

# NOTES DE STATISTIQUE ET D'INFORMATIQUE

96/2

CARTES DE CONTRÔLE :  
les cartes de SHEWHART

R. PALM

Faculté universitaire des  
Sciences agronomiques

Centre de Recherches  
agronomiques

**GEMBLOUX**

(Belgique)

# CARTES DE CONTRÔLE :

## les cartes de SHEWHART

R. PALM<sup>(1)</sup>

### RÉSUMÉ

Cette note est consacrée à une présentation des cartes de contrôle classiques. On y décrit les cartes de contrôle des moyennes, des écarts-types, des médianes, des amplitudes, des proportions et des nombres d'articles non conformes et, enfin, des nombres de défauts.

Toutes ces cartes sont illustrées par des exemples numériques traités par les logiciels Minitab et SAS.

### SUMMARY

This note describes the SHEWHART control charts for subgroup means, standard deviations, medians, ranges, proportions of defectives, numbers of defectives and numbers of defects.

Minitab and SAS outputs are given for all these charts.

### 1. INTRODUCTION

Les *cartes de contrôle statistique*<sup>(2)</sup> sont des représentations graphiques destinées à suivre l'évolution de caractéristiques mesurables d'un procédé de fabrication. Elles constituent donc un outil de contrôle en cours de fabrication. Leur interprétation repose sur l'idée que la production présente une variabilité qui peut être attribuée à deux sources. La première source de variabilité est la

---

<sup>(1)</sup> Chargé de cours associé à la Faculté universitaire des Sciences agronomiques de Gembloux.

<sup>(2)</sup> En anglais : *control charts*.

variabilité inhérente au procédé de fabrication mis en oeuvre et la seconde source est la variabilité liée à des *causes identifiables*<sup>(3)</sup>, qui peuvent être détectées et éliminées. Il s'agit, par exemple, de l'influence des outils, des matières premières, des opérateurs, ou des jours de la semaine. On considère que le procédé de fabrication est sous contrôle lorsque toutes les sources de variation identifiables ont été supprimées et qu'il ne subsiste que les sources de variation propres au procédé<sup>(4)</sup>, considérées comme une variation résiduelle ou un bruit. Ces variations sont dues, par exemple, à l'hétérogénéité de la matière première ou aux modifications des conditions environnementales qui sont supposées difficiles à contrôler.

Les premières cartes de contrôle ont été proposées par SHEWHART, en 1924 [NELSON, 1982a], ce qui justifie qu'on les appelle aussi *cartes de SHEWHART*<sup>(5)</sup>.

Le principe général des cartes de contrôle classiques consiste à prélever, à intervalles réguliers, un échantillon dans la production. Cet échantillon est caractérisé par un ou deux paramètres dont on suit graphiquement l'évolution au cours du temps.

En relation avec la nature des observations réalisées sur les échantillons, on distingue deux situations. Si les individus de l'échantillon font l'objet d'une mesure (longueur, poids, etc.), on suit l'évolution dans le temps d'un paramètre de position - la moyenne ou la médiane - et d'un paramètre de dispersion - l'écart-type ou l'amplitude - et on considère que le procédé est sous contrôle statistique lorsque les valeurs de ces paramètres tombent dans des limites préalablement définies. Lorsque les échantillons font l'objet d'un dénombrement (comptage du nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon, comptage du nombre de défauts sur l'ensemble des individus de l'échantillon, par exemple), on a affaire à un contrôle par attributs ou comptages. On dit que le procédé est sous contrôle si le résultat de ce dénombrement se situe entre des limites fixées.

Dans cette note, nous nous limiterons aux cartes de contrôle basées sur l'examen des caractéristiques de chacun des échantillons pris isolément, en supposant que les observations successives sont indépendantes et en ne considérant qu'une seule variable à la fois. Ces cartes correspondent aux cartes de SHEWHART proprement dites. Une seconde note sera consacrée aux cartes de contrôle établies à partir de la combinaison des résultats de plusieurs échantillons, aux cartes relatives aux données non indépendantes et aux données multivariées [PALM, 1996].

Nous décrirons d'abord les *cartes de contrôle par mesures*<sup>(6)</sup> (paragraphe 2). Ensuite nous examinerons les *cartes de contrôle par comptages*<sup>(7)</sup> (paragraphe 3). Nous terminerons alors par quelques informations complémentaires (paragraphe 4). Des tableaux synthétiques reprenant diverses constantes et formules utilisées lors de l'établissement des cartes de contrôle sont donnés en annexe (annexes 1 à 3). Ces annexes devraient permettre au lecteur averti de retrou-

---

(3) En anglais : *assignable causes*.

(4) En anglais : *common causes, chance causes*.

(5) En anglais : *SHEWHART control charts*.

(6) En anglais : *variables control charts*.

(7) En anglais : *attributes control charts*.

ver plus rapidement les informations nécessaires à l'établissement d'une carte de contrôle bien particulière.

Les exemples numériques repris dans cette note ont tous été traités par les logiciels Minitab et SAS. Les cartes décrites peuvent en effet être établies par les commandes ou macroprocédures XBARChart, RChart, SChart, PChart, NPChart, CChart, UChart, IChart, MRChart, %XRChart, %XSChart et %IMRChart de Minitab et par la procédure PROC SHEWHART de SAS. Des informations à ce sujet sont données dans les manuels de références correspondants [SAS, 1991, 1995 ; X, 1994]. Pour réaliser les cartes de contrôle nous avons utilisé les facilités offertes par l'interface à menu déroulant des deux logiciels. Nous avons gardé les options proposées par défaut pour les titres et les dénominations des axes, qui apparaissent, par conséquent, en anglais dans les figures. Nous avons retenu les logiciels Minitab et SAS car ces deux logiciels font l'objet d'une large diffusion, mais de nombreux autres logiciels permettent également l'établissement des cartes de contrôle.

Des informations plus détaillées relatives aux cartes de SHEWHART peuvent être trouvées, notamment, dans les nombreux livres consacrés au contrôle statistique de la qualité, parmi lesquels nous citerons, à titre d'exemples, CAVÉ [1966], GRANT et LEAVENWORTH [1980], MONTGOMERY [1991] et WHEELER et CHAMBERS [1992] et WHEELER [1995].

## 2. CARTES DE CONTRÔLE PAR MESURES

### 2.1. Conditions d'application et notations

Considérons un procédé de production caractérisé par une variable quantitative particulière et supposons que, lorsque le procédé est sous contrôle, la variable étudiée suive une distribution normale dont la moyenne,  $m_0$ , et l'écart-type,  $\sigma_0$ , sont connus et, qu'en outre, il y ait indépendance entre les valeurs successives de la caractéristique en question. Typiquement, il pourrait s'agir d'un outil produisant des pièces données, celles-ci étant caractérisées par leur longueur, leur poids, leur diamètre, etc. Il pourrait s'agir aussi d'un problème non directement lié à l'industrie manufacturière ou à la production de biens industriels, comme, par exemple, la production de services [MONTGOMERY, 1991]. Pour la simplicité de la présentation, nous nous limiterons cependant, par la suite, aux procédés fabriquant des « pièces » ou des « articles ».

Pour vérifier si le procédé est bien sous contrôle, on prélève, à intervalles réguliers, un lot de pièces sur lesquelles on mesure la caractéristique qui fait l'objet du contrôle.

L'observation réalisée sur la  $j^{\text{ième}}$  pièce du  $i^{\text{ième}}$  prélèvement est notée  $x_{ij}$ . D'une façon générale, nous considérons que l'indice  $j$  varie de 1 à  $n_i$ ,  $n_i$  étant le nombre de pièces observées au moment  $i$ , mais le plus souvent, ce nombre sera constant et désigné simplement par  $n$ .

## 2.2. Cartes de contrôle des moyennes

Lors des prélèvements successifs des échantillons dans la production, on calcule les moyennes,  $\bar{x}_i$ , des  $n_i$  pièces et on porte ces valeurs sur un graphique à deux dimensions, l'ordonnée correspondant aux valeurs des moyennes successives et l'abscisse correspondant aux numéros d'ordre de l'échantillon.

La carte de contrôle des moyennes<sup>(8)</sup> reprend également une limite de contrôle inférieure et une limite de contrôle supérieure<sup>(9)</sup>. Tant que les moyennes successives sont situées entre ces limites, on considère que le procédé de fabrication est sous contrôle et on continue la fabrication. Par contre, dès qu'une moyenne se situe hors des limites de contrôle, on intervient sur le procédé de fabrication. Un exemple de carte de contrôle des moyennes est donné dans la partie supérieure de la figure 1, qui sera explicitée au paragraphe 2.7.

La définition des limites de contrôle repose sur la notion de distribution d'échantillonnage de la moyenne. Soit  $\bar{X}_i$ , la variable aléatoire décrivant le résultat du calcul de la moyenne d'un échantillon de  $n_i$  pièces. Sous les conditions d'application définies au paragraphe 2.1, la variable  $\bar{X}_i$  suit une distribution normale de moyenne égale à  $m_0$  et d'écart-type égal à  $\sigma_0/\sqrt{n_i}$  [DAGNELIE, 1992]. Si  $\alpha$  est la probabilité que la moyenne d'un échantillon se situe en dehors des limites de contrôle, celles-ci sont égales à :

$$m_0 \pm u_{1-\alpha/2} \sigma_0 / \sqrt{n_i},$$

$u_{1-\alpha/2}$  étant le pourcentile  $1 - \alpha/2$  relatif à la variable normale réduite, c'est-à-dire la valeur de la variable normale réduite, pour laquelle la fonction de répartition vaut  $1 - \alpha/2$ . Si les effectifs  $n_i$  sont constants, les limites de contrôle sont situées à une distance constante de la ligne centrale correspondant à la valeur  $m_0$ . Par contre, si les effectifs sont variables, les limites sont d'autant plus éloignées de la ligne centrale que l'effectif est petit.

La valeur  $\alpha$  représente la probabilité de déclarer que le procédé n'est plus sous contrôle du point de vue de la moyenne alors qu'en réalité il l'est. Il s'agit en fait du risque de première espèce associé au test de l'hypothèse nulle :

$$H_0 : m = m_0,$$

$m$  étant la moyenne du procédé au moment du  $i^{\text{ème}}$  échantillonnage :

$$\alpha = P(\bar{X}_i < m_0 - u_{1-\alpha/2} \sigma_0 / \sqrt{n_i} \quad \text{ou} \quad \bar{X}_i > m_0 + u_{1-\alpha/2} \sigma_0 / \sqrt{n_i} \mid m_0, \sigma_0).$$

On fixe habituellement cette probabilité à 0,002 et, dans ce cas :

$$u_{1-\alpha/2} = 3,09.$$

Les limites de contrôle peuvent aussi être fixées en fonction d'un multiple de l'erreur-standard de la moyenne :

$$m_0 \pm k \sigma_0 / \sqrt{n_i},$$

---

<sup>(8)</sup> En anglais :  $\bar{X}$  chart.

<sup>(9)</sup> En anglais : lower control limit, LCL, et upper control limit, UCL.

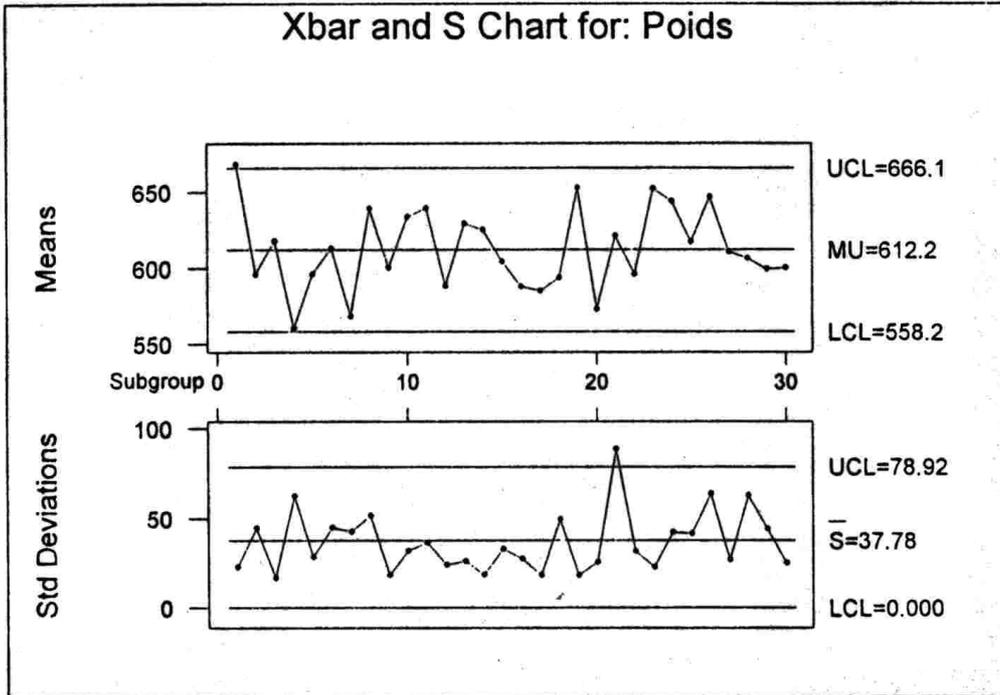


Figure 1. Cartes de contrôle des moyennes et des écarts-types : résultats fournis par le logiciel Minitab.

et la valeur habituellement retenue pour  $k$  est 3, ce qui correspond à un risque d'erreur de première espèce de 0,0027. Les conséquences pratiques du choix d'un facteur multiplicatif de l'erreur-standard de la moyenne égal à 3,09 ou à 3 sont négligeables. Ce choix est essentiellement une question de convention : la pratique courante est de retenir le facteur 3,09 en Europe et le facteur 3 aux Etats-Unis.

En plus des limites de contrôle, on peut encore définir des limites de surveillance qui servent à attirer l'attention sur un début possible de dérèglement de l'outil de production : on procède comme pour les limites de contrôle, en donnant à  $\alpha$  la valeur 0,05 ou à  $k$  la valeur 2. Le dépassement des limites de surveillance peut, par exemple, entraîner la décision d'un accroissement provisoire du contrôle.

Au test de conformité de la moyenne ci-dessus, est également associé un risque d'erreur de deuxième espèce,  $\beta(m)$ , qui est la probabilité d'accepter l'hypothèse nulle alors qu'elle est fautive, c'est-à-dire, concrètement, de ne pas intervenir sur le procédé alors qu'il n'est plus sous contrôle. Le complément à l'unité de ce risque est la puissance du test [DAGNELIE, 1992].

Si on considère que seule la moyenne du procédé est modifiée, le risque de deuxième espèce est égal à :

$$\beta(m) = P(m_0 - u_{1-\alpha/2}\sigma_0/\sqrt{n_i} \leq \bar{X}_i \leq m_0 + u_{1-\alpha/2}\sigma_0/\sqrt{n_i} | m, \sigma_0).$$

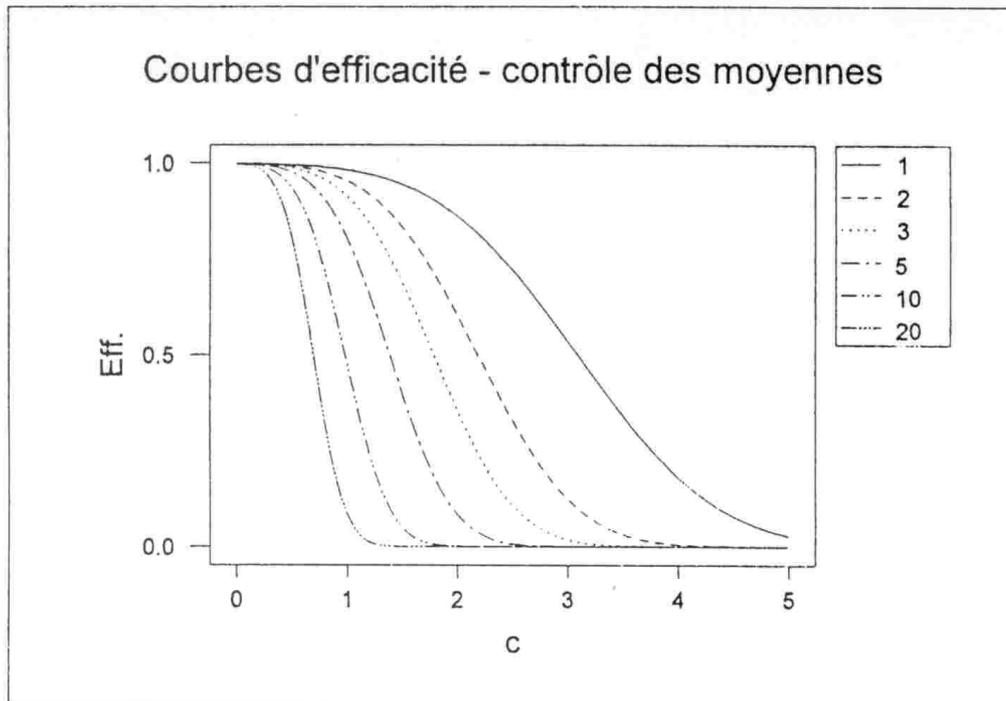


Figure 2. Contrôle des moyennes : courbes d'efficacité pour des effectifs de 1, 2, 3, 5, 10 et 20 et pour un risque  $\alpha$  égal à 0,002 ;  $c = (m - m_0)/\sigma_0$ .

Si, de plus, les écarts entre  $m$  et  $m_0$  sont exprimés sous la forme d'un multiple de l'écart-type,  $\sigma_0$  :

$$m = m_0 + c\sigma_0,$$

on a :

$$\beta(m) = \Phi(u_{1-\alpha/2} - c\sqrt{n_i}) - \Phi(-u_{1-\alpha/2} - c\sqrt{n_i}),$$

la notation  $\Phi(u)$  représentant la valeur de la fonction de répartition de la distribution normale réduite au point d'abscisse  $u$ .

La figure 2 donne les courbes du risque d'erreur de seconde espèce en fonction de  $c$ , pour différents effectifs et pour  $\alpha = 0,002$ . Dans cette représentation graphique, on s'est limité aux valeurs positives de  $c$  car les courbes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Ces courbes sont appelées *courbes d'efficacité*<sup>(10)</sup>.

Ce graphique montre clairement que, pour une valeur de  $c$  différente de zéro, c'est-à-dire pour un écart par rapport à l'hypothèse nulle fixé, le risque de seconde espèce diminue avec l'effectif. En d'autres termes, pour un écart de la moyenne par rapport à  $m_0$  donné, la nécessité d'une intervention sur le procédé sera d'autant plus rapidement mise en évidence que  $n$  est grand. En pratique, on

<sup>(10)</sup> En anglais : *operating characteristic curves, OC curves*.

utilise fréquemment des échantillons dont la taille est de l'ordre de cinq unités, ce qui permet, pour un coût de contrôle donné, de ne pas augmenter exagérément l'intervalle de temps entre deux échantillons successifs. Pour un tel effectif, la probabilité de ne pas détecter une modification de la moyenne égale à une fois l'écart-type ( $c = 1$ ), à partir d'un échantillon donné, est égale à 0,8 environ.

Dans la figure 2, le cas particulier  $n = 1$  a également été représenté, car à partir de cette courbe, il est facile de calculer le risque  $\beta(m)$  pour n'importe quelle valeur de  $n$ . Il suffit, en effet, de définir l'abscisse de façon légèrement différente :

$$c' = c\sqrt{n} = \frac{m - m_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}.$$

Ainsi, par exemple, pour une différence entre  $m$  et  $m_0$  égale à  $\sigma_0$  et pour un effectif égal à 7, on trouve :

$$c' = \sqrt{7} = 2,65,$$

et, pour cette abscisse, la courbe en trait continu donne une efficacité de l'ordre de 0,67.

Il ne faut pas perdre de vue que les courbes d'efficacité qui ont été établies donnent la probabilité de ne pas mettre en évidence la modification à la suite du prélèvement d'un seul échantillon. On peut aussi calculer la probabilité de mettre en évidence cette modification lors du deuxième prélèvement, lors du troisième prélèvement, etc. De façon plus générale, la probabilité de mettre en évidence cette différence lors du  $q^{\text{ième}}$  prélèvement est égale à :

$$\beta(m)^{q-1} [1 - \beta(m)],$$

puisque'il faut  $q - 1$  prélèvements successifs au cours desquels on ne met pas en évidence la modification, suivis d'un prélèvement au cours duquel on met en évidence cette modification.

On peut aussi déterminer la *longueur moyenne de la suite homogène*<sup>(11)</sup>, qui représente le nombre d'échantillons qu'il faut prélever, en moyenne, avant qu'un point ne sorte des limites de contrôle. Lorsque la machine est bien réglée, on souhaite que ce nombre soit aussi grand que possible alors que lorsqu'elle est dérégulée, on souhaite qu'il soit, au contraire, le plus petit possible. On peut montrer que la longueur moyenne de la suite est égale à  $1/(1 - \beta)$  lorsque l'hypothèse nulle est fautive et égale à  $1/\alpha$  lorsque l'hypothèse nulle est vraie [CAVÉ, 1966]. A titre d'exemple, si l'hypothèse nulle est vraie et si  $\alpha = 0,002$ , cette longueur est égale à 500, quelle que soit la taille de l'échantillon. Pour  $n = 5$ , elle sera de 41 si la moyenne a subi une modification égale à la moitié de l'écart-type et de 5,1 si la moyenne a subi une modification d'un écart-type ; pour  $n = 10$ , on aurait, respectivement, des longueurs moyennes de 15,2 et 1,9.

Par ailleurs, une modification de l'écart-type du procédé entraîne une modification du risque de première espèce associé à l'hypothèse nulle. En effet, si on exprime  $\sigma$  sous la forme d'un multiple de  $\sigma_0$  :

$$\sigma = c\sigma_0$$

<sup>(11)</sup> En anglais : *average run length, ARL*.

le risque réel de première espèce,  $\alpha'$ , est alors égal à :

$$\alpha' = 2 [1 - \Phi(u_{1-\alpha/2}/c)] .$$

Ainsi, pour  $\alpha = 0,002$ , le risque réel est de 0,0006 si  $c = 0,9$  et de 0,005 si  $c = 1,1$ , par exemple.

On constate que, pour un effectif fixé, le risque de première espèce est une fonction croissante de  $c$ , donc de l'écart-type  $\sigma$ . Il est par conséquent utile, en pratique, de vérifier si le procédé est sous contrôle, non seulement du point de vue de la moyenne, mais aussi du point de vue de la dispersion. C'est la raison pour laquelle on construit des cartes de contrôle de paramètres relatifs à la dispersion.

### 2.3. Cartes de contrôle des écarts-types

Soit  $s_i^2$  la variance observée sur l'échantillon  $i$ , définie de la façon suivante :

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 .$$

Si la caractéristique étudiée suit une loi normale d'écart-type  $\sigma_0$ ,  $s_i^2$  est une valeur observée d'une variable aléatoire notée  $S_i^2$ , et la variable :

$$\frac{n_i S_i^2}{\sigma_0^2}$$

possède une distribution  $\chi^2$  de PEARSON à  $n_i - 1$  degrés de liberté [DAGNELIE, 1992]. Par conséquent, pour une probabilité  $\alpha$  de déclarer que le procédé n'est pas sous contrôle du point de vue de la dispersion alors qu'en réalité il l'est, les limites de contrôle pour les écarts-types observés,  $s_i$ , sont :

$$\sigma_0 \sqrt{\chi_{\alpha/2}^2/n_i} \quad \text{et} \quad \sigma_0 \sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2/n_i} ,$$

$\chi_{\alpha/2}^2$  et  $\chi_{1-\alpha/2}^2$  étant les valeurs de la variable  $\chi^2$  à  $n_i - 1$  degrés de liberté pour lesquelles la fonction de répartition vaut respectivement  $\alpha/2$  et  $1 - \alpha/2$ .

On établit cependant plus couramment des *cartes de contrôle des écarts-types estimés*<sup>(12)</sup>,  $\hat{\sigma}_i$  :

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2} = \sqrt{n_i/(n_i - 1)} s_i ,$$

dont les limites de contrôle sont obtenues en remplaçant, dans les formules ci-dessus, le dénominateur  $n_i$  par  $n_i - 1$  :

$$\sigma_0 \sqrt{\chi_{\alpha/2}^2/(n_i - 1)} \quad \text{et} \quad \sigma_0 \sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2/(n_i - 1)} .$$

<sup>(12)</sup> En anglais : *S chart*.

Ces écarts-types estimés,  $\hat{\sigma}_i$ , sont des estimations biaisées de l'écart-type  $\sigma_0$ . On peut, en effet, montrer que, pour un échantillon de  $n$  observations indépendantes prélevé dans une population normale réduite, l'espérance mathématique de la distribution d'échantillonnage de l'écart-type estimé :

$$\sqrt{n S^2 / (n - 1)},$$

fréquemment désignée par  $c_4$ , est égale à :

$$c_4 = \sqrt{2/(n-1)} \Gamma(n/2) / \Gamma[(n-1)/2],$$

la notation  $\Gamma$  représentant la fonction gamma. Des valeurs de cette constante sont données dans l'annexe 1. Elle est toujours inférieure à l'unité et tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

C'est à cause de ce biais que la ligne centrale dans la carte de contrôle des écarts-types estimés ne se situe pas en  $\sigma_0$  mais bien en  $c_4 \sigma_0$ .

Les limites de contrôle peuvent également être exprimées en fonction d'un multiple,  $k$ , de l'erreur-standard de l'écart-type.

Pour un échantillon de  $n$  observations indépendantes prélevé dans une population normale réduite, l'erreur-standard de la distribution d'échantillonnage de l'écart-type estimé est égale à :

$$c_5 = \sqrt{1 - c_4^2}.$$

Quelques valeurs de cette constante sont données dans l'annexe 1. On peut constater que lorsque  $n$  augmente, ces valeurs se rapprochent de la quantité  $1/\sqrt{2n}$ , qui est l'erreur-standard asymptotique [DAGNELIE, 1992].

Les limites de contrôle des écarts-types estimés peuvent, par conséquent, s'écrire :

$$c_4 \sigma_0 \pm k c_5 \sigma_0,$$

en remplaçant toutefois la limite inférieure par zéro lorsque le calcul par la formule ci-dessus conduit à une valeur négative.

Un exemple de carte de contrôle des écarts-types est donné dans la partie inférieure de la figure 1. Cet exemple sera discuté au paragraphe 2.7.

Comme dans le cas des cartes de contrôle des moyennes, on peut s'intéresser au risque  $\beta(\sigma)$  associé au test de conformité de la variance :

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

qu'on réalise implicitement en établissant la carte de contrôle.

On a :

$$\begin{aligned} \beta(\sigma) &= P \left( \frac{\sigma_0^2 \chi_{\alpha/2}^2}{n_i - 1} \leq \frac{n_i S^2}{n_i - 1} \leq \frac{\sigma_0^2 \chi_{1-\alpha/2}^2}{n_i - 1} \mid m_0, \sigma \right) \\ &= P(\chi^2 \leq \chi_2^2) - P(\chi^2 < \chi_1^2), \end{aligned}$$

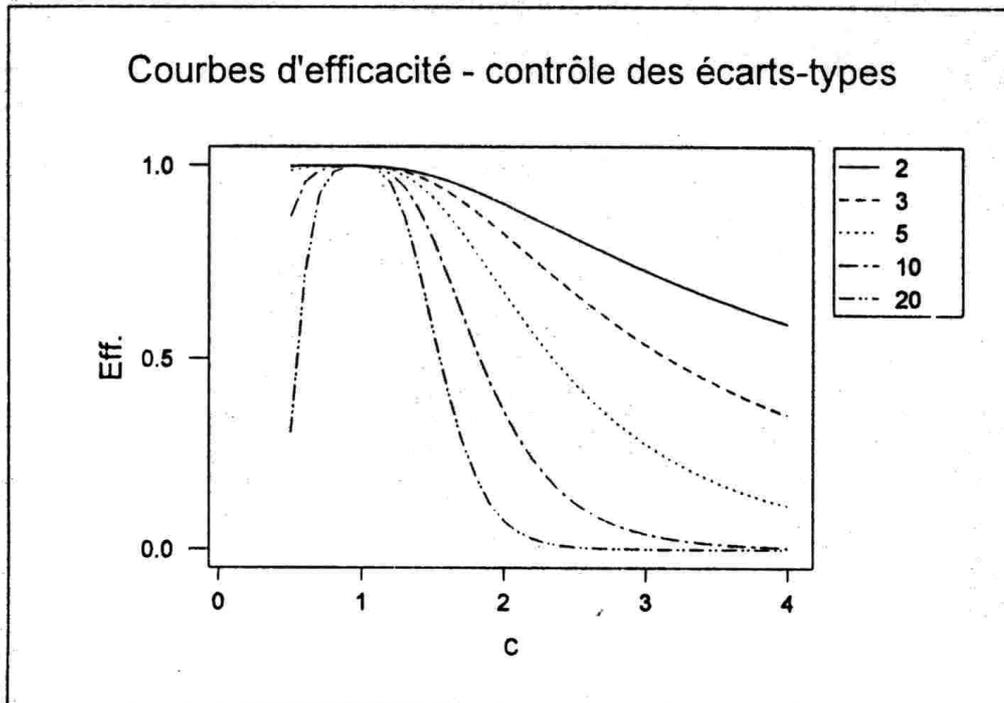


Figure 3. Contrôle des écarts-types : courbes d'efficacité pour des effectifs de 2, 3, 5, 10 et 20 et pour un risque  $\alpha$  égal à 0,002 ;  $c = \sigma/\sigma_0$ .

avec :

$$\chi_1^2 = (\sigma_0^2/\sigma^2)\chi_{\alpha/2}^2 \quad \text{et} \quad \chi_2^2 = (\sigma_0^2/\sigma^2)\chi_{1-\alpha/2}^2.$$

La figure 3 donne l'évolution du risque  $\beta(\sigma)$  en fonction de  $n$  et du rapport  $\sigma/\sigma_0$ , dénommé  $c$ , en considérant que le risque d'erreur de première espèce,  $\alpha$ , est égal à 0,002.

#### 2.4. Cartes de contrôle des médianes

Pour des raisons de simplicité de calcul, on peut remplacer la carte de contrôle des moyennes par la *carte de contrôle des médianes*<sup>(13)</sup>,  $\tilde{x}_i$ .

Pour un échantillon d'effectif  $n$  prélevé dans une population normale, la distribution d'échantillonnage de la médiane,  $\tilde{X}_i$ , est asymptotiquement normale. Sa moyenne est égale à la moyenne de la population et son erreur-standard est asymptotiquement égale à [DAGNELIE, 1992] :

$$(\sigma_{\tilde{x}})_\alpha = \sqrt{\pi \sigma_0^2 / 2n}.$$

Pour des effectifs faibles, des relations exactes peuvent être utilisées. Des informations à ce sujet sont données par STUART et ORD [1987] et des fonctions

<sup>(13)</sup> En anglais : *M chart*.

Tableau 1. Erreur-standard de la moyenne,  $\sigma_{\bar{u}}$ , erreur-standard de la médiane calculée par la relation asymptotique,  $(\sigma_{\bar{u}})_a$ , et erreur-standard exacte de la médiane,  $\sigma_{\bar{u}}$ , dans le cas d'un échantillon aléatoire et simple prélevé d'une population normale réduite.

$n$	$\sigma_{\bar{u}}$	$(\sigma_{\bar{u}})_a$	$\sigma_{\bar{u}}$
2	0,707	0,886	0,707
3	0,577	0,724	0,670
5	0,447	0,561	0,536
10	0,316	0,396	0,372
20	0,224	0,280	0,271
100	0,100	0,125	0,124

permettant le calcul de l'erreur-standard et de la fonction de répartition de la médiane sont données dans le logiciel SAS.

A titre de comparaison, le tableau 1 donne, en fonction de l'effectif  $n$  et pour une population-parent normale réduite, l'erreur-standard de la distribution d'échantillonnage de la moyenne,  $\sigma_{\bar{u}}$ , l'erreur-standard de la distribution d'échantillonnage de la médiane calculée, d'une part, par la relation asymptotique,  $(\sigma_{\bar{u}})_a$ , et, d'autre part, de manière exacte,  $\sigma_{\bar{u}}$ .

On constate que, pour  $n = 2$ ,  $\sigma_{\bar{u}}$  est égal à  $\sigma_{\bar{u}}$ , car la moyenne et la médiane sont confondues. Lorsque  $n$  est plus grand que 2, l'erreur-standard de la moyenne est plus faible que l'erreur-standard de la médiane, le rapport  $\sigma_{\bar{u}}/\sigma_{\bar{u}}$  tendant vers  $\sqrt{\pi/2}$ , c'est-à-dire vers 1,25, lorsque  $n$  tend vers l'infini.

En désignant par  $\tilde{u}_{1-\alpha/2}$ , le pourcentile  $1 - \alpha/2$  relatif à la distribution d'échantillonnage de la médiane d'un échantillon de  $n$  observations indépendantes prélevé dans une population normale réduite, les limites de contrôle de la médiane sont égales à :

$$m_0 \pm \tilde{u}_{1-\alpha/2} \sigma_0.$$

Exprimées en fonction d'un multiple de l'erreur-standard, les limites s'écrivent :

$$m_0 \pm k \sigma_{\bar{u}} \sigma_0.$$

Les valeurs de  $\sigma_{\bar{u}}$  et  $\tilde{u}_{0,999}$  sont données dans l'annexe 1 pour différents effectifs. Elles ont été calculées en utilisant les fonctions STD MED et PROB MED de SAS.

La comparaison des limites de contrôle calculées ci-dessus en utilisant la densité de probabilité exacte de la distribution d'échantillonnage de la médiane et les limites qu'on peut obtenir par l'approximation normale de cette distribution d'échantillonnage montre que les différences sont faibles, même pour des petites valeurs de  $n$ . En effet, pour s'en rendre compte, il suffit de calculer le rapport :

$$(\tilde{u}_{1-\alpha/2} \sigma_{\bar{u}}) / \tilde{u}_{1-\alpha/2},$$

qui est égal au rapport des intervalles calculés par les deux méthodes. Les valeurs de  $\tilde{u}_{0,999}$  et de  $\sigma_{\tilde{u}}$  reprises dans l'annexe 1 montrent que ce rapport est de l'ordre de 0,99 pour  $n = 3$ , qui est le cas où la discordance est la plus forte.

D'autre part, pour une même valeur  $\alpha$ , l'intervalle entre les deux limites de contrôle est plus grand pour la médiane que pour la moyenne. Le rapport entre ces deux longueurs est approximativement égal au rapport des erreurs-standards  $\sigma_{\tilde{u}}/\sigma_{\bar{u}}$  qui est compris entre 1 et 1,25, selon la valeur de  $n$ . Il en résulte que, pour une modification donnée de la moyenne, le risque de seconde espèce est plus important dans le cas de la médiane que dans le cas de la moyenne lorsque  $n$  est supérieur à deux. Ainsi, par exemple, pour  $n = 5$  et pour une modification de la moyenne égale à  $\sigma_0$ , le risque  $\beta$  est égal à 0,80 dans le cas de la moyenne (paragraphe 2.2) et de l'ordre de 0,89 dans le cas de la médiane. Cette dernière valeur peut s'obtenir assez facilement à partir de la courbe d'efficacité du contrôle de la moyenne pour  $n = 1$  (figure 2). Il suffit en effet de calculer :

$$\frac{m - m_0}{\sigma_0 \sigma_{\tilde{u}}} = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 \sigma_{\tilde{u}}} \cong 1,87,$$

et de lire la valeur du risque d'erreur, correspondant à  $c = 1,87$  et  $n = 1$ . Rappelons que pour la moyenne, on pourrait lire, sur la même courbe, l'ordonnée qui correspond à une valeur de  $\sqrt{5}$ , soit 2,24.

## 2.5. Cartes de contrôle des amplitudes

Pour des raisons de facilité, on peut également remplacer la carte de contrôle des écarts-types,  $\hat{\sigma}_i$ , par la *carte de contrôle des amplitudes*<sup>(14)</sup>,  $r_i$ .

La distribution d'échantillonnage exacte de l'amplitude,  $R$ , ne possède cependant pas de forme simple, même dans le cas d'échantillons prélevés dans des distributions normales.

Pour un échantillon aléatoire et simple de  $n$  observations prélevé dans une population normale réduite, le logiciel SAS donne l'espérance mathématique,  $d_2$ , et l'erreur-standard,  $d_3$ , de la distribution d'échantillonnage de l'amplitude. Quelques valeurs sont reprises dans l'annexe 1. Pour cette distribution, les amplitudes  $r_{\alpha/2}$  et  $r_{1-\alpha/2}$  correspondant à des valeurs fixées de la fonction de répartition sont données par GRANT et LEAVENWORTH [1980] ou par PEARSON et HARTLEY [1966].

Les cartes de contrôle des amplitudes ont donc comme ligne centrale la valeur  $d_2 \sigma_0$  et les limites de contrôle sont :

$$r_{\alpha/2} \sigma_0 \quad \text{et} \quad r_{1-\alpha/2} \sigma_0,$$

ou, en fonction d'un multiple de l'erreur-standard de l'amplitude :

$$d_2 \sigma_0 \pm k d_3 \sigma_0,$$

en remplaçant, comme dans le cas de l'écart-type, la limite inférieure par zéro lorsque la formule ci-dessus conduit à une valeur négative.

<sup>(14)</sup> En anglais : *R chart*.

Pour un échantillon provenant d'une distribution normale réduite, l'écart-type peut être estimé en divisant l'amplitude par la constante  $d_2$  et l'erreur-standard de cette estimation est égale au rapport  $d_3/d_2$ .

D'autre part, nous avons vu, au paragraphe 2.3, qu'une estimation non biaisée de l'écart-type est donnée par :

$$\sqrt{n/(n-1)}s_i/c_4,$$

dont l'erreur-standard est égale à  $c_5/c_4$ .

Il en résulte que le rapport :

$$(d_3/d_2)/(c_5/c_4)$$

donne une idée de la qualité relative de l'estimation de l'écart-type de la population par l'amplitude et par l'écart-type de l'échantillon. Ce rapport est égal à l'unité pour  $n = 2$  et augmente avec  $n$ . Pour  $n = 5$  il vaut 1,02. Le carré de ce rapport correspond à l'efficacité relative d'une méthode d'estimation par rapport à l'autre.

Cette efficacité mesure la perte de précision liée au remplacement de la carte de contrôle des écarts-types par la carte de contrôle des amplitudes. On peut constater que la perte de précision est plus faible que dans le cas du remplacement de la moyenne par la médiane (paragraphe 2.4).

## 2.6. Estimation de la moyenne et de l'écart-type des procédés

Au paragraphe 2.1, nous avons supposé que les caractéristiques  $m_0$  et  $\sigma_0$  du procédé, lorsqu'il est sous contrôle, sont connues. Cependant, en pratique, elles doivent le plus souvent être estimées au cours d'une phase préliminaire.

Différentes possibilités existent, tant en ce qui concerne la collecte des données que l'estimation des paramètres.

Une première solution consiste à sélectionner au cours d'une courte période de fabrication durant laquelle on a de bonnes raisons de croire que le procédé est sous contrôle, un assez grand nombre de pièces, une cinquantaine ou une centaine par exemple, et à estimer, à partir de la mesure de ces pièces, la moyenne et l'écart-type de la production.

Une autre solution consiste à prélever, à intervalles réguliers, un échantillon de petite taille, comme on envisage de le faire pour la phase de contrôle proprement dite. Lorsque vingt ou trente échantillons de  $n_i$  pièces ont été prélevés, et, pour autant que le procédé ait été sous contrôle durant cette période, on combine les résultats pour estimer la moyenne et l'écart-type du procédé.

La moyenne est alors obtenue en calculant la moyenne pondérée des moyennes,  $\bar{x}_i$ , des  $h$  échantillons, les facteurs de pondération étant les effectifs,  $n_i$ , des différents échantillons :

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^h n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^h n_i}.$$

Si les effectifs sont égaux, la relation se simplifie et l'estimation est la moyenne arithmétique simple des moyennes  $\bar{x}_i$  :

$$\hat{m} = \sum_{i=1}^h \bar{x}_i / h.$$

Notons encore que, dans certaines situations particulières, la moyenne peut être estimée à partir de la moyenne arithmétique pondérée des médianes des échantillons, les facteurs de pondération étant les effectifs des échantillons, ou encore à partir de la médiane des médianes des échantillons.

Une estimation globale de la variance dans les échantillons est donnée par l'expression :

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^h (n_i - 1) \hat{\sigma}_i^2 / \sum_{i=1}^h (n_i - 1)$$

et l'estimation de l'écart-type est égale à :

$$\hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma} / c_4,$$

le nombre d'observations à prendre en considération pour la détermination de  $c_4$  étant égal à [SAS, 1995] :

$$\sum_{i=1}^h n_i - (h - 1).$$

Le facteur  $c_4$ , qui sert à corriger le biais (paragraphe 2.3), est d'ailleurs négligeable lorsque ce nombre dépasse la centaine.

D'autres solutions sont également proposées. Ainsi, on peut estimer indépendamment l'écart-type à partir des données de chaque échantillon :

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{\text{SCE}_i}{n_i - 1}} / c_4$$

et déterminer la moyenne de ces estimations individuelles :

$$\hat{\sigma}_0 = \sum_{i=1}^h \hat{\sigma}_i / h.$$

Si les effectifs sont différents, on peut calculer une moyenne pondérée des  $\hat{\sigma}_i$  :

$$\hat{\sigma}_0 = \sum_{i=1}^h w_i \hat{\sigma}_i / \sum_{i=1}^h w_i$$

les facteurs de pondération étant proportionnels aux inverses des variances des estimations individuelles (paragraphe 2.3) :

$$w_i = (c_4 / c_5)^2.$$

On peut aussi estimer l'écart-type à partir des amplitudes dans les échantillons :

$$\hat{\sigma}_i = r_i/d_2,$$

et calculer une moyenne de ces estimations, les facteurs de pondération étant égaux à :

$$w_i = (d_2/d_3)^2.$$

Rappelons que, dans les formules données ci-dessus, les valeurs de  $c_4$ ,  $d_2$  et  $d_3$  ne sont pas constantes mais dépendent de la taille des échantillons prélevés.

Lors de l'estimation des paramètres du procédé, il peut être opportun de supprimer éventuellement un ou plusieurs échantillons dont les caractéristiques s'écarteraient des valeurs moyennes, du fait, par exemple, du dérèglement du procédé. Une solution pour repérer de tels échantillons est d'estimer d'abord la moyenne et l'écart-type à partir de l'ensemble des données et à établir ensuite les cartes de contrôle des moyennes et des écarts-types afin de repérer les échantillons anormaux, qui seront alors éliminés.

Le recours à des estimateurs robustes peut également être envisagé dans le but de réduire l'effet de données anormales [DAGNELIE, 1992]. Les estimations de la moyenne à partir des médianes des échantillons, qui ont été évoquées ci-dessus, en sont d'ailleurs des exemples, mais d'autres solutions pourraient encore être envisagées.

D'autre part, il peut être utile, en pratique, de remettre périodiquement à jour les estimations de  $m_0$  et  $\sigma_0$ , en tenant compte des données qui se sont accumulées depuis les dernières estimations.

Dans ce paragraphe, différentes méthodes d'estimation de la moyenne et de l'écart-type du procédé ont été proposées et dans les paragraphes précédents, deux cartes de contrôle ont été décrites tant pour le contrôle de la valeur centrale (carte des moyennes et carte des médianes) que pour le contrôle de la dispersion (carte des écarts-types et carte des amplitudes). Se pose donc inévitablement le problème du choix des méthodes d'estimation et des types de cartes de contrôle à utiliser.

A ce sujet, on notera que l'emploi des cartes de contrôle basées sur les médianes et sur les amplitudes des échantillons pouvait se justifier, par le passé, à cause de la simplicité des calculs. Et, dans la mesure où seules les médianes et les amplitudes étaient archivées, les mises à jour périodiques de  $\hat{m}_0$  et  $\hat{\sigma}_0$  se faisaient tout naturellement sur la base des médianes et des amplitudes. Pour des effectifs faibles, les pertes de précision liées à l'utilisation de la médiane et de l'amplitude plutôt que la moyenne et l'écart-type sont faibles, comme nous l'avons signalé aux paragraphes 2.4 et 2.5.

C'est aussi par facilité que des effectifs impairs étaient fréquemment retenus car, dans ce cas, la médiane est une valeur observée et non une moyenne arithmétique de deux observations. En particulier, dans beaucoup de situations un effectif égal à cinq semblait constituer un bon compromis entre le coût du contrôle et le risque d'erreur de seconde espèce.

A l'heure actuelle, la simplicité des calculs n'est plus un argument déterminant et les cartes de contrôle basées sur les moyennes et les écarts-types sont préférables aux cartes basées sur les médianes et les amplitudes. Et, d'une façon générale, l'estimation de la moyenne à partir de la moyenne pondérée des moyennes individuelles et l'estimation commune de la variance dans les échantillons nous semblent être la solution la plus recommandable.

## 2.7. Exemple numérique

Pour illustrer les formules de calcul et la présentation des cartes de contrôle, nous avons généré des données par ordinateur, en nous basant sur les informations fournies par GRANT et LEAVENWORTH [1980], à propos d'un procédé de fabrication réel.

Les données présentées par ces auteurs concernent les poids égouttés de boîtes de purée de tomates. Ces poids ont été observés sur des échantillons de cinq boîtes prélevés à intervalles assez réguliers au cours d'une quinzaine de journées de production. La moyenne générale des poids a été de 609,5 g, l'écart-type dans les échantillons de 40,3 g et l'écart-type entre échantillons de 15,6 g.

Sur la base de ces informations, nous avons simulé 30 échantillons de 5 observations, en utilisant le générateur suivant :

$$x_{ij} = 609,5 + u_i + v_{ij} \quad (i = 1, \dots, 30 ; j = 1, \dots, 5),$$

$u_i$  et  $v_{ij}$  étant des valeurs de variables normales indépendantes, de moyennes nulles et d'écart-types égaux à 15,6 pour  $u_i$  et à 40,3 pour  $v_{ij}$ . Les résultats ont été arrondis au gramme près.

On considère que les 150 résultats correspondent à des observations réalisées au cours d'une phase préliminaire et on se propose de définir, sur la base de ces informations, les limites de contrôle pour la surveillance ultérieure du procédé de fabrication.

Bien que cela ne se justifie pas en pratique, nous allons établir, pour des raisons didactiques, les limites de contrôle des quatre paramètres repris dans les paragraphes 2.2 à 2.5 et ces limites seront exprimées à la fois en fonction du risque  $\alpha$ , fixé à 0,002, et en fonction directe de l'erreur-standard, pour  $k = 3$ . Les différentes formules de calcul utilisées ont été regroupées dans un tableau récapitulatif (annexe 2).

La moyenne des 150 observations est utilisée comme estimation de la moyenne du procédé et l'écart-type résiduel, après correction du biais, est utilisé comme estimation de l'écart-type du procédé. On a obtenu les valeurs suivantes :

$$\hat{m}_0 = \frac{1}{150} \sum_{i=1}^{30} \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 612,17,$$

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{1}{0,998} \sqrt{\sum_{i=1}^{30} \sum_{j=1}^5 (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 / 120} = 40,185.$$

Tableau 2. Valeurs centrales et limites de contrôle pour la moyenne, l'écart-type, la médiane et l'amplitude.

Caractéristiques		$\alpha = 0,002$	$k = 3$
$\bar{x}$	inf.	556,6	558,3
	centr.	612,1	612,2
	sup.	667,7	666,1
$\hat{\sigma}$	inf.	6,1	0
	centr.	37,8	37,8
	sup.	86,3	78,9
$\tilde{x}$	inf.	545,1	547,6
	centr.	612,2	612,2
	sup.	679,2	676,7
$r$	inf.	14,9	0
	centr.	93,5	93,5
	sup.	220,2	197,6

L'annexe 1 donne, pour  $n = 5$ , les valeurs suivantes :

$$c_4 = 0,93999 \text{ et } c_5 = 0,34121,$$

$$d_2 = 2,32593 \text{ et } d_3 = 0,86408,$$

$$\tilde{u}_{1-\alpha/2} = 1,66891,$$

et les valeurs de  $r_{\alpha/2}$  et  $r_{1-\alpha/2}$  ont été lues dans les tables de PEARSON et HARTLEY [1966] :

$$r_{\alpha/2} = 0,37 \quad \text{et} \quad r_{1-\alpha/2} = 5,48.$$

L'application des formules de l'annexe 2 conduit aux résultats repris dans le tableau 2.

Dans une situation réelle, les limites de contrôle ainsi établies pourraient être utilisées pour le contrôle ultérieur du procédé, pour autant que l'effectif des échantillons reste égal à cinq. En pratique, le calcul de toutes ces limites n'est pas nécessaire. Il suffit de choisir un seul paramètre de position et un seul paramètre de dispersion et, comme nous l'avons signalé au paragraphe précédent, il est, en général préférable de retenir la moyenne et l'écart-type, plutôt que la médiane et l'amplitude, car pour une même modification du paramètre de position ou de dispersion, les risques d'erreur de seconde espèce sont plus faibles pour la moyenne et l'écart-type que pour la médiane et l'amplitude.

D'autre part, la comparaison entre les limites de contrôle calculées par la méthode de l'erreur-standard et celles calculées en fonction d'un niveau de probabilité fixé montre que, pour les paramètres de position, les différences sont faibles. Par contre, pour les paramètres de dispersion, les différences sont un peu plus marquées, en raison de la dissymétrie des distributions. En particulier, pour des effectifs faibles la méthode de l'erreur-standard conduit, pour la limite

inférieure, à des valeurs négatives, qui sont remplacées par zéro. L'incidence pratique du choix de limites calculées en fonction de  $\alpha$  ou de  $k$  est négligeable.

On notera que Minitab ne permet que le calcul des limites de contrôle en fonction de  $k$  et uniquement pour la moyenne, l'écart-type et l'amplitude. Les résultats peuvent être obtenus en utilisant, soit la macroprocédure %XSCHART ou %XRCHART, ou encore, les commandes XBARChart, SChart et RChart.

La figure 1, déjà examinée précédemment, reprend, à titre d'exemple, les cartes de contrôle des moyennes et des écarts-types obtenues par la macroprocédure %XSCHART. Aux erreurs d'arrondis près, on retrouve les valeurs du tableau 2, pour  $k = 3$ . La carte de contrôle des amplitudes aurait également pu être établie, par la macroprocédure %XRCHART notamment ; on aurait également obtenu les résultats du tableau 2, pour  $k = 3$ .

L'examen de la carte de contrôle des moyennes montre que le premier point est situé hors des limites de contrôle et qu'un autre point est situé très près de la limite inférieure de contrôle. Pour l'écart-type, un seul point est hors des limites de contrôle.

La proportion de points situés hors de l'intervalle de confiance est importante par rapport à la valeur théorique, qui est de l'ordre de 0,0027. Cela s'explique par la présence d'une variance entre échantillons. En effet, lors de la génération des données, on a introduit une composante  $u_i$  dont l'écart-type est égal à 15,6. La présence de cette composante ne joue cependant que sur la carte des moyennes et pas sur la carte des écarts-types. On pourrait éventuellement supprimer les échantillons en question et recommencer les calculs des limites. Ces limites seraient alors légèrement plus rapprochées de la ligne centrale, puisque l'écart-type dans les échantillons serait légèrement réduit.

Contrairement à Minitab, le logiciel SAS offre, avec la procédure PROC SHEWHART, la possibilité d'établir les cartes de contrôle pour les quatre paramètres, soit en fonction de  $k$ , soit en fonction de  $\alpha$ .

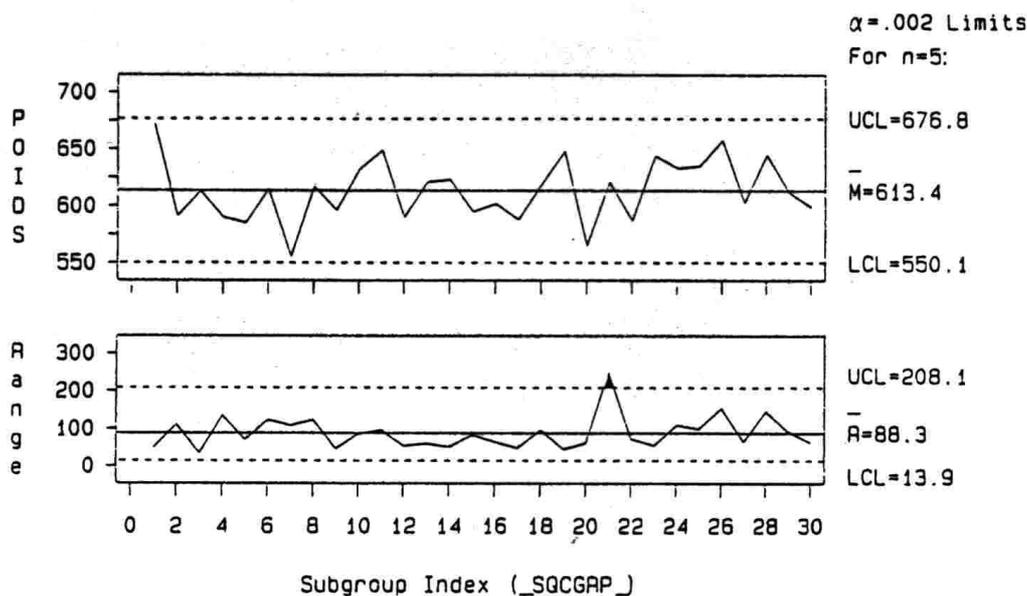
A titre d'illustration, les cartes des médianes et des amplitudes ont été établies en fixant les limites de contrôle en fonction de  $\alpha$ . Les résultats obtenus (figure 4) sont cependant légèrement différents de ceux donnés dans le tableau 2. Cette discordance résulte des méthodes d'estimation du paramètre de position et du paramètre de dispersion utilisées par défaut dans SAS pour ces deux cartes de contrôle. En effet, la moyenne est estimée en calculant la moyenne des médianes des 30 échantillons, qui vaut 613,4 ; l'écart-type est obtenu en calculant la moyenne des amplitudes, égale à 88,3, et en divisant cette moyenne par la constante  $d_2$  :

$$\hat{\sigma}_0 = 88,27/2,32593 = 37,95 .$$

Les limites de contrôle pour la médiane sont donc :

$$613,43 \pm (1,669)(37,95) ,$$

soit 550,1 et 676,8.



Subgroup Sizes:  $n=5$

Figure 4. Cartes de contrôle des médianes et des amplitudes : résultats fournis par le logiciel SAS.

Pour l'amplitude, les limites sont égales à :

$$(0,37)(37,95) = 14,0 \quad \text{et} \quad (5,48)(37,95) = 208,0.$$

Aux erreurs d'arrondis près, ces limites correspondent bien aux valeurs de la figure 4.

### 3. CARTES DE CONTRÔLE PAR COMPTAGES

#### 3.1. Cartes de contrôle des proportions et des nombres d'articles non conformes

Considérons le cas où les articles produits sont décrits par une variable alternative, caractérisant, par exemple, la conformité ou non de l'article et supposons qu'il y ait indépendance entre les articles successifs.

Dans cette situation, on considère que le procédé de fabrication est sous contrôle si on accepte l'hypothèse que la proportion d'articles non conformes est constante et égale à  $p_0$ .

Pour établir la *carte de contrôle des proportions*<sup>(15)</sup>, on prélève, à intervalles réguliers, un échantillon de  $n_i$  pièces et on détermine le nombre d'articles non

<sup>(15)</sup> En anglais : *p chart*.

conformes,  $y_i$ , et la proportion d'articles non conformes,  $p_i$ . Ces proportions successives sont portées sur un graphique, qui reprend également les limites de contrôle.

En considérant que le nombre d'articles non conformes,  $Y_i$ , suit une loi binomiale de paramètres  $n_i$  et  $p_0$ , et si le produit  $n_i p_0$  est suffisamment grand pour que l'approximation normale puisse être utilisée, les limites de contrôle de la proportion sont données par :

$$p_0 \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{p_0(1-p_0)/n_i},$$

la valeur  $u_{1-\alpha/2}$  pouvant être remplacée par la constante  $k$ , si on souhaite exprimer les limites en fonction d'un multiple de l'erreur-standard. Si la limite inférieure est négative, on la remplace par la valeur zéro.

Une meilleure approximation pour le calcul des limites de contrôle en fonction de la probabilité  $\alpha$  pourrait aussi être obtenue par l'utilisation de la transformation angulaire [DAGNELIE, 1975].

Enfin, ces limites de contrôle peuvent également être calculées directement à partir de la distribution binomiale.

Les limites de contrôle du nombre d'articles non conformes,  $y_{inf}$  et  $y_{sup}$ , sont en effet telles que :

$$P(Y_i < y_{inf}) \leq \alpha/2 \quad \text{et} \quad P(Y_i > y_{sup}) \leq \alpha/2,$$

et les limites pour la proportion sont :

$$p_{inf} = y_{inf}/n_i \quad \text{et} \quad p_{sup} = y_{sup}/n_i.$$

La distribution binomiale étant une distribution discrète, il n'est pas possible de déterminer les limites de contrôle relatives à une valeur exacte de la probabilité.

Ainsi, pour  $n = 40$  et  $n = 50$ , le tableau 3 donne, à titre d'exemple, quelques valeurs de la fonction de répartition de la variable binomiale de paramètre  $p_0 = 0,1$ . Les limites du nombre d'articles non conformes sont, pour  $n = 40$  :

$$y_{inf} = 0 \quad \text{et} \quad y_{sup} = 10$$

et les proportions correspondantes sont :

$$p_{inf} = 0 \quad \text{et} \quad p_{sup} = 0,25,$$

les limites elles-mêmes faisant partie de l'intervalle des proportions dans lequel on considère que le procédé est sous contrôle. Pour  $n = 50$ , les limites sont :

$$y_{inf} = 0 \quad \text{et} \quad y_{sup} = 12,$$

d'une part, et

$$p_{inf} = 0 \quad \text{et} \quad p_{sup} = 0,24,$$

d'autre part.

**Tableau 3.** Fonction de répartition de la variable binomiale,  $P(Y \leq y)$ , pour  $p = 0,1$  et  $n = 40$  ou  $50$ .

$y$	$n = 40$	$n = 50$
0	0,0148	0,0052
1	0,0805	0,0338
2	0,2228	0,1117
⋮	⋮	⋮
9	0,9949	0,9755
10	0,9985	0,9906
11	0,9996	0,9968
12	0,9999	0,9990
13	1,0000	0,9997
14	-	0,9999

Pour ces deux exemples, les probabilités de déclarer que le procédé n'est pas sous contrôle sont respectivement égales à :

$$P(Y_i > 10) = 0,0015 \quad \text{et} \quad P(Y_i > 12) = 0,0010,$$

L'approximation normale, pour  $\alpha = 0,002$ , conduit aux limites de contrôle suivantes :

$$0,1 \pm 3,09\sqrt{(0,1)(0,9)/40} \quad \text{soit } 0 \text{ et } 0,247,$$

et 
$$0,1 \pm 3,09\sqrt{(0,1)(0,9)/50} \quad \text{soit } 0 \text{ et } 0,231.$$

En multipliant la première valeur par 40 et la seconde valeur par 50, on obtient 9,88 et 11,55. On rejeterait l'hypothèse d'un procédé sous contrôle pour un nombre d'articles non conformes supérieur à 9 dans le premier cas et supérieur à 11 dans le second cas. Le risque réel  $\alpha$  serait donc de 0,005 dans le premier cas et de 0,003 dans le second cas, soit des valeurs assez différentes de la valeur fixée initialement, qui est de 0,002.

Se basant sur le calcul de la distribution binomiale, des limites de contrôle pour la proportion et pour le nombre d'articles non conformes peuvent être déterminées en utilisant des algorithmes de calcul relatifs à l'établissement des limites de confiance exactes d'une proportion [JOHNSON et KOTZ, 1969]. Les limites de contrôle ainsi obtenues ne conduisent pas nécessairement à des valeurs entières des nombres d'articles non conformes. Ainsi, pour  $n = 50$  et  $p = 0,1$ , le logiciel SAS fournit les limites suivantes :

$$p_{inf} = 0,01 \quad p_{sup} = 0,261$$

et 
$$y_{inf} = 0,48 \quad y_{sup} = 13,04,$$

On dira que le procédé n'est pas sous contrôle si le nombre d'articles non conformes est égal à 0 ou supérieur à 13. Le risque  $\alpha$  réel est donc égal à 0,006 (tableau 3).

Tableau 4. Limites de contrôle supérieures calculées pour  $p_0 = 0,1$  (valeurs arrondies à l'unité inférieure) et risques d'erreur  $\beta(p)$  (valeurs approximatives), en fonction de la proportion réelle,  $p$ : résultats pour différents effectifs.

$n$	$y_{sup}$	$p$				
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
20	6	0,998	0,913	0,608	0,250	0,058
30	7	0,992	0,761	0,281	0,044	0,002
40	9	0,995	0,732	0,196	0,016	0,000
50	11	0,997	0,711	0,139	0,006	0,000
100	19	0,998	0,460	0,009	0,000	0,000
200	32	0,997	0,090	0,000	0,000	0,000

Au lieu d'établir la carte de contrôle des proportions,  $p_i$ , on peut établir aussi la *carte de contrôle des nombres d'individus non conformes*,  $y_i$ <sup>(16)</sup>. Ce type de représentation n'est cependant utilisé que pour des  $n_i$  constants, de manière à ce que la ligne centrale soit une horizontale. Etablir ce type de carte revient, en pratique, à multiplier par  $n_i$  les  $p_i$ , la ligne centrale et les limites de contrôle de la carte des proportions.

Il est clair que pour permettre le contrôle du procédé sur la base de la proportion ou du nombre d'articles non conformes, il est nécessaire qu'il y ait dans l'échantillon quelques articles non conformes. La taille  $n_i$  de l'échantillon doit donc être d'autant plus grande que la proportion  $p_0$  d'articles non conformes est faible. A titre d'illustration, le tableau 4 donne, pour différentes valeurs de  $n$  et pour  $p_0 = 0,1$ , la limite de contrôle supérieure,  $y_{sup}$ , arrondie à l'unité inférieure, qui a été obtenue par la relation :

$$y_{sup} = n \left( 0,1 + 3,09 \sqrt{p_0(1 - p_0)/n} \right).$$

Le tableau donne encore, pour les mêmes valeurs de  $n$  et pour des valeurs de  $p$  variant de 0,1 à 0,5, les probabilités suivantes :

$$P(Y \leq y_{sup}).$$

Cette probabilité est pratiquement égale à la probabilité de conclure que la proportion d'articles non conformes est bien égale à  $p_0$ , alors qu'en réalité, elle est égale à  $p$ . Il s'agit donc d'une valeur approximative du risque d'erreur de seconde espèce,  $\beta(p)$ . On constate que pour  $p = 0,1$  on retrouve une probabilité très proche de l'unité, et que cette probabilité reste importante pour des valeurs de  $p$  très nettement supérieures à  $p_0$ , du moins lorsque  $n$  est faible. Ainsi, si la proportion d'articles non conformes a doublé ( $p = 0,2$ ) et pour des échantillons de 50 observations, la probabilité de conclure que la proportion est conforme à

<sup>(16)</sup> En anglais : *np chart*.

0,1, est supérieure à 0,7. Rappelons que le graphique de la probabilité en fonction de  $p$  pour une valeur fixée de  $n$  donne la courbe d'efficacité du contrôle.

En cours de production, le contrôle de la proportion de pièces mauvaises donne souvent un contrôle dérisoire,  $p_0$  étant, en principe, très faible. Par contre, des effectifs suffisants (supérieurs à 50) peuvent être prélevés pour contrôler la qualité de la production journalière ou de la livraison d'un fournisseur à un client. Les cartes de contrôle de la proportion peuvent aussi être utilisées plus efficacement pour un contrôle par calibre. On détermine alors la proportion de pièces dont la dimension n'est pas comprise entre deux limites fixées et on étudie la stabilité de cette proportion [CAVÉ, 1966].

### 3.2. Cartes de contrôle des nombres de défauts

Lorsque les articles produits sont décrits par le nombre de défauts qu'ils présentent comme, par exemple, le nombre de taches sur une surface donnée, on peut vérifier si le procédé est sous contrôle en établissant une carte de contrôle des nombres de non-conformités par groupes d'individus<sup>(17)</sup>. Pour cela, on prélève, à intervalles réguliers, des échantillons d'effectifs  $n_i$  et on détermine le nombre de non-conformités,  $y_i$ , sur l'ensemble des articles. On porte ces valeurs sur un graphique, ainsi que les limites de contrôle correspondantes.

On considère généralement que le nombre de non-conformités sur un article donné suit une distribution de POISSON, de moyenne  $z_0$ , et que le nombre de non-conformités observées sur un article est indépendant du nombre de non-conformités observées sur un autre article. En vertu de la propriété d'additivité des distributions de POISSON, on peut affirmer dans ces conditions que le nombre de non-conformités,  $y_i$ , observées sur  $n_i$  articles suit également une distribution de POISSON, quel que soit ce nombre d'articles. La moyenne,  $y_0$ , de cette variable aléatoire  $Y_i$  vaut  $n_i z_0$ . En utilisant l'approximation normale, les limites de contrôle s'écrivent :

$$y_0 \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{y_0},$$

ou encore :

$$y_0 \pm k \sqrt{y_0},$$

puisque, pour une distribution de POISSON, l'écart-type est égal à la racine carrée de la moyenne. Dans le cas où les formules conduisent à une limite inférieure négative, on remplace la valeur par zéro.

On peut aussi déterminer les limites de contrôle de façon exacte, en utilisant des tables de la distribution de POISSON. Dans le logiciel SAS, les limites peuvent être calculées par l'intermédiaire des distributions  $\chi^2$ . Ce calcul repose sur la relation existant entre les distributions de POISSON et les distributions  $\chi^2$ . En effet, si  $Y$  est une variable de POISSON de moyenne  $y_0$ , on a la relation suivante :

$$P(Y \leq y) = 1 - P(\chi^2 < 2y_0),$$

le nombre de degrés de liberté de la variable  $\chi^2$  étant égal à  $2(y+1)$  [JOHNSON et KOTZ, 1969]. Les limites sont alors obtenues par interpolation, en cherchant

---

<sup>(17)</sup> En anglais : *c charts*.

**Tableau 5.** Fonction de répartition de la distribution de POISSON de moyenne égale à 8.

$y$	$P(Y \leq y)$
0	0,0003
1	0,0030
2	0,0138
⋮	⋮
15	0,9918
16	0,9963
17	0,9984
18	0,9993
19	0,9997
20	0,9999

pour quels nombres de degrés de liberté le membre de droite de l'égalité ci-dessus est égal à  $\alpha/2$  et  $1 - \alpha/2$  et on déduit les valeurs correspondantes de  $y$ , qui sont alors le plus souvent non entières.

Considérons, par exemple, un procédé de fabrication produisant des articles présentant en moyenne deux défauts par unité et supposons qu'on souhaite suivre l'évolution du nombre de défauts observés sur quatre unités. La valeur centrale de la carte de contrôle sera  $y_0 = 8$  et les limites de contrôles, pour  $\alpha = 0,002$ , seront, si on utilise l'approximation normale :

$$8 \pm 3,09\sqrt{8},$$

soit 0 et 16,7, la formule donnant une valeur négative pour la limite inférieure. En pratique, on considérera donc que le procédé n'est pas sous contrôle si le nombre de non-conformités pour un échantillon de quatre unités est supérieur ou égal à 17.

Le tableau 5 donne quelques valeurs de la fonction de répartition de la distribution de POISSON de paramètre égal à 8. On peut en déduire que le risque réel lié à l'approximation normale est égal à :

$$1 - P(Y \leq 16) = 1 - 0,9963 = 0,0037,$$

soit près du double de la valeur nominale.

Sur la base de cette fonction de répartition, on peut déterminer les limites de contrôle exactes. On conclut alors que le procédé doit être considéré comme n'étant plus sous contrôle si le nombre de non-conformités est nul ou bien supérieur ou égal à 19, le risque  $\alpha$  étant égal, dans ce cas, à 0,001 et non à 0,002.

Le calcul des limites par l'intermédiaire de la distribution  $\chi^2$  donne comme résultats les valeurs 0,5 et 17,6, ce qui revient aussi à dire que le procédé n'est pas sous contrôle si le nombre de non-conformités est égal à zéro ou bien supérieur

ou égal à 18, et le risque vaut 0,0019, soit approximativement 0,002. Ce risque se répartit cependant de façon très inégale entre les deux conditions de rejet (0,0003 et 0,0016).

Lorsque le nombre d'articles échantillonnés varie dans le temps, la ligne centrale,  $y_0$ , n'est plus une horizontale et, afin de rendre la carte de contrôle plus facilement interprétable, il peut se justifier d'établir une carte *des nombres moyens de non-conformités par individu*<sup>(18)</sup> :

$$z_i = y_i/n_i.$$

La ligne centrale se situe en  $z_0$ , et les limites de contrôle s'obtiennent en divisant par  $n_i$  les limites de contrôle du nombre total de non-conformités. Ces dernières sont obtenues en remplaçant, dans les formules précédentes,  $y_0$  par  $n_i z_0$ . En particulier, par l'approximation normale on obtient :

$$z_0 \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{z_0/n_i} \quad \text{ou} \quad z_0 \pm k \sqrt{z_0/n_i}.$$

Ainsi, par exemple, si le nombre moyen de non-conformités est égal à 2, les limites de contrôle pour des échantillons de quatre individus et pour  $\alpha = 0,002$  sont égales à :

$$2 \pm 3,09 \sqrt{2/4},$$

soit 0 et 4,18.

### 3.3. Estimation de la proportion et du nombre moyen de défauts

En pratique, la proportion  $p_0$  ou le nombre moyen de défauts par article,  $z_0$ , sont inconnus et doivent donc être estimés préalablement.

La proportion  $p_0$  est estimée par le rapport du nombre d'individus non conformes au nombre total d'individus prélevés au cours d'une courte période de fabrication ou bien cette proportion est estimée à partir des résultats obtenus pour des échantillons de petite taille au cours de vingt ou trente prélèvements. La proportion est alors estimée par la relation :

$$\hat{p}_0 = \frac{\sum_{i=1}^h n_i p_i}{\sum_{i=1}^h n_i}.$$

La valeur  $z_0$  est estimée à partir du nombre moyen de défauts observés sur un grand échantillon ou en déterminant le nombre total de non-conformités sur les articles d'un certain nombre d'échantillons préliminaires et en divisant ce nombre par le nombre total d'articles examinés :

$$\hat{z}_0 = \frac{\sum_{i=1}^h y_i}{\sum_{i=1}^h n_i}.$$

---

<sup>(18)</sup> En anglais : *u chart*.

### 3.4. Exemples numériques

L'annexe 3 reprend les formules données dans les paragraphes précédents pour les limites de contrôle des caractéristiques liées à des comptages, dans le cas où ces limites sont définies en fonction d'un multiple de l'erreur-standard. Elles restent approximatives si on remplace  $k$  par  $u_{1-\alpha/2}$ , pour autant que le nombre d'articles observés par échantillon,  $n_i$ , soit suffisamment élevé, de manière à assurer le caractère approximativement normal des distributions d'échantillonnage. Rappelons que le calcul exact des limites en fonction d'un niveau de probabilité  $\alpha$  peut se faire à partir des distributions binomiales ou des distributions de POISSON. Rappelons aussi que le calcul des limites de contrôle suppose l'indépendance entre les observations.

Afin de donner des représentations graphiques concrètes des cartes de contrôle par comptages et d'illustrer l'utilisation des formules de l'annexe 3, nous avons tout d'abord généré deux séries de 25 valeurs. La première série pourrait correspondre aux effectifs de 25 échantillons successifs et la seconde série aux nombres d'articles non conformes observés dans ces échantillons.

Le rapport des sommes de ces deux séries est égal à 0,049, ce qui correspondrait à une estimation de la proportion d'articles non conformes.

Les figures 5 et 6, obtenues par les commandes PCHART et NPCHART de Minitab donnent les cartes de contrôle des proportions et des nombres d'articles non conformes. Des graphiques tout à fait similaires auraient pu être obtenus par la procédure PROC SHEWHART de SAS. Pour la proportion, on constate que la limite de contrôle est variable, car les effectifs  $n_i$  des échantillons ne sont pas constants, la valeur indiquée à droite de la limite supérieure de contrôle correspond à la valeur pour le dernier échantillon, dont l'effectif est de 50 unités. On a donc :

$$0,04895 + 3\sqrt{(0,04895)(1 - 0,04895)/50} = 0,1405.$$

Pour les nombres d'articles non conformes, la ligne centrale et la limite de contrôle supérieure ne sont pas deux droites horizontales, les  $n_i$  n'étant pas constants. Et ceci rend le graphique peu lisible. Comme pour la carte précédente, les valeurs indiquées sur le graphique correspondent au dernier échantillon observé dont l'effectif est de 50. La ligne centrale se situe alors en :

$$(50)(0,04895) = 2,448,$$

et la limite supérieure de contrôle en :

$$(50)(0,04895) + 3\sqrt{(50)(0,04895)(1 - 0,04895)} = 7,025.$$

Pour illustrer les cartes de contrôle du nombre de défauts, nous avons généré une variable aléatoire distribuée selon une loi de POISSON de paramètre égal à 9, en considérant que ces valeurs correspondent aux nombres de défauts observés sur 35 lots de six articles, le nombre moyen de défauts par article étant de 1,5.

Les cartes de contrôle des nombres de défauts par lot (figure 7) et des nombres moyens de défauts par pièce (figure 8) ont été établies par SAS, en

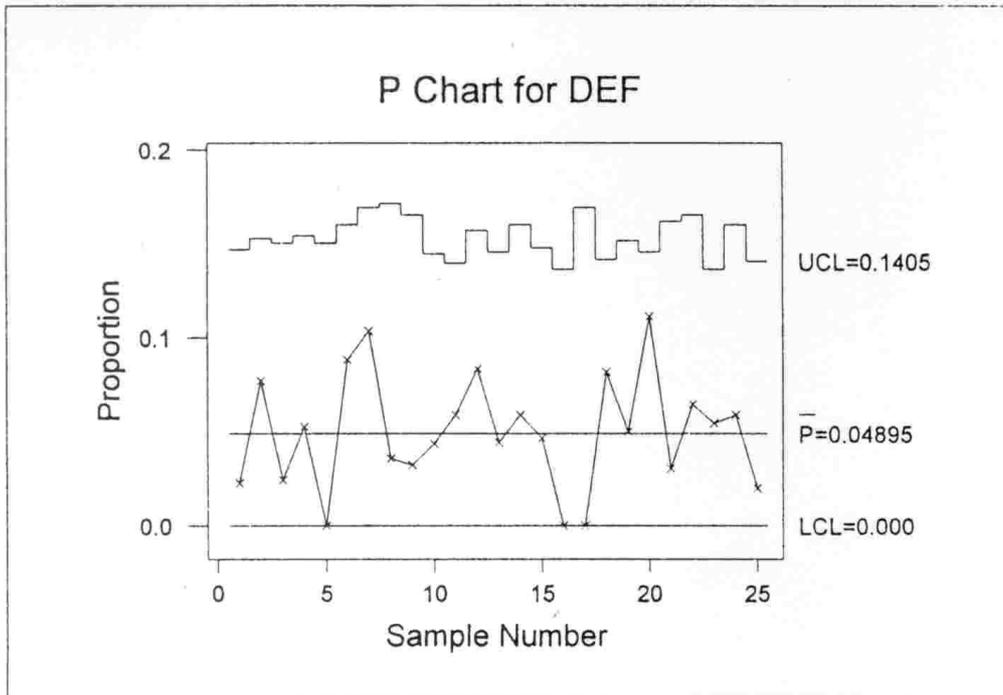


Figure 5. Carte de contrôle des proportions d'articles non conformes : résultats obtenus par Minitab.

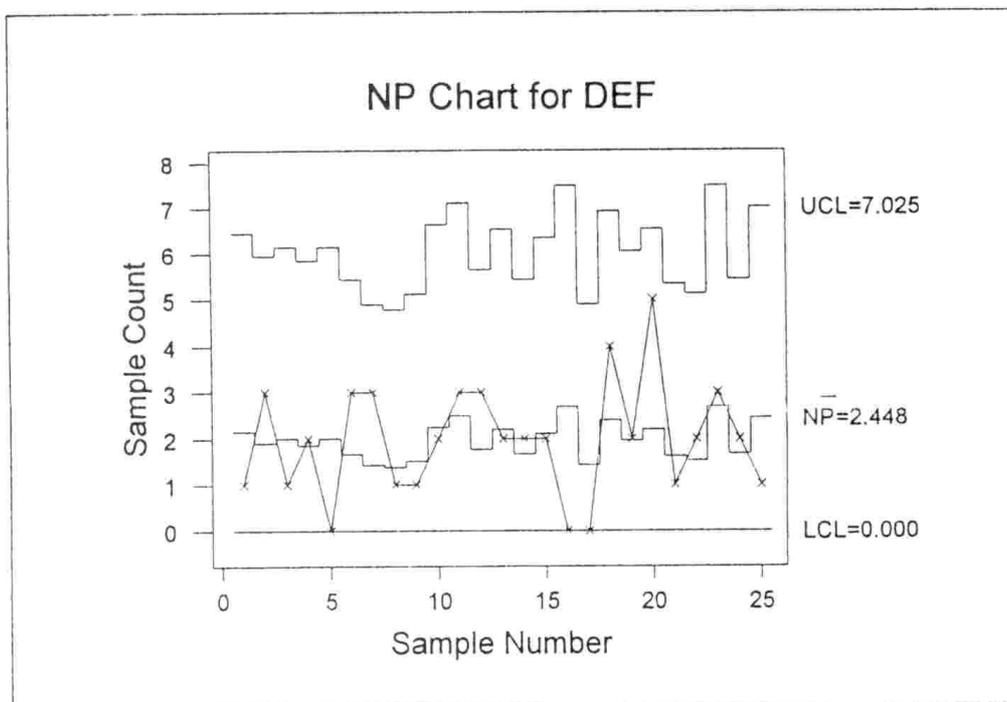
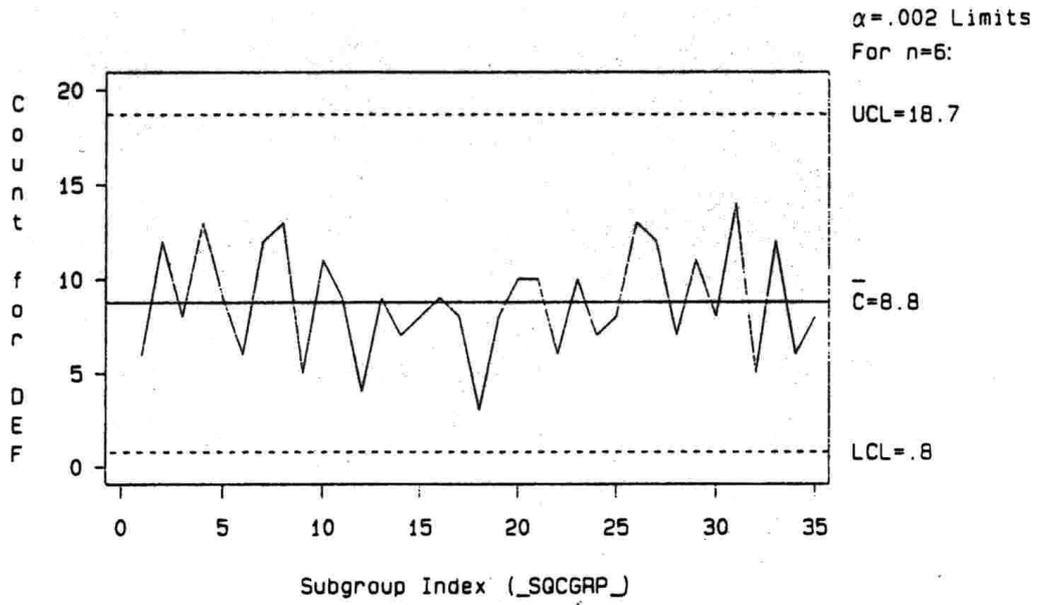
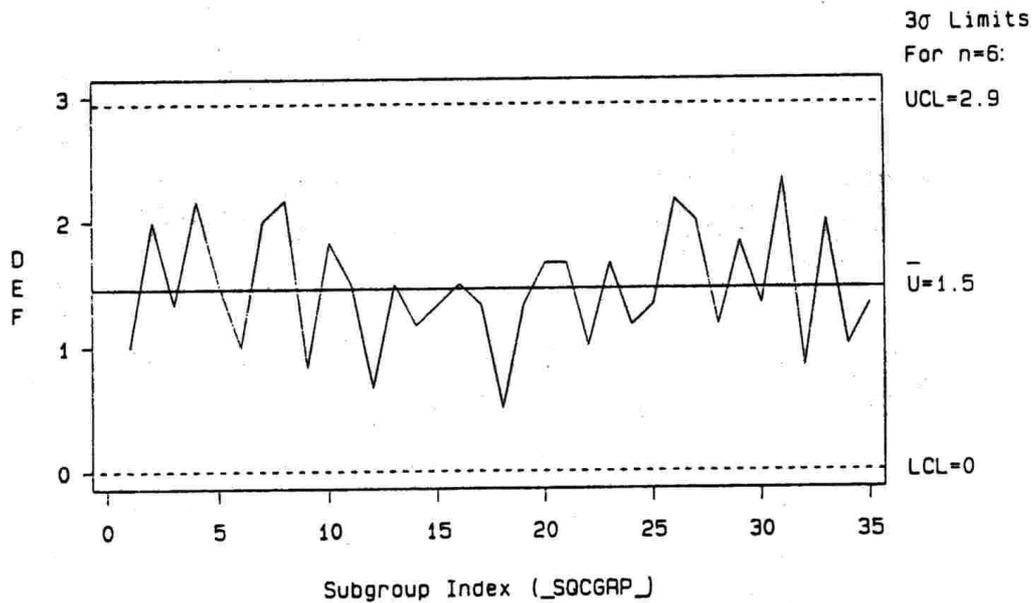


Figure 6. Carte de contrôle des nombres d'articles non conformes : résultats obtenus par Minitab.



Subgroup Sizes:  $n=6$

**Figure 7.** Carte de contrôle des nombres de défauts par lot de six articles : résultats obtenus par SAS.



Subgroup Sizes:  $n=6$

**Figure 8.** Carte de contrôle des nombres moyens de défauts par article pour des lots de six articles : résultats obtenus par SAS.

considérant, dans le premier cas, une valeur de  $\alpha$  égale à 0,002 et, dans le second cas, une valeur de  $k$  égale à 3.

Pour la série en question, le nombre de défauts moyen par lot est de 8,771. Cette valeur est prise comme ligne centrale et le calcul des limites de contrôle à partir de la distribution de POISSON de paramètre 8,771 conduit à une limite inférieure de 0,8 et une limite supérieure de 18,7 (figure 7). La méthode de l'erreur-standard donnerait :

$$8,771 \pm 3\sqrt{8,771}$$

soit -0,11 ou 0 et 17,65.

En divisant par le nombre d'articles constituant un échantillon, c'est-à-dire par six, on obtient la ligne centrale et les deux limites données dans la figure 8.

On notera que, comme pour les cartes de contrôle relatives aux variables quantitatives (paragraphe 2), Minitab ne permet pas le calcul des limites en fonction de la probabilité  $\alpha$ , mais donne uniquement les valeurs en fonction d'un multiple de l'erreur-standard.

## 4. QUELQUES INFORMATIONS COMPLÉMENTAIRES

### 4.1. Détection de situations particulières

L'examen de la figure 2 a montré que la probabilité de ne pas détecter un dérèglement du procédé de fabrication peut être grande. Rappelons simplement à ce sujet que, pour des échantillons de cinq unités et pour un déplacement de la moyenne égal à la moitié de l'écart-type du procédé, il faut, en moyenne, observer 41 échantillons avant d'obtenir une moyenne située hors des limites de contrôle, si  $\alpha$  est égal à 0,002 (paragraphe 2.2).

On pourrait, bien entendu, augmenter la sensibilité des cartes de contrôle en augmentant la taille de l'échantillon ou en fixant des limites de contrôle à moins de 3 ou 3,09 fois l'erreur-standard. La première solution est en général incompatible avec les contraintes économiques et la seconde solution conduirait à un risque de première espèce plus grand.

La faible puissance des cartes de contrôle des moyennes provient du fait qu'on ne tient compte que de l'échantillon prélevé au temps  $i$  et qu'on néglige l'information des échantillons antérieurs. Des cartes de contrôle spéciales, basées sur des moyennes mobiles, des lissages exponentiels ou des sommes cumulées peuvent être établies afin de prendre en compte l'information du passé. Ces cartes sont décrites dans une seconde partie [PALM, 1996].

Une autre solution consiste à introduire, dans les cartes de contrôle, une série de règles complémentaires<sup>(19)</sup>, basées sur la position des points successifs sur la carte de contrôle. Pour définir les règles, on trace, sur la carte de contrôle,

<sup>(19)</sup> En anglais : *tests for special causes*.

les lignes situées à  $\pm k$  fois l'erreur-standard par rapport à la ligne centrale, en donnant à  $k$  les valeurs 1, 2 et 3 ou 3,09. On délimite ainsi trois zones de chaque côté de la ligne centrale : la zone A, située entre 2 et 3 fois l'erreur-standard, la zone B située entre 1 et 2 fois l'erreur-standard et la zone C située entre la ligne centrale et une fois l'erreur-standard.

La mise en évidence de l'absence de contrôle du procédé se fait alors par la détection de l'une ou l'autre des situations suivantes :

- règle 1 : un point se situe au-delà de la zone A, c'est-à-dire hors des limites de contrôle ;
- règle 2 : neuf points successifs se trouvent d'un même côté de la ligne centrale ;
- règle 3 : six points successifs ont des valeurs croissantes ou bien décroissantes ;
- règle 4 : quatorze points successifs ont une disposition en « dents de scie » (une valeur entourée par deux valeurs plus grandes ou par deux valeurs plus petites) ;
- règle 5 : deux points parmi trois points successifs se situent dans la zone A ou au-delà, d'un même côté de la ligne centrale ;
- règle 6 : quatre points parmi cinq points successifs se situent dans la zone B ou au-delà, d'un même côté de la ligne centrale ;
- règle 7 : quinze points successifs se situent dans les deux zones centrales C (à moins d'un écart-type de la ligne centrale) ;
- règle 8 : huit points successifs se situent de part et d'autre de la ligne centrale sans qu'il y ait de point dans les zones centrales C.

Ces règles ont été mises au point pour les cartes de contrôle de la moyenne. Leur définition repose, dans une certaine mesure, sur l'étude des suites homogènes mais résulte aussi très largement de l'expérience. Elles ont été formalisées par des compagnies privées qui en ont fait des procédures standards [WESTERN ELECTRIC COMPANY, 1956]. Une illustration graphique de ces règles et des commentaires relatifs à leur utilisation sont donnés par NELSON [1984, 1985]. Des informations concernant les longueurs des suites homogènes lorsque le procédé est sous contrôle sont données par DOES et SCHRIEVER [1992], dans le cas de l'application d'une seule règle ou de plusieurs règles simultanément.

La règle 1 permet de détecter des modifications importantes dans la moyenne et/ou la variance ainsi que des points aberrants. La règle 2 vise à détecter la présence d'un dérèglement de la moyenne. La règle 3 met en évidence une dérive de la moyenne c'est-à-dire une croissance ou une décroissance lente. La règle 4 signale un phénomène d'alternance tel que celui produit par l'utilisation alternative de deux éléments mécaniques ou de deux opérateurs. Les règles 5 et 6 visent à donner une alerte précoce d'un éventuel dérèglement du procédé. Enfin, les règles 7 et 8 indiquent une forme de stratification de la production, la moyenne du procédé étant différente dans les strates.

Une telle stratification peut, ici aussi, résulter de l'utilisation de deux ou plusieurs éléments mécaniques, opérateurs, etc. La règle 7 détecte les situations où les observations d'un même échantillon proviennent de strates dont les moyennes sont différentes et la règle 8 met en évidence les situations où les observations d'un même échantillon proviennent d'une seule strate. Dans le premier cas, les moyennes des échantillons restent proches de la ligne centrale, non

pas parce qu'elles ne varient pas suffisamment, mais parce que les limites de contrôle sont trop éloignées.

D'après NELSON [1984, 1985], les règles 1, 2, 3 et 4 devraient être utilisées en routine dans le cas du contrôle de la moyenne, de manière à augmenter la sensibilité de la carte de contrôle sans toutefois augmenter exagérément le risque de première espèce. En effet, le risque qu'au moins un test soit positif alors que le procédé est sous contrôle reste inférieur à 0,01. Il faudrait également y ajouter les règles 5 et 6 chaque fois qu'une alerte précoce est économiquement désirable. L'utilisation simultanée des règles augmente cependant le risque  $\alpha$ , qui vaut alors environ 0,02.

Bien que définies pour les cartes de contrôle des moyennes, les règles 1, 3 et 4 peuvent aussi être utilisées pour les cartes de contrôle des proportions et des nombres d'individus non conformes. De plus, dans ces derniers cas, la règle 2 peut être utilisée également, pour autant que les distributions soient suffisamment symétriques [NELSON, 1984].

A ce sujet, notons que Minitab et SAS offrent la possibilité d'utiliser les huit règles dans le cas du contrôle des moyennes et les quatre premiers tests dans le cas du contrôle de résultats de comptages.

Pour illustrer une utilisation de ces tests, nous avons repris l'exemple traité au paragraphe 2.7, en considérant que les 150 observations réalisées dans une phase préliminaire servent à fixer les limites de contrôle des moyennes et des écarts-types pour la surveillance ultérieure du procédé.

Pour simuler cette phase de surveillance, nous avons généré 50 échantillons supplémentaires à partir du générateur suivant :

$$x_{ij} = 619,5 + v_{ij} \quad (i = 1, \dots, 50; j = 1, \dots, 5),$$

$v_{ij}$  étant des valeurs d'une variable normale de moyenne nulle et d'écart-type égal à 40,3. Par rapport au générateur initial nous avons donc simplement augmenté la moyenne de 10 unités, ce qui correspond à un quart de l'écart-type et nous avons éliminé la composante de variance entre échantillons, afin que, en dehors de la modification de la moyenne, le procédé soit effectivement sous contrôle.

La figure 9 donne la carte de contrôle des moyennes des 50 échantillons ainsi générés. On constate qu'aucun point ne se trouve hors des limites de contrôle, mais qu'un signal a été donné à plusieurs reprises par la règle 6, indiquant ainsi que le procédé n'est effectivement pas sous contrôle.

Pour illustrer l'effet d'une modification graduelle de la moyenne nous avons recommencé la génération des données en utilisant le modèle suivant :

$$x_{ij} = 609,5 + (0,4)i + v_{ij} \quad (i = 1, \dots, 50; j = 1 \dots, 5),$$

les  $v_{ij}$  ayant les mêmes caractéristiques que pour l'exemple précédent. Ce générateur considère donc que la moyenne augmente de 0,4 unité au cours de chaque contrôle, l'augmentation totale étant de 20 unités au 50<sup>ième</sup> échantillon.

La figure 10 montre que, pour cet exemple aussi, aucun point ne se trouve hors des limites de contrôle, mais dès le 41<sup>ième</sup> échantillon, la règle 2 attire

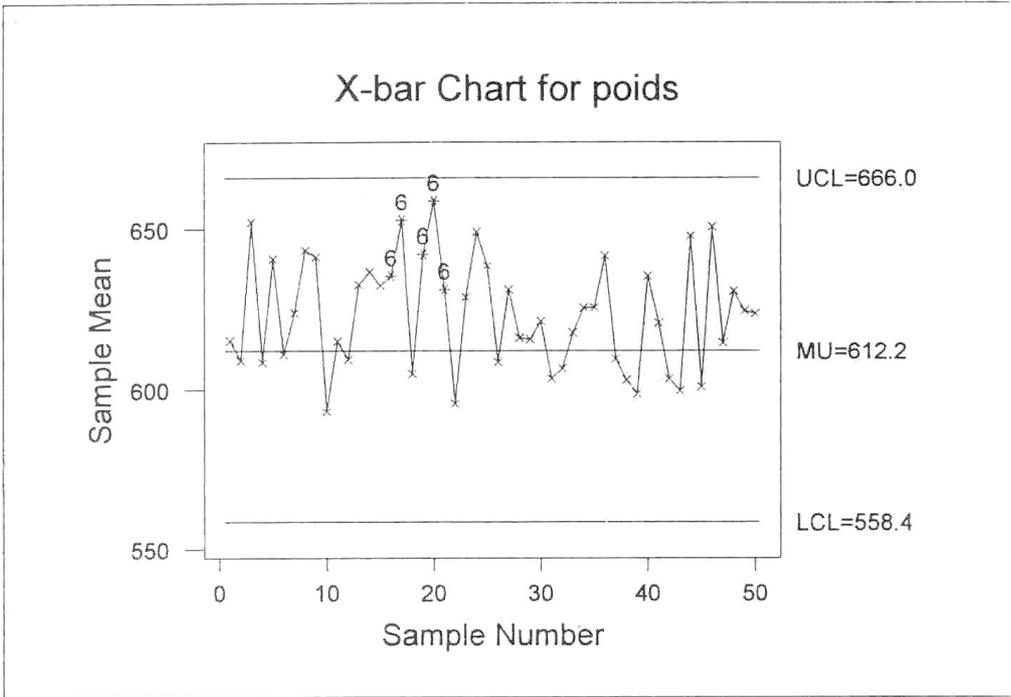


Figure 9. Carte de contrôle des moyennes et règles complémentaires après augmentation de la moyenne de 10 unités.

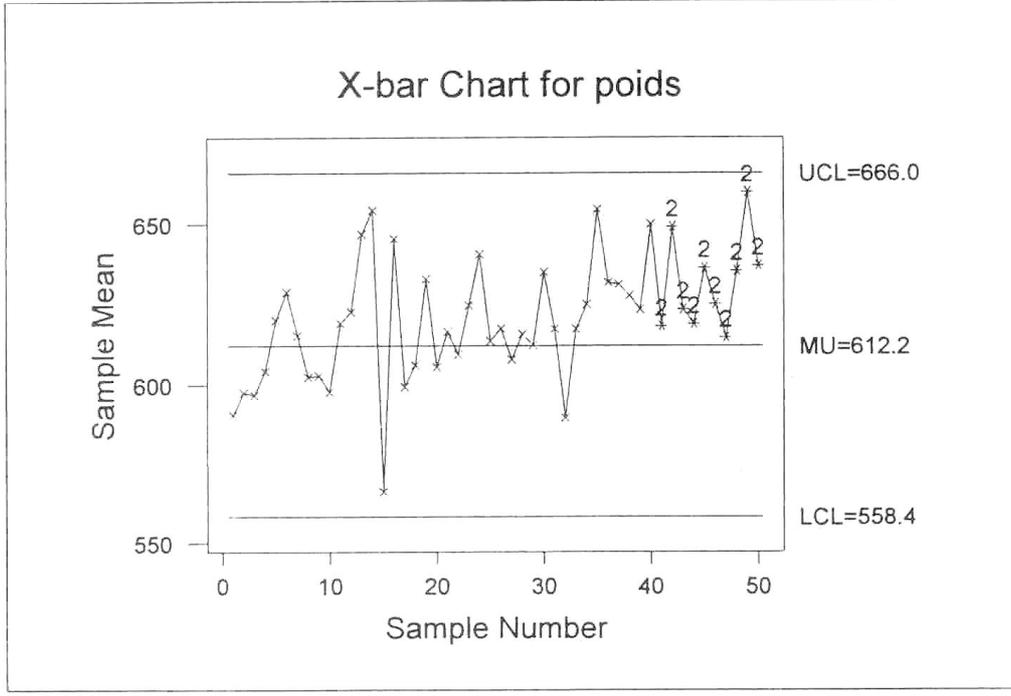


Figure 10. Carte de contrôle des moyennes et règles complémentaires en présence d'une tendance en moyenne.

l'attention sur le dérèglement du procédé. Bien que cela ne soit pas explicitement indiqué sur la figure, la règle 5 détecte aussi l'absence de contrôle à l'échantillon 42.

#### 4.2. Cartes de contrôle pour données individuelles

Au paragraphe 2.1 nous avons considéré qu'un échantillon d'effectif  $n_i$  était prélevé à intervalles de temps réguliers. Implicitement, nous avons supposé que  $n_i$  est supérieur à l'unité, du moins pour l'établissement de cartes de contrôle de la dispersion.

Dans certaines situations, on ne réalise cependant qu'une seule observation à chaque intervalle de temps. C'est, par exemple, le cas lorsqu'on détermine un paramètre donné une seule fois par jour. C'est le cas aussi lorsque la mesure se fait de façon pratiquement continue, ou à intervalles de temps très courts, à l'aide de senseurs automatiques.

Une carte de contrôle, analogue à la carte de contrôle des moyennes, peut être établie en portant sur un graphique la caractéristique observée en fonction du temps ainsi que les limites de contrôle correspondantes.

La ligne centrale est donnée par  $m_0$  et les limites de contrôle sont situées en :

$$m_0 \pm u_{1-\alpha/2} \sigma_0 \quad \text{ou en} \quad m_0 \pm k \sigma_0.$$

Pour contrôler la variabilité du procédé, on utilise alors l'amplitude mobile, calculée sur un nombre fixé,  $q$ , de valeurs successives.

Si  $q$  est égal à 2, l'amplitude relative à l'observation  $x_i$  est égale à :

$$r_i = |x_i - x_{i-1}|.$$

De façon plus générale, pour  $q$  quelconque, l'amplitude est déterminée à partir de l'observation  $x_i$  et des  $q - 1$  observations précédentes. Les amplitudes successives font donc intervenir  $q - 1$  observations identiques et il n'y a pas indépendance entre ces amplitudes.

La carte de contrôle de la dispersion est alors établie comme si les  $q$  dernières observations avaient été réalisées simultanément. La ligne centrale correspond à la valeur  $d_2 \sigma_0$  et les limites de contrôle sont :

$$r_{\alpha/2} \sigma_0 \quad \text{et} \quad r_{1-\alpha/2} \sigma_0,$$

ou, en fonction d'un multiple,  $k$ , de l'erreur-standard de l'amplitude :

$$d_2 \sigma_0 \pm k d_3 \sigma_0,$$

la limite inférieure étant remplacée par zéro lorsque la formule ci-dessus conduit à une valeur négative (paragraphe 2.5).

On pourrait aussi établir une carte de contrôle de l'écart-type mobile, mais ce type de carte ne semble pas être utilisé dans la pratique et n'est pas prévu dans les logiciels Minitab ou SAS.

Lorsque la moyenne  $m_0$  est inconnue, elle peut être estimée par la moyenne des valeurs individuelles observées au cours d'une période préliminaire. Ces mêmes données peuvent aussi servir à l'estimation de l'écart-type,  $\sigma_0$ . La solution retenue dans ce cas sera la plus souvent la suivante : on calcule la moyenne des amplitudes mobiles,  $\bar{r}$ , et on estime l'écart-type par la relation :

$$\hat{\sigma}_0 = \bar{r}/d_2,$$

la constante  $d_2$  correspondant à un effectif égal à  $q$ .

Par rapport au calcul de l'écart-type sur l'ensemble des données disponibles, l'estimation de la variabilité à partir des amplitudes mobiles d'ordre 2 a l'avantage d'éliminer la variabilité liée à des causes assignables, comme par exemple la tendance qui représente des effets externes [NELSON, 1982b].

### 4.3. Regroupement logique des observations

Nous avons vu dans l'introduction que les cartes de contrôle reposent sur la distinction entre deux sources de variation : les variations liées à des causes identifiables et la variation résiduelle. La quantification de ces deux sources de variation se base sur l'examen de la variation dans les échantillons et de la variation entre échantillons. Cette façon de procéder suppose naturellement que la constitution des échantillons est réalisée de manière rationnelle de sorte que les différences entre observations dans les échantillons soient influencées aussi faiblement que possible par d'éventuelles causes assignables. Des informations à ce sujet sont données par MONTGOMERY [1991], WHEELER et CHAMBERS [1992] et WHEELER [1995] notamment.

Il faut noter aussi que la variabilité dans les échantillons n'est pas toujours une bonne mesure de la variation due à des causes non assignables parce qu'elle ne prend pas en compte l'ensemble de la variation résiduelle. Ce serait le cas, par exemple, pour des procédés au cours desquels la production se fait par cuves successives. Dans une telle situation, on doit normalement s'attendre à ce que la production d'une cuve soit relativement homogène et que la production de cuves successives présente une plus grande hétérogénéité que la production d'une cuve donnée. Si on réalise plusieurs prélèvements dans une même cuve, la variation entre les observations d'une même cuve tient compte de l'hétérogénéité du produit, des erreurs et des imprécisions des mesures mais n'englobe pas nécessairement toute la variabilité naturelle du procédé. L'utilisation de cette variabilité pour établir, par exemple, une carte de contrôle des moyennes conduirait à des limites de contrôle beaucoup trop rapprochées de la ligne centrale. Une solution, dans ce cas, serait de construire une carte de contrôle pour valeurs individuelles, en utilisant les amplitudes successives pour estimer l'écart-type (paragraphe 4.2). Un exemple numérique est proposé par WHEELER et CHAMBERS [1992].

### 4.4. Conditions d'application

Pour les cartes de contrôle basées sur les mesures, nous avons énoncé, au paragraphe 2.1, les conditions d'application sur lesquelles reposent les méthodes d'inférence statistique utilisées.

Parmi ces conditions, il y a tout d'abord la normalité de la caractéristique étudiée. Diverses représentations graphiques permettent d'apprécier visuellement cette normalité et plusieurs tests statistiques peuvent être utilisés. Des informations à ce sujet sont données dans PALM [1997]. La non-normalité de la caractéristique peut affecter de diverses façons les distributions d'échantillonnage des paramètres. Ainsi pour la moyenne, seule la forme de la distribution est affectée, alors que pour la distribution d'échantillonnage de la variance, à la fois la forme et l'erreur-standard sont affectées. Dans le cas d'une non-normalité très accentuée, il pourra se justifier d'effectuer une transformation de variable permettant de rendre la distribution plus normale. Par ailleurs, on se rappellera que les distributions d'échantillonnage de la moyenne et de l'écart-type, notamment, sont asymptotiquement normales, ce qui justifie le recours à la méthode de l'erreur-standard pour le calcul des limites de contrôle, c'est-à-dire l'expression de celles-ci en fonction d'un multiple de l'erreur-standard du paramètre étudié. On notera cependant que cette procédure ne permet qu'une connaissance approchée de la valeur du risque de première espèce,  $\alpha$ , et de la courbe d'efficacité lorsque l'effectif des échantillons est réduit, comme c'est habituellement le cas en pratique.

Toutefois, WHEELER et CHAMBERS [1992] et WHEELER [1995] insistent sur le fait que, même pour des distributions non normales et pour de petits échantillons, les cartes de contrôle restent efficaces, en pratique, pour détecter des modifications des procédés, si les limites de contrôle sont placées à une distance égale à trois fois l'erreur-standard de part et d'autre de la ligne centrale. La raison est que, quelles que soient les conditions d'application, les distributions d'échantillonnage des paramètres sont presque toujours telles que l'intervalle défini par les limites de contrôle contient de 99 à 100 % des valeurs si le procédé est sous contrôle. Par conséquent un point situé hors de ces limites représente pratiquement toujours un signal, même si la distribution de la caractéristique étudiée est nettement non normale.

Une autre condition d'application est l'indépendance des observations successives. Cette indépendance n'est pas toujours assurée. L'usure de l'outil, la non-homogénéité des matières premières, les variations des conditions ambiantes, etc., sont des causes pouvant introduire une certaine dépendance dans les observations successives. Des alternatives aux cartes de contrôle classiques peuvent être utilisées dans ce cas. Des informations à ce sujet sont données dans une seconde partie [PALM, 1996].

Comme pour la non-normalité, WHEELER et CHAMBERS [1992] et WHEELER [1995] considèrent cependant que les cartes classiques restent très utiles dans le cas de données corrélées, même si les risques d'erreurs ne sont pas connus de manière exacte.

Les cartes de contrôle par comptage qui ont été décrites reposent sur l'hypothèse d'une distribution binomiale des articles non conformes ou d'une distribution de POISSON des nombres de défauts. Rappelons, à ce sujet, que l'utilisation de la distribution binomiale suppose que les articles ont tous la même probabilité d'être non conformes et que les observations sont indépendantes.

Pour les nombres de défauts, l'utilisation de la distribution de POISSON suppose que les défauts surviennent au hasard, avec des probabilités constantes.

Les conditions énoncées ci-dessus ne sont pas toujours remplies en pratique et les risques d'erreur réels peuvent s'écarter des valeurs théoriques calculées pour les cartes classiques. Dans ces cas, le recours à d'autres distributions théoriques peut également être envisagé. Des informations sont données par MONTGOMERY [1991].

Si le non respect des conditions d'application provient de la non constance des probabilités, et si le nombre moyen d'articles non conformes dépasse l'unité, WHEELER [1995] propose l'utilisation d'une carte des valeurs individuelles.

#### 4.5. Risques $\alpha$ et $\beta$

Nous avons vu que les limites de contrôle sont déterminées en fonction du risque  $\alpha$  ou en fonction d'un multiple  $k$  de l'erreur-standard et que la pratique courante est de fixer  $\alpha$  à 0,002 et  $k$  à 3, ce qui est à peu près équivalent, si les conditions d'application sont remplies. La faible valeur du risque de première espèce protège l'utilisateur d'interventions inutiles trop fréquentes sur le procédé. A ce sujet, on notera que des interventions sur un procédé alors qu'il est sous contrôle, non seulement sont coûteuses, mais peuvent conduire à une augmentation de la variabilité du procédé. La valeur  $k = 3$  semble être une valeur économiquement acceptable. Elle assure la robustesse des cartes de contrôle, comme nous l'avons signalé ci-dessus, et plusieurs décennies de pratique ont révélé son efficacité pour la définition des limites d'action, sur les procédés.

En ce qui concerne la courbe d'efficacité, nous avons vu qu'elle varie avec la taille de l'échantillon et qu'elle peut, par conséquent, être utilisée pour déterminer cette taille. Cela implique cependant qu'on se fixe un écart par rapport à l'hypothèse nulle qu'on souhaite mettre en évidence avec une probabilité donnée. Nous avons vu que, en pratique, on ne pose pas toujours le problème en ces termes, mais qu'on fixe souvent  $n$  a priori et de façon assez arbitraire, de manière à réaliser un compromis entre le coût du contrôle et la fréquence d'échantillonnage. Notons cependant que des approches sont proposées dans la littérature pour définir, sur la base de critères économiques, la taille de l'échantillon, la fréquence de l'échantillonnage et le risque  $\alpha$ . Des informations sont données par MONTGOMERY [1991].

Telles qu'elles ont été décrites, les cartes de contrôle vérifient si le procédé est sous contrôle ou non, indépendamment de toute notion de conformité ou de qualité de la production. Un procédé de fabrication sous contrôle statistique, c'est-à-dire stable, peut très bien conduire à une proportion exagérée d'articles ne répondant pas à des spécifications ou des tolérances fixées, notamment à cause de la trop grande variabilité de la fabrication.

En pratique, il s'agit en effet souvent de produire des pièces comprises entre une *tolérance supérieure*  $t_s$  et une *tolérance inférieure*  $t_i$ <sup>(20)</sup>. Et en fonction de ces tolérances, on peut définir différents *indices d'aptitude du procédé de fabri-*

---

<sup>(20)</sup> En anglais : *upper specification limit, USL*, et *lower specification limit, LSL*.

cation<sup>(21)</sup> qui permettent de préciser dans quelle mesure le procédé est capable de répondre aux exigences fixées par les limites de tolérance. Des informations relatives à ces indices sont données par PALM [1997].

Lorsque l'intervalle de tolérance est plus grand que six ou huit fois l'écart-type du procédé, la carte de contrôle des moyennes peut, dans certaines situations, être établie dans le but de contrôler la fraction d'articles non conformes produits, plutôt que dans le but de mettre en évidence des causes de variation assignables. Il s'agit alors d'une *carte de contrôle à la réception*<sup>(22)</sup>. Le principe est de permettre à la moyenne du procédé de fluctuer dans un intervalle donné s'étendant d'une moyenne refusable inférieure,  $m_{ri}$ , à une moyenne refusable supérieure,  $m_{rs}$ . On peut alors fixer la valeur de  $n$  de manière à ce que la probabilité de mettre en évidence une modification de la moyenne du procédé telle que celle-ci sorte de l'intervalle  $(m_{ri}, m_{rs})$  corresponde à une probabilité  $1 - \beta$  fixée [MONTGOMERY, 1991].

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- CAVÉ R. [1966]. *Le contrôle statistique des fabrications*. Paris, Eyrolles, 543 p.
- DAGNELIE P. [1975]. *Théorie et méthodes statistiques* (vol. 2). Gembloux, Presses agronomiques, 463 p.
- DAGNELIE P. [1992]. *Statistique théorique et appliquée* (tome 1). Gembloux, Presses agronomiques, 492 p.
- DOES R.J.M.M., SCHRIEVER B.F. [1992]. Variables control chart limits and tests for special causes. *Stat. Neerl.* 46, 229-245.
- GRANT E.L., LEAVENWORTH R.S. [1980]. *Statistical quality control*. New York, McGraw-Hill, 684 p.
- JOHNSON N.L., KOTZ S. [1969]. *Distributions in statistics : discrete distributions*. Boston, Houghton Mifflin, 328 p.
- MONTGOMERY D.C. [1991]. *Introduction to statistical quality control*. New York, Wiley, 674 p.
- NELSON L.S. [1982a]. Control charts. In : KOTZ S., JOHNSON N.L. (edit.). *Encyclopedia of statistical sciences* (vol.2). New York, Wiley, 176-183.
- NELSON L.S. [1982b]. Control charts for individual measurements. *J. Qual. Technol.* 14, 172-173.
- NELSON L.S. [1984]. The SHEWHART control chart-tests for special causes. *J. Qual. Technol.*, 16, 237-239.
- NELSON L.S. [1985]. Interpreting SHEWHART  $\bar{X}$  control charts. *J. Qual. Technol.* 17, 114-116.
- PALM R. [1996]. Cartes de contrôle : combinaison de résultats et données corrélées ou multivariées. *Note Stat. Inform.* (Gembloux). 96/3, 37 p.
- PALM R. [1997]. Les indices d'aptitude des procédés de fabrication. *Note Stat. Inform.* (Gembloux) (à paraître).
- PEARSON E.S., HARTLEY H.O. [1966]. *Biometrika tables for statisticians* (vol. 1). Cambridge, University Press, 264 p.

<sup>(21)</sup> En anglais : *process capability indices*.

<sup>(22)</sup> En anglais : *acceptance control chart*.

- SAS INSTITUTE INC. [1991]. *SAS/QC<sup>R</sup> Software : SQC Menu system, Version 6*. Cary, NC, SAS Institute Inc., 126 p.
- SAS INSTITUTE INC. [1995]. *SAS/QC<sup>R</sup> Software : usage and reference, Version 6* (2 vol.). Cary, NC, SAS Institute Inc., 1697 p.
- STUART A., ORD J.K. [1987]. *KENDALL'S theory of statistics, vol.1 : distribution theory*. London Griffin, 604 p.
- WESTERN ELECTRONIC COMPANY [1956]. *Statistical quality control handbook*. Western Electric Company, commercial sales clerk, Select code 700-144, P.O. Box 26205, Indianapolis, Indiana 46226.
- WHEELER D.J., CHAMBERS D.S. [1992]. *Understanding statistical process control*. Knoxville, TE, SPC Press Inc., 406 p.
- WHEELER D.J. [1995]. *Advanced topics in statistical process control*. Knoxville, TE, SPC Press Inc., 470 p.
- X. [1994]. *Minitab reference manual, release 10 for windows*. PA State College, Minitab, 1047 p.

## ANNEXE 1 : cartes de contrôle par mesures

Valeurs de  $c_4$ ,  $c_5$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $\sigma_{\bar{u}}$  et  $\tilde{u}_{0,999}$ , en fonction de  $n$ .

$n$	$c_4$	$c_5$	$d_2$	$d_3$	$\sigma_{\bar{u}}$	$\tilde{u}_{0,999}$
2	0,79788	0,60281	1,12838	0,85250	0,70711	2,18496
3	0,88623	0,46325	1,69257	0,88837	0,66983	2,08777
4	0,92132	0,38881	2,05875	0,87981	0,54608	1,69538
5	0,93999	0,34121	2,32593	0,86408	0,53557	1,66891
6	0,95153	0,30755	2,53441	0,84804	0,46340	1,43992
7	0,95937	0,28216	2,70436	0,83321	0,45874	1,42752
8	0,96503	0,26214	2,84720	0,81983	0,41010	1,27420
9	0,96931	0,24584	2,97003	0,80783	0,40756	1,26735
10	0,97266	0,23224	3,07751	0,79705	0,37192	1,15524
12	0,97756	0,21066	3,25846	0,77848	0,34281	1,06427
14	0,98097	0,19415	3,40676	0,76302	0,31964	0,99168
16	0,98348	0,18100	3,53198	0,74991	0,30062	0,93243
18	0,98541	0,17020	3,64006	0,73859	0,28466	0,88258
20	0,98693	0,16112	3,73495	0,72869	0,27099	0,84037
30	0,99142	0,13073	.	.	0,22366	0,69260
50	0,99491	0,10075	.	.	0,17479	0,54111
100	0,99748	0,07098	.	.	0,12445	0,38505

$c_4$  : espérance mathématique de la distribution d'échantillonnage de l'écart-type estimé d'un échantillon aléatoire et simple de  $n$  observations prélevé dans une population normale réduite (paragraphe 2.2) ;

$c_5$  : erreur-standard de la distribution d'échantillonnage de l'écart-type estimé d'un échantillon aléatoire et simple de  $n$  observations prélevé dans une population normale réduite (paragraphe 2.2) ;

$d_2$  : espérance mathématique de la distribution d'échantillonnage de l'amplitude d'un échantillon aléatoire et simple de  $n$  observations prélevé dans une population normale réduite (paragraphe 2.5) ;

$d_3$  : erreur-standard de la distribution d'échantillonnage de l'amplitude d'un échantillon aléatoire et simple de  $n$  observations prélevé dans une population normale réduite (paragraphe 2.5) ;

$\sigma_{\bar{u}}$  : erreur-standard de la médiane d'un échantillon aléatoire et simple de  $n$  observations prélevé dans une population normale réduite (paragraphe 2.4) ;

$\tilde{u}_{0,999}$  : pourcentile 0,999 relatif à la distribution d'échantillonnage de la médiane d'un échantillon aléatoire et simple de  $n$  observations prélevé dans une population normale réduite (paragraphe 2.4).

## ANNEXE 2 : cartes de contrôle par mesures

Formules de calcul de la limite de contrôle inférieure (inf.), de la ligne centrale (centr.) et de la limite de contrôle supérieure (sup.), pour la moyenne, l'écart-type, la médiane et l'amplitude : limites exprimées en fonction de la probabilité  $\alpha$ , ou en fonction d'un multiple de l'erreur-standard,  $k$ , pour une distribution normale de moyenne  $m_0$  et d'écart-type  $\sigma_0$  (voir texte pour la définition des symboles et annexe 1 pour la valeur des constantes  $c_4$ ,  $c_5$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $\sigma_{\tilde{u}}$  et  $\tilde{u}_{0,999}$ ).

Caractéristiques	$\alpha$	$k$
Moyenne ( $\bar{X}$ chart)		
inf.	$m_0 - u_{1-\alpha/2} \sigma_0 / \sqrt{n_i}$	$m_0 - k \sigma_0 / \sqrt{n_i}$
centr.	$m_0$	$m_0$
sup.	$m_0 + u_{1-\alpha/2} \sigma_0 / \sqrt{n_i}$	$m_0 + k \sigma_0 / \sqrt{n_i}$
Ecart-type ( $S$ chart)		
inf.	$\sigma_0 \sqrt{\chi_{\alpha/2}^2 / (n_i - 1)}$	$c_4 \sigma_0 - k c_5 \sigma_0$ ou 0
centr.	$c_4 \sigma_0$	$c_4 \sigma_0$
sup.	$\sigma_0 \sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2 / (n_i - 1)}$	$c_4 \sigma_0 + k c_5 \sigma_0$
Médiane ( $M$ chart)		
inf.	$m_0 - \tilde{u}_{1-\alpha/2} \sigma_0$	$m_0 - k \sigma_{\tilde{u}} \sigma_0$
centr.	$m_0$	$m_0$
sup.	$m_0 + \tilde{u}_{1-\alpha/2} \sigma_0$	$m_0 + k \sigma_{\tilde{u}} \sigma_0$
Amplitude ( $R$ chart)		
inf.	$r_{\alpha/2} \sigma_0$	$d_2 \sigma_0 - k d_3 \sigma_0$ ou 0
centr.	$d_2 \sigma_0$	$d_2 \sigma_0$
sup.	$r_{1-\alpha/2} \sigma_0$	$d_2 \sigma_0 + k d_3 \sigma_0$

### ANNEXE 3 : cartes de contrôle par comptages

Formules de calcul de la limite de contrôle inférieure (inf.), de la ligne centrale (centr.) et de la limite de contrôle supérieure (sup.), pour les proportions d'articles non conformes, le nombre d'articles non conformes, les nombres totaux de défauts par échantillon, les nombres moyens de défauts par article : limites exprimées en fonction d'un multiple de l'erreur-standard,  $k$ , ( $n_i$  est l'effectif de l'échantillon,  $p_0$  est la proportion d'articles non conformes,  $z_0$  est le nombre moyen de défauts par article).

Caractéristiques	Formules
Proportion d'articles non conformes ( <i>p chart</i> ) inf. centr. sup.	$p_0 - k\sqrt{p_0(1-p_0)/n_i}$ ou 0 $p_0$ $p_0 + k\sqrt{p_0(1-p_0)/n_i}$
Nombres d'articles non conformes ( <i>np chart</i> ) inf. centr. sup.	$n_i p_0 - k\sqrt{n_i p_0(1-p_0)}$ ou 0 $n_i p_0$ $n_i p_0 + k\sqrt{n_i p_0(1-p_0)}$
Nombres de défauts par échantillon ( <i>c chart</i> ) inf. centr. sup.	$n_i z_0 - k\sqrt{n_i z_0}$ ou 0 $n_i z_0$ $n_i z_0 + k\sqrt{n_i z_0}$
Nombres de défauts par article ( <i>u chart</i> ) inf. centr. sup.	$z_0 - k\sqrt{z_0/n_i}$ ou 0 $z_0$ $z_0 + k\sqrt{z_0/n_i}$