Les espaces de suites S^ν

Propriétés topologiques, localement convexes et de prévalence

Céline Esser, 2MM

Université de Liège

Juin 2011

Plan

- Etude du spectre des singularités d'un signal périodique f à partir de formalismes multifractals.

- Etude du spectre des singularités d'un signal périodique f à partir de formalismes multifractals.
- Par l'intermédiaire de ses coefficients d'ondelettes

$$c_{j,k} = 2^j \int_{[0,1]} f(x)\psi_{j,k}(x)dx \ , \ j \in \mathbb{N}, k \in \left\{0, ..., 2^j - 1\right\}.$$

- Etude du spectre des singularités d'un signal périodique f à partir de formalismes multifractals.
- Par l'intermédiaire de ses coefficients d'ondelettes

$$c_{j,k} = 2^j \int_{[0,1]} f(x)\psi_{j,k}(x)dx \ , \ j \in \mathbb{N}, k \in \{0, ..., 2^j - 1\} \, .$$

- Utilisation des espaces de Besov : mène à une perte d'information.

- Etude du spectre des singularités d'un signal périodique f à partir de formalismes multifractals.
- Par l'intermédiaire de ses coefficients d'ondelettes

$$c_{j,k} = 2^j \int_{[0,1]} f(x)\psi_{j,k}(x)dx \ , \ j \in \mathbb{N}, k \in \{0, ..., 2^j - 1\} .$$

- Utilisation des espaces de Besov : mène à une perte d'information.
- S. Jaffard introduit les espaces de type S^ν.

Soit $\vec{c}$ la suite de coefficients d'ondelettes de la fonction f. **Le profil d'ondelette** ν_f de f est défini par

$$\nu_f(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{\log \# E_j(1, \alpha + \varepsilon)(f)}{\log 2^j} \right) \right)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, où

$$E_j(C, \alpha)(f) = \left\{ k : |c_{j,k}| \geq C 2^{-\alpha j} \right\}.$$

Soit $\vec{c}$ la suite de coefficients d'ondelettes de la fonction f. **Le profil d'ondelette** ν_f de f est défini par

$$\nu_f(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{\log \# E_j(1, \alpha + \varepsilon)(f)}{\log 2^j} \right) \right)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, où

$$E_j(C, \alpha)(f) = \left\{ k : |c_{j,k}| \geq C 2^{-\alpha j} \right\}.$$

- **Interprétation** : il y a "approximativement" $2^{\nu_f(\alpha) j}$ coefficients de module plus grand que $2^{-\alpha j}$.

Soit $\vec{c}$ la suite de coefficients d'ondelettes de la fonction f. **Le profil d'ondelette** ν_f de f est défini par

$$\nu_f(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{\log \# E_j(1, \alpha + \varepsilon)(f)}{\log 2^j} \right) \right)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, où

$$E_j(C, \alpha)(f) = \left\{ k : |c_{j,k}| \geq C 2^{-\alpha j} \right\}.$$

- **Interprétation** : il y a "approximativement" $2^{\nu_f(\alpha) j}$ coefficients de module plus grand que $2^{-\alpha j}$.
- ν_f est indépendant de la base d'ondelettes choisie.

Plan

Considérons une fonction croissante $\nu : \mathbb{R} \to \{-\infty\} \cup [0,1]$ continue à droite (**profil admissible**). Définissons

$$\begin{aligned} \alpha_{min} &:= \inf \{\alpha : \nu(\alpha) \geq 0\} \\ \alpha_{max} &:= \inf \{\alpha : \nu(\alpha) = 1\} . \end{aligned}$$

On note Ω l'ensemble des suites de complexes

$$\vec{c} = (c_{j,k})_{j \in \mathbb{N}, k \in \{0,\ldots,2^j-1\}} .$$

Considérons une fonction croissante $\nu : \mathbb{R} \to \{-\infty\} \cup [0,1]$ continue à droite (**profil admissible**). Définissons

$$\begin{aligned} \alpha_{min} &:= \inf\{\alpha : \nu(\alpha) \geq 0\} \\ \alpha_{max} &:= \inf\{\alpha : \nu(\alpha) = 1\}. \end{aligned}$$

On note Ω l'ensemble des suites de complexes

$$\vec{c} = (c_{j,k})_{j \in \mathbb{N}, k \in \{0,\dots,2^j-1\}}.$$

Définition

L'espace $\mathbf{S}^\nu$ est l'ensemble des suites $\vec{c} \in \Omega$ telles que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \forall C > 0, \exists J \geq 0 : \# E_j(C,\alpha)(\vec{c}) \leq 2^{(\nu(\alpha)+\varepsilon)j}, \forall j \geq J$$

où

$$E_j(C,\alpha)(\vec{c}) = \left\{ k : |c_{j,k}| \geq C 2^{-\alpha j} \right\}.$$

Proposition

L'espace S^ν est un espace vectoriel et satisfait

$$\mathsf{S}^\nu = \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu(\alpha)\ ,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Proposition

L'espace S^ν est un espace vectoriel et satisfait

$$S^\nu = \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu(\alpha) \ , \forall \alpha \in \mathbb{R}\} \, .$$

Définition

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \{-\infty\} \cup [0, +\infty[$. Une suite $\vec{c}$ appartient à **l'espace E**(α, β) s'il existe $C, C' \geq 0$ tels que

$$\# \left\{ k : |c_{j,k}| \geq C 2^{-\alpha j} \right\} \leq C' 2^{\beta j} \ , \forall j \geq 0.$$

Proposition

L'espace S^ν est un espace vectoriel et satisfait

$$S^\nu = \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu(\alpha)\ ,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Définition

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \{-\infty\} \cup [0, +\infty[$. Une suite $\vec{c}$ appartient à **l'espace** $\mathbf{E}(\alpha, \beta)$ s'il existe $C, C' \geq 0$ tels que

$$\#\left\{k : |c_{j,k}| \geq C2^{-\alpha j}\right\} \leq C' 2^{\beta j}\ ,\ \forall j \geq 0.$$

Proposition

$\forall\ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans $\mathbb{R}$ et $\forall\ (\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}} \to 0^+$,

$$S^\nu = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} E(\alpha, \nu(\alpha) + \varepsilon) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E(\alpha_n, \nu(\alpha_n) + \varepsilon_m).$$

Définition d'une distance sur chacun des espaces $E(\alpha, \nu(\alpha) + \varepsilon)$ donne une distance d sur S^ν (topologie initiale).

Définition d'une distance sur chacun des espaces $E(\alpha, \nu(\alpha)+\varepsilon)$ donne une distance d sur S^ν (topologie initiale).

Propriété

L'espace métrique (S^ν, d) est un espace vectoriel topologique complet et séparable.

Plan

Plan

On définit

$$\underline{\partial}^+\nu(\alpha) := \liminf_{h\to 0^+} \frac{\nu(\alpha+h)-\nu(\alpha)}{h}.$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \geq \alpha_{min}$.

On définit

$$\underline{\partial}^+\nu(\alpha) := \liminf_{h\to 0^+} \frac{\nu(\alpha+h)-\nu(\alpha)}{h}.$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \geq \alpha_{min}$.

Définition

L'**indice de convexité locale** de ν est défini par

$$p_0 := \min\left(1, \inf_{\alpha_{min}\leq\alpha<\alpha_{max}} \underline{\partial}^+\nu(\alpha)\right).$$

On définit

$$\underline{\partial}^+\nu(\alpha) := \liminf_{h\to 0^+} \frac{\nu(\alpha+h)-\nu(\alpha)}{h}.$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \geq \alpha_{min}$.

Définition

L'**indice de convexité locale** de ν est défini par

$$p_0 := \min\left(1, \inf_{\alpha_{min}\leq\alpha<\alpha_{max}} \underline{\partial}^+\nu(\alpha)\right).$$

Proposition

- Si $p_0 > 0$, alors S^ν est p_0-localement convexe.
- Si S^ν est p-localement convexe, alors $p \leq p_0$.

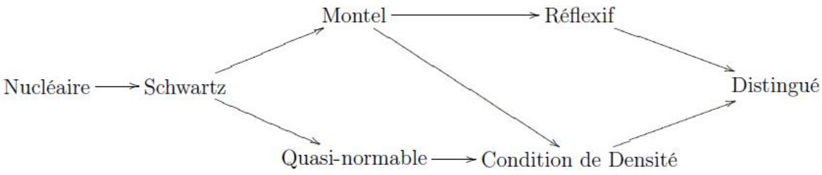
Plan

Cas $p_0 = 1$

- S^ν est un espace de Fréchet

Cas $p_0 = 1$

- S^ν est un espace de Fréchet
- Dans le cas des espaces de Fréchet :



Proposition

Si $p_0 = 1$, l'espace S^ν n'est pas nucléaire.

Proposition

Si $p_0 = 1$, l'espace S^ν n'est pas nucléaire.

Proposition

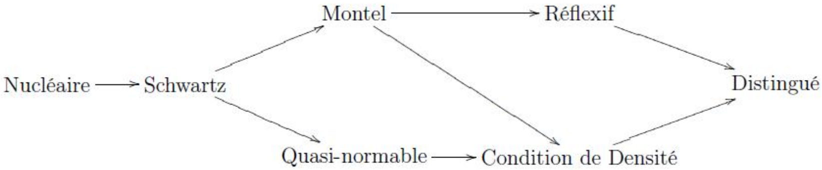
Si $p_0 = 1$, l'espace S^ν est de Schwartz.

Proposition

Si $p_0 = 1$, l'espace S^ν n'est pas nucléaire.

Proposition

Si $p_0 = 1$, l'espace S^ν est de Schwartz.

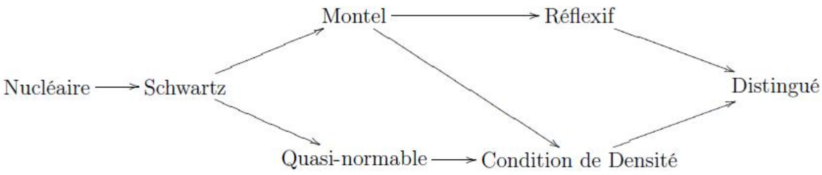


Proposition

Si $p_0 = 1$, l'espace S^ν n'est pas nucléaire.

Proposition

Si $p_0 = 1$, l'espace S^ν est de Schwartz.



Question : Cas $p_0 < 1$?

Plan

Si $u \in (\mathsf{S}^\nu)'$, alors u peut être identifié à une suite $\vec{y}$ telle que

$$u(\vec{x}) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} x_{j,k}\overline{y_{j,k}}$$

pour tout $\vec{x} \in \mathsf{S}^\nu$: Il suffit de poser $\vec{y} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} \overline{u(\vec{e}^{j,k})}\vec{e}^{j,k}$.

Si $u \in (\mathrm{S}^\nu)'$, alors u peut être identifié à une suite $\vec{y}$ telle que

$$u(\vec{x}) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} x_{j,k}\overline{y_{j,k}}$$

pour tout $\vec{x} \in \mathrm{S}^\nu$: Il suffit de poser $\vec{y} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} \overline{u(\vec{e}^{j,k})}\vec{e}^{j,k}$.

Proposition

Pour toute suite décroissante $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0, le dual topologique de S^ν est

$$(\mathrm{S}^\nu)' = \bigcup_{\varepsilon>0} S^{\nu'_\varepsilon} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} S^{\nu'_{\varepsilon_m}}$$

où $\nu'_\varepsilon(\alpha') := \nu'(\alpha' - \varepsilon)$ et où, "en gros", le graphique de ν' est obtenu par une symétrie horizontale du graphique de ν par rapport à l'axe $\beta = 2\alpha$.

- En utilisant les propriétés de ν', on obtient que les espaces $S^{\nu'_\varepsilon}$ sont des espaces de Fréchet-Schwartz.

- En utilisant les propriétés de ν', on obtient que les espaces $S^{\nu'_\varepsilon}$ sont des espaces de Fréchet-Schwartz.
- Vu la caractérisation du dual, il est naturel de le munir de la topologie de la limite inductive.

- En utilisant les propriétés de ν', on obtient que les espaces $S^{\nu'_\varepsilon}$ sont des espaces de Fréchet-Schwartz.
- Vu la caractérisation du dual, il est naturel de le munir de la topologie de la limite inductive.
- Comparaison avec la topologie forte ?

- En utilisant les propriétés de ν', on obtient que les espaces $S^{\nu'_\varepsilon}$ sont des espaces de Fréchet-Schwartz.
- Vu la caractérisation du dual, il est naturel de le munir de la topologie de la limite inductive.
- Comparaison avec la topologie forte ?

Proposition

Sur le dual, les topologies forte et de la limite inductive coïncident.

Plan

Plan

Généraliser la notion de "presque partout" au cas des espaces de dimension infinie en gardant certaines propriétés des ensembles ayant une mesure de Lebesgue nulle :

Généraliser la notion de "presque partout" au cas des espaces de dimension infinie en gardant certaines propriétés des ensembles ayant une mesure de Lebesgue nulle :

1. Un ensemble de mesure nulle est d'intérieur vide.
2. Tout sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.
3. Toute union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle.
4. Tout translaté d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.

Généraliser la notion de "presque partout" au cas des espaces de dimension infinie en gardant certaines propriétés des ensembles ayant une mesure de Lebesgue nulle :

1. Un ensemble de mesure nulle est d'intérieur vide.
2. Tout sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.
3. Toute union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle.
4. Tout translaté d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.

Proposition

Soit $B \in \mathbb{B}^n$. Alors $\mathcal{L}(B) = 0$ si et seulement si il existe une mesure de probabilité μ à support compact définie sur $\mathbb{B}^n$ telle que

$$\mu(B + x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Soit E un espace vectoriel topologique métrisable complet. On considère les mesures définies $\mathcal{B}(E)$ et non-identiquement nulles.

Soit E un espace vectoriel topologique métrisable complet. On considère les mesures définies $\mathcal{B}(E)$ et non-identiquement nulles.

Définition

Une mesure μ est **transversale** pour un ensemble borélien B si

(i) il existe un compact K de E tel que $0 < \mu(K) < +\infty$,

(ii) $\mu(B + e) = 0$ pour tout $e \in E$.

Soit E un espace vectoriel topologique métrisable complet. On considère les mesures définies $\mathcal{B}(E)$ et non-identiquement nulles.

Définition

Une mesure μ est **transversale** pour un ensemble borélien B si

(i) il existe un compact K de E tel que $0 < \mu(K) < +\infty$,

(ii) $\mu(B+e) = 0$ pour tout $e \in E$.

Définition

Un borélien $B \subset E$ est **timide** s'il existe une mesure transversale pour B. Plus généralement, un sous-ensemble de E est timide s'il est inclus dans un borélien timide. Un sous-ensemble de E est **prévalent** si son complémentaire est timide.

Proposition

- Si S est timide dans E, alors il en est de même pour tout sous-ensemble de S.
- Si S est timide dans E, alors il en est de même pour tout translaté de S.
- Tout sous-ensemble timide de E est d'intérieur vide.
- Toute union dénombrable d'ensembles timides est timide.

Proposition

- Si S est timide dans E, alors il en est de même pour tout sous-ensemble de S.
- Si S est timide dans E, alors il en est de même pour tout translaté de S.
- Tout sous-ensemble timide de E est d'intérieur vide.
- Toute union dénombrable d'ensembles timides est timide.

Proposition

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est timide si et seulement si il est inclus dans un borélien qui a une mesure de Lebesgue nulle.

Proposition

- Si S est timide dans E, alors il en est de même pour tout sous-ensemble de S.
- Si S est timide dans E, alors il en est de même pour tout translaté de S.
- Tout sous-ensemble timide de E est d'intérieur vide.
- Toute union dénombrable d'ensembles timides est timide.

Proposition

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est timide si et seulement si il est inclus dans un borélien qui a une mesure de Lebesgue nulle.

$\Rightarrow$ La notion d'ensemble timide généralise bien la notion de mesure de Lebesgue nulle au cas des espaces de dimension infinie.

Plan

- Etude des signaux irréguliers.

- Etude des signaux irréguliers.
- Pas beaucoup d'intérêt de caractériser la régularité ponctuelle.

- Etude des signaux irréguliers.
- Pas beaucoup d'intérêt de caractériser la régularité ponctuelle.
- Plus intéressant de déterminer le spectre des singularités du signal.

- Etude des signaux irréguliers.
- Pas beaucoup d'intérêt de caractériser la régularité ponctuelle.
- Plus intéressant de déterminer le spectre des singularités du signal.

Définition

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \geq 0$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localement bornée appartient à l'espace $C^\alpha(x_0)$ s'il existe $R > 0$, $C > 0$ et P un polynôme de degré strictement inférieur à α tels que

$$|f(x) - P(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

si $|x - x_0| \leq R$. L'**exposant de Hölder** de f en x_0 est alors défini par

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(x_0)\}.$$

Définition

Le **spectre des singularités** d'une fonction localement bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est défini par

$$d_f(h) = \dim_{\mathcal{H}}\{x \in \mathbb{R} \,:\, h_f(x) = h\}$$

pour tout $h \in]0, +\infty]$, où $\dim_{\mathcal{H}}$ désigne la dimension de Hausdorff.

Définition

Le **spectre des singularités** d'une fonction localement bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est défini par

$$d_f(h) = \dim_{\mathcal{H}}\{x \in \mathbb{R} \, : \, h_f(x) = h\}$$

pour tout $h \in]0, +\infty]$, où $\dim_{\mathcal{H}}$ désigne la dimension de Hausdorff.

- Formalisme multifractal : formule pour calculer numériquement le spectre des singularités d'une fonction f.

Définition

Le **spectre des singularités** d'une fonction localement bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est défini par

$$d_f(h) = \dim_{\mathcal{H}}\{x \in \mathbb{R} \ : \ h_f(x) = h\}$$

pour tout $h \in]0, +\infty]$, où $\dim_{\mathcal{H}}$ désigne la dimension de Hausdorff.

- Formalisme multifractal : formule pour calculer numériquement le spectre des singularités d'une fonction f.
- Formalisme basé sur les espaces S^ν dont la validité est justifiée par la notion de prévalence.

Les espaces de suites S^ν

Propriétés topologiques, localement convexes et de prévalence

Céline Esser, 2MM

Université de Liège

Juin 2011