

NOTES DE STATISTIQUE ET D'INFORMATIQUE

92/1

(Réédition 2002)

LES MATRICES INVERSES
GÉNÉRALISÉES
ET LEUR UTILISATION
DANS LE MODÈLE LINÉAIRE

A.F. IEMMA et R. PALM

Faculté universitaire des Sciences agronomiques

GEMBLoux

(Belgique)

LES MATRICES INVERSES GÉNÉRALISÉES ET LEUR UTILISATION DANS LE MODÈLE LINÉAIRE

A.F. IEMMA* et R. PALM†

RÉSUMÉ

Cette note présente tout d'abord les matrices inverses généralisées conditionnelles, les matrices inverses généralisées des moindres carrés et les matrices inverses généralisées de MOORE-PENROSE, et donne quelques-unes de leurs propriétés. Des utilisations de ces inverses, dans le contexte du modèle linéaire, sont ensuite examinées (solutions des équations normales, projections orthogonales, sommes des carrés et distributions d'échantillonnage correspondantes, estimations des fonctions paramétriques et sommes des carrés associées aux tests d'hypothèses).

SUMMARY

In this note, we first present three different types of generalized inverse matrices (conditional, least squares, and MOORE-PENROSE inverse matrices), as well as some of their properties. Applications of these inverse matrices in the linear model are then examined (normal equations solutions, orthogonal projections, sums of squares and their sampling distributions, estimations of parametric functions and sums of squares related to hypotheses testing).

1. INTRODUCTION

La notion classique de *matrice inverse*¹ est une notion qui ne s'applique qu'aux matrices carrées non singulières. Dans ce cas, on appelle matrice inverse

*Professeur titulaire à l'*Escola Superior de Agricultura Luiz DE QUEIROZ*, Piracicaba, São Paulo (Brésil), et Maître de conférences à la Faculté des Sciences agronomiques de Gembloux durant l'année académique 1990-1991.

†Chef de travaux et Maître de conférences à la Faculté des Sciences agronomiques de Gembloux.

1. En anglais: *inverse matrix*.

de la matrice \mathbf{A} , de dimensions $n \times n$ et de rang n , la matrice désignée par \mathbf{A}^{-1} qui est telle que :

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I},$$

\mathbf{I} étant la matrice identité, de dimensions $n \times n$.

L'extension du concept de matrice inverse aux matrices singulières ou rectangulaires conduit à la notion de *matrice inverse généralisée*². On appelle inverse généralisée d'une matrice réelle quelconque \mathbf{A} , de dimensions $n \times p$, toute matrice \mathbf{A}^G , de dimensions $p \times n$ telle que :

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^G \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

D'après la définition, on constate que l'inverse classique est un cas particulier d'inverse généralisée.

En l'absence de conditions supplémentaires, les inverses généralisées ainsi définies sont appelées inverses généralisées conditionnelles. Mais en imposant des conditions supplémentaires, on peut définir d'autres types de matrices inverses généralisées, tels que les inverses généralisées des moindres carrés et les inverses généralisées de MOORE-PENROSE.

Bien qu'il existe encore d'autres types d'inverses généralisées, nous ne présentons, dans cette note, que les trois types mentionnés ci-dessus.

Les inverses conditionnelles ont l'avantage de pouvoir être obtenues sans grandes difficultés et sont très utiles dans le cadre des calculs statistiques pratiques. A l'opposé, les inverses généralisées de MOORE-PENROSE, les plus exigeantes du point de vue de la définition et dont le calcul numérique est complexe, présentent d'excellentes propriétés mathématiques et sont, de ce fait, largement utilisées en statistique pour les démonstrations théoriques. Quant aux inverses généralisées des moindres carrés, elles occupent une situation intermédiaire et sont, notamment, très utiles en relation avec le modèle linéaire.

Nous consacrerons tout d'abord un paragraphe à la factorisation des matrices réelles, car cette technique est utilisée dans le calcul des inverses généralisées (paragraphe 2). Nous présenterons ensuite les inverses généralisées et leurs propriétés (paragraphe 3). Puis nous montrerons quelques utilisations de ces matrices dans le cadre du modèle linéaire (paragraphe 4). Nous terminerons par quelques informations complémentaires (paragraphe 5).

2. FACTORISATION DE RANG COMPLET D'UNE MATRICE RÉELLE

L'objectif poursuivi par la factorisation d'une matrice est de remplacer celle-ci par le produit de deux ou plusieurs matrices, dans le but de simplifier les opérations dont la matrice initiale doit faire l'objet.

2. En anglais : *generalized inverse matrix*.

On peut montrer que, pour toute matrice réelle \mathbf{A} , de dimensions $n \times p$ et de rang k , il existe des matrices réelles \mathbf{B} et \mathbf{C} , de dimensions $n \times k$ et $k \times p$, toutes deux de rang k , telles que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{C} .$$

Ces matrices ne sont, en général, pas uniques et plusieurs méthodes permettent de calculer des couples de matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} . Parmi ces méthodes, nous avons retenu l'algorithme de DWIVEDI [1975], qui est très simple et qui conduit à une solution par k applications de la séquence d'opérations suivantes :

- a) on choisit, dans \mathbf{A} , un élément a_{rs} non nul quelconque;
- b) on calcule le produit $\mathbf{u}_1 \mathbf{v}'_1$ avec :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{a_{rs}} \begin{bmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}'_1 = [a_{r1} \quad a_{r2} \quad \cdots \quad a_{rp}] ;$$

- c) on détermine la matrice \mathbf{A}_1 telle que :

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \mathbf{u}_1 \mathbf{v}'_1 ;$$

- d) si \mathbf{A}_1 est une matrice zéro, la procédure de factorisation est terminée et dans ce cas :

$$\mathbf{B} = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{C} = \mathbf{v}'_1 \quad \text{et} \quad k = 1 ;$$

- e) si \mathbf{A}_1 n'est pas une matrice zéro, on répète la procédure en prenant comme point de départ la matrice obtenue à l'étape c) jusqu'à ce que la matrice obtenue à cette étape soit une matrice zéro, et on a alors :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_k]$$

et

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}'_k \end{bmatrix} .$$

A titre d'illustration, appliquons l'algorithme de DWIVEDI à la matrice suivante de rang 2 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

En prenant comme élément non nul initial l'élément de la première ligne et de la première colonne ($a_{11} = 4$), on obtient :

$$\mathbf{u}_1 \mathbf{v}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} [4 \ 2 \ 2] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dans cette matrice \mathbf{A}_1 , prenons, par exemple, comme élément non nul initial, l'élément de la deuxième ligne et de la deuxième colonne ($a_{22} = 1$). On trouve :

$$\mathbf{u}_2 \mathbf{v}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [0 \ 1 \ -1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a alors :

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{u}_2 \mathbf{v}'_2 = \mathbf{0},$$

et, par conséquent :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si, dans la matrice \mathbf{A}_1 , on avait pris comme élément non nul initial, l'élément $a_{33} = 1$, par exemple, on aurait obtenu les deux matrices suivantes :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On vérifie donc bien que les matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} ne sont pas uniques. On peut vérifier également que les différentes matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} sont de rang 2, comme la matrice \mathbf{A} .

Des calculs analogues pourraient être appliqués à la matrice non carrée \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et on obtiendrait, par exemple :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

chacune de ces deux matrices étant de rang 2, comme la matrice \mathbf{X} .

3. QUELQUES INVERSES GÉNÉRALISÉES

3.1. L'inverse généralisée conditionnelle

Nous avons vu, dans l'introduction, la définition générale des inverses généralisées. En l'absence de toute condition supplémentaire, les inverses ainsi définies sont connues sous le nom de *matrices inverses généralisées conditionnelles*³ et sont notées \mathbf{A}^- . L'inverse généralisée conditionnelle d'une matrice réelle \mathbf{A} , de dimensions $n \times p$ est donc toute matrice \mathbf{A}^- , de dimensions $p \times n$, telle que :

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^- \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

L'inverse conditionnelle existe toujours, mais elle n'est pas unique, sauf si \mathbf{A} est une matrice non singulière. Dans ce dernier cas, l'inverse conditionnelle se confond d'ailleurs avec l'inverse classique.

Il existe de nombreux algorithmes permettant de calculer \mathbf{A}^- , mais nous présenterons uniquement l'algorithme de SEARLE [1971], qui est très simple et très utilisé dans les applications statistiques. Le principe de cet algorithme est le suivant :

- a) on choisit, dans \mathbf{A} , une sous-matrice non singulière quelconque, \mathbf{M} , de dimensions $k \times k$, k étant le rang de \mathbf{A} ;
- b) on calcule la transposée de l'inverse classique de \mathbf{M} , soit $(\mathbf{M}^{-1})'$;
- c) on remplace, dans \mathbf{A} , les éléments de \mathbf{M} par les éléments de $(\mathbf{M}^{-1})'$ et on pose tous les autres éléments de \mathbf{A} égaux à zéro; soit \mathbf{A}^* la matrice ainsi obtenue;
- d) la transposée de la matrice \mathbf{A}^* est une inverse conditionnelle de \mathbf{A} .

A titre d'illustration, appliquons cet algorithme à la matrice \mathbf{A} , examinée au paragraphe 2 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. En anglais : *conditional generalized inverse matrix*.

On peut, par exemple, choisir comme sous-matrice non singulière de rang 2 :

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

On a alors :

$$\mathbf{M}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = (\mathbf{M}_1^{-1})' ,$$

et on trouve :

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_1^*)' = \mathbf{A}_1^- .$$

L'indice ajouté aux matrices \mathbf{M} , \mathbf{A}^* et \mathbf{A}^- et à leurs inverses ou transposées signifie simplement qu'il s'agit du calcul d'une première matrice inverse conditionnelle. En effet, d'autres inverses peuvent être calculées. Ainsi, en choisissant, par exemple, les deux matrices de rang 2 suivantes :

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} ,$$

on obtiendrait les inverses généralisées conditionnelles suivantes :

$$\mathbf{A}_2^- = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_3^- = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Il existe encore d'autres matrices inverses conditionnelles de la matrice \mathbf{M} . On peut vérifier que, pour les diverses inverses conditionnelles qui ont été calculées, on a bien :

$$\mathbf{A} \mathbf{A}_1^- \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}_2^- \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}_3^- \mathbf{A} .$$

On peut remarquer aussi que le calcul de \mathbf{A}_1^- est particulièrement simple, parce que la matrice \mathbf{M} est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux appartiennent à la diagonale principale de \mathbf{A} . D'une façon générale, lorsque la matrice \mathbf{M} est symétrique et si sa diagonale est une partie de la diagonale principale de \mathbf{A} , les transpositions de \mathbf{M} et de \mathbf{A} ne sont pas nécessaires.

3.2. L'inverse généralisée des moindres carrés

On appelle *inverse généralisée des moindres carrés*⁴ d'une matrice réelle \mathbf{A} , de dimensions $n \times p$, toute matrice \mathbf{A}^l , de dimensions $p \times n$, telle que :

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^l \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^l = (\mathbf{A} \mathbf{A}^l)' .$$

4. En anglais : *least squares generalized inverse matrix*.

L'inverse généralisée des moindres carrés peut être obtenue à partir des inverses conditionnelles de la matrice $\mathbf{A}'\mathbf{A}$. En effet :

$$\mathbf{A}^l = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}'.$$

Elle n'est, en général, pas unique. Par contre, le produit :

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^l = \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}',$$

est invariable pour toute inverse conditionnelle de $\mathbf{A}'\mathbf{A}$, ou pour toute inverse généralisée des moindres carrés de \mathbf{A} . La matrice $\mathbf{A}\mathbf{A}^l$ est, par définition, symétrique, mais on peut montrer aussi qu'elle est idempotente, c'est-à-dire qu'elle n'est pas modifiée lorsqu'elle est multipliée par elle-même :

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^l)(\mathbf{A}\mathbf{A}^l) = \mathbf{A}\mathbf{A}^l.$$

A titre d'illustration, reprenons la matrice \mathbf{X} du paragraphe 2. On peut vérifier que le produit $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ est précisément égal à la matrice \mathbf{A} , dont on a calculé les trois inverses généralisées conditionnelles \mathbf{A}_1^{-} , \mathbf{A}_2^{-} et \mathbf{A}_3^{-} . En postmultipliant chacune de ces inverses généralisées conditionnelles par \mathbf{X}' , on obtient les trois inverses des moindres carrés de \mathbf{X} suivantes :

$$\mathbf{X}_1^l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2^l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{X}_3^l = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

mais il existe encore d'autres matrices inverses généralisées des moindres carrés de \mathbf{X} . On peut vérifier aussi que :

$$\mathbf{X}\mathbf{X}_1^l = \mathbf{X}\mathbf{X}_2^l = \mathbf{X}\mathbf{X}_3^l = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

et que :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.3. L'inverse généralisée de MOORE-PENROSE

L'inverse généralisée de MOORE-PENROSE⁵ d'une matrice réelle \mathbf{A} , de dimensions $n \times p$ et de rang k est la matrice réelle \mathbf{A}^+ , de dimensions $p \times n$ et de rang k , qui satisfait les quatre conditions suivantes:

- a) $\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}$,
- b) $\mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$,
- c) $\mathbf{A} \mathbf{A}^+ = (\mathbf{A} \mathbf{A}^+)'$,
- d) $\mathbf{A}^+ \mathbf{A} = (\mathbf{A}^+ \mathbf{A})'$.

Par rapport aux inverses généralisées des moindres carrés, on a donc ajouté deux contraintes.

On peut démontrer qu'à chaque matrice réelle \mathbf{A} , correspond une et une seule matrice inverse de MOORE-PENROSE, qui peut être obtenue à partir des matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} résultant de la factorisation présentée au paragraphe 2, par la relation:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}'(\mathbf{C} \mathbf{C}')^{-1} (\mathbf{B}' \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}'.$$

En pratique cependant, le calcul de \mathbf{A}^+ à l'aide de cette relation soulève des difficultés, du fait des problèmes liés à la précision des résultats.

A titre d'illustration, reprenons la matrice de l'exemple donné au paragraphe précédent, en considérant le couple de matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} , calculées en premier lieu. On obtient :

$$(\mathbf{B}' \mathbf{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{C} \mathbf{C}')^{-1} = \begin{bmatrix} 1/24 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

On pourrait vérifier aussi qu'en prenant le second couple de matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} calculées au paragraphe 2, on obtiendrait les mêmes résultats.

Pour la matrice \mathbf{X} , présentée également au paragraphe 2, on a :

$$\mathbf{X}^+ = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Les inverses généralisées de MOORE-PENROSE jouissent de plusieurs propriétés, dont quelques-unes sont énoncées ci-dessous.

1. Si \mathbf{A} est une matrice non singulière, l'inverse généralisée de MOORE-PENROSE se confond avec l'inverse classique: \mathbf{A}^+ est alors égale à \mathbf{A}^{-1} .

5. En anglais: MOORE-PENROSE *generalized inverse matrix*.

2. Si \mathbf{A} est une matrice symétrique, l'inverse généralisée de MOORE-PENROSE est également une matrice symétrique.

3. Lors de la définition de l'inverse généralisée de MOORE-PENROSE, nous avons vu que les deux matrices $\mathbf{A}^+ \mathbf{A}$ et $\mathbf{A} \mathbf{A}^+$ sont symétriques. On peut démontrer qu'elles sont, de plus, idempotentes :

$$(\mathbf{A} \mathbf{A}^+)(\mathbf{A} \mathbf{A}^+) = \mathbf{A} \mathbf{A}^+ \quad \text{et} \quad (\mathbf{A}^+ \mathbf{A})(\mathbf{A}^+ \mathbf{A}) = \mathbf{A}^+ \mathbf{A},$$

et de rang k égal au rang de \mathbf{A} et de \mathbf{A}^+ .

4. Si le rang de la matrice \mathbf{A} est égal au nombre n de lignes de \mathbf{A} , c'est-à-dire si \mathbf{A} est de rang-ligne complet, on a :

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}'(\mathbf{A} \mathbf{A}')^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{I},$$

et si le rang de \mathbf{A} est égal au nombre p de colonnes de \mathbf{A} , c'est-à-dire si \mathbf{A} est de rang-colonne complet :

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}' \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

\mathbf{I} étant la matrice identité de dimensions $n \times n$ dans le premier cas et de dimensions $p \times p$ dans le second cas.

5. Le rang de la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{A}^+$ est égal à $n - k$.

6. Si :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}',$$

est la décomposition par valeurs singulières de \mathbf{A} , alors :

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U}'.$$

Dans ces relations, \mathbf{S} est la matrice diagonale, de dimensions $k \times k$, dont les éléments diagonaux sont les valeurs singulières de \mathbf{A} , c'est-à-dire les racines carrées des valeurs propres non nulles de $\mathbf{A}' \mathbf{A}$ et de $\mathbf{A} \mathbf{A}'$, tandis que \mathbf{U} et \mathbf{V} sont les matrices orthonormées de dimensions $n \times r$ et $p \times r$, dont les colonnes sont les vecteurs propres normés, respectivement, de $\mathbf{A} \mathbf{A}'$ et de $\mathbf{A}' \mathbf{A}$.

7. Enfin, si la matrice \mathbf{A} est carrée et symétrique et si :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}' \mathbf{\Lambda} \mathbf{P},$$

est la décomposition spectrale de \mathbf{A} , $\mathbf{\Lambda}$ étant la matrice carrée diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de \mathbf{A} , et \mathbf{P} la matrice des vecteurs propres normés à l'unité, alors :

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{P}' \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{P}.$$

Certaines des propriétés énoncées ci-dessus peuvent se vérifier sur les deux exemples examinés précédemment. Ainsi, pour la matrice \mathbf{X} , on a :

$$\mathbf{X} \mathbf{X}^+ = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{X}^+ \mathbf{X} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ces matrices, qui sont bien de rang 2, comme \mathbf{X} et \mathbf{X}^+ , sont symétriques et ne changent pas si on les multiplie par elles-mêmes. En particulier, on constate aussi que $\mathbf{X} \mathbf{X}^+$ est égal au produit de \mathbf{X} par les différentes inverses généralisées calculées au paragraphe 3.2. On a donc la relation suivante :

$$\mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-} \mathbf{X}' = \mathbf{X} \mathbf{X}' = \mathbf{X} \mathbf{X}^+.$$

Ce résultat était attendu, car \mathbf{X}^+ est aussi une inverse généralisée des moindres carrés.

On peut vérifier aussi que :

$$\mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{X}^+ = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

est bien symétrique et idempotente. Le rang de cette matrice vaut 2. Il est donc bien égal au nombre de lignes de \mathbf{X} , c'est-à-dire 4, dont on soustrait le rang de \mathbf{X} , c'est-à-dire 2. Par ailleurs, la décomposition spectrale de \mathbf{X} conduit aux matrices \mathbf{U} , \mathbf{S} et \mathbf{V}' suivantes :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

et
$$\mathbf{V}' = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

et on peut vérifier que :

$$\mathbf{X}^+ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. INVERSES GÉNÉRALISÉES ET MODÈLE LINÉAIRE

4.1. Présentation d'un exemple numérique

Afin de concrétiser différentes utilisations possibles des inverses généralisées, nous allons considérer, par la suite, le cas d'une expérience complètement aléa-

toire, comprenant deux traitements et deux répétitions. Supposons que les résultats de cette expérience correspondent aux données reprises dans le tableau 1.

Tableau 1. Résultats (artificiels) d'une expérience complètement aléatoire comprenant deux traitements ($i = 1$ ou 2) et deux répétitions ($j = 1$ ou 2).

i	j		Sommes	Moyennes
	1	2		
1	$y_{11} = 2$	$y_{12} = 3$	$y_{1.} = 5$	$\bar{y}_{1.} = 5/2$
2	$y_{21} = 5$	$y_{22} = 4$	$y_{2.} = 9$	$\bar{y}_{2.} = 9/2$

Pour ce dispositif, on peut considérer le modèle linéaire suivant :

$$y_{ij} = \mu + t_i + e_{ij}.$$

Dans cette relation, μ est une constante identique pour toutes les observations et qui, sous certaines conditions particulières, peut être la moyenne générale des observations; t_i est l'effet du traitement i , et e_{ij} est l'erreur aléatoire associée à l'observation y_{ij} . Nous supposons, en outre, que les e_{ij} sont distribués selon une même loi normale, de moyenne nulle et d'écart-type σ et que les e_{ij} sont indépendants.

En appliquant ce modèle à chacune des observations, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} y_{11} = 2 = \mu + t_1 & + e_{11} \\ y_{12} = 3 = \mu + t_1 & + e_{12} \\ y_{21} = 5 = \mu & + t_2 + e_{21} \\ y_{22} = 4 = \mu & + t_2 + e_{22}, \end{cases}$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e},$$

avec :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mu \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ e_{22} \end{bmatrix}.$$

On notera que la matrice \mathbf{X} de cet exemple est précisément la matrice considérée dans les paragraphes précédents. Cette matrice est dénommée matrice du plan expérimental.

4.2. Solution des équations normales

Le premier problème auquel on peut s'intéresser est la recherche d'informations relatives aux paramètres μ , t_1 et t_2 du modèle présenté au paragraphe précédent, à partir du système d'équations :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}.$$

Ce système, de quatre équations, comporte en fait sept inconnues (μ , t_1 , t_2 , e_1 , e_2 , e_3 et e_4). Il est donc indéterminé et possède une infinité de solutions. Il en résulte qu'il n'est pas possible de connaître les vraies valeurs de ces paramètres. On peut toutefois s'efforcer de trouver un vecteur $\boldsymbol{\theta}^\circ$ tel que la somme des carrés des résidus estimés, c'est-à-dire aussi le carré de la norme de $\hat{\mathbf{e}}$:

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}^\circ,$$

soit minimum.

On peut montrer que tout vecteur $\boldsymbol{\theta}^\circ$, solution des équations normales :

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{X}'\mathbf{y},$$

peut convenir, et on dit que toute solution exacte des équations normales est solution approchée des moindres carrés du système inconsistant :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}.$$

La relation matricielle qui donne le système d'équations normales est générale et peut s'appliquer à des situations où la matrice \mathbf{X} et les vecteurs \mathbf{y} et $\boldsymbol{\theta}$ sont différents de ceux de l'exemple que nous prenons en considération. D'une façon générale, si le rang de \mathbf{X} est égal au nombre de colonnes de \mathbf{X} , c'est-à-dire si \mathbf{X} est de rang-colonne complet, alors $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ est définie positive, et donc non singulière, et le système d'équations normales a une solution unique donnée par :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y},$$

qui coïncide avec la valeur fournie par l'estimateur des moindres carrés. Cette situation se rencontre notamment en régression, pour autant qu'il n'y ait pas de phénomène de colinéarité.

Si, par contre, le rang de \mathbf{X} est inférieur au nombre de colonnes de \mathbf{X} , c'est-à-dire si \mathbf{X} n'est pas de rang-colonne complet, alors la matrice $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ est singulière et le système d'équations normales est indéterminé. Dans ce cas, des solutions de ce système peuvent être obtenues à l'aide des inverses généralisées :

$$\boldsymbol{\theta}^\circ = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^G\mathbf{X}'\mathbf{y},$$

$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^G$ étant une inverse généralisée quelconque. N'importe quelle solution du système des équations normales est alors solution approchée des moindres carrés du système, inconsistant :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta},$$

mais elle ne coïncide pas avec l'estimation des moindres carrés de $\boldsymbol{\theta}$, car cet estimateur n'existe pas si \mathbf{X} n'est pas de rang-colonne complet.

Compte tenu du mode de calcul des inverses des moindres carrés (paragraphe 3.2) :

$$\mathbf{A}^l = (\mathbf{A}' \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' ,$$

des solutions des équations normales sont aussi données par la relation :

$$\boldsymbol{\theta}^\circ = \mathbf{X}^l \mathbf{y} ,$$

ce qui justifie le nom d'inverse généralisée des moindres carrés donné à \mathbf{X}^l .

Pour l'exemple du paragraphe 4.1, le système d'équations normales s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} .$$

La matrice \mathbf{X} étant singulière, le système est indéterminé et des solutions peuvent être obtenues par l'intermédiaire des diverses matrices inverses généralisées de $\mathbf{X}' \mathbf{X}$, c'est-à-dire aussi de \mathbf{A} , qui ont été déterminées au paragraphe 3. On trouve alors les différents vecteurs $\boldsymbol{\theta}^\circ$ suivants :

$$\boldsymbol{\theta}_1^\circ = \mathbf{A}_1^- \mathbf{X}' \mathbf{y} = \mathbf{X}_1^l \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 9/2 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{\theta}_2^\circ = \mathbf{A}_2^- \mathbf{X}' \mathbf{y} = \mathbf{X}_2^l \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 9/2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}_3^\circ = \mathbf{A}_3^- \mathbf{X}' \mathbf{y} = \mathbf{X}_3^l \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\theta}_4^\circ = \mathbf{A}^+ \mathbf{X}' \mathbf{y} = \mathbf{X}^+ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 1/6 \\ 13/6 \end{bmatrix} ,$$

mais il existe encore d'autres solutions. La solution $\boldsymbol{\theta}_4$, calculée à partir de l'inverse de MOORE-PENROSE de \mathbf{X} ou de $\mathbf{X}' \mathbf{X}$, est la solution de norme minimum; on dit qu'il s'agit de la meilleure solution pour $\boldsymbol{\theta}$ [GRAYBILL, 1967].

On notera cependant que l'utilisation des inverses généralisées pour la détermination des solutions des équations normales n'est pas la seule approche relative à l'étude du vecteur $\boldsymbol{\theta}$. Parmi les solutions alternatives, on peut mentionner l'emploi de restrictions sur les paramètres du modèle, en imposant par exemple $t_1 + t_2 = 0$ [DAGNELIE, 1980-1981], l'emploi de restrictions sur les solutions des équations normales, l'utilisation des reparamétrisations et l'utilisation des modèles de moyennes [HOCKING, 1985; IEMMA, 1987; SEARLE, 1971].

4.3. Moindres carrés et projections orthogonales

Du fait de l'indétermination des équations normales, lorsque la matrice du plan expérimental \mathbf{X} n'est pas de rang égal au nombre de colonnes, les différentes

solutions n'ont pas d'intérêt par elles-mêmes. Par contre, lorsqu'on les prémultiplie par la matrice du plan expérimental \mathbf{X} , toutes les solutions donnent lieu à un même vecteur $\hat{\mathbf{y}}$, qui est défini comme l'approximation des moindres carrés du vecteur \mathbf{y} des observations. Pour l'exemple considéré on a :

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X} \boldsymbol{\theta}_1^\circ = \mathbf{X} \boldsymbol{\theta}_2^\circ = \mathbf{X} \boldsymbol{\theta}_3^\circ = \mathbf{X} \boldsymbol{\theta}_4^\circ = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 9/2 \\ 9/2 \end{bmatrix}.$$

Les deux premiers éléments du vecteur $\hat{\mathbf{y}}$ concernent le premier traitement et sont égaux à la moyenne arithmétique des observations relatives à ce traitement. De même les deux derniers éléments concernent le second traitement et sont égaux à la moyenne arithmétique des observations relatives à ce traitement.

En se rappelant qu'une solution quelconque $\boldsymbol{\theta}^\circ$ est obtenue par la relation suivante:

$$\boldsymbol{\theta}^\circ = (\mathbf{X}' \mathbf{X})^G \mathbf{X}' \mathbf{y},$$

on peut écrire :

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{X})^G \mathbf{X}' \mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{y},$$

\mathbf{P} étant une matrice carrée de dimensions $n \times n$, symétrique et idempotente. Cette matrice \mathbf{P} est le projecteur orthogonal du vecteur \mathbf{y} des observations sur l'espace engendré par les colonnes de \mathbf{X} , appelé aussi espace des paramètres ou espace d'estimation et noté $C(\mathbf{X})$. Elle transforme le vecteur des valeurs observées \mathbf{y} en un vecteur de valeurs estimées $\hat{\mathbf{y}}$.

Compte tenu des propriétés des inverses généralisées, on a aussi :

$$\mathbf{P} = \mathbf{X} \mathbf{X}^l = \mathbf{X} \mathbf{X}^+ = \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{X})^- \mathbf{X}',$$

soit, pour l'exemple numérique considéré :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Pour le modèle en question et pour des données équilibrées, c'est-à-dire pour des nombres de répétitions identiques par traitement, la matrice \mathbf{P} peut s'obtenir, très simplement, en utilisant des sous-matrices. On peut considérer, en effet, que \mathbf{P} est constituée de a lignes et colonnes de sous-matrices carrées de dimensions $b \times b$, a étant le nombre de traitements et b le nombre de répétitions d'un même traitement. Les sous-matrices situées hors de la diagonale sont des matrices nulles $\mathbf{0}$. Les sous-matrices de la diagonale sont identiques et leurs éléments sont tous égaux à $1/b$. De façon plus mathématique, \mathbf{P} est le produit de KRONECKER de la matrice \mathbf{I} et de la matrice \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{E},$$

\mathbf{I} étant la matrice unité de dimensions $a \times a$ et \mathbf{E} étant une matrice carrée de dimensions $b \times b$, dont les éléments sont égaux à $1/b$. Pour l'exemple considéré, on a :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}.$$

Si les effectifs des traitements ne sont pas égaux, la matrice \mathbf{P} est toujours constituée de a lignes et colonnes de sous-matrices, les sous-matrices \mathbf{E}_i de la diagonale étant carrées, de dimensions égales au nombre de répétitions b_i du traitement i et constituées d'éléments égaux à $1/b_i$. Ainsi, pour une expérience à trois traitements et pour des nombres de répétitions respectivement égaux à 3, 2 et 1 on aurait :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A partir de la matrice \mathbf{P} , donc aussi grâce aux inverses généralisées, on peut obtenir le vecteur des résidus estimés, $\hat{\mathbf{e}}$, qui est la projection orthogonale de \mathbf{y} sur l'espace des résidus, celui-ci étant le complément orthogonal de l'espace des colonnes de \mathbf{P} , $C^\perp(\mathbf{X})$. On a :

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{P}\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{y},$$

soit, pour l'exemple :

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Géométriquement, le vecteur \mathbf{y} de l'exemple considéré est situé dans un espace à quatre dimensions, les coordonnées de l'extrémité du vecteur étant ses composantes. Du fait de sa dimension, cet espace ne peut cependant pas être visualisé de façon correcte. Dans ce même espace, les trois vecteurs-colonnes de \mathbf{X} peuvent également être représentés. Ces vecteurs engendrent un sous-espace, appelé sous-espace des colonnes, qui est en réalité un plan, à cause de la singularité de la matrice \mathbf{X} . La projection orthogonale de \mathbf{y} dans ce plan détermine le vecteur $\hat{\mathbf{y}}$, et le vecteur qui joint l'extrémité du vecteur $\hat{\mathbf{y}}$ à l'extrémité du vecteur \mathbf{y} est le vecteur des résidus estimés $\hat{\mathbf{e}}$. Ce vecteur, qui donne une idée de la distance entre le vecteur des observations et le vecteur de l'approximation des moindres carrés, est orthogonal à l'espace des colonnes et, par le théorème de PYTHAGORE, on a :

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \|\hat{\mathbf{y}}\|^2 + \|\hat{\mathbf{e}}\|^2,$$

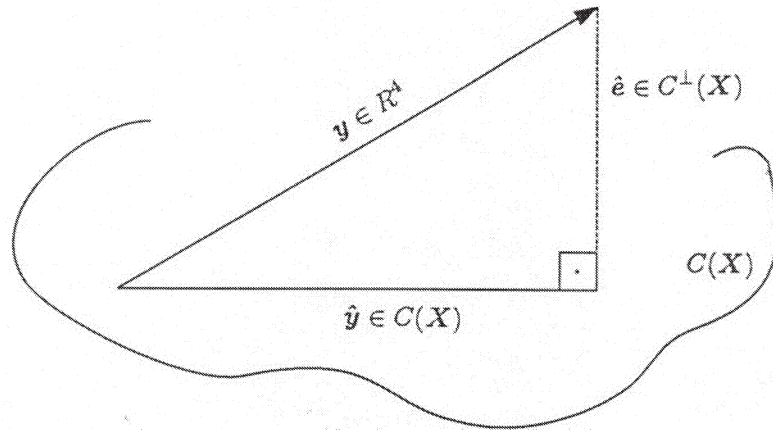


Figure 1. Représentation schématique de la projection d'un vecteur d'observations, \mathbf{y} , sur l'espace des colonnes de \mathbf{X} .

$\|\mathbf{y}\|$, $\|\hat{\mathbf{y}}\|$ et $\|\hat{\mathbf{e}}\|$ représentant les normes des vecteurs correspondants. La figure 1 donne une représentation schématique de la projection orthogonale de \mathbf{y} sur l'espace des colonnes, valable quelles que soient les dimensions de l'espace considéré.

Afin de préciser davantage cette notion de projection orthogonale, considérons un exemple plus simple encore, qui ne fait intervenir que trois données, à savoir deux observations pour le premier traitement et une seule observation pour le second traitement. Supposons, en outre, que les trois observations soient égales à 4, 3 et 1. Dans ces conditions, on a :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mu \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \end{bmatrix}.$$

La matrice de projection, \mathbf{P} , est égale à :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et, par conséquent :

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/2 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

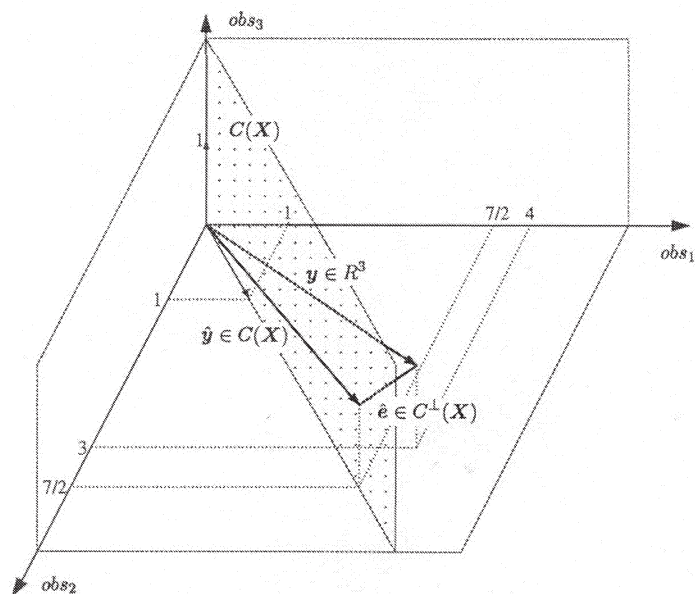


Figure 2. Représentation de la projection d'un vecteur de trois observations, \mathbf{y} , sur le plan des colonnes de \mathbf{X} .

La figure 2 donne la représentation du vecteur \mathbf{y} dans l'espace à trois dimensions. L'espace engendré par les colonnes de \mathbf{X} est un plan, car le rang de \mathbf{X} est égal à 2. Pour représenter ce plan, il suffit de représenter deux vecteurs de \mathbf{X} linéairement indépendants, par exemple :

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

On vérifie bien que le vecteur $\hat{\mathbf{y}}$ est dans le plan défini par \mathbf{x}_2 et \mathbf{x}_3 (espace des colonnes), et que le vecteur des résidus est perpendiculaire au vecteur $\hat{\mathbf{y}}$, car le produit scalaire de $\hat{\mathbf{y}}$ et $\hat{\mathbf{e}}$ est égal à zéro :

$$\hat{\mathbf{y}}' \hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 7/2 & 7/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 .$$

L'orthogonalité de la projection se déduit aussi du théorème de PYTHAGORE, appliqué au triangle formé par les vecteurs \mathbf{y} , $\hat{\mathbf{y}}$ et $\hat{\mathbf{e}}$. On vérifie, en effet que :

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \|\hat{\mathbf{y}}\|^2 + \|\hat{\mathbf{e}}\|^2 ,$$

ou encore que :

$$(4^2 + 3^2 + 1^2) = (3,5^2 + 3,5^2 + 1^2) + (0,5^2 + 0,5^2) .$$

4.4. Calcul des sommes de carrés et de leurs distributions d'échantillonnage

La décomposition du vecteur \mathbf{y} en deux composantes orthogonales, $\hat{\mathbf{y}}$ et $\hat{\mathbf{e}}$, permet de diviser la somme des carrés totale en une somme des carrés liée au modèle et une somme des carrés résiduelle :

$$SC_t = SC_\theta + SC_r,$$

c'est-à-dire :

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \|\hat{\mathbf{y}}\|^2 + \|\mathbf{e}\|^2,$$

ou encore :

$$\mathbf{y}'\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{e}}'\mathbf{e}.$$

On peut aussi exprimer les sommes des carrés en fonction de \mathbf{y} et de \mathbf{P} uniquement et on a :

$$\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{P}\mathbf{y})'(\mathbf{P}\mathbf{y}) = \mathbf{y}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{P}\mathbf{y}$$

et $\hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{y})'(\mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{y}) = \mathbf{y}'(\mathbf{I} - \mathbf{P})'(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{y} = \mathbf{y}'(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{y},$

les matrices \mathbf{P} et $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ étant idempotentes.

La somme des carrés peut à son tour être divisée en deux parties: la somme des carrés liée au paramètre μ , SC_μ , et la somme des carrés liée aux traitements, quand μ est déjà dans le modèle, $SC_{t|\mu}$. Il suffit, pour cela, de considérer la partition suivante de \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2],$$

\mathbf{X}_1 étant la colonne de \mathbf{X} dont tous les éléments sont égaux à l'unité et \mathbf{X}_2 étant l'ensemble des autres colonnes de \mathbf{X} . On a alors :

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^G\mathbf{X}_1' = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^+ = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_1' = \frac{1}{n}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1'$$

et

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P} - \mathbf{P}_1.$$

Par conséquent :

$$SC_\mu = \mathbf{y}'\mathbf{P}_1\mathbf{y}$$

et

$$SC_{t|\mu} = \mathbf{y}'\mathbf{P}_2\mathbf{y}.$$

Pour l'exemple présenté au paragraphe 4.1, on a :

$$SC_t = 54, \quad SC_\theta = 53 \quad \text{et} \quad SC_r = 1.$$

La matrice \mathbf{P}_1 étant égale à :

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

on trouve aussi :

$$SC_\mu = 49 \quad \text{et} \quad SC_{t|\mu} = 4.$$

Les nombres de degrés de liberté associés à ces sommes de carrés sont en fait égaux aux dimensions des espaces vectoriels correspondants et sont donnés par les rangs des matrices de projection. Ainsi, en vertu des propriétés des inverses généralisées de MOORE-PENROSE, le nombre de degrés de liberté de SC_θ est égal au rang de \mathbf{P} , qui est égal lui-même au rang de \mathbf{X} ; le nombre de degrés de liberté de SC_r est égal au rang de $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$, c'est-à-dire au nombre d'observations moins le rang de \mathbf{P} ; le nombre de degrés de liberté de SC_μ est égal au rang de \mathbf{P}_1 , c'est-à-dire aussi de \mathbf{X}_1 ; et enfin, le nombre de degrés de liberté de $SC_{t|\mu}$ est égal au rang de \mathbf{P}_2 , qui est égal au rang de \mathbf{P} dont on soustrait le rang de \mathbf{P}_1 ou au rang de \mathbf{X} dont on soustrait le rang de \mathbf{P}_1 .

Le tableau 2 reprend notamment, pour l'exemple considéré, les différentes sources de variations, les nombres de degrés de liberté et les sommes des carrés correspondantes.

Tableau 2. Tableau d'analyse de la variance relatif à l'exemple du paragraphe 4.1.

Sources de variation	Nombres de degrés de liberté	Sommes des carrés	Espérances mathématiques des sommes des carrés	Paramètres de non-centralité des variables χ^2
Paramètres	2	53	$2\sigma^2 + 2\sum_{i=1}^2(\mu + t_i)^2$	$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^2(\mu + t_i)^2$
μ	1	49	$\sigma^2 + (2\mu + \sum_{i=1}^2 t_i)^2$	$\frac{1}{2\sigma^2}(2\mu + \sum_{i=1}^2 t_i)^2$
$t_{i \mu}$	1	4	$\sigma^2 + 2\sum_{i=1}^2(t_i - \bar{t})^2$	$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^2(t_i - \bar{t})^2$
Var. résid.	2	1	$2\sigma^2$	0
Totaux	4	54	$4\sigma^2 + 2\sum_{i=1}^2(\mu + t_i)^2$	—

Les différentes sommes des carrés envisagées ci-dessus sont des formes quadratiques. On peut en trouver les espérances mathématiques en faisant, par exemple, l'hypothèse que \mathbf{y} est un vecteur d'observations provenant d'une distribution multivariée à n dimensions, de moyenne $\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$ et de matrice de variances et covariances $\mathbf{I}\sigma^2$. En effet, dans ces conditions, l'espérance mathématique de $\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{y}$ est égale à :

$$E(\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{y}) = \text{tr}[\mathbf{M}]\sigma^2 + \boldsymbol{\theta}'\mathbf{X}'\mathbf{M}\mathbf{X}\boldsymbol{\theta},$$

en vertu d'un théorème classique relatif aux formes quadratiques. Dans cette relation, $tr[\mathbf{M}]$ représente la trace de la matrice \mathbf{M} .

Pour le dispositif expérimental décrit au paragraphe 4.1, on peut, sur base de ce théorème, calculer les espérances mathématiques des différentes sommes de carrés. Pour la somme des carrés relative au modèle complet, on a, par exemple :

$$E(\mathbf{y}' \mathbf{P} \mathbf{y}) = tr[\mathbf{P}] \sigma^2 + \boldsymbol{\theta}' \mathbf{X}' \mathbf{P} \mathbf{X} \boldsymbol{\theta} = 2 \sigma^2 + 2 \sum_{i=1}^2 (\mu + t_i)^2 .$$

Les différentes espérances mathématiques qui ont ainsi été calculées sont données dans le tableau 2.

Quant aux distributions d'échantillonnage des sommes de carrés, elles peuvent également être déterminées grâce à une propriété des formes quadratiques. En effet, sous les conditions de normalité évoquées ci-dessus, et si \mathbf{M} est une matrice de rang k , la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbf{y}' \mathbf{M} \mathbf{y} / \sigma^2$ soit distribuée selon une loi χ^2 à k degrés de liberté et dont le paramètre de non-centralité est égal à :

$$\delta = \frac{1}{2 \sigma^2} \boldsymbol{\theta}' \mathbf{X}' \mathbf{M} \mathbf{X} \boldsymbol{\theta} ,$$

est que \mathbf{M} soit idempotente. Ainsi, pour la somme des carrés des résidus divisée par σ^2 :

$$\frac{SC_r}{\sigma^2} = \frac{\mathbf{y}' (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{y}}{\sigma^2} ,$$

le caractère idempotent de la matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ peut se démontrer facilement grâce aux propriétés de l'inverse généralisée de MOORE-PENROSE. La matrice \mathbf{P} étant symétrique, on vérifie tout d'abord que $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ est également symétrique, et il faut donc démontrer que :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathbf{I} - \mathbf{P} .$$

En remplaçant \mathbf{P} par $\mathbf{X} \mathbf{X}^+$ (paragraphe 4.3) et en effectuant le produit on trouve :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{X}^+)(\mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{X}^+) = \mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{X}^+ - \mathbf{X} \mathbf{X}^+ + \mathbf{X} \mathbf{X}^+ \mathbf{X} \mathbf{X}^+ .$$

La matrice $\mathbf{X} \mathbf{X}^+$ étant idempotente (paragraphe 3.3), on peut supprimer les deux derniers termes du second membre de l'égalité et on vérifie ainsi que $(\mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{X}^+)$ est bien idempotente. La somme des carrés des résidus, divisée par σ^2 est donc bien une valeur observée d'une variable χ^2 , dont le nombre de degrés de liberté est égal au rang de $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$, c'est-à-dire 2, et dont le paramètre de non-centralité est égal à :

$$\frac{1}{2 \sigma^2} \boldsymbol{\theta}' \mathbf{X}' (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{X} \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2 \sigma^2} (\boldsymbol{\theta}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \mathbf{X}^+ \mathbf{X} \boldsymbol{\theta}) ,$$

c'est-à-dire égal à zéro, car :

$$\mathbf{X} \mathbf{X}^+ \mathbf{X} = \mathbf{X} ,$$

en vertu de la définition des inverses de MOORE-PENROSE (paragraphe 3.3).

Des calculs analogues peuvent être effectués pour les autres sommes des carrés. On peut vérifier que l'on retrouve les nombres de degrés de liberté et les paramètres de non-centralité donnés dans le tableau 2. En particulier, sous l'hypothèse nulle d'égalité des traitements, le paramètre de non-centralité relatif à $SC_{t|\mu}$ est égal à zéro, et le rapport du carré moyen correspondant au carré moyen résiduel est bien le rapport de deux variables χ^2 indépendantes, divisées par leurs nombres de degrés de liberté respectifs, c'est-à-dire aussi une variable de SNEDECOR.

4.5. Estimation des fonctions paramétriques et sommes de carrés associées aux tests d'hypothèses

Les inverses généralisées interviennent également pour vérifier si une fonction linéaire des paramètres, $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\theta}$, est estimable, c'est-à-dire aussi si elle peut faire en pratique l'objet d'un test d'hypothèse. En effet, une fonction paramétrique est estimable dans le modèle $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{e}$ si :

$$\boldsymbol{H}'\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda},$$

avec :

$$\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}.$$

Pour l'exemple du paragraphe 4.1, considérons, à titre d'illustration, les cinq fonctions paramétriques suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}'_1\boldsymbol{\theta} = \mu & \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\lambda}'_1 = [1 \quad 0 \quad 0], \\ \boldsymbol{\lambda}'_2\boldsymbol{\theta} = t_1 & \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\lambda}'_2 = [0 \quad 1 \quad 0], \\ \boldsymbol{\lambda}'_3\boldsymbol{\theta} = t_1 + t_2 & \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\lambda}'_3 = [0 \quad 1 \quad 1], \\ \boldsymbol{\lambda}'_4\boldsymbol{\theta} = \mu + t_1 & \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\lambda}'_4 = [1 \quad 1 \quad 0], \\ \boldsymbol{\lambda}'_5\boldsymbol{\theta} = t_1 - t_2 & \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\lambda}'_5 = [0 \quad 1 \quad -1], \end{aligned}$$

et vérifions quelles sont, parmi celles-ci, les fonctions estimables. En prenant, par exemple, comme inverse généralisée de $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})$ l'inverse conditionnelle \boldsymbol{A}_1^- , calculée au paragraphe 3.1, on obtient :

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_1^-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mais un autre résultat aurait été obtenu en prenant une autre matrice inverse. Pour cette matrice \boldsymbol{H} , on a :

$$\boldsymbol{H}'\boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}'\boldsymbol{\lambda}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}'\boldsymbol{\lambda}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}'\boldsymbol{\lambda}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}'\boldsymbol{\lambda}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Il en résulte donc que $\boldsymbol{\lambda}'_4\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\lambda}'_5\boldsymbol{\theta}$ sont les seules fonctions estimables parmi les cinq fonctions proposées. En l'absence de restriction sur les paramètres, on peut noter, en particulier, qu'il n'est pas possible d'estimer les t_i , mais qu'on peut estimer la différence des deux traitements.

Les inverses généralisées permettent également de calculer les sommes des carrés associées aux hypothèses nulles. En effet, pour l'hypothèse nulle :

$$H_0 : \mathbf{L}'\boldsymbol{\theta} = \mathbf{c},$$

où \mathbf{L}' est une matrice dont le rang est égal au nombre de lignes et telle que $\mathbf{L}'\boldsymbol{\theta}$ correspond à une série de fonctions estimables, on peut montrer que la somme des carrés associée est égale à :

$$SC_{H_0} = (\mathbf{L}'\boldsymbol{\theta}^\circ - \mathbf{c})'[\mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^G\mathbf{L}]^{-1}(\mathbf{L}'\boldsymbol{\theta}^\circ - \mathbf{c}),$$

cette expression étant constante, quelle que soit la matrice inverse prise en considération, et quelle que soit la solution $\boldsymbol{\theta}^\circ$ prise en considération.

A titre d'illustration, si on veut tester l'hypothèse d'égalité des deux traitements de l'exemple considéré, on a :

$$H_0 : t_1 = t_2 \quad \text{ou} \quad H_0 : \boldsymbol{\lambda}'_5\boldsymbol{\theta} = 0.$$

On a vu que $\boldsymbol{\lambda}'_5\boldsymbol{\theta}$ est estimable et que $\boldsymbol{\lambda}_5$ est de rang 1. Par conséquent, en reprenant comme inverse généralisée de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ la matrice \mathbf{A}_1^- et comme vecteur $\boldsymbol{\theta}$ le vecteur $\boldsymbol{\theta}_1^\circ$ (paragraphe 4.2), on a :

$$\boldsymbol{\lambda}'_5\boldsymbol{\theta}_1^\circ = [0 \quad 1 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 5/9 \\ 9/2 \end{bmatrix} = 2$$

$$\boldsymbol{\lambda}'_5\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\lambda}_5 = [0 \quad 1 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

et

$$SC_{H_0} = (2)(1)(2) = 4.$$

Comme il n'y a que deux traitements dans l'expérience envisagée, cette somme de carrés, liée à l'hypothèse d'égalité des deux traitements, est évidemment égale à la somme des carrés liée aux traitements $SC_{t|\mu}$, calculée au paragraphe 4.4.

5. QUELQUES INFORMATIONS COMPLÉMENTAIRES

L'objectif de cette note était de présenter brièvement les inverses généralisées les plus couramment utilisées dans la littérature statistique actuelle et d'examiner quelques-unes de leurs utilisations, en relation avec le modèle linéaire.

Il faut cependant savoir qu'il existe d'autres types de matrices inverses généralisées. Ainsi, on peut définir les *inverses généralisées réflexives*⁶ et les *inverses généralisées normalisées*⁷, qui satisfont respectivement les deux et les trois premières conditions de l'inverse généralisée de MOORE-PENROSE (paragraphe 3.3). Des informations sont données à leur sujet par SEARLE [1971]. Par ailleurs, MAZUNDAR *et al.* [1980] donnent les règles qui permettent d'obtenir des inverses généralisées spécifiques pour chaque restriction paramétrique adoptée. Quant à GOODNIGHT [1979], il définit les inverses du type g_2 . Et d'autres types d'inverses généralisées peuvent encore être définis.

Du point de vue des propriétés des inverses généralisées, nous nous sommes limités à l'énoncé de quelques-unes d'entre elles. A ce sujet aussi, des informations complémentaires peuvent être obtenues, entre autres, dans BEN-ISRAEL et GREVILLE [1974], GRAYBILL [1967], LANCASTER [1969], MAGNUS et NEUDECKER [1988], NOBLE [1969], PRINGLE et RAYNER [1971], RAO [1966], RAO et MITRA [1971], et SEARLE [1966, 1982].

Enfin, en ce qui concerne plus spécifiquement les applications des inverses généralisées dans le modèle linéaire, le lecteur pourra trouver plus de détails dans ALVES et IEMMA [1990], GRAYBILL [1976], HOCKING [1985], IEMMA [1982, 1983, 1987, 1989, 1990], KOCH [1987], et SEARLE [1971, 1982, 1984].

6. BIBLIOGRAPHIE

- ALVES M.I.F., IEMMA A.F. [1990]. The design matrix and the MOORE-PENROSE generalized inverse (abstract). *Biom. Bull.* 7(2), 5.
- BEN ISRAEL A., GREVILLE T.N.E. [1974]. *Generalized inverse: theory and application*. New York, Wiley, 397 p.
- DAGNELIE P. [1980-1981]. *Théorie et méthodes statistiques: applications agronomiques* (2 vol.). Gembloux, Presses Agronomiques, 378 + 463 p.
- DWIVEDI T.D. [1975]. A method to compute the rank factors of a matrix. *Sankhya* 37(B.4), 463-464.
- GOODNIGHT J.H. [1979]. A tutorial on the sweep operator. *Amer. Stat.* 33(3), 149-158.
- GRAYBILL F.A. [1967]. *Introduction to matrices with applications in statistics*. Belmont, Wadsworth, 372 p.
- GRAYBILL F.A. [1976]. *Theory and applications of the linear model*. Boston, Duxbury, 704 p.

6. En anglais: *reflexive generalized inverse matrix*.

7. En anglais: *normalized generalized inverse matrix*.

- HOCKING R.R. [1985]. *The analysis of linear models*. Monterey, Brooks/Cole, 385 p.
- IEMMA A.F. [1982]. Valores singulares de matrizes uniformes. *Ciencia e Natura* 4, 21-26.
- IEMMA A.F. [1983]. Testes de hipóteses nos delineamentos em parcelas subdivididas em blocos incompletos balanceados. *Desarrollo rural en las Americas* 15(2), 143-151.
- IEMMA A.F. [1987]. Modelos lineares, um a introdução para profissionais da pesquisa agropecuária. In: *32a Reuniao Brasileira da Sociedade internacional de Biometria*. Londrina, Imprensa do Estado, 267 p.
- IEMMA A.F. [1989]. *Algebra de matrizes com aplicaçoes em estatística*. Piracicaba, ESALQ/USP, 424 p.
- IEMMA A.F. [1990]. Least squares solutions to the effect of a subset of factors in experimental design (abstract). *Biom. Bull.* 7(2), 5.
- KOCH K.R. [1987]. *Parameter estimation and hypothesis testing in linear models*. Berlin, Springer, 378 p.
- LANCASTER P. [1969]. *Theory of matrices*. New York, Academic Press, 316 p.
- MAGNUS J.A., NEUDECKER H. [1988]. *Matrix differential calculus with applications in statistics*. New York, Wiley, 487 p.
- MAZUNDAR S., LI C.C., BRYCE R.G. [1980]. Correspondence between a linear restriction and a generalized inverse in linear model analysis. *Amer. Stat.* 34(2), 103-105.
- NOBLE B. [1969]. *Applied linear algebra*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 523 p.
- PRINGLE R.M., RAYNER A.A. [1971]. *Generalized inverse matrices with applications to statistics*. New York, Hafner, 120 p.
- RAO C.R. [1966]. Calculus of generalized inverse of matrices. Part I: general theory. *Sankhya*, 29(3), 317-342.
- RAO C.R., MITRA S.K. [1971]. *Generalized inverse of matrices and its applications*. New York, Wiley, 240 p.
- SEARLE S.R. [1966]. *Matrix algebra for the biological sciences, including applications in statistics*. New York, Wiley, 296 p.
- SEARLE S.R. [1971]. *Linear models*. New York, Wiley, 531 p.
- SEARLE S.R. [1982]. *Matrix algebra useful for statistics*. New York, Wiley, 420 p.
- SEARLE S.R. [1984]. Restrictions and generalized inverses in linear models. *Amer. Stat.* 38(1), 53-54.

La collection

NOTES DE STATISTIQUE ET D'INFORMATIQUE

réunit divers travaux (notes techniques, rapports de recherche, publications, etc.) émanant des services de statistique et d'informatique de la Faculté des Sciences Agronomiques et du Centre de Recherches Agronomiques de Gembloux (Belgique).

Quelques titres récents:

LEDEINE J.M. [1986]. Présentation d'un logiciel de simulation sur ordinateur d'exercices d'échantillonnage. *Notes Stat. Inform.* (Gembloux) 86/6, 15 p.

RAMLOT P. [1986]. Programmation structurée en Cobol, en Fortran et en Basic: aspects méthodologiques. *Notes Stat. Inform.* (Gembloux) 86/7, 33 p.

RAMLOT P., TOUSSAINT A. et VANDEVANDEL J.P. [1986]. Programmation structurée en Cobol, en Fortran et en Basic: étude de cas. *Notes Stat. Inform.* (Gembloux) 86/8, 36 p.

PALM R. [1987]. Etude des séries chronologiques par les méthodes de décomposition. *Notes Stat. Inform.* (Gembloux) 87/1, 25 p.

PALM R. [1987]. Etude des séries chronologiques par la méthode de BOX et JENKINS. *Notes Stat. Inform.* (Gembloux) 87/2, 40 p.

PALM [1988]. Les critères de validation des équations de régression linéaire. *Notes Stat. Inform.* (Gembloux) 88/1, 27 p.

PALM R. et DE BAST A; [1988]. Construction d'un modèle agrométéorologique pour la prévision des productions agricoles dans la Communauté Economique Européenne. *Notes Stat. Inform.* (Gembloux) 88/2, 14 p.

PALM [1989]. Quelques éléments de programmation linéaire *Notes Stat. Inform.* (Gembloux) 89/1, 37 p.

DAGNELIE P. [1989]. Le choix d'une méthode d'analyse statistique et l'examen préliminaire des données. *Notes Stat. Inform.* (Gembloux) 89/2, 17 p.

PALM R. [1990]. La corrélation canonique: principes et application. *Notes Stat. Inform.* (Gembloux) 90/1, 28 p.

CLAUSTRIAUX J.J. [1990]. Introduction au logiciel statistique MINITAB. *Notes Stat. Inform.* (Gembloux) 90/2, 12 p.

CARLETTI G. [1991]. Les micro-ordinateurs: présentation générale. *Notes Stat. Inform.* (Gembloux) 91/1, 27 p.

Faculté universitaire des Sciences agronomiques
Avenue de la Faculté d'Agronomie 8
5030 GEMBLoux (Belgique)

D/1992/2371/1