

## SOBRE A CONSTRUÇÃO DE PROJETORES ORTOGONAIS

Antonio Francisco IEMMA\*

Rudy PALM\*\*

Jean-Jacques CLAUSTRIAUX\*\*

- **Resumo:** Muitas vezes, no ensino de disciplinas relacionadas com modelos lineares, o professor pode encontrar dificuldades para exibir exemplos em salas de aula que possam associar numericamente idéias como projeção ortogonal, formas quadráticas, análise de variância e testes de hipóteses. Sem dúvida esse problema pode ser severamente acentuado em presença de dados desbalanceados. Apresentamos aqui um procedimento simples e imediato para a construção do projetor ortogonal associado a uma hipótese dada, qualquer que seja o nível de desbalanceamento.
- **UNITERMOS:** Projetores ortogonais; testes de hipóteses, dados desbalanceados.

### Introdução

Seja o modelo linear  $y = X\theta + e$  (\*), onde  $n \times 1$  é um vetor de observações,  $n \times p$  é uma matriz conhecida de posto  $k \leq \min\{n, p\}$ ,  $p \times 1$  é um vetor de parâmetros desconhecidos e  $n \times 1$  é um vetor de variáveis aleatórias não-observáveis tal que  $E[e] = \phi$  e  $\text{VAR}[e] = I\sigma^2$ , sem qualquer outra suposição adicional. Nesse contexto é bem sabido que o sistema de equações normais  $X'X\theta = X'y$ , sempre consistente, fornece soluções aproximadas de mínimos quadrados para  $y = X\theta$ , em geral inconsistentes, dadas por  $\hat{\theta} = (X'X)^{-1}X'y$ , onde  $(X'X)^{-1}$  é qualquer inversa generalizada de  $X'X$ . É bem sabido, também, que se  $X$  não tem posto coluna completo então o sistema de equações normais é indeterminado e  $\theta$  não tem valor por si só, mas sim através de  $X$ , pois

\* Departamento de Matemática e Estatística - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" - USP - 13418-260 - Piracicaba - SP.

\*\* Bureau de Statistique et D'Informatique - Faculté des Sciences Agronomiques - 5030 - Gembloux - Belgique.

$\hat{y} = X\theta^0$ , invariante para qualquer  $\theta^0$  solução das equações normais, é a aproximação de mínimos quadrados para o vetor  $y$ , das observações.

Por outro lado, é imediato verificar que  $\hat{y} = X\theta^0 = Py$ , onde  $P = X(X'X)^{-1}X'$  é  $XX'$  é o projetor ortogonal de  $y$  sobre o espaço gerado pelas colunas de  $X$ . Aqui  $X'$  e  $X^*$  referem-se respectivamente a uma inversa generalizada de mínimos quadrados e à inversa generalizada de Moore-Penrose. Assim, como pode ser observado na Figura 1, o vetor  $y \in R^n$  é decomposto na soma de dois vetores pertencentes a subespaços ortogonais:  $\hat{y} = Py$  pertencente a  $C(X)$  e  $\hat{e} = y - \hat{y} = (I - P)y$  pertencente ao complemento ortogonal do espaço coluna de  $X$ ,  $C^\perp(X)$ .

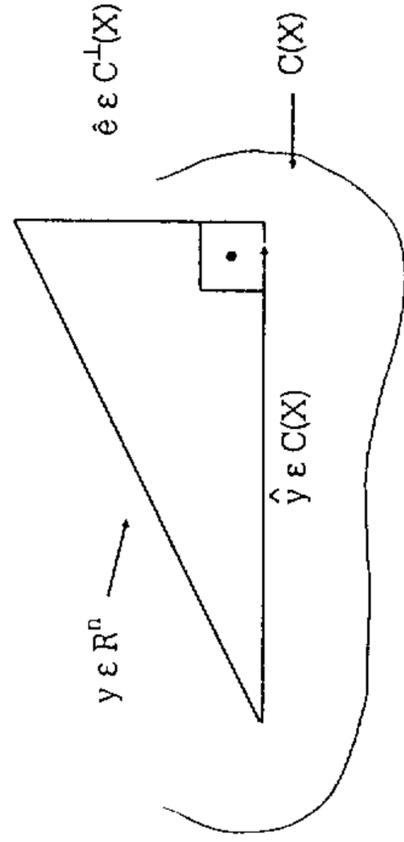


FIGURA 1 - Projeção ortogonal do vetor  $y$  sobre o espaço gerado pelas colunas de  $X$ .

Então, dada a ortogonalidade podemos utilizar o teorema de Pitágoras, obtendo a decomposição da análise de variância  $\|y\|^2 = \|\hat{y}\|^2 + \|\hat{e}\|^2$ , onde  $\|y\|^2 = y'y = \sum y^2$  é a soma de quadrados total não corrigida;  $\|\hat{y}\|^2 = |py|^2 = y'Py$  é a soma de quadrados dos parâmetros e  $\|\hat{e}\|^2 = |(I - P)y|^2 = y'(I - P)y$  é a soma de quadrados do resíduo.

A obtenção de  $P = X(X'X)^{-1}X'$  é trivial pois  $X$  é a matriz conhecida do delineamento. Desse modo a forma quadrática  $y'Py$  que traduz a soma de quadrados dos parâmetros, em termos das observações, é facilmente determinada. Tal simplicidade, no entanto, não é verificada na obtenção de projetores ortogonais associados a hipóteses mais específicas como por exemplo hipóteses sobre linhas, colunas e interação, principalmente se existem caselas vazias.

Apresentamos e exemplificamos a seguir um procedimento simples e imediato para obtenção dos projetores ortogonais associados a hipóteses dadas, qualquer que seja o grau de desbalanceamento dos dados.

## O método

Nossa proposta baseia-se na definição de função estimável dada em Rao (1945): Uma função linear dos parâmetros,  $\lambda'\theta^0$ , é dita estimável no modelo (\*) se, e somente se, existe ao menos uma combinação linear das observações,  $a'y$ , tal que  $E[a'y] = \lambda'\theta^0$ . Então  $\lambda'\theta^0$  estimável  $\Rightarrow a'X\theta^0 = \lambda'\theta^0$  e podemos tomar o sistema de equações lineares  $X'a = \lambda$ , do qual  $a = X^+\lambda$  é uma solução pois  $\lambda \in L(X)$  e nesse caso  $X^+X\lambda = \lambda$ .

Seja, por outro lado, a hipótese  $H_0: \lambda'\theta^0 = \phi$ ,  $\lambda'$  de posto linha completo e sua respectiva soma de quadrados de hipóteses:  $SOH_0 = (\lambda'\theta^0)'[\lambda'(X'X)^{-1}\lambda]^{-1}(\lambda'\theta^0)$ , onde  $\theta^0$  é qualquer solução das equações normais. Então, pelo teorema de Gauss-Markov  $\lambda'\theta^0$  é o "blue" de  $\lambda'\theta^0$ .

Ademais,  $\lambda'\theta^0 = \lambda'(X'X)^{-1}X'y$  é invariante para qualquer escolha de  $(X'X)^{-1}$ . Assim:  $SOH_0 = y'X[(X'X)^{-1}\lambda](X'X)^{-1}\lambda^{-1}[\lambda'(X'X)^{-1}\lambda]^{-1}y$  e, desde que  $X'a = \lambda$ , vem  $SOH_0 = y'X[(X'X)^{-1}X'a][\lambda'(X'X)^{-1}X'a]^{-1}[\lambda'(X'X)^{-1}\lambda]^{-1}y = y'XX^+a[\lambda'XX^+a]^{-1}[\lambda'(X'X)^{-1}\lambda]^{-1}y$  é também uma inversa generalizada de  $X'X$ . Sendo  $a = X^+\lambda$  uma solução, temos:  $SOH_0 = y'XX^+X^+\lambda[\lambda'XX^+X^+\lambda]^{-1}[\lambda'(X'X)^{-1}\lambda]^{-1}y$ . E das propriedades de inversa generalizada de Moore-Penrose vem:

$$SOH_0 = y'X^+\lambda[\lambda'X^+X^+\lambda]^{-1}[\lambda'(X'X)^{-1}\lambda]^{-1}y$$

Então  $SOH_0 = y'a(a'a)^{-1}a'y = y'P_{H_0}y$  que nos fornece uma forma extremamente simples e prática para a obtenção do projetor ortogonal associado à hipótese  $H_0$ .

## Exemplos numéricos

Tabela 1 - Dados fictícios

	j = 1	j = 2	j = 3
i = 1	$y_{111} = 7,0$ $y_{112} = 9,0$	$y_{121} = 8,0$ —	$y_{131} = 2,0$ $y_{132} = 4,0$
i = 2	$y_{211} = 5,0$ $y_{212} = 7,0$	$y_{221} = 14,0$ $y_{222} = 15,0$ $y_{223} = 19,0$	— — —

Consideramos o conjunto de dados da Tabela 1 através do qual exemplificaremos alguns tipos de hipóteses sobre efeitos de linhas, colunas e interação, dentre aqueles

sugeridos no procedimento GLM do pacote estatístico SAS e discutidos em Speed et al. (1978) e Searle (1987) dentre outros. Visando simplificar a forma de tais hipóteses adotaremos, sem perda de generalidade, o modelo de médias de caselas conforme Speed et al. (1978), Hocking (1985), Searle (1987), entre outros, na forma  $y = W\mu + e$ ,  $E[e] = \phi$  e  $VAR[e] = I\sigma^2$ , que para experimentos com classificação dupla cruzada e interação fica caracterizado por:  $y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}$ .

Temos então:

$$\begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{121} \\ Y_{131} \\ Y_{132} \\ Y_{211} \\ Y_{212} \\ Y_{221} \\ Y_{222} \\ Y_{223} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,0 \\ 9,0 \\ 8,0 \\ 2,0 \\ 4,0 \\ 5,0 \\ 7,0 \\ 14,0 \\ 15,0 \\ 19,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ e_{121} \\ e_{131} \\ e_{132} \\ e_{211} \\ e_{212} \\ e_{221} \\ e_{222} \\ e_{223} \end{bmatrix}$$

é imediato verificar que:

$$W^{+} = \begin{bmatrix} 1/n_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/n_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/n_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/n_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/n_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/n_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/n_{22} \end{bmatrix}$$

Isso posto, passemos a estudar algumas das sugeridas no procedimento GLM do SAS.

a) Um exemplo com hipótese do tipo I: Médias Ponderadas de Linhas.

Para os dados da Tabela 1, temos:

$$H_0^{(1)}: \frac{2\mu_{11} + \mu_{12} + 2\mu_{13}}{5} = \frac{2\mu_{21} + 3\mu_{22}}{5}$$

ou  $H_0^{(1)}: \lambda' \mu = \phi$ , donde  $\lambda' = \{2/5 \ 1/5 \ 2/5 \ -2/5 \ -3/5\}$ .

Nesse caso,  $a_i = W^{+} \lambda_j$  e então  $E[a_i' y] = \lambda' \mu$ , onde  $a_i' = \{1/5 \ 1/5 \ 1/5 \ 1/5 \ 1/5 \ -1/5 \ -1/5 \ -1/5 \ -1/5\}$  e, de modo simples e direto:  $P_1 = a_j (a_j' a_j)^{-1} a_j'$ , resultando

$$P_1 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

onde, naturalmente,  $SOH_0^{(1)} = y' P_1 y = (\lambda' \mu)^0 [\lambda' (W^{+} W)^{-1} \lambda_j]^{-1} (\lambda' \mu)^0 = 90,0000$ .

Ademais, no correspondente modelo super parametrizado  $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}$ , onde  $i$  é o índice de linhas e  $j$  é o índice de colunas, temos:

$$R(\alpha|\mu) = SOH_0^{(1)} = y' P_1 y = 90,0000.$$

b) Um exemplo com hipótese do tipo II: Médias Ponderadas de Colunas Ajustadas para Linhas. Para os dados em questão temos, conforme Searle (1987):

$$H_0^{(2)}: \begin{cases} \frac{2\mu_{11} + 2\mu_{21}}{4} = \frac{2\bar{L}_1 + 2\bar{L}_2}{4} \\ \frac{\mu_{12} + 3\mu_{22}}{4} = \frac{\bar{L}_1 + 3\bar{L}_2}{4} \end{cases}$$

onde  $\bar{L}_1 = \frac{2\mu_{11} + \mu_{12} + 2\mu_{13}}{5}$  e  $\bar{L}_2 = \frac{2\mu_{21} + 3\mu_{22}}{5}$

$$\text{Resultando } H_0^{(2)} : \begin{cases} \frac{3}{10} \mu_{11} - \frac{1}{10} \mu_{12} - \frac{1}{5} \mu_{13} + \frac{3}{10} \mu_{21} - \frac{3}{10} \mu_{22} = 0 \\ -\frac{1}{10} \mu_{11} + \frac{1}{5} \mu_{12} - \frac{1}{10} \mu_{13} - \frac{3}{10} \mu_{21} + \frac{3}{10} \mu_{22} = 0 \end{cases}$$

ou seja,  $H_0^{(2)} : \lambda_2' \mu = \phi$ .

onde  $\lambda_2' = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 & -1/5 & 3/10 & -3/10 \\ -1/10 & 1/5 & -1/10 & -3/10 & 3/10 \end{bmatrix}$

e então, como  $a_2 = W^+ \lambda_2$ , temos:

$$a_2' = \begin{bmatrix} 3/20 & 3/20 & -1/10 & -1/10 & 3/20 & 3/20 & -1/10 & -1/10 & -1/10 \\ -1/20 & -1/20 & 1/5 & -1/20 & -1/20 & -3/20 & -3/20 & 1/10 & 1/10 & 1/10 \end{bmatrix}$$

e assim, de modo simples e direto:

$P_2 = a_2(a_2' a_2)^{-1} a_2'$  isto é:

$$P_2 = \frac{1}{140} \begin{bmatrix} 27 & 27 & 2 & -28 & -28 & 15 & 15 & -10 & -10 & -10 \\ -27 & -27 & 2 & -28 & -28 & 15 & 15 & -10 & -10 & -10 \\ -2 & 2 & 52 & -28 & -28 & -30 & -30 & 20 & 20 & 20 \\ -28 & -28 & -28 & 42 & 42 & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ -28 & -28 & -28 & 42 & 42 & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ 15 & 15 & -30 & \phi & \phi & 27 & 27 & -18 & -18 & -18 \\ 15 & 15 & -30 & \phi & \phi & 27 & 27 & -18 & -18 & -18 \\ -10 & -10 & 20 & \phi & \phi & -18 & -18 & 12 & 12 & 12 \\ -10 & -10 & 20 & \phi & \phi & -18 & -18 & 12 & 12 & 12 \\ -10 & -10 & 20 & \phi & \phi & -18 & -18 & 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

Então  $SQH_0^{(2)} = y'P_2y = R(\beta|\mu, \alpha) = 107,1429$ .

c) Um exemplo de hipótese do tipo III: Hipótese Sobre Médias Não-Ponderadas de Linhas.

$$H_0^{(3)} : \frac{\mu_{11} + \mu_{12}}{2} = \frac{\mu_{21} + \mu_{22}}{2} \text{ ou } H_0^{(3)} : \lambda_3' \mu = \phi$$

De modo análogo aos anteriores obtemos:

$$\lambda_3' = [1/2 \ 1/2 \ 0 \ -1/2 \ -1/2],$$

$$a_3' = [1/4 \ 1/4 \ 1/2 \ 0 \ 0 \ -1/4 \ -1/4 \ -1/6 \ -1/6 \ -1/6], \text{ e}$$

$$P_3 = \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 9 & 9 & 18 & \phi & -9 & -9 & -6 & -6 & -6 \\ 9 & 9 & 18 & \phi & -9 & -9 & -6 & -6 & -6 \\ -18 & 18 & 36 & \phi & -18 & -18 & -12 & -12 & -12 \\ -9 & 9 & 18 & \phi & 9 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ -9 & 9 & 18 & \phi & 9 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -12 & \phi & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ -6 & -6 & -12 & \phi & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ -6 & -6 & -12 & \phi & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Então  $SQH_0^{(3)} = y'P_3y = R(\alpha|\mu, \beta, \gamma) = 15,4286$

d) Um exemplo com hipótese do tipo IV: Hipótese Sobre Médias Não-Ponderadas de Colunas:

$$H_0^{(4)} : \begin{cases} \mu_{13} - \mu_{12} = 0 \\ \mu_{13} - \mu_{11} = 0 \end{cases} \text{ (entre outras)}$$

ou  $H_0^{(4)} : \lambda_4' \mu = \phi; \lambda_4' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e então  $a_4' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e assim

$$P_4 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 & -1 & -1 & \phi & \phi \\ 3 & 3 & -2 & -1 & -1 & \phi & \phi \\ -2 & -2 & 8 & -2 & -2 & \phi & \phi \\ -1 & -1 & -2 & 3 & 3 & \phi & \phi \\ -1 & -1 & -2 & 3 & 3 & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \end{bmatrix}$$

com  $SQH_0^{(4)} = y'P_4y = 30,0000$

e) Um exemplo com hipótese sobre a interação

$$H_0^{(5)}: \mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{21} + \mu_{22} = 0 \text{ ou } H_0^{(5)}: \lambda_5' \mu = \phi$$

com  $\lambda_5' = [1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 1]$  e  $a_5 = W^{*'} \lambda_3$ .

$$\therefore a_5' = [1/2 \ 1/2 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1/2 \ -1/2 \ 1/3 \ 1/3 \ 1/3]$$

e então de modo simples e direto:

$$P_5 = \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 9 & 9 & -18 & \phi & -9 & -9 & 6 & 6 & 6 \\ 9 & 9 & -18 & \phi & -9 & -9 & 6 & 6 & 6 \\ -18 & -18 & 36 & \phi & 18 & 18 & -12 & -12 & -12 \\ \phi & \phi \\ -9 & -9 & 18 & \phi & 9 & 9 & -4 & -4 & -4 \\ -9 & -9 & 18 & \phi & 9 & 9 & -4 & -4 & -4 \\ 6 & 6 & -12 & -4 & -4 & -4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & -12 & \phi & -4 & -4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & -12 & -4 & -4 & -4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Sendo assim:  $SQH_0^{(5)} = y'P y = R(\gamma, \mu, \alpha, \beta) = 42,8571$

### Considerações finais

Diante do exposto podemos observar que o critério proposto simplifica sobremaneira a construção dos projetores ortogonais relativos a hipóteses dadas e que, conforme é bem sabido dos iniciados na área, seriam impraticáveis através de outros critérios. Ademais, sob normalidade,  $\frac{SQH_0}{\sigma_2}$  tem distribuição de  $\chi^2$  não central com r

$$[P] = r \ |a| \text{ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade } \delta = \frac{1}{2\sigma_2} \theta'X'PX\theta =$$

$\frac{1}{2\sigma_2} \theta' \lambda(a'a)^{-1} \lambda' \theta$ , explicando de modo objetivo e direto a Hipótese  $H_0: \lambda' \theta = \phi$ , que está sendo testada.

### Agradecimento

Os autores são gratos à pesquisadora Márcia Mondardo, pela revisão do texto.

## Apêndice

Quadro de Análises de Variâncias fornecidas pelo Procedimento GLM do SAS.  
As hipóteses utilizadas nos exemplos estão em destaque.

Source	Hypotesis	DF	Type I SS	Mean Square	F. Value	Pr > F
A	$H_0^{(1)}$	1	90.0000000	90.0000000	22.50	0.0051
B	$H_0^{(2)}$	2	107.1428571	53.5714286	13.39	0.0098
A*B	$H_0^{(5)}$	1	42.8571429	42.8571429	10.71	0.0221
Source	Hypotesis	DF	Type II SS	Mean Square	F. Value	Pr > F
A	—	1	9.1428571	9.1428571	2.29	0.1910
B	$H_0^{(2)}$	2	107.1428571	53.5714286	13.39	0.0098
A*B	$H_0^{(5)}$	1	42.8571429	42.8571429	10.71	0.0221
Source	Hypotesis	DF	Type III SS	Mean Square	F. Value	Pr > F
A	$H_0^{(3)}$	1	15.4285714	15.4285714	3.86	0.1067
B	—	2	61.0526315	30.5263157	7.63	0.0302
A*B	$H_0^{(6)}$	1	42.8571428	42.8571428	10.71	0.0221
Source	Hypotesis	DF	Type IV SS	Mean Square	F. Value	Pr > F
A	—	1*	15.4285714	15.4285714	3.86	0.1067
B	$H_0^{(4)}$	2	30.0000000	15.0000000	3.75	0.1012
A*B	$H_0^{(6)}$	1*	42.8571428	42.8571428	10.71	0.0221

\* NOTE: Other Type IV Testable Hypothesis exists which may yield different SS.

IEMMA, A. F., PALM, R., CLAUSTRIAUX, J. J. About the construction of orthogonal projectors. *Rev. Mat. Estat.*, São Paulo, v. 11, p. 133-142, 1993.

- **ABSTRACT:** *If in the analysis of the data one uses the linear model of the type  $y = X\theta + e$ ,  $e \sim N(\phi, I\sigma^2)$  (Gauss-Markov), then the orthogonal projector  $P$  of the  $y$  vector (vector of observations) on the space spanned by the columns of  $X$  is obtained just doing  $P = XX^+ = XX^+ - X(X^+X)^G X^+$ , where  $X^+$ ,  $X^+$  and  $(X^+X)^G$  are the Moore-Penrose generalized inverse of  $X$ , any Least Square Generalized Inverse and any Generalized Inverse of  $X^+X$ . Of course  $P$  is invariant and defined as above becomes the matrix of quadratic form  $y^+Py$  associated to the sum of square of all parameters of the model. On the other hand, to obtain specific orthogonal projection for the quadratic form associated to a single parameter or to particular hypotheses on one or more parameters, it is not obvious and in the case of unbalanced sample it is too difficult. This study shows a criteria to obtain orthogonal projections for any linear model with Gauss-Markov structure, any interest hypothesis and any level of unbalancedness of the sample.*
- **KEYWORDS:** *Orthogonal projectors; hypothesis tests; unbalanced data.*

### Referências bibliográficas

- HOCKING, R. R. *The analysis of linear models*. Monterrey: Brooks/Cole, 1985. 385p.
- IEMMA, A. F., PALM, R. *Les inverses généralisées et leur utilisation dans le Modèle Linéaire*. Gembloux, 1992. 25p. (Notes Statist. Informat.)
- IEMMA, A. F., PALM, R., ALVES, M. F. I. Orthogonal projectors and statistical hypotheses about unbalanced data. *Biometrics Bulletin*, N. Delhi, v. 10, n. 1, p. 18, 1993. (Abstracts.)
- RAO, C. R. On the linear combination of observations and the general theory of least squares. *Sankhyā*, Calcutá, v. 7, n. 3, p. 237-56, 1945.
- SEARLE, S. R. *Linear models for unbalanced data*. New York: Wiley, 1987. 536p.
- SPEED, F. M., HOCKING, R. R., HACKNEY, O.P. Methods of analysis of linear models with unbalanced data. *J. Amer. Statist. Assoc.*, Washington, v. 73, p. 105-12, 1978.

Recebido em 25.2.1993.