

**UNIVERSITE DE LIEGE**  
**FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES**

**Contraintes et conséquences  
électromécaniques liées au passage  
d'une intensité de courant  
dans les structures en câbles**

par

**J.L. Lilien**

Ingénieur civil électricien-mécanicien  
Docteur en Sciences appliquées de l'Université de Liège

**1983**

Collection des publications de la Faculté des Sciences appliquées n° 87  
Direction : A. Germain, rue A. Stévant, n° 2, B-4000 LIEGE, BELGIQUE

Thèse défendue, avec succès, le 24 janvier 1983, pour l'obtention  
du grade de Docteur en Sciences Appliquées de l'Université de Liège.

Jury : P. Pirotte, Université de Liège, président.

G. Bénistan, E.D.F., France.

A. Calvaer, Université de Liège.

G. D'Ans, Laborelec.

G. Dienne, Laborelec.

M. Gérardin, Université de Liège.

W. Lehmann, Siemens, R.F.A.

P. Leppers, P.L.E.M., Pays-Bas.

E. Méan, Université de Liège.

L. Paris, Université de Pise.

G. Sander, Université de Liège.

© Tout droit de reproduction réservé à la Collection des publications de  
la Faculté des Sciences appliquées de Université de Liège.

Liège (Belgique) — Avril 1983

Dépôt légal : D/1983/0480/2  
ISSN0075-9333

Imprimerie C.L.R.O. s.a. - Liège (Angleur)

à Hélène,





# TABLE DES MATIERES

1. INTRODUCTION		7
2. MODELISATION DES PHENOMENES		
2.1. Hypothèses mécaniques et choix de la méthode . . . . .	11	
2.2. Elastodynamique des conducteurs souples. . . . .	13	
2.3. Hypothèses électriques . . . . .	29	
2.4. Evaluation des forces électromagnétiques . . . . .	33	
3. TRAITEMENT NUMERIQUE		
3.1. Schémas d'intégration temporelle - théorie . . . . .	43	
3.2. Expression discrète des équations d'équilibre dynamique. . . . .	54	
3.3. Schémas d'intégration temporelle - tests numériques. . . . .	62	
3.4. Remise à jour de la matrice d'itération - théorie. . . . .	76	
3.5. Remise à jour de la matrice d'itération - tests numériques . . . . .	83	
3.6. Un problème particulier : le calcul de la position de référence . . . . .	88	
3.7. Une technique particulière : le "line search". . . . .	96	
3.8. Organisation générale du logiciel . . . . .	99	
4. CAS D'APPLICATION REPRESENTATIFS DES PROBLEMES RENCONTRES DANS LA PRATIQUE		
4.1. Considérations générales . . . . .	101	
4.2. Comparaisons expérimentales . . . . .	104	
4.3. Configurations réelles . . . . .	113	
4.4. Conclusions . . . . .	128	
5. UNE METHODE SIMPLIFIEE ET L'ETUDE PARAMETRIQUE		
5.1. Position du problème . . . . .	131	
5.2. Théorie du pendule à deux degrés de liberté. . . . .	131	
5.3. Applications . . . . .	136	
5.4. Etude paramétrique . . . . .	138	
5.5. Conclusions. . . . .	160	
6. MODELE REDUIT - PERSPECTIVES		
6.1. Position du problème . . . . .	165	
6.2. Lois de similitude . . . . .	165	
6.3. Modèles proposés . . . . .	168	
6.4. Tests numériques . . . . .	170	
6.5. Conclusions. . . . .	177	
7. FAISCEAUX DECOUPLES		
7.1. Position du problème . . . . .	179	
7.2. Choix d'un modèle mathématique . . . . .	181	
7.3. Etude paramétrique . . . . .	185	
7.4. Comparaisons expérimentales. . . . .	188	
7.5. Conclusions. . . . .	197	

8. RESULTATS PRATIQUES ET CONCLUSIONS	
8.1. Validité des hypothèses utilisées . . . . .	201
8.2. Outil de calcul disponible . . . . .	201
8.3. Quelques "bonnes" stratégies de calcul. . . . .	202
8.4. Méthode simplifiée . . . . .	205
8.5. Modèle réduit . . . . .	2J6
8.6. Faisceaux découplés . . . . .	206
8.7. Conséquences des contraintes électromagnétiques - Aide au dimensionnement . . . . .	206
9. CONCLUSIONS GENERALES . . . . .	210
Annexes	
A.1. Le programme de génération automatique de données : "PRELEC" . . . . .	213
A.2. Comportement des faisceaux de 2 conducteurs au court-circuit. Approche simplifiée. . . . .	221
A.3. Application du modèle mathématique sur une structure à deux degrés de liberté . . . . .	227
A.4. Annexes relatives au chapitre 7 : "faisceaux découplés"	232
A.5. Equations du mouvement du pendule à deux degrés de liberté . . . . .	237
A.6. Notations utilisées au chapitre 2 . . . . .	239
A.7. Contraintes non-linéaires - élément de mécanisme. Coefficients des équations discrétisées. . . . .	241
A.8. Calcul de la force électromagnétique. Organigramme	242
Références	243



# Chapitre 1

## INTRODUCTION

### 1.1. INTERET DU PROBLEME

A la suite de l'accroissement des puissances de court-circuit dans les réseaux, le dimensionnement des postes et bientôt des lignes aériennes fera plus particulièrement intervenir les contraintes électromagnétiques car elles constitueront de plus en plus un élément prépondérant par rapport aux autres surcharges et influences (tension, vent, givre...) [5,9,11,15,16,19,32,33,34,37,38]. Les intensités de court-circuit peuvent atteindre à l'heure actuelle, ou dans un proche avenir de 40 à 100 kA (40 kA en Belgique, 63 kA en France, 100 kA en Allemagne et au Canada [11]).

La force de Laplace résultant de telles intensités dans les conducteurs provoque un balancement prononcé de ceux-ci. La réponse transitoire mécanique de l'ensemble de la structure (conducteurs, ancrages, armement, etc...) conduit à envisager d'une part les contraintes mécaniques engendrées par les forces appliquées (électromagnétiques, gravité, inertie, élastiques) et d'autre part le rapprochement entre phases qui peut conduire à un amorçage si l'intervalle d'air devient inférieur à la distance minimale de tenue diélectrique. Parallèlement, les mouvements modifient la réactance linéique, ce qui peut engendrer des problèmes de stabilité transitoire.

Les jeux de barres et connexions transversales des postes haute tension sont réalisés soit en barres rigides (tube aluminium) nues ou blindées soit en conducteurs souples, simples ou en faisceaux. Une fois connue la répartition du courant, la réponse transitoire au court-circuit des "barres rigides" s'étudie sans problème par les méthodes classiques des structures linéaires [17 et ses références, 3, 36]. Par contre, le comportement mécanique des conducteurs souples fait appel aux théories non-linéaires capables de représenter les "grands déplacements". De plus, l'amplitude des mouvements (plusieurs mètres) modifie d'une manière sensible la valeur des forces électromagnétiques, non-linéarité qui s'ajoute à la précédente.

Il faut scinder ce type de problèmes en deux catégories : celle où l'on ne rencontre qu'un seul conducteur par phase et celle où la phase est constituée d'un faisceau de conducteurs (2,3,..., 16 sous-conducteurs). Dans le premier cas, le phénomène transitoire s'étudie pendant quelques secondes (2 à 4 secondes) et les contraintes mécaniques maximales se produisent généralement quand le conducteur est à bout de course (horizontalement ou verticalement). Dans le deuxième cas, on retrouve les mêmes phénomènes si on regarde le faisceau comme un seul ensemble, mais il apparaît un autre phénomène dans les tout premiers instants (0,05 à 0,1 s.) après l'apparition du défaut : les sous-conducteurs d'un même faisceau entrent en contact ce qui produit une première contrainte mécanique appelée "pincement". Il en résulte notamment une compression des entretoises qui maintenaient les sous-conducteurs écartés avant le défaut.

Tous les problèmes liés aux conducteurs souples dans les postes subsistent évidemment dans le cas des lignes aériennes [15,20,34,35] où les distances entre phases sont toutefois plus importantes, ce qui réduit la force de Laplace correspondante : les effets du court-circuit sont cependant plus complexes à évaluer en poste à la suite notamment de la présence des dérivations [18]. L'ingénieur responsable de telles installations peut être confronté à deux situations distinctes : d'une part la vérification des installations existantes et d'autre



part le dimensionnement de nouvelles entités. Dans le premier cas, on se fixera comme objectif le renforcement des éléments trop sollicités tandis que dans le second cas, le calcul sera effectué de manière à prendre en compte les effets du court-circuit dès la conception. Compte tenu d'une part, des coûts marginaux très élevés, engendrés par l'accroissement des contraintes et d'autre part, de la faible probabilité d'apparition de défauts de fortes intensités de court-circuit [9,10,11,16,39], il est nécessaire de connaître les conséquences de telles charges avec un maximum de réalisme car ces contraintes rares ne doivent pas conduire à un surdimensionnement excessif basé sur des lois empiriques ou des méthodes simplifiées.

Par ailleurs, il est apparu récemment à la suite de l'augmentation des courants, nominaux cette fois, un problème particulier pour les conducteurs de lignes aériennes utilisées en faisceaux découplés (c'est-à-dire sans entretoise). Cette disposition spéciale tend à se répandre dans nos régions et à l'étranger, que ce soit en vue de remédier au phénomène de galop en présence de givre asymétrique, ou simplement par mesure d'économie.

L'augmentation des courants nominaux, ou une surcharge transitoire peuvent provoquer le contact entre les sous-conducteurs qui sont sous tension (150, 220, 380 kV) ce qui engendre des conséquences néfastes (gêne acoustique, modification de la réactance, etc...) qui peuvent éventuellement subsister après disparition de la surcharge.

## 1.2. ETAT DE LA QUESTION

Récemment, l'analyse des structures complexes a été possible grâce à l'utilisation des calculateurs électroniques sur des modèles discrétisés. L'évaluation précise des effets mécaniques (déplacements, contraintes) produits par les courants de court-circuit dans les postes à conducteurs souples n'est cependant pas un problème simple. On ne peut le résoudre d'une manière satisfaisante par l'application directe d'un des programmes généraux disponibles sur le marché, mais on peut évidemment les adapter par exemple "ADINA" [2] (comme l'ont fait les ingénieurs allemands de la firme Siemens [30]). NONSAP [4] par les mêmes utilisateurs [28] ou encore "SAMCEF" [36] dans le cadre de l'étude présentée. D'un autre côté, quelques tentatives existent visant la mise au point de programmes spécialement adaptés aux calculs des effets des courants de court-circuit; notamment à l'Université de Cracovie [30,31] (Pologne), à E.D.F. et Merlin Gérin [12,35,8] (France) ou encore à ASEA [1,21] (Suède).

Les Américains et Canadiens se contentent à notre connaissance, de méthodes simplifiées [11,174], ou bien sûr d'expérimentation en vraies grandeurs, comme pour les autres auteurs d'ailleurs. La plupart de ces programmes sont en cours de développement, ou en révision, depuis de nombreuses années, à la suite du "know-how" qui s'est fortement développé récemment, grâce au groupe de travail 23-02 de la CIGRE (i) [7,8,10,13,14,18,20-29,31,39,41,42] et aux expérimentations en vraies grandeurs réalisées notamment à LABORELEC (ii). Les différents programmes à l'étude se distinguent par le type de discrétisation (éléments finis ou différences finies), la souplesse d'utilisation, les paramètres pris en compte (structure d'ancrage, dérivations, échauffement, amortissement, contact, etc...) et le calcul de la force électromagnétique. Nous allons donner quelques détails sur trois programmes, probablement

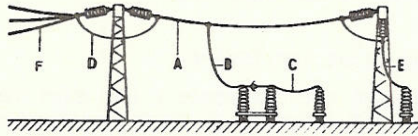
(i) Conférence Internationale des Grands Réseaux Electriques à Haute Tension

(ii) Laboratoire Belge de l'Industrie Electrique



les plus performants à l'heure actuelle selon une très récente publication [30] effectuée par des membres et experts du groupe 23-02 de la CIGRE. Il s'agit des programmes ADINA (modifiés par Siemens), SAMCEF (Université de Liège) et STANAN (Université de Cracovie). ADINA et SAMCEF adoptent une discrétisation spatiale par éléments finis. Il n'y a aucune difficulté à prendre en compte tous les éléments repris à la figure 1.

Figure 1



*Disposition classique de connexions souples dans un poste H.T.*

- A. connexion reliée par la chaîne d'isolateur à un portique
- B. dérivation
- C. connexion entre appareillages au sol
- D. liaison entre portées adjacentes
- E. dérivation en bout de portée
- F. départ en ligne (disposition non parallèle des 3 phases)

STANAN est écrit en différences finies, il ne peut pas prendre en compte les dérivations (B et E sur la fig. 1) ni les faibles portées (C sur la fig. 1) mais bien les structures d'ancrage. Ces dernières, prises en compte par les trois programmes, peuvent être remplacées par une structure mathématique équivalente mais réduite à un faible nombre de degrés de liberté; ce cas est particulièrement intéressant pour les structures d'ancrage en treillis. Par ailleurs, ADINA et STANAN peuvent tenir compte des contacts entre les conducteurs d'un même faisceau (STANAN limité à 2 sous-conducteurs par phase) alors que SAMCEF est en cours de développement à ce propos. Le calcul des forces électromagnétiques s'effectue d'une manière analytique dans ADINA tandis que SAMCEF utilise une méthode cohérente avec la discrétisation en éléments finis.

SAMCEF ne prend pas en compte les amortissements alors que les deux autres programmes le permettent.

Nous proposons au lecteur de consulter les références citées dans le texte, pour plus d'informations à ce propos.

### 1.3. OBJECTIFS

Dans ce travail nous développons tout d'abord nos objectifs fondamentaux puis quelques problèmes associés. Ces derniers correspondent soit à une nécessité pratique (méthodes simplifiées) soit à une recherche du moindre coût (modèle réduit) soit à l'analyse d'un phénomène particulier (faisceaux découplés).

Nos objectifs fondamentaux sont les suivants :

#### 1.3.1. Développer un outil de calcul

Dans le cadre du travail présenté, nous étudions uniquement les conducteurs souples uniques par phase. Néanmoins, nous indiquerons d'une part quand le modèle devrait être modifié pour prendre en compte l'étude des faisceaux de conducteurs et d'autre part quand le modèle proposé peut être adapté à ce cas, moyennant certains artifices.

L'outil de calcul a été intégré dans le logiciel SAMCEF, ce qui permet d'en utiliser les ressources inhérentes. Cet objectif est développé au chapitre 2.

#### 1.3.2. Etudier le comportement numérique de l'outil ainsi développé

Il s'agit d'intégrer dans le programme différentes méthodes de résolution et de les tester en vue d'obtenir un optimum précision-temps

de calcul. L'intérêt de cette recherche provient du type de problème particulier et de la non-linéarité importante du phénomène étudié. Différents schémas d'intégration temporelle et divers types de remise à jour des matrices de raideurs ont été expérimentés.

Cet objectif est développé au chapitre 3.

1.3.3. Faciliter l'accès et le traitement des résultats obtenus par le logiciel.

Un programme de génération automatique des données a été mis au point; les résultats sont présentés sous forme graphique et nous tentons de définir la stratégie optimale de calcul pour l'utilisateur.

Cet objectif est recherché au cours des chapitres 3 et 4; il est résumé au chapitre 8.

1.3.4. Prouver la validité du modèle et son intérêt.

Au chapitre 4, le modèle programmé est confronté à une expérimentation rigoureuse. Quelques cas représentatifs de configurations réelles sont détaillés.

Complémentairement, nous étudierons les problèmes associés énumérés ci-dessous.

1.3.5. Modèle simplifié et étude paramétrique

Au chapitre 5, un modèle simple est développé, dérivant du pendule à deux degrés de liberté. Cette méthode prend en compte suffisamment de paramètres, pour qu'une étude valable de sensibilité puisse être menée. On en a déduit quelques règles générales de dimensionnement.

1.3.6. Perspectives dans l'utilisation des modèles réduits.

Au chapitre 6, l'éventualité de construire un modèle réduit est envisagée. On en discute les hypothèses et l'on fournit les facteurs d'échelle.

1.3.7. Comportement des faisceaux découplés

Au chapitre 7, le comportement des faisceaux découplés est étudié pour des intensités proches des valeurs nominales. On en déduit les intensités minimales conduisant au contact entre les sous-conducteurs et celles correspondant à la séparation de ceux-ci.

Des vérifications expérimentales étayent la validité du modèle particulier mis au point.

En bref, les recherches entreprises et consignées dans cette thèse conduisent à une meilleure connaissance de certaines sollicitations électromécaniques des réseaux.



## Chapitre 2

### MODELISATION DES PHENOMENES

#### 2.1. HYPOTHESES MECANIQUES ET CHOIX D'UN FORMALISME

Le modèle mathématique que nous utiliserons résulte des hypothèses et choix suivants :

- 1.- On néglige la rigidité en flexion des câbles et la torsion ne sera pas envisagée.
- 2.- On néglige les amortissements d'origine interne ou externe
- 3.- On ne tient pas compte des phénomènes éventuels de choc entre conducteurs
- 4.- Une formulation de type lagrangien total sera choisie
- 5.- La structure sera discrétisée en éléments finis isoparamétriques en ce qui concerne les câbles
- 6.- L'intégration temporelle sera effectuée par une méthode pas à pas

##### 2.1.1. Rigidité en flexion des câbles négligée

Elle est très faible et en outre extrêmement difficile à déterminer avec précision vu la constitution toronnée des conducteurs utilisés. Notamment l'expression classique  $EJ$  ( $J$  moment d'inertie,  $E$  module d'élasticité) conduit à une appréciation erronée [44,56].

Compte tenu des ordres de grandeurs des forces appliquées (environ de 2 à 6 fois la force de gravité) et de la longueur des portées (plusieurs dizaines de mètres) l'influence de la rigidité flexionnelle sera faible devant les autres effets mécaniques. Il faut cependant considérer avec attention le cas particulier relatif au pincement des conducteurs en faisceaux sous l'effet d'un court-circuit et à la déformation du câble à proximité des entretoises. On a étudié par une méthode simplifiée basée sur un bilan d'énergie, l'influence de la part prise par l'énergie de déformation due à la flexion dans les faisceaux de conducteurs. Cette étude, sommairement exposée en annexe 2, conduit à une influence croissante de l'énergie de déformation en flexion avec l'intensité du courant, la valeur de  $EJ$  et la distance entre conducteurs. Cette même influence est décroissante quand la portée augmente. Le rapport entre l'énergie de déformation en flexion et en extension atteint 10% au contact, pour une intensité de courant de court-circuit supérieure à 50 kA, une portée inférieure à 60 m, une distance initiale d'au moins 40 cm entre conducteurs, une valeur de  $EJ$  de l'ordre de  $3000 \text{ N} \times \text{m}^2$ , ce qui est énorme, par rapport à certaines valeurs citées dans la littérature [ $20 \text{ N} \times \text{m}^2$  à la référence 56]. Signalons que plusieurs auteurs proposent de s'affranchir de cette hypothèse pour des applications différentes des nôtres [47,55,73]. L'accroissement, qui y serait lié, du nombre de degrés de liberté, et donc du temps de calcul, ne se justifie pas dans le cadre de notre étude compte tenu des remarques précitées.

##### 2.1.2. Amortissements négligés

Les amortissements sont également des grandeurs complexes à évaluer notamment ceux liés à la friction des brins des conducteurs les uns sur les autres [46,56,72]. D'autre part les contraintes maxima (tension mécanique et distance d'isolement entre phases) apparaissent toujours endéans les 2 à 3 premières secondes après le début du défaut, ce qui correspond à environ 2 à 3 périodes d'oscillation des câbles et donc à une influence limitée des amortissements. Par ailleurs, l'introduction artificielle, purement numérique, d'un amortissement, par le choix particulier d'un schéma d'intégration, permet d'obtenir une bonne stabilité de la réponse numérique, ce qui a une influence très favorable sur le temps de calcul.

Nous avons opté, compte tenu des remarques précitées, pour cette dernière solution, qui une fois maîtrisée, ne possède guère que des avantages.

### 2.1.3. Pas de choc entre conducteurs

L'introduction de cette hypothèse nous empêchera d'étudier les problèmes de pincement (apparition d'un pic de tension au contact) des conducteurs en faisceau. L'annexe 2 propose une méthode simplifiée pour l'étude de ce phénomène. L'introduction dans le logiciel du phénomène de contact, comme l'a fait, dans d'autres domaines, PREUMONT [63], nécessiterait un type d'élément fini différent de ceux que nous détaillerons plus loin, et surtout une stratégie qui permettrait le découplage de l'étude globale et du comportement interne du faisceau. En effet, ce phénomène fait intervenir dans les problèmes qui nous occupent des fréquences élevées (plusieurs centaines de Hz), ce qui nécessite un pas de temps adapté en conséquence d'où un temps de calcul prohibitif (qui se chiffrerait en jours CPU) dans une approche globale. Bien d'autres problèmes se posent également : calcul de la force électromagnétique, effet de proximité, asymétrie de la matrice d'itération, influence de la rigidité en flexion à proximité des entretoises, etc...

Notre approche se limite donc à considérer un seul conducteur par phase. Ce conducteur peut représenter l'équivalent du faisceau, le cas échéant. La figure 1 tirée d'une expérimentation tchèque (i) permet d'avaliser cette hypothèse et montre notamment que l'effet de réduction de la longueur apparente du câble, suite au pincement, n'influence pas l'allure globale du mouvement qui sera donc seule étudiée dans le cadre de notre étude.

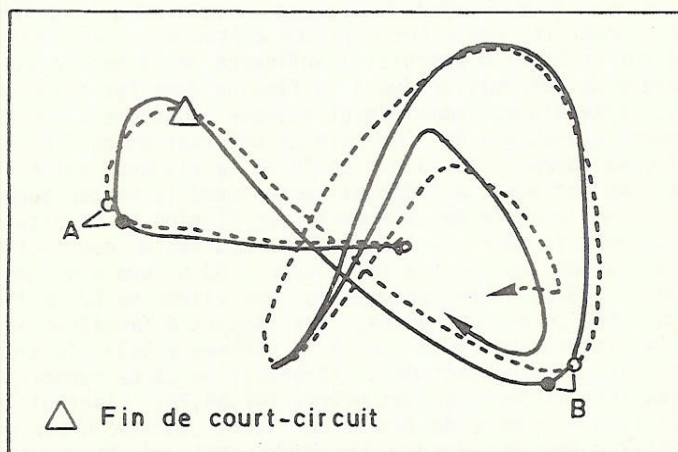


Figure 1

Allure du débattement d'une phase à mi-portée dans un plan parallèle aux ancrages. La courbe en trait pointillé est la trajectoire d'un faisceau de deux conducteurs ( $2 \times 670 \text{ mm}^2$ ), la courbe en trait plein est la trajectoire d'un câble équivalent à conducteur unique ( $1340 \text{ mm}^2$ ). En A l'instant du "premier écart", en B l'instant du premier "coup de fouet". Les caractéristiques de la structure étaient :  $a=2,5\text{m}$ ;  $S=40\text{m}$ ;  $I_{eff}=40\text{kA}$ ;  $20\text{cm}$  entre conducteurs.

(i) M.S. CESTMIR Energovod-Prague Communication personnelle



La limitation de l'hypothèse revient donc principalement à ne pas pouvoir dimensionner les entretoises, dans le cas d'un faisceau de conducteurs.

Néanmoins, nous pourrions déterminer dans la plupart des cas les contraintes mécaniques maxima en A et B sur la figure 1 et la distance d'isolement entre phases.

#### 2.1.4. Formalisme en lagrangien total

Le choix d'une configuration de référence dépend de l'approche choisie : type lagrangien total ou eulérien, par exemple. Dans le premier cas on utilise l'état "non-déformé" comme configuration de référence. Dans le deuxième cas, on utilise la déformation courante comme configuration de référence à l'étape suivante. Le problème qui nous préoccupe fait partie de la classe des problèmes non linéaires dits à "grands déplacements". Dans ce cas [50] l'approche eulérienne perd son intérêt tant en efficacité qu'en simplicité par rapport à l'approche lagrangienne. Les principaux avantages de cette dernière sont :

- l'invariance des matrices élémentaires d'une itération à l'autre vis-à-vis d'un changement de géométrie;
- les lois constitutives (relations tensions-déformations) sont plus simples à exprimer car elles n'ont pas à tenir compte des changements d'orientation.

Nous avons donc opté pour une approche purement lagrangienne.

#### 2.1.5. Eléments finis isoparamétriques

Nous avons opté pour le formalisme éléments-finis compte tenu notamment du logiciel de base SAMCEF dont nous disposons. Ceci nous permettra d'introduire de nouveaux éléments tout en gardant à sa disposition la "bibliothèque" SAMCEF et notamment les éléments "poutres". Ces derniers serviront à la discrétisation des structures d'ancrage. Par ailleurs la souplesse du formalisme éléments-finis permet d'inclure dans le modèle sans effort particulier, la prise en compte des dérivations, des structures d'ancrage, etc... simplement par la continuité de la discrétisation.

La technique isoparamétrique se justifie compte tenu des hypothèses envisagées (extension uniquement). Elle peut également introduire une approximation par l'intermédiaire de l'intégration numérique qu'elle entraîne. En cas de sous-intégration (modes spatiaux non intégrés exactement) les éléments finis que nous utilisons seront donc "hybrides en déplacements" [70]. Signalons enfin qu'il n'est pas possible dans notre cas de définir l'énergie complémentaire suite aux non-linéarités géométriques, ce qui empêchait le choix éventuel d'éléments statiquement admissibles ou les hybrides correspondants.

#### 2.1.6. Intégration temporelle pas à pas

Les équations différentielles non-linéaires résultant de la discrétisation spatiale en éléments finis subissent une intégration temporelle numérique pas à pas. Les différents schémas d'intégration que nous utiliserons peuvent introduire des distorsions dans la réponse, en fréquence et en amortissement. Nous en discuterons au chapitre 3.

### 2.2. ELASTODYNAMIQUE DES CONDUCTEURS SOUPLES

Nous utiliserons les notations définies à l'annexe 6, on y caractérise également le type de grandeur (scalaire, vecteur, matrice).

Dans le texte, nous ne caractériserons plus les grandeurs vectorielles et matricielles, le lecteur se référera à cette annexe.

Certains auteurs ont déjà abordé le problème étudié [42,43,48-50, 52,54, 57-62, 64-68]. Nous l'avons spécifiquement adapté à nos

hypothèses et en fonction de nos choix, dans le cadre de l'étude envisagée. Cette recherche a été effectuée en collaboration avec le "Laboratoire de Techniques Aéronautique et Spatiale" de l'Université de Liège [45,51,53,71].

### 2.2.1. Formulation variationnelle et équations du mouvement

La forme faible des équations du mouvement nécessaire à la discrétisation spatiale par éléments finis est le principe de HAMILTON qui stipule que, pour un système conservatif subissant des variations de déplacements  $\delta u_i$  cinématiquement admissibles (c'est-à-dire conformes aux liaisons de l'espace) et telles que  $\delta u_i = 0$  aux temps  $t=t_1$  et  $t=t_2$ , l'action lagrangienne est stationnaire pour la trajectoire réelle du système, soit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T-U) dt = 0 \quad (1)$$

T : énergie cinétique du câble

U : énergie potentielle totale :  $U = U_1 + U_2$

où  $U_1$  : énergie de déformation du câble

$U_2$  : énergie potentielle des charges extérieures

Le cas des charges extérieures non conservatives  $f_i^{NC}$ , telles les forces électrodynamiques qui sont fonction des déplacements, peut aisément être pris en compte en ajoutant à (1) l'expression de leur travail virtuel (en se rappelant le choix discuté au paragraphe 2.1.4.)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T-U) dt + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{l_0} \sum_i f_i^{NC} \cdot \delta u_i ds_0 = 0 \quad (2)$$

2.2.1.1. Energie cinétique.- On peut écrire :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \rho_0 A_0 \sum_i \dot{u}_i^2 ds_0 \quad (3)$$

2.2.1.2. Energie potentielle de déformation (cas extensible).- Pour des déformations infinitésimales, elle peut se mettre sous la forme

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \epsilon dv = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} EA_0 [g^2 - 2\alpha(\theta - \theta_0)g + \alpha^2(\theta - \theta_0)^2] ds_0 \quad (4)$$

en effet : \* v est le volume du câble et on a l'équivalence

$$\int_V dv = \int_0^{l_0} A_0 ds_0 \quad (4')$$

\*  $\sigma$  est la contrainte en extension  $\sigma = \epsilon E$  (4'')

$\epsilon$  est la déformation élastique relative qui, peut se mettre sous la forme

$$\epsilon = g - \alpha \cdot (\theta - \theta_0) \quad (4''')$$



Les relations 4', 4'' et 4''' justifient l'expression 4 de l'énergie potentielle de déformation.

g dans l'expression 4''', est la mesure de la déformation de GREEN (i) compte tenu des hypothèses elle peut se mettre sous la forme :

$$g = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2ds_0^2} \quad (5)$$

Les coefficients de la forme quadratique (5) caractérisent la déformation locale du milieu. En effet, si  $g=0$ , la transformation du voisinage préserve les distances entre deux points voisins quelconques et dans ce cas elle ne peut représenter qu'une rotation du voisinage comme un élément rigide et inversement, c'est une des mesures lagrangienne exacte de l'état de déformation.

Le calcul de g se déduit comme suit :  
soit un élément de câble  $ds_0$  se déformant en ds (fig. 2)

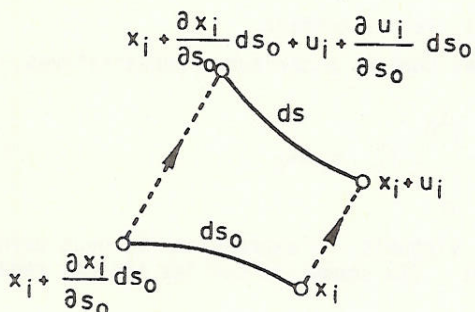


Figure 2

Déformation d'un élément de câble de longueur  $ds_0$  en un élément de longueur ds suite à un déplacement  $u_i$  des coordonnées  $x_i$  du câble.

on peut écrire :

$$ds^2 - ds_0^2 = \sum_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial s_0} + \frac{\partial u_i}{\partial s_0} \right)^2 ds_0^2 - \sum_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial s_0} \right)^2 ds_0^2 \quad (5')$$

$$\text{d'après (5)} \quad ds^2 - ds_0^2 = 2g ds_0^2 \quad (5'')$$

$$\text{d'où} \quad g = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial s_0} \frac{\partial x_i}{\partial s_0} + \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial s_0} \right)^2 \quad (6)$$

La mesure de GREEN ne dépend que des gradients de déplacements. Elle s'obtient simplement à partir de la matrice jacobienne de la transformation de voisinage.

Dans l'expression (4) le terme  $\frac{1}{2} EA_0 [g^2 - 2\alpha(\theta - \theta_0)g + \alpha^2(\theta - \theta_0)^2]$  est la densité d'énergie libre. Si l'on effectue sa variation par rapport à la déformation, on trouve l'effet normal ("tension mécanique") dans le câble résultant de la déformation d'origine mécanique :

$$N = EA_0 \cdot [g - \alpha(\theta - \theta_0)] \quad (7)$$

C'est la "loi constitutive" ou relation tension-déformation du matériau.

2.2.1.3. Potentiel de dislocation (cas inextensible).- Quelquefois, on rencontre dans les postes hautes tensions des éléments très

(i) G. SANDER "Note de cours de théorie des structures", Université de Liège. Laboratoire d'Aéronautique, Rapport SF 77, chapitre 7, pages 6 et 7, Octobre 1978

faiblement tendus, telles les dérivations qui relient le jeu de barres à l'appareillage. Dans ce cas particulier, l'énergie potentielle de déformation  $U_1$  de ces éléments est négligeable. Il est souvent préférable, d'un point de vue numérique, de les considérer comme inextensibles [53].

Dès lors, la mesure de la déformation de GREEN sera limitée à la dilatation thermique :

$$g = \alpha(\theta - \theta_0) \quad (8)$$

On écrira, dans ce dernier cas, un principe de HAMILTON "modifié" en remplaçant  $U_1$  par un "potentiel de dislocation"  $D$  qui tiendra compte de la condition d'inextensibilité (8). Cette contrainte nécessite l'utilisation d'un multiplicateur de LAGRANGE :  $\lambda$

$$D = \int_0^{l_0} \lambda [g - \alpha(\theta - \theta_0)] ds_0 \quad (9)$$

cette expression remplacera (4), le cas échéant.

2.2.1.4. Energie potentielle des charges extérieures conservatives.-

On peut directement écrire :

$$U_2 = - \int_0^{l_0} \sum_i f_i^C \cdot u_i ds_0 \quad (10)$$

2.2.1.5. Equations des travaux virtuels.- L'expression (2) peut maintenant se développer comme suit : (la sommation sur les indices répétés est d'application)

- de la relation (3) on déduit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{l_0} \rho_0 A_0 \dot{u}_i \delta \dot{u}_i ds_0$$

soit, en intégrant par partie

$$= \left[ \int_0^{l_0} \rho_0 A_0 \dot{u}_i \delta u_i ds_0 \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{l_0} \rho_0 A_0 \ddot{u}_i \delta u_i ds_0$$

et comme  $\delta u_i = 0$  en  $t=t_1$  et  $t=t_2$  on a finalement :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{l_0} \rho_0 A_0 \ddot{u}_i \delta u_i ds_0 \quad (11)$$

- de la relation (4) on déduit

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{l_0} EA_0 [g - \alpha(\theta - \theta_0)] \delta g ds_0 \quad (12)$$



où, compte tenu de la relation (4) :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell_0} N \cdot \delta g ds_0 \quad (13)$$

le cas échéant, (inextensible) on remplacera les expressions (12) ou (13) par :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta D dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \int_0^{\ell_0} \lambda \cdot \delta g ds_0 + \int_0^{\ell_0} \delta \lambda [g - \alpha(\theta - \theta_0)] ds_0 \right] \quad (13')$$

- de la relation (10) on déduit enfin :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U_2 dt = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell_0} f_i^C \cdot \delta u_i ds_0 \quad (14)$$

Regroupant (11), (13), (14) l'expression (2) peut se mettre sous la forme (cas extensible)

$$\int_0^{\ell_0} [(-\rho_0 A_0 \ddot{u}_i + f_i^C + f_i^{NC}) \delta u_i - N \delta g] ds_0 = 0 \quad (15)$$

où N est défini par la relation (7). La relation (15) est l'équation des travaux virtuels applicables au régime transitoire dans les hypothèses définies au paragraphe 2.1, pour un câble extensible.

Par ailleurs, la similitude des équations 13 et 13' nous permet d'écrire directement une équation analogue pour un câble inextensible :

$$\int_0^{\ell_0} \{(-\rho_0 A_0 \ddot{u}_i + f_i^C + f_i^{NC}) \delta u_i - \lambda \delta g - \delta \lambda [g - \alpha(\theta - \theta_0)]\} ds_0 = 0 \quad (15')$$

Le multiplicateur  $\lambda$  peut être interprété comme l'effort normal de traction dans le câble inextensible.

2.2.1.6. Equations d'équilibre.- Les équations d'Euler du principe de Hamilton, qui sont les équations d'équilibre dynamique rapportées à la configuration initiale se déduisent aisément de la relation 15. Elles s'obtiennent en calculant d'abord la variation de la mesure de la déformation de GREEN. Il vient successivement :

- par la définition (6) :

$$\delta g = \frac{\partial(x_i + u_i)}{\partial s_0} \cdot \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial s_0} \right)$$

permutant les symboles  $\partial$  et  $\delta$  et en intégrant par partie, il vient :

$$\text{d'où } \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{l_0} N \delta g ds_0 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{l_0} \frac{\partial}{\partial s_0} N \frac{\partial(x_i + u_i)}{\partial s_0} \delta u_i ds_0$$

- l'équation des travaux virtuels peut alors se transformer comme suit :

$$\int_0^{l_0} [-\rho_0 A_0 \ddot{u}_i + f_i^C + f_i^{NC} + \frac{\partial}{\partial s_0} N \frac{\partial(x_i + u_i)}{\partial s_0}] \delta u_i ds_0 = 0$$

ce qui implique, vu la valeur arbitraire  $\delta u_i$  :

$$\frac{\partial}{\partial s_0} [N \frac{\partial(x_i + u_i)}{\partial s_0}] + f_i^C + f_i^{NC} - \rho_0 A_0 \ddot{u}_i = 0 \quad (16)$$

(il suffit de remplacer  $N$  par  $\lambda$  pour le cas inextensible et d'ajouter l'équation de contrainte (8)).

Le premier terme représente les forces "élastiques", les deux suivants les forces extérieures et le dernier les forces d'inertie.

La non linéarité géométrique apparaît clairement dans cette équation.

D'une part,  $f_i^{NC}$  est une fonction non linéaire des déplacements (force électromagnétique) et d'autre part, le premier terme varie également de manière non linéaire en fonction des déplacements.

2.2.1.7. Introduction d'une contrainte particulière.- Certains types de postes à haute tension (Bruegel par exemple) possèdent un système particulier de mise sous tension mécanique des câbles : un mécanisme à contrepois schématisé à la figure 3.

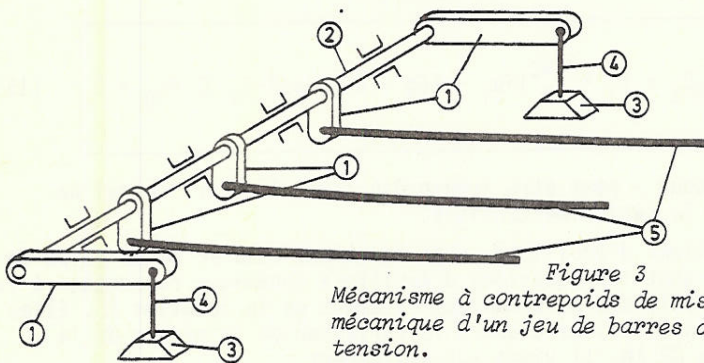


Figure 3

Mécanisme à contrepois de mise sous tension mécanique d'un jeu de barres de poste haute tension.

1. bras de levier  
3. contrepois

2. barre de torsion  
4. câbles de suspension des masses

5. câbles tendus (3 phases)

Ce système permet de maintenir une flèche des câbles quasi constante, indépendamment des conditions de température.

Afin de pouvoir prendre en compte ce type de liaison, il convient de modéliser les différents éléments : les leviers (1), la barre de torsion (2) et les câbles de suspension des masses. La barre de torsion peut être modélisée sans difficulté à l'aide d'éléments de poutre



linéaire classique, dont dans la plupart des cas, seule la raideur en torsion sera prise en compte. Le câble de suspension de la masse peut être modélisé à l'aide d'un élément de câble extensible (théorie détaillée plus haut). En ce qui concerne les leviers, le modèle suivant est proposé :

- on supposera que la géométrie du poste est toujours telle que les câbles sont orientés selon l'axe X et la charpente de suspension selon l'axe Y, auquel cas chacun des bras de levier possède les degrés de liberté suivants (fig. 3')

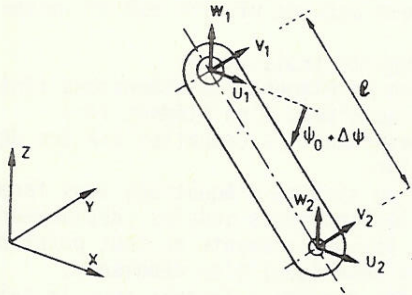


Figure 3'  
Modélisation d'un bras de levier  
du mécanisme décrit à la fig. 3.

- $(u_1, v_1, w_1)$  les déplacements au noeud de fixation du bras sur le tube
- $(u_2, v_2, w_2)$  les déplacements au noeud d'attache du câble soit d'une phase, soit du contrepois
- $\Delta\psi$  la rotation du bras de levier au noeud 1 autour de l'axe Y
- $\psi_0$  la position angulaire initiale du bras de levier par rapport à l'horizontale
- $\Delta\psi$  et  $\psi_0$  sont comptés positivement autour de l'axe Y pour une rotation de la direction OZ vers la direction OX

- on admet que le mécanisme ne peut pas se déplacer selon Y, soit la contrainte :

$$v_1 = v_2 \quad (17)$$

- le levier est inextensible, son seul déplacement possible est une rotation  $\Delta\psi$  superposée aux déplacements des noeuds 1 et 2 dans les directions X et Z, soit les contraintes :

$$u_2 - u_1 = l. [\cos(\psi_0 + \Delta\psi) - \cos \psi_0] \quad (18)$$

$$w_2 - w_1 = l. [\sin \psi_0 - \sin(\psi_0 + \Delta\psi)] \quad (19)$$

ces contraintes sont non linéaires, elles font intervenir le déplacement angulaire de façon transcendante.

Ce type de contraintes non-linéaires sera introduit après discrétisation des équations. On en tiendra compte par la méthode classique des multiplicateurs de LAGRANGE.

### 2.2.2. Discrétisation élément-fini

Nous venons d'établir au paragraphe 2.2.1. la forme faible des équations du mouvement dans les hypothèses détaillées au paragraphe 2.1 (équation 15). Cette équation est valable pour un câble extensible, elle s'adapte au cas inextensible en remplaçant l'effort normal dans le câble N par un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et en ajoutant l'équation de contrainte. Nous avons également introduit dans le modèle des

contraintes non linéaires. Il convient maintenant de discrétiser (c'est-à-dire de porter à un nombre fini les degrés de liberté) ces équations. Nous découpons, en conséquence, la structure en éléments de dimension finie en assurant la continuité des déplacements aux noeuds de jonction. Le champ des déplacements sur un "élément fini" est approché par une fonction polynomiale, les seules inconnues sont donc les valeurs nodales appelées déplacements généralisés. L'équation 15, qui exprime la recherche du minimum d'énergie, est écrite sous forme discrétisée au niveau d'un élément fini, il suffit alors de sommer les contributions de chaque élément pour en déduire le comportement de l'ensemble. En effet, l'énergie est une variable extensive et la minimisation de l'énergie de la structure entière est assurée si elle est minimisée pour chacun des éléments.

En résumé, la discrétisation comporte trois étapes :

- 1.- sectionnement de la structure en éléments de dimensions finies
- 2.- discrétiser l'équation (15) au niveau d'un élément fini
- 3.- assemblage des éléments en exprimant la compatibilité des déplacements aux noeuds de jonction.

Par cette méthode, on obtiendra un système d'équations sous forme matricielle qui permettra d'évaluer les inconnues nodales (déplacements) et, par interpolation polynomiale, les déplacements en tout point de la structure. Les contraintes (tension mécanique) s'en déduisent.

L'étape 1 intervient au niveau des données à fournir pour le calcul. Nous en discuterons ultérieurement.

L'étape 3 ne pose pas de problème particulier. Nous en parlerons sommairement au chapitre 3, paragraphe 3.8.

L'étape 2 est détaillée ci-après.

#### 2.2.2.1. Introduction aux éléments finis isoparamétriques

La discrétisation de l'équation des travaux virtuels nécessite l'introduction de quelques notions de base.

Les inconnues nodales sont dénommées déplacements généralisés  $q_{ij}$  (composante  $i$  ( $i=1,2,3$ ) du déplacement au noeud  $j$  d'un élément). Le champ des déplacements le long d'un élément est approximé par des fonctions (une par noeud), dénommées fonction de forme ou d'interpolation. Elles doivent satisfaire à des caractéristiques de continuité (ce qui permet leur intégrabilité et leur différentiabilité) et de connectivité (pour les connexions entre éléments adjacents). Le choix de polynômes satisfait la première condition si le degré de ces polynômes est bien choisi. Ce degré indique également le degré de l'élément fini dans notre cas, ainsi pour des polynômes de degré 1, 2 et 3 on a respectivement des éléments à 2, 3 ou 4 noeuds appelés éléments du premier, deuxième ou troisième degré.

Les fonctions de forme  $\phi$  sont normalisées et s'expriment en fonction de la variable courante  $\xi \in [-1,1]$  de telles sortes que la représentation du champ des déplacements puisse s'écrire :

$$u_i = \sum_{j=1}^n \phi_j(\xi) \cdot q_{ij} \quad (20)$$

où  $n$  est le nombre de noeud de l'élément ( $\phi$  est donc de degré  $n-1$ )  $q_{ij}$  est la composante  $i$  ( $i=1,2,3$ ) du déplacement généralisé du noeud  $j$  de l'élément.

Pour les degrés 1 à 3, le tableau 1 donne les fonctions d'interpolation



degré	fonction de forme $\xi \in [-1, 1]$			
	noeud 1	noeud 2	noeud 3	noeud 4
1	$\phi_1 = \frac{1-\xi}{2}$	$\phi_2 = \frac{1+\xi}{2}$	-	-
2	$\phi_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)$	$\phi_2 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$	$\phi_3 = (1-\xi)(1+\xi)$	-
3	$\phi_1 = -\frac{1}{16}(1-\xi)(1-3\xi)(1+3\xi)$	$\phi_2 = -\frac{1}{16}(1-3\xi)(1+3\xi)(1+\xi)$	$\phi_3 = \frac{9}{16}(1-\xi)(1-3\xi)(1+\xi)$	$\phi_4 = \frac{9}{16}(1-\xi)(1+3\xi)(1+\xi)$

TABLEAU 1. Fonctions de forme des éléments câbles du premier, deuxième et troisième degrés.

On notera que pour les valeurs de  $\xi$  correspondant à la position des noeuds, la fonction de forme associée vaut l'unité au noeud considéré et zéro aux autres noeuds. On est ainsi assuré de la continuité des déplacements entre deux éléments adjacents.

Le choix du degré d'interpolation 2 ou 3 permettra de considérer un nombre relativement restreint d'éléments finis puisque le champ interpolé est plus précis.

Notons  $u^T(\xi) = [u_1, u_2, u_3] \equiv [u, v, w]$  la matrice colonne des trois composantes du champ des déplacements d'un point de l'élément fini caractérisé par le paramètre  $\xi$ .

Notons  $q^T = [q_{11} \ q_{12} \ q_{13} \ \dots \ q_{n1} \ q_{n2} \ q_{n3}]$  la matrice colonne des valeurs locales des déplacements généralisés des  $n$  noeuds définissant l'élément ( $3n$  composantes)

Notons :

$$P(\xi) = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi) & 0 & 0 & \dots & \phi_n(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1(\xi) & 0 & \dots & 0 & \phi_n(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(\xi) & \dots & 0 & 0 & \phi_n(\xi) \end{bmatrix} \quad (21)$$

la matrice des fonctions de forme de l'élément, de dimension  $(3, 3n)$   
La relation (20) s'écrit matriciellement :

$$u(\xi) = P(\xi) \cdot q \quad (22)$$

L'élément étant isoparamétrique (choix discuté au paragraphe 2.1), sa géométrie est définie par la même transformation

$$x(\xi) = P(\xi) \cdot w \quad (23)$$

où  $x^T(\xi) = [x_1, x_2, x_3] \equiv [x, y, z]$

la matrice colonne des 3 coordonnées d'un point matériel

et  $w^T = [w_{11}, w_{12}, w_{13} \ \dots \ w_{1n}, w_{2n}, w_{3n}]$

la matrice colonne des coordonnées des  $n$  noeuds de l'élément ( $3n$  composantes)

La métrique de la transformation ou jacobien du changement de la variable courante  $s_0$  en variable normalisée  $\xi \in [-1, 1]$  s'obtient de la manière suivante :

$$ds_0 = J_0 d\xi \quad (24)$$

dès lors

$$J_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} \quad (25)$$

et la longueur totale d'un élément s'écrira :

$$l_0 = \int_{-1}^{+1} J_0 d\xi \quad (25)$$

Par la suite, nous effectuerons ce changement de variable de manière à ramener toutes les intégrales sur la longueur en intégrales sur un intervalle  $[-1,+1]$  qui seront alors calculées par la méthode de GAUSS

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) \cdot d\xi = \sum_{i=1}^{NG} f(\xi_i) \cdot W(\xi_i) \quad (26)$$

où NG : nombre de points de GAUSS choisi pour l'intégration numérique  
 $\xi_i$  : la localisation de ces points sur l'intervalle  $[-1,1]$

$W(\xi_i)$ : le "poids" associé à la contribution du point  $\xi_i$

Les valeurs de  $\xi_i$  et  $W(\xi_i)$  sont tabulées, elles sont reprises dans la référence [74] par exemple.

2.2.2.2. Discrétisation de la mesure de GREEN.- Compte tenu de sa définition (équation 6) nous devons discrétiser les expressions

$$\frac{\partial u}{\partial s_0} \text{ et } \frac{\partial x}{\partial s_0}$$

Elles s'obtiennent directement par les relations (22) et (23) après le changement de variable (24) :

$$\frac{\partial u}{\partial s_0} = J_0^{-1} \frac{\partial u}{\partial \xi} = J_0^{-1} \cdot \frac{\partial P}{\partial \xi} \cdot q = Y \cdot q \quad (27)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s_0} = J_0^{-1} \frac{\partial x}{\partial \xi} = J_0^{-1} \cdot \frac{\partial P}{\partial \xi} \cdot w = Y \cdot w \quad (28)$$

où Y est une matrice définie par  $Y = J_0^{-1} \frac{\partial P}{\partial \xi}$  (29)

Avec  $S = Y^T \cdot Y$  matrice symétrique (30)

$B_0 = S \cdot w$  matrice colonne à coefficients indépendants des déplacements q (31)

il vient :

$$g = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial s_0} \frac{\partial x_i}{\partial s_0} + \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial s_0} \right)^2$$

$$= q^T \cdot Y^T \cdot Y \cdot w + \frac{1}{2} q^T \cdot Y^T \cdot Y \cdot q$$

$$\text{ou } g = q^T \cdot B_0 + \frac{1}{2} q^T \cdot S \cdot q \quad (32)$$

Cette relation comporte un terme linéaire quant aux déplacements et un autre quadratique par rapport aux mêmes déplacements.

2.2.2.3. Discrétisation des forces.- Par analogie avec les déplacements généralisés, on définit les forces généralisées appliquées exclusivement aux noeuds des éléments finis. Elles se déduisent de la mise sous forme discrétisée de l'énergie potentielle correspondante.

La relation (15) ou équation des travaux virtuels représente cette énergie potentielle. Nous en déduisons les forces généralisées suivantes en discrétisant cette relation.



- forces externes : soit  $f_i = f_i^C + f_i^{NC}$

$$\int_0^{\ell_0} f_i \cdot \delta u_i \, ds_0 = \int_{-1}^{+1} f^T \cdot P \cdot \delta q \cdot J_0 \, d\xi = \left[ \int_{-1}^{+1} f^T \cdot P \cdot J_0 \, d\xi \right] \cdot \delta q$$

d'où la définition des forces externes généralisées :

$$G_{\text{ext}} = \int_{-1}^{+1} f^T \cdot P \cdot J_0 \, d\xi \quad (33)$$

- forces internes : elles se déduisent du terme

$$\int_0^{\ell_0} N \cdot \delta g \, ds_0 \quad (\text{cas extensible})$$

nous discrétisons d'abord  $\delta g$  par la relation (32); pour rappel :

$$g = q^T \cdot B_0 + \frac{1}{2} q^T \cdot S \cdot q$$

ou  $g = (w + \frac{1}{2}q)^T \cdot S \cdot q \quad (S=S^T)$

De là :  $\delta g = (w + \frac{1}{2}q)^T \cdot S \cdot \delta q + \frac{1}{2} \delta q^T \cdot S \cdot q$

ou  $\delta g = (w + q)^T \cdot S \cdot \delta q \quad (S=S^T) \quad (34)$

Ensuite :  $\int_0^{\ell_0} N \cdot \delta g \, ds_0 = \left[ \int_{-1}^{+1} N \cdot (w+q)^T \cdot S \cdot J_0 \, d\xi \right] \delta q$

d'où la définition des forces internes généralisées :

$$G_{\text{int}} = \int_{-1}^{+1} N \cdot S \cdot (w+q) \cdot J_0 \, d\xi \quad (35)$$

avec pour N la relation (7).

Dans le cas d'un câble inextensible, il convient vu l'analogie des équations (15) et (15') d'une part de remplacer l'expression (35) par une expression similaire en substituant N par  $\lambda$ , le multiplicateur de Lagrange. D'autre part, il convient de définir un nouveau terme par la discrétisation de l'expression (tirée de la relation 15') :

$$\int_0^{\ell_0} \delta \lambda [g - \alpha(\theta - \theta_0)] \, ds_0$$

pour ce faire, on évalue les expressions

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_0} g \, ds_0 &= \int_{-1}^{+1} (w + \frac{1}{2}q)^T \cdot S \cdot q \cdot J_0 \, d\xi \\ &= (w + \frac{1}{2}q)^T \cdot H \cdot q \end{aligned}$$

$$\text{et } \int_0^{l_0} \alpha(\theta - \theta_0) ds_0 = \int_{-1}^{+1} \alpha(\theta - \theta_0) J_0 d\xi = E_T$$

ce qui permet d'écrire :

$$\int_0^{l_0} \delta \lambda [g - \alpha(\theta - \theta_0)] ds_0 = \delta \lambda \left[ \left( w + \frac{1}{2} q \right)^T \cdot H \cdot q - E_T \right] \quad (35')$$

$$\text{où } H = \int_{-1}^{+1} S \cdot J_0 d\xi \quad (36)$$

$$\text{et } E_T = \int_{-1}^{+1} \alpha(\theta - \theta_0) J_0 d\xi \quad (37)$$

- forces d'inertie : elles se déduisent du terme :

$$\begin{aligned} \int_0^{l_0} \rho_0 A_0 \ddot{u}_i \delta u_i ds_0 &= \int_{-1}^{+1} \rho_0 A_0 (P(\xi) \cdot \ddot{q})^T \cdot P \cdot \delta q \cdot J_0 d\xi \\ &= \ddot{q}^T \left[ \int_{-1}^{+1} \rho_0 A_0 P^T \cdot P \cdot J_0 d\xi \right] \delta q = (M \ddot{q})^T \cdot \delta q \end{aligned}$$

En définissant la matrice de masse

$$M = \int_{-1}^{+1} \rho_0 A_0 P \cdot P^T J_0 d\xi \quad (38)$$

les forces d'inertie généralisées sont caractérisées par :

$$G_{\text{inertie}} = M \cdot \ddot{q} \quad (39)$$

Remarque : La définition (36) de la matrice de masse indique une matrice symétrique et définie positive. Cette matrice est "pleine". Parallèlement à cette définition on introduit la matrice de masse "diagonale"

$$M = \text{diag} (\mu_1 \mu_1 \mu_1 \dots \mu_n \mu_n \mu_n) \quad (40)$$

$$\text{où } \mu_i = \int_{-1}^{+1} \rho_0 A_0 \phi_i^2(\xi) J_0 d\xi \quad (41)$$

où les termes de couplages sont négligés. Physiquement, les  $\mu_i$  correspondent à des masses concentrées aux noeuds de l'élément. Cette deuxième définition n'entraîne évidemment aucun effort d'inversion mais elle est approximative. Elle conduit à une sous-estimation des fréquences du modèle [50].

2.2.2.4. Forme discrète de l'équation des travaux virtuels.- Dans le cas d'un élément fini "câble extensible" l'expression (15) de l'équation des travaux virtuels :

$$\int_0^{l_0} [(-\rho_0 A_0 \ddot{u}_i + f_i^C + f_i^{NC}) \delta u_i - N \delta g] ds_0 = 0$$

se discrétise sous la forme (relations (33), (35), (37)) :

$$\delta q^T \cdot (-M \ddot{q} + G_{ext} - G_{int}) = 0 \quad (42)$$

Dans le cas d'un élément fini "câble inextensible", l'expression (15') de l'équation des travaux virtuels :

$$\int_0^{l_0} \{(-\rho_0 A_0 \ddot{u}_i + f_i^C + f_i^{NC}) \delta u_i - \lambda \delta g - \delta \lambda [g - \alpha(\theta - \theta_0)]\} ds_0 = 0$$

se discrétise sous la forme (relations (33), (35) avec  $\lambda$  au lieu de  $N$ , (35') et (37)) :

$$\delta q^T \cdot (-M \ddot{q} + G_{ext} - G'_{int}) + \delta \lambda [E_T - (w + \frac{1}{2}q)^T \cdot H \cdot q] = 0 \quad (43)$$

Les équations (42) et (43) permettent d'en déduire les équations d'équilibre dynamique :

câble extensible : $M \ddot{q} = G_{ext} - G_{int}$ (inconnues : $q$ )	(44)
câble inextensible : $M \ddot{q} = G_{ext} - G'_{int}$ (inconnues : $q, \lambda$ )	(45)
$E_T = (w + \frac{1}{2}q)^T \cdot H \cdot q$	(46)

Equations dans lesquelles :

- $G_{ext}$  est défini à la relation (33), il contient des termes fonction des déplacements (force électromagnétique)
- $G_{int}$  est défini à la relation (35), c'est une fonction implicite de l'état "q" du système
- $G'_{int}$  est identique à la relation (35) sauf que  $N$  est remplacé par  $\lambda$
- $E_T$  est défini à la relation (37)
- $H$  est défini à la relation (36)
- $M$  est défini à la relation (38) ou (40)
- $\ddot{q}$  est la matrice colonne des accélérations des coordonnées généralisées "q" (déplacements aux noeuds)

2.2.2.5. Introduction de contraintes non-linéaires particulières.- Au paragraphe 2.2.1.7. nous avons introduit certaines contraintes non-linéaires définies aux relations (17), (18) et (19), elles constituent un système d'équations de contraintes que nous caractériserons par :

$$C(q) = 0 \quad (47)$$

Le principe lié au respect du système (47) est identique à celui utilisé pour la contrainte d'inextensibilité. Cette fois, les contraintes sont déjà discrétisées.

Il suffit alors d'"élargir" la forme discrète de l'équation des travaux virtuels en ajoutant aux expressions (42) ou (43) les extensions suivantes :



$$\delta q^T \left[ \sum_{i=1}^{NC} \lambda_i \frac{\partial C_i}{\partial q} \right] + \sum_{i=1}^{NC} \delta \lambda_i C_i = 0 \quad (48)$$

où NC est le nombre de contraintes (3 dans le cas présent, correspondant aux relations (17), (18) et (19)).

On en déduira aisément les équations d'équilibre, comme on l'a fait plus haut, par annulation des facteurs de  $\delta q$  et des  $\delta \lambda$ .

### 2.2.3. Formulation incrémentale des équations d'équilibre discrétisées

La résolution des systèmes non-linéaires d'équations d'équilibre (44) à (46), avec le complément tiré de (48) éventuellement, adopte la méthode des approximations successives. Connaissant une valeur approchée  $\tilde{q}$  du champ des déplacements,  $\tilde{g}$  de la déformation et  $\tilde{\lambda}$  des multiplicateurs de LAGRANGE, on exprimera la valeur "corrigée" sous la forme :

$$\begin{cases} q = \tilde{q} + \Delta q \\ g = \tilde{g} + \Delta g \\ \lambda = \tilde{\lambda} + \Delta \lambda \end{cases} \quad (49)$$

où les  $\Delta q$ ,  $\Delta g$  et  $\Delta \lambda$  sont considérés comme des infiniments petits. Les valeurs finales seront atteintes lorsque les accroissements correspondants  $\Delta q$ ,  $\Delta g$  et  $\Delta \lambda$  seront des infiniments petits du second ordre; la quantification de ce critère sera discutée plus avant.

A ce stade, nous ne traiterons que le cas statique car la correction due à l'accélération sera déduite des schémas d'intégration qui seront abordés au chapitre 3.

2.2.3.1. Incrément de la mesure de GREEN.- Il se déduit de la relation (32) en se servant des relations (49). On obtient :

$$\Delta g = (B_0^T + \tilde{q}^T \cdot S) \cdot \Delta q + \frac{1}{2} \Delta q^T \cdot S \cdot \Delta q \quad (50)$$

$$\Delta g = B(\tilde{q}) \cdot \Delta q + \frac{1}{2} \Delta q^T \cdot S \cdot \Delta q \quad (50')$$

$$\text{avec } B(\tilde{q}) = B_0 + S \cdot \tilde{q} \quad (51)$$

2.2.3.2. Expression des forces pour un incrément de déplacement.- Les forces externes discrétisées font intervenir deux termes :

$$G_{\text{ext}}^\Delta = G_{\text{ext}} \Big|_{\tilde{q} + \Delta q} = G_{\text{ext}} \Big|_{\tilde{q}} + \frac{\partial G_{\text{ext}}}{\partial q} \Big|_{\tilde{q}} \cdot \Delta q$$

Le deuxième terme du membre de droite n'existe que pour les forces non conservatives. Dans notre problème, seules les forces électromagnétiques sont non conservatives. Elles interviendront donc uniquement au niveau de la réponse transitoire et les corrections  $\Delta q$  seront internes à un pas de temps. Compte tenu de la petitesse des pas, la modification de la force électromagnétique en fonction des déplacements, peut être négligée lors des corrections au sein d'un pas. Aussi, nous simplifierons l'expression ci-dessus en :

$$G_{\text{ext}}^\Delta = G_{\text{ext}} \Big|_{\tilde{q}}$$

Pour les forces internes discrétisées, dans le cas extensible, il convient d'établir tout d'abord les expressions de  $\delta(\Delta g)$  et de N.

Vu la relation (50'), il vient :

$$\delta(\Delta g) = B(\tilde{q}) \cdot \delta(\Delta q) + \Delta q^T \cdot S \cdot \delta(\Delta q) \quad (52)$$

et vu la relation (7) :

$$N = EA_0 [\tilde{g} + \Delta g - \alpha(\theta - \theta_0)] = \tilde{N} + EA_0 \cdot \Delta g \quad (53)$$

Dès lors, on peut écrire la relation :

$$\int_0^{\tilde{l}_0} N \cdot \delta(\Delta g) \cdot ds_0 = G_{int}^{\Delta} \cdot \delta(\Delta q)$$

qui, compte tenu des relations (50'), (52) et (53), mène à la définition

$$G_{int}^{\Delta} = \int_{-1}^{+1} EA_0 \cdot [\tilde{g} + B(\tilde{q}) \cdot \Delta q + \frac{1}{2} \Delta q^T \cdot S \cdot \Delta q - \alpha(\theta - \theta_0)] \cdot [B(\tilde{q}) + \Delta q^T \cdot S] J_0 d\xi \quad (54)$$

Dans le cas d'un câble inextensible, on raisonne de la même manière :

$$\int_0^{\tilde{l}_0} (\tilde{\lambda} + \Delta \lambda) \cdot \delta(\Delta g) ds_0 = G_{int}^{\Delta T} \cdot \delta(\Delta q)$$

d'où

$$G_{int}^{\Delta T} = (\tilde{\lambda} + \Delta \lambda) \cdot [H \cdot (w + \tilde{q}) + H \cdot \Delta q] \quad (55)$$

et le terme correspondant au multiplicateur de Lagrange :

$$\int_0^{\tilde{l}_0} \delta(\Delta \lambda) \cdot [\tilde{g} + \Delta g - \alpha(\theta - \theta_0)] ds_0 = -\Lambda \cdot \delta(\Delta q)$$

d'où

$$\Lambda = (w + \frac{1}{2}\tilde{q})^T \cdot H \cdot \tilde{q} - E_T + (w + \tilde{q})^T \cdot H \cdot \Delta q + \frac{1}{2} \Delta q^T \cdot H \cdot \Delta q \quad (56)$$

2.2.3.3. Introduction des contraintes particulières.- L'aspect incrémental des équations (48) s'obtient par développement en série de Taylor (limité au premier terme).

On obtient de la sorte :

$$\begin{aligned} \delta(\Delta q)^T \left[ \sum_{i=1}^{NC} [(\tilde{\lambda}_i + \Delta \lambda_i) \frac{\partial C_i}{\partial q} \Big|_{\tilde{q}} + \tilde{\lambda}_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial q^2} \Big|_{\tilde{q}}] \cdot \Delta q \right] \\ + \sum_{i=1}^{NC} \delta(\Delta \lambda_i) \left[ C_i + \frac{\partial C_i}{\partial q} \Big|_{\tilde{q}} \cdot \Delta q \right] = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

2.2.3.4. Forme incrémentale des équations discrétisées d'équilibre.- En nous limitant à l'aspect statique (on introduira l'aspect dynamique au chapitre 3), on peut aisément déduire les relations suivantes :

\* câble extensible : la relation (54), compte tenu que la définition des forces externes n'est pas modifiée, conduit à l'équation d'équilibre



incrémental :

$$[K_0 + K(\tilde{q}) + K(\tilde{N})] \cdot \Delta q = f_{\text{ext}} - f_{\text{int}} \quad (58)$$

dans laquelle :

$$K_0 = \int_{-1}^{+1} EA_0 B_0^T \cdot R_0 J_0 d\xi \quad (59)$$

$$K(\tilde{q}) = \int_{-1}^{+1} EA_0 [S \cdot q \cdot q^T S + B_0 \cdot q^T \cdot S + S \cdot q \cdot B_0^T] J_0 d\xi \quad (60)$$

$$K(\tilde{N}) = \int_{-1}^{+1} EA_0 [\tilde{g} - \alpha(\theta - \theta_0)] \cdot S J_0 d\xi = \int_{-1}^{+1} \tilde{N} \cdot S J_0 d\xi \quad (61)$$

$$f_{\text{int}} = \int_{-1}^{+1} \tilde{N} \cdot B^T(\tilde{q}) J_0 d\xi \quad (i) \quad (62)$$

$$f_{\text{ext}} = G_{\text{ext}}^\Delta = G_{\text{ext}} \quad (63)$$

On peut encore poser  $K_T = K_0 + K(\tilde{q}) + K(\tilde{N})$  la matrice de raideur tangente, auquel cas la relation (58) peut s'écrire

$$\boxed{K_T \cdot \Delta q = f_{\text{ext}} - f_{\text{int}}} \quad (65)$$

La matrice  $K_T$  contient un terme constant ( $K_0$ ), une matrice de rigidité géométrique, fonction des déplacements généralisés [ $K(\tilde{q})$ ] et une matrice de contrainte dont les termes dépendent de l'état de déformation [ $K(\tilde{N})$ ]. On a négligé les termes de second ordre en  $\Delta q$ . Chacune des expressions (59) à (62) sera intégrée numériquement par la méthode de GAUSS [selon la relation (26)].

En annexe 3, on reprendra l'établissement des différentes matrices dans un cas simple de manière à clarifier ces notions sur un exemple concret.

\* câble inextensible : les expressions (55) et (56) compte tenu que la définition des forces externes n'est pas modifiée, conduit au système d'équation d'équilibre incrémental :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\lambda} \cdot H & H \cdot (w + \tilde{q}) \\ (w + \tilde{q})^T \cdot H & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\text{ext}} - \tilde{\lambda} H \cdot (w + \tilde{q}) \\ E_T - (w + \frac{1}{2} \tilde{q})^T \cdot H \cdot \tilde{q} \end{bmatrix} \quad (66)$$

(i) On remarquera que cette définition est identique à (35) qui serait exprimée en fonction des valeurs approchées  $\tilde{N}$  et  $\tilde{q}$ . On a en effet,

$$G_{\text{int}}^\Delta = G_{\text{int}} \Big|_{\tilde{q}} + \frac{\partial G_{\text{int}}}{\partial q} \Big|_{\tilde{q}} \cdot \Delta q = f_{\text{int}} + K_T \cdot \Delta q$$



la matrice H, définie à la relation (36) est indépendante de l'état de déformation. On tiendra compte de cette remarque dans l'élaboration du logiciel. Comme plus haut, on a négligé les termes de second ordre ( $\Delta\lambda.\Delta q$  et  $\Delta q.\Delta q$ )

\* introduction de contraintes particulières : l'expression (57) permet de définir le système d'équation :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial q^2} \Big|_{\tilde{q}} & \frac{\partial C_1}{\partial q} \Big|_{\tilde{q}} & \frac{\partial C_2}{\partial q} \Big|_{\tilde{q}} & \frac{\partial C_3}{\partial q} \Big|_{\tilde{q}} \\ \frac{\partial C_1}{\partial q} \Big|_{\tilde{q}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial C_2}{\partial q} \Big|_{\tilde{q}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial C_3}{\partial q} \Big|_{\tilde{q}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta\lambda_1 \\ \Delta\lambda_2 \\ \Delta\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial C_i}{\partial q} \Big|_{\tilde{q}} \\ -C_1(\tilde{q}) \\ -C_2(\tilde{q}) \\ -C_3(\tilde{q}) \end{bmatrix} \quad (67)$$

Les différents termes de la matrice sont calculés en annexe 7 pour le cas particulier des contraintes non-linéaires (17) à (19).

2.2.3.5. En résumé.- Nous venons d'établir, pour une étude statique, les relations incrémentales (65), (66) et (67). Les matrices des membres de gauche de ces relations et les vecteurs des membres de droite de ces mêmes relations représentent les matrices caractéristiques et les "seconds membres" de trois éléments finis qui ont été développés dans le cadre de ce travail. Ces relations correspondent à l'étape n°2 citée au paragraphe 2.2.2., c'était bien le but que nous nous étions assigné. L'aspect dynamique sera introduit au chapitre 3.

### 2.3. HYPOTHESES ELECTRIQUES

Les forces en jeu font notamment intervenir la force électromagnétique qui apparaît sur un conducteur parcouru par une intensité de courant et plongé dans une induction magnétique. Dans notre cas, l'induction magnétique est induite par le passage d'une intensité de courant dans un autre conducteur. Le calcul de la force à un instant donné nécessite donc avant tout la connaissance instantanée de l'intensité du courant.

Nous ferons les hypothèses suivantes à ce propos.

2.3.1. Les intensités de courants seront concentrées sur l'axe des conducteurs

L'inégale répartition de l'intensité de courant dans la section du conducteur due notamment à la constitution des câbles, à l'effet pelliculaire et à l'effet de proximité est quantitativement négligeable (inférieure à 1 %) pour autant que la distance entre conducteurs reste supérieure à 3 fois leur diamètre. Cette conclusion résulte d'études récentes que nous avons effectuées et qui sont en partie reprises à la référence [87].

Dès lors, cette hypothèse est valable pour tous les cas de court-circuit sauf pour les conducteurs en faisceaux où une correction devra être apportée principalement liée à l'effet de proximité.

Lors de l'étude du chapitre 7, relative aux faisceaux découplés, nous devons également tenir compte de cet effet.

### 2.3.2. Les intensités des courants de charge seront négligées

Compte tenu des intensités de court-circuit considérées dans le cadre de cette étude, l'influence des courants de charge est également négligeable. L'imprécision des données pour les intensités de court-circuit englobe largement cette restriction.

Bien entendu, cette hypothèse ne sera pas retenue au chapitre 7.

### 2.3.3. La variation temporelle de l'intensité du courant

Nous supposons qu'elle se mettra sous la forme :

$$i(t) = \sqrt{2} I_{eff} [\sin(\omega t + \phi) - e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \phi] \quad (68)$$

ce qui correspond à la réponse transitoire résultant de la fermeture en  $t=0$ , d'un circuit R, L série alimenté par une force électromotrice alternative de la forme :

$$e(t) = \sqrt{2} E_{eff} \sin(\omega t + \gamma) \quad (68')$$

Dans l'équation (68), les différents termes représentent :

$$I_{eff} = \frac{E_{eff}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad \omega = 2\pi f$$

et  $\phi = \gamma - \theta$  où  $\theta = \text{artg } \omega \tau$  (68'')

L'expression du courant correspond à la réponse d'un circuit dont les composants correspondent à l'équivalent Thevenin du réseau, vu du défaut à un instant donné. En toute rigueur, l'expression devrait être plus complexe et notamment tenir compte des différents régimes subtransitoires, transitoires et permanents liés aux phénomènes complexes qui apparaissent dans les machines tournantes. Différentes constantes de temps devraient apparaître liées aux lignes (de l'ordre de 20 ms), aux transformateurs (de l'ordre de 100 ms) et aux machines (de l'ordre de 300 ms) et  $I_{eff}$  ne serait plus constant.

Horward [86] a fait une étude de ce type sur le réseau belge.

Nous pensons que ces phénomènes ont une influence non négligeable sur la réponse, suite à l'étude paramétrique sur  $\tau$  effectuée au chapitre 5. Nous avons cependant limité notre étude à ce modèle simplifié car nous visons principalement à mettre au point un logiciel apte à étudier le comportement mécanique des conducteurs souples soumis à des efforts d'origine électromagnétiques. La modification du modèle de l'intensité de courant ne poserait aucun problème à son introduction dans le logiciel sinon qu'il faut en rentrer les données correspondantes.

Signalons toutefois qu'il est superflu d'envisager un modèle trop détaillé compte tenu de l'imprécision sur la valeur retenue de l'intensité du courant de court-circuit.

Enfin, d'une part, dans le cadre des vérifications expérimentales (chapitre 4), le modèle adopté convient parfaitement, vu les conditions des essais effectués à LABORELEC; et d'autre part, les seules données accessibles dans la littérature pour ce type de problème sont actuellement la valeur efficace de l'intensité du courant ( $I_{eff}$ ), la valeur de première crête ou le facteur d'asymétrie ( $\varphi = \frac{I_{1cr}}{I_{eff}}$ ) et une constante



de temps ( $\tau$ ). La valeur de  $\phi$  se déduira du facteur d'asymétrie. Ce dernier sera toujours inférieur à  $2\sqrt{2} = 2,82$ , il sera maximal quand  $\gamma=0$ .

#### 2.3.4. Les forces électrostatiques seront négligées

Ces forces ont pour origine la charge électrostatique portée par chaque conducteur, elles se déduisent de la loi de Coulomb et varient comme le carré de la différence de potentiel entre les phases. CALVAER (i) a démontré rigoureusement qu'il y avait équilibre entre les forces électrostatiques et électromagnétiques pour une intensité de courant correspondant au transit de la puissance naturelle. En cas de court-circuit, d'une part, la force électromagnétique, proportionnelle au carré du courant, est amplifiée par un facteur bien supérieur à 100 alors que les forces électrostatiques, proportionnelles au carré de la tension, sont réduites, suite à la chute de tension conséquence du défaut. Après disparition du court-circuit, si les câbles restent sous tension, les forces électrostatiques sont négligeables par rapport aux autres forces en présence (élastique, inertielle). Ces forces sont donc négligeables dans les problèmes étudiés, sauf à nouveau au chapitre 7 où nous en tiendrons compte.

#### 2.3.5. L'intégration de la force par voie numérique

Relativement à l'intégration numérique de la force électromagnétique, il convient d'inspecter l'intégrant afin de conclure à la validité d'une telle intégration.

Pour introduire les considérations qui vont suivre, examinons la force linéique agissant entre deux conducteurs rectilignes (fig. 4).

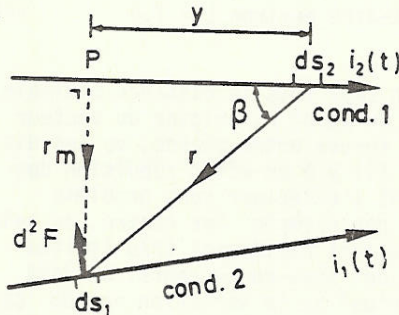


Figure 4

Force électromagnétique élémentaire sur un conducteur parcouru par une intensité de courant et plongé dans une induction magnétique créée par un autre conducteur.

La force linéique agissant sur le conducteur 1, au point considéré, vaut : (formule explicitée plus loin)

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i_1 \cdot i_2 \cdot e_1 \wedge \int \frac{e_2 \wedge r}{\|r\|^3} ds_2 \quad (69)$$

soit  $r$  le vecteur joignant un élément  $ds_2$  du conducteur 2 à un élément  $ds_1$  du conducteur 1;

soient  $i_1$  et  $i_2$  les valeurs instantanées des intensités de courant dans chacun des conducteurs.

soit  $\|r_m\| = d(s_1)$  la distance minimum entre un point du conducteur 1 et le conducteur 2.

soit  $e_1$  et  $e_2$  des vecteurs unitaires orientés selon le sens des courants, dans l'axe des conducteurs.

soit  $y$  la distance indiquée.

(i) CALVAER A. Forces agissant sur les conducteurs de lignes guidant des ondes transversales électromagnétiques. C.R. Acad. Sc. Paris, t 280, série B, pp. 757-760 23 juin 1975

Le numérateur de l'intégrand représente un vecteur de module et de direction constante, en effet,  $\|e_2 \wedge r\| = \|r\| \cdot \sin \beta = d$  on peut dès lors remplacer ce numérateur par le vecteur  $e_2 \wedge r_m$  ; le dénominateur de l'intégrand peut s'exprimer quant à lui :

$$\|r\|^3 = (y^2 + d^2)^{3/2} \quad (70)$$

L'expression (69) s'écrit alors :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \cdot i_2 e_1 \wedge \int \frac{e_2 \wedge r_m}{(y^2 + d^2)^{3/2}} dx \quad (\text{N/m}) \quad (71)$$

ce qui donne, en module :

a) dans le cas où le conducteur 2 est infiniment long :

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d} \quad (\text{N/m}) \quad (72)$$

b) dans le cas où le conducteur 2 a une longueur limitée  $2L$  et est situé symétriquement par rapport au point P de la fig. 4 :

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 \cdot i_2}{d} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + d^2}} \quad (\text{N/m}) \quad (73)$$

La valeur de l'intégrale infinie est approchée à un pour cent près

$$\text{pour } \frac{L}{\sqrt{L^2 + d^2}} = 0,99 \text{ c'est-à-dire environ } L \approx 7 \cdot d \quad (74)$$

La zone d'influence vaut donc environ sept fois la distance minimale entre conducteurs, de part et d'autre du point P, origine du vecteur  $r_m$  (fig. 4). Dès lors, le calcul des forces entre phases, vu les distances importantes pendant le défaut (il y a en effet répulsion des conducteurs quand la force agit), peut s'effectuer sans problème particulier par la méthode de Gauss, par exemple. Par contre, au sein d'un faisceau, la zone d'influence devient rapidement très limitée suite au rapprochement et au contact des sous-conducteurs. On doit donc intégrer une fonction très "pointue" vu la variation rapide de l'intégrand (en  $\frac{1}{x}$ ). L'augmentation du nombre de points de Gauss ou

l'affinement de la discrétisation ne sont pas de bonnes solutions pas plus sur le plan numérique que pratique, ni économique. On propose dans ce cas de rechercher la distance minimale entre conducteurs par rapport à un point de Gauss du conducteur 1 et d'assimiler le conducteur 2 par sa tangente, à l'origine du vecteur  $r_m$  ainsi positionné. Compte tenu de la proximité des câbles, on peut assimiler le conducteur 2 à une longueur infinie vu les remarques précitées, dès lors on approchera l'intégration sur le conducteur 2 par la valeur :

$$dF_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 \cdot i_2 \frac{e_1 \wedge (e_2 \wedge r_m)}{\|r_m\|^2} \cdot J_0 d\xi$$

(notations à l'annexe 6)



Finalement, l'intégration se réduit à une intégration sur le conducteur 1 qui peut s'effectuer par la méthode de GAUSS (i) vu l'aspect régulier de l'intégrand dans ce cas.

## 2.4. EVALUATION DES FORCES ELECTROMAGNETIQUES

### 2.4.1. Considérations générales

Un conducteur électrique parcouru par un courant  $i_1(t)$  et placé dans une induction magnétique créée par un conducteur parcouru par un courant  $i_2(t)$  est soumis à une force électromagnétique définie par la formule (fig. 5).

$$d^2F = i_1(t) \cdot i_2(t) \cdot K \quad (76)$$

$$\text{où } K = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{ds_1 \wedge (ds_2 \wedge r)}{\|r\|^3} \quad (77)$$

La formule (77) n'est pas réciproque, en effet, on ne considère que des éléments de conducteur.

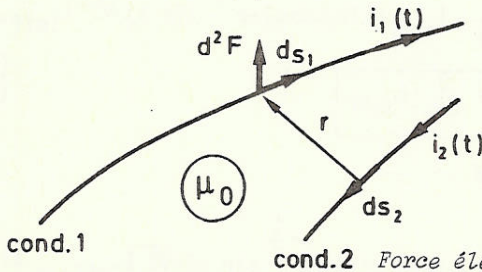


Figure 5

Force électromagnétique élémentaire sur un conducteur parcouru par une intensité de courant et plongé dans une induction magnétique créée par un autre conducteur

La direction de la force sera toujours orthogonale au conducteur.

Vu les hypothèses, on peut écrire les intensités de courant sous la forme

$$i(t) = \sqrt{2} I_{\text{eff}} \cdot [\sin(\omega t + \phi) - e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \phi]$$

La force, proportionnelle au carré du courant, sera toujours une superposition de trois composantes : une pseudo-continue et deux pseudo-périodiques de fréquences  $\frac{\omega}{2\pi}$  et  $\frac{\omega}{\pi}$  soit 50 et 100 Hz dans nos pays.

La force varie comme l'inverse de la distance entre conducteurs mais son évaluation demande l'intégration d'une fonction en  $\frac{1}{r^3}$ , ce qui

demande certaines précautions commentées au paragraphe 2.3.5.

Le facteur K (relation (77)) varie beaucoup plus lentement que les intensités de courant suite à l'inertie des conducteurs, on en tiendra compte lors de l'intégration numérique de la force.

(i) Poids et abscisse de Gauss peuvent par exemple se trouver chez ABRAMOVITZ M, STEGUN A., page 916, Handbook of Math. functions, Dover publ., New York 1972

Enfin, la dépendance des intensités de courant implique la connaissance du type de défaut, ce qui sera discuté plus avant.

#### 2.4.1. Types de défauts

Dans le cadre de notre étude, nous négligerons l'impédance de défaut. Si nous définissons \*  $I_{3\text{eff}}$  la valeur efficace de l'intensité du courant de c-c triphasé asymétrique

- \*  $V$  la tension efficace entre phase et neutre
- \*  $Z_d$  l'impédance directe du réseau vu du défaut
- \*  $Z_0$  l'impédance homopolaire du réseau vu du défaut
- \*  $\alpha = \frac{Z_0}{Z_d}$

et si nous ne faisons pas de distinction entre les impédances directes et inverses, on peut établir après quelques calculs par les composantes de Clarke que les intensités de défaut en fonction du temps s'écrivent pour les différents cas :

##### 2.4.2.1. Défaut monophasé-terre.-

$$\begin{cases} i_1 = 0 \text{ et } i_2 = 0 \\ i_3(t) = \sqrt{2} \cdot \frac{3}{2+\alpha} \cdot I_{3\text{eff}} (\sin(\omega t + \phi) - e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \phi) = \sqrt{2} I_{1\text{eff}} \cdot a(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} (78) \\ (78') \end{matrix}$$

avec la définition  $I_{1\text{eff}} = \frac{3}{2+\alpha} I_{3\text{eff}}$  (78')

##### 2.4.2.2. Défaut biphasé-isolé.-

$$\begin{cases} i_1(t) = 0 \\ i_2(t) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} I_{3\text{eff}} (\sin(\omega t + \phi) - e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \phi) = \sqrt{2} I_{2\text{eff-isolé}} \cdot a(t) \\ i_3(t) = -i_2(t) \end{cases} \quad (79)$$

avec la définition  $I_{2\text{eff-isolé}} = \frac{\sqrt{3}}{2} I_{3\text{eff}}$  (79')

##### 2.4.2.3. Défaut biphasé-terre.-

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2(t) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1+2\alpha} I_{3\text{eff}} \left[ \cos(\omega t + \phi + \frac{2\pi}{3}) - \cos(\phi + \frac{2\pi}{3}) e^{-\frac{t}{\tau}} + \alpha (-\cos(\omega t + \phi) + \cos \phi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \end{cases} \quad (80)$$

$$\begin{cases} i_3(t) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1+2\alpha} I_{3\text{eff}} \left[ -\cos(\omega t + \phi - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\phi - \frac{2\pi}{3}) e^{-\frac{t}{\tau}} + \alpha (\cos(\omega t + \phi) - \cos \phi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \end{cases} \quad (80')$$

On peut définir :  $I_{2\text{eff-terre}} = \frac{\sqrt{3}}{1+2\alpha} \sqrt{1+\alpha^2} I_{3\text{eff}}$  (80'')



#### 2.4.2.4. Défaut triphasé symétrique

$$\begin{cases} i_1(t) = \sqrt{2} I_{3\text{eff}} (\sin(\omega t + \phi) - e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \phi) = \sqrt{2} I_{3\text{eff}} \cdot a(t) & (81) \\ i_2(t) = \sqrt{2} I_{3\text{eff}} (\sin(\omega t + \phi - \frac{2\pi}{3}) - e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\phi - \frac{2\pi}{3})) & (81') \\ i_3(t) = \sqrt{2} I_{3\text{eff}} (\sin(\omega t + \phi + \frac{2\pi}{3}) - e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\phi + \frac{2\pi}{3})) & (81'') \end{cases}$$

avec, pour chaque cas,  $I_{3\text{eff}} = \frac{V}{Z_d}$  (82)

#### 2.4.2.5. Remarques.-

Le défaut biphasé-terre rend l'expression du défaut biphasé-isolé quand  $Z_0$  (ou  $\alpha$ ) tend vers l'infini. D'autre part, un cas particulier intéressant correspond à  $\frac{Z_0}{Z_d} = \alpha = 1$ ; auquel cas :

$$\begin{cases} i_2(t) = +\sqrt{2} I_{3\text{eff}} [\sin(\omega t + \phi - \frac{2\pi}{3}) - \sin(\phi - \frac{2\pi}{3}) e^{-\frac{t}{\tau}}] & (83) \\ i_3(t) = +\sqrt{2} I_{3\text{eff}} [\sin(\omega t + \phi + \frac{2\pi}{3}) - \sin(\phi + \frac{2\pi}{3}) e^{-\frac{t}{\tau}}] & (83') \end{cases}$$

dans ce cas particulier on a l'égalité  $I_{2\text{eff-terre}} = I_{3\text{eff}}$

On retrouve l'expression des intensités de courant dans les phases 2 et 3 d'un défaut triphasé; ce qui est logique. Par ailleurs, si  $\alpha=1$ , le défaut mono-terre donne encore la même valeur que le cas triphasé.

Enfin, pour les points "chauds" du réseau (correspondant à une intensité élevée du courant de court-circuit), il y a presque toujours des transformateurs 400/150 kV et, non loin des groupes alternateurs-transformateurs. Le neutre de ces transformateurs est mis à la terre de sorte que l'impédance homopolaire y est faible. Nous en donnons pour preuve le tableau 2 extrait d'un récent rapport de la CPTÉ [79]. Il y figure les intensités de courant de court-circuit pour la période 1980-1981 au niveau 150 kV (en p.u., puissance de base 1000 MVA, intensité de base 3850 A).

	$I_{3\text{eff}}$	$I_{1\text{eff}}$	$Z_0/Z_d$	$I_{2\text{-Teff}}^*$
Breughe1	9,11	9,54	0,866	9,34
Gouy 2	6,24	6,4	0,924	6,32
Mercator 2	6,59	6,95	0,85	6,78

\* cette colonne a été établie sur la base de l'équation (80")

TABLEAU 2

Intensités de court-circuit aux points chauds du réseau pour la période 1980-1981

Soit 35 kA à Breughe1 en court-circuit triphasé. On constate que la valeur  $\frac{Z_0}{Z_d}$  peut devenir inférieure à 1 aux points "chauds du réseau".

En aval, compte tenu des impédances des lignes, on obtient des valeurs de  $\frac{Z_0}{Z_d}$  de l'ordre de 2 à 4.

#### 2.4.3. Influence du type de défaut sur les forces électromagnétiques

Les forces électromagnétiques font apparaître le produit des courants. L'influence des déphasages est donc capitale notamment pour la composante continue de la force. Les fréquences propres d'oscillation des câbles dans les installations électriques (postes e.g.) tels que les postes sont relativement basses, de l'ordre du hertz. Dès lors, la réponse mécanique du système est pratiquement aveugle aux sollicitations de fréquences élevées induites par les grandeurs électriques. La composante unidirectionnelle sera donc primordiale pour la détermination du mouvement.

Les valeurs de crête sont donc d'un intérêt secondaire, pour les phénomènes basses fréquences tels ceux relatifs au mouvement entre phases.

Dans ces circonstances, ce seront en général le défaut biphasé-isolé et le défaut triphasé, qui conduiront aux contraintes mécaniques les plus importantes. En effet, la force, dans ces deux cas seulement, est unidirectionnelle [81]. (voir fig. 6).

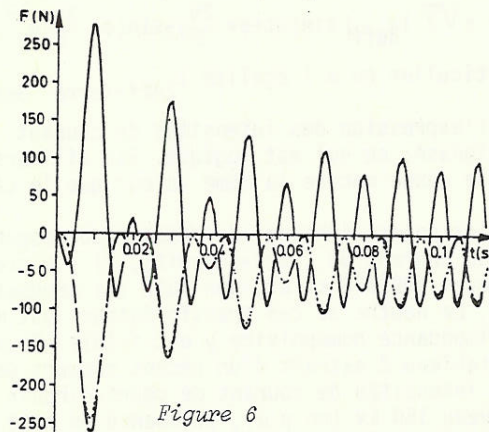


Figure 6

Variation temporelle de la force électromagnétique en un point donné du réseau (asymétrie maximale).  $I_{eff}=45500$  A,  $\tau = 0,03$  s.,  $a = 7,5$  m.

- Phase externe lors d'un défaut triphasé
- Phase médiane lors d'un défaut triphasé
- ..... Phases d'un défaut biphasé-isolé.

La figure 7, tirée d'essais effectués en Tchécoslovaquie [76] visualise bien l'effet de la composante continue dans un cas triphasé.



Figure 7

Allure du débattement des trois phases à mi-portée, dans le cas d'un défaut triphasé. ( $A=1340\text{mm}^2$ ,  $a=2,5\text{m}$ ;  $I_{eff}=39000\text{A}$ ;  $t_{a-c}=0,9\text{s}$ .;  $T_0=11800\text{N}$ ;  $S=40\text{m}$ ).



La phase médiane est pratiquement insensible à la force et demeure quasi-immobile. Compte tenu de cet effet particulier la contrainte électrique (distance d'isolement minimale entre phases) sera plus importante dans le cas d'un défaut biphasé.

2.4.3.1. Définition d'une intensité de courant équivalente pour un défaut biphasé-isolé.-

Compte tenu de l'importance de la composante continue détaillée ci-avant, nous définissons la quantité

$$i(t) = \sqrt{2} I_{\text{eff}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + e^{-\frac{2t}{\tau}} \sin^2 \phi} \quad (84)$$

qui, dans le cas biphasé-isolé, caractérise l'intensité de courant équivalente qui régit la composante continue de la force. L'expression (84) représente en fait la racine carrée de la composante non périodique du carré du courant, défini à l'équation (68). Cet artifice permettra un gain appréciable dans le choix du pas de temps d'intégration de la réponse transitoire.

2.4.3.2. Les maxima des forces pour différents défauts.- Indépendamment du déphasage, le tableau 3 donne à titre d'indication la valeur maximale de la force (au facteur géométrique près) pour les différents cas de défauts. On présente aussi bien la force entre phases que celle au sein du faisceau. (valeurs sans asymétrie de courant).

	entre phase facteur h	dans le faisceau $h' = \frac{n-1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \cdot n^*$
a) monophasé-terre		$h' = I_1^2 = \frac{9}{2(1+\frac{\alpha^2}{4})} I_{3\text{eff}}^2$
b) biphasé-isolé	$h = I_2 I_3 = \frac{3}{2} I_{3\text{eff}}^2 = 1,5 I_{3\text{eff}}^2$	$h' = I_2^2 = \frac{3}{2} I_{3\text{eff}}^2$
c) biphasé-terre	$h = I_2 I_3 = \frac{3}{2} I_{3\text{eff}}^2 = 1,5 I_{3\text{eff}}^2$	$h' = I_2^2 = \frac{6(1+\alpha^2)}{(1+2\alpha)^2} I_{3\text{eff}}^2$
d) triphasé (en nappe horizontale)		
1. Phase externe	$h = \frac{I_1 I_3}{2} + I_2 I_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}) I_{3\text{eff}}^2 = 1,616 I_{3\text{eff}}^2$	
2. Phase interne	$h = I_1 I_2 - I_2 I_3 = \sqrt{3} I_{3\text{eff}}^2 = 1,732 I_{3\text{eff}}^2$	$h' = I_1^2 = 2 I_{3\text{eff}}^2$

\*\* La dépendance de  $\alpha$  est donc nulle dans ce cas

\* Voir annexe 4, paragraphe A.4.3.  
n = nombre de sous-conducteurs

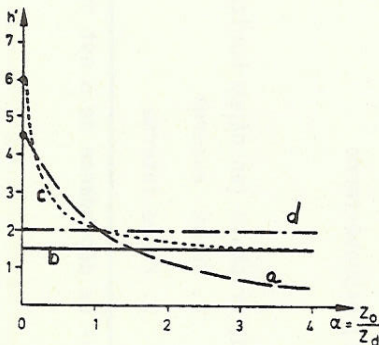


Figure 8

Valeur maximale du facteur temporel de la force électromagnétique dans un faisceau de n conducteurs, pour différents types de défauts, en fonction de  $\alpha = \frac{Z_0}{Z_d}$ .

- (a) monophasé terre (b) biphasé-terre  
(c) biphasé-isolé (d) triphasé

	entre phase facteur h	dans le faisceau
a) monophasé-terre		$h' = \frac{n-1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n} \cdot h^*$
b) biphasé-isolé	$h = I_2 I_3 = \frac{3}{2} I_{3eff}^2 = 1,5 I_{eff}^2$	$h' = I_1^2 = \frac{9}{2(1+\frac{\alpha}{2})^2} I_{3eff}^2$
c) biphasé-terre	$h = I_2 I_3 = \frac{3}{2} I_{3eff}^{**2} = 1,5 I_{3eff}^2$	$h' = I_2^2 = \frac{3}{2} I_{3eff}^2$
d) triphasé (en nappe horizontale)		$h' = I_2^2 = \frac{6(1+\alpha+\alpha^2)}{(1+2\alpha)^2} I_{3eff}^2$
1. Phase externe	$h = \frac{I_1 I_3}{2} + I_2 I_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}) I_{3eff}^2 = 1,616 I_{3eff}^2$	
2. Phase interne	$h = I_1 I_2 - I_2 I_3 = \sqrt{3} I_{3eff}^2 = 1,732 I_{3eff}^2$	$h' = I_1^2 = 2 I_{3eff}^2$

\*\* La dépendance de  $\alpha$  est donc nulle dans ce cas

\* Voir annexe 4, paragraphe A.4.3.  
n = nombre de sous-conducteurs



Le tableau 3, première colonne conduit à une valeur de crête maximale pour le cas triphasé sur la phase centrale, cet effet est annihilé par l'absence de composante continue comme discuté plus haut.

La figure 8 est plus intéressante. En effet, le pincement, lors du contact des conducteurs en faisceaux, a lieu dans les 10 à 80 ms [91] qui suivent l'apparition du court-circuit, soit dans les toutes premières crêtes de la force. Dès lors les contraintes maximales seront vraisemblablement liées à la valeur maximale de  $h'$ . Dans cette éventualité, si  $\alpha = \frac{Z_0}{Z_d}$  est inférieur à l'unité, le défaut monophasé-terre conduira aux contraintes les plus importantes, suivi par les défauts biphasé-terre, triphasé et enfin biphasé-isolé. Si  $\alpha$  est supérieur à l'unité, c'est le défaut triphasé qui conduira aux contraintes maximales.

2.4.4. Influence, sur la valeur de la première crête de la force, de l'instant d'apparition du court-circuit et de  $\tau$ . [88]

Nous étudierons le cas biphasé-isolé avec une asymétrie maximale. Le cas triphasé s'étudie d'une manière similaire mais conduit à de plus longs développements [81,82,89].

Soit  $t_1$  l'instant d'apparition de la première crête.

L'expression (68) peut s'écrire, à la première crête :

$$i(t_1) = \sqrt{2} I_{\text{eff}} [\sin(\omega t_1 + \phi) - e^{-\frac{t_1}{\tau}} \sin \phi] = 2\sqrt{2} I_{\text{eff}} \cdot f(t_1) \quad (85)$$

et la force par unité de longueur, pour une distance "d" entre phases :

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i^2}{d} = \frac{16 \cdot 10^{-7}}{d} I_{\text{eff}}^2 [f(t_1)]^2 \quad (86)$$

La fonction F sera maximale lorsque  $f(t)$  sera maximale soit lorsque

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t_1} = \omega \tau \cos(\omega t_1 + \phi) + e^{-\frac{t_1}{\tau}} \sin \phi = 0 \quad (87)$$

La condition d'asymétrie maximale se déduit à partir de l'annulation de la dérivée par rapport à  $\phi$  de l'expression du courant, soit

$$\frac{df}{d\phi} = \cos(\omega t_1 + \phi) - e^{-\frac{t_1}{\tau}} \cos \phi = 0 \quad (88)$$

elle peut être remplacée après combinaison avec (87), par

$$\phi = -\text{artg } \omega \tau \quad (89)$$

On remarquera que vu l'ordre de grandeur de  $\omega \tau$ ,  $\phi$  sera proche de  $-\frac{\pi}{2}$ .  
On définit encore :

$$\theta = \text{artg } \omega \tau \quad (89')$$

l'angle de déphasage du courant sur la force électromotrice de l'équivalent de Thévenin.

On définit également :

$$\psi = i(t_1) / I_{\text{eff}}$$

La figure 9 donne l'évolution de  $[f(t)]_{\text{MAX}}^2$ ,  $t_1$  et  $\tau$  en fonction de  $\cos \theta$ ,

la figure 10 donne l'influence de  $\tau$  sur  $[f(t)]_{\text{MAX}}^2$  et sur  $\psi$

Les quelques remarques suivantes peuvent se déduire de l'analyse de ces figures.

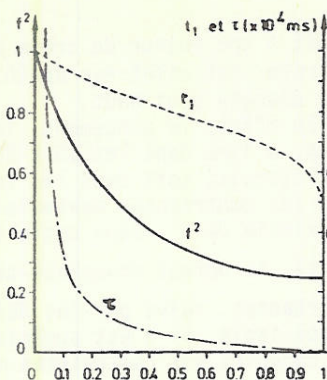


Figure 9

Evolution des grandeurs  $f^2$ ,  $t_1$  et  $\tau$  en fonction de  $\cos \theta$

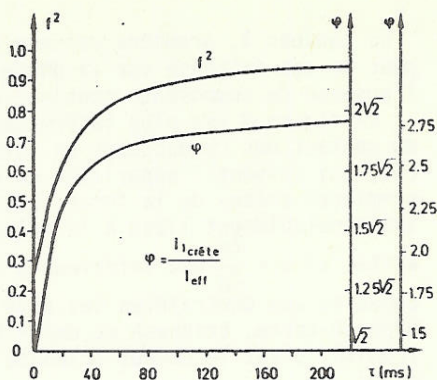


Figure 10

Evolution des grandeurs  $f^2$  et  $\varphi$  (facteur d'asymétrie) en fonction de  $\tau$ .

2.4.4.1. La valeur de  $f^2$ . - Elle est maximale (égale à l'unité) pour une constante de temps infinie (ou  $\cos \theta = 0$ ). Ce cas limite conduit à déplacer la sinusoïde du courant entièrement dans les valeurs positives des ordonnées. Il n'y a donc pas d'amortissement de la composante continue. Le facteur d'asymétrie vaut  $2\sqrt{2} = 2,81$ . Par ailleurs  $f^2$  tend évidemment vers 0,25 si la constante de temps s'annule (ou si  $\cos \theta = 1$ ). Le facteur d'asymétrie est réduit dans ce cas à sa valeur minimale  $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{0,25} = \sqrt{2}$ . La figure 10 indique une influence importante de  $\tau$  sur  $f^2$ , principalement jusqu'à 60 millisecondes. Cet effet se répercutera d'une manière amplifiée sur les contraintes comme on en reparlera au chapitre 5, paragraphe 5.4.

2.4.4.2. La valeur de  $t_1$ . - L'instant d'apparition de la première crête de la force varie de 0,01 s ( $\tau = \infty$ ) à la moitié, 0,005 s ( $\tau = 0$ ). Ils correspondent à la première crête d'une évolution à 50 Hz (si  $\tau = \infty$ ) et à 100 Hz (si  $\tau = 0$ ).

#### 2.4.5. Discrétisation de la force [85,90]

Les formules (76) et (77) du paragraphe 2.4.1. définissent l'élément de force créé sur un élément de conducteur parcouru par un courant  $i_1$ , en présence d'un autre élément de conducteur parcouru par un courant  $i_2$ . Ces notions sont infinitésimales et il convient de les transformer par intégration, à la dimension d'un élément fini tel qu'il a été défini au chapitre 2.2.

Certains auteurs [75,77,78,80,83,92,94,96] font état de méthodes générales basées sur des approximations importantes ou sur une intégration analytique exacte mais fastidieuse et/ou peu adaptée à un logiciel élément fini. Nous optons pour une méthode originale cohérente avec le modèle élément fini choisi.

Les notations utilisées se réfèrent à la figure 5 du paragraphe 2.4.1.

Soit un élément  $ds_1$  du conducteur 1 de coordonnée courante  $\xi$  parcouru par l'intensité de courant  $i_1(t)$ .

Soit un élément  $ds_2$  du conducteur 2, de coordonnée courante  $\eta$ , parcourue par l'intensité de courant  $i_2(t)$ .

$\xi$  et  $\eta$  sont les paramètres des fonctions de forme définies au paragraphe 2.2., ils appartiennent à l'intervalle  $[-1,1]$ .



Les éléments finis isoparamétriques permettent d'exprimer la géométrie et le champ de déplacements par les mêmes fonctions de forme comme il a été discuté antérieurement. Dès lors, on peut exprimer la coordonnée d'un point d'un élément en fonction des coordonnées des noeuds de l'élément par la relation :

$$x(\xi) = P(\xi) \cdot w \quad (90)$$

C'est la formule (23) du paragraphe 2.2.1.. (Notations en annexe 6).

Cette relation nous permet d'exprimer (l'indice 1 ou 2 caractérise le numéro d'ordre du conducteur).

$$ds_1 = dx_1 = \frac{\partial P}{\partial \xi} w_1 d\xi \quad (91)$$

$$ds_2 = dx_2 = \frac{\partial P}{\partial \eta} w_2 d\eta \quad (92)$$

$$r = x_1 - x_2 = P(\xi) \cdot w_1 - P(\eta) \cdot w_2 \quad (93)$$

$$ds_2 \wedge r = Q(\eta) \wedge R(\xi, \eta) d\eta = QR(\xi, \eta) d\eta \quad (94)$$

en appelant  $Q(\eta) = \frac{\partial P}{\partial \eta} \cdot w_2$  (95) et  $R(\xi, \eta) = P(\xi)w_1 - P(\eta)w_2$  (96)

$$ds_1 \wedge (ds_2 \wedge r) = Z(\xi) \wedge QR(\xi, \eta) d\xi d\eta = ZQR(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (97)$$

en appelant  $Z(\xi) = \frac{\partial P}{\partial \xi} \cdot w_1$  (98)

$$r^3 = \|R(\xi, \eta)\|^3 \quad \text{où } R \text{ vient de (96)} \quad (99)$$

finalement le facteur géométrique  $K$  de la formule (77) s'écrit

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{ZQR(\xi, \eta)}{\|R(\xi, \eta)\|^3} d\xi d\eta \quad (100)$$

dans laquelle le vecteur  $ZQR$  est tiré de la relation (97) et le scalaire  $\|R\|$  est le module du vecteur  $R$  défini à la relation (96). L'intégration sur  $\eta$  s'effectuera en passant en revue successivement chaque élément fini différent de celui sur lequel on calcule la force. Ce calcul peut se limiter aux éléments dont la contribution est significative. On utilisera la méthode de GAUSS. Nous obtenons après cette intégration un nouveau facteur :

$$k = k(\xi) \cdot d\xi \quad (101)$$

où  $k(\xi)$  est le résultat de l'intégration de (100) sur la variable  $\eta$ .

La force élémentaire sur l'élément  $\xi$  s'écrit alors

$$dF = k \cdot i_1(t) \cdot i_2(t) \quad (102)$$

L'expression des forces généralisées appliquées aux seuls noeuds de l'élément fini correspondant, se déduit de cette répartition continue par l'écriture de l'énergie potentielle des charges sous forme discrétisée :

$$\int_{\text{élément}} dF \cdot \delta u = i_1(t) \cdot i_2(t) \int_{-1}^{+1} k(\xi) \cdot \delta u d\xi \quad (103)$$

et comme on peut écrire la même relation que (90) pour le champ de déplacement  $u$  (en fonction des déplacements généralisés  $q$ ), on a l'égalité :

$$\delta u = P \cdot \delta q \quad (104)$$

ce qui permet d'exprimer l'intégrale (103) sous la forme

$$\int_{\text{élément}} dF \cdot \delta u = i_1(t) \cdot i_2(t) \cdot \left[ \int_{-1}^{+1} k(\xi) \cdot P \cdot d\xi \right] \cdot \delta q$$

le terme entre crochet représente le "facteur géométrique généralisé". Il sera calculé par la méthode de GAUSS. Sa multiplication par le produit des intensités de courant donnera les valeurs des forces généralisées aux noeuds de l'élément fini.

La programmation de ce type de problème est aisée, elle nécessite la définition des éléments (géométrie initiale et déplacements) et les valeurs et dérivées des fonctions de forme aux points de GAUSS. Il suffit de tabuler ces dernières quantités une seule fois.

Parallèlement, il a été développé [95] une méthode similaire dans le cas des jeux de barres rigides, avec géométrie non parallèle. Cependant, l'utilisation d'éléments non isoparamétriques (poutre) requiert des développements différents pour la discrétisation.

Un organigramme succinct de l'insertion du calcul des forces est présenté à l'annexe 8.