

# INDICES D'APTITUDE DES PROCÉDÉS DE PRODUCTION

R. PALM\*

## RÉSUMÉ

Cette note présente les principaux indices d'aptitude des procédés de production et aborde les problèmes d'inférence statistique liés à ces indices. Un exemple numérique est traité par les logiciels Minitab et SAS.

## SUMMARY

This note describes the main process capability indices and presents some inferential properties. A numerical example is analysed by using Minitab and SAS softwares.

## 1. INTRODUCTION

Dans la production industrielle, les produits manufacturés doivent répondre à des exigences de qualité. Cette qualité est souvent caractérisée par une variable quantitative et l'objectif de la fabrication est de garantir que cette variable ne sorte de limites de tolérance fixées que dans une très faible proportion des cas. Ainsi, en pratique, on considère souvent que la proportion de produits non conformes, c'est-à-dire pour lesquels la variable observée est hors de l'intervalle de tolérance, ne doit pas dépasser 0,1 %, et dans certaines productions, cette proportion est encore beaucoup plus faible et s'exprime alors en parts par million.

Pour que cet objectif puisse être atteint, il faut, d'une part, que le procédé de production soit adapté aux exigences de la fabrication et, d'autre part, que le procédé reste sous contrôle statistique pendant la production ou, du moins, que les éventuelles modifications dans le procédé restent suffisamment modérées.

Le contrôle statistique en cours de production est assuré par l'établissement des diverses *cartes de contrôle*<sup>1</sup> dont les premières versions ont été proposées par

---

\*Chargé de cours associé à la Faculté universitaire des Sciences agronomiques de Gembloux.

1. En anglais: *control charts*.

SHEWHART, il y a plus de septante ans [NELSON, 1982]. Des informations relatives à ces cartes de contrôle sont données dans les nombreux ouvrages consacrés au contrôle statistique de la qualité, parmi lesquels nous citerons, par exemple, CAVÉ [1966], GRANT et LEAVENWORTH [1980], MONTGOMERY [1991], PILLET [1995], WHEELER et CHAMBERS [1992], WHEELER [1995]. Une présentation de ces cartes est également donnée par PALM [1996a; 1996b].

Pour quantifier l'aptitude d'un procédé à produire la proportion requise d'articles conformes, des *indices d'aptitude* ou *de capacité des procédés*<sup>2</sup> ont été proposés et font l'objet d'une attention particulière dans les publications récentes consacrées au contrôle de la qualité.

Même lorsqu'un procédé de production est sous contrôle, c'est-à-dire en l'absence de *sources de variation identifiables*<sup>3</sup>, la caractéristique utilisée pour décrire la qualité présente encore une *variabilité inhérente au procédé*<sup>4</sup> lui-même. Elle peut donc être décrite par une variable aléatoire caractérisée par une distribution de probabilité. L'aptitude du procédé dépend de la relation existant entre cette distribution, qui traduit les performances du procédé, et les spécifications, qui correspondent aux exigences vis-à-vis du procédé.

Nous donnerons d'abord la définition des principaux indices d'aptitude (paragraphe 2). Ensuite, nous envisagerons les problèmes d'inférence statistique en relation avec ces indices (paragraphe 3). Nous examinerons alors, sur la base d'un exemple numérique, les procédures proposées par les logiciels Minitab et SAS pour l'étude de l'aptitude des procédés (paragraphe 4). Enfin, nous terminerons par quelques remarques complémentaires (paragraphe 5).

Des informations plus détaillées concernant les différents indices d'aptitude peuvent être trouvées dans les références bibliographiques citées dans le texte, ainsi que dans le livre de KOTZ et JOHNSON [1993], entièrement consacré à ce sujet.

## 2. PRINCIPAUX INDICES D'APTITUDE

### 2.1. Notations

Nous avons signalé, dans l'introduction, que les indices d'aptitude mettent en relation les caractéristiques d'un procédé de production et les spécifications imposées à la production.

La variable utilisée pour décrire le procédé possède une distribution de probabilité dont la moyenne est notée  $m$  et dont l'écart-type est noté  $\sigma$ . Aucune restriction ne doit être faite concernant la forme de la distribution pour la définition des indices. Toutefois, pour l'interprétation des indices et pour les problèmes d'inférence statistique, l'hypothèse de normalité devra être acceptée.

---

2. En anglais : *process capability indices, process capability ratios*.

3. En anglais : *assignable causes variation*.

4. En anglais : *common causes variation, chance causes variation*

Les spécifications imposées à la caractéristique sont généralement données sous la forme d'une *tolérance inférieure* et d'une *tolérance supérieure*<sup>5</sup>, notées  $t_i$  et  $t_s$ . Ces deux valeurs permettent de définir la demi-longueur de l'intervalle de tolérance:

$$d = (t_s - t_i)/2,$$

ainsi que le centre de l'intervalle de tolérance:

$$m_0 = (t_s + t_i)/2.$$

Un autre élément pris en compte lors de la définition de certains indices est la *valeur cible*<sup>6</sup>,  $m_c$ , qui n'est pas nécessairement confondue avec le point central de l'intervalle de tolérance.

## 2.2. L'indice $C_p$

Cet indice est le rapport entre l'amplitude des variations permises, et l'amplitude réelle du procédé, considérée comme égale à six fois l'écart-type et parfois dénommée tolérance naturelle :

$$C_p = (t_s - t_i)/6\sigma = d/3\sigma.$$

Si la caractéristique étudiée suit une distribution normale dont la moyenne se situe au centre de l'intervalle de tolérance  $m_0$ , il existe une relation directe entre l'indice  $C_p$  et la proportion  $p$  d'articles non conformes. Cette proportion est, en effet, égale à:

$$p = 2\Phi(-3C_p),$$

$\Phi(-3C_p)$  représentant la valeur de la fonction de répartition de la variable normale réduite pour une valeur de la variable égale à  $-3C_p$ .

Ainsi, pour  $C_p = 1$ , cette proportion est de 0,0027 et pour  $C_p = 1,33$  elle est de l'ordre de 0,00006. Dans le premier cas, les tolérances sont situées en  $m_0 \pm 3\sigma$  et dans le second cas, elles sont situées en  $m_0 \pm 4\sigma$ .

On considère que si l'indice est inférieur à l'unité, le procédé est inadéquat, compte tenu des exigences. Il convient, dans ce cas, soit de revoir les tolérances, qui sont peut-être inutilement sévères, soit d'améliorer ou de changer le procédé, de manière à réduire l'écart-type. Si cet indice est compris entre 1 et 1,33, le procédé est adéquat, mais nécessite un contrôle d'autant plus poussé que  $C_p$  est proche de 1. Enfin, si  $C_p$  est supérieur à 1,33, le respect des tolérances ne devrait pas poser de problèmes majeurs. BHOTE [1991] estime cependant qu'une valeur de 2 devrait correspondre à un standard minimum.

L'indice  $C_p$  mesure la performance potentielle d'un procédé, puisqu'il ne tient compte que des limites de tolérance et de la variabilité du procédé, la moyenne réelle du procédé n'étant pas prise en considération. Cette performance potentielle ne peut donc être atteinte que si la moyenne du procédé coïncide avec le point central de l'intervalle de tolérance [KANE, 1986].

5. En anglais: *lower and upper specification limit, LSL and USL*.

6. En anglais: *target value*.

### 2.3. L'indice $C_{pk}$

En tenant compte de la moyenne réelle  $m$  du procédé, on peut calculer un indice d'aptitude par rapport à la tolérance inférieure et un indice par rapport à la tolérance supérieure, de la façon suivante:

$$(C_{pk})_i = (m - t_i)/3\sigma \quad \text{et} \quad (C_{pk})_s = (t_s - m)/3\sigma.$$

On remarque que, quelle que soit la valeur de  $m$ , la moyenne arithmétique de ces deux indices est égale à  $C_p$ . D'autre part, si la moyenne du procédé correspond au point central de l'intervalle de tolérance, alors les deux indices sont identiques.

La prise en considération d'un seul de ces deux indices se justifie lorsque la spécification porte sur une limite uniquement.

Dans le cas de deux limites, on définit l'indice  $C_{pk}$  comme étant la valeur minimum des deux indices ci-dessus, c'est-à-dire aussi:

$$C_{pk} = (d - |m_0 - m|) / 3\sigma = (1 - k)C_p,$$

avec :

$$k = |m_0 - m|/d.$$

L'indice  $k$  est une mesure standardisée du décentrage du procédé et le facteur  $(1 - k)$  est un facteur de réduction de l'aptitude du procédé, suite à ce décentrage. L'indice  $C_{pk}$  est donc toujours inférieur ou égal à  $C_p$ . La différence entre ces deux indices représente l'amélioration de l'aptitude du procédé qu'on peut obtenir en faisant coïncider la moyenne  $m$  du procédé avec le point central de l'intervalle de tolérance.

On peut noter aussi que si la moyenne réelle du procédé se situe hors des limites de tolérance, la formule donnant  $C_{pk}$  conduit à une valeur négative; dans ce cas, on donne habituellement à l'indice la valeur zéro [BOYLES, 1991]. Nous supposons, par la suite, que  $m$  est dans l'intervalle de tolérance.

$C_{pk}$  prend donc en compte à la fois le paramètre de position et le paramètre de dispersion et il définit l'aptitude réelle du procédé car il exprime dans quelle mesure les résultats du procédé sont dans l'intervalle de tolérance. Cet indice ne détermine pas directement la proportion  $p$  d'articles non conformes car deux indices identiques peuvent conduire à des proportions différentes. Il donne néanmoins des limites pour cette proportion. En effet, celle-ci est toujours telle que:

$$\Phi(-3C_{pk}) \leq p \leq 2\Phi(-3C_{pk}).$$

### 2.4. L'indice $C_{pm}$

L'indice  $C_{pm}$  tient compte de la moyenne du procédé et de la valeur cible:

$$C_{pm} = \frac{d}{3\sqrt{\sigma^2 + (m - m_c)^2}} = \frac{d}{3\sigma'}.$$

Dans cette relation,  $\sigma'$  est une expression de la variabilité du procédé par rapport à la valeur cible.

Une version légèrement différente de cet indice a également été proposée. Elle s'écrit :

$$C_{\text{pm}}^* = (d - |m_0 - m_c|) / 3 \sigma'.$$

Si la valeur cible coïncide avec le centre de l'intervalle de tolérance, les deux définitions conduisent au même résultat. Comme nous le verrons au paragraphe 4.4, le logiciel SAS utilise cette dernière définition.

KOTZ et JONHSON [1993] mettent en garde vis-à-vis de l'utilisation de  $C_{\text{pm}}$ , ou de  $C_{\text{pm}}^*$ , lorsque la moyenne cible ne coïncide pas avec le point central de l'intervalle de tolérance. En effet, dans ce cas, pour des limites de tolérance et un écart-type fixés, un même écart  $|m - m_c|$  entre la moyenne du procédé et la moyenne cible donne lieu à la même valeur de  $C_{\text{pm}}$ , alors que la proportion d'articles non conformes sera différente selon que  $m$  est plus petit ou plus grand que  $m_c$ .

$C_{\text{pm}}$  exprime dans quelle mesure les résultats du procédé sont proches de la valeur cible. Pour des limites de tolérance et un écart-type  $\sigma$  fixés, l'indice est maximum quand la moyenne  $m$  du procédé coïncide avec la valeur cible  $m_c$ . La différence entre  $C_{\text{p}}$  et  $C_{\text{pm}}$  représente l'amélioration de l'aptitude du procédé qu'on peut obtenir en faisant coïncider la moyenne réelle du procédé avec la valeur cible.

Enfin, notons encore que l'indice  $C_{\text{pm}}$  peut s'exprimer directement en fonction de  $C_{\text{p}}$ :

$$C_{\text{pm}} = \sigma C_{\text{p}} / \sigma' = C_{\text{p}} / \sqrt{1 + ((m - m_c) / \sigma)^2}.$$

Cette relation montre que si  $m_c = m$ ,  $C_{\text{pm}}$  est égal à  $C_{\text{p}}$ . Il en résulte aussi que si  $m = m_c = m_0$ , il y a identité entre  $C_{\text{p}}$ ,  $C_{\text{pk}}$  et  $C_{\text{pm}}$ .

La figure 1 donne une représentation graphique de l'évolution de l'indice  $C_{\text{pm}}$  en fonction de  $m$  et de  $m_c$ . Pour établir cette figure, nous avons considéré, arbitrairement, que les limites de tolérance sont situées en  $-3$  et  $3$  et donc que le centre de l'intervalle se situe en zéro. Nous avons également considéré que l'écart-type est égal à l'unité, ce qui signifie que  $C_{\text{p}}$  est égal à l'unité également. Les courbes ont été calculées uniquement pour des valeurs positives de  $m_c$ . Par symétrie par rapport à la droite verticale passant par  $m = 0$ , on obtiendrait les courbes relatives aux valeurs négatives de  $m_c$ .

Afin de mieux comprendre la spécificité des indices  $C_{\text{pk}}$  et  $C_{\text{pm}}$ , on peut reporter, dans le plan  $(m, \sigma)$ , des lignes correspondant à des valeurs fixées des indices, comme l'a suggéré BOYLES [1991]. La figure 2 donne une telle représentation pour des valeurs de  $C_{\text{p}}$ ,  $C_{\text{pk}}$  et  $C_{\text{pm}}$  égales à 1 et à 0,5. Ces deux valeurs ont été retenues à titre d'illustration, bien qu'elles soient plus faibles que les valeurs généralement admises en pratique, afin d'obtenir un graphique suffisamment lisible, compte tenu que les unités en abscisse et en ordonnée doivent être égales. Comme pour la figure précédente, nous avons considéré, arbitrairement, que les limites de tolérance sont situées en  $-3$  et  $3$ . Cette standardisation ne modifie en

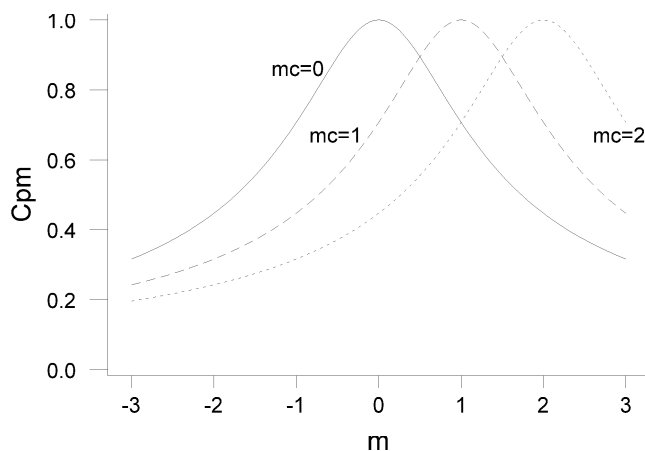


Figure 1. Représentation graphique de l'indice  $C_{pm}$ , en fonction de la moyenne,  $m$ , du procédé et de la valeur cible,  $m_c$ .

rien la généralité des commentaires que l'on peut émettre, puisque, par transformation linéaire de la variable de contrôle, on peut toujours se ramener au cas envisagé. On a considéré également que la valeur cible est égale à 0,5.

Les couples  $(m, \sigma)$  correspondant à un indice  $C_p$  donné se trouvent sur une droite horizontale située en:

$$\sigma = 1/C_p,$$

quelle que soit la valeur de la moyenne, puisque celle-ci n'intervient pas dans le calcul de l'indice.

Compte tenu de la standardisation utilisée, l'indice  $k$  utilisé dans la définition de  $C_{pk}$  est égal au tiers de la valeur absolue de  $m$ . On a donc:

$$C_{pk} = \left(1 - \frac{|m|}{3}\right) / \sigma,$$

ou encore:

$$\sigma = \left(1 - \frac{|m|}{3}\right) / C_{pk}.$$

Il s'agit d'une fonction linéaire en  $|m|$ , qui vaut zéro en  $m = \pm 3$  et  $1/C_{pk}$  en  $m = 0$  (figure 2).

D'autre part, pour une valeur fixée de  $m$ , comprise entre les limites de tolérance,  $C_{pk}$  augmente lorsque  $\sigma$  diminue et devient arbitrairement grand quand  $\sigma$  tend vers zéro. Cette caractéristique rend cet indice inadapté en tant qu'une mesure du centrage du procédé: une valeur élevée de  $C_{pk}$  n'a, par elle-même, aucune signification quant à la distance entre  $m$  et la valeur centrale de l'intervalle de tolérance [BOYLES, 1991].

Pour l'indice  $C_{pm}$ , on a, pour la situation étudiée, la relation:

$$C_{pm} = 1/\sqrt{\sigma^2 + (m - m_c)^2},$$

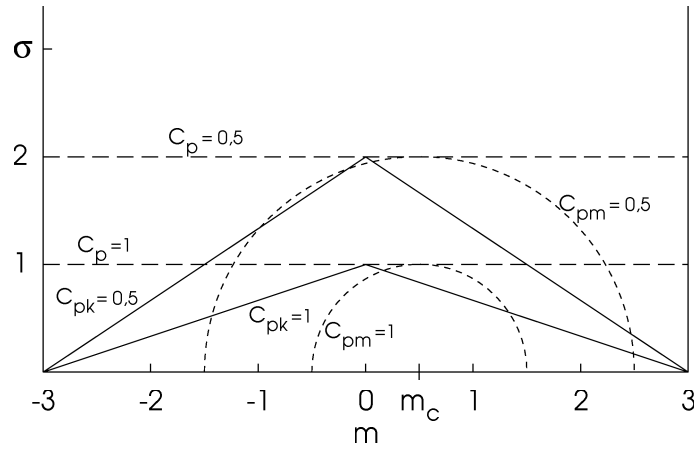


Figure 2. Représentation graphique des indices  $C_p$ ,  $C_{pk}$  et  $C_{pm}$ , en fonction de la moyenne  $m$  et de l'écart-type  $\sigma$  du procédé.

ou encore:

$$\sigma^2 = 1/C_{pm}^2 - (m - m_c)^2.$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle centré en  $m_c$  et de rayon égal à  $1/C_{pm}$ . Les courbes correspondant à  $C_{pm} = 1$  et  $C_{pm} = 0,5$  sont donc des demi-cercles de rayons 1 et 2, centrés en  $m_c$ , puisque  $\sigma$  ne peut être négatif. Dans la figure 2, on a considéré que  $m_c = 0,5$ ; une modification de cette valeur cible entraînerait une simple translation des demi-cercles.

Contrairement à  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  possède une limite supérieure quand  $\sigma$  tend vers zéro. En reprenant la définition de  $C_{pm}$ , on voit que cette limite est égale à:

$$\frac{d}{3|m - m_c|}.$$

Par conséquent, pour une valeur fixée de  $C_{pm}$ , on peut affirmer que la moyenne du procédé est toujours comprise dans l'intervalle:

$$m_c \pm d/3 C_{pm},$$

ou encore que l'écart  $|m_c - m|$  est toujours tel que :

$$|m_c - m| < d/3 C_{pm}.$$

Cette affirmation conduit à une interprétation concrète de l'indice en tant que mesure du centrage du procédé [BOYLES, 1991].

## 2.5. L'indice $C_{pmk}$

L'indice  $C_{pk}$  a été obtenu en modifiant le numérateur de la relation donnant l'indice  $C_p$  et l'indice  $C_{pk}$  a été obtenu en modifiant le dénominateur de cette

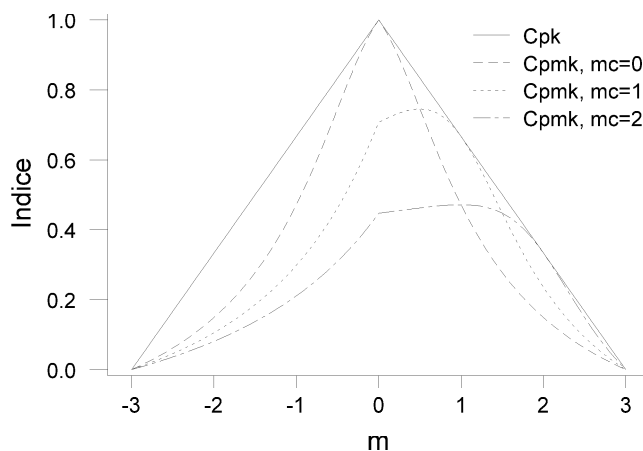


Figure 3. Représentation graphique des indices  $C_{pk}$  et  $C_{pmk}$ , en fonction de la moyenne  $m$  du procédé.

relation.

PEARNS *et al.* [1992] ont suggéré un indice qui combine ces deux modifications; ils proposent l'indice  $C_{pmk}$ :

$$C_{pmk} = \frac{d - |m_0 - m|}{3 \sqrt{\sigma^2 + (m - m_c)^2}} = C_{pk} / \sqrt{1 + ((m - m_c)/\sigma)^2}.$$

Concrètement, cela revient à remplacer dans les formules donnant  $(C_{pk})_i$  et  $(C_{pk})_s$  l'écart-type  $\sigma$  par la valeur  $\sigma'$  et à prendre le minimum des deux expressions.

Pour une valeur fixée de  $\sigma$ , ce nouvel indice est plus petit que  $C_{pk}$ , sauf si  $m$  coïncide avec  $m_c$ , auquel cas les deux indices sont identiques. Par rapport à l'indice  $C_{pk}$ , le terme  $((m - m_c)/\sigma)^2$ , qui intervient au dénominateur, conduit à une réduction supplémentaire de l'indice du fait de l'écart entre la moyenne réelle du procédé et la moyenne cible.

D'autre part,  $C_{pmk}$  est également toujours inférieur ou égal à  $C_{pm}$ .

La figure 3 donne une représentation graphique de  $C_{pk}$  et de  $C_{pmk}$ , pour les mêmes conditions que celles retenues pour la figure 1. On voit immédiatement que les courbes donnant  $C_{pmk}$  sont toujours situées sous les deux droites donnant  $C_{pk}$  en fonction de  $m$ . On note aussi que ces courbes sont tangentes à la droite donnant  $C_{pk}$  pour les valeurs positives de  $m$ .

Les figures 4 et 5 permettent de comparer, pour  $m_c = m_0$ , les évolutions des indices  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  et  $C_{pmk}$  en fonction de  $m$ , d'une part lorsque  $C_p = 1$  et d'autre part lorsque  $C_p = 1,33$ , en considérant, comme précédemment, un intervalle de tolérance de 6 unités centré sur 0. On constate que, pour  $m = 0$  on a bien égalité des quatre indices. Pour  $C_p = 1$  et pour  $m \neq 0$ , l'ordre est le suivant (figure 4) :

$$C_{pmk} < C_{pk} < C_{pm} < C_p.$$



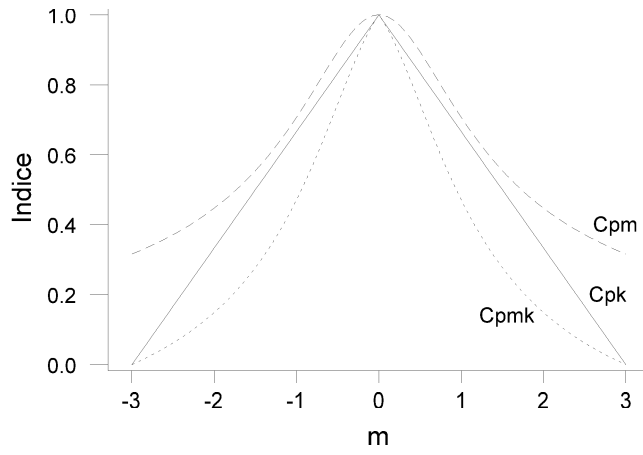


Figure 4. Evolution des indices d'aptitude en fonction de  $m$  lorsque  $m_c = m_0$  et  $C_p = 1$ .

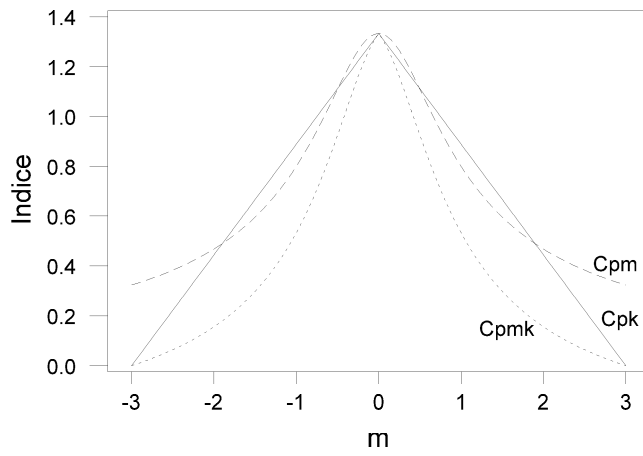


Figure 5. Evolution des indices d'aptitude en fonction de  $m$  lorsque  $m_c = m_0$  et  $C_p = 1,33$ .

Par contre, pour  $C_p = 1,33$  (figure 5) on peut avoir, pour certaines valeurs de  $m$ , une inversion de l'ordre pour  $C_{pk}$  et  $C_{pm}$ .

### 3. INFÉRENCE STATISTIQUE

#### 3.1. Estimations

Au paragraphe précédent, les indices ont été définis en fonction des paramètres  $m$  et  $\sigma$  du procédé de production. Dans la pratique cependant, ceux-ci sont inconnus et doivent donc être estimés à partir de mesures réalisées en cours de production.

Une première solution consiste à sélectionner, au cours d'une courte période de production durant laquelle le procédé est considéré comme étant sous contrôle, un assez grand nombre d'articles et à estimer la moyenne et la variance à partir de ces observations, notées  $x_i$ :

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m})^2 .$$

Cette approche se justifie lorsqu'on souhaite définir l'aptitude d'un procédé à un moment donné, par exemple lors de l'étude des potentialités d'une machine dans le cadre d'une étude préliminaire. Dans ce cas, entre 50 et 100 articles produits les uns à la suite des autres sont examinés afin de vérifier si la machine est adaptée à la production à grande échelle.

Les indices qui sont définis à partir d'un tel écart-type sont des indices d'aptitude à court terme. Ce sont des indicateurs précisant ce que le procédé est capable de faire, pendant un temps très court, lorsque les variations dues au milieu (température, etc.), à la main d'oeuvre, à la matière et aux méthodes ont été minimisées ou éliminées. La variabilité prise en compte est la variabilité due à la machine. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle les indices qui découlent de cette estimation de la variabilité s'appellent parfois *indices d'aptitude machine*.

Lorsqu'il s'agit d'évaluer les caractéristiques du procédé en cours de production, on utilise souvent les données collectées en vue de l'établissement de cartes de contrôle et, dans ce cas, on dispose généralement d'observations réalisées sur des échantillons successifs de 2 à 10 unités.

Lorsque ces échantillons sont de même effectif, la moyenne estimée est égale à la moyenne des moyennes des  $h$  groupes:

$$\hat{m} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \bar{x}_i ,$$

Si les effectifs  $n_i$  sont non constants, des facteurs de pondération sont introduits:

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^h n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^h n_i} .$$

Pour la variabilité, deux objectifs différents peuvent être poursuivis. On peut, en effet, s'intéresser à la variabilité à court terme, définie à partir de la dispersion dans les échantillons, ou, au contraire, s'intéresser à la variabilité à long terme, définie à partir de la dispersion globale.

Dans le premier cas et pour des échantillons d'effectifs constants, une estimation de la variance est donnée par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \hat{\sigma}_i^2.$$

Si les échantillons ne sont pas d'effectifs constants, des facteurs de pondération, fonction de ces effectifs, sont introduits dans les relations. D'autres solutions peuvent encore être envisagées pour estimer la variabilité du procédé. Des informations à ce sujet sont données dans PALM [1996a].

Il faut noter que la variance estimée à partir de la seule variabilité dans les échantillons conduira à des indices reflétant l'aptitude du procédé si on arrivait à éliminer toutes les causes de variation assignables [GUNTER, 1989b].

Si l'objectif est de définir des indices d'aptitude à long terme, qui reflètent davantage la qualité de la production, l'estimation globale de la variance est obtenue à partir de la somme des carrés des écarts totale de l'ensemble des données disponibles sur une période donnée.

Disposant des estimations de la moyenne et de la variance du procédé, on peut obtenir des estimations des différents indices d'aptitude définis au paragraphe 2, en remplaçant, dans les formules, les valeurs de  $m$  et  $\sigma$  par les estimations correspondantes  $\hat{m}$  et  $\hat{\sigma}$ .

Pour l'estimation des indices  $C_{pm}$  et  $C_{pmk}$ , on utilise l'estimation suivante de  $\sigma'^2$ :

$$\hat{\sigma}'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_c)^2,$$

ou encore :

$$\hat{\sigma}'^2 = \hat{\sigma}^2 + (\hat{m} - m_c)^2.$$

### 3.2. Distributions d'échantillonnage et limites de confiance

Les distributions d'échantillonnage des estimateurs des indices d'aptitude ont été étudiées par plusieurs auteurs [BISSEL, 1990; KOTZ *et al.*, 1993; PEARN *et al.*, 1992], lorsque la distribution d'échantillonnage de la variance est liée aux distributions  $\chi^2$ , ce qui est le cas pour des procédés décrits par une variable normale. De ces études, il résulte que les estimateurs sont biaisés, mais que ce biais diminue lorsque le nombre de degrés de liberté augmente.

Ainsi, pour l'indice  $C_p$ , l'espérance mathématique et la variance de l'estimateur sont à peu près égales à:

$$E(\hat{C}_p) \cong \frac{1}{(1 - (3/4q))} C_p \quad \text{et} \quad v(\hat{C}_p) \cong \frac{q(8q + 9)}{(q - 2)(4q - 3)^2} C_p^2,$$

Tableau 1. Espérance mathématique et erreur-standard de l'estimateur  $\widehat{C}_p$ , en fonction de  $n$  lorsque  $q = n - 1$ . Ces valeurs doivent être multipliées par  $C_p$ .

$n$	Espérance mathématique	Erreur-standard
5	1,25	0,66
10	1,09	0,30
15	1,06	0,22
20	1,04	0,18
25	1,03	0,16
50	1,02	0,11
100	1,01	0,07
1000	1,00	0,02

$q$  étant le nombre de degrés de liberté de la variance estimée. Ces relations approchées sont valables pour  $q \geq 15$ . Des relations plus complexes existent lorsque  $q < 15$  [KOTZ et JOHNSON, 1993].

A titre d'illustration, le tableau 1 donne, pour  $C_p = 1$ , l'espérance mathématique et l'erreur-standard pour différentes valeurs de  $n$ , en considérant que  $q = n - 1$ . Pour d'autres valeurs de  $C_p$ , il suffit de multiplier les valeurs par  $C_p$ . On constate que le biais est inférieur à 5 % lorsque le nombre de degrés de liberté est supérieur à 15 ou 20. Il faut noter aussi qu'un estimateur non biaisé de  $C_p$  peut être obtenu, en multipliant  $\widehat{C}_p$  par l'inverse des espérances mathématiques données dans le tableau 1. Enfin, on constate aussi que pour  $q < 50$  l'erreur-standard est importante, puisqu'elle dépasse 10 %.

Pour obtenir des limites de confiance de l'indice  $C_p$ , on peut calculer d'abord les limites de confiance de l'écart-type,  $s_1$  et  $s_2$ , en utilisant les distributions  $\chi^2$  :

$$s_1 = \sqrt{\frac{q \widehat{\sigma}^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}} \quad \text{et} \quad s_2 = \sqrt{\frac{q \widehat{\sigma}^2}{\chi_{\alpha/2}^2}},$$

$\chi_{1-\alpha/2}^2$  et  $\chi_{\alpha/2}^2$  correspondant respectivement aux pourcentiles  $1 - \alpha/2$  et  $\alpha/2$  de la distribution  $\chi^2$  à  $q$  degrés de liberté. On en déduit alors les limites de confiance de l'indice en remplaçant successivement, dans la définition de  $C_p$ , la valeur  $\sigma$  par  $s_1$  et par  $s_2$  [BISSEL, 1990]:

$$\widehat{C}_p \sqrt{\chi_{\alpha/2}^2/q} \quad \text{et} \quad \widehat{C}_p \sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2/q}.$$

KOTZ et JOHNSON [1993] et KOTZ *et al.* [1993] se sont intéressés à la distribution d'échantillonnage de  $\widehat{C}_{pk}$ ; ils donnent notamment des valeurs numériques de l'espérance mathématique et de la variance de cette distribution, pour diverses situations caractérisées par la taille de l'échantillon, le décentrage et la valeur de  $C_p$ . L'examen des valeurs fournies par ces auteurs montrent que l'erreur-standard reste importante, même pour des échantillons de taille relativement

grande. A titre d'illustration, considérons un procédé dont l'indice  $C_p$  est égal à l'unité et un effectif de 40. Si l'écart entre la moyenne et le centre de l'intervalle de tolérance est égal à 0,  $C_{pk}$  vaut 1; dans ce cas, l'espérance mathématique de la distribution de  $\hat{C}_{pk}$  vaut 0,98 et l'erreur-standard vaut 0,12. Si l'écart entre la moyenne et le centre de l'intervalle est égal à une fois l'écart-type du procédé,  $C_{pk}$  vaut 0,67; l'espérance mathématique de  $\hat{C}_{pk}$  est égale à 0,68 et l'erreur-standard est égale à 0,10.

Plusieurs solutions pour le calcul des limites de confiance ont été comparées par KUSHLER et HURLEY [1992]. Leur conclusion est que la relation proposée par BISSEL [1990] présente l'avantage d'être à la fois facile à calculer et suffisamment précise:

$$\hat{C}_{pk} \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{9n} + \frac{\hat{C}_{pk}^2}{2q}},$$

$u_{1-\alpha/2}$  étant le pourcentile  $1 - \alpha/2$  de la variable normale réduite,  $n$  étant le nombre d'observations permettant d'estimer  $m$  et  $\sigma$  et  $q$  étant le nombre de degrés de liberté associé à l'estimation de  $\sigma$ .

Des informations relatives à la distribution d'échantillonnage de  $\hat{C}_{pm}$  ainsi que des tableaux des valeurs de l'espérance mathématique et de l'erreur-standard pour différentes situations sont données par KOTZ et JOHNSON [1993].

A titre d'illustration, reprenons le procédé d'indice  $C_p = 1$  et un effectif de 40. Si l'écart entre la moyenne du procédé et la valeur cible est nulle,  $C_{pm}$  est égal à l'unité; l'espérance mathématique de  $\hat{C}_{pm}$  vaut 1,02 et l'erreur standard vaut 0,12. Si cet écart est égal à l'écart-type du procédé,  $C_{pm}$  vaut 0,71, l'espérance mathématique est égale à 0,72 et l'erreur-standard est égale à 0,07. Les commentaires relatifs à l'erreur-standard de l'indice  $C_p$  restent valables pour l'indice  $C_{pm}$ : l'erreur-standard est importante, même pour des échantillons de taille élevée.

KUSHLER et HURLEY [1992] ont comparé plusieurs alternatives pour le calcul des limites de confiance de  $C_{pm}$ . Ils considèrent qu'une bonne approximation est obtenue par la méthode de BOYLES [1991] qui propose les relations suivantes :

$$\hat{C}_{pm} \sqrt{\chi_{\alpha/2}^2/r} \quad \text{et} \quad \hat{C}_{pm} \sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2/r},$$

$r$  étant le nombre de degrés de liberté à prendre en considération:

$$r = \frac{n(1 + \delta^2)^2}{1 + 2\delta^2} \quad \text{avec} \quad \delta^2 = \left( \frac{\bar{x} - m_c}{\hat{\sigma}} \right)^2.$$

Si  $r$  est suffisamment grand, on peut utiliser l'approximation normale:

$$\hat{C}_{pm}(1 \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{1/2r}).$$

Enfin, des formules relatives à la moyenne et à la variance de la distribution d'échantillonnage de l'indice  $C_{pmk}$  ont été proposées par PEARN *et al.* [1992] et

des tableaux de valeurs des espérances mathématiques et des erreurs-standards sont données par KOTZ et JOHNSON [1993]. Ces auteurs ne donnent cependant pas de méthode pour le calcul des limites de confiance de l'indice.

Les formules relatives aux estimations et au calcul des limites de confiance reprises ci-dessus sont regroupées dans le tableau donné en annexe.

### 3.3. Importance de la normalité du procédé

Les informations relatives aux distributions d'échantillonnage données au paragraphe 3.2 reposent sur l'hypothèse de normalité du procédé. Pour le calcul des limites de confiance des indices  $C_p$ ,  $C_{pk}$  et  $C_{pm}$ , FRANKLIN et WASSERMAN [1992] ont proposé la méthode de rééchantillonnage, dénommée *bootstrap*, qui peut s'utiliser en l'absence de normalité.

Le principe de la méthode est d'effectuer, au sein d'un échantillon d'effectif  $n$ , un grand nombre d'échantillonnages indépendants les uns des autres, de même effectif  $n$  et réalisés avec remise. Ensuite, pour chacun de ces échantillons, on calcule la valeur du paramètre considéré ( $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  ou  $C_{pmk}$ ). La distribution observée du paramètre étudié permet alors de déterminer les limites de confiance [DAGNELIE, 1998a].

FRANKLIN et WASSERMAN [1992] ont comparé trois méthodes différentes de calcul des limites de confiance des indices à partir de la distribution d'échantillonnage obtenue par *bootstrap*. Ils retiennent finalement la relation suivante:

$$\hat{C} \pm u_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_c.$$

Dans cette relation,  $\hat{C}$  est la valeur estimée de l'indice ( $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  ou  $C_{pmk}$ ) par les méthodes discutées au paragraphe 3.1,  $u_{1-\alpha/2}$  est le pourcentile  $1 - \alpha/2$  de la variable normale réduite et  $\hat{\sigma}_c$  est l'écart-type estimé de la distribution des indices  $\hat{C}_{(i)}$ , obtenu pour 1000 échantillons *bootstrap*:

$$\hat{\sigma}_c = \sqrt{\frac{1}{999} \sum_{i=1}^{1000} \left[ \hat{C}_{(i)} - \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \hat{C}_{(i)} \right]^2}.$$

Cette solution se base sur le caractère approximativement normal de la distribution d'échantillonnage de l'indice étudié.

Pour des procédés caractérisés par des distributions normales, ces auteurs ont montré que la méthode de rééchantillonnage conduit à des limites de confiance comparables à celles obtenues par les méthodes présentées au paragraphe 3.2. Par contre, pour des distributions non-normales, les méthodes du paragraphe 3.2, peuvent donner des intervalles de confiance trop réduits, même dans le cas d'effectifs relativement élevés. Dans ces situations, la méthode de rééchantillonnage conduit à des résultats meilleurs.

Indépendamment des problèmes liés à l'inférence statistique, on peut s'interroger sur l'intérêt du calcul des indices d'aptitude en présence de procédés nettement non normaux. En effet, la non-normalité rend difficile l'interprétation

des indices, comme l'a clairement montré GUNTER [1989a] pour l'indice  $C_{pk}$ , car des indices identiques peuvent correspondre à des proportions d'articles non conformes très différentes selon la nature de la distribution. Et le recours à une transformation de variable dans un but de normalisation, comme le suggère l'auteur, peut conduire à une modification sensible de l'indice d'aptitude.

Compte tenu des conséquences de la non-normalité sur l'interprétation des indices et sur les méthodes d'inférence statistique, le praticien a intérêt à vérifier le caractère normal du procédé. Il dispose pour cela de méthodes graphiques et de tests statistiques [DAGNELIE, 1998b].

Parmi les méthodes graphiques, on peut citer la comparaison de l'histogramme normé et de la fonction de densité de probabilité normale, la comparaison du polygone de fréquences relatives cumulées et de la fonction de répartition de la variable normale, l'établissement du diagramme des proportions observées et des probabilités théoriques<sup>7</sup> ou du diagramme de dispersion des quantiles observés et des quantiles théoriques<sup>8</sup>, appelé encore diagramme des scores normaux<sup>9</sup>.

Le diagramme des proportions observées et des probabilités théoriques permet de comparer le polygone de fréquences relatives cumulées (ou fonction de répartition empirique) et la fonction de répartition théorique. Les deux axes sont donc gradués de 0 à 1 et, lorsqu'il y a concordance entre ces deux fonctions, les points correspondant à chacune des observations se situent sur ou à proximité de la droite passant par l'origine et de pente unitaire. Pour construire ce type de graphique, il est nécessaire de préciser la valeur de la moyenne et de l'écart-type de la distribution normale, par exemple en estimant ces paramètres à partir des données observées. Dans le cas d'une différence de moyennes entre la distribution observée et la distribution théorique, le diagramme n'est pas linéaire.

Le diagramme des quantiles observés et théoriques permet de comparer les valeurs observées d'une variable avec les quantiles de la distribution normale. Lorsqu'il y a concordance, les points du graphique se situent sur ou à proximité d'une droite. Contrairement au diagramme précédent, le diagramme des quantiles ne nécessite pas la connaissance de la moyenne et de la variance de la distribution théorique. Ce diagramme fait aussi mieux ressortir que le précédent la présence de données anormales vers les extrémités de la distribution. On notera aussi qu'un diagramme tout à fait similaire est obtenu en remplaçant les quantiles théoriques par les valeurs correspondantes de la fonction de répartition, ce qui revient simplement à changer les graduations d'un axe du graphique.

Des informations concernant ces graphiques sont données dans SAS [1995] et dans SIEVERS [1986].

La normalité du procédé peut également être vérifiée par les tests classiques de normalité, parmi lesquels le test de SHAPIRO et WILK [1965] est considéré comme un des plus performants [ROYSTON, 1982; 1988]. Ce test est disponible

---

7. En anglais : *p-p plot, probability-probability plot.*

8. En anglais : *Q-Q plot, quantile-quantile plot.*

9. En anglais : *normal probability plot.*

dans le logiciel SAS, de même que le test  $\chi^2$  de PEARSON, le test de KOLMOGOROV, le test d'ANDERSON et DARLING, le test de KRAMER-VON MISES [SAS, 1995].

## 4. EXEMPLE

### 4.1. Données

Pour illustrer les notions présentées dans les paragraphes précédents, des données ont été simulées sur la base des paramètres de position et de dispersion observés sur des données réelles par HARE [1988].

Cet auteur a réalisé une expérience destinée à étudier différents facteurs influençant la variabilité de la quantité d'un mélange utilisé lors du remplissage de sachets de potage en poudre.

Au cours de cette expérience, des échantillons de cinq paquets de poudre ont été prélevés toutes les 15 minutes. Dans les conditions normales de production les variances entre les échantillons et dans les échantillons étaient de 2,37 et 1,08 et l'ordre de grandeur du poids moyen était de 29 grammes.

A partir de ces informations, nous avons généré 50 échantillons de cinq données, sur la base du modèle suivant:

$$x_{ij} = 29 + u_i + v_{ij} \quad (i = 1; \dots, 50; j = 1, \dots, 5),$$

$u_i$  et  $v_{ij}$  étant des valeurs de variables normales de moyennes nulles et d'écart-types égaux à 1,54 pour  $u_i$  et à 1,04 pour  $v_{ij}$ .

Nous avons également considéré que les limites de tolérance sont égales à 24 et 33 et que la moyenne cible est égale à 30 grammes.

Le fait que la moyenne cible ne soit pas située au centre de l'intervalle de tolérance peut se justifier si on considère qu'un excès de poudre conduit plus rapidement à une détérioration du goût qu'un déficit de poudre. Quant au choix d'une moyenne du procédé différente à la fois de la valeur cible et du point central, elle pourrait être due à un choix délibéré en vue d'une économie de poudre, par exemple, ou être liée à une forme de dérèglement de l'appareil. Pour l'exemple considéré, ce choix se justifie par le souhait d'obtenir des valeurs différentes pour chacun des quatre indices d'aptitude.

Lors de la génération des données, nous avons enregistré les valeurs de  $u_i$  et  $v_{ij}$ , ce qui nous permettra très facilement, par la suite, d'étudier l'effet de la modification de la variance entre échantillons et de la variance dans les échantillons (paragraphe 4.4). Dans un premier temps, nous ne tiendrons pas compte des deux sources de variation, mais nous considérerons ces 250 observations comme des observations successives et indépendantes.



## 4.2. Estimation des indices

Une analyse préliminaire des 250 observations a montré que la moyenne générale de la série est de 28,894 et que l'écart-type estimé est de 1,937. D'autre part, la somme des carrés des écarts par rapport à la valeur cible  $m_c = 30$  vaut 1.239,7. On a donc:

$$\hat{\sigma}' = \sqrt{\frac{1.239,7}{250}} = 2,2268.$$

A partir de ces paramètres, on peut estimer les différents indices d'aptitude définis au paragraphe 2 et calculer les limites de confiance par les formules données au paragraphe 3.2. On trouve:

$$m_0 = (33 + 24)/2 = 28,5,$$

$$d = (33 - 24)/2 = 4,5,$$

$$\hat{C}_p = \frac{4,5}{(3)(1,937)} = 0,774,$$

$$\hat{k} = |28,5 - 28,894|/4,5 = 0,088,$$

$$\hat{C}_{pk} = (1 - 0,088)0,774 = 0,706,$$

$$\hat{C}_{pm} = \frac{4,5}{(3)(2,2268)} = 0,674,$$

$$\hat{C}_{pmk} = \frac{4,5 - |28,5 - 28,894|}{(3)(2,2268)} = 0,615.$$

Les limites de confiance de l'écart-type sont égales à:

$$s_1 = \sqrt{\frac{(249)(1,937)^2}{294,6}} = 1,781 \quad \text{et} \quad s_2 = \sqrt{\frac{(249)(1,937)^2}{207,2}} = 2,123,$$

et les limites de confiance de  $C_p$  valent donc:

$$C_{p1} = \frac{4,5}{(3)(2,123)} = 0,707 \quad \text{et} \quad C_{p2} = \frac{4,5}{(3)(1,781)} = 0,842.$$

Les limites de confiance de  $C_{pk}$  sont égales à:

$$0,706 \pm 1,96 \sqrt{\frac{1}{(9)(250)} + \frac{(0,706)^2}{2(249)}},$$

soit 0,631 et 0,781.

Pour calculer les limites de confiance de  $C_{pm}$  on détermine d'abord les valeurs de  $\delta^2$  et de  $r$ :

$$\delta^2 = \left( \frac{28,894 - 30}{1,937} \right)^2 = 0,326 \quad \text{et} \quad r = \frac{250(1 + 0,326)^2}{1 + (2)(0,326)} = 266,1$$

et les limites de confiance sont égales à:

$$0,674\sqrt{\frac{222,7}{266,1}} = 0,617 \quad \text{et} \quad 0,674\sqrt{\frac{313,1}{266,1}} = 0,731.$$

Pour cet indice, on peut remarquer que l'approximation normale :

$$0,674(1 \pm 1,96\sqrt{1/(2)(266,1)}),$$

conduit aux mêmes limites que l'utilisation de la distribution  $\chi^2$ , du fait du nombre élevé de degrés de liberté.

Rappelons que pour  $C_{pmk}$ , nous ne disposons pas de formule pour le calcul des limites de confiance.

### 4.3. Analyse de l'aptitude du procédé avec Minitab

La figure 6 a été obtenue par le logiciel Minitab, en utilisant la macroprocédure %CAPA [X, 1994].

Cette figure donne tout d'abord l'histogramme normé des 250 observations, avec, en surimposition, la distribution normale, ce qui permet d'apprécier visuellement la normalité de la distribution. Le graphique indique aussi la tolérance inférieure et la tolérance supérieure.

Le tableau sous l'histogramme reprend, dans la première colonne, les différents indices d'aptitude. On retrouve bien, pour  $C_p$ ,  $C_{pk}$  et  $C_{pm}$  les valeurs calculées ci-dessus. Ce tableau donne encore les indices  $(C_{pk})_i$  et  $(C_{pk})_s$ , notés CPL et CPU, qui ont été définis au paragraphe 2.3. Par contre, l'indice  $C_{pmk}$  n'est pas donné et aucune information quant aux limites de confiance des indices n'est fournie par ce logiciel.

La deuxième colonne du tableau donne la moyenne cible (notée Targ), la tolérance supérieure et la tolérance inférieure (USL et LSL), l'indice  $k$  et l'effectif. La troisième colonne donne la moyenne estimée  $\hat{m}$ , les limites du procédé,  $\hat{m} \pm 3\hat{\sigma}$ , et l'écart-type estimé  $\hat{\sigma}$  (noté s). La quatrième colonne donne les pourcentages attendus et observés de valeurs supérieures à  $t_s$  et inférieures à  $t_i$ . Ces pourcentages sont calculés sous l'hypothèse d'un procédé normal de moyenne  $\hat{m}$  et d'écart-type  $\hat{\sigma}$ . Enfin, la dernière colonne reprend les mêmes caractéristiques, en les exprimant en parts par million, c'est-à-dire en multipliant par 10.000 les valeurs de la quatrième colonne.

La figure 7 a été obtenue par la macroprocédure %SIXPACK de Minitab. Cette procédure donne, de façon automatique, les six graphiques suivants:

- la carte de contrôle des moyennes,

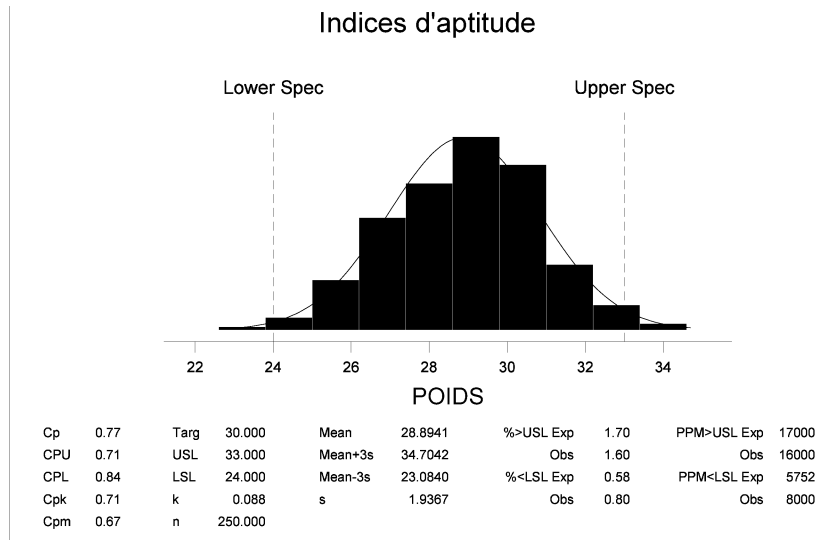


Figure 6. Résultats de l'exécution de la macroprocédure %CAPA de Minitab.

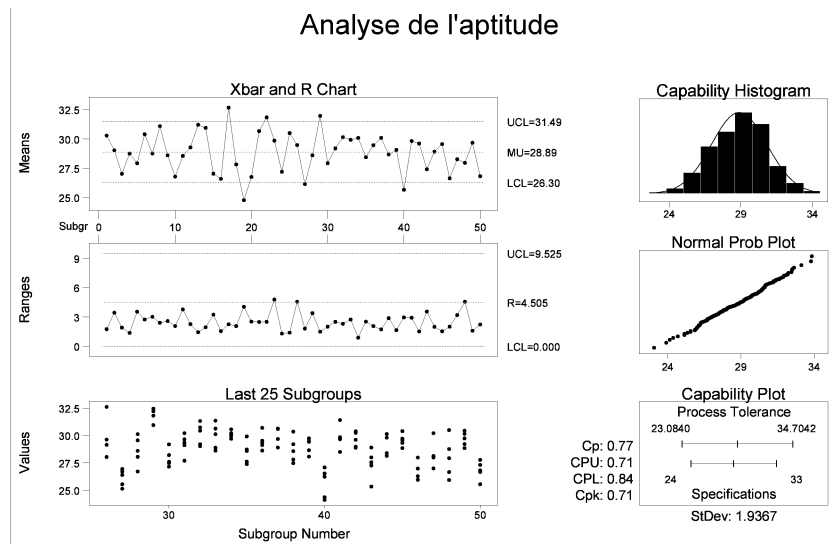


Figure 7. Résultats de l'exécution de la macroprocédure %SIXPACK de Minitab.

- la carte de controle des amplitudes,
- le graphique des valeurs individuelles relatives aux 25 derniers échantillons prélevés,
- l'histogramme des 250 observations,
- le graphique des scores normaux,
- le graphique de l'aptitude du procédé.

On notera que, pour la construction des trois premiers graphiques, le logiciel tient compte de la répartition des 250 observations en sous-groupes de 5 unités, alors que pour les trois derniers graphiques il n'en tient pas compte.

Le principe de l'établissement des cartes de contrôle des moyennes et des amplitudes a été décrit précédemment [PALM, 1996a]. Pour la moyenne, les limites de contrôle sont situées en :

$$\bar{x} \pm 3 \hat{\sigma} / \sqrt{n} = 28,89 \pm (3)(1,937) / \sqrt{5},$$

soit, aux erreurs d'arrondis près, en 26,30 et 31,49, la ligne centrale étant en 28,89.

Pour l'amplitude, on a :

$$d_2 \hat{\sigma} \pm 3 d_3 \hat{\sigma} = (2,326)(1,937) \pm (3)(0,864)(1,937),$$

soit, approximativement,  $-0,5$  et  $9,5$ . La limite inférieure étant négative, on la remplace par zéro. Pour ce graphique, la ligne centrale est en  $d_2 \hat{\sigma}$ , soit en 4,5. Rappelons que les valeurs de  $d_2$  et  $d_3$  utilisées dans les formules ci-dessus sont fonction de la taille des échantillons et correspondent, respectivement, à l'espérance mathématique et à l'erreur-standard de la distribution d'échantillonnage de l'amplitude, lorsqu'on prélève un échantillon de  $n$  observations indépendantes dans une population normale réduite [PALM, 1996a].

On constate que six moyennes sur 50 sont hors des limites de contrôle et que 47 amplitudes sur 50 sont situées sous la ligne de contrôle de la carte des amplitudes. Cette situation résulte naturellement de la variabilité entre échantillons, qui est plus importante que la variabilité dans les échantillons (paragraphe 4.1), comme le montre d'ailleurs clairement le graphique des 25 derniers échantillons. Si on avait utilisé comme écart-type une estimation basée sur la variabilité dans les échantillons, le nombre de moyennes situées hors des limites de contrôle serait encore bien plus grand; par contre les amplitudes auraient été réparties de part et d'autre de la ligne centrale. On constaterait donc bien que le procédé n'est pas sous contrôle en ce qui concerne la moyenne mais qu'il est sous contrôle en ce qui concerne la dispersion.

Pour les 250 observations considérées, le graphique des scores normaux est approximativement linéaire et ne permet pas de mettre en cause l'hypothèse de normalité.

Le graphique de l'aptitude du procédé représente simultanément l'intervalle  $\hat{m} \pm 3 \hat{\sigma}$  et l'intervalle  $t_s - t_i$  et reprend les différents indices donnés dans la figure 4.

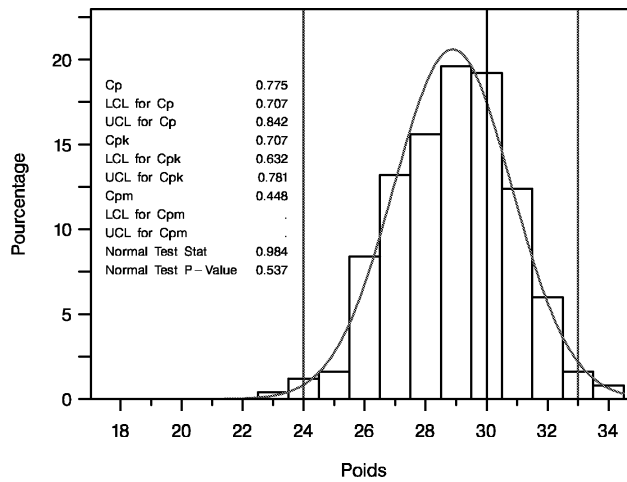


Figure 8. Histogramme et indices d'aptitude obtenus par la procédure CAPABILITY de SAS.

#### 4.4. Analyse de l'aptitude du procédé avec SAS

Les options offertes par la procédure CAPABILITY sont nombreuses et des informations à ce sujet peuvent être trouvées dans la documentation SAS [SAS, 1991, 1995].

La figure 8 reprend l'histogramme des données et la courbe normale ajustée ainsi que différents indices d'aptitude avec les limites de confiance correspondantes.

Pour les indices  $C_p$  et  $C_{pk}$ , on retrouve les estimations ponctuelles et les limites de confiance qui ont été calculées au paragraphe 4.2. Par contre, pour l'indice  $C_{pm}$ , le résultat ne correspond pas à la valeur estimée au paragraphe 4.2 car SAS utilise l'indice  $C_{pm}^*$  défini au paragraphe 2.4:

$$\hat{C}_{pm}^* = \frac{4,5 - |28,5 - 30|}{(3)(2,2268)} = 0,449,$$

et ne donne pas de limites de confiance lorsque  $m_0$  est différent de  $m_c$ , ce qui est le cas dans cet exemple.

La figure 8 reprend également la statistique de SHAPIRO-WILK ( $W = 0,984$ ) et la probabilité associée ( $p = 0,537$ ). Cette probabilité confirme le caractère normal de la distribution.

Signalons encore que les graphiques suivants sont également proposés par SAS:

- le polygone des fréquences cumulées, dénommé *CDF plot*,

- le diagramme des proportions observées en fonction des probabilités théoriques, dénommé *P-P plot*,
- le diagramme des quantiles observés en fonction des quantiles théoriques, dénommé *Q-Q plot*,
- le diagramme des quantiles observés en fonction des probabilités théoriques, dénommé *Probability plot*.

Ces graphiques ne sont pas repris ici; ils confirmeraient le caractère normal de la distribution des 250 observations.

#### 4.5. Amélioration du procédé

Bien que l'exemple résulte de données simulées, quelques commentaires peuvent être suggérés à l'issue des calculs réalisés.

Quel que soit l'indice d'aptitude retenu, on constate que les valeurs sont faibles et que le procédé donne lieu à une trop grande proportion de sachets dont le poids est hors des limites de tolérance. Cette proportion est, en effet, supérieure à 2 %. Pour améliorer la situation, il faudrait réduire la variabilité du procédé, et plus particulièrement la variabilité entre échantillons.

Et c'est dans ce but que HARE [1988] a réalisé l'expérience destinée à comparer l'incidence de différents facteurs sur la variance des poids des sachets. Pour la meilleure combinaison de facteurs étudiés, il a obtenu une variance entre échantillons de 0,22 et une variance dans les échantillons de 0,17, soit une division par 10,8 et 6,4 des variances observées dans les conditions standards de production.

Pour vérifier à quel ordre de grandeur on pourrait s'attendre pour les différents indices d'aptitude dans l'hypothèse où on aurait réduit effectivement les variances dans de telles proportions, nous avons repris les valeurs  $u_i$  et  $v_{ij}$  utilisées pour la génération des 250 observations (paragraphe 4.1) et nous les avons divisées respectivement par 3,28 et 2,52, avant de recalculer une nouvelle série d'observations.

Ces observations ont alors été traitées par la macroprocédure %CAPA, et les résultats sont repris dans la figure 9. La réduction de la variabilité a comme effet de multiplier par trois les valeurs des indices d'aptitude  $C_p$  et  $C_{pk}$  et par deux environ l'indice  $C_{pm}$ . Par contre, l'indice  $k$  n'est guère modifié, puisqu'il ne dépend pas de  $\hat{\sigma}$ .

Les valeurs élevées des indices d'aptitude indiquent que le respect des tolérances ne poserait pas de problème. On constate, en effet, que les proportions observées et estimées de valeurs hors des limites de tolérance sont nulles. Le procédé modifié serait donc tout à fait satisfaisant, compte tenu des exigences.

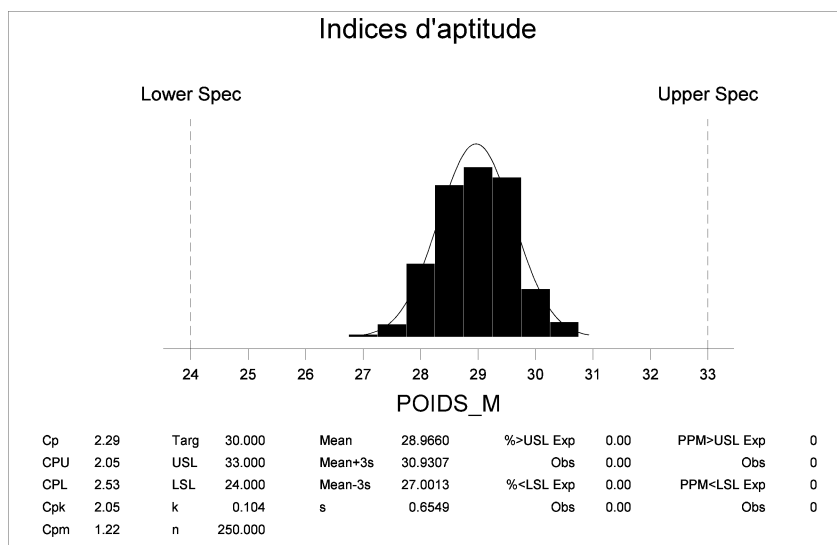


Figure 9. Analyse de l'aptitude du procédé modifié.

## 5. QUELQUES REMARQUES FINALES

Au paragraphe 2, nous avons défini plusieurs indices d'aptitude des procédés, en précisant, dans la mesure du possible, les relations entre les différentes définitions. L'intérêt de ces indices réside dans le fait qu'ils tentent de résumer en une seule valeur numérique plusieurs caractéristiques des procédés de production.

Bien entendu, un seul paramètre ne peut pas décrire de façon exhaustive toutes les caractéristiques du procédé. Un histogramme des données constituera souvent un complément utile, notamment pour visualiser le caractère approximativement normal de la distribution car l'interprétation des indices dans le cas de données non normales est difficile.

Nous avons vu également que ces indices ne sont pas directement liés à la proportion d'articles non conformes, sauf dans le cas de l'indice  $C_p$  pour autant que la moyenne du procédé corresponde au centre de l'intervalle de tolérance.

Il faut noter aussi, que le calcul d'indices d'aptitude d'un procédé ne présente guère d'intérêt si celui-ci n'est pas sous contrôle [RODRIGUEZ, 1992]. Il est donc utile, en pratique, de vérifier d'abord si le procédé est stable et si les causes de variation assignables ont été éliminées. C'est pour cette raison que l'écart-type a été estimé, dans l'exemple traité au paragraphe 4, en négligeant la répartition des observations en groupes.

Enfin, signalons encore que différentes extensions ont été apportées aux indices d'aptitude présentés ci-dessus, notamment, par la définition d'indices robustes et d'indices multivariés [KOTZ et JOHNSON, 1993; PEARN *et al.*, 1992; RODRIGUEZ, 1992; TAAM *et al.*, 1993].

## 6. BIBLIOGRAPHIE

- BHOTE K.R. [1991]. *World class quality: using design of experiments to make it happen*. New York, AMACOM, 224 p.
- BISSEL A.F. [1990]. How reliable is your capability index? *Appl. Stat.* 39, 331-340.
- BOYLES R.A. [1991]. The Taguchi capability index. *J. Qual. Technol.* 23, 17-26.
- CAVÉ R. [1966]. *Le contrôle statistique des fabrications*. Paris, Eyrolles, 543 p.
- DAGNELIE P. [1998a]. *Statistique théorique et appliquée. Tome 1: statistique descriptive et bases de l'inférence statistique*. Bruxelles, De Boeck et Larcier, 508 p.
- DAGNELIE P. [1998b]. *Statistique théorique et appliquée. Tome 2: inférence statistique à une et à deux dimensions*. Bruxelles, De Boeck et Larcier, 659 p.
- FRANKLIN L.A., WASSERMAN G. [1992]. Bootstrap lower confidence limits for capability indices. *J. Qual. Technol.* 24, 196-210.
- GRANT E.L., LEAVENWORTH R.S. [1980]. *Statistical quality control*. New York, Mc Graw-Hill, 684 p.
- GUNTER B. [1989a]. The use and abuse of  $C_{pk}$ , part 2. *Quality progress* 22 (3), 108-109.
- GUNTER B. [1989b]. The use and abuse of  $C_{pk}$ , part 3. *Quality progress* 22 (5), 79-80.
- HARE L. [1988]. In the soup: a case study to identify contributors to filling variability. *J. Qual. Technol.* 20, 36-43.
- KANE V.E. [1986]. Process capability indices. *J. Qual. Technol.* 18, 41-52.
- KOTZ S., PEARN W.L., JOHNSON N.L. [1993]. Some process capability indices are more reliable than one might think. *Appl. Statist.* 42, 55-62.
- KOTZ S., JOHNSON N.L. [1993]. *Process capability indices*. New York, Chapman et Hall, 212 p.
- KUSHLER R.H., HURLEY P. [1992]. Confidence bounds for capability indices. *J. Qual. Technol.* 24, 188-195.
- MONTGOMERY D.C. [1991]. *Introduction to statistical quality control*. New York, Wiley, 674 p.
- NELSON L.S. [1982]. Control charts. In: KOTZ S., JOHNSON N.L. (edit.). *Encyclopedia of statistical sciences* (vol. 2). New York, Wiley, 176-183.
- PALM R. [1996a]. Cartes de contrôle: les cartes de SHEWHART. *Note Stat. Inform.* (Gembloux) 96/2, 41 p.



- PALM R. [1996b]. Cartes de contrôle: combinaison de résultats et données corréliées ou multivariées. *Note Stat. Inform.* (Gembloux) 96/3, 37 p.
- PEARN W.L., KOTZ S., JOHNSON N.L. [1992]. Distributional and inferential properties of process capability indices. *J. Qual. Technol.* 24, 216-231.
- PILLET M. [1995]. *Appliquer la maîtrise statistique des procédés (MSP/SPC)*. Paris, Editions d'organisation, 336 p.
- RODRIGUEZ R.N. [1992]. Recent developments in process capability analysis. *J. Qual. Technol.* 24, 176-187.
- ROYSTON J.J. [1982]. An extension of SHAPIRO and WILK W test for normality to large samples. *Appl. Stat.* 31, 115-124.
- ROYSTON J.J. [1988]. SHAPIRO-WILK W statistics. In: KOTZ S., JOHNSON N.L. (edit.). *Encyclopedia of statistical sciences* (vol. 8). New York, Wiley, 430-431.
- SAS INSTITUTE INC. [1995]. *SAS/QC<sup>R</sup> Software: Usage and reference, Version 6* (vol. 1). Cary NC: SAS Institute Inc. 847 p.
- SAS INSTITUTE INC. [1991]. *SAS/QC<sup>R</sup> Software: SQC Menu System, Version 6*. Cary NC: SAS Institute Inc. 126 p.
- SHAPIRO S.S., WILK M.B. [1965]. An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika* 52, 591-611.
- SIEVERS G.L. [1986]. Probability plotting. In: KOTZ S., JOHNSON N.L. (edit.). *Encyclopedia of statistical sciences* (vol. 7). New York, Wiley, 232-237.
- TAAM W., SUBBAIAH P., LIDDY J.W. [1993]. A note on multivariate capability indices. *J. Appl. Stat.* 20, 339-351.
- X. [1994]. *Minitab reference manual, release 10 for windows*. PA State College, Minitab, 1047 p.
- WHEELER D.J., CHAMBERS D.S. [1992]. *Understanding statistical process control*. Knoxville, TE, SPC Press Inc., 406 p.
- WHEELER D.J. [1995]. *Advanced topics in statistical process control*. Knoxville, TE, SPC Press Inc., 470 p.

## ANNEXE

### Estimation et limites de confiance des indices d'aptitude

$t_i$  et  $t_s$ : limites de tolérance

$m_0 = (t_s + t_i) / 2$ : centre de l'intervalle de tolérance

$d = (t_s - t_i) / 2$ : demi-longueur de l'intervalle de tolérance

$m_c$ : valeur cible

$\bar{x}$ : moyenne observée

$\hat{\sigma}$ : écart-type estimé du procédé

$q$ : nombre de degrés de liberté associé à l'écart-type estimé

$$\hat{\sigma}' = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_c)^2}$$

$$\delta = (\bar{x} - m_c) / \hat{\sigma}$$

$$r = n (1 + \delta^2)^2 / (1 + 2\delta^2)$$

Indice	Estimation	Limites de confiance
$C_p$	$\frac{d}{3\hat{\sigma}}$	$\hat{C}_p \sqrt{\chi_{\alpha/2}^2/q}$ et $\hat{C}_p \sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2/q}$
$C_{pk}$	$\frac{d -  m_0 - \bar{x} }{3\hat{\sigma}}$	$\hat{C}_{pk} \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{9n} + \frac{\hat{C}_{pk}^2}{q}}$
$C_{pm}$	$\frac{d}{3\hat{\sigma}'}$	$\hat{C}_{pm} \sqrt{\chi_{\alpha/2}^2/r}$ et $\hat{C}_{pm} \sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2/r}$ ou $\hat{C}_{pm} (1 \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{1/2r})$
$C_{pm}^*$	$\frac{d -  m_0 - m_c }{3\hat{\sigma}'}$	—
$C_{pmk}$	$\frac{d -  m_0 - \bar{x} }{3\hat{\sigma}'}$	—