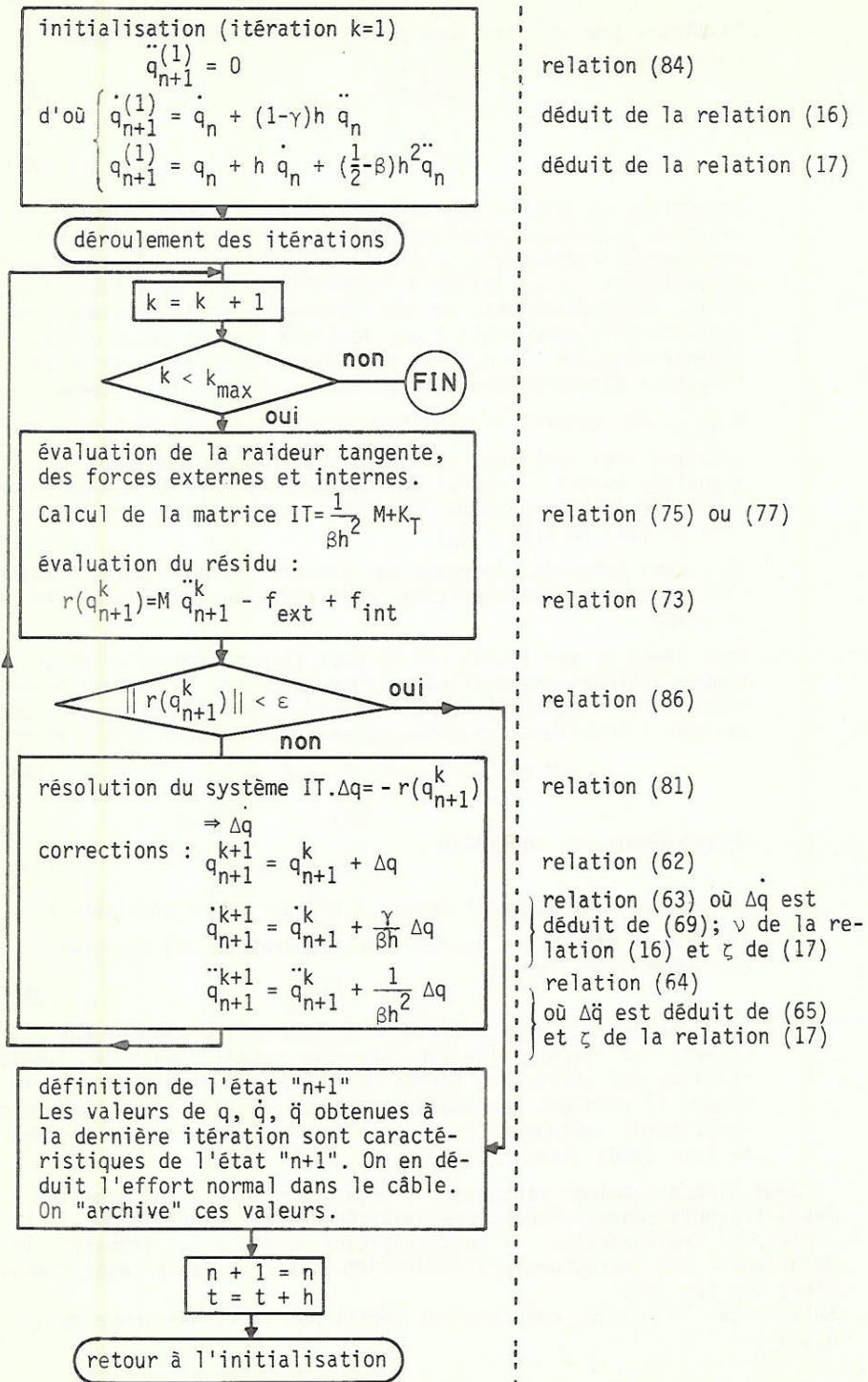
$$c = \|f_{ext}\| + \|f_{int}\| \quad (88)$$

dans son critère de convergence. On pourrait y ajouter par exemple les forces d'inertie pour mieux tenir compte de l'ampleur relative des différents termes de l'équation d'équilibre dynamique. Il convient de remarquer que la prise en compte des forces extérieures seulement, rend le critère inapplicable en dehors de leur temps d'application.

Nous allons examiner rapidement l'organigramme de l'introduction des différents schémas implicites utilisés. Chaque organigramme comprend trois parties : l'initialisation du processus itératif, le déroulement des itérations et l'évaluation finale du nouvel état d'équilibre aux pas " $n+1$ ".

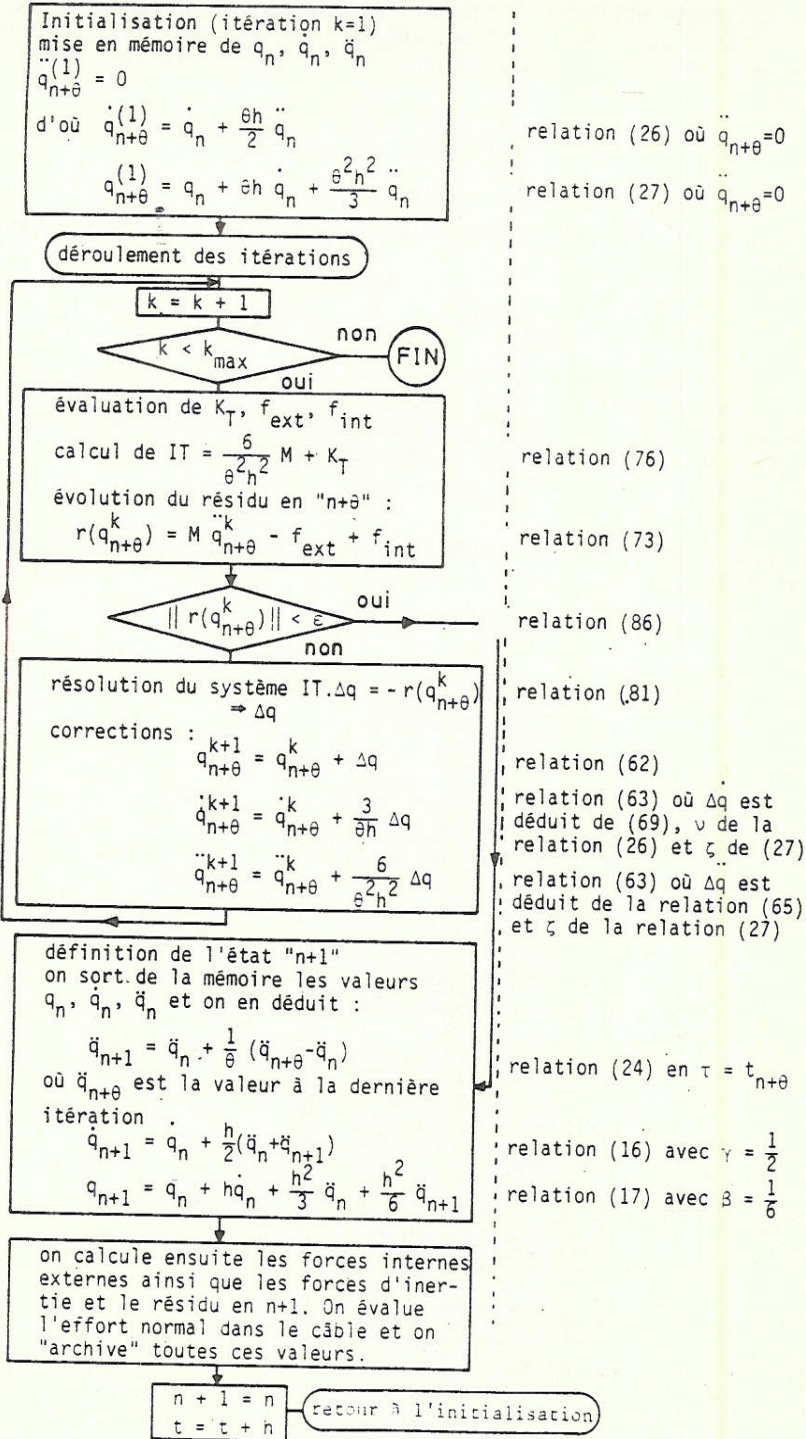
Soit l'état " $n$ " connu, complètement défini par la connaissance de  $q_n$ ,  $\dot{q}_n$ ,  $\ddot{q}_n$ .

3:2.1:1: Organigramme du processus itératif pour un schéma de NEWMARK.- Cet organigramme est évidemment valable pour la variante "H.H.T.", il suffit de remplacer  $\beta$  et  $\gamma$  par leurs valeurs particulières.





3.2.1.2. Organigramme du processus itératif pour un schéma de WILSON.-



3.2.1.3. Organigramme du processus itératif pour un schéma à pas multiples.- Soit NP le nombre de point et donc (NP-1) le nombre de pas du schéma utilisé. Il convient de remarquer préalablement que les fonctions  $\lambda$  et  $\lambda'$  des relations (65) et (66) ne sont plus fonction que des déplacements des pas antérieurs ce qui peut s'exprimer sous la forme :

$$q_{n+1} = \frac{1}{\zeta h^2} q_{n+1} + \sum_{i=1}^{NP-1} \frac{\delta_i}{h^2} q_{n+1-i} \quad (89)$$

où  $\zeta$  et les  $\delta_i$  dépendent du schéma utilisé.

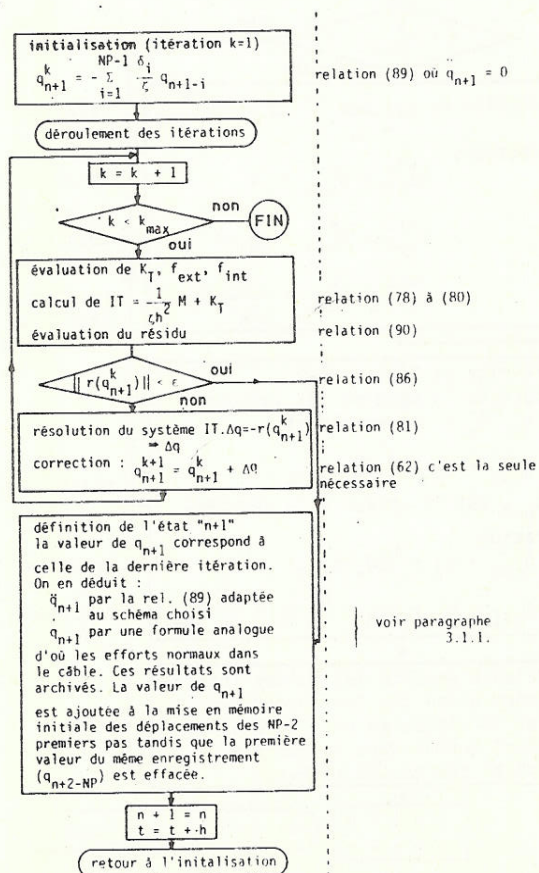
L'expression (89) permet d'exprimer le résidu en fonction des déplacements, uniquement :

$$r(q_{n+1}^k) = \frac{1}{\zeta h^2} M \cdot q_{n+1}^k + \sum_{i=1}^{NP-1} \frac{\delta_i}{h^2} M \cdot q_{n+1-i}^k - f_{ext} + f_{int} \quad (90)$$

Soit alors un état "n" connu auquel nous allons attribuer une nouvelle dénomination : l'état n-(NP-2). L'on effectuera en premier lieu "NP-2" pas selon un schéma à un pas (NEWMARK par exemple), à chaque étape l'on aura mis en mémoire les déplacements.

Soit donc :  $q_{n+2-NP}$ ,  $q_{n+3-NP}$ , ...,  $q_n$  connus.

On peut alors commencer à appliquer pour les pas suivants, le schéma à pas multiples :





### 3.2.2. Schémas d'intégration explicites

Compte tenu que l'on peut directement exprimer les déplacements, vitesses et accélérations de l'instant n+1 en fonction de ceux à l'instant n, on traitera directement la forme discrète :

$$M \ddot{q}_{n+1} = G_{\text{ext}} \Big|_{q_{n+1}} - G_{\text{int}} \Big|_{q_{n+1}} \quad (91)$$

(relation (44) du chapitre 2, à l'instant n+1)

Il n'y a donc plus de processus itératif au sein d'un pas de temps. En effet, la relation explicite : [relation (21) ci-avant]

$$q_{n+1} = q_n + h \dot{q}_n + \frac{1}{2} h^2 \ddot{q}_n \quad (92)$$

définit  $q_{n+1}$  sur connaissance des valeurs à l'instant n. On en déduit forces externes et internes à l'instant n+1 et l'accélération correspondante par inversion de (91). Finalement, la vitesse : (relation (16) ci-avant, pour  $\gamma = \frac{1}{2}$ )

$$\dot{q}_{n+1} = \frac{h}{2} (\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1}) \quad (93)$$

L'état "n+1" est alors totalement défini.

L'organigramme de l'introduction de ce schéma est donc élémentaire. Cette méthode de résolution appelle quelques remarques :

- 1.- La résolution de (91) est immédiate si l'on choisit une représentation diagonale de la matrice de masse. (formule (40) et (41) du chapitre 2).
- 2.- Il existe une variante classique améliorant la précision, en utilisant les vitesses à mi-intervalle; on procède comme suit :

$$\text{puis} \quad \dot{q}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{q}_n + \frac{h}{2} \ddot{q}_n \quad (94)$$

$$\text{d'où} \quad q_{n+1} = q_n + h \dot{q}_{n+\frac{1}{2}} \quad (95)$$

$$\ddot{q}_{n+1} = M^{-1} \cdot (G_{\text{ext}} \Big|_{q_{n+1}} - G_{\text{int}} \Big|_{q_{n+1}}) \quad (96)$$

$$\text{et enfin} \quad \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \ddot{q}_{n+1} \quad (97)$$

C'est sous cette forme que le schéma explicite a été introduit dans le logiciel.

- 3.- Cette méthode ne peut être appliquée dans le modèle avec des multiplicateurs de LAGRANGE tels que nous les avons introduits au chapitre 2. En effet, aucune masse n'est affectée à ces degrés de liberté et la matrice M deviendrait singulière.
- 4.- Le schéma explicite est conditionnellement stable, comme on l'a vu plus haut. Il est donc impératif de travailler avec un pas de temps suffisamment faible. Il existe une technique classique qui permet de faire ajuster le pas par le programme lui-même; pour ce faire il suffit de déterminer la fréquence la plus élevée de la structure et d'adopter le pas en conséquence ( $h \leq \frac{2}{\omega_{\text{MAX}}}$ ). On peut avoir une bonne évaluation de la pulsation de chaque degré de liberté en raisonnant sur

l'équation d'équilibre en oscillation libre, pour un incrément de déplacement :

$$\Delta u_i + \omega^2 \Delta u_i = 0 \quad (98)$$

d'où

$$\omega^2 = - \frac{\Delta u_i^T \cdot \Delta u_i}{(\Delta u_i)^2} \quad (99)$$

### 3.3. SCHEMAS D'INTEGRATION TEMPORELLE - TESTS NUMERIQUES

#### 3.3.1. Présentation des tests

Les tests ont été effectués principalement dans le but d'observer les divers schémas d'intégration quant à la liberté de choix du pas de temps, le temps de calcul sur ordinateur et la stabilité de la réponse. Il convient avant tout de préserver la précision des résultats en rapport avec des valeurs expérimentales, comme nous en étudierons au chapitre 4. La précision inclut la distorsion en fréquence, l'amortissement artificiel et l'importance des fréquences parasites. Ces dernières notamment propagent des erreurs d'arrondis qui dénaturent la réponse.

Nous avons choisi deux cas tests. Le premier correspond à une mise en charge mécanique d'un câble. Ce problème a 11 degrés de liberté a déjà été abordé dans la littérature [71] où l'on y a testé l'influence de la discrétisation, du schéma implicite du trapèze ( $\beta = \frac{1}{4}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ ) et du schéma explicite ( $\beta = 0$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ ),  $\gamma$  et  $\beta$  étant les paramètres de NEWMARK.

Nous compléterons cette étude par les schémas de WILSON, H.H.T., HOUBOLT, pas multiples sur 3 et 6 points et un cas particulier de NEWMARK. Le deuxième problème est relatif au court-circuit dans les installations électriques à haute tension. Il comportera 237 degrés de liberté et nous examinerons le comportement des différents schémas, avec un regard sur les valeurs expérimentales obtenues lors d'essais en vraies grandeurs, discutées au chapitre 4.

#### 3.3.2. Premier cas test- 11 degrés de liberté

La figure 3 reprend la géométrie et les données du cas étudié.

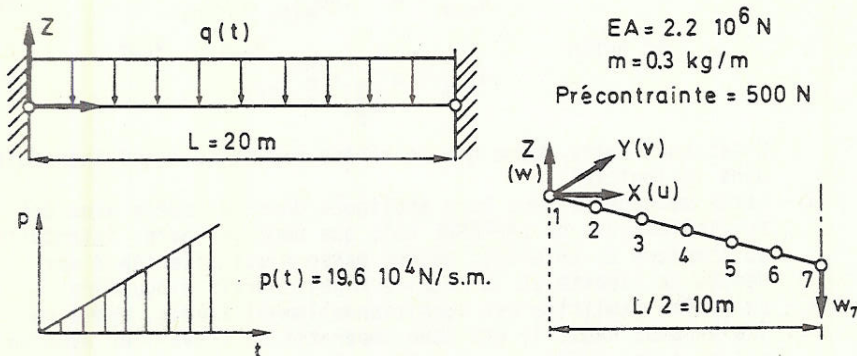


Figure 3

Premier cas test - mise en charge mécanique d'un câble précontraint



Nous épinglons ci-après les conclusions de la référence [71] avant d'effectuer de nouveaux tests :

- le degré des éléments finis (1, 2 ou 3) n'influence pas la réponse ni le temps de calcul à nombre de degrés de liberté constant
  - la discrétisation optimale est de 11 degrés de liberté pour une demi-portée
  - le pas de temps optimal pour les schémas implicites étudiés était de  $2 \cdot 10^{-3}$  et de  $1 \cdot 10^{-4}$  s. pour le schéma explicite
  - la solution explicite conduisait au temps de calcul le plus faible.
- La réponse de référence correspondra à une discrétisation de 11 degrés de liberté (7 éléments du premier degré sur une demi-portée) et une intégration temporelle avec un pas de  $2 \cdot 10^{-3}$  s. par le schéma implicite du trapèze ( $\beta = \frac{1}{4}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ ).

3.3.2.1. Présentation des courbes à pas constant.- Dans un premier temps, nous allons comparer la réponse temporelle selon différents schémas, pour un pas de temps constant. Les figures 4 à 7 reprennent ces évolutions pour différentes valeurs des paramètres des schémas.

Les cas particuliers de Newmark correspondent au choix  $\beta = \frac{1}{2}$ . La résolution du même problème, en supposant la matrice de raideur constante (structure linéaire) a une solution analytique [71] correspondant à une période de 0,98 s. Les figures 5 à 8 qui tiennent compte de la non-linéarité de la raideur présentent une période d'environ 0,03 s., soit une période affaiblie d'un facteur d'environ 30. A la période non-linéaire correspond une valeur de  $\omega h$  de  $2\pi \cdot 35 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \approx 0,44$  de laquelle on peut tirer les distorsions en fréquence et en amortissement d'après les figures 1 et 2 de ce chapitre.

Ces valeurs correspondraient à l'extrapolation, proposée par PARK, des systèmes linéaires aux non-linéaires.

Le tableau 1 présente quelques chiffres relatifs aux courbes des figures 5 à 8.

La distorsion en fréquence et l'amortissement sont évalués d'abord par rapport au schéma du trapèze avec un pas de 0,002 s. (dit de "référence") mais nous indiquons également, pour l'écart en fréquence, les valeurs absolues qui ont été établies sur base de la réponse supposée "exacte" (fig. 4) déduite d'un calcul selon le schéma du trapèze mais pour un pas 20 fois plus faible encore que celui retenu pour le cas de "référence".

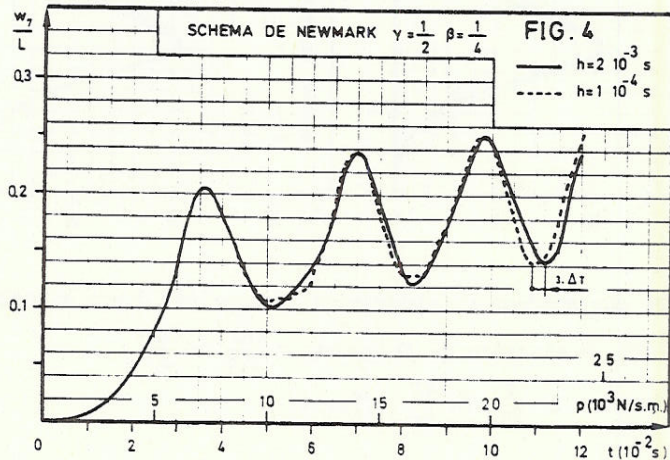
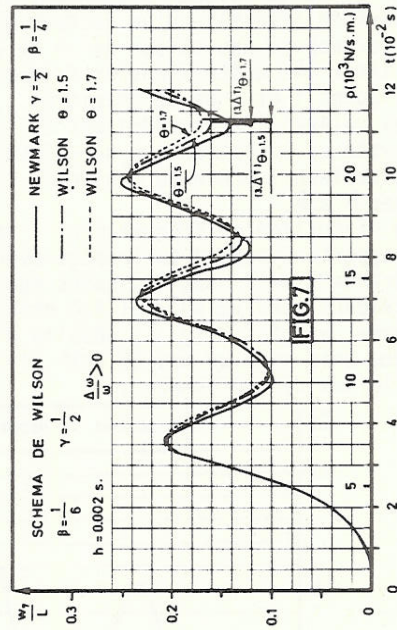
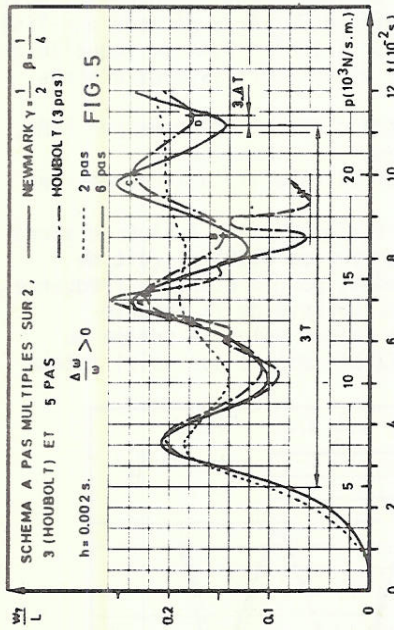
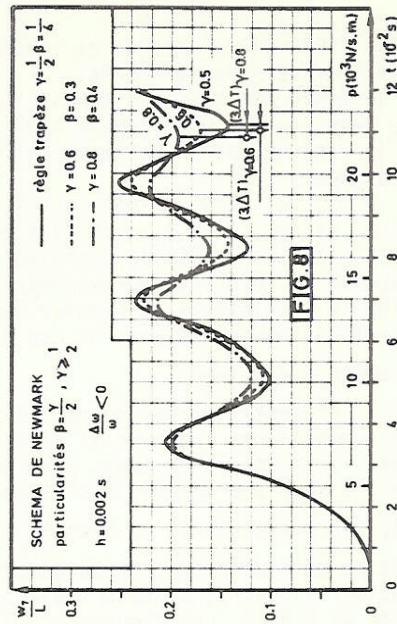
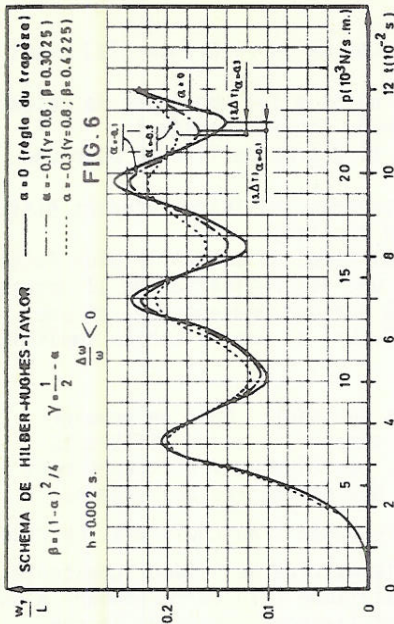


Figure 4

Distorsion en fréquence du schéma du trapèze (NEWMARK  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{4}$ )



Figures 5 à 8

Influence des schémas d'intégration temporelle, à pas constant ( $h=2 \cdot 10^{-3}$  s.). Distorsion en fréquence =  $\frac{3\Delta T}{3.T} = -\frac{\Delta\omega}{\omega}$

amortissement :  $\xi = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{AB}{CD}$  (fig. 5)



| SCHEMAS<br>INITIALISATION  |                       | a) temps de calcul               |                                  |                |                |                 |                 |       |         |          |  |
|--|-----------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-------|---------|----------|--|
|  |                       | NEWMARK                          |                                  |                | WILSON         |                 | H.H.T.          |       | HOUBOLT | 3 Points |  |
| $\gamma = \frac{1}{2}$   | $\beta = \frac{1}{4}$ | $\gamma = 0,6 \quad \beta = 0,3$ | $\gamma = 0,8 \quad \beta = 0,4$ | $\theta = 1,5$ | $\theta = 1,7$ | $\alpha = -0,1$ | $\alpha = -0,3$ | —     | —       |          |  |
| $q_{n+1} = q_n$  | 209                   | — (1)                            | — (1)                            | 214            | — (1)          | 176             | 156             | — (1) | — (1)   |          |  |
| $\dot{q}_{n+1} = 0$  | 183                   | 122                              | 108                              | 145(2)         | 143(2)         | 127             | 121             | 142   | 122     |          |  |
| b) nombre d'itérations par pas (initialisation $\dot{q}_{n+1} = 0$ ) |                       |                                  |                                  |                |                |                 |                 |       |         |          |  |
| nbr. MAX.  | 6                     | 4                                | 4                                | 5              | 4              | 4               | 4               | 4     | 5       |          |  |
| nbr. moyen*  | 4                     | 2                                | 1                                | 2              | 2              | 2               | 2               | 2     | 1       |          |  |
| c) distorsion en fréquence et amortissement                          |                       |                                  |                                  |                |                |                 |                 |       |         |          |  |
| $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ p.r. trapeze(%)                        | 0                     | -1,5                             | -3,5                             | +1             | +1,5           | -2,6            | -3              | +2,6  | +2,5    |          |  |
| $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ absolu (%)                             | +3                    | +1,5                             | -0,5                             | +4             | +4,5           | +0,5            | 0               | +5,6  | +5,5    |          |  |
| $\xi$ (%)  | ~0                    | 2,5                              | 4                                | 2              | 2,5            | 2,5             | 4,1             | 2,7   | 10,0    |          |  |

(1) non testé (2) l'initialisation était  $\dot{q}_{n+1} = 0$  \* valeur arrondie à l'entier inférieur

TABLEAU 1. Premier cas test : 11 degrés de liberté.  
Influence de l'initialisation et divers schémas sur le temps de calcul et les distorsions en fréquence et en amortissement  
Stratégie :  $\epsilon_R = \epsilon_k = 10^{-4}$ , quasi-Newton (Davidon) à chaque itération  
dès que  $\epsilon_R < 10^{-1}$ ,  $h = 2 \cdot 10^{-3}$  s., 60 Pas

Nous allons passer en revue quelques réflexions déduites de ce premier cas test.

3.3.2.2. Influence de l'initialisation du processus itératif.- Cette initialisation intervient au début de chaque pas de temps, son influence est très importante comme on peut le constater au tableau 1. Le choix  $\dot{q}_{n+1} = 0$  permet de gagner 20 à 30% du temps de calcul global sur 60 pas. Ce gain sensible est lié au meilleur conditionnement de la matrice d'itération au début de chaque pas. L'effet systématique en faveur de cette initialisation nous fait opter définitivement pour ce choix.

3.3.2.3. Distorsion en fréquence.- Il est intéressant de noter que contrairement aux systèmes linéaires la distorsion ne garde pas toujours le même signe par rapport au schéma du trapèze : les schémas H.H.T. et NEWMARK ( $\beta = \frac{\gamma}{2} > \frac{1}{4}$ ) présentent une distorsion plus faible que celle à partir d'une extrapolation des systèmes linéaires. En valeur absolue, on remarquera par rapport aux systèmes linéaires, une distorsion plus importante pour les schémas du trapèze, sensiblement la même pour WILSON, HOUBOLT et 3 points et très sensiblement plus faible pour H.H.T.

Nous sommes bien dans un type de problème à basse fréquence, et dont la pulsation se maintient grosso modo d'un pas au suivant. L'extrapolation de la distorsion des systèmes linéaires aux non-linéaires a effectivement grosso modo été observée, comme on l'avait mentionné plus haut.

3.3.2.4. Amortissement artificiel.- Ces valeurs sont reprises au tableau 1. Dans l'ensemble on observe des valeurs proches de celles qu'on peut lire à la figure 2 à l'abscisse correspondante ( $\omega h=0,44$ ), bien que souvent inférieures surtout pour le schéma à 3 points. Ce dernier dénature rapidement la réponse. Il trouvera son utilité lors d'un calcul dynamique volontairement amorti (voir paragraphe 3.6).

Par ailleurs, les schémas de NEWMARK, avec le choix particulier  $\beta = \frac{\gamma}{2} > \frac{1}{4}$  et les schémas H.H.T. présentent des caractéristiques fort semblables pour des valeurs identiques de  $\gamma$  alors que  $\beta$  est sensiblement différent. Les schémas de NEWMARK avec  $\gamma > 0,6$  présentent également un temps de calcul minimum mais l'écart par rapport à H.H.T. est peu significatif.

L'amortissement artificiel introduit par les schémas d'intégration autres que le trapèze, est donc conséquent dans le cas étudié. Il faut toutefois noter que d'une part le pas de temps choisi est de l'ordre du quinzième de la période, et que ce rapport ( $\frac{h}{T}$ ) sera beaucoup plus faible pour les calculs des structures soumises au court-circuit (voir deuxième cas test) et d'autre part toute structure réelle comporte un amortissement et nous n'en avons pas introduit dans le modèle mathématique (chapitre 2).

3.3.2.5. Stabilité.- La référence [71] étudiait également la stabilité des schémas explicite ( $\beta=0, \gamma=\frac{1}{2}$ ) et implicite ( $\beta=\frac{1}{4}, \gamma=\frac{1}{2}$ ). Nous reportons le lecteur à cette référence pour ces deux schémas. Le deuxième restait inconditionnellement stable quand on augmentait le pas de temps mais la distorsion en fréquence s'accroissait très rapidement. Nous remarquerons seulement, au tableau 1, que le nombre d'itérations maximum et moyen est sensiblement plus important pour le schéma du trapèze que pour tous les autres schémas présentés au tableau 1. L'absence de problème particulier de stabilité est lié notamment au cas étudié, principalement représenté par une seule basse fréquence. Il est intéressant par ailleurs de noter le comportement du schéma à 6 points (fig. 5 et 9) qui présente une instabilité caractéristique :

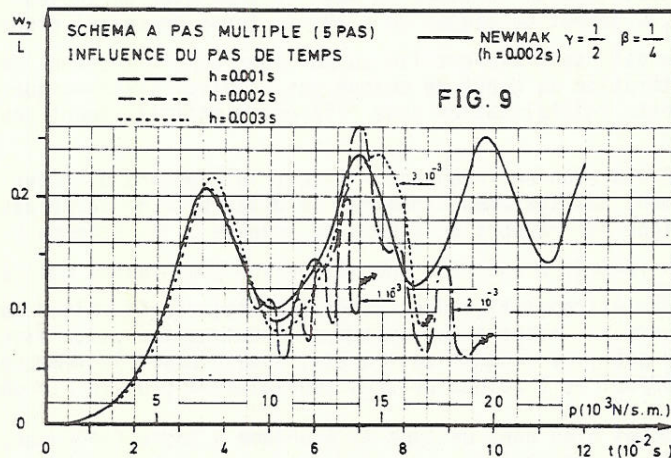


Figure 9  
Instabilité du schéma à 5 pas



une fréquence parasite (environ 3 fois plus élevée que la fondamentale (fig. 5)) apparaît, ce phénomène est lié à une racine indésirable de l'équation caractéristique du schéma d'intégration.

La modification du pas par un facteur 2 (fig. 9) ne peut pas stabiliser la réponse. Ce schéma doit être rejeté.

3.3.2.6. Influence du pas de temps sur la distorsion.- Nous ferons cette recherche sur le schéma H.H.T. avec la valeur particulière  $\alpha=-0,3$

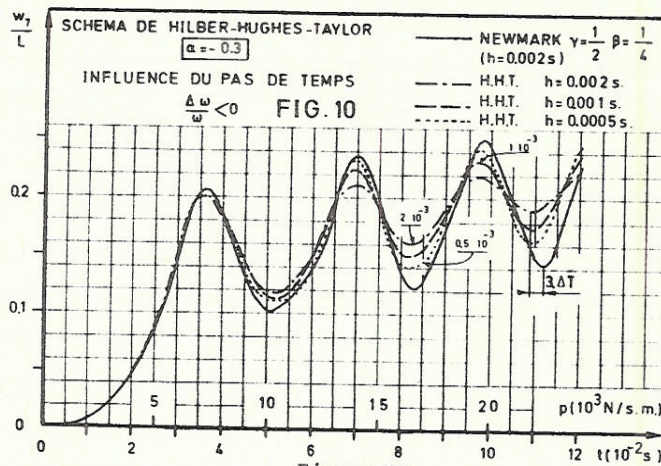


Figure 10

Influence du pas de temps sur la distorsion en fréquence et l'amortissement (schéma HHT).

Il est intéressant de constater que la distorsion en fréquence n'est pas modifiée, même après une division par 4 du pas de temps. Nous avons vu plus haut que la distorsion absolue était quasi nulle pour un pas de  $2.10^{-3}$  s., il est logique qu'on n'empire pas la situation en diminuant le pas.

Le tableau 2 reprend les principales caractéristiques de ces trois comportements :

| Pas de tps.h (s.) | Nombre de pas | Tps. de calcul (s.) | Nbre. Max d'itération | Nbre. moyen d'itération | $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ absolu | $\xi$ % |
|-------------------|---------------|---------------------|-----------------------|-------------------------|--------------------------------------|---------|
| $2.10^{-3}$       | 60            | 121                 | 4                     | 2                       | $\sim 0$                             | 4,1     |
| $1.10^{-3}$       | 120           | 199                 | 3                     | 1                       | $\sim 0$                             | 3,0     |
| $0.5.10^{-3}$     | 240           | 328                 | 2                     | 1                       | $\sim 0$                             | 1,8     |

TABLEAU 2. Influence du pas de temps Schéma HHT ( $\alpha=-0,3$ ), stratégie identique à celle indiquée au tableau 1

La chute de l'amortissement similaire à celle d'un problème linéaire (fig.2) est intéressante car dans les problèmes qui nous préoccupent le rapport  $\frac{h}{T}$  sera très faible pour la fondamentale du mouvement.

### 3.3.3. Deuxième cas test - 237 degrés de liberté

Pour les données on se réfèrera au chapitre 4 (cas LABORELEC,  $105 \text{ mm}^2$ ). Les différents résultats sont repris aux figures 11 à 14 et aux tableaux 3 et 4. On a joint au tableau 4 les valeurs expérimentales disponibles. Il est bien clair que dans un problème aussi complexe

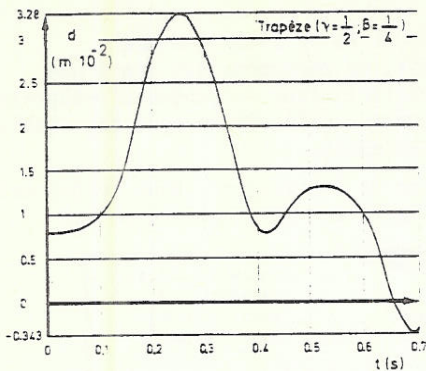


FIG. 11. a

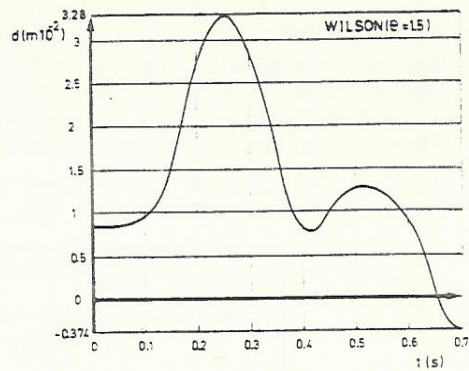


FIG. 11. b

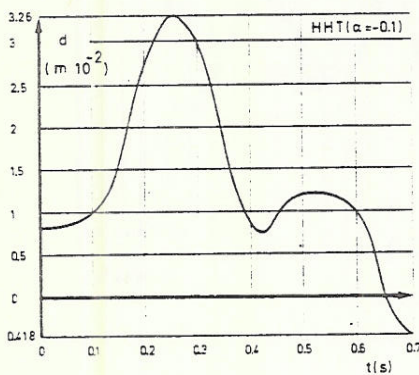


FIG. 11. c

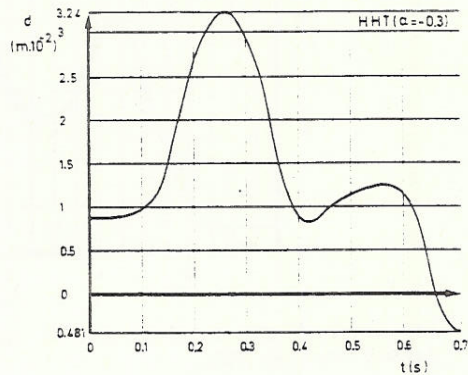


FIG. 11. d

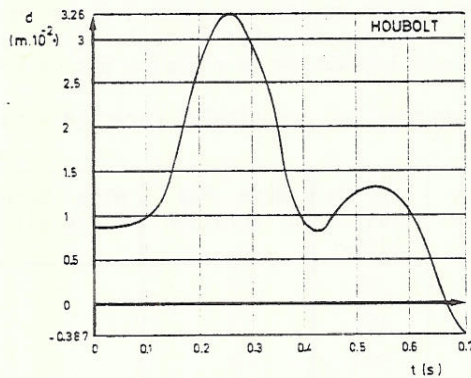


FIG. 11. e

Figure 11

Deuxième cas test - mise en charge électromagnétique. Temps d'observation 0,705 s., pas de temps  $2,5 \cdot 10^{-3}$  s. Déplacement d'un point d'ancre en fonction du temps.

a) NEWMARK ( $\gamma = \frac{1}{2}$ ;  $\beta = \frac{1}{4}$ )

b) WILSON ( $\theta = 1,5$ )

c) H.H.T ( $\alpha = -0,1$ )

d) H.H.T. ( $\alpha = -0,3$ )

e) HOUBOLT



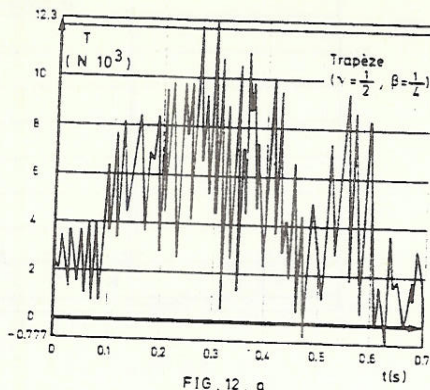


FIG. 12. a

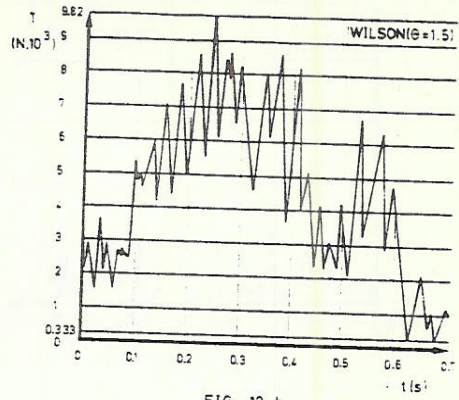


FIG. 12. b

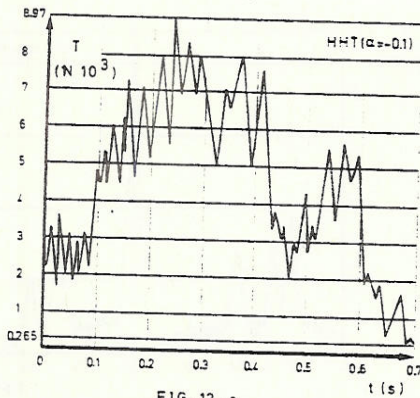


FIG. 12. c

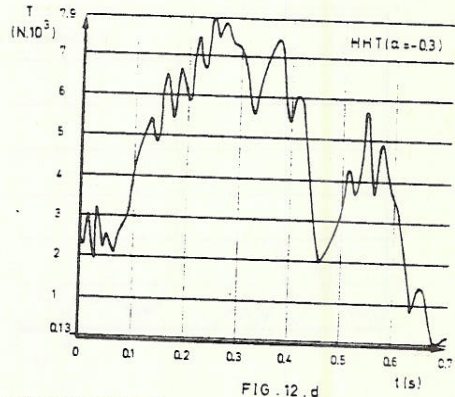


FIG. 12. d

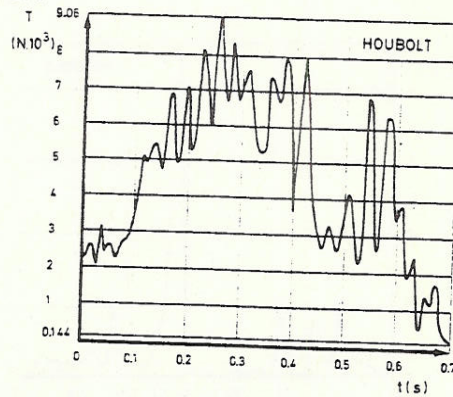


FIG. 12. e

Figure 12

Deuxième cas test - mise en charge électromagnétique. Temps d'observation 0,705 s, pas de temps  $2,5 \cdot 10^{-3}$  s. Tension mécanique dans le jeu de barres, phase OUEST, en fonction du temps

a) NEWMARK ( $\gamma = \frac{1}{2}$ ;  $\beta = \frac{1}{4}$ )

b) WILSON ( $\theta = 1.5$ )

c) H.H.T. ( $\alpha = -0,1$ )

d) H.H.T. ( $\alpha = -0,3$ )

e) HOUBOLT

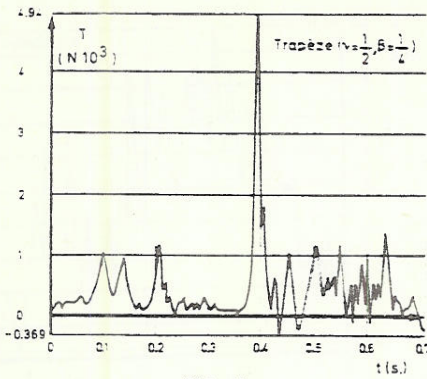


FIG. 13. a

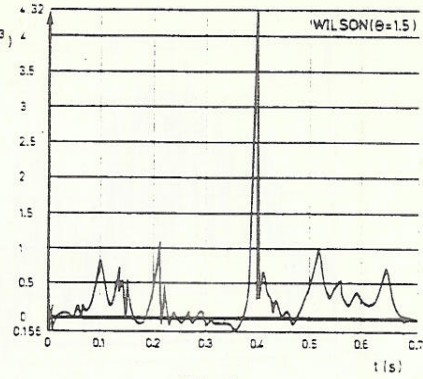


FIG. 13. b

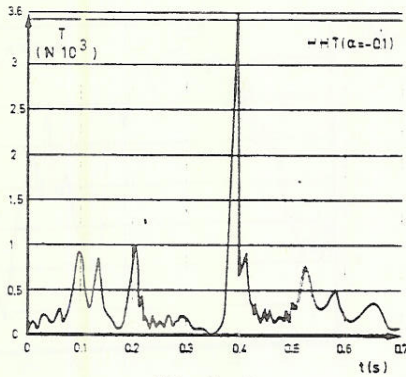


FIG. 13. c

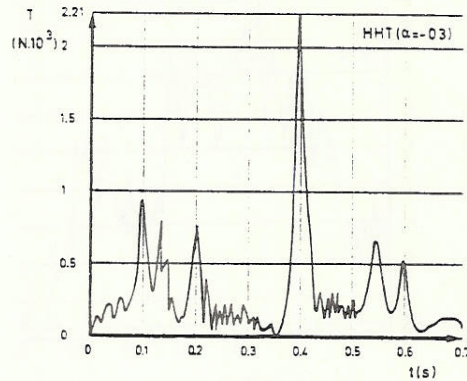


FIG. 13. d

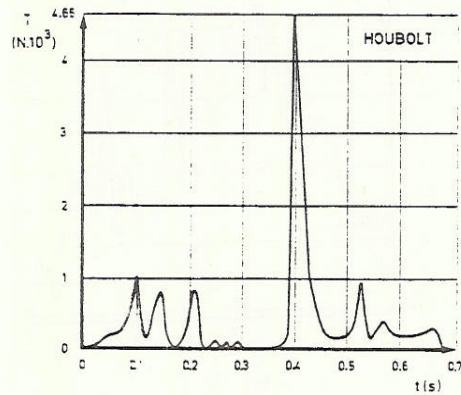


FIG. 13. e

Figure 13

Deuxième cas test - mise en charge électromagnétique. Temps d'observation 0,705 s, pas de temps  $2,5 \cdot 10^{-3}$  s. Tension mécanique dans la dérivation NORD-OUEST, en fonction du temps.

a) NEWMARK

b) WILSON

c) H.H.T. ( $\alpha=-0,1$ )

d) H.H.T. ( $\alpha=-0,3$ )

e) HOUBOLT



on ne peut s'attendre à une superposition du calcul et de la mesure et l'allure globale de la courbe de réponse est un meilleur point de comparaison que l'étude sur quelques points particuliers. Néanmoins nous comparons une méthode par rapport à l'autre de manière à juger de l'opportunité de son utilisation. C'est dans ce cadre que nous présentons les résultats suivants.

La comparaison expérimentale, quant à elle, sera commentée au chapitre 4.

| Deuxième cas test - 237 degrés de liberté<br>(20 éléments poutres, 34 éléments câbles) |  |             |                        |   |         |       |
|--|--|-------------|------------------------|---|---------|-------|
| a) temps d'observation 0,705 s. soit 282 pas de 0,0025 s.                              |  |             |                        |   |         |       |
|  | NEWMARK<br>$\gamma=\frac{1}{2} \quad \beta=\frac{1}{4} \quad ; \quad \gamma=0,8 \quad \beta=0,4$ |             | WILSON<br>$\theta=1.5$ | H.H.T.<br>$\alpha=-0,1 \quad ; \quad \alpha=-0,3$ | HOUBOLT |       |
| Nbre. Max d'itér.p/pas   | 15   | 3           | 4                      | 4   | 4       | 6     |
| Nbre. moyen d'itér.p/pas   | 5  | 2,28        | 2                      | 2   | 2       | 2     |
| Tps.de calcul  | 4h16'  | 1h41'       | 2h27'                  | 2h0'  | 1h58'   | 2h4'  |
| b) temps d'observation 2,5 s. soit 250 pas de 0,01 s.                                  |  |             |                        |   |         |       |
| Nbre. Max d'itér.p/pas   |  |             |                        |   | 12      | 14    |
| Nbre. moyen d'itér.p/pas   | instable   | non calculé | non calculé            | non calculé                                       | 3,28    | 5     |
| Tps.de calcul  |  |             |                        |   | 3h10'   | 3h54' |

TABLEAU 3. Influence des schémas sur le temps de calcul.

Stratégie  $\epsilon_R = \epsilon_k = 10^{-4}$ , initialisation  $\ddot{q}_{n+1} = 0$

Remise à jour du type quasi-Newton (BFGS) à chaque itération.

*Commentaires* : Le schéma de NEWMARK présente une réponse fortement oscillante (fig. 11, 12 et 13) liée au cas particulier étudié, ces oscillations conduisent à une perte de convergence à la fin de la période étudiée (0,705 s.) malgré le faible pas de temps choisi, par rapport aux périodes fondamentales du phénomène (proche de 0,7 s.) (soit un pas environ égal au 1/300 d'une période fondamentale).

Toutes les autres méthodes permettent d'une part de réduire le temps de calcul par un facteur 2 environ, tout en conservant une réponse d'autant moins perturbée que l'amortissement est élevé. On notera que l'on ne rencontre plus de différence significative entre les divers schémas H.H.T. et le schéma de HOUBOLT. Wilson reste plus lent suite à la restitution forcée à l'instant "n+1" effectuée après chaque pas.

Deuxième cas test - 237 degrés de liberté  
a) Temps d'observation 0,705 s. (pas 0,0025 s.)

| SCHEMAS<br>VALEURS<br>MAXIMALES DE | NEWMARK                |                       |                |               | WILSON         | HHT             |                 | HOUBOLT      | VALEURS<br>EXPERIMENTALES |
|------------------------------------|------------------------|-----------------------|----------------|---------------|----------------|-----------------|-----------------|--------------|---------------------------|
|                                    | $\gamma = \frac{1}{2}$ | $\beta = \frac{1}{4}$ | $\gamma = 0,8$ | $\beta = 0,4$ | $\theta = 1,5$ | $\alpha = -0,1$ | $\alpha = -0,3$ |              |                           |
| 1 dplt. selon Y<br>en 1 (cm)       | 3,28(0,26)             | 3,24 (0,26)           | 3,28(0,26)     | 3,26 (0,26)   | 3,24 (0,26)    | 3,26 (0,26)     | 3,24 (0,26)     | 3,26(0,26)   | 3,2 (0,26)                |
| 2 dplt. selon X<br>en 2 (cm)       | -3,88(0,26)            | -3,87 (0,26)          | -3,87(0,26)    | -3,86 (0,26)  | -3,84 (0,26)   | -3,86 (0,26)    | -3,84 (0,26)    | -3,86(0,26)  | -4 (0,26)                 |
| 3 tension max.<br>en 3 (N)         | 12300(0,3)             | 7880 (0,25)           | 9820(0,25)     | 8970 (0,25)   | 7900 (0,25)    | 9060(0,25)      | 8000 (0,25)     | 8000 (0,25)  | 8000 (0,25)               |
| 4 tension max.<br>en 4 (N)         | 4940(0,25)             | 2200 (0,4)            | 4300(0,4)      | 3600 (0,4)    | 2210 (0,4)     | 4600(0,4)       | non mesuré      | 4600(0,4)    | non mesuré                |
| 5 tension max.<br>en 5 (N)         | 11800(0,2)             | 9090 (0,23)           | 9980(0,23)     | 9550 (0,23)   | 9080 (0,23)    | 9640(0,22)      | 8400 (0,23)     | 9640(0,22)   | 8400 (0,23)               |
| 6 tension max.<br>en 6 (N)         | 2160(0,43)             | 1530 (0,3)            | 1760(0,3)      | 1730 (0,3)    | 1530 (0,3)     | 1950(0,3)       | non mesuré      | 1950(0,3)    | non mesuré                |
| 7 dplt. selon Y<br>en 7 (m)        | -2,14(0,35)            | -2,15 (0,35)          | -2,13(0,35)    | -2,14 (0,35)  | -2,15 (0,35)   | -2,14 (0,35)    | -2,15 (0,35)    | -2,14 (0,35) | -2,15 (0,35)              |
| 8 dplt. selon Z<br>en 7 (m)        | 1,29(0,7)              | 1,30 (0,7)            | 1,31(0,7)      | 1,37 (0,7)    | 1,40 (0,7)     | 1,34(0,7)       | 1,35 (0,7)      | 1,34 (0,7)   | 1,35 (0,7)                |

\* de fortes oscillations perturbent le mouvement (voir figures 10, 11, 12)

b) temps d'observations 2,5 s. (pas 0,01 s.)

| N°<br>DES VALEURS<br>REPERES | SCHEMAS                   |             | SCHEMAS                   |             | VALEURS<br>EXPERIMENTALES |  |
|------------------------------|---------------------------|-------------|---------------------------|-------------|---------------------------|--|
|                              | H.H.T.<br>$\alpha = -0,3$ | HOUBOLT     | H.H.T.<br>$\alpha = -0,3$ | HOUBOLT     |                           |  |
| 1                            | 3,06(0,26)                | 3,30(0,26)  | 3,9(1,2)                  | 4,7(1,2)    | 2,7(1,2)                  |  |
| 2                            | -3,65(0,26)               | -3,90(0,26) | -4,34(1,2)                | -4,79(1,2)  | -5(1,2)                   |  |
| 3                            | 7100(0,25)                | 7600(0,26)  | 11000(1,2)                | 10900(1,2)  | 9500(1,2)                 |  |
| 4                            | 915(0,4)                  | 1590(0,4)   | 916(0,4)                  | 1590(0,4)   | non mesuré                |  |
| 5                            | 8280(0,25)                | 8700(0,26)  | 6200(2,1)                 | 9860(2,1)   | 7200(2,1)                 |  |
| 6                            | 1040(0,3)                 | 1210(0,3)   | 1040(0,27)                | 1210(0,27)  | non mesuré                |  |
| 7                            | -2,14(0,35)               | -2,15(0,35) | -2,14(0,35)               | -2,15(0,35) | -2,15(0,3)                |  |
| 8                            | 1,34(0,7)                 | 1,33(0,7)   | 1,34(0,75)                | 1,33(0,75)  | 1,35(0,75)                |  |
|                              | A (1)                     |             | B (2)                     |             |                           |  |

TABLEAU 4. Influence des schémas sur quelques valeurs repères et valeurs expérimentales. Les grandeurs entre parenthèses indiquent les instants d'apparition des grandeurs correspondantes

- (1) Les deux premières colonnes (A) de la partie b du tableau donnent les valeurs maximales pendant les premières 0,705 s.  
(2) Les deux dernières colonnes (B) de la même partie du tableau donnent les valeurs maximales sur toute la durée d'observation (2,5 s.)



Il est intéressant de comparer, au tableau 4, les comportements suivants :

1.- à pas constant et pour une même période d'observation, la comparaison entre les divers schémas d'une part et avec les valeurs expérimentales d'autre part (partie "a" du tableau d'une part et les 3 dernières colonnes de la partie "b" d'autre part).

2.- comparer pour les schémas HHT ( $\alpha=-0,3$ ) et HOUBOLT, les valeurs obtenues pour deux pas différents (2,5 et 10 ms) pendant la même période d'observation, en regard des valeurs expérimentales (3 dernières colonnes de la partie "a" du tableau et 2 premières de la partie "b").

On constatera que si les valeurs des déplacements (lignes 1, 2, 7 et 8 du tableau 4) varient peu d'un schéma à l'autre, il apparaît des différences significatives dans les tensions mécaniques qui apparaissent dans les conducteurs (lignes 3 à 6 du tableau 4). Les figures 11 à 13 sont instructives à ce sujet.

La distorsion en fréquence, caractérisée au tableau 4 par les instants d'apparition des maxima, est pratiquement absente. L'amortissement artificiel est loin d'être négligeable mais on comprendra pourquoi au vu des figures 11 à 13, en effet, les pics de tension ont pour origine des fréquences beaucoup plus élevées que la fondamentale, il y correspond bien sûr (fig. 1 et 2) des distorsions et amortissement plus importants. Nous verrons au chapitre 4 qu'en pratique les hautes fréquences sont fortement amorties. Le schéma H.H.T. ( $\alpha=-0,3$ ) et le schéma de NEWMARK ( $\gamma=0,8$ ;  $\beta=0,4$ ) correspondent le mieux, dans le cas étudié, aux valeurs expérimentales.

Mais l'intérêt majeur de tous les schémas, par rapport à celui du trapèze, est de fournir une solution nettement plus stable (numériquement) que ce dernier, ce qui se marque au tableau 3 par le gain sur le nombre d'itérations maximum et moyen et par conséquence sur le temps de calcul.

Ce comportement permet d'augmenter le pas de temps, nous avons effectué le même calcul mais en multipliant le pas par un facteur 4. Le nombre de pas a été fixé à 250 ce qui correspond à une période d'observation de 2,5 s. Les tableaux 3 et 4 (parties "b" des tableaux) donnent quelques informations concernant ces calculs, la figure 14 montre le tracé en fonction du temps de quelques grandeurs.

Le même calcul tenté par la méthode du trapèze, ne conduit plus à une solution stable et diverge après quelques pas.

On constate, comme on l'avait épinglé ci-avant que l'amortissement pour un même schéma, est évidemment plus important quand le pas augmente (2 colonnes de gauche de la partie "b" du tableau 4 par rapport aux mêmes valeurs à la partie "a"). Les deux schémas étudiés présentent encore des résultats fort proches des valeurs expérimentales et l'allure des courbes (fig. 14) est plus monotone, ce qui nous rapproche davantage des relevés expérimentaux, détaillés au chapitre 4. Il subsiste cependant, et curieusement, une erreur importante sur le déplacement d'un point d'ancrage (première ligne de la partie b du tableau 4), on en reparlera au chapitre 4. (dispositif de mesure).

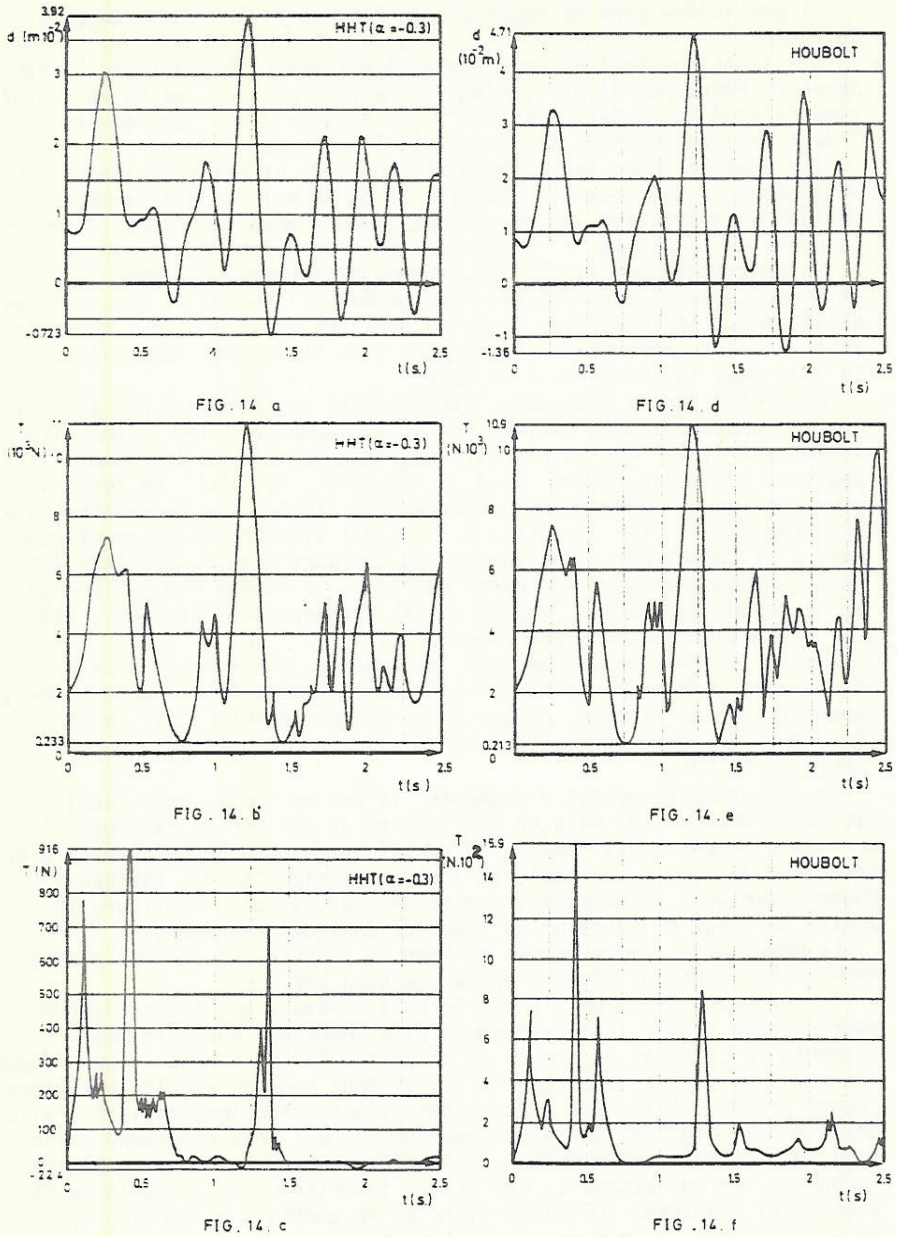


Figure 14

Deuxième cas test - mise en charge électromagnétique. Temps d'observation 2,5 s., pas de temps 0,01 s. Schémas d'intégration HHT ( $\alpha = -0,3$ ) (à gauche) et HOUBOLT (à droite).

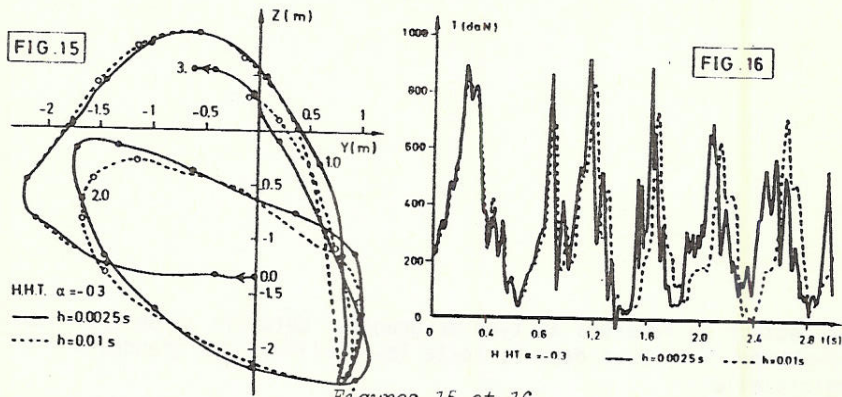
a) et d) déplacement d'un point d'ancrage en fonction du temps

b) et e) tension mécanique dans le jeu de barres, phase OUEST, en fonction du temps

c) et f) tension mécanique dans la dérivation NORD-OUEST, en fonction du temps.



Les figures 15 et 16 permettent de juger "de visu" de la distorsion en fréquence et de l'amortissement artificiel introduit par le schéma H.H.T. ( $\alpha=-0,3$ ) par comparaison des courbes obtenues pour des pas respectivement de 0,01 et 0,0025 s.



Figures 15 et 16

Deuxième cas test - mise en charge électromagnétique. Schéma d'intégration HHT ( $\alpha=-0,3$ ). Influence du pas de temps sur la distorsion en fréquence et l'amortissement.

fig. 15 : débattement des câbles à mi-portée dans un plan YZ

fig. 16 : tension mécanique dans le jeu de barres en fonction du temps

Par ailleurs, l'étude de tels cas par une méthode explicite conduirait inmanquablement aux mêmes instabilités que celles rencontrées par le schéma du trapèze.

### 3.3.4. Conclusions

Les conclusions de ce paragraphe seront résumées au chapitre 8. Nous allons simplement commenter les conclusions de PARK (citées à la fin du paragraphe 3.1) dans le cadre de notre étude :

1.- Le choix du pas de temps est effectivement limité plus pour une raison de précision que pour une question de stabilité, si toutefois on élimine le schéma du trapèze dans lequel l'instabilité est produite par la propagation des erreurs d'arrondis quand le système discrétisé a un large spectre fréquentiel.

2.- Le schéma du trapèze ("A-stable" en linéaire) peut effectivement devenir instable comme indiqué au point 1.

3.- Dans les cas étudiés, quand l'amortissement artificiel est plus conséquent, la méthode semble être plus stable puisqu'elle permet notamment l'accroissement du pas.

4.- Le classement de PARK sur base du pas de temps maximal possible reste valable dans notre cas, encore que WILSON ne passe au deuxième rang que pour une raison de temps de calcul. Nous pouvons également compléter ce classement en plaçant en tête le schéma H.H.T. qui possède en plus l'avantage de pouvoir ajuster le taux d'amortissement. Le schéma de NEWMARK avec le choix particulier  $\beta = \frac{\gamma}{2}$  ( $> \frac{1}{4}$ ) est également du même ordre d'intérêt dans les problèmes qui nous préoccupent (basses fréquences dominantes et pas de temps très faible par rapport à la fondamentale).

### 3.4. REMISE A JOUR DE LA MATRICE D'ITERATION-THEORIE

Les notations de ce paragraphe sont reprises sur la page suivante :

Le lecteur se référera au type de grandeur détaillé ci-dessus. Nous ne distinguerons plus dans le texte les scalaires des grandeurs matricielles.

Nous avons vu au début de ce chapitre que les schémas d'intégration temporelle implicites calculaient le déplacement par corrections successives à partir d'un état "n" vers l'état "n+1". La forme incrémentale des équations d'équilibre fait alors intervenir la matrice d'itération. Le même processus existe pour un calcul d'équilibre statique (position de référence par exemple) auquel cas la matrice d'itération se réduit à la matrice de raideur tangente.

La remise à jour de cette matrice au sein des itérations est souvent impérative dans les problèmes fortement non-linéaires, comme ceux qui nous préoccupent.

La technique de NEWTON-RAPHSON consiste à réévaluer la matrice d'itération et d'en déduire, après inversion, les corrections des déplacements selon la technique développée au paragraphe 3.2.

La technique de QUASI-NEWTON permet d'évaluer directement une approximation de l'inverse de la nouvelle matrice d'itération et d'en déduire par simple multiplication, les corrections de déplacement. Il s'ensuit un gain appréciable du temps de calcul par itération. La convergence est évidemment ralentie par rapport à la méthode NEWTON-RAPHSON. Généralement, on observe cependant un gain sur le coût global d'un pas de temps.

3.4.1. Bases théoriques de la technique de QUASI-NEWTON [126, 128, 131, 132, 134, 138, 139]

Reprenons la relation (82), venant du développement en série du résidu des forces hors équilibre :

$$r(q^{k+1}) = r(q^k) + IT^k \cdot (q^{k+1} - q^k) \quad (100)$$

$IT^k$  étant la matrice d'itération calculée en fonction des valeurs à l'itération k.

La technique de QUASI-NEWTON recherche des approximations successives H de la matrice IT qui vérifient toutefois une équation du même type que (100) :

$$r(q^{k+1}) = r(q^k) + H^{k+1} \cdot (q^{k+1} - q^k) \quad (101)$$

La matrice  $H^{k+1}$  est déterminée à l'itération k+1, et non pas à l'itération k comme IT. A la convergence la matrice H est identique à IT.



| Symbole | type de grandeur(1) | Signification             | définie à la relation | Symbole    | type de grandeur(1) | Signification (2) | définie à la relation |
|---------|---------------------|---------------------------|-----------------------|------------|---------------------|-------------------|-----------------------|
| C       | M                   | correction                | 106,07                | u          | v                   | e.m.              | 107,108               |
| d       | v                   | correction de déplacement | 102                   | v          | v                   | e.m.              | 107,108               |
| H       | M                   | matrice de QUASI-NEWTON   | 101                   | w          | v                   | e.m.              | 127,132               |
| IT      | M                   | matrice de NEWTON-RAPHSON | 100                   | y          | v                   | diff. de résidu   | 103                   |
| q       | v                   | coordonnées généralisées  | 100                   | z          | v                   | e.m.              | 113,126,134           |
| r       | v                   | résidu                    | 100                   | $\alpha_j$ | s                   | e.m.              | 124                   |
| S       | M                   | inverse de H              | 105                   | $\beta_j$  | s                   | e.m.              | 112,131               |
|         |                     |                           |                       | $\gamma_j$ | s                   | e.m.              | 133                   |

(1) M=matrice, v=vecteur, s=scalaire (2) e.m.=expression mathématique

Elle est l'image d'une approche sécante. La matrice  $H^{k+1}$  et, mieux, son inverse peut se déduire de sa valeur à l'itération précédente (i) :

$$\text{Posons } d^k = q^{k+1} - q^k \quad (102)$$

$$y^k = r(q^{k+1}) - r(q^k) \quad (103)$$

l'équation (101) s'écrit :

$$y^k = H^{k+1} \cdot d^k \quad (104)$$

et après inversion

$$d^k = (H^{k+1})^{-1} \cdot y^k = S^{k+1} \cdot y^k \quad (105)$$

Nous recherchons une relation du type

$$S^{k+1} = S^k + C^k \quad (106)$$

où  $C^k$  est une correction. Au vu de la relation (105) elle doit être de la forme :

$$C^k = d^k \cdot (u^k)^T - S^k \cdot y^k \cdot (v^k)^T \quad (107)$$

où  $u^k$  et  $v^k$  doivent respecter

$$(u^k)^T \cdot y^k = 1 \quad \text{et} \quad (v^k)^T \cdot y^k = 1 \quad (108)$$

en effet, on peut alors écrire :

$$S^{k+1} \cdot y^k = S^k \cdot y^k + d^k \cdot \underbrace{(u^k)^T \cdot y^k}_1 - S^k \cdot y^k \cdot \underbrace{(v^k)^T \cdot y^k}_1 \quad (109)$$

Le second membre de cette relation vaut  $d^k$ , compte tenu des relations (108). On obtient ainsi la relation (105), ce que nous voulions démontrer.

Le choix des vecteurs  $u$  et  $v$  est uniquement lié par les relations (108). On en déduit la correction  $C^k$  (relation (107)), puis la matrice  $S^{k+1}$  (relation (106)), de laquelle on déduira les corrections aux déplacements par la relation (105).

Le choix des vecteurs  $u$  et  $v$  caractérise le type de méthode de QUASI-NEWTON, classiquement on définit les méthodes de rang 1 ( $u=v$ ) et celles de rang 2 ( $u \neq v$ ). Deux variantes de chaque rang ont été étudiées :

3.4.2. Méthode de DAVIDON [127, 131, 132, 134, 135, 138, 139]

$$u = v = \frac{d - S \cdot y}{(d - S \cdot y)^T \cdot y} \quad (110)$$

(cette définition vérifie bien les relations (108))  
ce qui donne la relation :

$$S_D^{k+1} = S_D^k + \frac{(d^k - S_D^k \cdot y^k) \cdot (d^k - S_D^k \cdot y^k)^T}{(d^k - S_D^k \cdot y^k)^T \cdot y^k} \quad (111)$$

$$\text{Posant } \beta_i = [(d^i - S_D^i \cdot y^i)^T \cdot y^i]^{-1} \quad (\text{scalaire}) \quad (112)$$

$$\text{et } z_i = d^i - S_D^i \cdot y^i \quad (113)$$

(i) Dans la littérature, on établit souvent les relations pour déterminer  $H$  et on en déduit l'inverse par une propriété matricielle. Nous présentons une approche basée directement sur l'évaluation de l'inverse de  $H$ .



on peut écrire (111) sous la forme :

$$S_D^{i+1} = S_D^i + \beta_i z_i z_i^T \quad (114)$$

Si nous supposons connue la valeur  $S_D^0$  (qui est la valeur initiale, voir remarque ultérieure) il suffit de conserver les valeurs successives de  $z_0, z_1, \dots, z_k$  pour exprimer la matrice de Davidon, en fonction de sa valeur initiale, sous la forme :

$$S_D^{k+1} = S_D^0 + \sum_{i=1}^k \beta_i z_i z_i^T \quad (115)$$

C'est sous cette forme que nous l'introduirons dans l'organigramme présenté ultérieurement.

On remarquera que :

- 1.- la matrice  $S_D$  reste symétrique mais la définition positive n'est plus assurée
- 2.- La recherche de  $S_D$  ne demande qu'une seule multiplication matrice vecteur (relation (113) :  $S_D^i \cdot y^i$ )
- 3.- La méthode de Davidon n'utilise qu'un seul vecteur de travail

### 3.4.3. Méthode de BROYDEN [131, 132, 134, 135, 138, 139]

$$u = v = \frac{S \cdot d}{d^T \cdot S \cdot y} \quad (116)$$

(cette définition vérifie bien les relations (108)).  
ce qui donne la relation :

$$S_B^{k+1} = S_B^k + \frac{(d^k - S_B^k \cdot y^k) \cdot (d^k)^T \cdot S_B^k}{(d^k)^T \cdot S_B^k \cdot y^k} \quad (117)$$

$$\text{Posant } \beta_i = [d^i \cdot S_B^i \cdot y^i]^{-1} \quad (\text{scalaire}) \quad (118)$$

$$z_i = d^i - S_B^i \cdot y^i \quad (119)$$

$$w_i = S_B^i \cdot d^i \quad (120)$$

on peut encore écrire (117) sous la forme, analogue à (115)

$$S_B^{k+1} = S_B^0 + \sum_{i=1}^k \beta_i z_i \cdot w_i^T \quad (121)$$

On remarquera que :

- 1.-  $S_B$  n'est plus symétrique ni définie positive
  - 2.- La recherche nécessite deux multiplications matrice vecteur (119 et 120)
  - 3.- Deux vecteurs de travail sont nécessaires
- Cette méthode semble peu opportune puisqu'elle présente plus d'inconvénients et moins d'avantages que la première. Nous supposons  $S_B$  symétrique lors des tests.

### 3.4.4. Méthode de DAVIDON-FLETCHER-POWEL (D.F.P) [130, 131, 132, 134, 135, 138, 139]

$$u = \frac{d}{d^T \cdot y} \quad \text{et} \quad v = \frac{S \cdot y}{y^T \cdot S \cdot y} \quad (122)$$

(ces définitions vérifient bien les relations (108)).

ce qui donne la relation :

$$S_{DFP}^{k+1} = S_{DFP}^k + \frac{d^k \cdot (d^k)^T}{(d^k)^T \cdot y^k} - \frac{S_{DFP}^k \cdot y^k \cdot (y^k)^T \cdot S_{DFP}^k}{(y^k)^T \cdot S_{DFP}^k \cdot y^k} \quad (123)$$

Posant  $\alpha_i = [(d^i)^T \cdot y^i]^{-1}$  (scalaire) (124)

$$\beta_i = -[(y^i)^T \cdot S_{DFP}^i \cdot y^i]^{-1} \quad (scalaire) \quad (125)$$

$$z_i = d^i \quad (126)$$

$$w_i = S^i \cdot y^i \quad (127)$$

on peut encore écrire (123) sous la forme, analogue à (115) et (121) :

$$S_{DFP}^{k+1} = S_{DFP}^0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i z_i z_i^T + \sum_{i=1}^k \beta_i w_i w_i^T \quad (128)$$

On remarquera : 1.- La matrice  $S_{DFP}$  reste symétrique

2.- Une seule multiplication matrice vecteur (127) est nécessaire

3.- La méthode DFP utilise deux vecteurs de travail

3.4.5. Méthode de BROYDEN-FLETCHER-GOLFARB-SHANO (B.F.G.S.) [131, 132, 134, 135, 136, 137, 138, 139]

$$u = -\frac{S \cdot y}{y^T \cdot d} + \frac{d \cdot y^T \cdot S \cdot y}{(y^T \cdot d) \cdot (y^T \cdot d)} + \frac{d}{y^T \cdot d} \quad \text{et} \quad v = \frac{d}{y^T \cdot d} \quad (129)$$

(ces définitions vérifient bien les relations (108)).

ce qui donne la relation

$$S_{BFGS}^{k+1} = S_{BFGS}^k + \left( I - \frac{d^k \cdot (y^k)^T}{(y^k)^T \cdot d^k} \right) \cdot S_{BFGS}^k \cdot \left( I - \frac{y^k \cdot (d^k)^T}{(y^k)^T \cdot d^k} \right) + \frac{d^k \cdot (d^k)^T}{(y^k)^T \cdot d^k} \quad (130)$$

(I = matrice identité)

Posant :  $\beta_i = -[(y^i)^T \cdot d^i]^{-1}$  (scalaire) (131)

$$w_i = S^i \cdot y^i \quad (132)$$

$$\gamma_i = \beta_i^2 (y^i)^T \cdot w_i - \beta_i \quad (scalaire) \quad (133)$$

$$z_i = d^i \quad (134)$$

On peut encore écrire (130) sous la forme, analogue à (115), (121) et (128) :

$$S_{BFGS}^{k+1} = S_{BFGS}^0 + \sum_{i=1}^k \beta_i \cdot (w_i \cdot z_i^T + z_i \cdot w_i^T) + \sum_{i=1}^k \gamma_i z_i \cdot z_i^T \quad (135)$$

On peut faire pour BFGS les mêmes remarques que pour DFP.

### 3.4.6. Initialisation

Nous venons d'établir les formules 115, 121, 128 et 135 relatives chacune à une remise à jour de QUASI-NEWTON d'un type particulier. Chaque formule nécessite la connaissance de  $S^0$ . On ne peut appliquer les formules qu'à partir de la deuxième itération au moins. La valeur



initiale  $S^0$  peut s'obtenir de diverses manières dont l'opportunité dépend du type de problème à étudier :

- 1.- initialisation par la matrice d'itération inversée (NEWTON-RAPHSON)
- 2.- initialisation par la matrice d'itération linéaire, qui pourrait être établie une fois pour toutes
- 3.- initialisation par la matrice unité
- 4.- initialisation par la matrice de masse, en effet, le terme  $\frac{1}{\beta h^2} M$  peut être prépondérant selon la valeur du pas etc...

Nous étudierons quelques variantes lors des tests numériques.

### 3.4.7. Introduction de la technique QUASI-NEWTON dans le logiciel

Plutôt que d'effectuer les opérations de corrections directement sur la matrice  $S$ , ce qui entraîne de nombreuses manipulations matricielles compte tenu de l'organisation du logiciel de base [133] on peut organiser le calcul pour limiter les opérations à des vecteurs [131, 134, 135].

En effet, ce sont toujours des produits  $S.r$  qui interviennent, ce qui permet aisément de transformer le produit par des relations 115, 121, 128 en une somme de vecteurs.

Pour le calcul des coefficients scalaires  $(\beta_i, \gamma_i)$  on les exprimera de préférence en fonction des résidus (vecteur  $r$ ) plutôt que des différences de résidus (vecteur  $y$ ), ce qui donnerait dans le cas de DAVIDON :

$$\beta_i^{-1} = [d_r^i - S_D^0 y^i - (\sum_{j=0}^{i-1} \beta_j z_j z_j^T) \cdot y^i]^T \cdot y^i \quad (136)$$

$$\text{où } y^i = r^{i+1} - r^i \quad \text{et} \quad d^i = -(S_D^0 + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_k z_k z_k^T) \cdot r^i \quad (137)$$

soit en remplaçant (137) dans (136)

$$\beta_i^{-1} = -[S_D^0 \cdot r^{i+1} + (\sum_{j=0}^{i-1} \beta_j z_j z_j^T) \cdot r^{i+1}]^T \cdot y^i \quad (138)$$

$$\text{où } z_i = -[S_D^0 \cdot r^{i+1} + (\sum_{j=0}^{i-1} \beta_j z_j z_j^T) \cdot r^{i+1}] \quad (139)$$

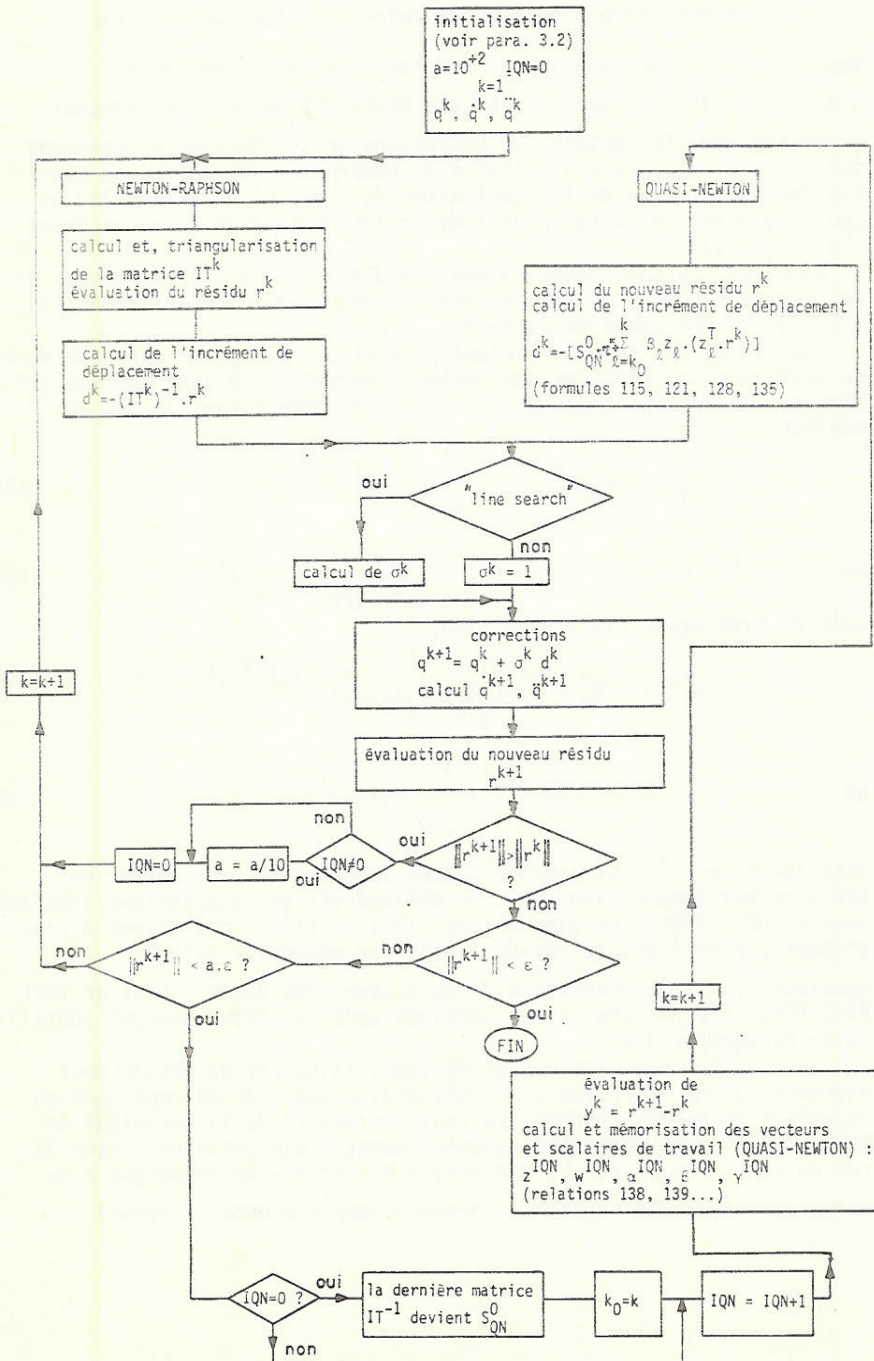
dans laquelle  $r^{i+1}$  est introduit dans la somme pour former un scalaire par composition à  $z_j^T$ . On obtiendrait des expressions similaires pour B, DFP, BFGS. Les expressions (138) et (139) sont aisées à programmer car  $r^{i+1}$  est le résidu "actif" au moment du calcul.

*Remarques* : 1.- la correction  $d^i$  du vecteur déplacement peut en fait être remplacée par une valeur corrigée après un "line search" (détaillé au paragraphe 3.6)

2.- dans les cas difficiles, la valeur du résidu peut augmenter d'une itération à la suivante, auquel cas on repassera en stratégie de NEWTON-RAPHSON. Le seuil de départ de la technique de QUASI-NEWTON peut être fixé volontairement à une certaine valeur du résidu relatif  $\epsilon_R$  (voir la définition du critère de convergence au paragraphe 3.3) ( $10^{-2} \epsilon_R$  dans l'organigramme présenté ci-après).

### 3.4.8. Organigramme de principe

Cet organigramme est présenté avec une initialisation par NEWTON-RAPHSON, toute autre initialisation peut, après triangularisation et inversion, débiter en Quasi-Newton directement. Cet organigramme détaille une partie, simplement mentionnée au paragraphe 3.2 lors de la présentation des schémas d'intégration temporelle où nous n'avions évoqué que la stratégie de NEWTON-RAPHSON.





### 3.5. REMISE A JOUR DE LA MATRICE D'ITERATION-TESTS NUMERIQUES

Trois cas tests vont être étudiés, les deux derniers sont identiques à ceux du paragraphe 3.3 (intégration temporelle), le premier est un cas très simple (un seul degré de liberté) que nous pouvons étudier analytiquement sur base du modèle mathématique mis au point. L'annexe 3 donne les détails de la mise en équation. Grâce à cet exemple, nous pourrions suivre la progression QUASI-NEWTON d'une manière graphique.

#### 3.5.1. Premier cas test - Un degré de liberté

La figure 17 montre la configuration étudiée. Un câble extensible (un élastique, par exemple), est suspendu à une extrémité (noeud 1). La longueur non déformée du câble est de 0,5 m et sa rigidité extensionnelle vaut  $EA=300 \text{ N}$ . Sa masse est nulle. On part des conditions initiales  $X_2=0$ ,  $Z_2=-0,5 \text{ m}$  (coordonnées du noeud 2), et un effort nul de traction dans le câble, la position initiale correspond alors à la position non déformée du câble. On recherche la nouvelle position d'équilibre statique lorsqu'on applique en 2 une force extérieure de 1000 N, dans la direction indiquée à la figure 17. Si on discrétise le câble par un seul élément du premier degré, on peut établir les équations (annexe 3) :

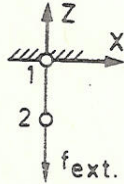


Figure 17

Premier cas test - Un degré de liberté - câble élastique suspendu modélisé par un élément fini du premier degré.

Soit  $w_2$  le déplacement selon Z du noeud 2

$$K_T \cdot \Delta q = f_{\text{ext}} - f_{\text{int}} \quad (140)$$

$$\text{où } K_T = \frac{EA}{L_0} (Z_2 + w_2)^2 + \frac{N}{L_0} \quad (\text{N/m}) \quad (141)$$

$$f_{\text{ext}} = -1000 \quad (\text{N}) \quad (142)$$

$$f_{\text{int}} = \frac{N}{L_0} \cdot (Z_2 + w_2) \quad (\text{N}) \quad (143)$$

$$\text{avec } N = \frac{EA}{L_0} w_2 \cdot (Z_2 + \frac{1}{2} w_2) \quad (\text{N}) \quad (144)$$

L'équilibre statique s'obtient à l'égalité des forces externes et internes, visualisées à la figure 18

On peut effectivement, d'après les données du problème, écrire

$$f_{\text{int}} = 600(w_2 - 3w_2^2 + 2w_2^3) \quad (\text{N}) \quad (145)$$

Par calcul analytique, l'équilibre avec les forces externes a lieu pour  $w_2 = -0,5294 \text{ m}$ . Soit une elongation de plus de 100% de la valeur initiale

Dans cette configuration en équilibre on peut calculer  $N=485,7 \text{ N}$ . On notera que la solution linéaire du même problème conduirait à  $w_2 = -1,66 \text{ m}$  soit trois fois plus que la valeur calculée ci-dessus.

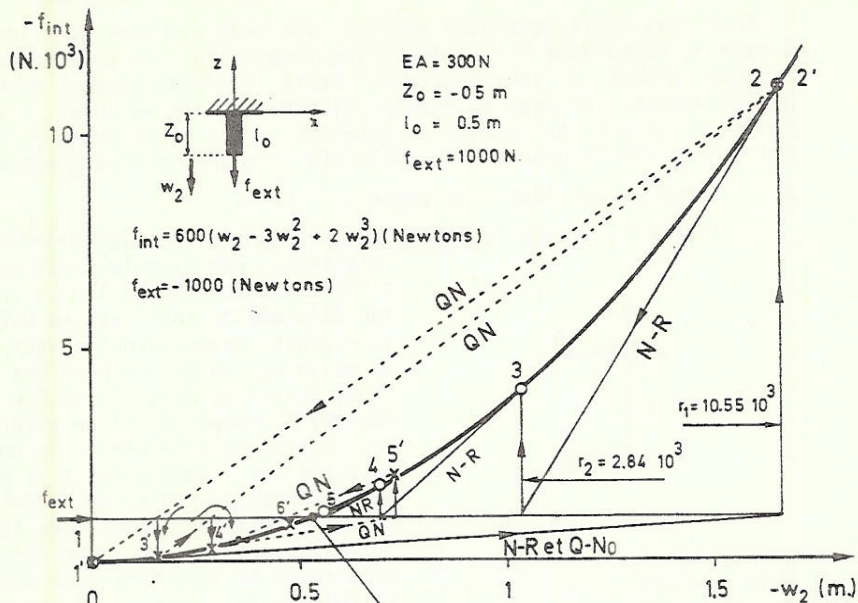


Figure 18

Solution d'équilibre  $-w_2 = 0.52935$  m

Processus de convergence de NEWTON-RAPHSON (N-R) et de QUASI-NEWTON (QN). Les forces internes ( $f_{int}$ ) sont représentées par la courbe en trait fort,  $w_2$  est le déplacement selon  $Z$  du point bas du câble. L'ordonnée des forces externes est repérée sur la figure.

1, 2, ..., 5 points successifs obtenus par NEWTON-RAPHSON (symbolisé O).  
 1', 2', ..., 6' points successifs obtenus par QUASI-NEWTON (symbolisé X).  
 La première recherche  $Q-N_0$  est en fait l'initialisation par N-R.

3.5.1.1. Recherche de l'équilibre statique par NEWTON-RAPHSON.- Partant de valeurs initiales  $w_2=0$  et  $N=0$ , et effectuant la mise à jour de la matrice de raideur tangente à chaque itération on progresse d'une manière tangente comme indiqué sur la figure 18.

On obtient en 7 itérations (8 s. CPU)  $w_2=0,52935$  m.

On remarquera :

1.- Le choix des valeurs initiales nulles conduit à considérer une matrice tangente dès la première itération, ce qui est défavorable à la convergence vu la faible pente initiale. En choisissant  $N \neq 0$ , la matrice initiale n'aurait pas été tangente.

2.- La méthode qui consisterait à ne pas remettre à jour la matrice de raideur tangente conserverait la direction initiale. Dans ce cas, dès la deuxième itération, ce calcul conduirait à un changement de signe de  $w_2$ , qui nous éloignerait, peut être définitivement, du domaine de convergence (on s'en rend compte à l'inspection de la figure 18).

3.5.1.2. Recherche de l'équilibre statique par QUASI-NEWTON.- Le calcul se base sur une initialisation par NEWTON-RAPHSON (première itération uniquement). Dans le cas étudié, le type de QUASI-NEWTON (Davidon, Broyden, DFP, BFGS) n'a aucune influence, vu que le problème n'a qu'un seul degré de liberté. Toutes les matrices sécantes sont identiques. La trajectoire vers la solution d'équilibre peut se suivre à la figure 18.

On obtient en 9 itérations (6,4 s. CPU)  $w_2=0,52935$  m. On remarquera seulement qu'une autre stratégie qui ne débiterait QUASI-NEWTON qu'après 2 itérations NEWTON-RAPHSON, conduirait à un comportement totalement



différent que l'on peut très bien s'imaginer sur base de progressions semblables à celles représentées.

3.5.1.3. Effet d'un "line search".- L'effet du "line search" peut très bien se visualiser par la pensée sur la figure 18 : (théorie exposée au paragraphe 3.7)

1.- Si on fait une interpolation linéaire après avoir obtenu les deux premiers points (1 et 2 sur la figure 18), l'effet du premier "line search" est identique à QUASI-NEWTON et l'on se retrouve en 3'. L'effet d'une deuxième recherche s'obtient en joignant 1 à 3' et ainsi de suite.

2.- Si on fait une interpolation quadratique, il faut d'abord effectuer un calcul de résidu à mi-pas puis effectuer une interpolation parabolique, qui dans le cas présent, donnerait une valeur très proche de la solution finale.

### 3.5.2. Deuxième cas test - 11 degrés de liberté

La figure 3 (paragraphe 3.3.2.) indique la structure étudiée. Cette fois la stratégie de QUASI-NEWTON est appliquée dans une recherche d'équilibre dynamique et donc à la matrice d'itération. Les caractéristiques de l'étude sont reprises au tableau 5 pour différentes stratégies NEWTON-RAPHSON et QUASI-NEWTON.

| NEWTON - RAPHSON |            |        |        |         |        |        |        |       |       |        |       |       |
|------------------|------------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|
| $\varepsilon_k$  | IS = 2     |        |        | IS = 1  |        |        | IS = 0 |       |       | IS = 0 |       |       |
|                  | tps.CPU    | IT MAX | IT MOY | tps.CPU | IT MAX | IT MOY | IT1=1  | IT2=2 | IT3=3 | IT1=1  | IT2=2 | IT3=3 |
| $10^{-4}$        | divergence |        |        | 175,8   | 15*    | 6,6    | 178,8  | 4     | 3,68  | 257,8  | 4     | 3,68  |
| $10^{-1}$        | divergence |        |        | 176,8   | 15*    | 6,6    | 176,6  | 4     | 3,68  | 181,1  | 4     | 3,58  |

\*le nombre maximum est atteint à la convergence. Ce comportement indique une perte de convergence à plus ou moins long terme.

| QUASI-NEWTON  |         |        |        |         |        |        |         |        |        |          |        |        |
|---|---------|--------|--------|---------|--------|--------|---------|--------|--------|----------|--------|--------|
| $\varepsilon_R = \varepsilon_k = 10^{-4}$ , IS=0, IT1=1, IT2=2, IT3=3 |         |        |        |         |        |        |         |        |        |          |        |        |
| TYPES<br>seuil<br>de départ<br>de Q-N sur<br>$\varepsilon_R$          | DAVIDON |        |        | BROYDEN |        |        | D.F.P.  |        |        | B.F.G.S. |        |        |
|   | tps.CPU | IT MAX | IT MOY | tps.CPU | IT MAX | IT MOY | tps.CPU | IT MAX | IT MOY | tps.CPU  | IT MAX | IT MOY |
| $10^{-1}$   | 177,5   | 6      | 4      | 191     | 5      | 4      | 173     | 5      | 3,85   | 171,2    | 5      | 3,8    |
| $10^{-1}$ ( $=10^3 \varepsilon_R$ )                                   | 183,3   | 6      | 4      | 193,4   | 5      | 4      | 173,9   | 5      | 3,85   | 173,9    | 5      | 3,8    |
| $10^{-2}$ ( $=10^2 \varepsilon_R$ )                                   | 180,5   | 4      | 2,82   | 185,2   | 3      | 2,8    | 178,9   | 3      | 2,8    | 175,6    | 4      | 2,8    |

- TABLEAU 5

Remise à jour de la matrice d'itération. Deuxième cas test - 11 degrés de liberté. Stratégie commune : initialisation  $q_{n+1} = 0$ ,  $h = 2 \cdot 10^{-3}$  s., 60 pas, nombre maximum

d'itération par pas : 15 (=IT MAX), Schéma du trapèze. Précision sur le résidu relatif :  $\varepsilon_R = 10^{-4}$ . Mise à jour tous les IS pas. Si IS=0, on remet à jour dans le pas aux itérations IT1, IT2, IT2+IT3, IT2+2.IT3, etc...

IT MOY représente le nombre moyen d'itérations par pas et  $\varepsilon_R$  la précision sur le résidu relatif à partir de laquelle on ne remet plus la matrice d'itération à jour même si la stratégie le demande.

3.5.2.1. Recherche de type NEWTON-RAPHSON.- Le temps de calcul nécessaire pour une remise à jour est d'environ 1,14 s dans le cas étudié. On remarquera :

1.- La stratégie IS=2, qui remet la raideur à jour uniquement tous les deux pas de temps conduit à une divergence.

2.- La stratégie IS=1 conduit à atteindre le nombre maximum d'itération (15) après 25 pas ( $t=0,05$  s.). Si l'on prolonge volontairement

l'étude (le résidu relatif était tombé à  $10^{-2}$  au lieu des  $10^{-4}$  requis) les écarts deviennent plus sensibles par rapport à la solution de référence et le nombre moyen d'itérations par pas augmente au fur et à mesure que l'on progresse dans le temps. Il faut rejeter cette stratégie dans le cas étudié car elle provoquera la divergence à plus ou moins brève échéance.

3.- La stratégie IS=0 avec remise à jour aux itérations 1,2,5, etc... (en pratique, on n'atteignait jamais 5 itérations) est optimale vu ses caractéristiques : temps de calcul, IT MAX et IT MOY

4.- La stratégie IS=0 avec remise à jour à chaque itération présente un temps de calcul nettement plus important que la précédente, surtout si l'on maintient la remise à jour quelle que soit la valeur du résidu.

En résumé, il existe une stratégie optimale qui dépendra du problème étudié. Dans la plupart des cas elle n'est pas évidente (il faut remettre à jour dans le pas de temps mais pas "trop souvent").

3.5.2.2. Recherche de type QUASI-NEWTON.- Le temps de calcul nécessaire pour une remise à jour est d'environ :

0,53 s. pour DAVIDON

0,61 s. pour BROYDEN

0,54 s. pour DFP

0,55 s. pour BFGS

Nous avons testé une initialisation par la matrice  $\frac{1}{\beta h^2} M$  ce qui a

conduit à une divergence après 5 pas de temps. L'initialisation par la matrice de raideur tangente linéaire conduisait quant à elle à une divergence après 20 pas de temps. Seuls les résultats obtenus avec une initialisation par NEWTON-RAPHSON sont repris au tableau 5.

La remise à jour est imposée à chaque itération mais nous avons testé différents seuils d'amorçage de la correction QUASI-NEWTON, d'après la valeur du résidu relatif ( $\varepsilon_R$ ).

On remarquera :

1.- Broyden est systématiquement plus lent que les autres types. C'était attendu puisque cette méthode nécessite une multiplication matricielle supplémentaire à chaque remise à jour.

2.- Les trois autres types donnent des résultats dans un temps de calcul très voisin, avec cependant une légère préférence pour les corrections de rang 2.

3.- Le démarrage QUASI-NEWTON dès la deuxième itération (première ligne du tableau) semble être optimal dans le cas étudié.

3.5.2.3. Comparaison des deux types de remise à jour.- Il n'y a pas de différence significative entre la stratégie optimale NEWTON-RAPHSON et les stratégies QUASI-NEWTON. Ce fait est lié d'une part à l'initialisation forcée par NEWTON-RAPHSON et d'autre part à la non-linéarité particulière du problème étudié. En effet, la remise à jour NEWTON-RAPHSON, aux deux seules premières itérations, suffit à assurer une convergence rapide (IT MAX=4) à chaque pas.

Cependant, il faut remarquer :

1.- La stratégie optimale de NEWTON-RAPHSON dépendra du problème étudié

2.- La stratégie optimale de QUASI-NEWTON peut être systématiquement prise avec remise à jour à chaque itération

3.- L'écart entre le temps de calcul selon diverses stratégies NEWTON-RAPHSON peut dépasser 50% alors que le même écart est de l'ordre de 5% selon QUASI-NEWTON, dans le cas étudié.

4.- L'amélioration sur le temps de calcul entre NEWTON-RAPHSON et QUASI-NEWTON peut atteindre 50% si l'on compare une remise à jour à chaque itération.



3.5.2.4. Effet d'un "line search".- Le tableau 6 nous montre l'effet d'une telle recherche pour deux cas particuliers :

|                 | DAVIDON | DAVIDON+LS<br>(1 <sup>er</sup> degré) | BFGS | BFGS+LS<br>(2 <sup>ème</sup> degré) |
|-----------------|---------|---------------------------------------|------|-------------------------------------|
| temps de calcul | 209     | 224                                   | 204  | 271                                 |

TABLEAU 6. Deuxième cas test-11 degrés de liberté.  
Effet d'un "line search"

Stratégie identique au tableau 5 sauf l'initialisation :  $q_{n+1}=q_n$ .  
Cette recherche n'apporte donc aucune amélioration sur le plan du calcul.

### 3.5.3. Troisième cas test -237 degrés de liberté

Nous étudierons le même cas que celui étudié au paragraphe 3.3.3. Il s'agit d'une configuration poste 150 kV.

Les remises à jour de Davidon, DFP et BFGS seront envisagées. Broyden ne convient pas au modèle étudié (la matrice d'itération est symétrique) et demande de toute façon deux multiplications matricielles, au lieu d'une pour les autres corrections.

La comparaison des différentes corrections de QUASI-NEWTON s'est effectuée sur le calcul portant sur une période d'observation de 2,5 s. avec un pas de 0,01 s. Le schéma d'intégration temporelle utilisé était H.H.T. ( $\alpha=-0,3$ ) (DECSYSTEM 2050).

|                 | NEWTON-RAPHSON | QUASI NEWTON (1) |        |          |
|-----------------|----------------|------------------|--------|----------|
|                 |                | DAVIDON          | D.F.P. | B.F.G.S. |
| Temps de calcul | 3h32'          | 3h08'            | 3h35'  | 3h10'    |
| IT MAX          | 12             | 13               | 20 (2) | 13       |
| IT MOY          | 3,28           | 5                | 6      | 5        |

(1) seuil de démarrage de QUASI-NEWTON à  $100 \epsilon_R = 10^{-2}$

(2) le résidu relatif est bon à la dernière itération (pas 222)

TABLEAU 7. Troisième cas test - 237 degrés de liberté  
Stratégie : initialisation  $q_{n+1}=0$ ; schéma H.H.T. ( $\alpha=-0,3$ ), 250 pas de 0,01 s.  $\epsilon_R=\epsilon_k=10^{-4}$ . Remise à jour de la matrice d'itération à chaque itération pour toutes les stratégies (y compris NEWTON-RAPHSON) - IT MAX = 20 (nbre. maximum d'itération par pas)

Le temps de calcul d'une remise à jour avec inversion de la matrice d'itération (NEWTON-RAPHSON) était d'environ 15 secondes alors qu'une correction de QUASI-NEWTON ne durait que 4,2 secondes. Il faut y ajouter environ 0,05 s. (DAVIDON) et 0,09 s. (DFP et BFGS) à chaque itération supplémentaire suite aux manipulations sur fichiers de plus en plus conséquentes. La faible différence (10%) entre les différents temps de calcul est liée à l'initialisation de QUASI-NEWTON par NEWTON-RAPHSON jusqu'au seuil indiqué au tableau. La forte non-linéarité du problème étudié exigeait ce type de stratégie qui semble être cette fois optimale pour NEWTON-RAPHSON également. On observe donc la même constatation que lors de l'étude du deuxième cas test, à savoir, qu'à même stratégie



optimale, le gain de la technique QUASI-NEWTON est faible.

Nous citerons encore un dernier cas, étudié au chapitre 4 et auquel on se reportera pour la présentation de la structure et des données (204 degrés de liberté) (paragraphe 4.3.3.). Ce calcul a été effectué par le schéma du trapèze, avec un pas de 0,005 s. sur une période d'observation de 2,5 s. Pour une stratégie avec remise à jour à chaque itération la technique de NEWTON-RAPHSON conduisait à 4h11' de temps de calcul, alors que la technique de QUASI-NEWTON (D.F.P.) permettait d'abaisser ce temps à 3h10' soit un gain d'environ 25%.

La stratégie utilisée pour NEWTON-RAPHSON (remise à jour à chaque itération) n'était probablement pas optimale ce qui explique le gain observé et qui, à nouveau, rappelle les conclusions du deuxième cas test.

Les conclusions du paragraphe 3.5 sont résumées au chapitre 8.

### 3.6. UN PROBLEME PARTICULIER : LE CALCUL DE LA POSITION DE REFERENCE

#### 3.6.1. Position du problème

Nous avons opté au chapitre 2 pour un modèle mathématique basé sur un formalisme lagrangien total, c'est-à-dire se référant à la position non déformée (état de contrainte nul) de la structure. Par exemple, à cet état doit correspondre la longueur du câble à l'état lâche. Cet état non déformé est appelé "état initial", il doit correspondre aux données de la discrétisation (coordonnées des noeuds, caractéristiques des éléments telles les masses, sections, etc...). On conçoit qu'une étape intermédiaire doit exister entre d'une part "l'état initial" et d'autre part la configuration de la structure telle qu'elle se présente en réalité, en équilibre sous les forces de gravité et éventuellement de vent. Ces dernières conduisent à une mise en contrainte des structures d'ancrages et des câbles qui définissent la "position de référence" appelée encore position déformée ou position d'équilibre statique. Cette "position de référence" s'obtient sur base des données de la discrétisation et des forces statiques appliquées, en recherchant l'équilibre statique par itérations successives selon la théorie développée au chapitre 2 (paragraphe 2.2.3).

En pratique, cette recherche est souvent l'objet d'une convergence difficile vu l'écart, quelquefois très important, entre la configuration des données (qui doit correspondre à des éléments non déformés) et la position d'équilibre recherchée.

La méthode classique [140,141,142] consiste à itérer avec une matrice de raideur tangente (NEWTON-RAPHSON) remise à jour d'une manière adéquate. On peut combiner également les techniques de QUASI-NEWTON et de "line search".

Une méthode plus originale consiste à appliquer les forces statiques en échelon d'Heaviside et à approcher la position de référence d'une manière dynamique en y introduisant un amortissement important que nous pouvons obtenir dans le modèle étudié par le choix judicieux de certains paramètres des schémas d'intégration. L'avantage a priori de cette méthode réside dans le fait qu'à chaque pas de temps l'équilibre dynamique est assuré et l'ensemble de la structure convergera d'une manière monotone vers l'équilibre tandis que lors d'itérations statiques, on ne passe pas par des états d'équilibre successifs et l'ensemble des degrés de liberté converge, ou tente de le faire, d'une manière relativement erratique dans le cas général.

On peut encore imaginer d'autres méthodes telle l'incrémentation progressive de la charge statique, etc...



Nous allons étudier le comportement numérique de trois cas tests selon la technique d'itérations statiques et celle de recherche dynamique amortie (pour deux des cas).

### 3.6.2. Premier cas test

Ce cas à un ou deux degrés de liberté est mis en équation à l'annexe 3 selon la théorie du modèle mathématique étudié au chapitre 2. Nous avons déjà étudié au paragraphe 3.5 le comportement aux itérations statiques pour une configuration initiale verticale. Elle était obtenue en 6 itérations de NEWTON-RAPHSON et 8,3 secondes de calcul.

Dans le cadre d'une recherche dynamique amortie nous étudierons la réponse selon le schéma à 3 points et le schéma H.H.T. avec un paramètre  $\alpha$  inférieur à -1 de manière à assurer un amortissement artificiel élevé. De plus le pas de temps est choisi le plus élevé possible, dans le même but.

La figure 19 rappelle la structure étudiée et ses caractéristiques, le tableau 8 spécifie la réponse dynamique amortie.

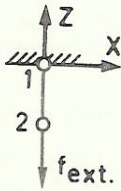


Figure 19

Recherche de la position de référence. Premier cas test.

Données :  $E=10^5 \text{ N/m}^2$ ;  $A=3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ;  $\rho=7000 \text{ Kg/m}^3$ .

$L_0=0,5 \text{ m}$ ;  $f_{ext}=1000 \text{ N}$ ;

pulsation linéaire :  $\omega_L = \frac{2Z_2}{L_0} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 15 \text{ rad/s}$ ;

pulsation non-linéaire :  $\omega_{NL}=34 \text{ rad/s}$ .

L'équation du mouvement, selon le modèle appliqué, conduit à :

$$\frac{\rho A L_0}{4} \ddot{w}_2 + \frac{EA}{L_0} \left( Z_2^2 \cdot w_2 + \frac{3}{2} Z_2 \cdot w_2^2 + \frac{1}{2} w_2^3 \right) = -1000 \cdot 1(t) \quad (146)$$

où  $EA = 300 \text{ N}$ ;  $Z_2 = 0,5 \text{ m}$ ;  $L_0 = 0,5 \text{ m}$ ;  $\frac{\rho A L_0}{4} = 2,625 \text{ Kg}$

| Valeur du paramètre du schéma d'intégration | SCHEMA H.H.T. (fig.19) |            |                |            | SCHEMA à 3 points (fig.20) (1) |            |                |            |                |            |            |
|---|------------------------|------------|----------------|------------|--------------------------------|------------|----------------|------------|----------------|------------|------------|
|   | $\alpha = -1.$         |            | $\alpha = -2.$ |            | $\alpha = -1.$                 |            | $\alpha = -1.$ |            | $\alpha = -1.$ |            |            |
| Pas de temps (s)                            | 0,04                   | 0,08       | 0,04           | 0,08       | 0,04                           | 0,08       | 0,10           | 0,04       | 0,08           | 0,10       |            |
| $\epsilon_{st}$                             | $10^{-2}$              | $10^{-1}$  | $10^{-2}$      | $10^{-1}$  | $10^{-2}$                      | $10^{-1}$  | $10^{-1}$      | $10^{-2}$  | $10^{-1}$      | $10^{-2}$  | $10^{-1}$  |
| Nbr. de pas avant convergence               | 8                      | 4          | 4              | 1          | 8                              | 3          | 7              | 4          | 4              | 2          | 2          |
| IT MAX (2)                                  | 4 $\rho_1$             | 4 $\rho_1$ | 9 $\rho_1$     | 9 $\rho_1$ | 6 $\rho_1$                     | 6 $\rho_1$ | 3 $\rho_3$     | 3 $\rho_3$ | 4 $\rho_2$     | 4 $\rho_2$ | 4 $\rho_2$ |
| IT MOY                                      | 2,625                  | 3,25       | 4              | 9          | 3,125                          | 5          | 2,29           | 2,5        | 2,5            | 3          | 3,5        |
| Temps de calcul                             | 26,98                  | 17,1       | 21,4           | 12,3       | 32,6                           | 19,8       | 21,6           | 13,8       | 13,8           | 8,4        | 9,4        |

(1) initialisation par le schéma du trapèze

(2) " $\rho_i$ " indique le numéro du pas où se produit IT MAX

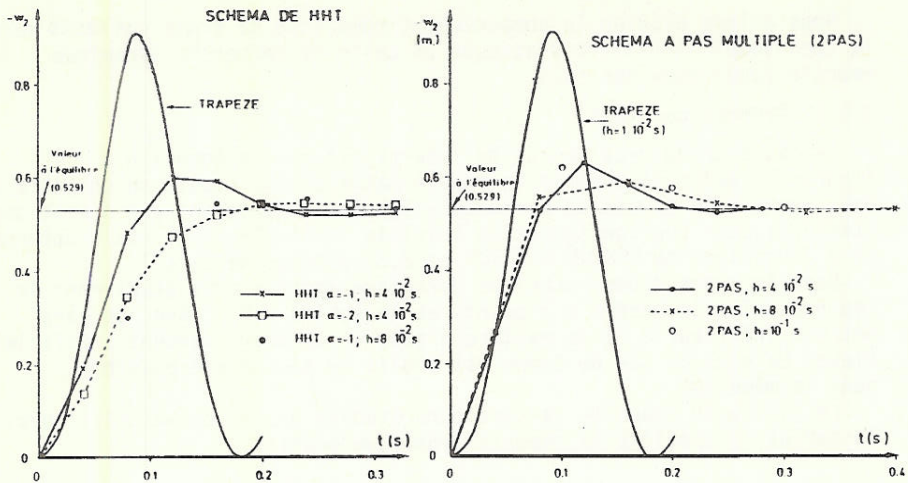
TABEAU 8. Position de Référence - Premier cas test - 1 degré de liberté

Stratégie :  $\epsilon_R = \epsilon_k = 10^{-4}$ . Remise à jour de NEWTON-RAPHSON à chaque itération.

IT MAX = nombre maximum d'itération atteinte lors d'un pas

IT MOY = nombre moyen d'itération par pas

$\epsilon_{st} = \frac{\|f_{int} + f_{ext}\|}{\|f_{ext}\|}$  représente le résidu "statique", on arrête la recherche pour la valeur de  $\epsilon_{st}$  indiquée.



Figures 20 et 21

Recherche de la position de référence. Premier cas test. Méthode dynamique amortie. Influence du pas de temps et des schémas d'intégration. fig. 20 : Schéma HHT fig. 21 : schéma à 2 pas

Les figures 20 et 21 montrent l'évolution de  $w_2$ , en fonction du temps, vers sa position d'équilibre statique ( $w_2 = -0,529$  à l'équilibre). Afin de ne pas prolonger inutilement le calcul dynamique, on calcule à chaque itération la grandeur  $\epsilon_{st}$  (définie au tableau 8) caractéristique de l'équilibre statique (elle ne fait pas intervenir les forces d'inertie). En deçà d'un seuil choisi la position est affinée d'une manière purement statique. On remarquera :

- 1.- L'augmentation du pas semble favoriser la recherche mais IT MAX augmente également, même dans ce cas fort simple. Il existe un optimum.
- 2.- Le schéma HHT amorti évidemment plus rapidement quand  $\alpha$  augmente en valeur absolue, mais IT MAX augmente à pas constant.
- 3.- Le schéma à 3 points semble être plus stable que le précédent car IT MAX n'augmente pas dans les mêmes proportions quand on augmente le pas.
- 4.- Le temps de calcul est souvent pire en recherche dynamique qu'en recherche statique.

Pour montrer l'influence des conditions initiales, nous avons étudié le même cas mais partant d'une position initiale horizontale du câble ( $Z_2 = 0, X_2 = 0,5m$ ).

Cette fois le problème comporte deux degrés de liberté.

Le calcul statique nécessite une valeur initiale de la tension dans le câble sinon la matrice de raideur est singulière (voir annexe 3). Selon la valeur initiale de cette tension on peut obtenir la solution entre 6 et 40 itérations de NEWTON-RAPHSON (statique) auquel cas le temps de calcul peut atteindre 40 secondes (IBM 370/158). Le calcul dynamique s'affranchit de cette difficulté car la matrice d'itération comporte un terme massique.

Le tableau 9 présente les résultats d'une recherche dynamique amortie.

On remarquera cette fois un gain de temps supérieur à 50% par rapport à l'étude statique à 40 itérations.

Le schéma à 3 points semble à nouveau préférable au HHT ( $\alpha = -1$ )



| Pas de temps (s)                | SCHEMA HHT (n=1) |            |            |            | SCHEMA à 3 points |            |            |            |            |            |
|---------------------------------|------------------|------------|------------|------------|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                                 | 0,08             |            | 0,10       |            | 0,08              |            | 0,10       |            | 0,12       |            |
| $\epsilon_{st}$                 | $10^{-2}$        | $10^{-1}$  | $10^{-2}$  | $10^{-1}$  | $10^{-2}$         | $10^{-1}$  | $10^{-2}$  | $10^{-1}$  | $10^{-2}$  | $10^{-1}$  |
| Nombre de pas avant convergence | 5                | 3          | 4          | 2          | 5                 | 3          | 4          | 2          | 3          | 2          |
| IT MAX                          | 7 $\rho_1$       | 7 $\rho_1$ | 9 $\rho_1$ | 9 $\rho_1$ | 4 $\rho_2$        | 4 $\rho_2$ | 4 $\rho_2$ | 4 $\rho_2$ | 5 $\rho_2$ | 5 $\rho_2$ |
| IT MOY                          | 3,8              | 4,7        | 4,7        | 6,5        | 2,8               | 3,3        | 3          | 3,5        | 4          | 4,5        |
| Temps de calcul (s)             | 24,9             | 18,5       | 24,0       | 16,7       | 19,5              | 14,0       | 16,1       | 9,8        | 15,6       | 11,9       |

TABLEAU 9. Position de Référence - Premier cas test - 2 degrés de liberté  
Stratégie identique au tableau 8

### 3.6.3. Deuxième cas test - 19 degrés de liberté

Ce cas est extrait de la littérature [142] où il est réputé difficile, vu les fortes non-linéarités.

La figure 22 donne un schéma du problème.

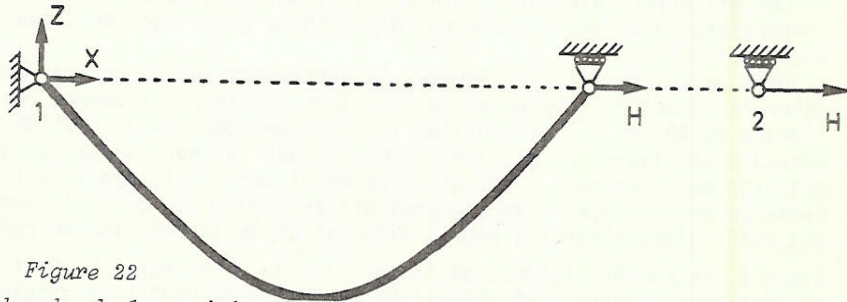


Figure 22

Recherche de la position de référence. Deuxième cas test. Configuration étudiée.

longueur du câble non déformé (en pointillé) : 60,96 m (200 ft)  
 poids par unité de longueur : 1,46 N/m (0,1 lb/ft)  
 rigidité extensionnelle :  $EA = 4,45 \cdot 10^5$  N ( $10^5$  lb)  
 charge horizontale :  $H = 25,69$  N (5,77 lb)

La position représentée en trait pointillé est la position initiale, celle en trait plein est la position d'équilibre.

Partant d'une position initiale non déformée (noeud 2 à l'abscisse 60,96 m et éléments à la file) on recherche l'équilibre statique sous les forces de gravité et la force H agissant à l'appui sur rouleaux, placé à l'extrémité 2 du câble. La solution d'équilibre correspond à une flèche de 17,68 m (58 ft) et une portée de 46,39 m (152,2 ft) soit une position très éloignée des valeurs initiales.

Après avoir discrétisé le câble en 10 éléments du premier degré, le logiciel mis au point sur base du modèle développé au chapitre 2 trouve la solution en 6 itérations de NEWTON-RAPHSON, par une recherche statique. Nous n'avons pas testé l'approche dynamique qui ne pourrait certes améliorer la rapidité de la réponse obtenue par voie statique.

Cet exemple nous montre bien la performance de la technique de NEWTON-RAPHSON statique dans le modèle mis au point. L'approche dynamique

ne doit donc être utilisée que pour les cas difficiles (évolution erratique de la norme du résidu qui se prolongerait au delà de vingt itérations, par exemple).

#### 3.6.4. Troisième cas test - 249 degrés de liberté

Nous étudierons un cas qui sera présenté dans le cadre des vérifications expérimentales au chapitre 4 : le cas Laborelec avec hauban.

Ce cas présente une difficulté au niveau du calcul de la position de référence par suite de la présence du hauban.

En effet, comme nous sommes contraints de générer les données relatives à une longueur non déformée des câbles, le jeu de barres ainsi généré présente une flèche à mi-portée nettement inférieure à celle de la position de référence. Il est donc impossible de générer un câble correspondant au hauban et qui s'accrocherait au jeu de barres : la distance entre les points d'ancrage du hauban au jeu de barres et au sol est supérieure à la longueur du hauban. Ce problème se rencontre fréquemment en ligne aérienne où la longueur du câble non déformée est inférieure à la portée. Une approche originale qui permet d'éviter cette difficulté est de générer les données avec une longueur non déformée (celle du hauban dans le cas présenté) supérieure et compatible avec le reste des données, et d'ensuite définir une température initiale qui correspondra à la rétraction nécessaire du câble pour respecter les données réelles. Il suffit de connaître le coefficient d'expansion thermique linéaire pour évaluer cette température. La position de référence tient alors compte de cet effet.

Les différents éléments finis de la structure n'auront plus la même température initiale, il convient d'y prendre garde lors de l'analyse transitoire.

Dans le cas particulier étudié, la différence de longueur du hauban entre la structure générée et la structure réelle était énorme (de l'ordre de 40 cm) ce qui implique la prise en compte d'un saut de température de plusieurs milliers de degrés dans le cadre du calcul de la position de référence. C'est principalement cet effet, ajouté à la présence de portiques d'ancrage qui étaient flexibles, qui ont conduit aux difficultés observées pour l'élaboration de la position de référence.

3.6.4.1. Recherche statique de la position de référence.- La position de référence requerrait 90 itérations de NEWTON-RAPHSON pour atteindre une précision  $10^{-6}$  sur le résidu relatif. Les 81 premières sont nécessaires pour amener le résidu en deçà de  $10^{-1}$ . Les 30 premières donnent lieu à des pivots négatifs, c'est-à-dire que la matrice de raideur tangente n'est plus définie positive, suite à l'apparition de tension négative dans certains éléments.

La norme du résidu relatif semble osciller d'une manière erratique comme le montre la figure 23 (échelle semi-logarithmique). Chaque itération durait 10 secondes, ce qui donne un temps global de 15'30" (IBM 370/158).

La technique du "line search", développée ultérieurement a été également appliquée. Dans le cas étudié, une recherche ne durait qu'environ 1 seconde. La réduction du résidu projeté par un facteur 10 s'obtenait en deux recherches avec interpolation du second degré mais, comme le montre la figure 23 et le tableau 10, la technique n'apporte aucune amélioration sur le temps global, elle rend juste l'évolution plus monotone et démarre avec une valeur améliorée.



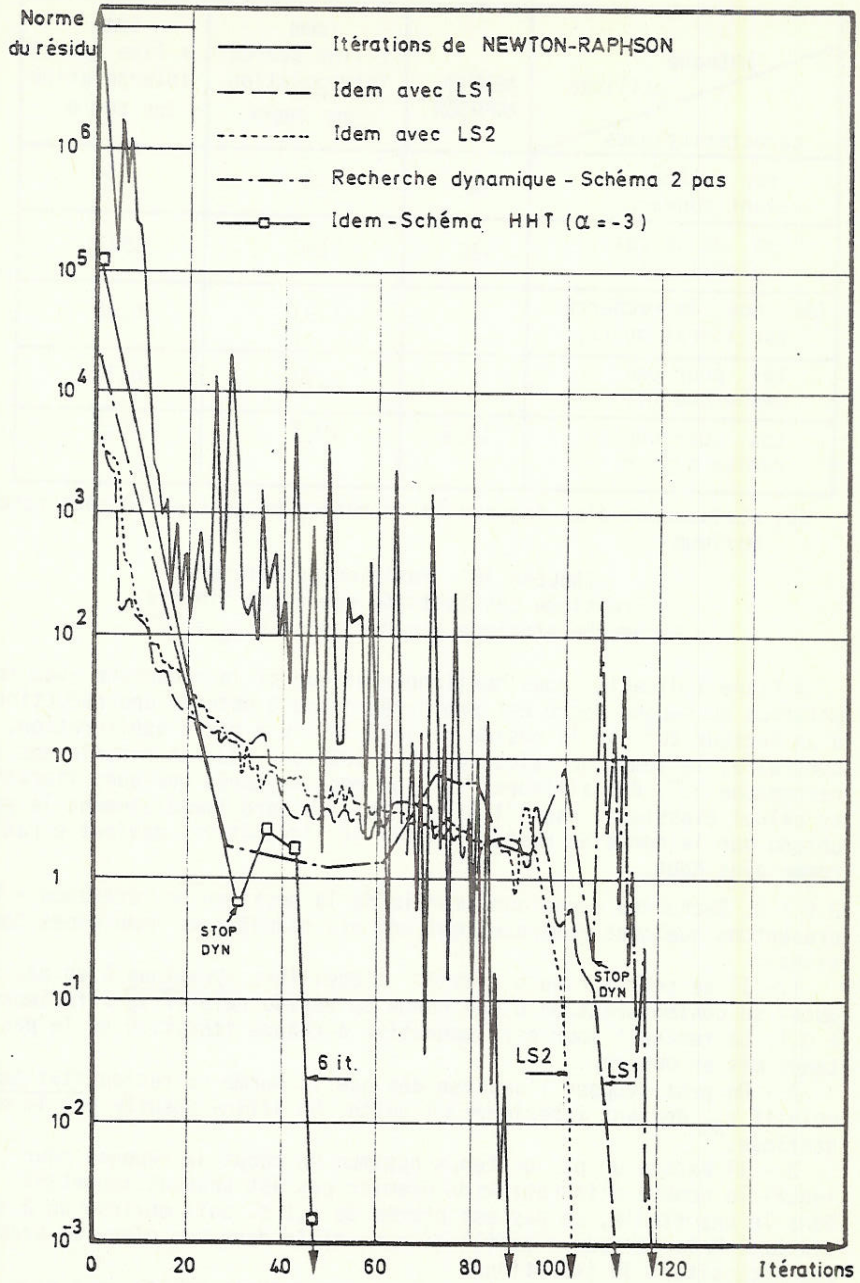


Figure 23

Recherche de la position de référence. Troisième cas test. Evolution de la norme du résidu relatif en fonction du nombre d'itérations.  
 LS1 = "line search" avec interpolation linéaire sur le résidu projeté  
 LS2 = idem avec interpolation quadratique  
 "STOP DYN" caractérise l'endroit où l'on arrête les recherches par voie dynamique amortie pour repasser en itérations statiques de Newton-Raphson.

| méthode<br>utilisée                         | NEWTON<br>RAPHSON | idem<br>+ line search<br>interpolation<br>2ème degré | idem<br>+ line search<br>interpolation<br>1er degré |
|---|-------------------|--|---|
| caractéristiques                            |                   |  |   |
| nbr. d'iter.<br>avant conver.               | 90                | 104  | 112   |
| tps. de calcul<br>global (s)                | 930               | 1166   | 1573  |
| Nbr. moy. de recherche<br>par itération (1) | -                 | 1,33   | 6,15  |
| tps. pour une<br>recherche (s)              | -                 | 1,30   | 0,71  |
| tps. pour une<br>remise à jour              | 10,3              | 10,3   | 10,3  |

(1) abaissement d'un facteur 10 du résidu projeté en 10 recherches maximum

TABLEAU 10 . Position de Référence  
Troisième cas test. 249 degrés de liberté  
Recherche statique - convergence à  $\epsilon_R = 10^{-6}$

A titre indicatif, nous mentionnerons que si la recherche avec interpolation du second degré est prolongée jusqu'à obtenir une réduction d'un facteur  $10^4$  sur le résidu projeté il n'y a pas d'amélioration, au contraire, le temps de calcul passe à 1855 s., nous en reparlerons au paragraphe 3.7. Par ailleurs, si l'on repasse, après quelques itérations, au calcul classique, sans "line search", on perd immédiatement le gain obtenu sur la norme du résidu relatif et l'évolution devient erratique, comme plus haut.

3.6.4.2. Recherche dynamique amortie de la position de référence.- Nous présentons quelques remarques qui ont été déduites de nombreuses tentatives :

1.- Il ne sert à rien d'affiner l'équilibre dynamique à un pas donné aussi se contentera-t-on d'une norme du résidu relatif  $\epsilon_R$  inférieure à 0,1. La remise à jour est impérative à chaque itération vu le pas de temps mis en oeuvre.

2.- On peut stopper l'analyse dès que la norme du résidu statique relatif  $\epsilon_{st}$  devient inférieure à l'unité. On affine ensuite par la méthode statique.

3.- Il existe un pas de temps optimum en début de réponse pour lequel le nombre d'itérations du premier pas est souvent important. Dans le cas étudié, ce pas est proche de 0,1 s. soit environ un à deux dixièmes de la période d'oscillation du câble dans son plan. Le premier pas nécessitait 30 itérations.

4.- Le schéma d'intégration temporelle à trois points doit être initialisé avec des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  introduisant déjà un amortissement ( $\beta=0,6$  et  $\gamma=1,2$  par exemple).

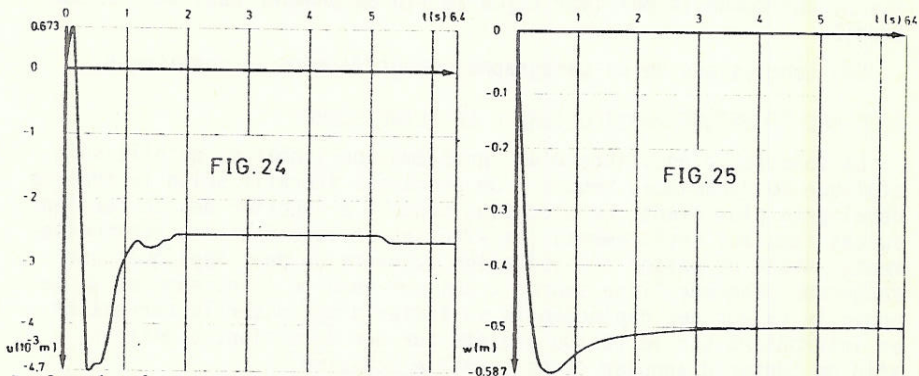
5.- Le schéma d'intégration temporelle HHT sera utilisé avec un paramètre  $\alpha$  compris entre -2 et -4, au delà la convergence au premier pas demande un effort trop long.

6.- Il ne sert à rien de chercher à améliorer la rapidité de la convergence par "line search".



7.- Le choix du pas de temps doit varier rapidement quand on progresse dans le temps pour d'une part, augmenter l'amortissement artificiel et d'autre part, parcourir au plus vite les quelques périodes nécessaires pour aboutir à l'équilibre recherché.

Le tableau 11 donne quelques informations tirées de quelques tentatives de recherches de l'équilibre statique.



Recherche de la position de référence. Troisième cas test. Méthode dynamique amortie. Evolution des déplacements à mi-portée en fonction du temps.

SCHEMA HHT ( $\alpha = -2$ ). Voir Tableau 11 également.

fig. 24 : déplacement dans la direction X (longitudinal)

fig. 25 : déplacement dans la direction Z (vertical)

Les figures 24 et 25 tracent l'évolution du déplacement du noeud à mi-portée de la phase OUEST en fonction du temps selon le schéma HHT ( $\alpha = -2$ ).

| N° du pas de tps.   | 1   | 2  | 3  | 4    | 5  | 6  | 7   | 8   | 9  | 10  | 11   | 12  | 13 | 14 | 15   | $\epsilon_{st}$ (2) | tps. de calcul (s) |
|---|-----|----|----|------|----|----|-----|-----|----|-----|------|-----|----|----|------|---------------------|--------------------|
| Valeur du pas de tps (s)                                    | 0,1 |    |    | 0,25 |    |    |     | 0,5 |    |     | 0,75 |     |    |    |      |                     |                    |
| Schéma HHT<br>$\alpha = -2$                                 | 36  | 13 | 10 | 4    | 11 | 13 | 10  | 4   | 5  | 8   | 5    | 1   | 2  | 1  | 1    | 2,5                 | 1300               |
| Schéma 3 points<br>initialisation<br>$\beta=0,6 \gamma=1,2$ | 28  | 21 | 12 | 6    | 9  | 6  | 6   | 7   | 4  | 6   | 1    | (1) |    |    | 0,75 | 1105                |                    |
| Valeur du pas de tps (s)                                    | 0,1 |    |    | 0,3  |    |    | 0,5 |     |    | 1,0 |      |     |    |    |      |                     |                    |
| Schéma HHT<br>$\alpha = -3$                                 | 30  | 6  | 10 | 21   | 33 | 16 | 20  | 16  | 16 | 30  | 21   | 18  | 14 | 7  | 5    | 3,9                 | 2850               |
| Schéma 3 points<br>initialisation<br>$\beta=0,6 \gamma=1,2$ | 28  | 21 | 12 | 11   | 9  | 11 | 4   | 4   | 9  | 3   | 7    | 1   | 1  | 1  | 6    | 8,4                 | 1360               |

(1)  $\epsilon_{st}$  est devenu inférieur à 1 (2) valeur à la dernière itération

TABLEAU 11. Position de référence - Troisième cas test. 249 degrés de liberté  
Nombre d'itérations par pas pour différentes stratégies ( $\epsilon_R = \epsilon_k = 10^{-1}$ )

On a également tracé sur la figure 23 l'évolution de la norme du résidu statique relatif  $\epsilon_{st}$ , en considérant une itération d'un pas au même niveau qu'une itération statique. Seul les points convergés (c'est-à-dire la fin d'un pas de temps) sont repris, et uniquement ceux correspondant au schéma à 3 points (1105 s. de CPU). L'affinement de la recherche de l'équilibre s'effectue en 14 itérations de NEWTON-RAPHSON statique.

L'inspection de la figure 23 nous apprend que l'amélioration de la norme du résidu est spectaculaire au premier pas, puis évolue d'une

manière beaucoup plus lente vers la convergence. Un calcul dynamique interrompu après le premier pas et prolongé par un calcul statique permet d'obtenir cette fois une convergence rapide (18 itérations) et un gain sur le temps de calcul global d'environ 50%. Nous pouvons attribuer cet effet bénéfique aux forces d'inertie qui fournissent une structure en équilibre dynamique plus favorable à une initialisation d'une recherche statique. La figure 23 présente cette courbe initialisée par HHT ( $\alpha = -3$ ) qui donne le meilleur  $\epsilon_{st}$  à la fin du premier pas, dans le cas étudié.

Les conclusions de ce paragraphe seront résumées au chapitre 8.

### 3.7. UNE TECHNIQUE PARTICULIERE - LE "LINE SEARCH"

La solution d'équilibre d'un problème non-linéaire, qu'elle soit statique ou dynamique, requiert un processus itératif selon la théorie développée plus avant. Ce processus conduit à apporter des corrections successives aux déplacements (et vitesses et accélérations éventuellement). Avant de passer à l'itération suivante on peut appliquer une recherche dénommée "line search", qui sur base de l'ancienne et de la nouvelle valeur des déplacements va tenter d'optimiser la correction en interpolant sur le résidu projeté sur une direction, à définir, afin de tenter d'annuler cette quantité scalaire.

Généralement [143,144], on projette le résidu sur la correction de déplacement (relation 102). On recherche donc la quantité scalaire  $\sigma^k$  qui satisfasse :

$$(d^k)^T \cdot r(q^k + \sigma^k \cdot d^k) = 0 \quad (147)$$

(dimension d'une énergie : J)

où  $d^k$  est la correction de déplacement à l'itération  $k$  et  $r$  le vecteur résidu exprimé au déplacement corrigé. On appliquerait après avoir déterminé  $\sigma^k$ , la relation :

$$q^{k+1} = q^k + \sigma^k \cdot d^k \quad (148)$$

En pratique, on limite la recherche de  $\sigma$  à l'obtention d'une réduction de la quantité (147) écrite pour le résidu en  $q^k$  :

$$|(d^k)^T \cdot r(q^k + \sigma^k d^k)| \leq \eta |(d^k)^T \cdot r(q^k)| \quad (149)$$

Les valeurs de 0,5 et 0,9 sont habituellement utilisées pour  $\eta$  [143, 144]. Les figures 26 et 27 visualisent pour un degré de liberté la technique du "line search" avec une interpolation linéaire ou quadratique sur le résidu projeté. Pour l'interpolation quadratique, on calcule généralement une valeur à mi-pas.

Les interpolations successives doivent toujours conserver le même point de départ  $q^0$ . La détermination de  $\sigma$  est évidente pour une interpolation linéaire. Pour une interpolation quadratique, on peut appliquer la technique de LAGRANGE [139], ce qui permet d'écrire :

$$\phi(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (150)$$

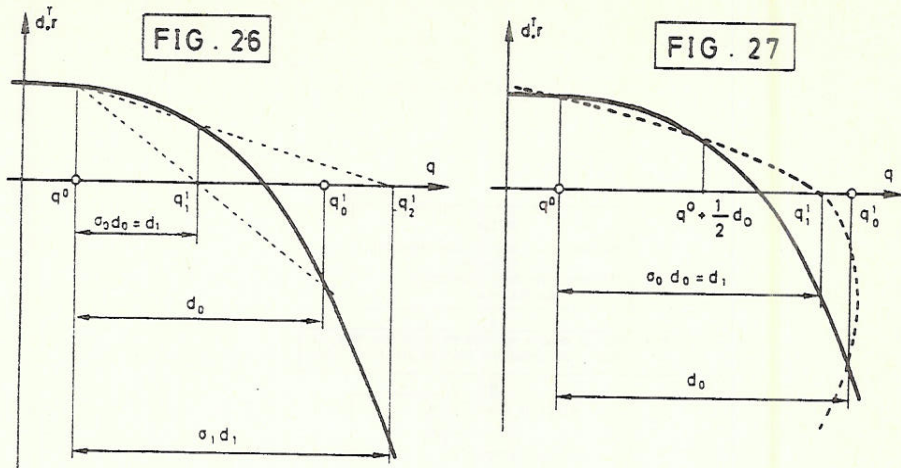
$$\text{où } A = \phi_1 \cdot (1-\alpha) + \phi_2 \cdot \alpha - \phi_3$$

$$B = d_0 \cdot [\phi_1 \cdot (\alpha^2 - 1) - \phi_2 \cdot \alpha^2 + \phi_3]$$

$$C = d_0^2 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot \phi_1$$

$\phi$  représente le résidu projeté, en particulier  $\phi_1$  au départ ( $q^k$ , ou  $q^0$  sur la figure 26),  $\phi_2$  après la première correction (à l'abscisse  $q_1^0$  pour  $\sigma_1$ , etc... sur la figure 26) et  $\phi_3$  une valeur située en  $q_0 + \alpha d_0$  ( $\alpha = \frac{1}{2}$  sur la figure 26).





Figures 26 et 27

Effet d'un "line search". Interpolation sur le résidu projeté dans la direction  $d$  (correction des déplacements).

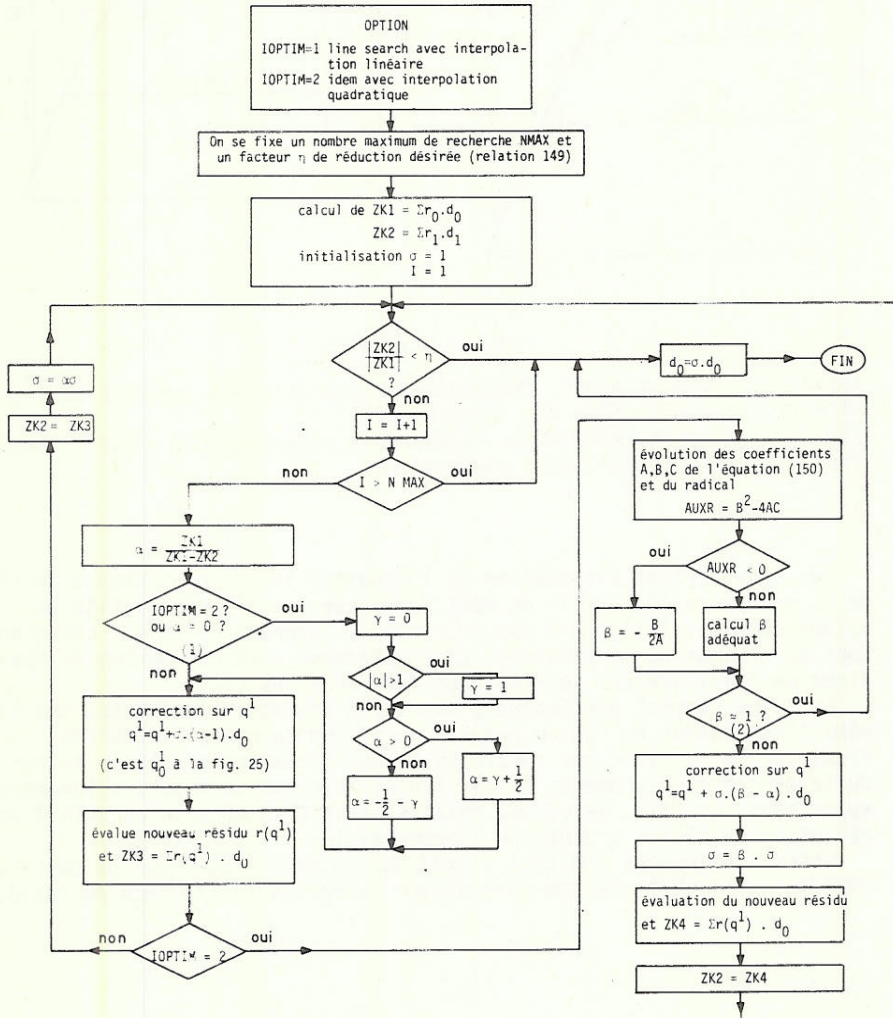
fig. 26 : deux interpolations linéaires successives (la solution empirique)

fig. 27 : une interpolation quadratique.

Les deux racines éventuelles de l'équation 150 donnent deux valeurs de  $\sigma$ , on optera pour celle de même signe que  $\alpha$  et la plus petite en valeur absolue. S'il n'y a pas de racine on prendra la valeur correspondant au minimum de la parabole. L'organigramme ci-après permet de réaliser un "line search" satisfaisant dans tous les cas.

Le "line search" s'effectue à matrice d'itération constante, dès lors même l'annulation du résidu projeté ne résoud en rien le problème final, car on ne tient pas compte de la modification de raideur introduite par les déplacements et les forces internes sont donc uniquement approchées. En fait, le résidu relatif n'est plus affecté au delà d'une réduction du résidu projeté de l'ordre de 10.

Enfin, remarquons que dans l'utilisation de la technique de Quasi-Newton, il convient de remettre à jour le vecteur différence de rédidus.



- (1) le cas  $\alpha=0$  se présente quand  $|ZK2| \gg |ZK1|$ , il faut alors éviter d'osciller entre les deux mêmes valeurs  $q^0$  et  $q^1$   
 (2) ce test peut remplacer, selon la tolérance désirée, le test sur NMAX



### 3.8. ORGANISATION GENERALE DU MODULE "CABLE"

Le logiciel SAMCEF dans lequel le module CABLE a été implanté est organisé d'une manière frontale. Soit une résolution directe utilisant la méthode de GAUSS par blocs et procédant à l'assemblage des matrices d'éléments en même temps que l'élimination de tous les degrés de liberté possibles et ce par blocs de "quelques éléments" ou "sous-structures". Les résultats sont inscrits sur périphérique après chaque examen d'une sous-structure.

La largeur de front, ou nombre de degrés de liberté actifs à un moment d'assemblage donné, influence la taille minimale à réserver en mémoire centrale et le temps de calcul. Une inversion par triangularisation sur pivot maximum nécessite un temps de calcul proportionnel à  $N.M^2$  où  $N$  est le nombre de degré de liberté et  $M$  la largeur maximale du front. Cette dernière dépend fortement de l'ordre de numérotation des éléments qui, dans notre cas, doit s'effectuer en file. Par contre, la numérotation des noeuds et des degrés de liberté n'a aucune importance. Le lecteur trouvera d'amples informations en consultant la bibliographie à ce propos par exemple [145,146].

Nous présentons ci-dessous l'organisation à suivre lors de l'utilisation du module "CABLE".

Organigramme voir page suivante.



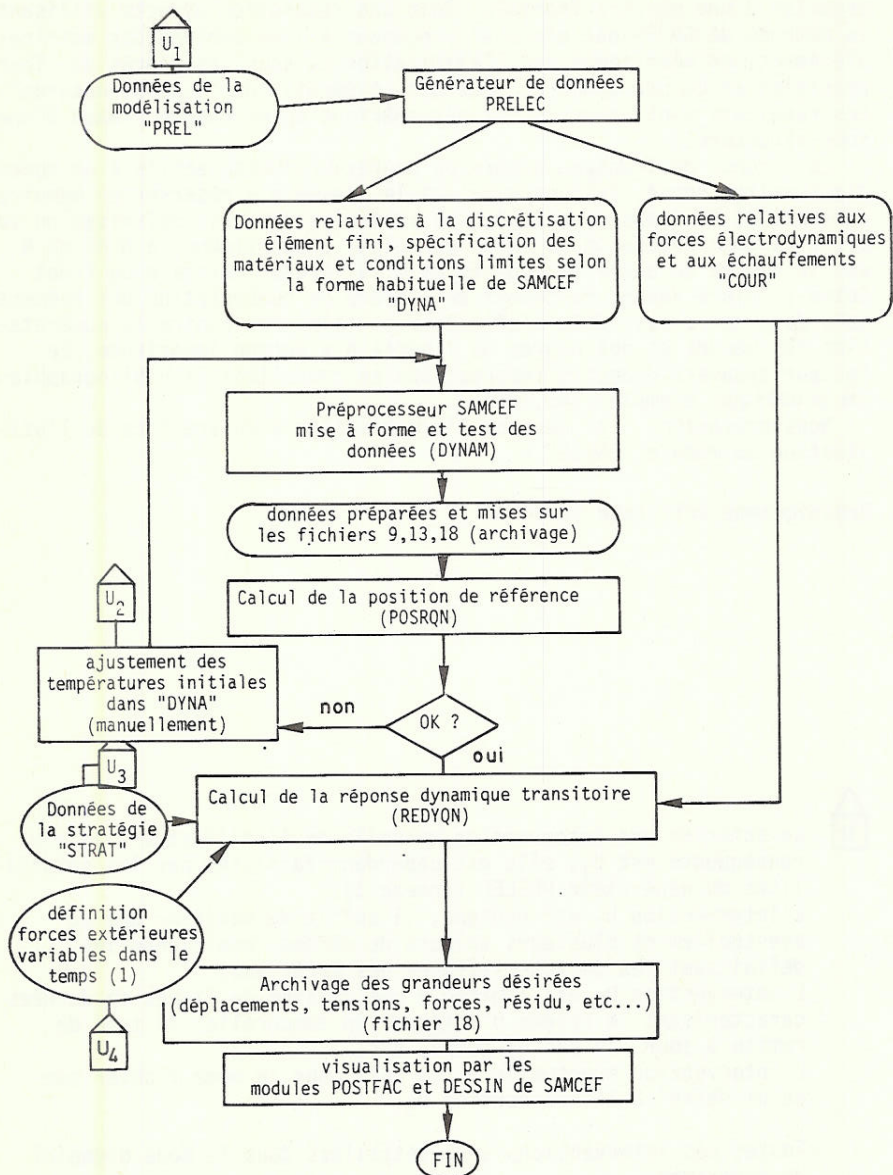
caractérise une intervention manuelle de l'utilisateur, la plus conséquente est  $U_1$ , elle est cependant facilitée par les possibilités du générateur PRELEC (annexe 1).

L'intervention  $U_2$  est bénigne, il suffit de modifier une ou éventuellement plusieurs valeurs de cartes "additionnelles" définissant les caractéristiques des matériaux.

L'intervention  $U_3$  est limitée à une dizaine de lignes de données caractérisant le schéma d'intégration temporelle, le type de remise à jour, le pas de temps, etc...

L'intervention éventuelle  $U_4$  se fait dans le même fichier que celui défini à l'intervention  $U_3$ .

Toutes ces interventions sont détaillées dans le mode d'emploi du programme.



(1) autres que les forces électromagnétiques. Les forces statiques (vent, gravité) sont directement définies à l'entrée des données ("PREL")